

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique Et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
جامعة مصطفى اسطمبولي معسكر
Université Mustapha STAMBOULI de Mascara



Faculté des Sciences et de la Technologie
Domaine : Sciences et Technologie
Département de Génie Mécanique
Filière : Génie Mécanique

**THÈSE DE DOCTORAT EN VUE D'OBTENTION D'UN DIPLÔME DE DOCTORAT
EN SCIENCE EN GÉNIE MÉCANIQUE**

THEME

**Contrôle des vibrations non linéaires des structures
sandwiches**

Présentée par:

- **Mr : BENAOUUM Abdelhak**

Soutenue le 20/11/2023 Devant le jury composé de :

Président :	Pr. OULD CHEIKH Bahri	UMS Mascara
Directeur de thèse :	Dr. YOUZERA Elhadj	UMS Mascara
Co-Directeur de thèse :	Pr. MEFTAH Sidahmed	UDL SBA
Examineur :	Dr. DRAI Ahmed	UMS Mascara
Examineur :	Pr. BOUSAHLA Abdelmoumen Anis	UDL SBA
Examineur :	Pr. CHEIKH Abdelbaki	UIK Tiaret
Invité :	Pr. TOUNSI Abdelouahed	UDL SBA

Année universitaire :2022/2023

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier dieu tout puissant de m'avoir donné tant de volonté et de dynamisme afin d'accomplir mon travail dans les meilleures conditions possible.

Ainsi j'exprime ma gratitude la plus sincère à monsieur l'encadreur **YOUZERA Elhadj** et à monsieur le co-encadreur **MEFTAH Sidahmed** pour leurs aide précieuse.

Je remercie vivement monsieur **OULD CHEIKH Bahri** de l'honneur qu'il ma fait en acceptant de présider le jury de ce travail.

Je tiens également à remercier les membres de jury monsieur **DRAI Ahmed** et monsieur **BOUSAHLA Abdelmoumen** et monsieur **CHEIKH Abdelbaki** pour l'honneur de juger ce travail.

Je tiens finalement à remercier notre invité d'honneur monsieur **TOUNSI Abdelouahed** pour son assistance honorable.

Résumé

Dans ce travail, une modélisation mathématique des contrôles passifs de vibration d'une poutre sandwich à trois couches sous excitation dure est développée. Le modèle viscoélastique de Kelvin Voigt est considéré dans le noyau. La formulation est basée sur les théories en zigzag d'ordre supérieur où les déformations normales et de cisaillement ne sont pas prises en compte que dans le noyau viscoélastique. Le comportement dynamique de la poutre est représenté par une équation différentielle ordinaire complexe, non linéaire d'ordre supérieur. La méthode des échelles multiples est adoptée pour résoudre les relations d'amplitude de fréquence analytique dans le cas de la résonance super harmonique. Des études paramétriques sont réalisées en utilisant la théorie de la déformation du premier ordre et l'HSDT, en considérant différents paramètres géométriques et matériels.

Mots clés : poutre sandwich, vibration forcée non linéaire, théorie de zig-zag d'ordre supérieur, model viscoélastique, méthode des perturbations, méthode des échelles multiples.

Abstract

In this work, mathematical modeling of the passive vibration controls of a three-layered sandwich beam under hard excitation is developed. Kelvin-Voigt Viscoelastic model is considered in the core. The formulation is based on the higher-order zig-zag theories where the normal and shear deformations are taken into account only in the viscoelastic core. The dynamic behaviour of the beam is represented by a complex highly nonlinear ordinary differential equation. The method of multiple scales is adopted to solve the analytical frequency-amplitude relationships in the super-harmonic resonance case. Parametric studies are carried out by using HSDT and first-order deformation theory by considering different geometric and material parameters.

Keywords : sandwich beams; forced nonlinear vibration; Higher-order zig-zag theories; viscoelastic model; perturbation method; multiple scale method.

ملخص

في هذا العمل، تم تطوير نمذجة رياضية لضوابط الاهتزاز السلبي للحزم ساندويتش ثلاثية الطبقات تحت الإثارة الصلبة. يعتبر نموذج كلفن فويجت اللزج المرن في القلب. تعتمد الصيغة على نظريات متعرجة ذات ترتيب أعلى حيث يتم أخذ التشوهات الأفقية وتشوهات القص بعين الاعتبار فقط في القلب اللزج المرن. يتم تمثيل السلوك الديناميكي للحزمة بمعادلة تفاضلية عادية معقدة وغير خطية ذات رتبة أعلى. تم اعتماد طريقة المقياس المتعدد لحل علاقات سعة التردد التحليلية في حالة الرنين فوق التوافقي. تم إجراء الدراسات البارامترية باستخدام نظرية التشوه من الدرجة الأولى و HSDT، مع الأخذ في الاعتبار المعلمات الهندسية والمادية المختلفة.

الكلمات المفتاحية: الحزم الساندويتش، الاهتزاز القسري غير الخطي، نظرية التعرج العالي الرتبة، نموذج اللزوجة المرنة، طريقة الاضطراب، طريقة المقياس المتعدد.

Liste des notations

σ_{ij}	Composante de contrainte
Q_{ijkl} et C_{ijkl}	les modules de rigidité et d'amortissement du matériau orthotrope
(E, G, et ν)	Trois paramètres de rigidité
η	des facteurs de perte d'amortissement
ω_1	la fréquence linéaire
ε_{ij}	Composante de déformation
H_f et H_c	Les faces et l'épaisseur de la couche centrale sont respectivement
L	la longueur de la poutre
H_t	l'épaisseur totale de la poutre
$w(x,t)$	le déplacement transversal
$f(z)$	une fonction de cisaillement
$u_i(x,z,t)$	le déplacement longitudinal le long de l'épaisseur de la couche i ($i=1,\dots,3$)
$u_i^0(x, t)$	le déplacement axial de la couche médiane plane ($i=1,\dots,3$)
$\beta(x,t)$	mesure la rotation autour de l'axe z
δP_{ext}	le travail virtuel donné par la charge externe uniformément répartie
$q(t)$, et δP_{acc}	représente le résultat du travail virtuel mis dans le système sous forme d'accélération
N_T et T	les efforts internes
M_β , M_w	moment de torsion et moment de flexion
S_f et S_c	les aires de section transversale
I_f et I_c	les moments quadratiques des faces et des couches centrales
$r(t)$	l'amplitude dépendante du temps associée au premier mode propre naturel
T_0	appelée l'échelle de temps rapide associée à l'oscillation relativement rapide
ε	un paramètre comptable
cc	le conjugué complexe
$A(T_1)$	une fonction complexe inconnue
(A')	désigne la différentiation par rapport à T_1 et $u=d_4/2$
a	l'amplitude
ψ	la phase
S_f et S_c	les aires de section transversale

I_f et I_c les moments quadratiques des faces et des couches centrales, respectivement
(A') désigne la différentiation par rapport à T_1 et $u=d_4/2$
 ρ et S Sont respectivement la masse volumique et la surface d'intégration de la couche

Liste des tableaux	page
Chapitre I	
Tableau I.1 Température d'utilisation des composites de différents matrices.....	08
Tableau I.2 composition chimique des verres de type D, E, R et S.....	16
Tableau I.3 propriétés mécaniques et physiques des fibres de verre (filaments vierges).....	17
Tableau I.4 propriétés mécaniques et physiques des fibres de carbone.....	23
Tableau I.5 propriétés mécaniques et physiques des fibres de kevlar ^R	25
Tableau I.6 propriétés principales des polyesters insaturés.....	30
Tableau I.7 propriétés principales des résines phénoliques.....	31
Tableau I.8 propriétés principales des résines époxydes.....	33
Tableau I.9 propriétés principales du polypropylène et polyamide.....	34
Tableau I.10 caractéristiques à température ambiante de quelques types de matériaux composites.....	38
Chapitre III	
Tableau III.1. Le modèle cinématique considéré dans cette étude.....	65
Tableau III.2 Matériaux et paramètres géométriques.....	66

Liste des figures	Page
Chapitre I	
Figure I.1 composants de base d'un composites.....	05
Figure I.2 Chaîne et trame d'un tissu.....	11
Figure I.3 Armure toile ou taffetas.....	11
Figure I.4 Armure satin (ici satin de 8).....	12
Figure I.5 Armure sergé.....	12
Figure I.6 Armure non entrecroisée.....	12
Figure I.7 Armure unidirectionnelle.....	13
Figure I.8 tissage cylindrique et conique.....	13
Figure I.9 structure en anneaux de la Cristobalite (association des Tétraèdres en anneaux)..	15
Figure I.10 esquisse à deux dimensions de la silice amorphe. Par souci de clarté, on n'a représenté que trois des quatre oxygènes associés au silicium.....	15
Figure I.11 structure en anneaux de la cristobite modèle proposé par zachariasen.....	15
Figure I.12 courbe de traction de différentes fibres de renfort.....	16
Figure I.13 structure cristallographique.....	19
Figure I.14 pelote de polymère non orienté.....	19
Figure I.15 fibre étirée (orientée).....	19
Figure I.16 cyclisation de la fibre PAN étirée par formation d'une liaison C_N.....	19
Figure I.17 élaboration des fibres de carbone.....	20
Figure I.18 oxydation des fibres PAN.....	20
Figure I.19 carbonisation des fibres PAN (a) chaînes moléculaires réticulées ;(b) fibres de carbone.....	21
Figure I.20 coupe transversale de la fibre de carbone basée sur des observation demicroscopie électronique et rayons X	21
Figure I.21 motifs structuraux caractéristiques des polyamides aromatiques.....	23
Figure I.22 synthèse de poly(p-phénylène téréphtalamide).....	24
Figure I.23 Structure chimique en feuillage des polyamides aromatiques.....	24
Chapitre II	
Figure II.1 Monocouche.....	40
Figure II.2 Stratifié.....	40
Figure II.3 Sandwich.....	41
Figure II.4 Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique....	49
Figure II.5 Champ de déplacements des Modèles zig-zag, approche cinématique.....	49

Figure II.6 Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre.....50

Chapitre III

Figure III.1 Une poutre sandwich avec noyau viscoélastique.....59

Figure III.2 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire pour différentes valeurs de h_c/h_f lorsque ω est proche de $\omega_1/3$ selon différents modèles cinématiques.....70

Figure III.3 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire pour diverses valeurs de h_c/h_f lorsque ω est proche de $\omega_1/3$ avec diverses valeurs de module de Young de la couche centrale viscoélastique.....72

Figure III.4 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire avec le modèle de Touratier lorsque ω est proche de $\omega_1/3$ pour différentes amplitudes d'excitation Q72

Figure III.5 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire avec le modèle de Touratier pour différentes valeurs de L/H_t lorsque ω est proche de $\omega_1/3$74

Sommaire

Introduction générale	01
Chapitre I : Matériaux composites	
I.1 introduction	05
I.2 définitions	06
I.3 le système composite	07
I.4-Classification des matériaux composites	07
I.4.1-Classification suivant la forme des constituants	07
I.4.1.1-Composites à fibres	08
I.4.1.2-Composites à particules	08
I.4.2-Classification suivant la nature des constituants	08
I.4.2.1-Composites à matrice organique	08
I.4.2.2-Composites à matrice métallique	09
I.4.2.3-Composites à matrice minérale	09
I.4.3-Classification suivant le taux de renforcement	09
I.4.3.1-composites de grande diffusion (GD)	09
I.4.3.2-Composites de hautes performances (HP)	09
I.5-Les renforts	10
I.5.1-Introduction	10
I.5.2-Formes de renforts	11
I.5.2.1-Formes linéique	11
I.5.2.2-Forme surfaciques	11
I.5.2.2.1-Les mats	11
I.5.2.2.2-Les tissus et rubans	12
I.5.2.3-Formes volumiques	14
I.5.3-Nature des principaux renforts	15
I.5.3.1-Introduction	15
I.5.3.2-Les Fibres de verre	15
I.5.3.2.1-Généralités	15
I.5.3.2.2-Elaboration des fibres de verre	15
I.5.3.2.3-Propriétés principales	17
I.5.3.3-Les fibres de carbone	19
I.5.3.3.1-Généralités	19

I.5.3.3.2-Elaboration à partir de la fibre de polyacrylonitrile (PNA)	20
I.5.3.3.3-Elaboration à partir du brai	23
I.5.3.3.4-Propriétés principales	23
I.5.3.4-Les fibres de polyamides aromatiques (kevlarR)	24
I.5.3.4.1-Généralité	24
I.5.3.4.2-Synthèse des fibres de kevlarR	25
I.5.3.4.3-Propriétés principales	26
I.6-Les Charges	26
I.6.1-Charges renforçantes	26
I.6.1.1-Charges sphériques	26
I.6.1.1.1-Microbilles de verre creuses	26
I.6.1.2-Charges non sphériques	27
I.6.2-Charges non renforçantes	27
I.6.2.1-Charges de faible coût	27
I.6.2.2-Charges ignifugeantes	28
I.6.2.3-Charges conductrices	28
I.7-Les additifs	28
I.7.1-Lubrifiants et agents de démoulage	29
I.7.2-Colorants et pigments	29
I.7.3-Agents anti-retrait	29
I.7.4-Agents anti-ultraviolets	29
I.8-Les matrices polymères	29
I.8.1-Introduction	29
I.8.2-Les résines thermodurcissables	30
I.8.2.1-Les résines polyesters insaturées	30
I.8.2.2-Les résines de condensation	32
I.8.2.2.1-Les résines phénoliques	32
I.8.2.2.2-Les résines aminoplastes	33
I.8.2.2.2.3-Les résines furaniques	33
I.8.2.3-Les résines époxydes	33
I.8.3-Les résines thermoplastiques	34
I.9 Les avantage des composites	35
I.10 Comportement mécanique	35
I.10.1 L'amortissement dans les composites	36
I.10.2 L'effet de l'orientation des fibres sur la déformation	36
I.11 Comportements viscoélastique des composites	37

I.12 Conclusion.....	38
Chapitre II :Théories des structures composites	
II.1 Introduction.....	40
II.2 Les matériaux composites structuraux	40
II.2.1 Monocouches.....	40
II.2.2 Stratifié	41
II.2.3 Sandwichs.....	42
II.3 Non linéarités dans les structures minces.....	42
II.4 Quelques Méthode de résolution du problème de la réponse forcée de structures minces en non linéaire géométrique.....	44
II.4.1 Méthode de l'equilibrage harmonique.....	44
II.4.2 Autre méthode « Méthode Asymptotique Numérique (MAN) ».....	45
II.5 Modèles de structures multicouches (stratifiées).....	45
II.5.1 Modèles classiques.....	45
II.5.1.1 Première hypothèse fondamentale de la théorie des poutres.....	45
II.5.1.1.1 Principe de Saint venant.....	45
II.5.1.2 Deuxième hypothèse fondamentale de la théorie des poutres.....	46
II.5.1.2.1 Principe de Navier Bernoulli généralisé.....	46
II.5.2 Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT).....	46
II.5.3 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT.....	47
II.5.3 Modèle d'ordre élevé.....	48
II.5.3.1 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT).....	48
II.6 Approche par couche.....	50
II.7 Les modèles zig-zag.....	50
II.8 Modèle cinématique et lois de comportement.....	51
II.9 Champ des déformations et des contraintes.....	53
II.10 Conclusion.....	58
Chapitre III : Etude analytique	
III.1.Introduction.....	59
III.2. Modèle viscoélastique pour matériau a noyau adhésif.....	59
III.3. Formulation.....	60
III.3.1 Cinématique.....	60
III.3.2 Equations du mouvement en termes de déplacements pour problème de vibrations forcées.....	63
III.3.3 La transformation modale.....	67
III.4. Méthode de résolution utilisant la méthode de perturbation.....	67

III.4.1 Cas non résonant.....	69
III.4.2 Super harmonique $\omega=1/3\omega_1$	70
III.5. Résultats numériques.....	73
III.6.Conclusion.....	77
Conclusion générale.....	78

Introduction générale :

Les structures de sandwich sont de plus en plus utilisées ces derniers temps comme composants structuraux d'éléments porteurs légers, qui peuvent comprendre principalement, une faible densité, une rigidité élevée, une résistance chimique et un amortissement élevé. Ce matériau composite suscite également beaucoup d'intérêt dans l'industrie de la construction et commence maintenant à être utilisé pour des projets de génie civil tels que des bâtiments industriels, des ponts véhiculaires, des centrales solaires, des structures de réacteurs nucléaires et des structures pétrochimiques (Kolahchi 2017, Kolahchi et al 2017a, b). De nombreuses recherches intéressantes se sont concentrées sur le comportement statique et dynamique des structures sandwich, et par conséquent, diverses théories ont été proposées dans ce dernier.

Sandwiches et poutres composites laminées ont été analysés au moyen de différentes théories. La première était connue sous le nom de la théorie classique CPT (Emam et Nayfeh 2009, Belouettar et al. 2008). Cette théorie est basée sur l'hypothèse selon laquelle, la normale transversal et les contraintes de cisaillement sont négligées toutes les deux. Cela conduit à des résultats erronés des fréquences propres et des charges de flambement des poutres laminées. Il convient de noter que cette théorie est plus adaptée à une seule couche et devient peu fiable pour les poutres composites stratifiées. Pour contourner cette contrainte du CPT, une théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été suggérée pour prendre en compte la déformation par cisaillement transverse (Reissner 1945, Timoshenko 1922, Pagano 1969), dans laquelle la déformation par cisaillement transverse est maintenue constante avec l'épaisseur de la couche. Il s'ensuit que les conditions d'équilibre aux faces inférieure et supérieure de la poutre ne sont pas vérifiées. Ainsi, des facteurs de correction de cisaillement étaient nécessaires pour corriger la variation irréaliste du cisaillement/contrainte avec l'épaisseur.

Afin d'inclure les effets de déformation de cisaillement et de dépasser la limitation du FSDT, plusieurs théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) polynômial (Reddy 1984), et non polynômial (Touratier 1991, Afaq et al. 2003, Abualnour et al. 2018, Houari et al. 2018, Abualnour et al. 2019, Rabhi et al. 2020, Daikh et al. 2020a, Daikh et al. 2021) sont développées, en se basant sur une variation non linéaire à travers l'épaisseur des déplacements dans le plan. Les HSDT ont été largement utilisés avec succès pour concevoir les composants structurels multicouches. Cependant, ces théories sont incapables de satisfaire les conditions de continuité des contraintes de cisaillement transverses dans le sens de l'épaisseur des structures multicouches.

Pour surmonter les inconvénients des HSDT, les théories en zigzag ont été recommandées pour ces structures (Kapuria et al. 2004, Youzera et al. 2012, Sahoo et al. 2014). Dans ces théories, un modèle cinématique est décrit séparément pour chaque couche de poutre sandwich. Ceci permet de satisfaire la condition de compatibilité aux interfaces des couches et par conséquent d'après cette description cinématique, les variations erronées dues à la déformation par cisaillement dans la couche centrale ont tendance à disparaître. Ces théories ont prouvé leur efficacité pour la prédiction satisfaisante des résultats d'analyse dynamique et de flambage des structures multicouches.

Pour obtenir un contrôle efficace de la résonance amplitudes induites par les vibrations dans les trois couches des structures sandwich, afin d'atteindre un niveau satisfaisant de prolongation de la durée de vie de telles structures sous charge et impact périodique, où de nombreux types de recherche intéressants ont été proposés pour ce sujet. Ainsi, certains des meilleurs travaux sur les vibrations linéaires et l'amortissement des poutres sandwichs sont réalisés par Gibson et Plunkett (1977). Depuis lors, diverses études analysant le comportement dynamique de structures sandwich à amortissement de couches simple et multiple ont été entreprises. Dans ce contexte, en présence de matière viscoélastique, un aperçu détaillé sur la littérature disponible relative au comportement vibratoire peut être trouvé (Heng et al. 2008, Rao et al. 1978, Rickards 1993, Bhoomaraddi 1995). Dans ces travaux, un module complexe, qui consiste en une partie réelle représentant la raideur élastique, et une partie imaginaire associée à la dissipation, a été utilisé pour modéliser le comportement dynamique des viscoélastiques Matériel.

Basé sur la méthode à multi-mode Galerkin et la méthode d'équilibre harmonique simple, Kovac et al. (1971), Hyer et al. (1976) ont étudié les réponses non linéaires aux vibrations forcées des poutres sandwich. Bilassé et al. (2010) ont utilisé la solution basée sur les éléments finis pour prédire la vibration linéaire et non linéaire des poutres sandwich viscoélastiques avec les lois viscoélastiques dépendant de la fréquence diverses. Récemment, des intérêts considérables ont été consacrés aux travaux théoriques sur les comportements mécaniques et dynamiques des poutres composites avancées viscoélastiques dans le cadre de divers matériaux viscoélastiques et de diverses théories de déformation par cisaillement (Demir 2016, Demir 2017, Allahkarami et al. 2017, Cheraghbak et al. 2019). Utilisation de la technique de l'équilibre harmonique et de la procédure Galerkin. Youzera et al. (2017a) ont développé une bonne théorie pour une prédiction plus efficace du comportement vibratoire non linéaire des poutres composites stratifiées en utilisant une théorie du zig-zag d'ordre

supérieur. Moita et al. (2011) ont développé un nouveau modèle d'éléments finis simple pour l'analyse des vibrations active-passive des structures sandwich. Dans leurs travaux, ils considèrent la poutre composée de cinq couches, constituées d'un cœur viscoélastique prise en sandwich entre deux couches élastiques, délimitées à leur tour par des faces piézoélectriques. Youzera et al. (2017b) ont présenté une étude consacrée au problème de vibration non linéaire des poutres composites stratifiées en considérant divers modèles de fonction de cisaillement. Dans cette étude, la méthode des échelles multiples est utilisée pour effectuer des relations d'amplitude des fréquences analytiques pour la résonance super harmonique.

Le but du présent travail est d'analyser les vibrations non linéaires forcées de la résonance super harmonique des poutres sandwich sous excitations dures. Pour cet objectif, la méthode des échelles multiples est employée, sachant qu'elle est considérée comme une solution analytique capable de fournir des solutions transitoires ainsi que des solutions en régime permanent, contrairement à certaines autres techniques qui ne donnent que la solution en régime permanent. L'effet de géométrie non linéaire induit par les contraintes axiales est modélisé par des théories de zigzag d'ordre supérieur, qui intègrent différentes fonctions de cisaillement, pour une description plus fiable de la déformation de cisaillement dans le noyau viscoélastique. La résolution de l'équation amplitude-fréquence permet de décrire les relations amplitude-fréquence et de tracer les courbes dites de résonance. Ces derniers sont pris en compte dans l'étude paramétrique pour différents types de poutres sandwich à trois couches comprenant différentes propriétés géométriques et matérielles.

Le présent travail de thèse s'articule autour deux aspects essentiels qui reflètent toute notre démarche, à savoir les aspects :

- Théorique
- Analytique

L'aspect théorique comprend deux chapitres :

Dans le premier chapitre : des généralités sur les matériaux composites ainsi que leurs domaines d'utilisation.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation des matériaux sandwichs tous en définissant leur concept et leurs caractéristiques puis nous définissons les lois et les théories qui régissent ces structures composites.

L'aspect Analytique en son rôle est scindé en troisième chapitre :

Au troisième chapitre, une analyse des vibrations non linéaires forcées de la résonance super harmonique des poutres sandwich sous excitations dures. Pour cet objectif, la méthode des échelles multiples est employée, sachant qu'elle est considérée comme une solution analytique capable de fournir des solutions transitoires ainsi que des solutions en régime permanent, contrairement à certaines autres techniques qui ne donnent que la solution en régime permanent. L'effet de géométrie non linéaire induit par les contraintes axiales est modélisé par des théories de zigzag d'ordre supérieur, qui intègrent différentes fonctions de cisaillement, pour une description plus fiable de la déformation de cisaillement dans le noyau viscoélastique. La résolution de l'équation amplitude-fréquence permet de décrire les relations amplitude-fréquence et de tracer les courbes dites de résonance. Ces derniers sont pris en compte dans l'étude paramétrique pour différents types de poutres sandwich à trois couches comprenant différentes propriétés géométriques et matérielles.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de cette théorie dans la résolution du comportement de vibration non linéaire des poutres sandwich.

I.1-Introduction

La technologie moderne a besoin de matériaux qui allient à la fois rigidité, résistance mécanique, ténacité élevée et une grande légèreté. Aucun matériau simple ne permet de combiner ces caractéristiques physiques, et pour y répondre, les matériaux composites deviennent indispensables.

Un matériau composite comme l'indique le terme évoque un matériau différent de ceux, macroscopiquement, homogène habituels, il résulte d'une matrice continue renforcée par des fibres continue ou non dites renfort, ces fibres résistants sont noyés dans la dite matrice qui les maintient en place et assure la cohésion de l'ensemble.

Les propriétés mécaniques des composites fibreux dépendent de la qualité, de la dimension et surtout de l'orientation des fibres. Nous n'aborderons ici que l'étude des composites à matrice organique qui sont, actuellement les plus utilisés.

Ces matériaux existent en réalité depuis des millénaires, lorsque les artisans de l'Égypte ancienne augmentaient déjà les propriétés mécanique des briques par une adjonction de paille courte à l'argile fraîche, ou bien les Mongols qui concevaient des arcs dans lesquels les parties comprimées étaient en corne, et les parties tendues en bois, soies collées et tendons de bœuf, sans oublier ceux qui sont naturels comme le bois (fibre de cellulose dans une matrice de lignine) et l'os (mélange complexe de collagène et de phosphate de calcium) qui existaient, évidemment, depuis des ères lointaines.

Dans ce contexte, les matériaux composites à base de fibres jouent un rôle de plus en plus importants dans les techniques avancées notamment dans les années quatre vingt environ. Cette importance techniques qui ne cesse de croître durant la dernière décennie les a permis de révolutionner certains domaines tels ceux liés au transport maritime, aérien, spatial, filaire, bâtiment et travaux publics, et à la réparation et renforcement de structures.

I.2-DEFINITIONS

Renfort : il constitue l'armature, ou l'ossature du composite, il assure la tenue mécanique, la résistance à la rigidité. Il est souvent de nature filamentaire (fibre minérale ou organique).

Matrice: elle lie les fibres renforts, répartit les efforts, résistances à la réflexion ou à la compression, et assure la protection chimique, en donnant de plus la forme du produit réalisé. Elle est pratiquement un polymère ou résine organique.

En fin, outre ces deux constituants de base, on trouve également :

Interface: il assure la comptabilité renfort-matrice, transmettant les contraintes de l'un sur l'autre sans déplacement relatif (bonne adhérence en couche fine de l'ordre du micron).

Charge: elles apportent au composite des propriétés particulières ou complémentaires et permettent l'abaissement du prix de revient. Contrairement aux renforts, les charges ne sont pas filamenteuses mais elles se présentent sous forme de particules.

Additifs spécifique: ils sont des catalyseurs, ils accélèrent la polymérisation et ils sont aussi des agents tixotropiques.

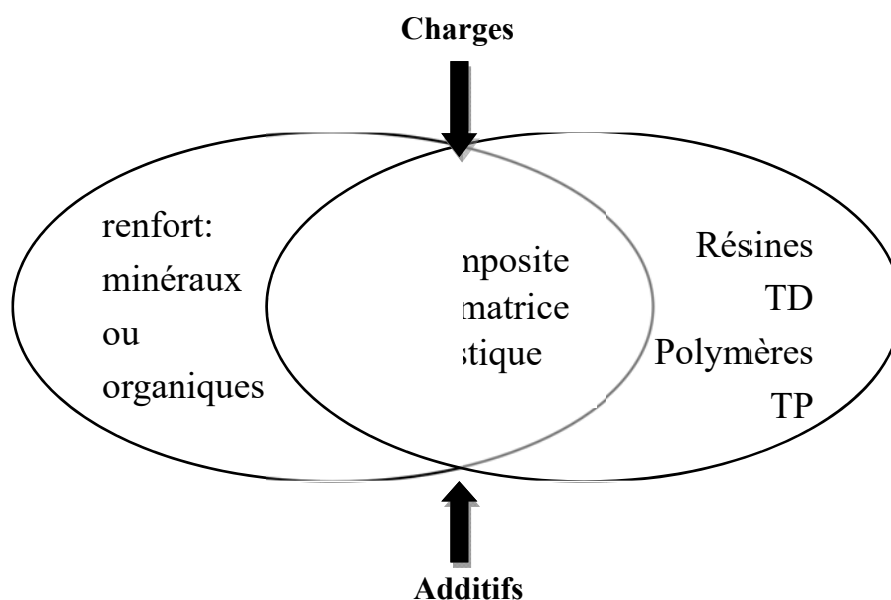


Figure I.1 composants de base d'un composite [46]

I.3-Le système composite

A l'opposé des matériaux techniques traditionnels, le composite doit, au niveau de ses propriétés, s'adapter aux exigences de conception, alors que la conception découle, habituellement, des propriétés des matériaux constitutifs.

On réalise, en quelque sorte, en une même fois le matériau et le produit, d'où un concept nouveau qui justifie en plus son importance dans la technologie.

Cette construction de structures qui s'effectue selon le besoin aboutit à un système qui inclut :

- ⇒ La nature, la texture et la forme du renfort.
- ⇒ Le taux de renforcement.
- ⇒ La nature de la résine et des charges ou additifs.
- ⇒ La qualité de l'interface renfort-matrice.
- ⇒ Le procédé de mise en œuvre utilisé.

En particulier, le couple constituants /procédé est indissociable, car les propriétés de la structure à réaliser en dépendent étroitement, et celles-ci ne seront identifiées qu'au stade du produit fini élaboré.

Le but recherché est donc d'orienter au mieux les renforts en fonction des efforts ou contraintes auxquels la structure est soumise, c'est-à-dire de placer seulement le coût aux niveaux les plus sollicités et non partout ailleurs, comme on le fait souvent avec des matériaux homogènes, on réalise en quelque sorte une anisotropie appropriée contrôlée [46].

I.4-Classification des matériaux composites

Les composites peuvent être classés suivant la forme, la nature des composants ou bien suivant le taux de renforcement [9].

I.4.1-Classification suivant la forme des constituants

En fonction de la forme des constituants, les matériaux composites sont classées en deux grandes classes :

Les matériaux composites à particules et les matériaux composites à fibres.

I.4.1.1-Composites à fibres

Les fibres les plus utilisés se présentent soit sous forme de fibres continues, soit de fibres discontinues: fibres coupées et fibres courtes. L'arrangement des fibres, leur orientation, permettant de caractériser les propriétés mécanique des composites, pour obtenir des matériaux allant de matériaux fortement anisotropes à ceux isotropes à volonté suivant le cahier des charges imposées.

I.4.1.2-Composites à particules

Ce sont des particules, contrairement aux fibres, n'ayant pas de dimensions privilégiées généralement pour améliorer certaines propriétés des matériaux ou des matrices, comme la rigidité, la tenue à la température, la résistance à l'abrasion, la diminution du retrait, etc. dans de nombreux cas, les particules sont simplement utilisées comme charges pour réduire le cout du matériau, sans en diminuer les caractéristiques.

Le choix de l'association matrice-particule dépend des propriétés souhaitées.par exemple, des inclusions de plomb dans des alliages de cuivre augmenteront leur facilité d'usinage. Egalement, des particules d'élastomères peuvent être incorporées dans des matrices polymères fragiles, de manière à améliorer leurs propriétés à la rupture et au choc par diminution de la sensibilité à la fissuration.

I.4.2-Classification suivant la nature des constituants

Selon la nature de la matrice, les matériaux composites sont classés suivant composites à matrices organiques, à matrices métalliques ou à matrices minérales.

Divers renforts sont associés à ces matrices. Seuls certains couples d'associations ont actuellement un usage industriel, d'autres

Font l'objet d'un développement dans les laboratoires de recherche. Parmi ces couples, on cite:

I.4.2.1-Composites à matrice organique (résine, charges) avec:

- Des fibres minérales: verre, carbone, etc.
- Des fibres organiques: kevlar, polyamides, etc.
- Des fibres métalliques: bore, aluminium, etc.

I.4.2.2-Composites à matrice métallique (alliages légers et ultra-légers d'aluminium, de magnésium, de titane) avec:

- Des fibres minérales: carbone, carbure de silicium (SiC).
- Des fibres métalliques : bore.
- Des fibres métallo-minérales: fibres de bore revêtues de carbure de silicium (BorSiC).

I.4.2.3-Composites à matrice minérale (céramique) avec:

- Des fibres métalliques: bore.
 - Des particules métalliques: cermets.
 - Des particules minérales: carbures, nitrures, etc.

Les matériaux composites à matrice organique ne peuvent être utilisés que dans des domaines de températures appropriées comme l'illustre le tableau suivant:

Tableau I.1 Température d'utilisation des composites de différents matrices [46]

Matériau	Température d'utilisation
Composite à matrice organique	200 à 300°C
Composite à matrice métallique ou minérale	Jusqu'à 600°C
Composite à matrice céramique	Jusqu'à 1000°C

I.4.3-Classification suivant le taux de renforcement

En fonction du taux de renforcement dans la matrice, les matériaux composites sont classés en deux types:

I.4.3.1-composites de grande diffusion (GD)

Ils sont les plus répandus, ils proviennent essentiellement du couple fibre de verre E/résine polyester ou verre E/ Technopolymères, avec un taux de renforcement voisin de 30% (en masse). Ils présentent actuellement les plus gros volumes d'emploi avec un bon compromis performances/cout voisin des matériaux. [9].

I.4.3.2-Composites de hautes performances (HP)

Encore peu développés, issus des associations de fibres longues de verre R, carbone, ou aramide avec des résines époxydes, et des taux élevés de renfort supérieurs à 50%. Leurs

propriétés mécanique, en particulier la résistance mécanique, sont nettement supérieurs à celles des matériaux conventionnels, aux dépens toutefois d'un coût élevé. L'emploi de composites HP permet de retenir des faibles coefficients de sécurité (par exemple, de l'ordre de 1.5 et moins pour des structures aéronautiques et spatiales) puisqu'on limite l'empirisme, alors que ceux utilisés pour des structures en composites GD sont beaucoup plus importants (6 et plus pour des cuves ou des bateaux) [9].

I.5-Les renforts

I.5.1-Introduction

Les renforts sont des solides à très haute résistance mécanique incorporés dans un matériau (matrice) traditionnel tels que les métaux, alliages, céramiques et polymères.

Ils diffèrent des charges qui apportent à la matrice une ou plus de propriétés spécifiques, par exemple, meilleure tenue à la température voire abaissement du coût, alors que les renforts contribuent uniquement à améliorer ses propriétés mécaniques face à des contraintes agissantes. Pour cela, on utilise des renforts souvent sous forme de filaments comme il a été indiqué avant.

Ces filaments, de diamètre compris entre 5 et 15 microns environ, peuvent conférer au composite des caractéristiques mécaniques très intéressantes telles que rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc, qui dépend réciproquement des caractéristiques des fibres, notamment, celles recherchées comme propriétés mécaniques élevées, à titre d'exemple: titre faible, bonne compatibilité avec les résines, facilité de mise en œuvre, et faible coût, etc.

En fonction des utilisations, les renforts peuvent être d'origines diverses: végétale, minérale, artificielle, synthétique, etc, et en fraction volumique du matériau composite, généralement comprise entre 0.3 et 0.7 [9].

En générale, dans une structure composite (anisotrope), les fibres travaillent bien en traction mais en comparaison sont moins bonnes et la résistance au cisaillement demeure faible, toutefois, les renforts fibreux se présentent sous diverses natures et formes commerciales comme suit.

I.5.2-Formes de renforts

I.5.2.1-Formes linéique

Les fibres sont élaborées suivant un diamètre de quelques micromètres (une dizaine environ), et ne peuvent par conséquent être utilisées sous forme unitaire. Pour leur utilisation pratique, ces fibres sont réunies en fils ou en mèches de différentes formes.

La fibre unitaire est généralement appelée filament élémentaire ou monofilament. Les fils formés, ainsi, peuvent être continus ou discontinus, et ils se caractérisent par leur masse linéique ou simplement titre, qui dépend du diamètre et du nombre de monofilament, l'unité de la masse linéique est le tex, masse d'un fil de longueur égale à mille mètres, soit :

$$\text{Tex}=1 \text{ gr/km}$$

En fait, on devrait plutôt écrire :

$$1\text{tex} = 10^{-6} \text{ kg/m}$$

Conformément au système SI d'unités [9].

I.5.2.2-Forme surfaciques

En servant des fils élaborés au préalable, on peut réaliser des formes surfaciques de divers types: mats, tissus, ou rubans, essentiellement développés dans le cas de fibres de verre.

I.5.2.2.1-Les mats

Les mats sont des nappes de fils continus, disposés dans un plan sans aucune orientation préférentielle. Ils sont maintenus ensemble par un liant soluble ou non dans les résines, suivant la mise en œuvre. L'absence d'orientation préférentielle des fibres aboutit à une isotropie des propriétés mécaniques du mat dans son plan.

La différence entre les mats à fils coupés et les mats à fils continus réside essentiellement au niveau de leur propriété de déformabilité. Les premiers sont peu déformables alors que les seconds permettent d'obtenir des emboutis profonds par allongement régulier du mat dans toutes les directions. Une des principales applications des mats à fils continus est le moulage à coquille (moule et contre moule) de pièces pouvant avoir des formes complexes par compression, injection, ou moulage sous vide.

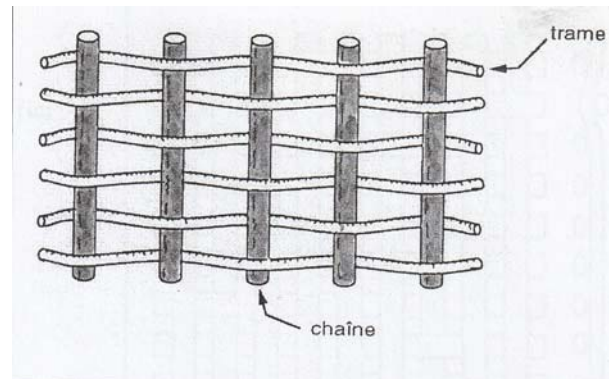
I.5.2.2.2-Les tissus et rubans

Un tissu ou ruban est un ensemble surfacique de fils, de mèches, ect, il est constitué :

- ✓ **D'une chaîne**, ensemble de fils parallèles repartis dans un plan suivant la longueur du tissu (voir figure I.2).
- ✓ **D'une trame**, ensemble de fils s'encroisant avec ceux de la chaîne (voir figure I.2).

Figure I.2 Chaîne et trame d'un tissu

[46]



Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés et par le mode d'encroisement (armure) des fils de la chaîne et ceux de la trame.

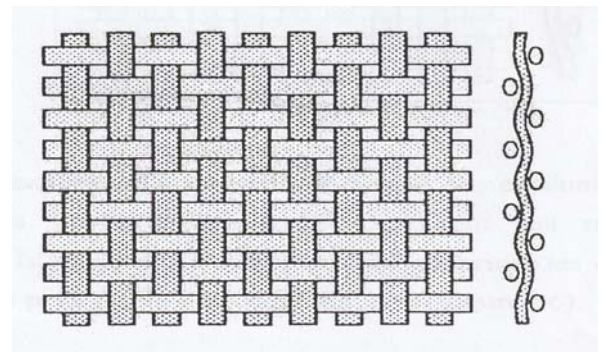
Les armures utilisées les plus répandues peuvent être sous forme de: toile ou taffetas, satin, sergé, armure haute module, ou armure unidirectionnelle.

✓ **Toile et taffetas**

Les fils de la chaîne et de la trame s'encroisent alternativement, conduisant à des tissus très plats, stables, mais peu déformables, cette armure confère au tissu des propriétés mécaniques sensiblement identiques dans les deux directions chaîne et trame, pour des fils de tissage identiques, (voir figure I.3).

Figure I.3 Armure toile ou taffetas

[46]

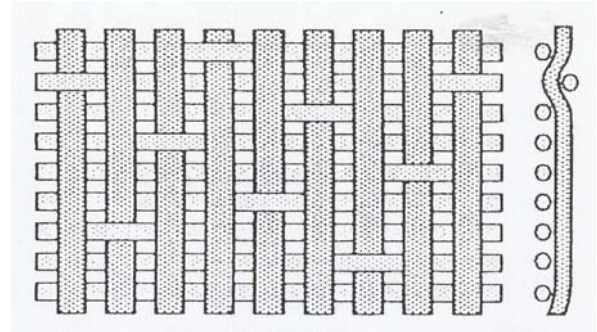


✓ **Satin**

Le fil de la trame n'entrecroise pas tous les fils de la chaîne. Chaque satin est défini par un chiffre, généralement 4 ou 8, indiquant que le fil de trame n'entrecroise qu'un fil de chaîne sur 4 ou 8. le fil de trame passe sous les autres fils de chaîne (voir figure I.4)

Figure I.4 Armure satin (ici satin de 8)

[46]

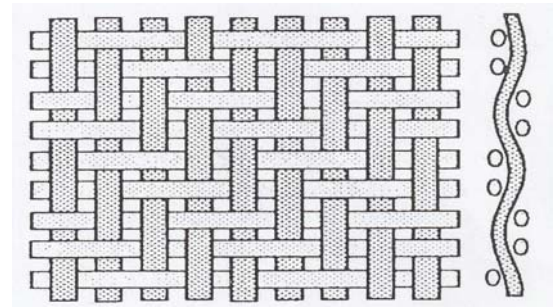
✓ **Sergé**

Le sergé est assez proche du satin, le fil de trame n'entrecroise qu'un fil de chaîne sur 3,4 ou 5 et passant sur les autres fils de chaîne. Ce tissu offre l'avantage

d'être à la fois souple et dense (voir figure I.5).

Figure I.5 Armure sergé

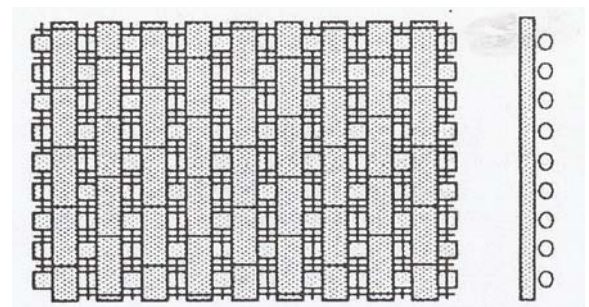
[46]

✓ **Tissu haute module**

Deux nappes de fils sont superposées sans encroisement des fils et réunies par une chaîne et une trame de fils fin, n'intervenant pratiquement pas sur les performances mécaniques du tissu. L'absence d'entrecroisement supprime les efforts de cisaillement et donne un tissu très performant mais couteux (voir figure I.6).

Figure I.6 Armure non entrecroisée

[46]

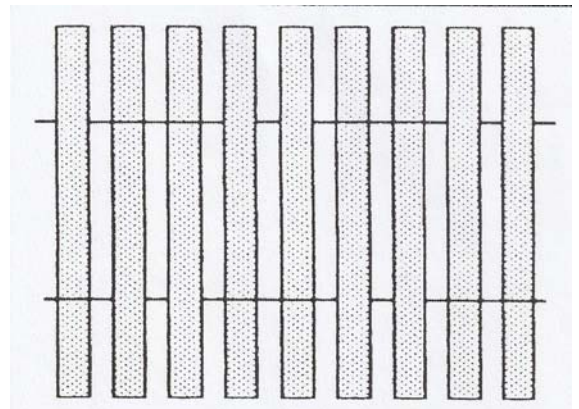


✓ **Tissu à armure unidirectionnelle (chaine ou trame)**

Les fils parallèles constituant soit la chaîne, soit la trame, sont réunis par un fil fin, respectivement en trame ou chaîne, n'intervenant pratiquement pas dans les performances du tissu qui dépendent de la nature du fil, constituant le tissu qui peut être en verre, carbone, ou en kevlar, tordu ou non, etc, et de l'armure, comme elles peuvent dépendre du taux globale de renfort et selon chacune des directions chaîne ou trame (voir figure I.7).

Figure I.7 Armure unidirectionnelle

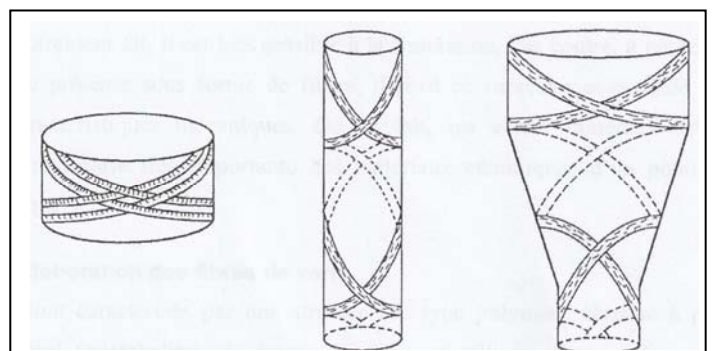
[46].

**I.5.2.3-Formes volumiques**

En se servant des fils élaborés au préalable, on peut réaliser des formes volumiques diverses (tresse et préforme) par tissage cylindrique ou conique. Les fils s'encroisent en hélice, dont la variation du pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit recouvrir. Il est ainsi possible de réaliser des pièces de révolution ayant un diamètre variable le long de leurs axes, en forme conique, ogivale ou hémisphérique, dites chaussettes utilisées souvent dans l'industrie aéronautique comme circuits de fluides.

Figure I.8 tissage cylindrique et conique

(Tresse) [46]



I.5.3-Nature des principaux renforts

I.5.3.1-Introduction

Le nombre de fibre de renfort utilisée en pratique demeure toujours très limite, ainsi la fibre de bore possède un ensemble de propriétés mécaniques très importantes, mais sa mise en œuvre est très délicate, on la crée au départ d'un fil précurseur très fin en tungstène de diamètre de 10 micromètres environ qui est chauffé en atmosphère d'hydrure ou d'halogénure de bore qui se décompose au contact du fil de tungstène en formant une couche de bore, par dépôt progressif de couches, on obtient un fil de l'ordre de 100 micromètres environ, toutefois son utilisation est limitée par le prix. Certaines fibres naturelles comme l'asbestechrysotile possèdent aussi des propriétés technologiques très importantes et sont moins couteuses, mais leur utilisation est pratiquement interdit en raison de leur caractère carcinogène.

Par conséquent le nombre de catégories de fibres utilisées couramment se réduit à trois comme suit [53] :

- Fibres de verre.
- Fibres de carbone.
- Fibres de polyamide aromatique (kevlar).

I.5.3.2-Les Fibres de verre

I.5.3.2.1-Généralités

Il est évident que le verre à l'état massif est caractérisé par une très grande fragilité, autrement dit, il est très sensible à la fissuration. Par contre, à petite échelle, quand il se présente sous forme de fibres, il perd ce caractère et possède alors de bonnes caractéristiques mécanique. de ce fait, les verres minéraux deviennent constituer une classe très importante des matériaux céramiques d'un point de vue technologique.

I.5.3.2.2-Elaboration des fibres de verre

Ils sont caractérisés par une structure de type polymère obtenue à partir du quartz naturelle (cristobalite), de forme de silice cristallisée (figure I.9), porté à la température de fusion (1610°C) puis refroidi, passant ainsi à une structure vitreuse tridimensionnelle constituée de tétraèdres SiO₄ accolés par un atome d'oxygène, appelée silice amorphe figures I.10 et I.11.

Figure I.9 structure en anneaux de la Cristobalite (association des Tétrahédres en anneaux)
[53]

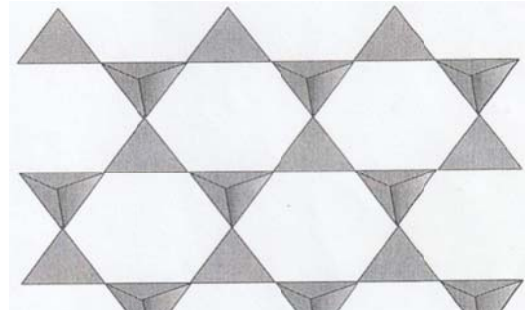


Figure I.10 esquisse à deux dimensions de la silice amorphe. Par souci de clarté, on n'a représenté que trois des quatre oxygènes associés au silicium [53]



Figure I.11 structure en anneaux de la cristobite modèle proposé par zachariasen [53]

La viscosité extrêmement élevée de la silice fondue rend difficile sa mise en forme, toute fois, on y additionne des cations métalliques sous forme d'oxydes comme agents modificateurs ou fondants tels que:

Na_2O , K_2O , CaO , MgO , Al_2O_3 , B_2O_3 , PbO , etc, aboutissant par suite à un verre fiable dit verre textile, composé généralement de silice, alumine, chaux, magnésie, etc, prêt à se transformer en fibres.

II.1 Introduction

L'emploi de structures minces, poutres, plaques et coques, est aujourd'hui largement répandu dans nombreux domaines, en particulier les transports, le génie civil etc. Il s'agit en général de prédire le comportement des structures sous certaines sollicitations en vue de contrôler ou d'éviter divers phénomènes (endommagement, bruit ...). En ingénierie ou en recherche, la plupart des modèles utilisés sont en général linéaires et fournissent une bonne approximation, au premier ordre, du comportement vibratoire. Concernant le cas particulier des plaques, les premières études ont été menées par Chia(1787) [61, 62, 63], qui a étudié les vibrations libres d'une plaque carrée en "libre-libre", puis Rayleigh (1877) ou encore Ritz (1909). Leissa(1973) [22, 23], propose un article de revue des vibrations libres de plaques rectangulaires, et de leur solutions analytiques lorsque celles-ci existent. Hutchinson (1988), Liew et al. (1995) [36, 37, 48] pour les plaques épaisses, fournissent également un grand nombre de références sur le sujet.

Cependant, l'hypothèse des vibrations linéaires a un domaine de validité restreint. En effet, les structures couramment utilisées sont de plus en plus légères tout en étant soumises à des niveaux d'excitation toujours plus importants. Cela conduit à des mouvements de grande amplitude, pour lesquels l'approximation des petits déplacements n'est plus valable, et nécessitant une modélisation non linéaire. C'est le cas par exemple, des panneaux légers utilisés en aéronautique, soumis à de hauts niveaux de bruit et conduisant à des amplitudes importantes, présentes dans Ribeiro (1998) [44, 60, 64].

II.2 Les matériaux composites structuraux

La rigidité d'un composite est conditionnée par le nombre des couches, leur nature, leur orientation, leur séquence d'empilement, etc. Locif, (2007) [60]. Ils sont généralement sous forme de:

II.2.1 Monocouches

Les monocouches ou plis, représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibre longues (unidirectionnelles, réparties aléatoirement) à fibres tissées ou à fibre courtes.

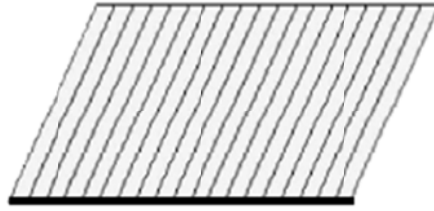


Figure II.1 Monocouche [60]

II.2.2 Stratifié

Un stratifié est constitué de deux ou plusieurs couches (appelées également plis) entrecroisées successivement, et se composant comme une seule entité structurale. Chaque couche est formée de fibres de faible section imprégnées de résine.

Chaque couche est désignée par son orientation, qui l'angle que fait la direction des fibres avec la direction de référence (qui généralement la direction des fibres unidirectionnel si, l'angle entre deux couches consécutives est nulle, c'est-à-dire, toutes les fibres sont alignées selon une seule direction.

Par contre, un stratifié est multidirectionnel si les couche successives, sont orientées les unes par rapport aux autres, exemple les multidirectionnels $[0/+45/-45/90/90/+45/-45/0]$ Locif (2007) [60].

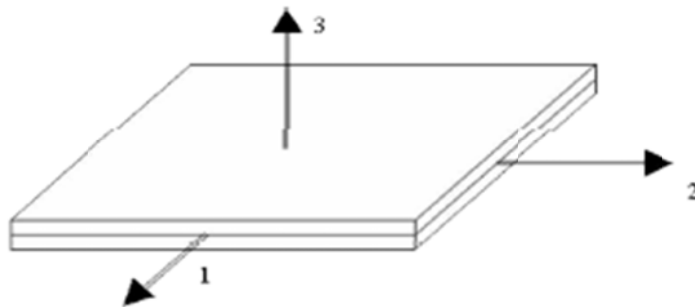


Figure II.2 Stratifié [60]

On pourra avoir des stratifiés de type :

1. Équilibre : stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction + que de couches orientées suivant la direction.
1. Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
2. Orthogonal : stratifié comportant autant de couches $a0^0$ que de couche $a90^0$.

II.2.3 Sandwichs

Matériaux composés à deux semelles (ou peaux), de grande rigidité et de faible épaisseur, enveloppant une âme (ou cœur) de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté Locif (2007) [60]. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion.

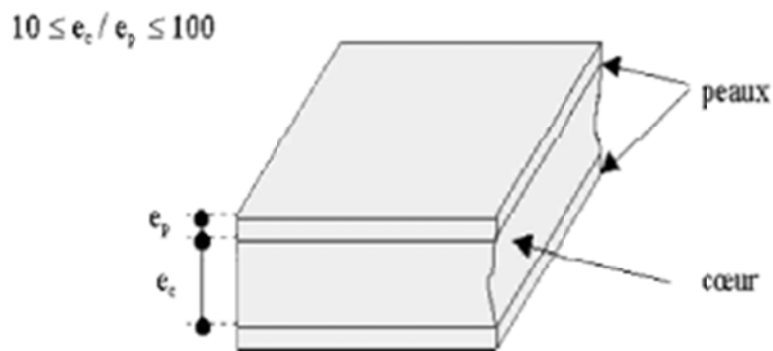


Figure II.3 Sandwich [60]

II.3 Non linéarités dans les structures minces

Dans la suite on s'intéressera uniquement aux non linéarités géométriques mais on présente auparavant les différentes sources de non linéarités possibles dans les structures minces.

On distingue trois cas :

1. Les non linéarités liées au matériau ;
2. Celles liées aux conditions limites ;
3. Celles liées à la géométrie ;

Les premières concernent les matériaux pour lesquels les contraintes sont des fonctions non linéaires des déplacements, on parle alors selon les cas d'élasticité, de viscoélasticité etc. ces problèmes sont en général résolus par l'utilisation de méthodes itératives [34, 35, 40].

Dans la seconde catégorie, on classe tous les problèmes pour lesquels les conditions limites changent au cours du chargement. C'est le cas notamment des chocs, frottements, contacts, etc... Ce type de conditions peut entraîner par exemple un amortissement non linéaire [49, 55].

Enfin, des amplitudes de déplacement importantes conduisent soit à une grande courbure soit à l'étirement du plan moyen pour certaines conditions limites restreignant le mouvement [19, 20]. On parle alors de non linéarités géométriques.

La relation entre les déformations et les déplacements n'est plus linéaire, c'est à dire qu'on sort de l'hypothèse des petites déformations ou perturbations (HPP) pour lesquelles on considère une approximation au premier ordre linéaire, des déformations qui devient rapidement limitée pour des structures élancées ou très minces, soumises a des déplacements importants [39]. Dans ce cas, la partie non linéaire du tenseur des déformations n'est plus négligeable, ce qui conduit à un couplage entre la partie membrane et la partie flexion.

Historiquement, les premières études en non linéaires géométrique ont concerne les problèmes de flambement, ou l'utilisation de modèles non linéaires est nécessaire pour la détermination de la charge limite. Depuis, de nombreuses études ont été menées, en particulier pour les vibrations libres ou forcées de structures minces.

Outre les ouvrages généraux de Nayfeh (1975), Szemplinska et al (1990a et 1990b). On trouve dans Sathyamoorthy (1987) une revue bibliographique sur les vibrations non linéaires géométriques, ainsi que sur l'influence sur celles-ci de différents paramètres tels que la température, un défaut de forme [1, 16], l'anisotropie du matériau. Les vibrations libres et forcées sont également traitées dans Srinivasan (1966) (poutres), Lau et al (1981) (coques) ou Reddy et al (1981) (plaques circulaires et annulaires) [5, 52]. La dépendance des fréquences et des formes modales vis à vis de l'amplitude du mouvement est montrée numériquement et expérimentalement dans White (1971), qui utilise un modèle de Duffing pour le comportement des poutres. Benamar et al (1991 et 1993) [47] étudient les vibrations

libres de poutres et de plaques et montrent, entre autres, qu'une amplitude de l'ordre de l'épaisseur conduit à 18% de décalage sur les fréquences propres. Ces travaux sont complétés par des résultats expérimentaux. Han et al (1997 a et 1997b) [32] s'intéressent au calcul des trois premiers modes de vibrations libres pour des plaques rectangulaires. Dans plusieurs articles, Lewandowski traite le cas de la réponse libre ou forcée de poutres. Lewandowski (1992 et 1994) [38]. Van Dooren (1975) à décrivent la réponse sous-harmonique d'une poutre pour une excitation bimodale [43]. Les résonances internes sont étudiées dans Bennett et al (1970) [22], pour des vibrations libres et forcées de poutres, pour des plaques circulaires dans Sridhar et al (1975) [52], rectangulaires dans Lau et al (1984) [13]. De manière générale, les résonances internes modifient la courbure de branches de solution déjà existantes ou conduisent à l'apparition de branches secondaires. Le couplage entraîne également un changement dans les formes modales Ribeiro et al (1999) [4].

II.4 Quelques Méthode de résolution du problème de la réponse forcée de structures minces en non linéaire géométrique

Dans les problèmes non linéaires la réponse change en fonction d'un ou de plusieurs paramètres du système. L'étude de la réponse exige, alors, des méthodes de continuation pour voir son évolution en fonction de ces paramètres.

Plusieurs auteurs ont utilisé les méthodes (itératives d'intégration) pour résoudre ces problèmes contenant des non linéarités géométriques Ramesh et al (1994) [31] a trouvé deux inconvénients dans l'utilisation d'une méthode d'intégration « méthode de tir » en le comparant avec les méthodes basées sur l'équilibrage harmonique dans le domaine fréquentiel. Le premier est la difficulté de passer les points tournants dans la courbe où la fréquence change de l'état croissant à décroissant ou inversement. Le deuxième est que la méthode d'intégration utilisée est plus exigeante en termes de ressources informatiques (temps de calcul, mémoire attribuée ... etc.) Matter (2008) [47].

II.4.1 Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibre harmonique ("harmonic balance") est une des plus anciennes méthodes utilisée pour le traitement des systèmes non linéaires. Ses exemples d'application sont très nombreux dans la littérature Langley (1988), Worden (1996),...ect

[45]. Elle permet de transformer le système d'équations dynamiques en un problème algébrique équivalent et facile pour l'étude du comportement dynamique des structures minces amorties Boumediene (2010) [59].

II.4.2 Autre méthode « Méthode Asymptotique Numérique (MAN) ».

La MAN est une méthode de continuation à pseudo longueur d'arc, permettant de résoudre des systèmes algébriques non linéaires dépendant d'un ou de plusieurs paramètres. Son principe consiste à développer les inconnues en séries entières en fonction du même paramètre (perturbation) qu'on intègre dans le problème à résoudre. Boumediene (2010) [59].

II.5 Modèles de structures multicouches (stratifiées)

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées .la modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement d'élasticité longitudinale des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses Nguyen (2004) [14, 15].

II.5.1 Modèles classiques

Ces modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur Reissner (1961) [23, 56], Yang (1966) [23], les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées, la normale reste droite et perpendiculaire a la surface moyenne après avoir été déformée.

II.5.1.1 Première hypothèse fondamentale de la théorie des poutres

II.5.1.1.1 Principe de Saint venant

Le principe de Saint venant s'énonce comme suit : la contrainte en un point éloigné des points d'applications d'un système de forces ne dépend que la résultante générale et du moment résultant de ce système de forces, même si la répartition des contraintes n'est pas la même .la solution trouvée sera valable, si on place suffisamment loin du point d'application des charges.

II.5.1.2 Deuxième hypothèse fondamentale de la théorie des poutres

II.5.1.2.1 Principe de Navier Bernoulli généralisé

L'hypothèse de Navier Bernoulli consiste à supposer que les sections normales à la fibre moyenne restent planes pendant la déformation de la poutre. Cette hypothèse qui permet de calculer les contraintes normales dues au moment fléchissant, est bien vérifiée dans le cas de flexion pure ou l'effort tranchant est nul, par contre, dans le cas de la flexion simple avec effort tranchant, les sections ne restent pas planes, mais se gauchissent en forme de lettre S très aplaties. De même lorsque nous étudions la torsion, nous verrons qu'une section non circulaire, ayant deux axes symétries, prend l'effet d'un couple de torsion, un gauchissement radial [2].

Le principe de Navier Bernoulli est fondé sur les observations suivantes [17] :

- le gauchissement d'une section est toujours très petit vis-à-vis des dimensions de la section.
- la variation du gauchissement, lorsqu'on passe d'une section à une section infiniment voisine, est toujours très petite, non seulement vis-à-vis de la distance des deux sections infiniment voisines.

Le principe de Navier Bernoulli revient à négliger, le cisaillement, et le gauchissement des sections transversales dans l'étude de déplacement et de déformation d'un élément de poutre. Courban (2006) [44]

II.5.2 Théorie classique des plaques stratifiées (CLPT)

La théorie CLPT, qui est une généralisation aux stratifiées composites de la théorie classique des plaques, se présente comme la plus simple des approches. Cette théorie se base sur les hypothèses de Love Kirchhoff Kirchhoff (1950) [25], selon lesquelles une droite normale au plan moyen de la plaque reste perpendiculaire après déformation, ce qui revient à négliger les effets de déformation en cisaillement transverse. Ainsi, la réponse d'une plaque stratifiée ne peut être précisément déterminée avec cette méthode que si la structure est très

mince et que les matériaux utilisés sont faiblement orthotrope. Le champ de déplacement approché utilisé dans cette formulation est de la forme Cugnoni (2004) [44].

II.5.3 Théorie de déformation en cisaillement du premier ordre FSDT

Comme le module de cisaillement est en général bien plus faible pour les matériaux composites que pour les matériaux isotropes traditionnels, les effets des déformations en cisaillement transverse doivent être déjà pris en compte pour des structures stratifiées faiblement à moyennement épaisses. ainsi le principe de la théorie FSDT, est de relaxer l'hypothèse de normalité des sections après déformation de la théorie classique (CLPT). on introduit alors les hypothèses de poutres de Timoshenko (1972) [59] ou de plaques de Reisner (1945) [56], l'approximation des déplacements dans l'épaisseur prenant ainsi en compte la rotation de la section déformée par un développement au premier ordre du champ de déplacement dans l'épaisseur. cette hypothèse se traduit par une déformation cisaillement transverse constante dans l'épaisseur. cependant, du fait que les contraintes ainsi calculées annulent pas sur les surfaces externes, cette théorie nécessite l'introduction d'un facteur de correction de cisaillement.

Les déformations en cisaillement transverse étant plutôt quadratique que constantes dans l'épaisseur, le facteur de correction de cisaillement corrige les modules de cisaillement transverse G_{13} et G_{23} , de telle sorte que l'énergie de déformation du modèle linéaire soit équivalente à la solution réelle, l'inconvénient de cette approche est alors évident, puisqu'il faut connaître la solution réelle pour calculer le facteur de correction de cisaillement, ce qui n'est évidemment pas envisageable généralement. de plus, comme la solution réelle dépend directement du type de stratifiées et des matériaux, il en va de même pour le facteur de correction de cisaillement, qui est différent pour chaque stratifiée.

Afin de résoudre cette (quadrature de cercle) plusieurs méthodes approchées ont été proposées pour le calcul de ce facteur de correction, la plupart se basant sur les solutions exactes de poutres pour évaluer le rapport des énergies de déformations. Ce facteur dépend de l'énergie de déformation du stratifié et donc à la fois du type de stratification et des matériaux.

Toutefois, il est noter que dans le cas particulier des composites unidirectionnels a isotropie transverse, la valeur exacte du facteur de correction de cisaillement est la même que celle des matériaux isotropes, soit 5/6.

II.5.3 Modèle d'ordre élevé

II.5.3.1 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)

Cette classe de théories plus fines a pour base un développement du déplacement dans l'épaisseur a l'ordre deux ou plus. Ces théories sont particulièrement bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou poutres épaisses, ou la déformation transverse joue un grand rôle. La plupart des modèles basés sur cette approche ne développent le champ de déplacement qu'au troisième ordre, représentant ainsi des déformations en cisaillement transverse quadratique d'ans l'épaisseur Cugnoni (2004) [14].

La plupart de ces modèles utilisent un développement en série de Taylor Nguyen (2004) [15].

Cependant, l'augmentation de l'ordre de l'approximation introduit des degrés de liberté supplémentaires, ce qui alourdit passablement le problème à résoudre. Afin de réduire la complexité, de nombreuses hypothèses supplémentaires ont été formulées .les hypothèse les plus utilisées considèrent que la plaque ou la poutre est incompressible dans la direction transverse et que la contrainte de cisaillement s'annule sur les surfaces supérieures et inférieures du stratifié. La première hypothèse entraine alors l'annulation des termes d'ordre deux dans le développement du déplacement dans l'épaisseur, tandis que la seconde hypothèse permet de relier le coefficient du terme cubique a celui du terme linéaire, et ceci réduit finalement le problème a un même niveau de complexité que le modèle FSDT.

Voici quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre supérieur qui diffèrent par la fonction de cisaillement $f(z)$:

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{H_c^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \text{Ambartsumyan (1969) [45]}$$

$$f(z) = \frac{5z}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{3H_c^2} \right) \text{Reissner (1945)[24]}$$

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3H_c^2} \right) \text{Reddy (1984)[36]}$$

Dans le modèle de Reddy (1984) [37], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal w est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier (1991) [45] propose le modèle « sinus » qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci dessous :

$$f(z) = \frac{H_c}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{H_c}\right) \text{Touratier (1991)[45]}$$

Les différents termes du développement correspondent aux différents modèles cités précédemment. Suivant la troncature choisie, on obtient la théorie Love-Kirchhoff, la théorie Reissner-Mindlin ou les modèles d'ordre supérieur (aux coefficients près). Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle « sinus » prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy (1984) [37].

Récemment, Afaq (2003) [3] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de cisaillement transverse est de la forme suivante :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{H_c}\right)^2} \text{Afaq (2003) [37]}$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance paires et impaires de la variable z alors que la fonction \sin Touratier (1991) [45] ne permet qu'un développement en puissances impaires. Il faut remarquer que les modèles issus d'une approche monocouche équivalente présentent des contraintes de cisaillement transverse discontinues aux interfaces si les couches ont des propriétés différentes, même si la continuité du champ de déformation est assurée. Ceci présente un inconvénient sérieux lors de l'analyse locale à l'interface des structures multicouches (effets de bord sur les contraintes, délaminage . . .).

II.6 Approche par couche

Ces approches sont destinées justement à mieux décrire les effets d'interface, ainsi différents modèles issus de l'approche par couche ont été proposés Srinivas (1973) ; Pagano (1978) ; Seide (1980) ; DiSciava (1984 et 1986) ; Murakami (1986) ; Reddy (1987) ; Chabot (1997) ; Ossadzow (2001) ; Diaz (2002) ; Afaq (2003) [3].

Le multicouche est subdivisée en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou chaque ensemble de couche). On applique à chaque sous-structure une théorie du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur. Les modèles de ce type sont relativement coûteux (le nombre de variables dépend du nombre de couche), mais permettent l'obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors plan. D'une manière générale, les modèles issus de l'approche par couche peuvent être classés en deux groupes : les modèles couches discrètes où chaque couche est considérée comme une plaque en imposant les conditions de continuité en déplacement ou en contrainte aux interfaces et les modèles zig-zag où la cinématique satisfait a priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couche [21, 27] (Figures :II.4,II.5).

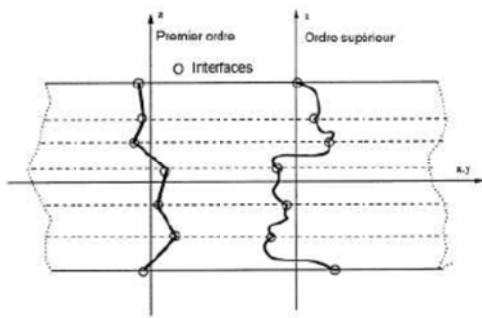


Figure II.4 Champ de déplacements des modèles couches discrètes, approche cinématique [60]

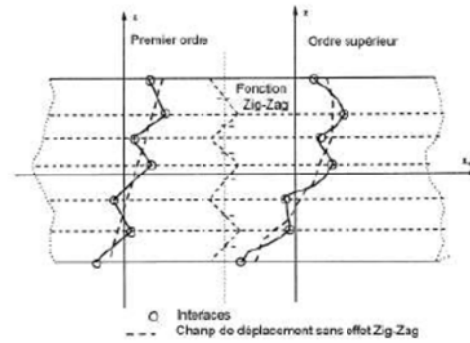


Figure II.5 Champ de déplacements des Modèles zig-zag, approche Cinématique [60]

II.7 Les modèles zig-zag.

Afin de réduire le nombre de paramètres inconnus, Di Sciuva (1984) [42, 58] est le premier à proposer le modèle zig-zag du premier ordre. Dans ce modèle, les déplacements membranaires sont les résultats de la superposition du champ de déplacement global d'une théorie du premier ordre et d'une fonction zig-zag (avec l'emploi de la fonction d'Heaviside). La fonction zig-zag donne une contribution des déplacements membranaires qui est continue en z , mais sa dérivée première est discontinue à l'interface (voir Figure. II.6). Les déformations transversales sont donc discontinues et la continuité des contraintes de cisaillement transverse aux interfaces est assurée [41, 60].

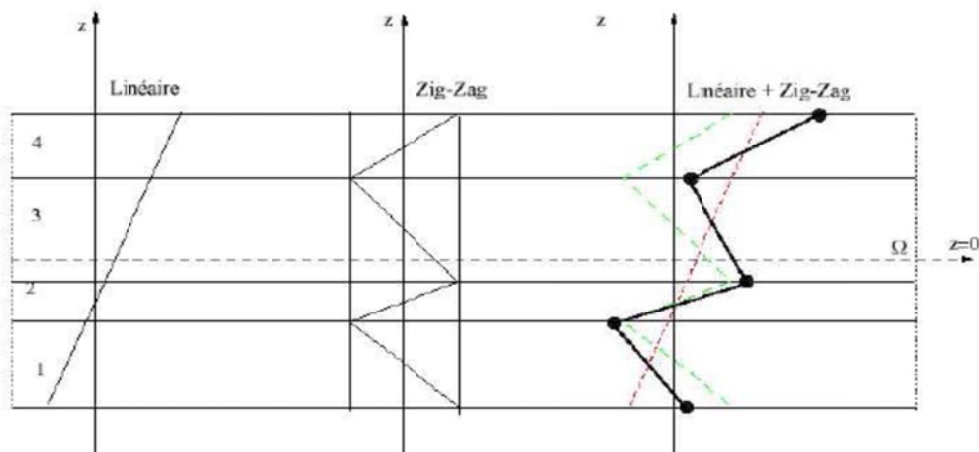


Figure II.6 Champ de déplacements des modèles zig-zag du premier ordre [60]

II.8 Modèle cinématique et lois de comportement

On considère une poutre en composite stratifié unidirectionnel symétrique à fibres de carbonées, la poutre a une largeur b , une épaisseur H_t , longueur L et charge q , les plis ont la même épaisseur H et les mêmes propriétés matérielles.

Les hypothèses utilisées pour l'étude en flexion :

1- La contrainte normale transverse dans la direction (Oz) est très faible comparativement à la contrainte normale axiale dans la direction (Ox) ;

2- Les effets d'inertie axiale et rotationnelle sont négligeables vis-à-vis des effets d'inertie transversale;

3- Le déplacement transverse $w(x, z, t)$ est le même dans les trois couches $w(x, z, t) = w(x, t)$.

4- Les couches de la poutre sont parfaitement collées entre elles assurant la continuité du champ de déplacement aux interfaces.

On commence par l'étude d'une poutre à une seule couche puis au stratifié symétrique de n plis

Équations d'équilibre :

Les équations principales d'équilibre sont obtenues par l'utilisation du théorème des puissances virtuelles :

$$\delta P_{int} = \delta P_{ext} - \delta P_{acc} \quad (II.1)$$

δP_{acc} Représente le terme d'inertie alors que δP_{int} et δP_{ext} décrivent respectivement le travail virtuel interne et externe.

$$\delta P_{acc} = \int_0^L \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \quad (II.2)$$

$$\delta P_{ext} = \int_0^L q(t) \delta w dx \quad (II.3)$$

ρ et S : Sont respectivement la masse volumique et la surface d'intégration de la couche.

Considérant que l'effort normal transversal σ_{zz} est négligeable par rapport à σ_{xx} et σ_{xz} , le travail virtuel interne exprime sous la forme suivante :

$$\delta P_{int} = \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2 \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) dV \quad (II.4)$$

Modèle non zig-zag :

La cinématique de modèle non zig-zag carrera (2002) [63] peut être exprimée par l'expression générale suivante :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \beta(x, t) \quad (II.5)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (II.6)$$

$u(x, z, t)$ Représente le déplacement longitudinal, et $u_0(x, t)$ est le déplacement de la ligne médiane, $w(x, t)$ est la flèche, $\beta(x, t)$ représente la rotation additionnelle de la normale à la ligne médiane.

$f(z)$ définit la fonction cisaillement.

II.9 Champ des déformations et des contraintes

Pour obtenir l'équation fondamentale du test dynamique, la loi de Hooke et la relation déformation-déplacement dans le cadre des hypothèses de non linéarité sont utilisées sous les formes décrites ci-dessous :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (II.7)$$

$$\gamma = \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial x} \quad (II.8)$$

$$\{\sigma\} = [\overline{Q}_{11}^*]\{\varepsilon\} \quad (\text{II. 9})$$

Dans notre cas, et selon la théorie classique de la poutre ε_{33} est négligée comme une première approximation.

Les deux composantes de déformation dépendant de leurs composantes des contraintes correspondantes par l'équation constitutive d'une poutre stratifiée

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}^* & 0 \\ 0 & \overline{Q}_{55}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 10})$$

Avec

$$\sigma_{11} = \overline{Q}_{11}^* \varepsilon_{11} \quad (\text{II. 11})$$

$$\tau_{13} = \overline{Q}_{55}^* \gamma_{13} \quad (\text{II. 12})$$

Le champ de déplacement virtuel s'écrit :

$$\delta u(x, z, t) = \delta u_0(x, t) - z \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} + f(z) \delta \beta(x, t) \quad (\text{II. 13})$$

$$\delta w(x, z, t) = \delta w(x, t) \quad (\text{II. 14})$$

De façon identique, les déformations virtuelles s'écrit :

$$\delta \varepsilon_{11}(x, z, t) = \frac{\partial \delta u_0(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II. 15})$$

$$\delta \varepsilon_{13}(x, z, t) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \delta \beta(x, t) \quad (\text{II. 16})$$

On remplace l'équation (II. 15) et (II. 16) dans l'équation (II. 4) on trouve

$$\delta P_{int} = \int_0^L \sigma_1 \left(\int_{-H/2}^{H/2} \frac{\partial \delta u_0(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} + \tau_{13} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \delta \beta(x, t) \right) dz dx \quad (II. 17)$$

Où :

$$\delta P_{int} = \int_0^L N \left(\left(\frac{\partial \delta u_0(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \right) + M_w \left(\frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} \right) + M_\beta \left(\frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x} \right) + T(\delta \beta(x, t)) \right) dx \quad (II. 18)$$

avec N , M_w , M_β et T sont respectivement l'effort normale, les deux moments et l'effort tranchant.

L'effort normal

$$N(x) = \int_s \sigma_{11} ds = \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{11}^*} \varepsilon_{11} dz \quad (II. 19)$$

$$N(x) = b \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{11}^*} \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right) dz \quad (II. 20)$$

Les moments

$$M_w(x) = b \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{11}^*} \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - z f(z) \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) dz \quad (II. 21)$$

$$M_{\beta}(x) = b \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{11}^*} \left(-z f(z) \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} + f(z)^2 \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \right) dz \quad (\text{II. 22})$$

L'effort tranchant

$$T(x) = \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{55}^*} \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 \beta(x, t) dz \quad (\text{II. 23})$$

On pose

$$M_w(x) = C_1 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II. 24})$$

$$M_{\beta}(x) = C_2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + C_3 \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \quad (\text{II. 25})$$

$$T(x) = C_4 \beta(x, t) \quad (\text{II. 26})$$

C_1 , C_2 , C_3 et C_4 sont des constantes définies par les expressions mathématiques suivantes :

$$C_1 = b \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{11}^*} dz \quad (\text{II. 27})$$

$$C_2 = b \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{11}^*} z f(z) dz \quad (\text{II. 28})$$

$$C_3 = b \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q_{11}^*} (f(z))^2 dz \quad (\text{II. 29})$$

$$C_4 = b \int_{-H/2}^{H/2} \overline{Q}_{55}^* \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (\text{II. 30})$$

1 -Vibrations linéaires:

Dans le cas des vibrations libres, les composantes du principe des puissances virtuelles sont réduites à deux et s'écrit de façon générale :

$$\delta P_{int} + \delta P_{acc} = 0 \quad (\text{II. 31})$$

Insérant l'équation (II. 2) et (II. 18) dans l'équation(II. 31)on obtient

$$\int_0^L \left[M_w \left\{ \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} \right\} + M_\beta \left\{ \frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x} \right\} + T \{ \delta \beta(x, t) \} \right] dx = \int_0^L \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \quad (\text{II. 32})$$

2- vibrations non linéaires

On remplace les équations (II. 2), (II. 3) et (II. 18)dans (II. 1) ,on obtient :

$$\int_0^L N \left[\left\{ \frac{\partial \delta u_0(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \right\} + M_w \left\{ \frac{\partial^2 \delta w(x, t)}{\partial x^2} \right\} + M_\beta \left\{ \frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x} \right\} + T \{ \delta \beta(x, t) \} \right] dx = \int_0^L q(t) \delta w dx - \int_0^L \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \quad (\text{II. 34})$$

Dans l'utilisation des équations constitutives des stratifiées, la matrice transformée, $[\overline{Q}^*]^k$ varie avec l'orientation des fibres de chaque couche, à partir de l'équation (II. 24) – (II. 26) nous pouvons écrire :

$$N(x) = b \left(\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right) \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} [\overline{Q}_{11}^*]^k dz \quad (\text{II. 35})$$

$$M_w(x) = b \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} [\overline{Q}_{11}^*]^k dz - b \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} [\overline{Q}_{11}^*]^k z f(z) dz \quad (\text{II. 36})$$

$$M_w(x) = b \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} [\overline{Q}_{11}^*]^k z f(z) dz + -b \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial x} \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} [\overline{Q}_{11}^*]^k (f(z))^2 dz \quad (\text{II. 37})$$

$$T(x) = b \beta(x, t) \sum_{k=1}^n \int_{z^{(k)}}^{z^{(k+1)}} [\overline{Q}_{55}^*]^k \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (\text{II. 38})$$

II.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé deux équations d'équilibre, en vibration linéaire et non linéaire de la poutre stratifié.

En appliquant la théorie non zig-zag, et en prend en considération l'effet de cisaillement et de déformation de petite perturbation dans le calcul.

La contrainte normale transverse dans la direction (Oz) est négligé, les couches de la poutre sont parfaitement collées entre elles et assurant la continuité du champ de déplacement aux niveaux d'interfaces.

III.1. Introduction

Le but de ce chapitre est d'analyser les vibrations non linéaires forcées de la résonance super harmonique des poutres sandwich sous excitations dures. Pour cet objectif, la méthode des échelles multiples est employée, sachant qu'elle est considérée comme une solution analytique capable de fournir des solutions transitoires ainsi que des solutions en régime permanent, contrairement à certaines autres techniques qui ne donnent que la solution en régime permanent. L'effet de géométrie non linéaire induit par les contraintes axiales est modélisé par des théories de zigzag d'ordre supérieur, qui intègrent différentes fonctions de cisaillement, pour une description plus fiable de la déformation de cisaillement dans le noyau viscoélastique. La résolution de l'équation amplitude-fréquence permet de décrire les relations amplitude-fréquence et de tracer les courbes dites de résonance. Ces derniers sont pris en compte dans l'étude paramétrique pour différents types de poutres sandwich à trois couches comprenant différentes propriétés géométriques et matérielles.

III.2. Modèle viscoélastique pour matériau a noyau adhésif

La forme générale de la théorie linéaire d'un corps viscoélastique est donnée par (Zinoviev et Ermakov 1994) [33].

$$\sigma_{ij}(t) = -\int_0^t Q_{ijkl}^*(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau) \quad (\text{III.1})$$

En utilisant le modèle viscoélastique de Kelvin – Voigt, on obtient

$$\sigma_{ij}(t) = Q_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) + C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \quad (\text{III.2})$$

Où Q_{ijkl} et C_{ijkl} sont les modules de rigidité et d'amortissement du matériau orthotrope.

Les relations constitutives viscoélastiques peuvent être décrites en termes de quatre paramètres. Trois paramètres de rigidité (E , G , et ν), et des facteurs de perte d'amortissement η . Les contraintes normale et tangentielle σ_2 et τ_2 peuvent être exprimées comme fonction de déformation au moyen de la matrice de rigidité (Daya et al. 2004).

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{2,xx} \\ \hat{\tau}_{2,xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \hat{\epsilon}_{2,xx} + \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix} \hat{\gamma}_{2,xz} \quad (III.3)$$

Dans lequel

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (III.4)$$

$$C = \frac{E\eta}{\omega_l} \quad (III.5)$$

$$\bar{C} = \frac{G\eta}{\omega_l} \quad (III.6)$$

où η est le facteur de perte, et ω_l est la fréquence linéaire.

III.3. Formulation :

III.3.1 Cinématique :

Pour les circonstances de cette étude, une poutre sandwich typique à trois couches considérée. Celle-ci est référencée dans le système de coordonnées oxyz, dans lequel l'axe x est orienté le long de la longueur L, y le long de la largeur et z dans le sens de l'épaisseur, comme illustré à la Fig.III.1.

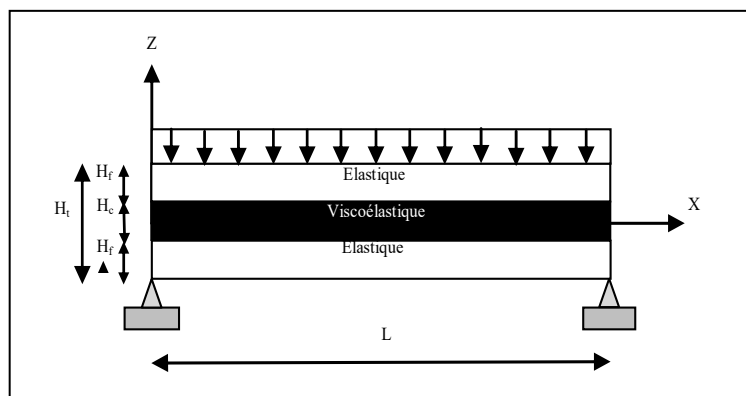


Figure III.1 Une poutre sandwich avec noyau viscoélastique

Les faces et l'épaisseur de la couche centrale sont respectivement H_f et H_c . L est la longueur et H_t l'épaisseur totale de la poutre. La dérivation des équations gouvernantes générales est basée sur les hypothèses suivantes :

- Aucun glissement ne se produit aux interfaces entre les trois couches de la poutre.
- La cinématique de la poutre est définie par le déplacement transversal $w(x,t)$, le déplacement axial $u_i^0(x,t)$ et la rotation indépendante $\beta(x,t)$.
- Les déformations de cisaillement sont négligées dans les deux faces mais prises en compte dans la couche centrale.

Selon les théories du zig-zag d'ordre supérieur, le champ de déplacement est divisé en trois parties afin de satisfaire les conditions de continuité des contraintes de déplacement, et de cisaillement transverse aux interfaces en introduisant une fonction de cisaillement $f(z)$. Le modèle cinématique est défini par :

$$u_1(x, z, t) = u_1^0(x, t) - \frac{\ddot{A}}{\mathcal{R}} z - \frac{H_c + H_f}{2} \frac{\hat{\sigma}}{\mathcal{O}} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (III.7)$$

$$-\frac{H_c}{2} z - \frac{H_t}{2}$$

$$u_2(x, z, t) = u_2^0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \beta(x, t) \quad (III.8)$$

$$-\frac{H_c}{2} z - \frac{H_c}{2}$$

$$u_3(x, z, t) = u_3^0(x, t) - \frac{\ddot{A}}{\mathcal{R}} z + \frac{H_c + H_f}{2} \frac{\hat{\sigma}}{\mathcal{O}} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (III.9)$$

$$-\frac{H_t}{2} z - \frac{H_c}{2}$$

Où $u_i(x,z,t)$ ($i=1,\dots,3$) est le déplacement longitudinal le long de l'épaisseur de la couche i , $u_i^0(x, t)$ ($i=1,\dots,3$) est le déplacement axial de la couche médiane plane. $w(x,t)$ est le déplacement transversal commun et $\beta(x,t)$ mesure la rotation autour de l'axe z . En supposant la condition de la continuité des déplacements aux interfaces. Les champs de déplacement $u_1^0(x, t)$ et $u_3^0(x, t)$ peuvent être exprimés en fonction de $u_2^0(x, t)$

$$u_1^0(x,t) = u_2^0(x,t) - \frac{\ddot{A}H_c + H_f}{2} \frac{\hat{\sigma}^w(x,t)}{\sigma_x} + f \frac{\ddot{A}H_c}{2} \frac{\hat{\sigma}}{\sigma} \beta(x,t) \quad (III.10)$$

$$u_3^0(x,t) = u_2^0(x,t) + \frac{\ddot{A}H_c + H_f}{2} \frac{\hat{\sigma}^w(x,t)}{\sigma_x} - f \frac{\ddot{A}H_c}{2} \frac{\hat{\sigma}}{\sigma} \beta(x,t) \quad (III.11)$$

La substitution des équations (III.10) et (III.11) dans les équations (III.7) et (III.9) respectivement, conduit aux champs de déplacement axial écrits comme suit :

$$u_1(x,z,t) = u_2^0(x,t) - z \frac{w(x,t)}{x} + f \frac{\ddot{A}H_c}{2} \frac{\hat{\sigma}}{\sigma} \beta(x,t) \quad (III.12)$$

$$u_2(x,z,t) = u_2^0(x,t) - z \frac{w(x,t)}{x} + f(z) \beta(x,t) \quad (III.13)$$

$$u_3(x,z,t) = u_2^0(x,t) - z \frac{w(x,t)}{x} - f \frac{\ddot{A}H_c}{2} \frac{\hat{\sigma}}{\sigma} \beta(x,t) \quad (III.14)$$

Selon l'hypothèse des petites déformations, et des rotations modérées, les relations déformation-déplacement non linéaires pour chaque couche peuvent être exprimées sous la forme suivante (Daya et al 2004)

$$\varepsilon_1 = \frac{u_1(x,z,t)}{x} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{A}w(x,t)}{\sigma_x} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma} \quad (III.15a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u_2(x,z,t)}{x} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{A}w(x,t)}{\sigma_x} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma} \quad (III.15b)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{u_3(x,z,t)}{x} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{A}w(x,t)}{\sigma_x} \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma} \quad (III.15c)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{u_2(x,z,t)}{z} + \frac{w(x,t)}{x} \quad (III.15d)$$

III.3.2 Equations du mouvement en termes de déplacements pour problème de vibrations forcées

Dans le domaine des vibrations forcées, le principe de Hamilton est défini comme suit

$$\delta P_{int} = \delta P_{ext} - \delta P_{acc} \quad (III.16)$$

δP_{ext} est le travail virtuel donné par la charge externe uniformément répartie. $q(t)$, et δP_{acc} représente le résultat du travail virtuel mis dans le système sous forme d'accélération. Le travail virtuel interne δP_{int} est défini par :

$$\begin{aligned} \delta P_{int} = & \int_{v_1} \sigma_{1,xx} \varepsilon_{1,xx} \delta \varepsilon_{1,xx} dv_1 + \int_{v_2} (\sigma_{2,xx} \varepsilon_{2,xx} \delta \varepsilon_{2,xx} + \tau_{2,xx} \gamma_{2,xz} \delta \gamma_{2,xz}) dv_2 + \\ & \int_{v_1} \sigma_{3,xx} \varepsilon_{3,xx} \delta \varepsilon_{3,xx} dv_3 \end{aligned} \quad (III.17)$$

En substituant l'équation (III.15a-d) dans l'équation (III.17), et en intégrant à travers l'épaisseur de la poutre mixte. Le travail des efforts internes est exprimé par :

$$\begin{aligned} \delta P_{int} = & \int_0^L \left(N_T \left(\frac{\partial \delta u_2(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \delta w(x, t)}{\partial x} \right) + M_\beta \frac{\partial \delta \beta(x, t)}{\partial x} + M_w \frac{\partial^2 \delta w(w, t)}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + T \delta \beta(x, t) \right) dx \end{aligned} \quad (III.18)$$

Où les résultantes de contrainte N_T , M_β , M_w et T sont définies par :

$$\begin{aligned} N_T(x, t) = & \left(2E_f S_f + ES_c \right) \frac{\ddot{\Delta} u_2(x, t)}{\ddot{\Delta}} \frac{\hat{\Delta}}{\ddot{\Delta}} + \frac{1}{2} \frac{\ddot{\Delta} w(x, t)}{\ddot{\Delta}} \frac{\hat{\Delta}}{\ddot{\Delta}} \frac{\hat{\Delta}}{\ddot{\Delta}} + \\ & CS_c \frac{\ddot{\Delta} u_2(x, t)}{\ddot{\Delta}} \frac{\hat{\Delta}}{\ddot{\Delta}} + \frac{w^2(x, t)}{t^2 x} \frac{w(x, t)}{x} \frac{\hat{\Delta}}{\ddot{\Delta}} \end{aligned} \quad (III.19)$$

$$M_w = s_1 \frac{w^2(x, t)}{x^2} - s_2 \frac{\beta(x, t)}{x} + s_5 \frac{w^3(x, t)}{t^2 x^2} - s_6 \frac{w^2 \beta(x, t)}{t^2 x} \quad (III.20)$$

$$M_\beta = -s_2 \frac{w^2(x, t)}{x^2} + s_3 \frac{\beta(x, t)}{x} - s_6 \frac{w^3(x, t)}{t^2 x^2} + s_7 \frac{w^2 \beta(x, t)}{t^2 x} \quad (III.21)$$

$$T = s_4 \beta(x, t) + s_8 \frac{\partial \beta(x, t)}{\partial t} \quad (III.22)$$

Où les paramètres de rigidité sont donnés par :

$$s_1 = 2E_f S_f \frac{\ddot{A}H_c + H_f}{\ddot{A}} \frac{\ddot{O}}{2} + 2E_f I_f + EI_c \quad (III.23a)$$

$$s_2 = 2E_f S_f \frac{\ddot{A}H_c + H_f}{\ddot{A}} \frac{\hat{O}}{2} \frac{\ddot{A}H_c}{\ddot{A}} \frac{\hat{O}}{2} + Eb \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} z f(z) dz \quad (III.23b)$$

$$s_3 = 2E_f S_f \frac{\ddot{A}f}{\ddot{A}} \frac{\ddot{A}H_c}{\ddot{A}} \frac{\hat{O}}{2} + Eb \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} f^2(z) dz \quad (III.23c)$$

$$s_4 = Gb \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} \frac{\ddot{A}f(z)}{\ddot{A}} \frac{\ddot{O}}{z} dz \quad (III.23d)$$

$$s_5 = E_c I_c \quad (III.23e)$$

$$s_6 = E_c b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} z f(z) dz \quad (III.23f)$$

$$s_7 = E_c b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} f^2(z) dz \quad (III.23g)$$

$$s_8 = \bar{C}b \int_{-\frac{H_c}{2}}^{\frac{H_c}{2}} \frac{\ddot{A}f(z)}{\ddot{A}} \frac{\ddot{O}}{z} dz \quad (III.23h)$$

Les quantités géométriques utilisées dans les équations. (III.23a-h) sont les aires de section transversale S_f et S_c et les moments quadratiques I_f et I_c des faces et des couches centrales, respectivement.

Le travail virtuel dû à la charge uniformément répartie est :

$$\delta P_{ext} = \int_0^L q(t) \delta w(x, t) dx \quad (III.24)$$

Le travail virtuel lié à l'énergie cinétique du stratifié est donné par :

$$\delta P_{acc} = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \frac{\ddot{w}(x,t)}{t^2} \delta w(x,t) dx \quad (III.25)$$

La substitution des équations (III.18), (III.24) et (III.25) dans l'équation (III.16) et en intégrant par parties, en collectant les coefficients de $\delta u^2(x,t)$, $\delta \beta(x,t)$ et $\delta w(x,t)$ on obtient les équations de mouvement pour la poutre composite stratifiée comme suit :

$$\frac{\dot{N}_T(x,t)}{x} = 0 \quad (III.26a)$$

$$\frac{\dot{M}_\beta(x,t)}{x} - T = 0 \quad (III.26b)$$

$$-N_T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_w}{\partial x^2} + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(t) \quad (III.26c)$$

Éq (III.26a) conduit à une force axiale constante $N_T(x,t)=N_T(t)$ exprimée comme :

$$N(t) = \frac{1}{2L} (2E_f S_f + ES_c) \int_0^L \frac{\ddot{w}(x,t)}{x} dx + \frac{CS_c}{L} \int_0^L \frac{\ddot{w}(x,t)}{t^2 x} \frac{w(x,t)}{x} dx \quad (III.27)$$

La substitution des équations (III.19)-(III.22), dans les équations (III.26b) et (III.26c) et après quelques manipulations, on obtient les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} & -s_2 \frac{\ddot{w}(x,t)}{x^3} + s_2 \frac{\ddot{\beta}(x,t)}{x^2} - s_6 \frac{\ddot{w}(x,t)}{t^2 x^3} + s_7 \frac{\ddot{\beta}(x,t)}{t^2 x^2} \\ & -s_4 \beta(x,t) - s_8 \frac{\dot{\beta}(x,t)}{t} = 0 \end{aligned} \quad (III.28a)$$

III.3.3 La transformation modale

Le système de l'éq (III.31) étant transformé en une forme découplé en terme de coordonnée modale comme :

$$d_1 r^3(t) + \omega_1^2 r(t) + d_1 r^2(t) r(t) + d_4 r(t) + r(t) = F_1(t) \tag{III.32}$$

Tableau III.1. Le modèle cinématique considéré dans cette étude [3, 36, 45, 59].

Modèle	Nom	$f(z)$
1	Timoshenko (1922)	$f(z) = z$
2	Reddy (1984)	$f(z) = z - 4z^3/3H_c^2$
3	Touratier (1991)	$f(z) = H_c \sin(\pi z / H_c) / \pi$
4	Afaqet al. (2003).	$f(z) = ze^{-2(z/H_c)^2}$

Ou

$$d_1 = \alpha_3 \tag{III.33a}$$

$$d_3 = \alpha_4 \tag{III.33b}$$

$$d_4 = \alpha_1 + (\alpha_9 + \alpha_2)y + (\alpha_{10} + \alpha_{12})y^2 \tag{III.33c}$$

$$\omega_1^2 = \frac{(-\alpha_6\alpha_7 + \alpha_5\alpha_8 - \alpha_5\alpha_{11})}{\alpha_8 + \alpha_{11}} \tag{III.33d}$$

$$y = \frac{-\alpha_7}{\alpha_8 + \alpha_{11}} \tag{III.33e}$$

$r(t)$ est l'amplitude dépendante du temps associée au premier mode propre naturel.

III.4. Méthode de résolution utilisant la méthode de perturbation

En utilisant la méthode des échelles multiples (Khaninet al. 2000), la solution approchée de la valeur uniforme du premier ordre est exprimé comme :

$$r(t, \varepsilon) = r_0(T_0, T_1) + \varepsilon r_1(T_0, T_1) + \dots \tag{III.34}$$

T_0 est appelée l'échelle de temps rapide associée à l'oscillation relativement rapide se produisant avec la fréquence ω_1 et T_1 est l'échelle de temps lente associée au changement de temps relativement lent d'amplitude et de phase de la réponse. Les dérivés du temps sont exprimés comme :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dT_0} + \varepsilon \frac{d}{dT_1} + \dots = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \tag{III.35}$$

Pour analyser les résonances super harmoniques sous des charges dures, l'excitation et les parties d'oscillation libre de l'Eq. (III.32) sont ordonnés comme :

$$\begin{aligned} r''(t) + \omega_l^2 r(t) = & -\varepsilon \frac{d}{dT_1} d_1 r(t)^3 + d_3 r(t)^2 r(t) + d_4 r(t) \hat{O} \\ & + F_1 \cos(\alpha t) \end{aligned} \tag{III.36}$$

Où ε est un paramètre comptable.

Tableau III.2 Matériaux et paramètres géométriques

Couche élastique	Couche viscoélastique	Propriétés Géométriques
$E_f = 2.1E11 (Pa)$	$\rho_c = 968.1 Kg/m^3$	$H_t = 1 mm$
$\rho_f = 2766 Kg/m^3$	$\nu = 0.3$	$b = 4 H_t$

La substitution d'éqs. (III.34) et (III.35) dans l'équation (III.36) et la mise en équation des coefficients de ε donne :

Ordre ε^0

$$D_0^2 r_0 + \omega_l^2 r_0 = F_1 \cos(\omega T_0) \tag{III.37}$$

Ordre ε^1

$$D_0^2 r_1 + \omega_l^2 r_1 = -2D_0 D_1 r_0 - d_1 r_0^3 - d_3 r_0^2 D_0 \quad (III.38)$$

On suppose une solution de l'équation du premier ordre (ε^0) de la forme:

$$r_0 = A(T_1) e^{i\omega_l T_0} + \bar{L}(T_1) e^{i\omega_l T_0} + cc \quad (III.39)$$

Dans lequel :

$$\bar{L} = \frac{F_1}{2(\omega_l^2 - \omega^2)} \quad (III.40)$$

Où cc est le conjugué complexe et A(T₁) est une fonction complexe inconnue.

En remplaçant l'éq. (III.37) au côté droit de l'équation. (III.36), en obtient :

$$\begin{aligned} D_0 r_1 + \omega_l^2 r_1 = & 2i\omega_l (A' + uA) + A^2 \bar{A} (3d_1 + i\omega_l d_3) + 2A \bar{L}^2 (3d_1 + i\omega_l d_3) e^{i\omega_l T_0} + \\ & \bar{L}^2 (3d_1 + i\omega_l d_3) (L^2 + 2A\bar{A}) + 2iu\omega_l \bar{L} e^{i\omega_l T_0} + (d_1 + d_3 i \omega_l) A^3 e^{3i\omega_l T_0} + \\ & (d_1 + d_3 i \omega) \bar{L}^3 e^{3i\omega_l T_0} (d_3 i (\omega - 2\omega_l) + 3d_1) \bar{A}^2 L e^{i(\omega - 2\omega_l) T_0} + \\ & (d_3 i (\omega + 2\omega_l)) A^2 L e^{i(\omega + 2\omega_l) T_0} + (3d_1 + d_3 i (\omega_l + 2\omega)) A \bar{L}^2 e^{i(2\omega + \omega_l) T_0} + \\ & (3d_1 + d_3 i (\omega_l - 2\omega)) A \bar{L}^2 e^{i(\omega_l - 2\omega) T_0} + (3d_1 + d_3 i (2\omega_l - \omega)) A^2 L e^{i(2\omega_l - \omega) T_0} \\ & + (3d_1 + d_3 i (2\omega - \omega_l)) \bar{A} L^2 e^{i(2\omega - \omega_l) T_0} + cc \end{aligned} \quad (III.41)$$

Où (A') désigne la différentiation par rapport à T₁ et u=d₄/2.

III.4.1 Cas non résonant

Dans le cas non résonant, les termes séculaires sont éliminés si

$$2i\omega_l (A' + uA) + A^2 \bar{A} (3d_1 + i\omega_l d_3) + 2A \bar{L}^2 (3d_1 + i\omega_l d_3) = 0 \quad (III.42)$$

En résolvant l'équation ci-dessus, il est commode d'exprimer A(T₁) sous la forme polaire comme :

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\psi T_1} \quad (III.43a)$$

Et

$$\bar{A}(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\psi T_1} \quad (III.43b)$$

En remplaçant l'équation (III.43) dans (III.42) et en séparant les parties réelle et imaginaire de l'équation résultante, on obtient

$$a' = - (u + L^2 d_3) a - \frac{d_3}{8} a^3 \quad (III.44)$$

$$\psi' = \frac{3d_3}{8\omega_l} a^2 + \frac{3d_3}{\omega_l} L^2 \quad (III.45)$$

III.4.2 Super harmonique $\omega=1/3\omega_l$

Pour étudier le comportement de la réponse près de la troisième fréquence propre $1/3\omega_l$, on introduit un paramètre de désaccord σ , qui caractérise la proximité de l'excitation ω à $1/3\omega_l$

$$3\omega = \omega_l + \varepsilon\sigma \quad (III.46)$$

La formulation suivante est utilisée pour éliminer les termes séculaires

$$3\omega T_0 = \omega_l T_0 + \sigma T_1 \quad (III.47)$$

En remplaçant l'équation (III.47) en (III.41) et en éliminant les termes profanes, on obtient

$$\begin{aligned} 2i\omega_l (A + uA) + A^2 \bar{A} (3d_1 + i\omega_l d_3) + 2AL^2 (3d_1 + i\omega_l d_3) \\ + (d_1 + i\omega_l d_3) L^3 e^{j\omega_l T_1} = 0 \end{aligned} \quad (III.48)$$

Utilisation des équations (III.48) et (III.43), les équations différentielles non linéaires liées à l'amplitude a et à la phase ψ sont les suivantes :

$$a' + ua + \frac{1}{8} d_3 a^3 + L^2 d_3 a = -L^3 d_3 \frac{\omega}{\omega_l} \cos(\xi) - L^3 \frac{d_1}{\omega_l} \sin(\xi) \quad (III.49)$$

$$a\xi' - a\sigma + \frac{3}{8\omega_l} d_1 a^3 + 3L^2 \frac{d_1}{\omega_l} a = L^3 d_3 \frac{\omega}{\omega_l} \sin(\xi) - L^3 \frac{d_1}{\omega_l} \cos(\xi) \quad (III.50)$$

La nature et la stabilité de la réponse en régime permanent sont étudiées en obtenant les points fixes des équations. (III.50) et (III.49). Ces points fixes se produisent lorsque $\dot{a} = \dot{\xi} = 0$ ce qui correspond à la solution des relations non linéaires fréquence–amplitude et phase données par :

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} - \frac{3}{8\omega} d_1 a^2 - 3 \frac{d_1 L^2}{\omega} \ddot{\alpha} + \frac{\ddot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} + \frac{d_3}{8} a^2 + d_3 L^2 \ddot{\alpha} = \frac{\ddot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} \frac{\omega d_3}{\omega} \ddot{\alpha} + \frac{\ddot{\alpha}}{\ddot{\alpha}} \frac{d_1}{\omega} \ddot{\alpha} \quad (\text{III.51})$$

$$\tan (\zeta + \xi) = \frac{-u - (d_3 / 8) a^2 - L d_3}{-o' + (3 d_1 / 8 \omega) a^2 + (3 L^2 / \omega) d_1} \quad (\text{III.52})$$

$$\tan (\xi) = \frac{d_3 \omega}{d_1} \quad (\text{III.53})$$

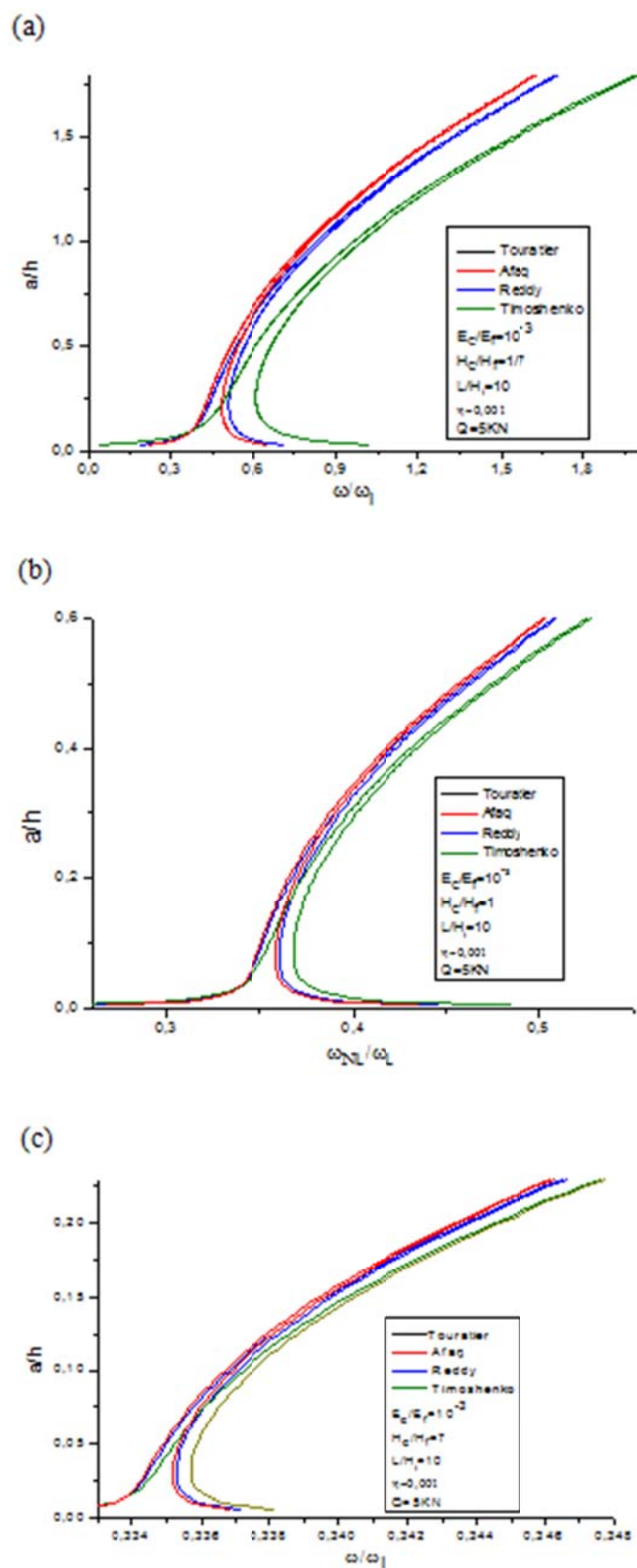


Figure III.2 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire pour différentes valeurs de h_c/h_f lorsque ω est proche de $\omega_1/3$ selon différents modèles cinématiques.

III.5. Résultats numériques

Dans cette section, les résultats numériques sont présentés pour une poutre sandwich simplement supportée illustrée à la Fig.III.1, sous excitations harmoniques en utilisant des théories de zig-zag d'ordre supérieur. Les fonctions de cisaillement considérées dans le noyau viscoélastique, liées à ces théories sont présentées dans le tableau III.1. Les principales propriétés matérielles et géométriques de la structure de poutre sandwich sont répertoriées dans le tableau III.2. La variation du rapport de fréquence non linéaire ω/ω_1 sur la fonction de l'amplitude de vibration des poutres sandwich dans les vibrations super harmoniques proches de la fréquence $\omega_1/3$ a été calculée et dessinée sur les Fig.III.2 à 5 pour différents matériaux et paramètres géométriques.

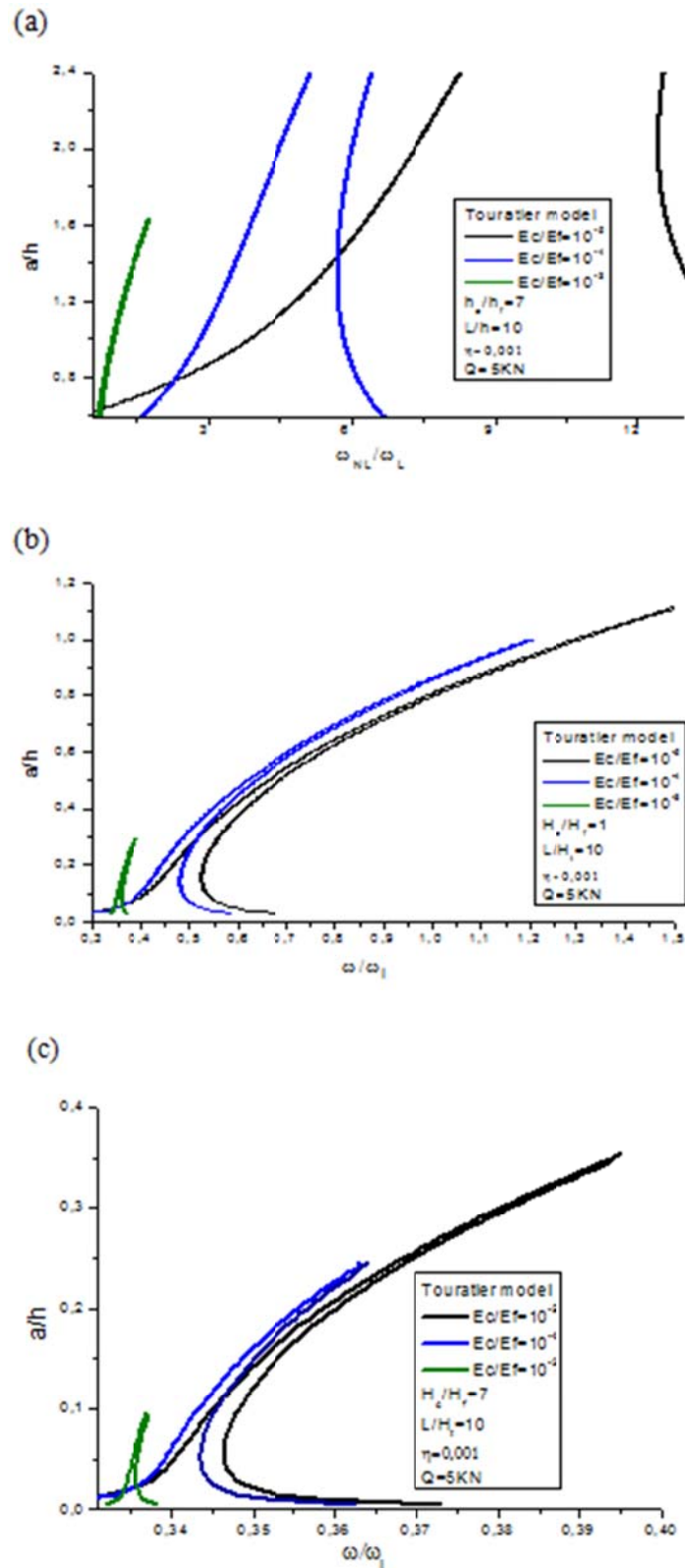


Figure III.3 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire pour diverses valeurs de h_c/h_f lorsque ω est proche de $\omega_1/3$ avec diverses valeurs de module de Young de la couche centrale viscoélastique

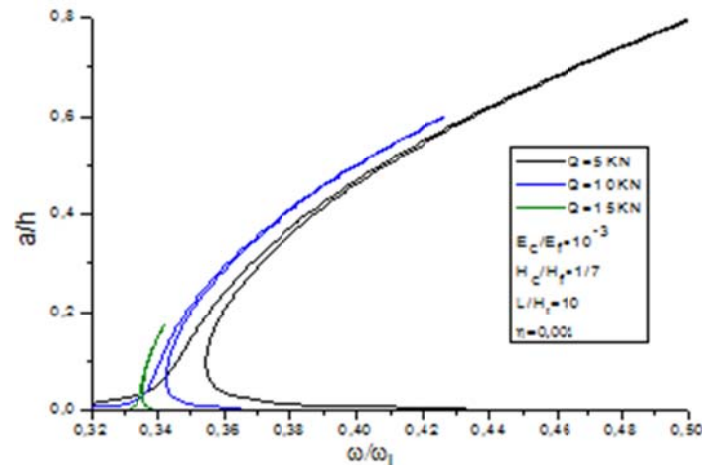


Figure III.4 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire avec le modèle de Touratier lorsque ω est proche de $\omega_1/3$ pour différentes amplitudes d'excitation Q .

Figures.III.2(a)--(c) montrent les influences des différentes fonctions de cisaillement considérées dans les théories en zig-zag d'ordre supérieur sur la réponse de résonance pour le problème de vibration super harmonique. Les résultats affichés par les théories du zig-zag d'ordre élevé sont respectivement liés aux modèles de fonction de cisaillement de Timoshenko (1922), Reddy (1984), Afaq (2003), Touratier (1991), donnés pour un noyau dont le rapport du module d'Young $E_c/E_f=10^3$. L'analyse de ces résultats nous permet de déduire que ceux fournis par le modèle de Touratier correspondent parfaitement à ceux de Timoshenko. D'autre part, les résultats représentés par le modèle de Reddy sont en bon accord avec ceux donnés par le modèle d'Afaq, principalement pour les poutres avec des couches centrales épaisses comme le montre la Fig.III.2 (c). Il a également été rapporté, en particulier pour les poutres sandwich avec une épaisseur de couche de noyau mince et modérée, comme observé sur la Fig.III.2 (a) et la Fig.III.2 (b), que le modèle d'Afaq conduit à un comportement d'écrouissage inférieur, suivi du modèle de Reddy. Les changements de durcissement les plus importants sont obtenus à la fois par les modèles Touratier et Timoshenko.

L'influence du rapport E_c/E_f qui indique la transition de la rigidité de la couche dure à la couche molle sur les réponses d'amplitude de fréquence dans la résonance super harmonique est représentée sur les Fig.III.3(a)--(c). La figure III.3(a) fait référence à la couche centrale mince avec $H_c/H_f=1/7$, tandis que la figure III.3(b) concerne les poutres sandwich avec une épaisseur de couche centrale modérée $H_c/H_f=1$ et la figure III.3(c) est lié au noyau viscoélastique épais avec $H_c/H_f=7$. Une remarque de ces figures est que, en général,

l'amplitude de fréquence est augmentée en diminuant le rapport E_c/E_f , en particulier pour la poutre sandwich à couche mince de coeur ($H_c/H_f = 1/7$), dans laquelle les améliorations d'amplitude de résonance sont si très grand pour les rapports E_c/E_f de 10^4 et 10^5 , à comparer avec celui de la couche de noyau comme le montre la Fig.III.3(b). Ainsi, comme observé sur les Fig.III.3(b) et (c), une augmentation significative des réductions d'amplitude de pointe pour les poutres sandwich ayant $H_c/H_f=1$ et $H_c/H_f=7$, lorsque le rapport E_c/E_f est diminué de 10^5 à 10^3 . La Fig. 3 indique également pour l'ensemble des poutres sandwich considérées, qu'elles soient minces ou épaisses, que cette diminution du rapport E_c/E_f conduit à un comportement non linéaire plus dur.

L'effet de la force d'amplitude d'excitation sur le cas de la résonance super harmonique est traité dans la Fig.III.4 pour la poutre sandwich avec une couche centrale mince ($H_c/H_f=1/7$). Cette figure révèle que sous fortes charges d'excitation on obtient des amplitudes importantes accompagnées de comportements plus durcissant.

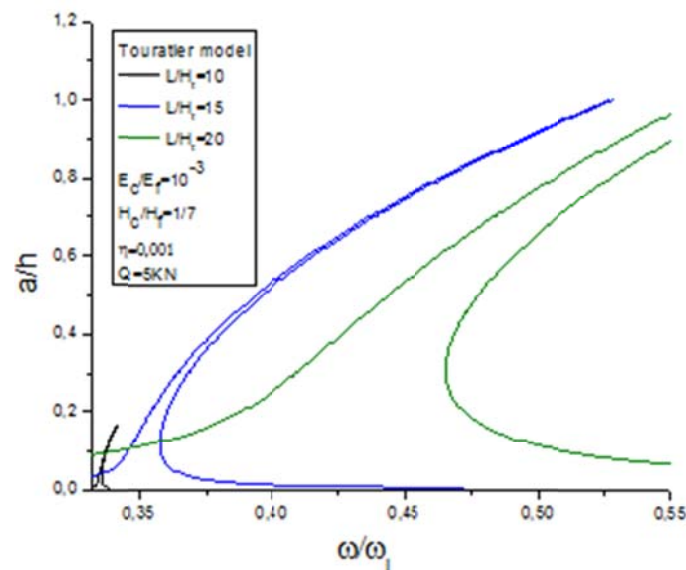


Figure III.5 Réponse en fréquence d'amplitude non linéaire avec le modèle de Touratier pour différentes valeurs de L/H_t lorsque ω est proche de $\omega_1/3$

La figure III.5 montre l'effet de l'élanement du faisceau sandwich sur la résonance super harmonique, on constate que pour les plus grandes valeurs du rapport d'aspect L/H_t du faisceau, on obtient bien sûr des amplitudes de pointe importantes, mais aussi plus d'effet de durcissement. Ce comportement peut être attribué à l'effet de la non-linéarité géométrique associée à l'augmentation du rapport d'aspect L/H_t .

III.6. Conclusion

Le modèle actuel est non seulement précis mais aussi simple pour prédire l'analyse des vibrations des poutres sandwich avec une couche centrale viscoélastique. Enfin, la formulation se prête particulièrement bien à l'étude de plusieurs problèmes liés au comportement dynamique des structures fonctionnellement graduées avancées

Conclusion générale :

L'analyse dynamique non linéaire des poutres sandwich a été étudiée. Des théories de zig-zag d'ordre supérieur ont été utilisées pour le champ de déplacement. Basée sur la méthode des échelles multiples, la résonance super harmonique est analysée en résolvant le système d'équations différentielles non linéaires. Des solutions analytiques fermées sont dérivées pour la relation amplitude-fréquence. Les principaux points suivants peuvent être tirés de la présente étude :

- Des études paramétriques ont indiqué que les paramètres géométriques H_c/H_f et L/H_t ont de forts effets sur les changements d'écroûissage pour l'analyse des vibrations forcées, principalement pour la poutre sandwich avec une couche centrale mince.
- Le modèle de Touratier conduit à des concordances parfaites par rapport à ceux de Timoshenko, que ce soit pour les poutres sandwich à noyau mince comme pour les poutres épaisses.
- Les propriétés mécaniques ont une grande influence sur la fréquence d'amplitude dans les vibrations super harmoniques. Dans ce contexte, les résultats obtenus montrent que l'utilisation d'une couche centrale souple peut fortement contribuer à l'augmentation de l'amplitude, en particulier pour les poutres sandwich avec des couches centrales minces.
- L'amplitude de la charge d'excitation a un effet prononcé à la fois, sur l'augmentation de l'amplitude et sur le comportement de durcissement.

Le modèle actuel est non seulement précis mais aussi simple pour prédire l'analyse des vibrations des poutres sandwich avec une couche centrale viscoélastique. Enfin, la formulation se prête particulièrement bien à l'étude de plusieurs problèmes liés au comportement dynamique des structures fonctionnellement graduées avancées (Houari et al. 2018, Jalaei et Civalek 2019, Daikh et al. 2020b, Cuong Le et al. 2020, Cuong Le et al. 2021, Civalek et al. 2021, Hirane et al. 2021, Belarbi et al. 2021ab, Garg et al. 2021).

References bibliographiques

- [1] Abualnour, M., Chikh, A., Hebali, H., Kaci, A., Tounsi, A., Bousahla, A. A., & Tounsi, A. (2019), “Thermomechanical analysis of antisymmetric laminated reinforced composite plates using a new four variable trigonometric refined plate theory”, *Computers and Concrete.*, 24(6), 489-498. <http://dx.doi.org/10.12989/cac.2019.24.6.489>.
- [2] Abualnour, M., Houari, M. S. A., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018), “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates”, *Composite Structures.*, **184**, 688-697. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.047>.
- [3] Afaq, K. S., Karama, M., & Mistou, S. (2003). “Un nouveau modèle raffiné pour les structures multicouches”. In *Comptes rendues des 13^{ème} journées nationales sur les composites*, Strasbourg., **13**, 289-292.
- [4] A. Chabot. Analyse des efforts a l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches. PhD thesis, ENPC, 1997.
- [5] Allahkarami, F., Nikkhah-Bahrami, M., & Saryazdi, M. G. (2017), “Damping and vibration analysis of viscoelastic curved microbeam reinforced with FG-CNTs resting on viscoelastic medium using strain gradient theory and DQM”. *Steel and Composite Structures.*, **25**(2), 141-155. <https://doi.org/10.12989/SCS.2017.25.2.141>.
- [6] Belarbi, M. O., Houari, M. S. A., Hirane, H., Daikh, A. A., & Bordas, S. P. A. (2021a), “On the finite element analysis of functionally graded sandwich curved beams via a new refined higher order shear deformation theory”. *Composite Structures.*, 114715. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114715>
- [7] Belarbi, M. O., Khechai, A., Bessaim, A., Houari, M. S. A., Garg, A., Hirane, H., & Chalak, H. D. (2021b). Finite element bending analysis of symmetric and non-symmetric functionally graded sandwich beams using a novel parabolic shear deformation theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 14644207211005096. <https://doi.org/10.1177/14644207211005096>
- [8] Belouettar, S., Azrar, L., Daya, E. M., Laptev, V., & Potier-Ferry, M. (2008)., “Active control of nonlinear vibration of sandwich piezoelectric beams”: A simplified approach. *Computers & structures.*, **86**(3-5), 386-397. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.02.009>.
- [9] Berthelot Jean-Marie, « Matériaux composites », 2^{ème} édition, Masson, Paris, 1996.

- [10] Bhimaraddi, A. (1995). "Sandwich beam theory and the analysis of constrained layer damping". *Journal of sound and vibration.*, **179**(4),591-602. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0039>.
- [11] Bilasse, M., Daya, E. M., &Azrar, L. (2010). "Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams". *Journal of Sound and vibration .*, **329**(23), 4950-4969. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.06.012>.
- [12] Cheraghbak, A., Dehkordi, M. B., &Golestanian, H. (2019), "Vibration analysis of sandwich beam with nanocompositefacesheets considering structural damping effects"., *Steel and Composite Structures*, **32**(6), 795-806. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.32.6.795>.
- [13] Civalek, Ö.,Dastjerdi, S., Akbaş, Ş. D., &Akgöz, B. (2021), "Vibration analysis of carbon nanotube-reinforced composite microbeams", *Mathematical Methods in the Applied Sciences.*, <https://doi.org/10.1002/mma.7069>.
- [14] Cuong-Le, T., Nguyen, K. D., Nguyen-Trong, N., Khatir, S., Nguyen-Xuan, H., & Abdel-Wahab, M. (2021). "A three-dimensional solution for free vibration and buckling of annular plate, conical, cylinder and cylindrical shell of FG porous-cellular materials using IGA".*Composite Structures.*, **259**, 113216. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113216>
- [15] Cuong-Le, T., Nguyen, T. N., Vu, T. H., Khatir, S., &Wahab, M. A. (2020). "A geometrically nonlinear size-dependent hypothesis for porous functionally graded micro-plate". *Engineering with Computers.*,1-12. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01154-0>
- [16] Daikh, A. A., Houari, M. S. A., Belarbi, M. O., Chakraverty, S., &Eltaher, M. A. (2021). Analysis of axially temperature-dependent functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates. *Engineering with Computers*, 1-22.<https://doi.org/10.1007/s00366-021-01413-8>
- [17] Dufort. L, Drapier. S, and Grediac. M. « Closed form solution for the cross section warping in short beams under three point bending ». *Composite structures*, page : 233-246, 2001.
- [18] Daniel Gay, « Matériaux composites », 4^{ième} édition, Hermès, Paris, 1997.

- [19] Daya, E. M., Azrar, L., &Potier-Ferry, M. (2004) . “An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams”. *Journal of Sound andVibration.*,**271**(3-5), 789-813. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00754-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00754-5).
- [20] Demir, E. (2016), “A study on natural frequencies and damping ratios of composite beams with holes”. *Steel and Composite Structures.*,**21**(6), 1211-1226.<https://doi.org/10.12989/scs.2016.21.6.1211>.
- [21] Demir, E. (2017b), “Vibration and damping behaviors of symmetric layered functional graded sandwich beams”. *Structural engineering and mechanics: An international journal.*,**62**(6),771-780. <https://doi.org/10.12989/sem.2017.62.6.771>.
- [22] E. Carrera. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite structures*, vol. 50, pages 183,198, 2000.
- [23] Emam, S. A., &Nayfeh, A. H. (2009).“ Postbuckling and free vibrations of composite beams”. *Composite Structures* .,**88**(4), 636-642. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.06.006>.
- [24] E. Reissner & Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of hetero-geneous aelotropic elastic plate. *J. Appl. Mech.*, vol. 28, pages 402,408, 1961.
- [25] G. Kirchhoff. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal fur reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, pages 51, 88, 1850.
- [26] Garg, A., Chalak, H. D., Belarbi, M. O., Chakrabarti, A., & Houari, M. S. A. (2021). Finite element-based free vibration analysis of power-law, exponential and sigmoidal functionally graded sandwich beams. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, 102(5), 1167-1201. <https://doi.org/10.1007/s40032-021-00740-5>
- [27] Gibson, R. F., & Plunkett, R. (1977).“Dynamic stiffness and damping of fiber-reinforced composite materials”. *Shock Vib Dig.*,9-18.<https://doi:10.1177/058310247700900205>.
- [28] Hashin (1970). Complex moduli of viscoelastic composites-I. General theory and application to particulate composite. *International journal of solids and structures* volume 6, Issue 5, May 1970 page 539-559
- [29] Hirane, H., Belarbi, M. O., Houari, M. S. A., &Tounsi, A. (2021). On the layerwise finite element formulation for static and free vibration analysis of functionally graded sandwich plates. *Engineering with Computers.*, 1-29. <https://doi.org/10.1007/s00366-020-01250-1>.

- [30] Houari, M. S. A., Bessaim, A., Bernard, F., Tounsi, A., & Mahmoud, S. R. (2018), “Buckling analysis of new quasi-3D FG nanobeams based on nonlocal strain gradient elasticity theory and variable length scale parameter”. *Steel and Composite Structures*, **28**(1), 13-24. <https://doi.org/10.12989/scs.2018.28.1.013>.
- [31] Houari, T., Bessaim, A., Houari, M. S. A., Benguediab, M., & Tounsi, A. (2018). Bending analysis of advanced composite plates using a new quasi 3D plate theory. *Steel and Composite Structures*, **26**(5), 557-572. <https://doi.org/10.12989/scs.2018.26.5.557>
- [32] Hu, H., Belouettar, S., & Potier-Ferry, M. (2008). “Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites”. *Composite Structures*, **84**(3), 282-292. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.08.007>.
- [33] Hyer, M. W., Anderson, W. J., & Scott, R. A. (1976). “Non-linear vibrations of three-layer beams with viscoelastic cores I. Theory”. *Journal of Sound and Vibration*, **46**(1), 121-136. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(76\)90822-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(76)90822-1)
- [34] Jalaei, M. H., & Civalek, Ö. (2019). On dynamic instability of magnetically embedded viscoelastic porous FG nanobeam. *International Journal of Engineering Science*, **143**, 14-32. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.013>.
- [35] J.M. Whitney. « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J. Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [36] J.N. Reddy. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, vol. 3, pages 173,180, 1987.
- [37] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Jornal of Applied Mechanics*, vol. 51, pages 745-752, 1984.
- [38] Kapuria, S., Dumir, P. C., & Jain, N. K. “Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams”. *Composite structures*, **64**(3-4), 317-327. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.08.013>.
- [39] Khanin, R., Cartmell, M., & Gilbert, A. (2000) . “A computerised implementation of the multiple scales perturbation method using Mathematica” .*Computers & Structures*, **76**(5). [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00184-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00184-4)
- [40] Kolahchi, R. (2017), “A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods”, *Aerosp. Sci. Technol.*, **66**, 235-248. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.03.016>

- [41] Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H. and Oskouei, A.N. (2017a), “Visco-nonlocal-refined Zigzag theories for dynamic buckling of laminated nanoplates using differential cubature-Bolotin methods”, *Thin-Wall.Struct.*, **113**, 162-169.<https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.01.016>.
- [42] Kolahchi, R., Zarei, M.S., Hajmohammad, M.H. and Nouri, A. (2017b), “Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory”, *Int. J. Mech. Sci.*, **130**, 534-545.<https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.06.039>.
- [43] Kovac Jr, E. J., Anderson, W. J., & Scott, R. A. (1971). “Forced non-linear vibrations of a damped sandwich beam” . *Journal of Sound and Vibration* ., **17**(1), 25-39.
[https://doi.org/10.1016/0022-460X\(71\)90131-3](https://doi.org/10.1016/0022-460X(71)90131-3).
- [44] L. Liberscu. On the theory of anisotropic elastic shell and plates. *Int J Solids Structures*, vol. 3, pages 53,68, 1967.
- [45] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916, 1991.
- [46] Maurice Reyne, « Technologie des composites », 2^{ème} édition, Hermès, Paris, 1995.
- [47] Matter, Marco (2008). Identification modale numérique expérimentale des propriétés élastiques et dissipatives de matériaux composites <https://doi.org/10.5075/epfl-thesis4215>
- [48] M. Di Sciuva. An improved shear-deformation theory for moderately thick mul-tilayered anisotropic shells and plates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 54, pages 589(596), 1987).
- [49] Metin Aydogdu, Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 1740–1755.
- [50] Michel Dupeux, « Aide-mémoire Science des matériaux », Dunod, Paris, 2004.
- [51] Moita, J. S., Araújo, A. L., Martins, P., Soares, C. M., & Soares, C. M. (2011). “A finite element model for the analysis of viscoelastic sandwich structures”. *Computers & structures*, **89**(21-22), 1874-1881.<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.05.008>
- [52] Pagano, N. J. (1969). “Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending”. *Journal of composite materials*, **3**(3), 398-411.<https://doi.org/10.1177/002199836900300304>

- [53] Pierre-Etienne Bourban, Leif Carlsson, Jean Pierre Mercier, Jan-Anders E.Mansson, « Matériaux Composites à Matrice Organique », 1^{ière} édition, Presses Polytechniques et universitaires Romandes, Lausanne, 2004.
- [54] Rabhi, M., Benrahou, K. H., Kaci, A., Houari, M. S. A., Bourada, F., Bousahla, A. A., ... &Tounsi, A. (2020). A new innovative 3-unknown HSDT for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Geomechanics and Engineering*, **22**(2), 119-132. <https://doi.org/10.12989/gae.2020.22.2.119>
- [55] Rao, D. K. (1978). "Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions". *Journal of Mechanical Engineering Science.*,**20**(5), 271-282. https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1978_020_047_02.
- [56] Reissner, E. (1945). "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates". *J. appl. Mech.*, A69-A77. <https://doi.org/10.1177/002199836900300316>
- [57] Rikards, R. (1993). "Finite element analysis of vibration and damping of laminated composites". *Composite structures.*,**24**(3),193-204. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(93\)90213-A](https://doi.org/10.1016/0263-8223(93)90213-A).
- [58] Sahoo, R., & Singh, B. N. (2014). "A new trigonometric zigzag theory for buckling and free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates". *Composite Structures.*,**117**, 316-332. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.002>.
- [59] Timoshenko, S. P. (1922). X. "On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.*,**43**(253), 125-131. <https://doi.org/10.1080/14786442208633855>
- [60] Viet.Tung. Nguyen. « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.
- [61] Youzera, H., &Meftah, S. A. (2017) . "Nonlinear damping and forced vibration behaviour of sandwich beams with transverse normal stress". *Composite Structures* .,**179**, 258-268. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.07.038>.

[62] Youzera, H., Meftah, S. A., Challamel, N., &Tounsi, A. (2012).“Nonlinear damping and forced vibration analysis of laminated composite beams”. *Composites Part B: Engineering*,**43**(3), 1147-1154.<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.01.008>.

[63] Youzera, H., Meftah, S. A., &Daya, E. M. (2017a), “Superharmonic resonance of cross-ply laminates by the method of multiple scales”. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*.,**12**(5). <https://doi.org/10.1115/1.4036914>.

[64] Zinoviev, P. A., &Ermakov, Y. N. (1994).“Energy dissipation in composite materials”.CRC Press.

Annexe

Annexe A : Définition des constantes dans l'eqt (III.31)

$M = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \mathfrak{W}^2 dx$	A1)
$F_1 = \frac{1}{M} \int_0^L \mathfrak{W}(t) \sin(kx) dx$	A2)
$\alpha_1 = \frac{s_5 k^4}{M} \int_0^L \mathfrak{W}^2 dx$	A3)
$\alpha_2 = -\frac{s_6 k^3}{M} \int_0^L \mathfrak{W}^2 dx$	A4)
$\alpha_3 = \frac{N_1 k^4}{M} \int_0^L \mathfrak{W}^2 dx$	A5)
$\alpha_4 = \frac{N_2 k^4}{M} \int_0^L \mathfrak{W}^2 dx$	A6)
$\alpha_5 = \frac{s_1 k^4}{M} \int_0^L \mathfrak{W}^2 dx$	A7)
$\alpha_6 = -\frac{s_2 k^3}{M} \int_0^L \mathfrak{W}^2 dx$	A8)
$\alpha_7 = s_2 k^3 L$	A9)
$\alpha_8 = -s_3 k^2 L$	A10)
$\alpha_9 = s_6 k^3 L$	A11)
$\alpha_{10} = -s_7 k^2 L$	A12)
$\alpha_{11} = -s_4 L$	A13)
$\alpha_{12} = -s_8 L$	A14)