

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha STAMBOULI de Mascara

Faculté des Sciences et de la Technologie



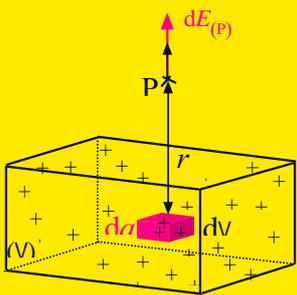
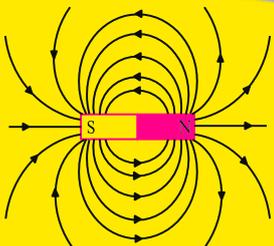
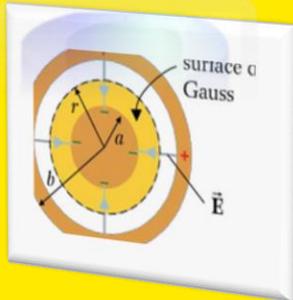
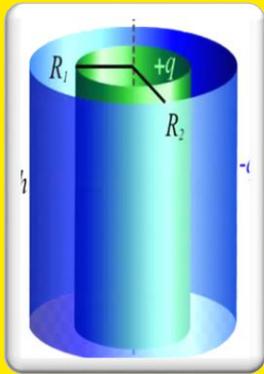
Polycopié de Cours

Physique 2
Cours et exercices corrigés

Présenté par : Dr. BELOUFA Abbas

Ce cours est destiné aux étudiants de première année
Licence Sciences et Techniques

Algérie
2023



Physique 2

R E C I S

Tout le COURS
Illustré, avec des points méthode
et des rappels mathématiques

Des exercices
Ciblés, incontournables
ou extraits de sujets

Des corrigés
Complets, clairs,
assortis de nombreux conseils

Dr. BELOUFA Abbas

Année 2023



Avant-Propos

Strictement conforme au nouveau programme, ce polycopié de cours s'adresse à tous les étudiants de première année LMD, domaine : sciences et techniques (ST). À ce titre, il s'adresse aussi largement aux *enseignant-es*, à qui il fournit des méthodes utiles pour le cours et pour les examens (exercices et QCM).

Chaque chapitre est divisé en deux parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes.

- Les **exercices**, dont les corrigés sont détaillés, sont classés en deux catégories : des tests de connaissance sous forme de QCM et des exercices d'approfondissement qui permettent d'aller un peu plus loin ou de détailler certains calculs qui ne sont pas développés complètement dans le chapitre. Ils sont d'un niveau facile à moyen.

Ce document est accompagné par des rappels mathématiques dans la première partie et des grandeurs physiques ainsi que la bibliographie utilisée.

Ce manuscrit est composé de quatre grands chapitres :

Le premier chapitre est consacré à l'électrostatique. Les phénomènes électrostatiques sont introduits à partir de la loi de Coulomb et du principe de superposition. Le théorème de Gauss est démontré en calculant la divergence du champ électrique défini à partir de la loi de Coulomb et le potentiel électrostatique qui sont créés par des charges ponctuelles et par une distribution de charge continue.

Le deuxième et le troisième chapitre, portent sur les conducteurs en équilibre et l'électrocinétique des courants continus. La relation entre charges et potentiels dans un système de conducteurs en équilibre et dans les condensateurs

Le quatrième est consacré à l'électromagnétique débute par une définition du champ magnétique et la force de Lorentz. Nous avons préféré commencer ce chapitre ; la loi de Laplace ; la loi de Biot-Savart est décrite comme une conséquence des propriétés du champ magnétique et du potentiel et par le théorème d'Ampère.

Ce document regroupe l'ensemble des exercices donnés aux étudiants de la première année tronc commun en Physique avec leurs corrigés, on trouvera ici les devoirs maison (exercices non résolus). Ce polycopié est ainsi un outil de travail complet.

Nous souhaitons que cet ouvrage puisse aider de manière efficace une majorité d'étudiant.

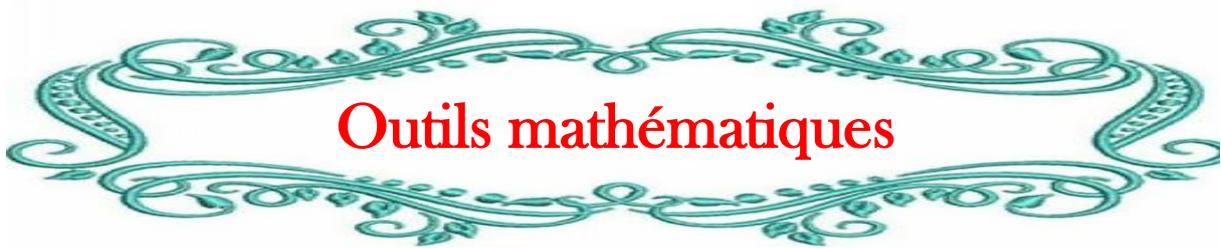
Table
des matières

A wooden sign with a dark brown, textured surface and irregular, torn edges. The text 'Table des matières' is written in a yellow, serif font with a slight shadow effect. The sign is centered on a dark gray background within a red-bordered frame.

Table des matières

A decorative sign with a light green background and a white border. The text 'Table des matières' is written in a white, cursive font with a red shadow effect. The sign is framed by a yellow border and set against a dark gray background.

TABLE DES MATIERES



1	Rappels sur les vecteurs	02
2	Opérations sur les vecteurs	03
	<i>2.1 Addition et soustraction de vecteurs</i>	03
	<i>2.2 Produit scalaire et analytique</i>	03
	<i>2.3 Produit vectorielle</i>	04
	<i>2.4 Orthogonalité</i>	05
3	Principaux systèmes de coordonnées	05
	<i>3.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)</i>	05
	<i>3.2 Coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)</i>	06
	<i>3.3 Coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)</i>	07
4	Dérivées partielles et différentielle	10
	<i>4.1 Dérivée d'un vecteur</i>	10
	<i>4.2 Opérateurs différentiels vectoriels</i>	11
	<i>4.2.1 Opérateur vectoriel « Nabla »</i>	11
	<i>4.2.2 Gradient</i>	11
	<i>4.2.3 Divergence</i>	12
	<i>4.2.4 Rotationnel</i>	12



Chapitre I : Electrostatiques

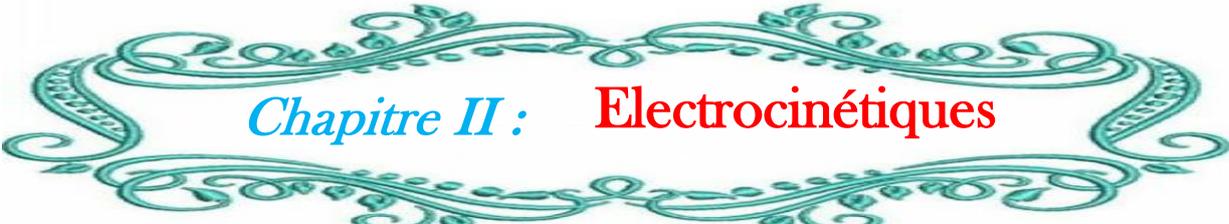
I.1	Introduction	15
I.2	Charges et Force électrostatiques	15
<i>I.2.1</i>	<i>Charge élémentaire</i>	<i>15</i>
<i>I.2.2</i>	<i>Charge électrique</i>	<i>15</i>
<i>I.2.3</i>	<i>Force électrostatique</i>	<i>15</i>
I.2.4	Loi de Coulomb	16
a)	<i>Interaction entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2</i>	<i>16</i>
b)	<i>Principe de superposition</i>	<i>18</i>
I.3	Champ électrique	18
<i>I.3.1</i>	<i>Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle</i>	<i>19</i>
<i>I.3.2</i>	<i>Champ créé par un ensemble de charges - principe de superposition</i>	<i>19</i>
<i>I.3.3</i>	<i>Champ électrique engendré par une distribution de charge</i>	<i>20</i>
I.3.4	Lignes de champ électrostatique	21
I.4	Potentiel électrostatique	21
<i>I.4.1</i>	<i>Cas d'une distribution de charge ponctuelle</i>	<i>21</i>
<i>I.4.2</i>	<i>Cas d'une distribution de n charges ponctuelles</i>	<i>22</i>
<i>I.4.3</i>	<i>Moment dipolaires électriques</i>	<i>23</i>
<i>I.4.4</i>	<i>Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle isolé</i>	<i>23</i>
I.5	Théorème de Gauss	26



<i>I.5.1</i>	<i>Étapes d'application du théorème</i>	28
a)	Théorème de Gauss pour une charge ponctuelle seule	28
b)	Théorème de Gauss pour une distribution continue de charges	29
I.6	Conducteurs en équilibre	42
<i>I.6.1</i>	<i>Définition</i>	42
<i>I.6.2</i>	<i>Propriétés d'un conducteur en équilibre</i>	43
a)	Champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre	43
b)	Champ électrostatique à l'extérieur d'un conducteur en équilibre	43
d)	Théorème de Faraday	45
I.7	Pression électrostatique	46
I.8	Condensateur	47
<i>I.8.1</i>	<i>Définition d'un condensateur</i>	47
<i>I.8.2</i>	<i>Capacité d'un condensateur en équilibre</i>	48
<i>I.8.3</i>	<i>Energie d'un système de conducteurs</i>	49
a)	<i>Énergie potentielle électrostatique d'un conducteur</i>	49
b)	<i>Énergie électrostatique d'interaction de n charges ponctuelles</i>	49
<i>I.8.4</i>	<i>Phénomènes d'influence de conducteurs en équilibre électrostatique</i>	49
<i>I.8.5</i>	<i>Système de n conducteurs en équilibre</i>	50
<i>I.8.6</i>	<i>Associations de condensateurs</i>	54
a)	<i>Assemblage des condensateurs en série</i>	54
b)	<i>Assemblage des condensateurs en parallèle</i>	55
<i>I.8.7</i>	<i>Energie d'un condensateur</i>	56
I.9	Exercices résolus	57



I.10	QCM	101
I.11	Exercices non résolus	108

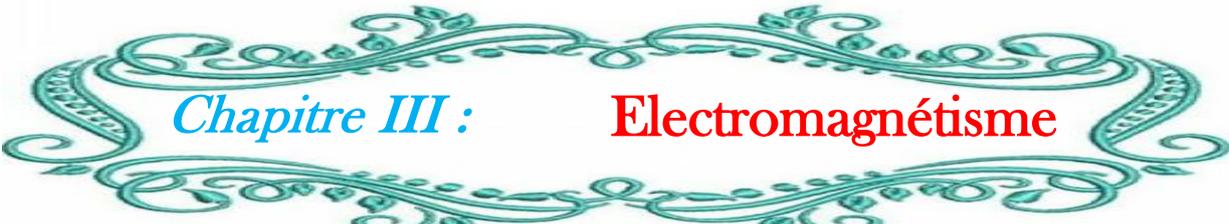


Chapitre II : Electrocinétiques

II.1	Introduction	118
II.2	Conducteurs électrique	118
	<i>II.2.1 Définition</i>	118
	<i>II.2.2 Courant électrique</i>	118
	a) Définitions	118
	b) La densité de courant électrique	119
	c) Intensité du courant électrique	120
II.3	Loi d'Ohm	120
II.4	Circuit électrique	122
	<i>II.4.1 Définition</i>	122
	<i>II.4.2 Dipôle électrique</i>	123
	<i>II.4.3 Interrupteur idéal</i>	124
	<i>II.4.4 Resistance (Elément passive)</i>	124
	a) Résistivité électrique	124
	b) Association de résistances en série	125
	c) Association de résistances en parallèle (ou dérivation)	125



	d) <i>Code de couleurs</i>	126
II.5.	Lois de KIRCHHOFF	127
	<i>II.5.1 Terminologie des circuits</i>	127
	<i>II.5.2 Les lois de KIRCHHOFF</i>	128
	<i>a) Première loi (Loi des nœuds)</i>	128
	<i>b) Deuxième loi (Loi des mailles)</i>	128
II.6	Théorème de Thévenin	129
II.7	Puissance – dipôles récepteurs et générateurs	129
II.8	Exercices résolus	130
II.9	QCM	146
II.10	Exercices non résolus	148



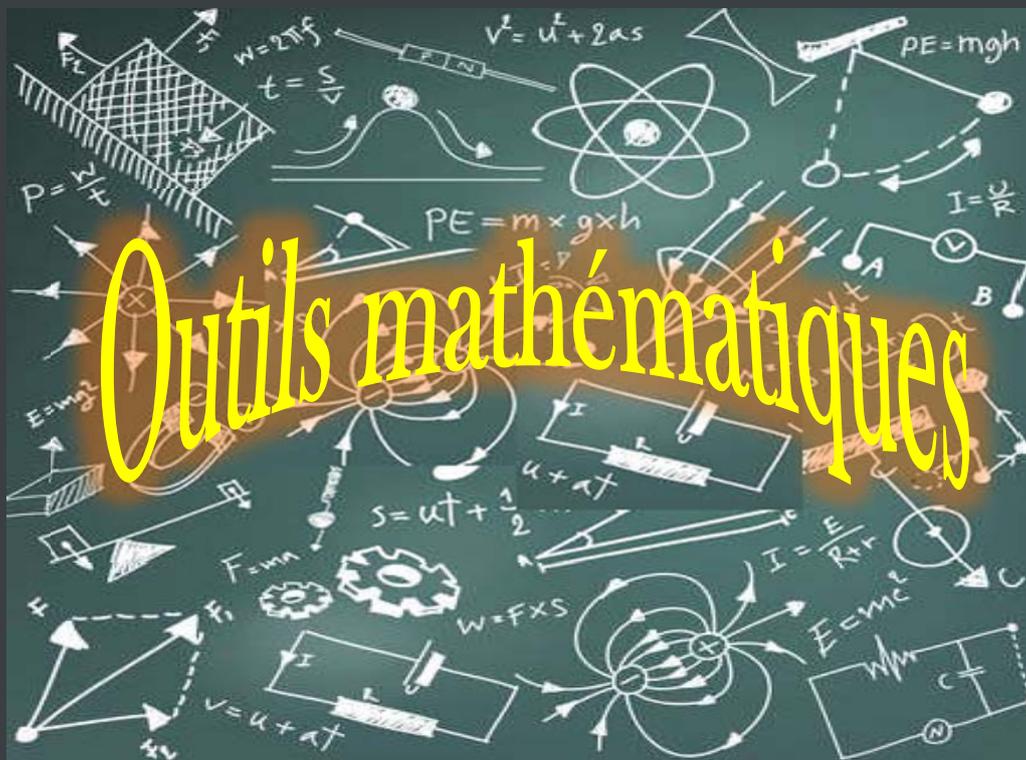
Chapitre III : **Electromagnétisme**

III.1	Introduction	152
III.2	Définition du champ magnétique et la force de Lorenz	153
	<i>III.2.1 Sources de champ magnétique</i>	154
	<i>III.2.2 Principe de superposition</i>	155
	<i>a) Lignes de champ magnétique</i>	156
	<i>b) Travail de la force de Lorentz</i>	156
III.3	Loi de Laplace	157



<i>III.3.1</i>	<i>Définition</i>	157
<i>III.3.2</i>	<i>Caractéristiques de la force de Laplace</i>	157
<i>III.3.3</i>	<i>Le vecteur d'excitation magnétique</i>	158
III.4	Loi de Biot et Savart	158
III.5	Loi d'Ampère	159
<i>III.5.1</i>	<i>Forme intégrale</i>	159
<i>III.5.2</i>	<i>Forme locale</i>	159
III.6	Loi de Faraday	159
<i>III.6.1</i>	<i>Phénomènes d'induction électromagnétique</i>	159
<i>III.6.2</i>	<i>Enoncé de la Loi de Faraday</i>	160
III.7	La loi de Lenz	161
III.8	Flux magnétique	162
<i>III.8.1</i>	<i>Enoncé</i>	162
<i>III.8.2</i>	<i>Propriété du flux magnétique</i>	162
III.9	Dipôle magnétique	163
<i>III.9.1</i>	<i>Moment magnétique d'une spire plane</i>	164
<i>III.9.2</i>	<i>Moment magnétique d'une bobine</i>	164
<i>III.9.3</i>	<i>Lignes de champ d'un moment magnétique</i>	164
III.10	Exercices résolus	165
III.11	QCM	169
III.12	Exercices non résolus	171





Outils mathématiques

Sommaire

1. Rappels sur les vecteurs
2. Operations des vecteurs
3. Principaux systemes de coordonnées
4. Dirivées partielles et diferentielles

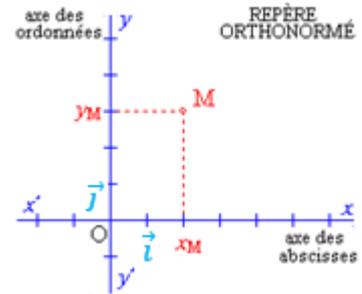


Rappels

1. Rappels sur les vecteurs

Un repère cartésien du plan est un triplet (O, \vec{i}, \vec{j}) où O est un point arbitrairement choisi comme origine et (\vec{i}, \vec{j}) deux vecteurs non colinéaires.

Figure (A-1) : repère cartésien à deux vecteurs (\vec{i}, \vec{j})



Un repère cartésien de l'espace est un quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point arbitrairement choisi comme origine et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ trois vecteurs non coplanaires.

$$\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (\text{A-1})$$

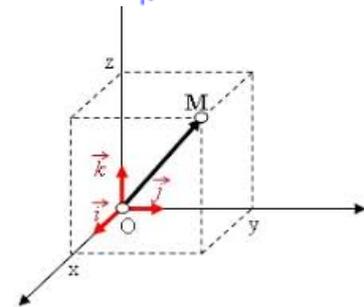
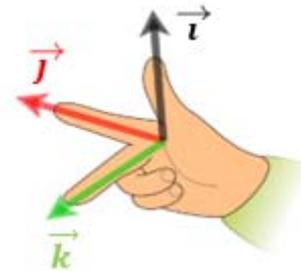


Figure (A-2) : repère cartésien à trois vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Un vecteur \vec{OM} est un segment orienté qui possède un vecteur unitaire :

$$\vec{OM} = \|\vec{OM}\| \vec{u} \quad (\text{A-2})$$

Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit repère cartésien orthogonal (ou rectangulaire) si les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont deux à deux perpendiculaires.



Le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit repère cartésien orthonormal (ou orthonormé) si les trois vecteurs du repère cartésien orthogonal sont des vecteurs unitaires

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1. \quad (\text{A-3})$$

Un point M est repéré par ses **coordonnées** dans le repère (R) : $M(x, y, z)$.

Un vecteur \vec{OM} est défini par ses **composantes** dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:



$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (Vecteur position).}$$

□ Les grandeurs physiques peuvent être de nature scalaire ou vectorielle.

a) Grandeur scalaire

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

Exemple : volume, masse, température, charge électrique, énergie...

b) Grandeur vectorielle

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

Exemple : déplacement, vitesse, force, champ électrique...

2 Opérations sur les vecteurs

2.1 Addition et soustraction de vecteurs

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale et soit : $\vec{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La somme $\vec{A} + \vec{B}$ de deux vecteurs est définie comme suit : on met les deux vecteurs bout à bout de sorte que le point terminal de \vec{A} coïncide avec le point initial de \vec{B}

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} x + x_1 \\ y + y_1 \\ z + z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-4})$$

La différence $\vec{A} - \vec{B}$ de deux vecteurs est définie comme : $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

$$\vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \\ z - z_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

2.2 Produit scalaire et analytique

Le produit scalaire de deux vecteurs est le scalaire, noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$ est un nombre réel, est défini par trois :

**1^{ère} définition (avec les coordonnées des vecteurs), dite "analytique" :**

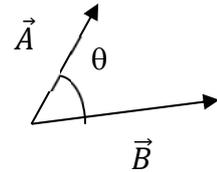
On a :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = xx_1 + yy_1 + zz_1 \quad (\text{A-6})$$

$$\text{Sachant que : } \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 ; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \quad (\text{A-7})$$

2^{ème} définition (géométrique) :

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} , formant entre eux un angle θ , est le nombre réel noté " $\vec{A} \cdot \vec{B}$ " obtenu en effectuant le calcul suivant :

**Figure (A-3) :** produit scalaire

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos\theta \quad (\text{A-8})$$

❖ En comparant les deux expressions du produit scalaire, on peut obtenir une expression de l'angle (cosinus directeur) en fonction des coordonnées des deux vecteurs :

Notes

1 Nous pouvons déduire de la définition et de l'expression analytique d'un produit scalaire l'expression de la norme d'un vecteur \vec{A} :

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{A}\| = \|\vec{A}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ;$$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{A} - \vec{B}\|^2 - \|\vec{A}\|^2 - \|\vec{B}\|^2 \right) \quad (\text{A-9})$$

2.3 Produit vectorielle

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur dont les coordonnées dépendent de celles des deux vecteurs de départ (contrairement au produit scalaire où le résultat du produit de deux vecteurs est un scalaire (un nombre)).

Nous pouvons déduire de la définition et de l'expression analytique d'un produit.



- ▣ Le produit vectoriel s'applique seulement dans un espace en trois dimensions.
- ▣ Le produit vectoriel peut être exprimé de manière **géométrique** ou **algébrique** :
- a) La formule du produit vectoriel, par l'approche **géométrique**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin(\vec{A}, \vec{B}) \vec{n} \quad (\text{A-10})$$

- b) La formule du produit vectoriel, par l'approche **algébrique**

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz_1 - zy_1 \\ zx_1 - xz_1 \\ xy_1 - yx_1 \end{vmatrix} \quad (\text{A-11})$$

Ou bien :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = (yz_1 - zy_1)\vec{i} - (zx_1 - xz_1)\vec{j} + (xy_1 - yx_1)\vec{k}$$

Sachant que : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$;

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j};$$

$$\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}; \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$$

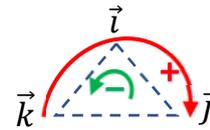


Figure (A-4) : produit vectoriel de trois vecteurs unitaires

2.4 Orthogonalité

Deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul ;

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0 \quad (\text{A-13})$$

3. Principaux systèmes de coordonnées

3.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

La position du point M est caractérisée par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Le vecteur position \overrightarrow{OM} s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (\text{A-14})$$

Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes :

$$d\overrightarrow{OM} = d\vec{r}(t) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \quad (\text{A-15})$$



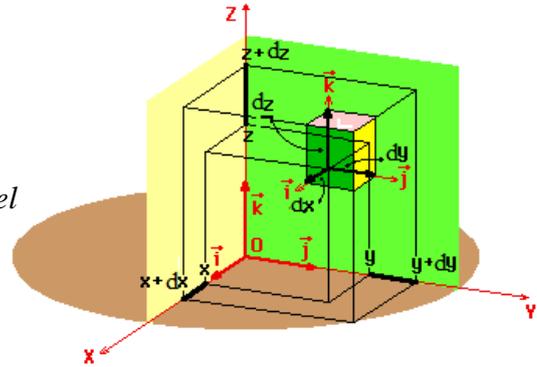
Le vecteur vitesse d'un dans l'espace cartésien est défini par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (\text{A-16})$$

Volume élémentaire en coordonnées cartésiennes :

$$dV = dx dy dz \quad (\text{A-17})$$

Figure (A-4) : produit vectoriel de trois vecteurs unitaires



3.2 Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

Soit un repère d'espace orthonormé d'origine O et de vecteurs de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{k})$. La position du point M est caractérisée par ses coordonnées cylindriques ρ , φ et z . Le vecteur \vec{OM} s'écrit alors :

$$\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{k} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k} = r \vec{u}_r \quad (\text{A-17})$$

φ est l'angle formé entre \vec{i} et \vec{u}_r .

La norme du vecteur \vec{OM} est définie par :

$$\|\vec{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (\text{A-18})$$

Lorsqu'on souhaite passer du système de coordonnées polaires au système de coordonnées cartésiennes (ou inversement) il existe des relations simples entre les différentes composantes (coordonnées et vecteur de base) :

$$\text{Relations sur les coordonnées : } \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

$$\text{Relations sur les vecteurs unitaires : } \begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases} \quad (\text{A-20})$$



Le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (\text{A-21})$$

Le vecteur de déplacement en coordonnées cylindriques :

$$d\vec{r}(t) = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\varphi \vec{u}_\varphi + dz \vec{k} \quad (\text{A-22})$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (\text{A-23})$$

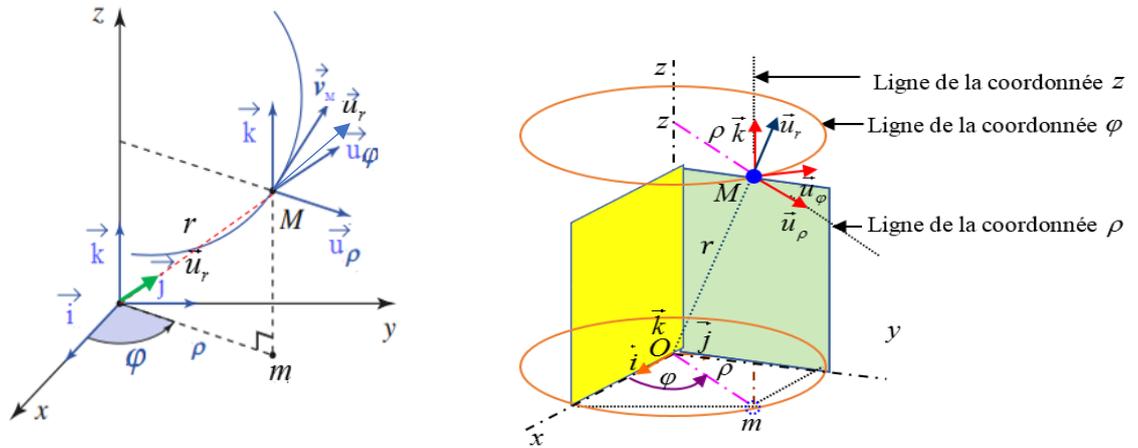


Figure (A-5) : système cylindrique.

3.3 Coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Soit le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes. On construit une sphère de centre O et un point matériel M sur sa surface.

On note: $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r > 0$

Les vecteurs de base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ forment la base orthonormée du système. Cette base est utilisée dans tous les problèmes présentant une symétrie sphérique.

Le vecteur \overrightarrow{OM} est radial ; il est défini par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

$$\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} \quad (\text{A-24})$$

$$\overrightarrow{mM} = r \cos \theta \vec{k} \quad (\text{A-25})$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k}$$



Le vecteur position en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r(\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}) \\ \|\overrightarrow{OM}\| = r \end{cases} \quad (\text{A-26})$$

$$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \quad (\text{A-27})$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} = \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \quad (\text{A-28})$$

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ base orthonormée directe :

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta, \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_r, \vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi. \quad (\text{A-29})$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{i} \begin{vmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_\varphi &= \vec{i}(-\sin^2 \theta \sin \varphi - \cos^2 \theta \cos \theta^2 \sin \varphi) - \vec{j}(-\sin^2 \theta \cos \varphi - \cos^2 \theta \cos \varphi) \\ &\quad + \vec{k}(\sin \theta \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{i} \sin \varphi (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - \vec{j} \cos \varphi (-\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i} \sin \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + \vec{j} \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$\vec{u}_\varphi = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases} \quad (\text{A-30})$$

Lorsque l'on souhaite passer du système de coordonnées sphériques au système de coordonnées cartésiennes (ou inversement) il existe des relations simples entre les différentes composantes (coordonnées et vecteur de base):

- Relations sur les coordonnées :
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



Relations sur les vecteurs unitaires :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= (\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})dr \\ &\quad + (\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - r \sin \theta \vec{k})r d\theta \\ &\quad + (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})r \sin \theta d\varphi \end{aligned}$$

$d\vec{OM}$ est appelé déplacement élémentaire, noté dl

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \rightarrow dx = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \rightarrow dy = \sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi \\ z = r \cos \theta \rightarrow dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \end{cases} \quad (\text{A-31})$$

En remplaçant dans :

$$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= (\sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi)\vec{i} \\ &\quad + (\sin \theta \sin \varphi dr + r \cos \theta \sin \varphi d\theta + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi)\vec{j} \\ &\quad + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)\vec{k} \\ d\vec{OM} &= dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= \sin \theta \cos \varphi dr\vec{i} + r \cos \theta \cos \varphi d\theta\vec{i} - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi\vec{i} + \sin \theta \sin \varphi dr\vec{j} \\ &\quad + r \cos \theta \sin \varphi d\theta\vec{j} + r \sin \theta \cos \varphi d\varphi\vec{j} + \cos \theta dr\vec{k} - r \sin \theta d\theta\vec{k} \\ d\vec{OM} &= (\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})dr \\ &\quad + (r \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + r \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - r \sin \theta \vec{k})d\theta(-r \sin \theta \sin \varphi \vec{i} \\ &\quad + r \sin \theta \cos \varphi \vec{j})d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= (\sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k})dr \\ &\quad + (\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - r \sin \theta \vec{k})rd\theta \\ &\quad + (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j})r \sin \theta d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + rd\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi \\ d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{cases} \quad (\text{A-32})$$



Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \vec{u}_\varphi + r \frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \vec{u}_\theta \quad (\text{A-33})$$

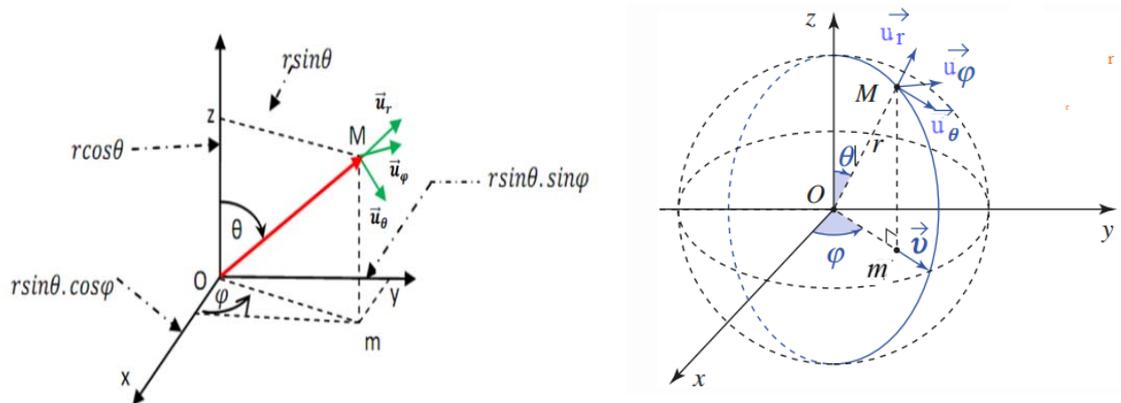


Figure (A-6) : système sphérique

4. Dérivées partielles et différentielle

La notion de dérivée partielle est fondamentale en analyse, en géométrie différentielle et dans toutes les branches de la physique où on la rencontre systématiquement.

Soit la fonction $f(x, y, z)$ dépendant de trois variables. La dérivée partielle de $f(x, y, z)$ par rapport à l'une des variables est obtenue en calculant la dérivée en considérant les deux autres variables constantes. Ainsi :

On appelle dérivée partielle de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à x , notée $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$, la dérivée de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à sa variable x que l'on calcule en faisant comme si y et z étaient des constantes.

On définit de même la dérivée partielle par rapport à y notée $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$ et la dérivée partielle par rapport à z notée $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$

4.1 Dérivée d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$ La dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur $\vec{V}(t)$:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dV_x(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dV_y(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dV_z(t)}{dt} \vec{k} \quad (\text{A-34})$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérés fixe ;

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0} \quad (\text{A-35})$$



4.2 Opérateurs différentiels vectoriels

4.2.1 Opérateur vectoriel « Nabla »

Nabla est un opérateur différentiel vectoriel. En coordonnées cartésiennes (x, y, z) par rapport à une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace euclidien de trois dimensions, il s'écrit sous la forme :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{A-36})$$

En physique, il est utilisé en dimension 3 pour représenter aisément plusieurs opérateurs vectoriels, couramment utilisés en électromagnétisme et en dynamique des fluides.

C'est un moyen mémorisation pour les opérateurs différentiels de champs : les formules du gradient, de la divergence et du rotationnel se retrouvent en appliquant les règles habituelles du produit scalaire et du produit vectoriel à cet opérateur

4.2.2 Gradient

Le gradient associé à une fonction scalaire $f(x, y, z)$ est défini de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{A-37})$$

Cette relation que l'on utilise pour définir le gradient dans un système de coordonnées quelconques.

✚ Gradient en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (f) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{A-38})$$

✚ Gradient en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (f) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \quad (\text{A-39})$$

✚ Gradient en coordonnées sphériques est donné par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta \quad (\text{A-40})$$

4.2.3 Divergence

L'opérateur div ou encore $\vec{\nabla}$ associé à un vecteur $\vec{A}(x, y, z)$ le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ par ce vecteur

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (\text{A-41})$$



✚ *Divergence en coordonnées cartésiennes est donnée par :*

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A-42})$$

✚ *Divergence en coordonnées cylindriques est donnée par :*

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\rho, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{A-43})$$

✚ *Divergence en coordonnées sphériques est donnée par :*

$$\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A-44})$$

4.2.4 Rotationnel

Le produit vectoriel entre l'opérateur Nabla $\vec{\nabla}$ et un champ vectoriel $\vec{A}(x, y, z)$ donne le rotationnel de ce champ vectoriel. Le rotationnel obtenu est lui aussi un champ vectoriel.

$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}}(\vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{A-45})$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (\text{A-46})$$

✚ *Rotationnel en coordonnées cartésiennes est donné par :*

$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (\text{A-47})$$

✚ *Rotationnel en coordonnées cylindriques est donné par :*

$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{k} \quad (\text{A-48})$$

✚ *Rotationnel en coordonnées sphériques est donné par :*

$$\overrightarrow{\operatorname{Rot}}(\vec{A}) = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta \quad (\text{A-49})$$

Nous pouvons déduire de la définition et de l'expression analytique d'un produit scalaire l'expression de la norme d'un vecteur \vec{A}



$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{A}\| = \|\vec{A}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow \|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}.$$

Activité

01

Soit la fonction $f(x, y, z) = 4x^3 + 8yx$

Donc cette fonction possède deux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial(4x^3 + 8yx)}{\partial x} = 12x^2 + 8y$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial(4x^3 + 8yx)}{\partial y} = 8x$$

Activité

02

Calculer le gradient de la fonction $f(x, y, z) = 8x^2y^3 + zy$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial(8x^2y^3 + z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(8x^2y^3 + z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(8x^2y^3 + z)}{\partial z} \vec{k}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = 16xy^3 \vec{i} + (24x^2y^2 + z) \vec{j} + y \vec{k}$$

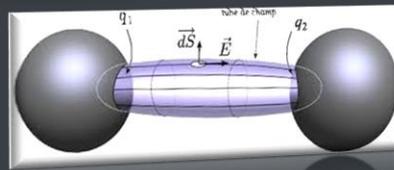
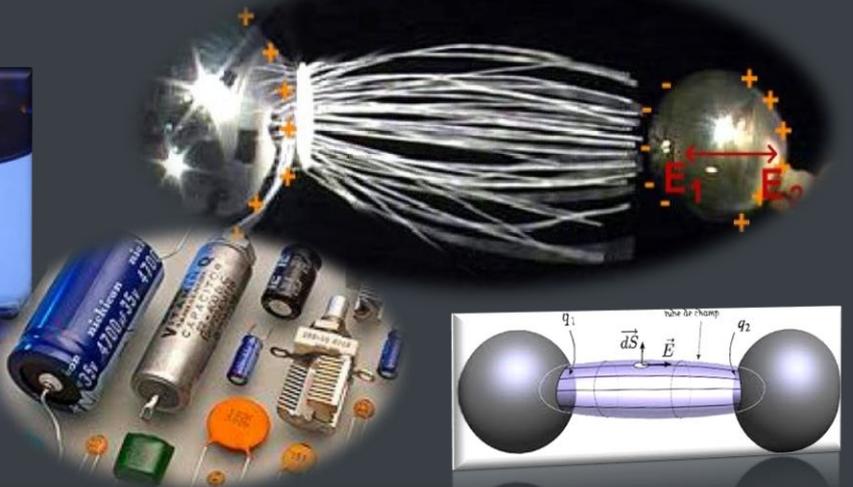
Activité

03

Calculer la divergence de la fonction vectorielle $\vec{A}(x, y, z) = x^3z \vec{i} + 4y^2z \vec{j} + 5xy^2 \vec{k}$

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 3x^2z + 8yz + 0$$

Chapitre I Electrostatique



Sommaire

1. Introduction
2. Charges et force électrostatiques
3. Champs électrique
4. Potentiel électrostatiques
5. Théorème de Gauss
6. Conducteur en équilibre
7. Pression électrostatique
8. Condensateur
9. Exercices résolus
10. QCM
11. Exercices résolus



Rappels

I.1 Introduction

Électrostatique est une branche de la physique qui traite des phénomènes et des propriétés des charges électriques fixes ou déplaçant lentement. Cette branche, étudie les interactions entre ces charges au repos.

I.2 Charges et force électrostatiques**I.2.1. La charge élémentaire**

En physique, la charge élémentaire est la charge électrique d'un proton ($q_p = +q$) ou, de façon équivalente, l'opposé de la charge électrique d'un électron ($q_e = -q$). Elle est notée q et son unité dans le Système international d'unités et s'exprime en coulombs (**C**), ou en (**A.s**).

Cette constante physique élémentaire, mesurable à l'aide d'un électromètre, correspond à la charge électrique portée par les protons, et elle vaut : $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

I.2.2. Charge électrique

Qu'est-ce qu'une charge électrique ?

La charge électrique est une caractéristique possédée par certaines particules entre lesquelles s'exerce une interaction électrique.

La charge électrique des particules :

Tableau (I-1) : particules électriquement chargées

Particule	Nombre de charges élémentaires	Charge en coulomb
Electron	-e	$-1,60 \times 10^{-19}$
Proton	+e	$1,60 \times 10^{-19}$
Neutron	0	0
Atome	0	0

I.2.3. Force électrostatique

a) Charges de signes opposés : $q_1 \times q_2 < 0$:

Si les deux corps qui interagissent ont des **charges** de signes opposés (l'un est chargé positivement et l'autre négativement)

alors l'**interaction** est attractive. 0



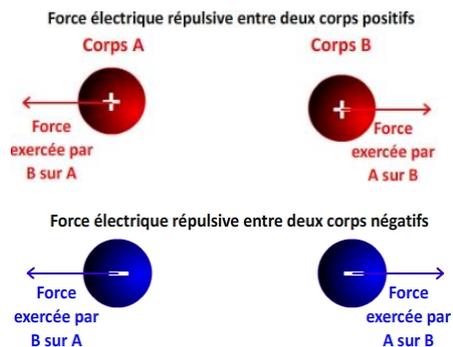


b) Charges de même signe

Si les deux charges qui interagissent ont les même signe (ils sont tous les deux chargés positivement ou alors tous les deux chargés négativement) alors l'interaction est répulsive.

La force $F_{A/B}$ est orientée de A vers B

La force $F_{B/A}$ est orientée de B vers A

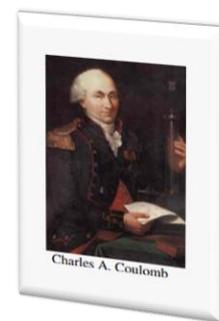


1.2.4 Loi de Coulomb

a) Interaction entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2

La loi de Coulomb permet d'exprimer la force électrique exercée par corps électriquement chargé sur un autre corps électriquement chargé.

Deux particules chargées q_1 et q_2 dans un référentiel (R') placées dans le vide respectivement en points M_1 et M_2 et immobiles dans R' ; une force s'exerce sur chacune des charges, la force électrostatique de Coulomb, qui respecte la loi de l'action et de la réaction.



La charge q_1 exerce sur la charge q_2 une **force électrostatique**, notée $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}(M)$, dirigée suivant le vecteur unitaire \vec{u} (vecteur unitaire porté par la ligne d'action de la force électrostatique dirigé de q_1 vers q_2).

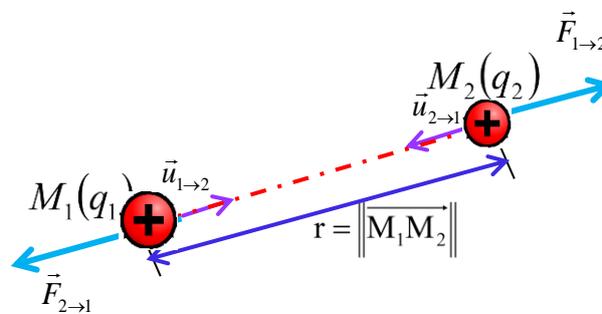


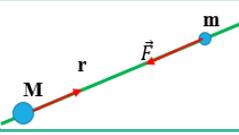
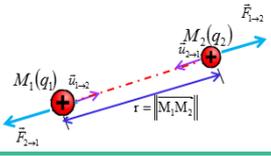
Figure I.1 : Interaction entre deux charges ponctuelles

Au même instant, la charge q_2 exerce sur la charge q_1 une force électrostatique, notée $\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1}(M)$, dirigée en sens inverse de $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}(M)$. Elle décroît comme l'inverse du carré de la distance entre les charges. Cette force est répulsive si les charges sont de même signe, attractive sinon.

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}(M) = -\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\|\overrightarrow{M_1 M_2}\|^3} \tag{I-1}$$



Tableau (I-2) : Analogie entre les interactions gravitationnelle, électrostatique et magnétique

Nature	Expression	Description
Gravitation	$\vec{F}(M) = G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$	Force entre les masses. 
Electrostatique	$\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$	Force entre deux charges 
Electrique	$\vec{F}(M) = q\vec{E}$	Force sur une particule dans un champ électrique \vec{E}
Magnétique	$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$	Force sur une particule mobile dans un champ magnétique \vec{B}

ϵ_0 : est appelée la **permittivité diélectrique** du vide, sa dimension est $I^2.T^{-4}.M^{-1}.L^{-3}$.

Son unité est le farad par mètre ($F.m^{-1}$). Sa valeur approchée $8,8542 \times 10^{-12} F.m^{-1}$.

r : distance entre q_1 et q_2 (m)

Applications d'utilisation de la loi de Coulomb

Force exercée par le noyau d'un atome d'hydrogène sur l'électron de cet atome

Activité 1

Application

Soit un corps M qui porte un noyau de l'atome d'hydrogène, qui comporte qu'un seul proton et ne possède qu'une seule charge élémentaire positive :

$q_M = e = 1,6.10^{-19} C$, et un corps N qui porte un électron qui possède une charge électrique élémentaire négative : $q_N = -e = -1,6.10^{-19} C$

La distance entre le noyau d'hydrogène et son électron correspond au rayon de l'atome d'hydrogène qui vaut $r = 5,3 \times 10^{-11} m$

RÉSOLUTION

Soit l'expression générale de la loi de Coulomb :

$$F_{M/N} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_M q_N|}{r^2} \tag{I-2}$$

Chaque grandeur est remplacée par sa valeur numérique en respectant les unités :



$$F_{A/B}(M) = 9.10^9 \cdot \frac{1,6.10^{-19} \cdot (-1,6.10^{-19})}{(5,3.10^{-11})^2}$$

$$F_{A/B}(M) = 9.10^9 \frac{1,6.10^{-19} \cdot (1,6.10^{-19})}{(5,3.10^{-11})^2}$$

On applique la valeur absolue en supprimant le signe des charges multipliées et donc on aura :

$$\text{A.N : } F_{A/B} = 4,34.10^{-7} \text{ N.}$$

1.2.5 Principe de superposition

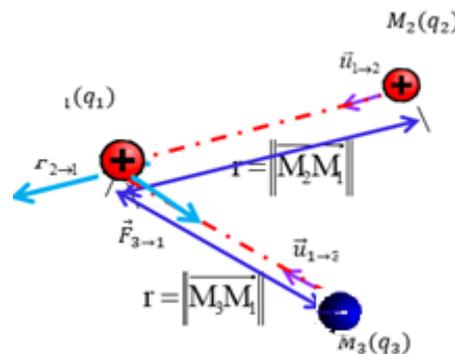
Quand il s'agit de plusieurs charges qui entrent en jeu, il faut utiliser le principe de superposition qui stipule que la force agissant sur une charge quelconque par plusieurs charges d'un système est la somme vectorielle des forces. Comme le montre la figure (I.2) suivante :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{3/1} = K \frac{q_2 q_1}{\|M_2 M_1\|^2} \vec{u}_{12} + K \frac{q_3 q_1}{\|M_3 M_1\|^2} \vec{u}_{13} \quad (\text{I-3})$$

D' une manière plus générale, on peut écrire :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i1} \quad (\text{I-4})$$

Figure I.2 : illustration du principe de superposition pour les forces



Erreurs

Erreur fréquente :

- ✓ Mettre les vecteurs force sur les mauvaises charges.
- ✓ On voit parfois dans les solutions des étudiants que les vecteurs forces sont sur les mauvaises charges.
- ✓ Si on demande la force sur une charge, les vecteurs forces doivent tous partir de cette charge qui subit la force et non pas des charges qui font la force.

1.3. Champ électrique

Le champ électrique est une région de l'espace où une force électrique créée par un corps chargé peut s'exercer sur un autre corps chargé.



I.3.1 Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle :

Soit une charge q_1 située en un point O de l'espace, exerçant une force électrostatique sur une autre charge q_2 située en un point M . L'expression de cette force est donnée par la loi de Coulomb.

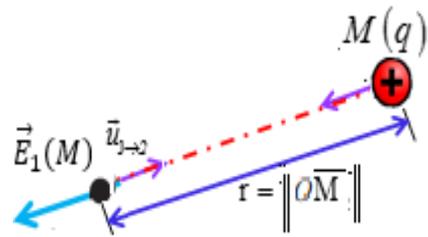


Figure I.3

$$\vec{F}_{1/2}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2} \tag{I-5}$$

Mais comme pour l'attraction gravitationnelle, on peut la mettre sous une forme plus intéressante

$$\vec{F}_{1/2}(M) = q_2 \vec{E}_1(M) \tag{I-6}$$

Où

$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{1/2} \tag{I-7}$$

L'unité usuel du champ électrique est le V/m.

En unités SI de base, le champ électrique est :

$$\text{Kg.m.s}^{-3}.\text{A}^{-1}$$

Important

Le champ électrique crée par une charge existe en tout point M de l'espace alors que la force électrique n'existe que s'il y a aux moins deux charges

I.3.2 Champ créé par un ensemble de charges - principe de superposition

On considère maintenant N particules de charges électriques q_i , situées en des points

P_i : quel est le champ électrostatique créé par cet ensemble de charges en un point M ?

Comme nous l'avons fait précédemment pour les forces, le principe de superposition pour les champs électriques peut s'écrire sous la forme suivante :

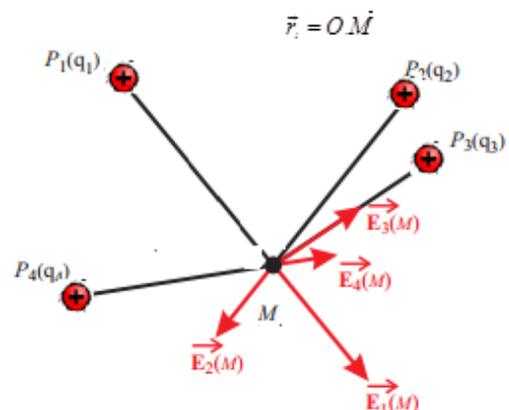


Figure I.4 : Illustration du principe de superposition champs électriques

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r,i} \tag{I-8}$$



1.3.3 Champ électrique engendré par une distribution de charges

1) Densité linéique de charge

Considérons une répartition continue de charges à l'intérieur d'une certaine droite, sur une surface ou suivant un volume.

Si la distribution de charge est un fil, on introduit la densité linéique de charge, notée λ et telle qu'une longueur infinitésimale dl porte la charge $dq = \lambda dl$. λ est en $C.m^{-1}$ et la charge totale portée par le fil s'écrit :

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

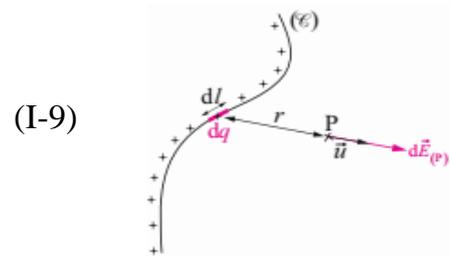


Figure I.5

2) Densité surfacique de charge

si la charge n'était située que sur la surface de la distribution. La charge dq portée par l'élément de surface infinitésimal dS s'écrit $dq = \sigma dS$ où σ s'exprime en $C.m^{-2}$.

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$

(I-10)

Figure I.6

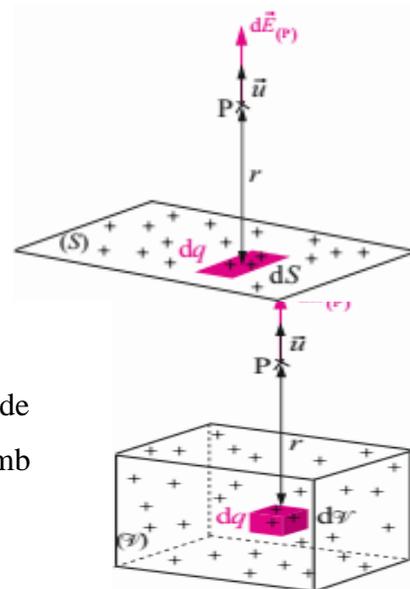


Figure I.7

3) Densité volumique de charge

En électrostatique, la **densité volumique de charge**, souvent notée ρ , est la quantité nette de charge électrique par unité de volume. Dans le système international, son unité est le Coulomb par mètre cube ($C.m^{-3}$).

La répartition est caractérisée en chaque point P de volume par la donnée de la densité volumique de charge $\rho(P) = dq/dV$

où dq désigne la charge électrique contenu dans l'élément de volume dv entourant le point P.

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

(I-11)

Donc on peut exprimer la densité volumique de charges ρ par :

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

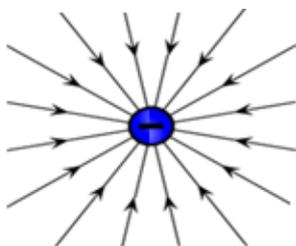
(I-12)



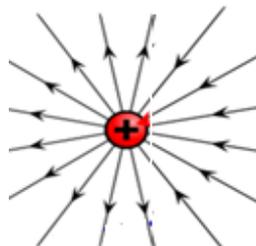
1.3.4 Lignes de champ électrostatique

Le champ électrique est schématiquement représenté par des lignes de champ qui divergent à partir de l'objet chargé ou convergent vers lui (voir la figure I.8).

- Les lignes de champ indiquent la direction de la force électrique agissant sur la charge positive placée à proximité du champ.



Les lignes de champ électrique convergent (pointent vers l'intérieur) d'une charge



Les lignes de champ électrique divergent (pointent vers l'extérieur) d'une charge positive

Figure I.8

1.4. Potentiel électrostatique

1.4.1 Cas d'une distribution de charge ponctuelle

De façon générale, la présence d'une charge q en un point M où le champ est E se traduit par une interaction caractérisée par deux propriétés :

- Une propriété vectorielle, la force exercée sur la charge q de la loi de Coulomb) :

$$\vec{F}(M) = q_2 \vec{E}(M) \quad (\text{I-13})$$

- Une propriété scalaire, l'énergie potentielle définie à une constante près comme le potentiel :

$$E_p = q \cdot V(M) \quad (\text{I-14})$$

Le potentiel électrostatique $V(M)$ associé au champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est une fonction scalaire contrairement à \vec{E} .

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(M) \quad (\text{I-15})$$

La charge ponctuelle q crée en tout point M

Un champ électrostatique est donné par :

$$E_p(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2}$$

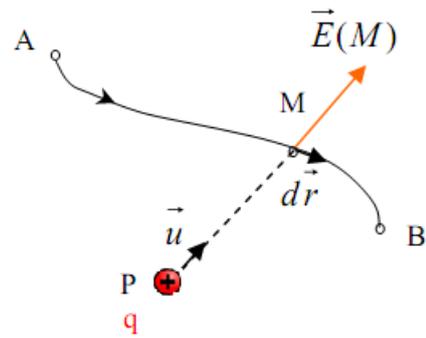


Figure I.9 champ électrostatique créée par un point M

D'où le potentiel est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \tag{I-16}$$

1.4.2 Cas d'une distribution de n charges ponctuelles

Soient n charges ponctuelles $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ fixés aux points $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$.

Soit M un point de l'espace. (Figure I.9).

Le potentiel $V(M)$ dû à l'ensemble des n charges est la somme des potentiels en application du principe de superposition :

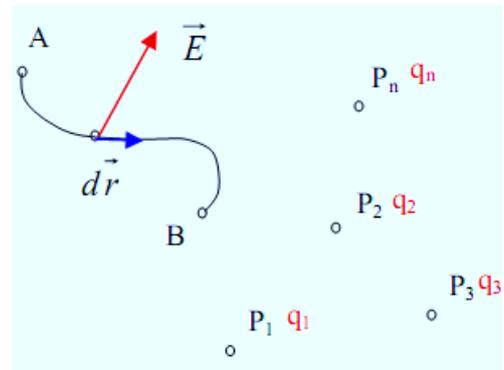


Figure I.10 : distribution de n charges ponctuelles

$$V(M) = \sum_{i=1}^n V_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \tag{I-17}$$

Tableau I.3:

Distribution	Charge totale	Champ électrique	Potentiel électrostatique
Distribution discrètes (n charges)	$Q = \sum_{i=1}^n q_i(M)$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r,i}$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \vec{u}_{r,i}$
Distribution linéique (λ)	$Q = \int \lambda dl$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}_r$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda dl}{r}$
Distribution surfacique (σ)	$Q = \iint \sigma dS$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}_r$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dS}{r}$
Distribution volumique (ρ)	$Q = \iiint \rho dV$	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}_r$	$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r}$



1.4.3 dipolaires électrostatiques

Activité 1

Application

Soient deux charges ponctuelles de signes différentes fixées respectivement en A et B ($q > 0$). Déterminer le moment dipolaire électrique décrit par ces deux charges.

Le moment dipolaire électrique est une grandeur vectorielle définie :

$$\vec{p} = q\vec{AB} = -q\vec{OA} + q\vec{OB} = -\frac{a}{2}q(-\vec{i}) + \frac{a}{2}q(\vec{i}) = aq \vec{i} \tag{I-18}$$

On remarque que le moment dipolaire décrit la charge et sa géométrie « a ». Son unité dans le système International (SI) est le Coulomb-mètre (C m).

1.4.4 Potentiel et champ électrostatiques créés par un dipôle isolé

Activité 2

Application

Deux charges sont fixées respectivement en deux points A(-q) et B(+q) séparées d'une distance $a = \|\vec{AB}\|$. On se propose d'étudier les caractéristiques du champ et du potentiel électrostatique créés par ces deux charges en un point N très éloignés des charges : $a \ll r = \|\vec{ON}\|$: approximation dipolaire.

1) Calcul du potentiel créé par un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire

D'après le principe de superposition, le potentiel au point N est $V(N)$

$$V(N) = V(A) + V(B) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_A} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_B} \tag{I-19}$$

Donc
$$V(N) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

avec : $r_B = BN$ et $r_A = AN \gg a$.

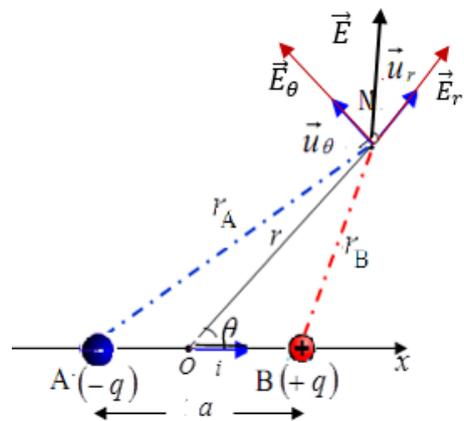


Figure I.11



Calcul des distances r_A et r_B

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB} = \vec{r} - \frac{a}{2}\vec{i} \quad (\text{I-20})$$

$$\|\overrightarrow{BN}\|^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - \vec{r}a\vec{i} \quad (\text{I-21})$$

On a $\vec{r} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$

$$\text{Donc } r_B^2 = \|\overrightarrow{BN}\|^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - ra \cos \theta \quad (\text{I-22})$$

On calcule en suite $\frac{1}{r_B}$:

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4} - ra \cos \theta}} = \left(r^2 + \frac{a^2}{4} - ra \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{a}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{I-23})$$

On rappelle le développement limité au premier ordre pour le terme de :

$$\left(1 + \frac{a}{r}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \quad \text{avec} \quad \left(\frac{a}{r} \ll 1\right) \quad (\text{I-24})$$

Et puisque $\frac{a}{r} \ll 1$ et $\frac{a^2}{r^2} \ll \frac{a}{r}$ on peut négliger les termes en $\frac{a^2}{r^2}$ devant le terme en $\frac{a}{r}$ alors :

$$\frac{1}{r_B} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right) \quad (\text{I-25})$$

De la même manière, on calcule le terme $\frac{1}{r_N}$:

$$\frac{1}{r_N} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right) \quad (\text{I-26})$$

Et par conséquent :

$$\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_N} = \frac{a}{r} \cos \theta \quad (\text{I-27})$$

D'où le potentiel est :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{r} \cos \theta \quad (\text{I-28})$$

2) Calcul du champ électrostatique créé par un dipôle dans le cadre de l'approximation dipolaire :



On définit un champ électrique par La relation suivante (en coordonnées polaires)

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta \quad (\text{I-29})$$

$$\text{Où : } \begin{cases} E_r(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2aq}{r^3} \cos \theta \\ E_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{r^3} \sin \theta \end{cases} \quad (\text{I-30})$$

D'où le champ électrostatique est :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad (\text{I-31})$$

Donc a partir de l'activité 1 et 2 on peut écrire :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P}{r^2} \cos \theta \quad \text{où } \|\vec{p}\| = aq \quad (\text{I-32})$$

Remarque : le moment dipolaire permet de caractériser le dipôle.

Activité 3

Application

Une charge électrique ponctuelle q crée sur l'espace qui l'entoure un champ électrostatique \vec{E} . En un point M de l'espace.

- 1) Trouver l'expression du champ et du potentiel électrostatique
- 2) déduire l'expression générale reliant le champ électrostatique avec le potentiel électrostatique.

RÉSOLUTION

1)

✚ Expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est :

$$\vec{E}(M) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot q}{\|\vec{OM}\|^2} \vec{u}_r$$

✚ Expression du potentiel électrostatique $V(r)$:

$$V(M) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot q}{\|\vec{OM}\|}$$

2) Relation générale reliant un champ électrostatique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrostatique $V(r)$:



$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V)$$

I.5 Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss exprime le lien entre les sources et le champ.

On appelle flux élémentaire du champ $\vec{E}(M)$ à travers une surface élémentaire orientée $dS \cdot \vec{n}$ la quantité :

$$d\Phi_S = \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n}$$

Le flux du champ électrostatique à travers une surface fermée (Σ), délimitant un volume τ , est égal à la charge q_{int} contenue à l'intérieur de cette surface divisée par ϵ_0 .

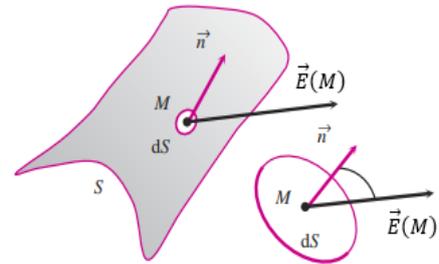


Figure I.12

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\Sigma q_{int}}{\epsilon_0} \tag{I.33}$$

L'unité SI de flux électrique est le newton-mètre carré par coulomb ($N \cdot m^2/C$).

Le champ électrostatique peut être généralisés au champ gravitationnel en utilisant l'analogie suivante :

Particule	Flux du champ électrostatique	Flux du champ gravitationnel
Éléments	Charge (q)	Masse (M)
Constantes	$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$	$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-2}\text{s}^{-1}$
Champ	\vec{E}	\vec{A}

Tableau I.4:

On en déduit donc le théorème de Gauss pour la gravitation : Le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée (Σ), délimitant un volume τ , est relié à la masse M_{int} contenue à l'intérieur de cette surface.

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot dS \cdot \vec{n} = -4\pi G M_{int} \tag{I.34}$$

Dans une région vide de charges, le théorème de Gauss s'écrit pour une surface fermée S

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \tag{I.35}$$

**Activité 1**

Le plan d'un disque de rayon 10 cm est incliné de 50° par rapport à un Champ électrique uniforme de 600 N/C .
Quel est le flux à travers le disque ?

RÉSOLUTION

Le vecteur \vec{s} représentant l'aire du disque, dont la direction est normale au plan du disque, fait un angle de 50° avec le champ (la surface étant ouverte, on a pris le sens de $\vec{E}(M)$ de façon à ce que le flux soit positif).

L'aire est égale à

$$s = \pi R^2 = 0.025 \text{ m}^2. \quad (\text{I-36})$$

Le flux est donc :

$$\Phi_S = E \cdot s \cdot \cos 50^\circ = 600 \cdot 0,025 \cdot 0,643 = 9.63 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C} \quad (\text{I-37})$$

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ E lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux Φ . Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ».

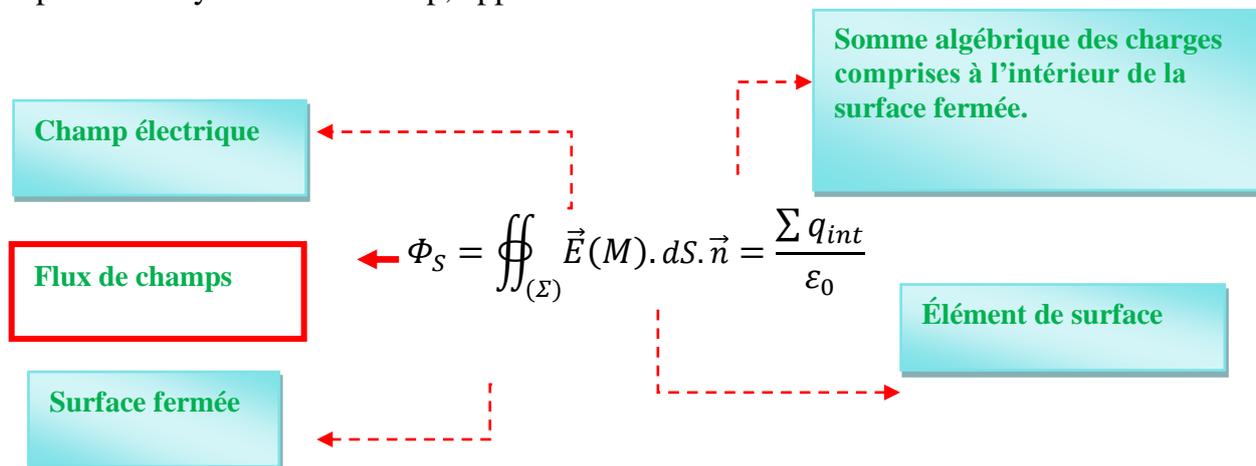


Figure I.13



1.5.1 Étapes d'application du théorème :

a) Théorème de Gauss pour une charge ponctuelle seule

Application

Activité 01 Charge ponctuelle seule

- ① Tracer les lignes de champ électrique produites par les charges électriques. Tracez et identifiez le vecteur champ électrique E au point où on veut le calculer.
- ② Choisir une surface fermée S_f qui convient à la symétrie du champ : E est constant pour tous les éléments de surface dS ; q est constant entre \vec{E} et les \vec{dS} .
Tracez et identifiez le vecteur surface \vec{dS} au point d'application du vecteur \vec{E} .
- ③ Du théorème de Gauss, calculez le flux du champ électrique traversant la surface fermée (terme de gauche) et l'expression de la somme algébrique des charges situées à l'intérieur de la surface fermée (terme de droite). Il reste à mettre le champ E en évidence.



On choisit dans le cas de la charge ponctuelle, une surface de Gauss sphérique (surface imaginaire entourant l'élément chargé), puisque la symétrie du problème le permet. On identifie ensuite le vecteur E à une distance r de la charge ponctuelle (pour obtenir le champ en fonction de r) et le vecteur dS .

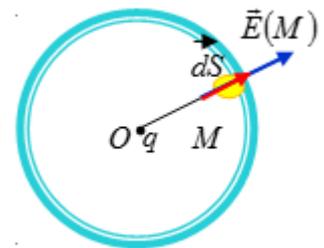


Figure I.14

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{I-38})$$

$$E(M) \cdot \oiint dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{I-39})$$

Il faut se rappeler que l'aire S correspond à l'aire de la surface de Gauss, qui est ici sphérique.

En intégrant sur toute la sphère (sur laquelle r est constant) :

$$E \cdot S_{\text{sphère}} = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{I-40})$$

donc :

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{I-41})$$

**b) Théorème de Gauss pour une distribution continue de charges**

La charge totale intérieure et limitée par le volume V , la surface S et la longueur L respectivement et contenue dans la surface fermée de Gauss vaut :

$$\text{Pour une distribution linéique de charges de densité} \quad Q = \int \lambda dl$$

$$\text{Pour une distribution surfacique de charges de densité} \quad Q = \iint \sigma ds$$

$$\text{Pour une distribution volumique de charges de densité} \quad Q = \iiint \rho dv$$

Activité 02 Disque uniformément chargé

Le théorème de Gauss dans le cas où la distribution de charges est continue et décrite par une densité de charges (linéique λ , surfacique σ et volumique ρ) s'écrit comme suit :

$$\text{Cas d'une distribution linéaire. } \Phi_S = \oiint_S \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dr$$

$$\text{Cas d'une distribution surfacique. } \Phi_S = \oiint_S \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds$$

$$\text{Cas d'une distribution volumique. } \Phi_S = \oiint_S \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

1°) Champ électrostatique - Charge électrique totale est immédiate :

(I-42)

La surface du disque de rayon R du système est :

$$S_{\text{Disque}} = \pi R^2 \quad \text{(I-43)}$$

La surface du disque de Gauss de rayon r est :

$$S_{\text{Gauss}} = \pi r^2 \quad \text{(I-44)}$$

Dans le cas du disque, on peut appliquer le théorème de Gauss.

Dans les deux cas le champ est radial

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \text{(I-45)}$$

a) Le champ électrostatique à l'extérieur des deux disques $E(r)$ **□ Région 01 Cas $r > R$:**

La charge totale à l'intérieur est :

$$\sum q_{\text{int}} = q = \sigma \pi R^2 \quad \text{(I-46)}$$

$$E(r) \cdot S_{\text{Gauss}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{(I-47)}$$

Soit :



$$E(r) \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \tag{I-48}$$

D'où :

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \tag{I-49}$$

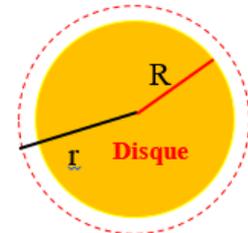


Figure I.15 : Cas $r > R$

b) Le champ électrostatique dans le disque interne :

□ Région 02 Cas $r < R$:

La charge totale à l'intérieur est :

$$\sum q_{int} = q = \sigma \pi r^2 \tag{I-50}$$

$$E(r) \cdot S_{Gauss} = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{I-51}$$

Soit :

$$E(r) \cdot \pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0} \tag{I-52}$$

D'où :

$$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{I-53}$$

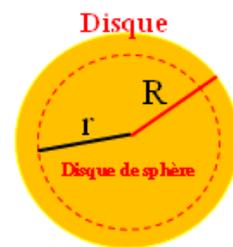


Figure I.16 : Cas $r < R$

I°) Représentation graphique du champ $E(r)$ (pour $Q > 0$) :

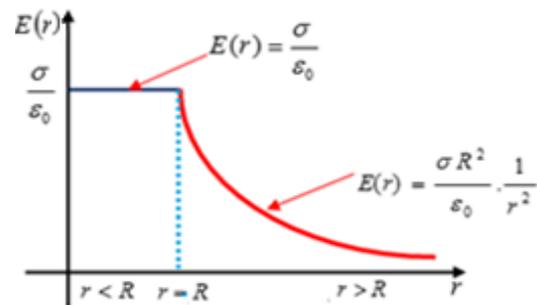


Figure I.17 : représentation graphique du champ $E(r)$.

I°) Détermination du potentiel $V(r)$:

Soit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dr} \tag{I-54}$$

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \tag{I-55}$$



On obtient alors $V(r)$ en utilisant la relation :

$$\Rightarrow \int dV = - \int E(r) dr \quad (\text{I-56})$$

□ Région 01 Cas $r > R$:

La charge totale à l'extérieur est :

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_1 \quad (\text{I-57})$$

C_1 est la constante d'intégration.

Comme $V(\infty) = 0$ alors $C_1 = 0$ ($q = 0$)

D'où :

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{I-58})$$

□ Région 02 Cas $r < R$:

La charge totale à l'intérieur est : $\sum q_{int} = q = \sigma \pi R^2$

Soit $E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Rightarrow \int dV = - \int E(r) dr \quad (\text{I-59})$$

D'où :

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} r + C_2 \quad (\text{I-60})$$

Par continuité du potentiel en $r = R$, on obtient :

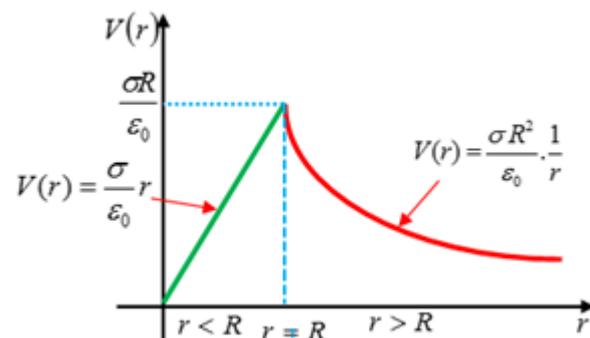
$$V(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} + C_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \Rightarrow C_2 = 0 \quad (\text{I-61})$$

D'où :

$$V(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} r \quad (\text{I-62})$$

4) Représentation graphique du potentiel $V(r)$ (pour $Q > 0$) :

Figure I.18 : représentation graphique du potentiel $V(r)$.




Activité 03 Champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé

Considérons un plan infini portant une charge électrique σ uniforme par unité de surface.

Le plan d'équation $Z = 0$, de charge électrique surfacique σ constante. Elle possède deux invariances par translation suivant x et y .

Elle est alors aussi invariante d_{s1} par n'importe quelle translation de direction un vecteur appartenant au plan vectoriel.

On choisit donc comme surface de Gauss un cylindre dont les extrémités S_1 et S_2 , parallèles à la plaque chargée, ont la même surface S et sont situées de part et d'autre et à égale distance de la plaque. Ainsi, le flux traversant la surface latérale du cylindre est nul et le champ a le même module en chacun des points de l'une ou l'autre des extrémités : $E_1 = E_2 = E$. La portion de la plaque chargée qui se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss a une surface S , la même

que les extrémités du cylindre. La charge contenue dans la surface est donc σS .

Il y a trois surfaces : la surface de base S_1 , la surface de base S_2 et la surface latérale S_3 :

Le théorème de Gauss donne

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \int_{S_1} \vec{E}(M) \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_1 + \int_{S_2} \vec{E}(M) \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_2 + \int_{S_3} \vec{E}(M) \cdot dS_3 \cdot \vec{n}_3$$

(I-63)

$$\begin{aligned} &= E_1 S_1 + E_2 S_2 + 0 \\ &= 2E \cdot S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

D'où

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

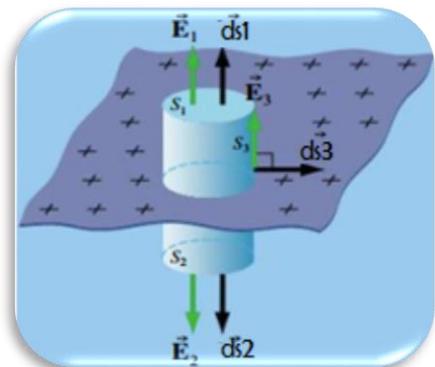


Figure I.19

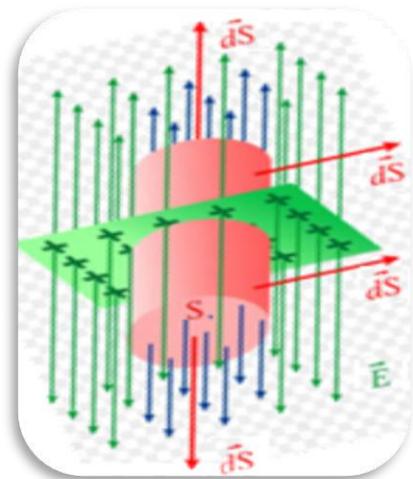


Figure I.20



(I-64)

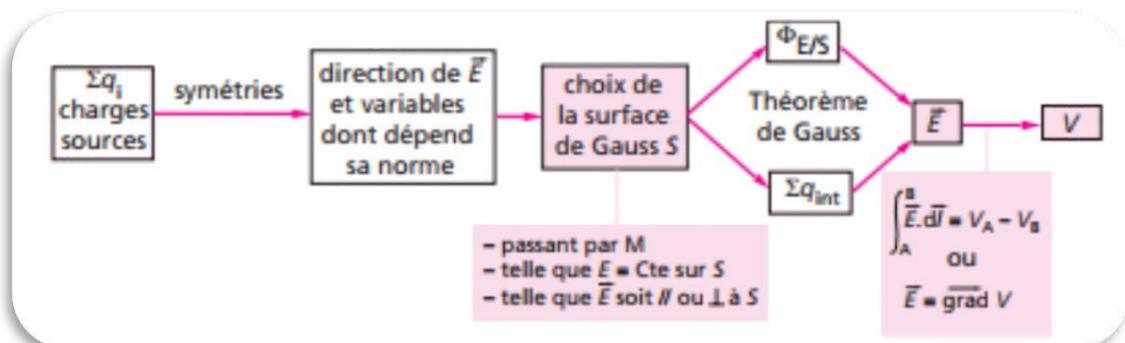
Selon le théorème de Gauss, $2E \cdot S = \frac{\sigma S}{\epsilon}$. D'où une composante du champ électrostatique pour $z > 0$, $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ et pour $z < 0$ à $E = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ du fait de l'imparité de E_x .

Le champ électrostatique est constant dans chacun des deux demi-espaces séparés par le plan chargé. Sa composante suivant la normale au plan subit une discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ au franchissement du plan.

Remarque

- 1 Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini.
- 2 On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément. Il suffit alors d'interpréter E comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

Ce théorème est très utile dans le tous cas de symétries fortes (cylindriques ou sphériques). Comme nous avons vue précédemment, Pour calculer le champ ou le potentiel, il faut alors suivre le schéma directeur suivant :



Activité 04 Champ créé par un fil rectiligne infini chargé d'une densité linéique

Un fil rectiligne infini chargé porte une densité linéique de charge uniforme égale à λ .

Déterminer le module du champ électrique à la distance r du centre O du fil. On suppose que λ est négatif.

➔ Nous pouvons dire que le module du champ est le même pour tous les points situés à une distance r du centre du fil.



✚ Nous avons donc un champ radial au fil, perpendiculaire à la surface de Gauss et Parallèle à ds_3 les deux surfaces (S_1 et S_2) formant la surface de Gauss totale présentent un champ électrique perpendiculaire aux éléments de surface (ds_2, ds_1), générant un flux électrique nul à travers ces surfaces.

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon r et de longueur ℓ est :

$$S_{Gauss} = 2\pi r \ell$$

La surface latérale du cylindre est $S_3 = 2\pi r \ell$

La charge électrique à l'intérieur de la surface de Gauss est donnée par :

$$\sum q_{int} = q = \lambda \ell \tag{I-65}$$

Il y a trois surfaces : la surface de base S_1 , la surface de base S_2 et la surface latérale S_3 .

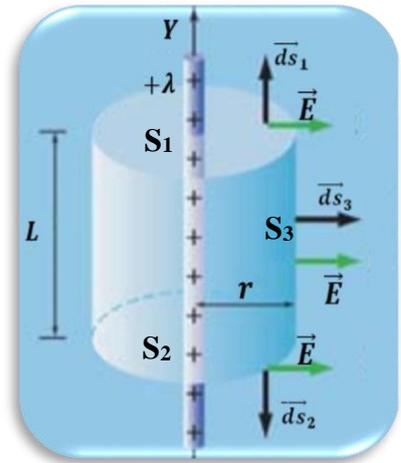


Figure I.21 : fil rectiligne infini chargé avec une densité linéique

Le théorème de Gauss donne $\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot dS \cdot \vec{n} = \iint_{S_1} \vec{E}(M) \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_2 + \iint_{S_3} \vec{E}(M) \cdot dS_3 \cdot \vec{n}_3$

$$\begin{aligned} &= \int_{S_1} E \cdot S \cdot \cos 90^\circ + \int_{S_2} E \cdot S \cdot \cos 90^\circ + \int_{S_3} E \cdot S \cdot \cos(0^\circ) \\ &= 0 (\vec{E} \perp dS_1 \cdot \vec{n}_1) + 0 (\vec{E} \perp dS_2 \cdot \vec{n}_2) + E \cdot S_3 (\vec{E} \parallel dS_3 \cdot \vec{n}_3) \\ &= E \cdot S_3 = E \cdot 2\pi r \ell \end{aligned} \tag{I-65}$$

Et on a : $\Phi_S = E(r) \cdot S_{Gauss} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$

Donc $E(r) \cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \cdot \ell}{\epsilon_0}$

D'où :

$$E(r) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 \times 2\pi r} \tag{I-66}$$

Activité 05

Champ créé par un cylindre chargé d'une densité surfacique

Le système possède une symétrie de révolution par rapport à l'axe $z\hat{z}$ et de translation parallèlement à cet axe : le champ E en un point M situé à la distance r de l'axe est donc de la forme :



$$\vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{u}_r \tag{I-67}$$

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre fermé d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur ℓ

Le théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E} \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$.

La surface latérale du cylindre est $S = 2\pi r \ell$

□ Région 01 Cas $r > R$:

La charge totale électrique à l'intérieur de la surface de Gauss est donnée par (σ est uniforme) :

$$\sum q_{int} = q = \sigma S = \sigma 2\pi r \ell \tag{I-68}$$

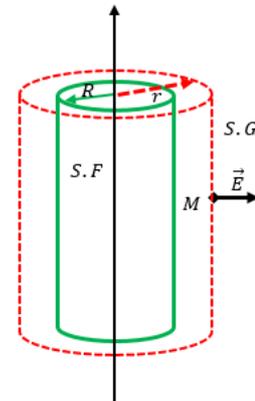


Figure I.22 : Cas $r > R$

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E(r) \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \tag{I-69}$$

Soit :

$$E(r) \cdot 2\pi r \ell = \frac{\sigma 2\pi R \ell}{\epsilon_0}$$

D'où

$$E(r) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r} \tag{I-70}$$

□ Région 02 Cas $r < R$:

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon r et de longueur ℓ est :

$$S_{Gauss} = 2\pi r \ell$$

La surface d'un cylindre de rayon r et de hauteur ℓ :

$$S_G = 2\pi r \ell . \tag{I-71}$$

Selon la coupe transversale de la figure suivante, il n'y a pas de charge

à l'intérieur du cylindre de Gauss $\sum q_{int} = 0$, car la charge

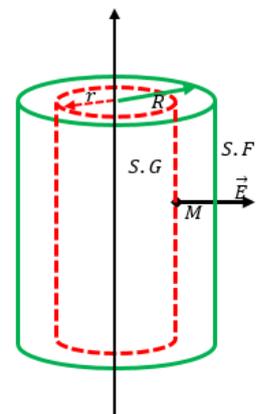


Figure I.23 : cas $r < R$



est limitée à la surface du cylindre chargé. Alors,

$$\vec{E} = \vec{0}$$

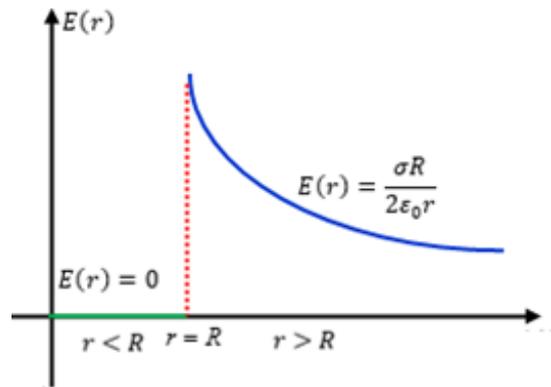


Figure I.24 : représentation graphique du champ $E(r)$.

Activité 06

Champ créé par un cylindre chargé d'une densité volumique

Comme le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface dS_1 , et la surface dS_2 son flux à travers ces deux surfaces est nul, d'où : $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$

D'où :

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E} \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \tag{I-72}$$

Le champ \vec{E} créé par un cylindre infini est radial.

La surface de Gauss choisie est un cylindre de rayon r et de longueur ℓ .

Le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss est donné par:

Le volume du cylindre est :

$$V = \pi R^2 \ell \tag{I-73}$$

La charge électrique à l'intérieur du volume est donnée par (ρ est uniforme) :

$$\sum q_{int} = q = \rho S = \rho \pi R^2 \ell \tag{I-74}$$

Région 01 Cas $r < R$:

Surface de Gauss considérée : cylindre de rayon r .

Charge totale à l'intérieure de la surface de Gauss :

$$\sum q_{int} = q = \rho V = \rho \pi R^2 \ell.$$

$$\text{Soit : } E(r) \times 2\pi r \ell = \frac{\rho \pi R^2 \ell}{\epsilon_0}.$$

D'où :

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \tag{I-75}$$

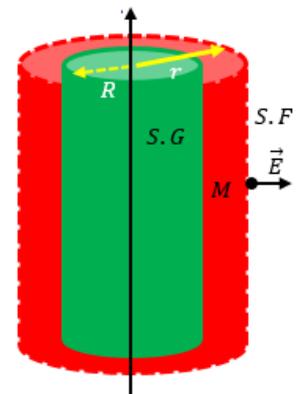


Figure I.25 : cas $r > R$:



Région 02 Cas $r < R$:

Le volume du cylindre est $V = \pi R^2 \ell$

La charge électrique à l'intérieur du volume est donnée par (ρ est uniforme) :

$$\sum q_{int} = q = \rho V = \rho \pi r^2 \ell$$

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre fermé

I.26 : cas $r < R$

d'axe (Oz), de rayon r et de hauteur ℓ

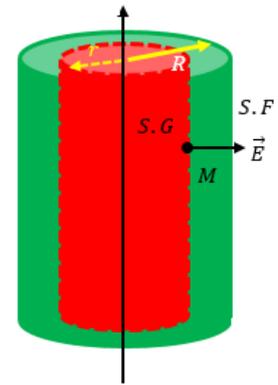
On a :

$$\Phi = E(r) \times S_G = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(r) \times 2\pi r \ell = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\text{Soit : } E(r) \times 2\pi r \ell = \frac{\rho \pi r^2 \ell}{\epsilon_0}$$

D'où :

$$E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r \tag{I-76}$$



Figure

Activité 07 *Sphère uniformément chargée en surface*

Plaçons-nous dans un repère sphérique.

On a alors :

$$\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_\phi \vec{u}_\phi$$

Étude des symétries :

Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie, donc \vec{E} appartient à ce plan.

Le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ est un plan de symétrie, donc \vec{E} appartient à ce plan.

Le champ \vec{E} est donc dirigé selon \vec{u}_r :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \phi) \times \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta + E_\phi \vec{u}_\phi$$

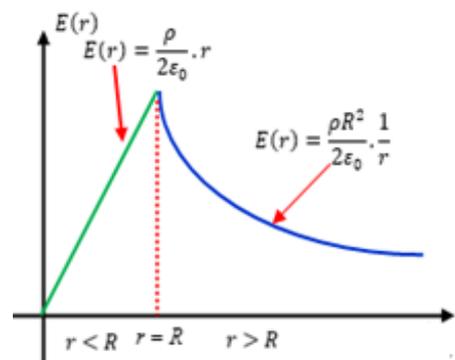


Figure I.27 : représentation graphique du champ $E(r)$.



Étude des invariances :

Il y a invariance de la distribution de charges par toute rotation autour de O , donc E ne dépend pas de θ ni de φ .

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r \tag{I-77}$$

1°) Détermination de $E(r)$ par application du théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss est donné par :

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E} \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \tag{I-78}$$

La surface de Gauss considérée : sphère de rayon r est :

$$S_{Gauss} = 4\pi r^2$$

La surface d'une boule de rayon R est : $S = 4\pi R^2$

□ Région 01 Cas $r > R$:

La charge totale à l'intérieur d'une sphère de rayon $r > R$ est donnée par :

$$\sum q_{int} = q = 0$$

Le champ électrostatique $E(r) \Rightarrow E(r) = 0V/m$ $\sum q_{int} = 0$

Le potentiel électrostatique $V(r)$

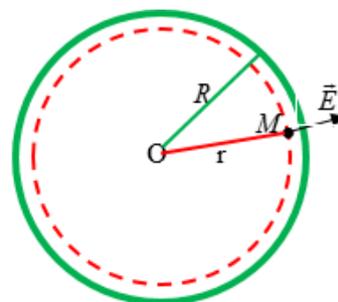


Figure I.28 : $r > R$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} = cte \tag{I-79}$$

C'est équivalent au champ et au potentiel dus à une charge ponctuelle placée en O .

Région 02 Cas $r < R$:

La charge surfacique à l'intérieur d'une sphère de rayon $r < R$ est donnée par :

$$\sum q_{int} = q = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$$

Le théorème de Gauss donne : $E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$

En simplifiant par (4π) , on a :

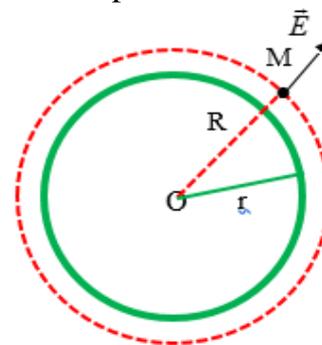


Figure I.29 : $r < R$

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \times \frac{1}{r^2}$$



(I-80)

Le champ est donc nul à l'intérieur de la sphère chargée en surface.

Il y a continuité du potentiel pour $r = R$, $V_1(V = R) = V_2(V = R)$ or $V(r = R^+) = V(r = R^-)$

2*) Représentation graphique du champ $E(r)$ (pour $q > 0$).

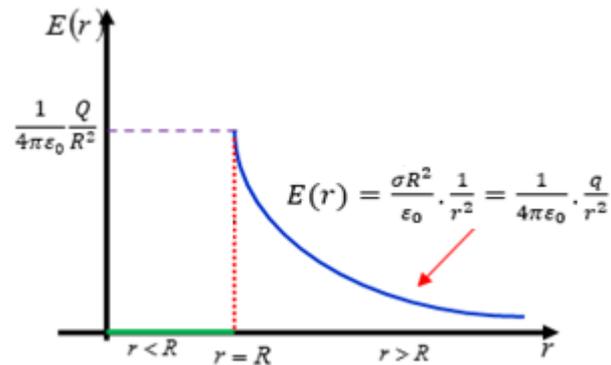


Figure I.30 : représentation graphique du champ $E(r)$.

Calcul du potentiel électrostatique $V(r)$

□ Région 01 Cas $r > R$:

Le potentiel en M est :

Pour (à l'extérieure de la sphère) :

Soit le champ \vec{E} est donné ;

$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{u}_r \quad (\text{I-81})$$

On pose :

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (\text{I-82})$$

Soit :

$$\int dV = - \int E(r) dr \quad (\text{I-83})$$

D'où :

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + (C_1 \text{ constante})$$

puisque à l'infini ($r = \infty$) les charges n'existent pas ($q=0$) \Rightarrow le $V(r)=0$ donc : $C_1 = 0V$.

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{I-84})$$

$$\text{On a : } \sigma = \frac{q}{4\pi R^2} \quad (\text{I-85})$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \quad (\text{I-86})$$



□ Région 02 Cas $r < R$:

Le champ en tout point intérieur à S est nul ; le potentiel est donc constant : $V(r < R) = C_2$

Pour déterminer la constante nous pouvons utiliser la continuité du potentiel pour $r = R$:

Nous pouvons retrouver cette constante en écrivant : $V(r < R) = V(r) = 0$

avec, $V(r=0)$ est le potentiel au centre O de la sphère S obtenu à partir d'un calcul direct suivant la relation :

$$dV(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} \quad \text{Puisque } r=R$$

On peut écrire :

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma ds}{R} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \int ds = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \quad (\text{I-87})$$

D'où :

$$V(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \quad (\text{I-88})$$

Alors que le champ est discontinu à la traversée de la charge (figure (I-30)), le potentiel électrostatique est continu (figure (I-31)).

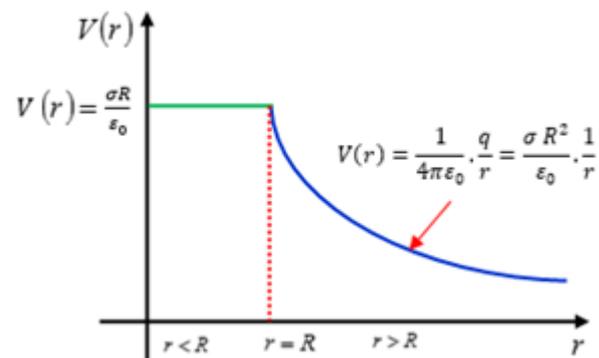


Figure I.31 : représentation graphique du potentiel $V(r)$.

Activité 08

Sphère uniformément chargée en volume

1) Calcul du champ $E(r)$

Pour une sphère fermée de centre O et de rayon R , le flux sortant est :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad (\text{I-89})$$

Puisque le norme du champ est constant, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = E(r) \times S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{I-90})$$



❑ Région 01 Cas $r > R$:

La charge volumique à l'intérieur d'une sphère de rayon $r > R$ est donnée par :

$$\sum q_{int} = q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\Phi = E(r).4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R^3}{\epsilon_0}$$

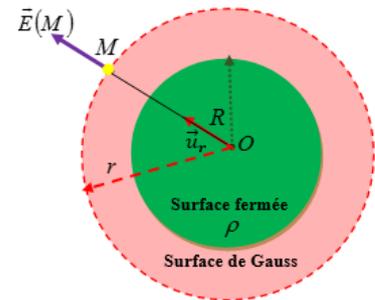


Figure I.32 : $r > R$

Soit : $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$ (I-91)

C'est équivalent au champ dû à une charge ponctuelle q placée en O .

❑ Région 02 Cas $r < R$:

La charge volumique à l'intérieur d'une sphère de rayon $r < R$ est donnée par :

$$\sum q_{int} = q = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Le théorème de Gauss donne :

$$\Phi = E(r).4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

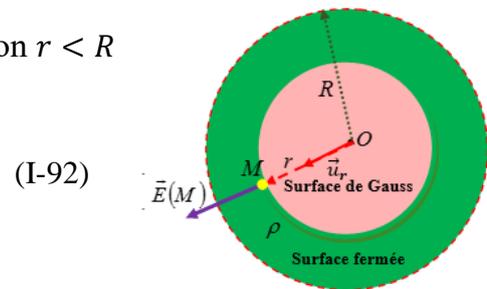


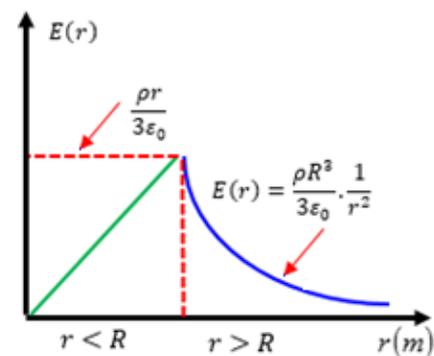
Figure I.33 : cas $r < R$

simplifiant par $(4\pi r^2)$, on a :

$$E(r) = \frac{\sigma}{3\epsilon_0} . r = A . r$$

2) Représentation graphique du champ $E(r)$:

Figure I.34 : représentation graphique du champ $E(r)$.



3) Détermination du potentiel $V(r)$

❑ Région 01 Cas $r > R$:

On pose : $E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$, Soit : $\int dV = - \int E(r) dr$

Donc :

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_1$$
 (I-93)



puisque à l'infini les charges n'existent pas ($q=0$) \Rightarrow le $V(r)=0$ donc : $C_1 = 0V$.

Alors :

$$V(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{I-94})$$

□ Région 02 Cas $r < R$:

Maintenant on a :

$$E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad (\text{I-95})$$

$$\int dV = - \int E(r) dr \quad (\text{I-96})$$

donc

$$V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} \cdot r^2 + C_2 \quad (\text{I-97})$$

Pour déterminer la constante C_2 nous pouvons utiliser la continuité du potentiel pour $r = R$

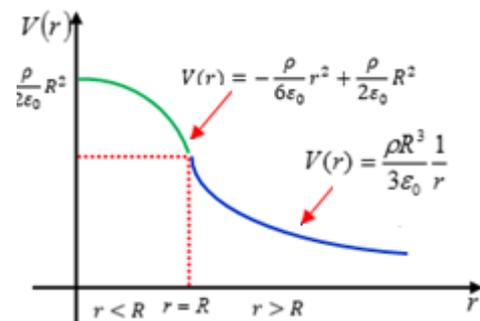
$$V_1(V = R) = V_2(V = R) \text{ or } V(r = R^+) = V(r = R^-) \quad (\text{I-98})$$

$$\text{donc } \Rightarrow C_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \quad (\text{I-99})$$

$$\text{alors : } V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \quad (\text{I-100})$$

4) Représentation graphique du potentiel $V(r)$ (pour $Q > 0$) :

Figure I.35 : représentation graphique du potentiel $V(r)$.



I.6 Conducteurs en équilibre

I.6.1 Définitions

Un conducteur est un matériau qui contient des porteurs de charges (électrons) susceptibles de se déplacer sous l'action d'un champ électrique.

Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes ses charges libres sont immobiles (lorsque le mouvement d'ensemble des porteurs de charges est nul).



Quelles sont les conséquences de cette condition

1.6.2 Propriétés d'un conducteur en équilibre

a) Champ électrostatique à l'intérieur d'un conducteur en équilibre :

À l'intérieur du conducteur, la densité de charge est nulle et la charge $q=0$

Le champ électrique \vec{E}_{int} et la charge q_{int} à l'intérieur du conducteur sont nuls. **Le potentiel** est constant.

Puisque les forces extérieures sont nulles : $\vec{F} = \vec{0}$

Donc : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

D'après le théorème de Gauss,

$$\Phi_S = E_{int} \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0} = 0 \quad (\text{I-101})$$

Soit :

$$\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad \Rightarrow E_{int} = -\frac{dV}{dr} \quad (\text{I-102})$$

On a : $E(r) = 0$

On obtient alors $V(r)$ en utilisant la relation :

$$\Rightarrow \int dV = -\int E_{int}(r) dr = cste \quad (\text{I-103})$$

La surface d'un conducteur en équilibre est équipotentielle.

Les lignes de champ sont normales à la surface pour un conducteur chargé.

b) Champ électrostatique à l'extérieur d'un conducteur en équilibre

a) Théorème de Coulomb

À l'extérieur du conducteur, la charge q du conducteur se répartit sur la surface, celle-ci est une surface équipotentielle. Le champ électrique est perpendiculaire à la surface.

Il y a trois surfaces : la surface de base S_1 , la surface de base S_2 et la surface latérale S_3 :

Le théorème de Gauss donne

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \iint \vec{E}(M) \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_1 + \iint \vec{E}(M) \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_2 + \iint \vec{E}(M) \cdot dS_3 \cdot \vec{n}_3$$



$S_1 = S_{int}$: est une surface quelconque prise à l'intérieur du conducteur s'appuyant sur (dS)

Où le champ est nul $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

$S_2 = S_{ext}$: est considérée comme parallèle à (dS)

$S_3 = S_{Lat}$: est la surface latérale du tube de champ construit sur les sections (dS_{int}) et (dS_{ext})

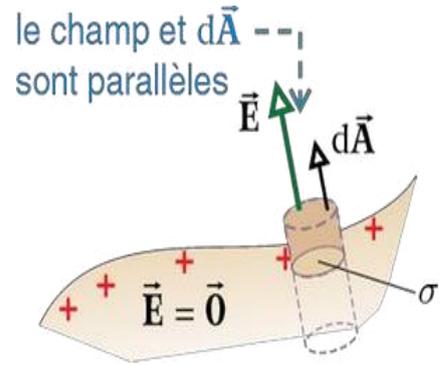


Figure I.36

Calculons le flux à travers cette surface de Gauss

Les conditions de passage du champ \vec{E} à travers la surface donnent :

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_{int} = \vec{0} \text{ (Cas } S_3 = S_{Lat} \text{)}$$

Ainsi, Au voisinage de la surface, \vec{E} ne peut être que normal à la surface.

$$(\vec{E}_{ext} - \vec{E}_{int})\vec{N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ cas } S_2 = S_{ext}$$

Au départ on a : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

Remarques :

- ➔ Si $\sigma > 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur,
- ➔ Si $\sigma < 0$, le champ est dirigé vers l'intérieur.

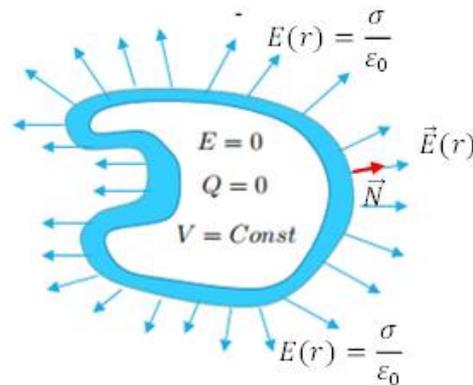


Figure I.37: conducteur en équilibre électrostatique

D'où :

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{N} \tag{I-104}$$

\vec{N} : est un vecteur unitaire normal à la surface dirigée vers l'extérieur.

Cette relation, qui traduit que les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur, constitue le *théorème de Coulomb*



Activité 1

Application

Lorsque le champ électrique créé par les charges électriques d'un nuage est supérieur à $3MV/m$, il ionise le milieu extérieur (l'air atmosphérique) et produit des décharges électriques (étincelles).

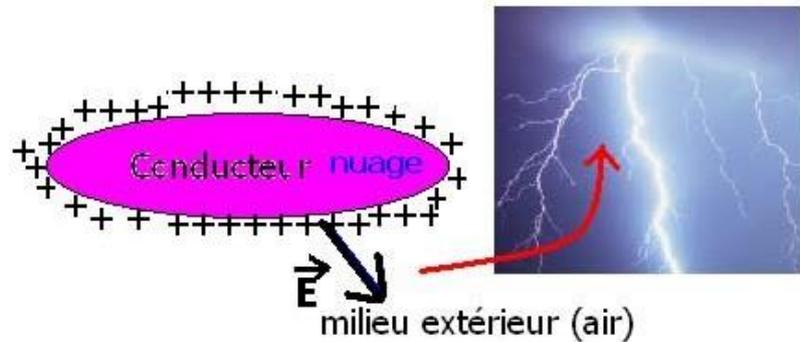


Figure I.38

d) Théorème de faraday

Soient deux conducteurs (A) et (B) à l'équilibre, placés l'un à côté de l'autre. Des lignes de champ vont relier (A) à (B). Soit un petit contour fermé C_1 situé sur la surface de (A) de surface S_1 tel que l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur C_1 rejoignent (B). Ces lignes de champ arrivant sur la surface du conducteur (B) dessinent un contour fermé C_2 de surface S_2 (figure I.39)

L'ensemble de ces lignes de champ constitue un tube de flux. On dit que la surface S_2 du conducteur (B) est l'élément correspondant à la surface S_1 du conducteur (A)

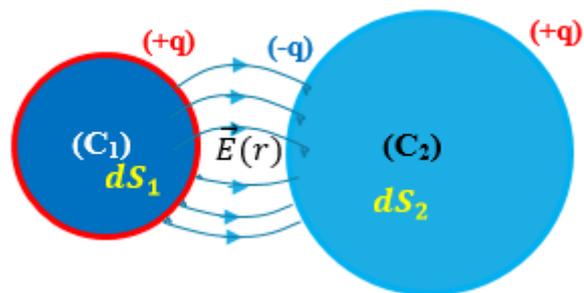


Figure I.39

1) Influence partielle

On considère deux conducteurs (C_1) et (C_2). On suppose que, initialement (C_1) est chargé avec une densité $\sigma_1 > 0$, et C_2 est neutre. Si les deux conducteurs sont suffisamment loin l'un de l'autre il n'y aura aucune influence entre eux.

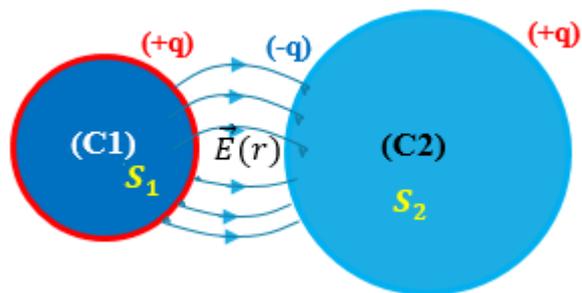


Figure I.40



Lorsqu'on approche (C_1) de (C_2) , il apparaît sur la surface de (C_2) : une densité de charge $\sigma_2 < 0$ sur la partie faisant face à (C_1) et une densité $\sigma_1 > 0$ sur la partie opposée

La charge totale de (C_2) restant neutre. On dit alors que (C_1) et (C_2) sont en position d'influence partielle.

2) Influence totale

Deux conducteurs se sont en position d'influence totale lorsque l'un des deux entoure complètement l'autre. L'influence totale produit lorsque le conducteur B entoure le conducteur A . Si l'un des deux corps (C_2 par exemple) entoure totalement l'autre, il y a correspondance totale entre les charges de la surface (S_1) de (C_1) et la surface interne (S_2) de (C_2) .

On peut alors écrire :

$$q_1 = \sigma_1 \cdot S_1 = -\sigma_2 \cdot S_2$$

Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées.

On peut donc résumer la situation de la manière suivante :

- dans la partie massive de (C_1) : $E_1 = 0$,
- sur la surface de (C_1) : charge $q_1 > 0$ créant E_2 ,
- sur la surface interne de (C_2) : charge $-q_1$,

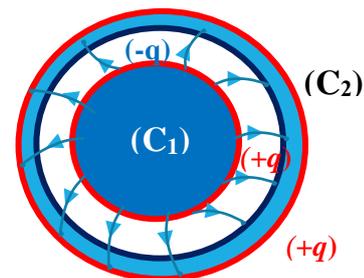


Figure I.41

- dans la partie massive de (C_2) : $E = 0$,
- sur la surface externe de (C_2) : apparition de la charge $+q_1$ pour assurer la neutralité de (C_2) (si l'on suppose (C_2) neutre au départ),
- à l'extérieur des deux conducteurs : le champ E_{ext} est celui créé par la seule charge q_1 portée par la surface externe de (C_2) .

I.7 Pression électrostatique

Soit dS un élément de surface sur un conducteur chargé d'une densité surfacique σ .

$$\Phi_S = E_1(M) \cdot dS_1 + E_1(M) \cdot dS_1 = \frac{\sigma \cdot dS_1}{\epsilon_0} \quad (\text{I-105})$$

Le théorème de Gauss appliqué au cylindre élémentaire indiqué sur la figure donne :



$$2E_1(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (\text{I-106})$$

Donc :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{N} \quad (\text{I-107})$$

Et au voisinage de la surface on a :

$$\vec{E} = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) \quad (\text{I-108})$$

Donc le champ créé par le reste du conducteur est :

$$\vec{E}_2(M) = \vec{E}(M) - \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{N} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{N} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{N} \quad (\text{I-109})$$

La force électrique est :

$$\vec{F}(M) = q \cdot \vec{E}_2(M) = \sigma \cdot ds \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{N} = \frac{\sigma^2 \cdot ds}{2\varepsilon_0} \vec{N}$$

D'où

$$\vec{F}(M) = \frac{\sigma^2 \cdot ds}{2\varepsilon_0} \vec{N} \quad (\text{I-110})$$

On peut ainsi définir une pression électrostatique par :

$$p = \frac{dF}{ds} = \frac{\sigma^2 \cdot ds}{2\varepsilon_0 \cdot ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \quad (\text{I-111})$$

Remarques :

Quel que soit le signe de σ , la force de pression électrostatique est dirigée vers l'extérieur, et tend donc à arracher les charges surfaciques.

I.8 Condensateur

I.8.1 Définition d'un condensateur

Un condensateur présente deux armatures conductrices (A) et (B), séparées entre elles par un isolant. La présence d'une charge $+q$ sur l'une de ses armatures entraîne l'apparition d'une charge opposée $-q$ sur l'autre armature. Cet effet est dû à l'influence électrostatique des charges entre elles s'appelle influence totale. La présence d'une distribution de charge entraîne l'existence d'un champ électrique dans l'isolant entre les armatures, il en résulte une



différence de potentiel V aux bornes du condensateur.

1.8.2 Capacité d'un conducteur en équilibre

Considérons un conducteur en équilibre électrostatique isolé dans l'espace, chargé avec une distribution surfacique σ et porté au potentiel V . Celui-ci s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S \text{ Gauss})} \frac{\sigma dS}{r} \quad (\text{I-112})$$

La charge totale portée par la surface du conducteur peut s'écrire :

$$q = \iint_{(S)} \sigma dS \quad (\text{I-113})$$

Où S présente la surface du conducteur est la densité superficielle de charge et r la distance entre point M considéré et l'élément de surface dS .

Si on multiplie la densité superficielle σ par un coefficient quelconque γ (apportons de nouvelles charges électrostatique) $\sigma_1 = \sigma \cdot \gamma$, les grandeurs des équations (I-112) et (I-113) du potentiel V et de la charge q doivent être aussi multipliés par γ .

On en déduit que le rapport, entre la charge et le potentiel est une constante.

$$\frac{q}{V} = \frac{q_1}{V_1} = c > 0 \quad (\text{I-114})$$

- $C > 0$ toujours. C ne dépend que des caractéristiques géométriques du condensateur et des caractéristiques du diélectrique séparant les deux armatures.

- La capacité d'un condensateur suffit pour caractériser le comportement de ce condensateur au niveau électrique.

- Plus la différence de potentielle U est élevée, plus la charge électrique stockée est importante.
- A tension fixée, un condensateur de grande capacité permettra de stocker plus de charges électriques qu'un condensateur de capacité moindre.

- Un condensateur permet donc de stocker de l'énergie (réservoir de charges électriques) sous forme d'énergie électrostatique.

Donc pour un matériau conducteur de forme quelconque, on a :

$$\frac{q}{V} = \text{Constante} = C \text{ (Capacité propre du conducteur isolé)}$$

L'unité de capacité est le Farad de symbole F



I.8.3 Energie d'un système de conducteurs

a) Énergie potentielle électrostatique d'un conducteur

Soit un conducteur en équilibre électrostatique portant la charge Q , soit V son potentiel et C sa capacité, on montre que l'énergie associée à un condensateur de capacité C et soumis à une différence de potentiel V s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{I-115})$$

b) Énergie électrostatique d'interaction de n charges ponctuelles

L'énergie potentielle électrostatique d'un ensemble de n charges ponctuelles q_i seules dans l'espace est :

$$E_p(i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C_i V_i^2 \quad (\text{I-116})$$

Où V_i est le potentiel électrostatique au point X_i où se trouve la charge q_i

I.8.4 Phénomènes d'influence de conducteurs en équilibre électrostatique

On considère deux conducteurs (C_1) et (C_2), placés l'un à côté de l'autre et portant des densités surfaciques σ_1 et σ_2 à l'équilibre.

S'ils ne sont pas au même potentiel, des lignes de champ électrostatique relient (C_1) et (C_2), Un ensemble des lignes de champ issues arrivant du contour (S_1) de (C_1) rejoignent le contour (S_2) de (C_2) et y dessinent un contour fermé au (S_2).

L'ensemble de ces lignes de champ constitue ce qu'on appelle un tube de flux :

Le flux du champ électrostatique à travers la surface latérale dessinée par ce tube est nul donc $\vec{E}_L = \vec{0}$.

Donc la surface fermée produite $S = S_1 + S_2$ où S_1 est une surface qui s'appuie sur C_1 et plonge à l'intérieur de (A_1) et S_2 une surface similaire pour (A_2).

$$\Phi_1 = \oiint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 \cdot \vec{n}_1. \text{ Car le champ à l'intérieur de } C_1 \text{ est nul.}$$

$$\Phi_2 = \oiint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 \cdot \vec{n}_2. \text{ Car le champ à l'intérieur de } C_2 \text{ est nul.}$$

$$\Phi_3 = \Phi_{lat} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{lat}. \text{ Car le champ } \vec{E} \text{ est perpendiculaire à la normale de la surface latérale du tube.}$$

$$E \cdot S = E \cdot S_1 + E \cdot S_2 \quad (\text{I-117})$$



Donc à l'équilibre :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \tag{I-118}$$

Ce qui nous donne : (q_{int} : Charges contenues dans ce tube de champ)

$$q_{int} = q_1 + q_2 = 0$$

D'où : $q_1 = -q_2$

Alors : $\vec{E}_A = -\vec{E}_B$. (I-119)

1.8.5 Système de n conducteurs en équilibre

On se limite à un système de trois conducteurs. Il s'agit de trouver les relations entre les charges et les potentiels des différents conducteurs.

Pour cela, on définit trois états d'équilibre auxquels on applique ensuite le principe de superposition.

1^{ère} état : conducteur n° 1 au potentiel $V_1 > 0$ par exemple, les autres au potentiel 0.

2^{ème} état : conducteur n° 2 au potentiel V_2 , les autres au potentiel 0.

3^{ème} état : conducteur n° 3 au potentiel V_3 , les autres au potentiel 0.

q_{11}, q_{21}, q_{31} étant les charges portées respectivement par les conducteurs 1, 2, 3, on a :

Tableau I.5

<i>1^{er} état :</i>	<i>2^{ème} état :</i>	<i>3^{ème} état :</i>
$q_{11} = C_{11}V_1 \quad (C_{11} > 0)$ $q_{21} = C_{21}V_1 \quad C_{21} < 0 \quad \text{car sa charge } q_{21} < 0$ $q_{31} = C_{31}V_1 \quad C_{31} < 0 \quad \text{car sa charge } q_{31} < 0$	$q_{12} = C_{12}V_2$ $q_{22} = C_{22}V_2$ $q_{32} = C_{32}V_2$	$q_{13} = C_{13}V_3$ $q_{23} = C_{23}V_3$ $q_{33} = C_{33}V_3$
Avec $C_{21} + C_{31} = C_{11}$ (influence partielle)		

Superposition des potentiels :

$$V_1 + 0 + 0 = V_1$$

$$0 + V_2 + 0 = V_2$$

$$0 + 0 + V_3 = V_3$$

(I-120)

Superposition des charges :

$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$





Application

Exemples, applications

Dans ce qui suit, nous allons voir plusieurs exemples de calculs de capacités. Pour obtenir la capacité C d'un condensateur, il faut calculer la relation entre sa charge Q et sa tension U, c'est-à-dire :

$$U = V_1 - V_2 = \frac{q}{C}$$

a) Capacité C d'un condensateur plan :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{12} & \text{Pour la première armature} \\ \vec{E}_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{21} & \text{Pour la deuxième armature} \end{cases}$$



Figure I.42 Condensateur plan variable

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_{12} \tag{I-126}$$

$$V_1 - V_2 = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{\sigma(M-N)}{\epsilon_0} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \tag{I-127}$$

On a : $q = \sigma S$

Donc : $V_1 - V_2 = \frac{qe}{s\epsilon_0}$

soit : $q = \frac{C}{V_1 - V_2}$

Alors :

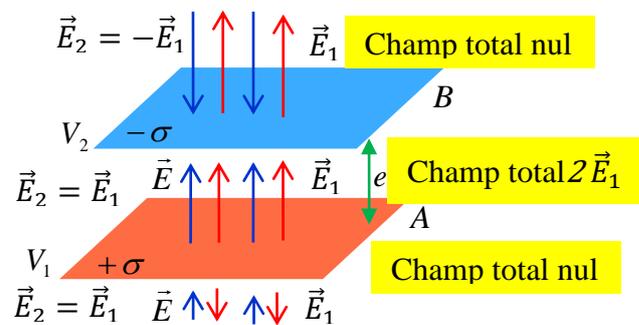


Figure I.43 : condensateur plan.

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \tag{I-128}$$

b) Capacité C d'un condensateur cylindrique

Les armatures sont constituées par deux cylindres coaxiaux concentrique. Entre ces deux armatures,

le théorème de Gauss permet d'écrire : $\Phi = E2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0}$

On calcul d'abord le champ électrostatique entre les armatures :



$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{rh} \vec{u}_r \tag{I-129}$$

La différence de potentiel d.d.p. entre les deux armatures est donc :

$$V_1 - V_2 = - \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi r h \epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} h (\ln r)_{R_1}^{R_2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$V_1 - V_2 = 2\pi\epsilon_0 h \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{I-186}$$

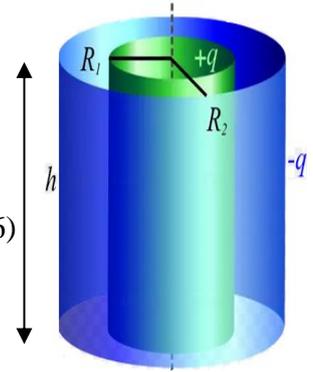


Figure I.44 : condensateur cylindrique.

Soit :

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} \tag{I-130}$$

D'où la capacité d'un condensateur cylindrique :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{I-131}$$

Alors :

$$C = 2\pi\epsilon_0 h \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \tag{I-132}$$

C) Capacité C d'un condensateur sphérique

Les deux armatures du condensateur sont deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 . Pour un point M , situé entre les deux armatures et tel que $\|\vec{OM}\| = r$, on peut écrire :

$$E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Soit : $\vec{E} = -\vec{grad}(V) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$

On obtient alors $V(r)$ en utilisant la relation :

$$\Rightarrow \int dV = - \int E(r) dr$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_1 \tag{I-133}$$

C_1 est la constante d'intégration.

La différence de potentiel d.d.p. entre les deux armatures est donc :

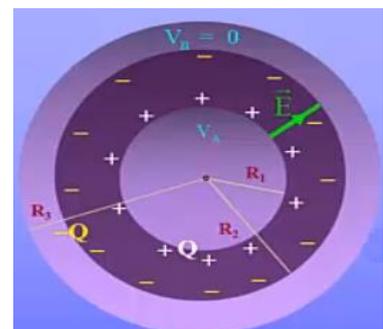


Figure I.45 : condensateur sphérique



$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q_1}{\epsilon_0} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r}\right)_{R_1}^{R_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right)$$

Et comme $C = \frac{q}{V_1 - V_2}$.

Alors : $C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}\right)$. (I-134)

II.8.6 Associations de condensateurs

Les condensateurs peuvent être associés en série ou en parallèle, ou par combinaison des deux (voir figures II-11).

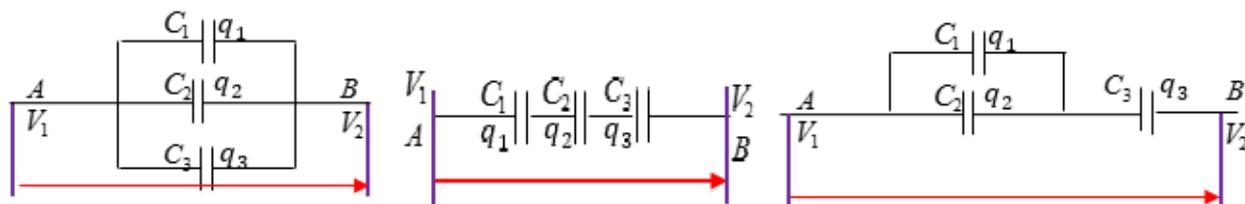


Figure I.46: montage parallèle, série et combinaison des condensateurs.

a) Assemblage des condensateurs en série

La charge q se conserve : toutes les armatures de rang impair portent la même charge $+q$, toutes les armatures de rang pair la même charge $-q$

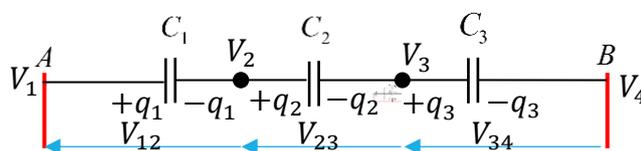


Figure I.47 : montage série des condensateurs.

$$q_{Totale} = q_1 = V_{12}C_1 = q_2 = V_{23}C_2 = q_3 = C_3V_{34}$$
 (I-135)

Or on sait que pour des dipôles en séries :

$$V_{Totale} = V_{12} + V_{23} + V_{34}$$
 (I-136)

Puisque tous les condensateurs portent la même charge :

$$\frac{q_{Totale}}{C_{eq}} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3}$$
 (I-137)

$$d'où : V_A - V_B = q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{q_1}{C_{eq}}$$
 (I-138)

$$Alors : \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$
 (I-139)



La capacité équivalente Pour n condensateurs groupés en série est donc donnée par :

$$\frac{1}{c_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (\text{I-140})$$

b) Assemblage des condensateurs en parallèle

Lorsque les condensateurs sont branchés en parallèle, la différence de potentiel à leurs armatures est la même :

$$V_{Totale} = V_1 = V_2 = V_3 \quad (\text{I-141})$$

En appliquant le principe de la conservation de la différence de potentiel, la charge q du montage des condensateurs parallèles vaut :

$$q_{Totale} = q_1 + q_2 + q_3 \quad (\text{I-142})$$

et pour un condensateur :

$$q_{Totale} = c_{eq}V \quad (\text{I-143})$$

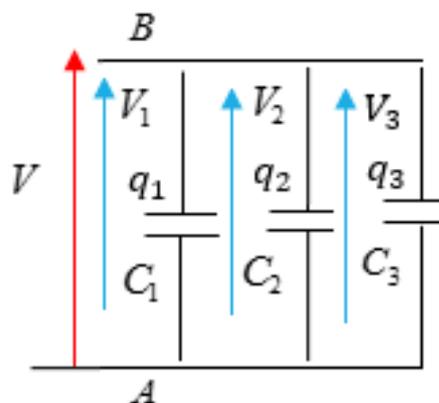


Figure I.48 : montage parallèle des condensateurs

$$q_{Totale} = q_1 + q_2 + q_3 = V(C_1 + C_2 + C_3). \quad (\text{I-144})$$

D'où :

$$c_{eq} = (C_1 + C_2 + C_3) \quad (\text{I-145})$$

La capacité équivalente Pour n condensateurs groupés en parallèle est donc donnée par :

$$c_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (\text{I-146})$$



I.8.7 Energie d'un condensateur

Un condensateur emmagasine une quantité d'énergie électrique égale au travail accompli pour le charger.

Soit un condensateur constitué de deux armatures. L'énergie électrostatique de ce système de deux conducteurs est :

$$E_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 \quad (\text{I-147})$$

En général, on a $q_1 = q_2 = q$ charge du condensateur :

$$E_e = \frac{1}{2} q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (\text{I-148})$$

Ainsi donc, un condensateur peut emmagasiner de l'énergie électrostatique.

Mais où est-elle stockée ?

Sous quelle forme ?

Prenons le cas d'un condensateur plan de densité surfacique σ uniforme et dont les armatures, séparées d'une distance d , ont une surface S commune. L'énergie de ce condensateur s'écrit :

$$E_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1(\sigma S)^2}{2 \frac{\epsilon_0 S}{d}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 (Sd) = \frac{\epsilon_0 (E)^2}{2} v \quad (\text{I-149})$$



Exercices RÉSOLUS

1.9 Exercices Résolus

Exercice 01

On donne la constante de gravitation $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-2} \text{s}^{-1}$ et le premier rayon de l'atome de Bohr $r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Dans l'atome d'hydrogène, un électron (charge $-q$) décrit une orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un noyau constitué d'un proton (charge $+q$). Il s'agit de comparer les forces électrostatique (F_e) et gravitationnelle (F_g) entre ces deux particules.

RÉSOLUTION

On a:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{(9,1 \cdot 10^{-31}) \cdot (1,67 \cdot 10^{-27})}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} = 8,1 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$\text{Donc } F_g = 3,7 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

On observe que la force électrostatique est environ $2 \cdot 10^{39}$ fois plus grande que la force de gravitation. Cette dernière est donc tout à fait négligeable.

- Une masse est toujours une grandeur positive tandis qu'une charge électrique peut être positive ou négative. Il en résulte que la **force** de gravitation est toujours attractive alors que la **force** électrostatique peut être soit attractive (**charges** de signes différents) ou répulsive (**charges** de même signe)
- A l'échelle de particules chargées (**protons**, **électrons** et même noyaux atomiques) la valeur de la **force** électrostatique est toujours nettement supérieure à celle de la **force** de gravitation.

Je réussis si...

- *Je sais faire la différence entre la force électrostatique et la force de gravitation.
- *Je sais présenter et calculer la force.

Exercice 02

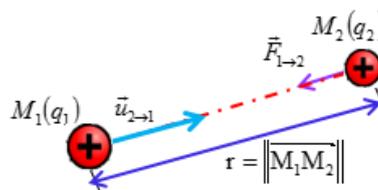
Calculer la force qu'exerce la charge $q_1 = 8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ sur une charge $q_2 = -4 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ séparées par la distance 9 mm.



RÉSOLUTION

On a :

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} (\vec{u}_{21})$$



$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = 9.10^9 \cdot \frac{8.10^{-6} \cdot (-4) \cdot 10^{-6}}{(9.10^{-3})^2} = 3,55.10^7 N$$

Figure I.49

Exercice 03

Soient deux charges ponctuelles q_1 et q_2 sont placées sur l'axe (xx') au point O et $A(2,0)$ respectivement.

Déterminer l'expression de la force électrostatique agissant sur une charge ponctuelle q_3 placée sur l'axe (xx') au point $B(1,0)$. On donne : $q_1 = 2q$, $q_2 = -3q$ et $q_3 = 2q$ avec $q > 0$.

RÉSOLUTION

On pose : $q_1 = 2q$, $q_2 = -3q$ et $q_3 = 2q$ avec $q > 0$.

- ➔ Présentation graphique des forces électriques \vec{F}_A et \vec{F}_O au point B .
- ➔ Détermination de la valeur de la charge q_0 en fonction de q

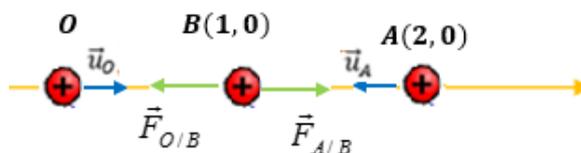


Figure I.50

D'après le principe de superposition des forces :

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{O/B} + \vec{F}_{A/B}$$

$$\vec{F}_{O/B} = K \frac{q_O q_B}{\|\overline{OB}\|^2} \vec{u}_O ; \quad \vec{u}_O = \vec{i} \quad \text{et} \quad \|\overline{OB}\|^2 = 1$$

$$\vec{F}_{A/B} = K \frac{q_A q_B}{\|\overline{AB}\|^2} \vec{u}_A ; \quad \vec{u}_A = -\vec{i} \quad \text{et} \quad \|\overline{AB}\|^2 = 1$$

D'où

$$\vec{F}_B = 9.10^9 \frac{(2q)(2q)}{1} \vec{i} - 9.10^9 \frac{(-3q)(2q)}{1} \vec{i}$$

Donc l'expression de la force électrostatique agissant sur la charge ponctuelle q_3 est :

$$\vec{F}_B = 2,16.10^{11} q^2 \vec{j}$$



Exercice 04

Soit un axe linéaire ox formé par deux charges alignées : $1 \mu\text{C}$ en O et $2 \mu\text{C}$ en A ($x = 2 \text{ m}$).
Où doit-on placer une troisième charge q pour que la force nette sur cette charge soit nulle ?



Figure I.51

RÉSOLUTION

Les deux charges délimitent trois régions sur cet axe.

● **Région 01 Cas $x < 0 \text{ m}$:**

Dans cette région, les deux forces de répulsion $\vec{F}_{O/B}$ et $\vec{F}_{A/B}$ sont dans la même direction. Donc les deux forces de répulsion ne s'annulent pas.

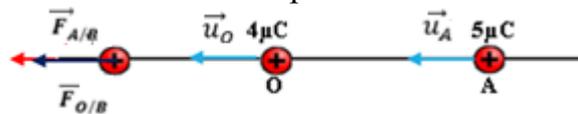


Figure I.52

● **Région 02 Cas $x < 4 \text{ m}$:**

Les deux forces de répulsion sont encore une fois dans la même direction. Il est donc impossible que la force soit nulle dans cette région.

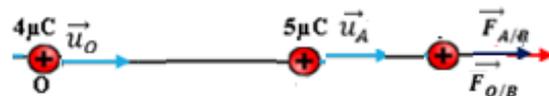


Figure I.53

● **Région 03 Cas $0 \text{ m} < x < 4 \text{ m}$:**

Dans ce cas, les forces s'annulent puisqu'elles sont dans des directions opposées.

D'après le principe de superposition des forces:



Figure I.54

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{O/B} + \vec{F}_{A/B}$$

$$\vec{F}_{O/B} = K \frac{q_O q_B}{\|\vec{OB}\|^2} \vec{u}_O ; \quad \vec{u}_O = \vec{i} \quad \text{et} \quad \|\vec{OB}\|^2 = x^2$$

$$\vec{F}_{A/B} = K \frac{q_A q_B}{\|\vec{AB}\|^2} \vec{u}_A ; \quad \vec{u}_A = -\vec{i} \quad \text{et} \quad \|\vec{AB}\|^2 = (2 - x)^2$$



$$\text{D'où } \vec{F}_B = 9 \cdot 10^9 \frac{(3 \cdot 10^{-6})(q)}{x^2} \vec{i} - 9 \cdot 10^9 \frac{(2 \cdot 10^{-6})(q)}{(2-x)^2} \vec{i} = \vec{0}$$

Donc

$$\frac{3}{x^2} = \frac{2}{(2-x)^2} \Rightarrow x^2 - 12x + 12 = 0$$

Les solutions de cette équation est :

$$x_1 = 1,11 \quad \text{et} \quad x_2 = 10,89$$

Comme la solution doit être entre $x = 0$ m et $x = 2$ m. donc notre solution est $x = x_1 = 1.11$ m

Exercice 05

Quatre charges ponctuelles identiques $-q$ ($q > 0$) sont fixées aux sommets A , B , C et D d'un carré de côté a . Une cinquième charge $q_0 > 0$ est maintenue fixe au centre O du carré. Déterminer la valeur de q_0 en fonction de q pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle.

RÉSOLUTION

On a : $q_A = q_B = q_C = q_D = -q$

- Présentation graphique des forces électriques $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_O$ et \vec{F}_D au point C .
- Détermination de la valeur de la charge q_0 en fonction de q

D'après le principe de superposition des forces :

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{A/C} + \vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{O/C} + \vec{F}_{D/C}$$

$$\text{On a : } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ m/F.}$$

$$\vec{F}_{A/C} = K \frac{q_A q_C}{\|\vec{AC}\|^2} \vec{u}_A$$

$$\text{avec } \vec{u}_A = \cos(45^\circ)\vec{i} + \sin(45^\circ)\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

et

$$\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{AD}\|^2 + \|\vec{DC}\|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\vec{F}_{A/C} = K \frac{q_A q_C}{\|\vec{AC}\|^2} \vec{u}_A = 9 \cdot 10^9 \frac{q^2}{2 \cdot a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j})$$

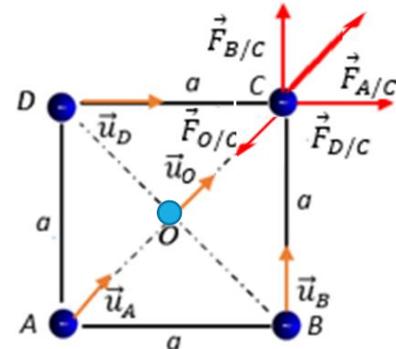


Figure I.55



$$\vec{F}_{O/C} = -K \frac{q_0 q_C}{\|\vec{OC}\|^2} \vec{u}_O$$

Avec $\vec{u}_O = \vec{u}_A$ $\vec{F}_{O/C} = -K \frac{q_B q_C}{\|\vec{OC}\|^2} \vec{u}_B$ et $\|\vec{OC}\|^2 = \frac{a^2}{4}$

$$\vec{F}_{O/C} = K \frac{q_C}{\|\vec{OC}\|^2} \vec{u}_O = -9.10^9 \frac{q \cdot q_0}{\frac{a^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{F}_{B/C} = K \frac{q_B q_C}{\|\vec{BC}\|^2} \vec{u}_B = 9.10^9 \frac{q^2}{a^2} \vec{j}$$

Où $\vec{u}_B = \vec{j}$ et $\|\vec{BC}\|^2 = a^2$

$$\vec{F}_{D/C} = K \frac{q_D q_C}{\|\vec{DC}\|^2} \vec{u}_D = 9.10^9 \frac{q^2}{a^2} \vec{i}$$

Où $\vec{u}_D = \vec{i}$ et $\|\vec{DC}\|^2 = a^2$

$$\vec{F}_C = \vec{F}_A = \vec{F}_{A/C} + \vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{O/C} + \vec{F}_{D/C}$$

$$\vec{F}_C = 9.10^9 \frac{q^2}{2.a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) - 9.10^9 \frac{q \cdot q_0}{\frac{a^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i} + \vec{j}) + 9.10^9 \frac{q^2}{a^2} \vec{j} + 9.10^9 \frac{q^2}{a^2} \vec{i} = \vec{0}$$

Donc $q_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4} q$

Exercice 06

On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O , origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires \vec{u}_x et \vec{u}_y .

On donne : $q_1 = q, q_2 = -2q, q_3 = 2q$ et $q_4 = -q$ avec $q = 10^{-8} C$ et $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 m/F$

- Déterminer le champ électrique E au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de E .
- Exprimer le potentiel V créé en O par les quatre charges.

RÉSOLUTION

- Détermination du champ E en O .

Soit $\vec{E}_A, \vec{E}_B, \vec{E}_C$ et \vec{E}_D les champs créés en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4 .

D'après le principe de superposition des Champs :

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

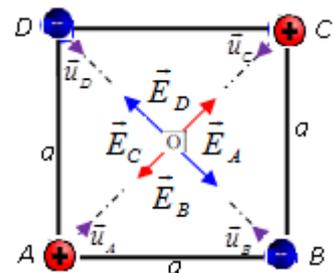


Figure I.56



$$\|\vec{AO}\|^2 = \frac{\|\vec{AB}\|^2}{4} + \frac{\|\vec{AD}\|^2}{4} = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Selon le principe de superposition des champs on a :

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{\|\vec{OA}\|^2} \vec{u}_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_B}{\|\vec{OB}\|^2} \vec{u}_B + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_C}{\|\vec{OC}\|^2} \vec{u}_C$$

Puisque $\|\vec{OA}\|^2 = \|\vec{OB}\|^2 = \|\vec{OC}\|^2 = x^2$

On peut écrire :

$$\vec{E}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x^2} (q_A \vec{u}_A + q_B \vec{u}_B + q_C \vec{u}_C)$$

On a :

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\|\vec{BC}\|}{\|\vec{BO}\|} = \frac{a}{x}$$

Donc

$$x = \frac{a/2}{\cos(\hat{B})} = \frac{a/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

Et, $\vec{u}_A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$, $\vec{u}_B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right)$, $\vec{u}_C = -\vec{j}$

Donc l'expression du champ électrostatique \vec{E}_O est :

$$\vec{E}_O = \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{j} \right)$$

Donc :

$$\vec{E}_O = \frac{-3q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \vec{j}$$

Exercice 08

Soit un fil AB uniformément chargé avec une densité linéaire $\lambda > 0$, de milieu O porté par l'axe Ox. Déterminer le champ électrostatique en un tout point M sur une distance a du plan médiateur du fil AB puis en un point M appartenant au segment AB.

RÉSOLUTION

1) Le point M est sur la médiatrice de AB

On a la charge q est positive ; $\lambda > 0$

La charge élémentaire pour une distribution linéaire s'écrit sous la forme :

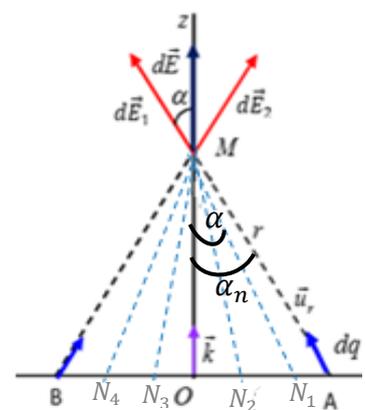


Figure I.57



$$dq = \lambda dl \quad \text{et} \quad \|\vec{NM}\|^2 = r^2$$

$$\sin\alpha = \frac{l}{a} \Rightarrow l = a \cdot \alpha, \text{ donc } dl = a d\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{\|\vec{OM}\|^2}{\|\vec{NM}\|^2}$$

Expression du champ électrique $d\vec{E}$: $d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_A}{\|\vec{N}_1\vec{M}\|^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{\|\vec{NM}\|^2} \cos\alpha \vec{j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda a d\alpha}{a^2} \cos\alpha \vec{j}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} \frac{\lambda d\alpha}{a} \cos\alpha \vec{j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \cdot 2\sin\alpha_n \vec{j} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot L}{a \cdot \sqrt{L^2 + a^2}} \vec{j}$$

Avec : $\sin\alpha_n = \frac{L}{r} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$

► Si le point M est très écarté de l'origine O ($a \gg L$), on a : $\sin\alpha_n = \frac{L}{a}$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot L}{a^2} \vec{j}$$

► Si le point M est très proche du segment ($L \gg a$), on a : $\sin\alpha_n = \frac{L}{L} = 1$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{a} \vec{j}$$

1) Le point M appartient à (AB)

La quantité de charge $dq = \lambda dx$ est sur le barreau AB suivant l'axe (xx') ,

créée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par le vecteur \vec{i}

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\|\vec{NM}\|^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\|\vec{NM}\|^2} \vec{i}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(a-x)^2} \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dx}{(a-x)^2} \vec{i}$$

Pour résoudre ce problème on pose $a-x = y$, $dy = -dx$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L -\frac{dy}{(y)^2} \vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [(a-x)^{-1}]_{-L}^L \vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a-L} - \frac{1}{a+L} \right) \vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{a^2 - L^2} \vec{i}$$

Si le point M est très éloigné du segment $[AB]$ ($a \gg L$), on a :



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2L}{a^2} \vec{i}$$

Exercice 09

On donne un demi-anneau ABC de rayon R de centre O , d'axe (xx') . Une charge positive q est répartie uniformément avec une densité linéique de charge λ en $C.m^{-1}$ le long de ce dernier comme l'indique la figure (I-58).

Déterminer l'expression du vecteur champ électrique $\vec{E}(O)$.

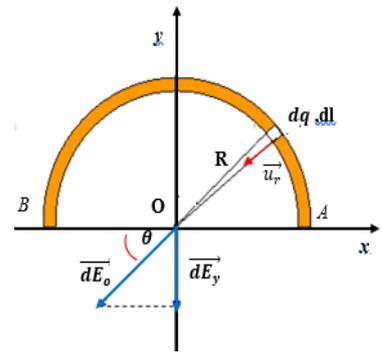


Figure I.58

RÉSOLUTION

q est positive ; $\lambda > 0$

La charge élémentaire dq pour une distribution linéaire s'écrit sous la forme :

$$dq = \lambda dl \text{ et } \|\vec{OM}\|^2 = r^2$$

Expression du champ électrique $\vec{E}(O)$:

Le champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ crée par l'élément de charge dq :

$$d\vec{E}(O) = dE_x \vec{i} + dE_y \vec{j} = \frac{Kdq}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{K\lambda dl}{r^2} \vec{j}$$

On raisonne de la symétrie et l'axe de symétrie (Oy) on a : $dE_x = 0$; $dE_y = dE_o \sin \theta$

avec $dl = R d\theta$ et $r = R$

Alors :

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R \cos \theta d\theta}{R^2} = \frac{K\lambda \cos \theta d\theta}{R}$$

Donc:

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_0^\pi \cos \theta d\theta = \frac{K\lambda}{R} [-\sin \theta]_0^\pi$$

Donc l'expression du champ électrique : $E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}$

Donc
$$\vec{E}(O) = -\frac{2K\lambda}{R} \vec{j}$$

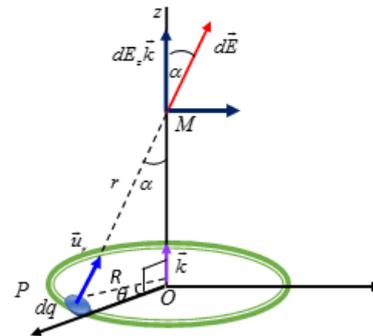
Exercice 10

Un anneau circulaire de centre O et de rayon r , Une charge positive q est répartie uniformément avec une densité linéique de charge λ sur ce dernier.



- 1) Déterminer le potentiel créé par cet anneau au point M de l'axe (Oz) .
- 2) Déduire le champ électrostatique de ce point M .

RÉSOLUTION



Soit un élément de longueur dl qui porte la charge

$dq = \lambda dl$. Soit M un point de l'axe (Oz) tel que $OM=z$. **Figure I.59**

Le champ créé au point M par cet élément est :

Suivant la figure ci-dessus on peut écrire : $\sin \theta = \frac{dl}{R}$

L'expression de la vitesse en coordonnée polaire s'écrit :

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = \frac{dl}{dt} \quad \text{Donc : } R d\theta = dl$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda dl}{r}$$

où $r = \sqrt{R^2 + z^2}$.

Ce qui donne

$$\int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda dl}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$V = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

2°)

Le potentiel électrostatique est relié au champ électrostatique par la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dz} = \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Ainsi ; $\vec{E}(M) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \vec{u}_r$

Exercice 11

Soit un disque de centre O , de rayon R , uniformément chargé avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$ (figure I.60). Calcul le champ $\vec{E}(M)$ créé par cette distribution de charges en un point M de l'axe (oz) du disque :





- a) directement
b) à partir du potentiel électrostatique.

RÉSOLUTION

La charge élémentaire pour une distribution surfacique s'écrit sous la forme :

$$dq = \sigma dS \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OM}\|^2 = r^2$$

Expression du champ électrique \vec{E}_O :

➔ Calcul du champ créé au point M .

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie paire de la distribution. Donc le champ $\vec{E}(M)$ en un point M de l'axe (Oz) est porté par \vec{k} :

$$\vec{E}(M) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad (E_x = E_y = 0).$$

$$\text{Donc } \vec{E}(M) = E_z \vec{k}.$$

Le champ électrostatique créé par la charge élémentaire au point M est :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\text{Avec } dq = \sigma dS \text{ et } r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$dE_z = dE(M) \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{\rho^2 + z^2} \cos \alpha$$

$$\text{Avec ;} \quad \cos \alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad \text{et} \quad ds = \rho d\rho d\theta$$

$$\text{Ce qui donne,} \quad dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{\rho^2 + z^2} \cos \alpha$$

$$\text{Donc : } \vec{E}(M) = dE_z \vec{k} = d\vec{E} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma z \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \vec{k}, \text{ on pose : } \rho^2 + z^2 = c^2$$

$$\text{On a : } \int_0^R \frac{c}{\sqrt{c^2}} dc = \left[-\frac{1}{c} \right]_0^R = \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$$

$$\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k}$$

➔ A partir du potentiel électrostatique

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\overrightarrow{AM}\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{\|\overrightarrow{AM}\|}$$

$$\text{Avec } ds = \sigma \rho d\rho d\theta \quad \text{et} \quad r = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

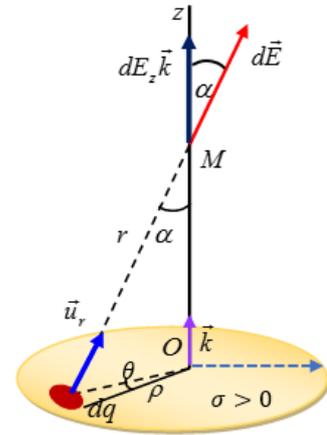


Figure I.60



Ce qui donne :

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \rho d\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Donc $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma z \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$

Alors : $V(M) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]$

$$V(M) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right] \vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E(M) = -\frac{dv}{dr} = -\frac{dv}{dz} = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma (z - \sqrt{R^2 + z^2})$$

Exercice 12

On considère un cylindre d'axe (zz') et tel que l'origine O soit confondu avec son centre (figure I.61). Ce cylindre est uniformément chargé sur sa surface latérale avec une densité superficielle uniforme $\sigma > 0$.

Déterminer l'expression du champ électrostatique en un point M de l'axe de symétrie du cylindre.

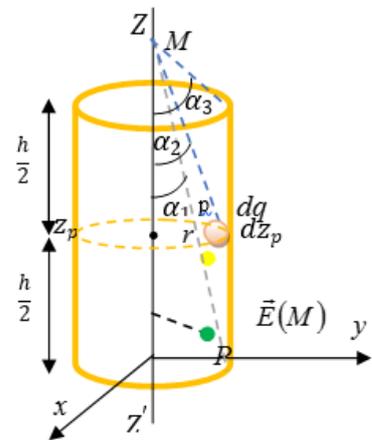


Figure I.61

RÉSOLUTION

q est positive ; $\sigma > 0$

La charge élémentaire dq pour une distribution surfacique s'écrit sous la forme :

avec $dq = \sigma R d\theta dz_p$ et le champ électrostatique élémentaire créé par cette charge au point M est :

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\vec{PM}\|^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\vec{PM}\|^3} \vec{PM}$$

Ce qui donne.

$$dE_z(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma R dz_p d\theta}{[R^2 + (z - z_p)^2]} \cos\alpha \quad \text{avec ;} \quad \cos\alpha = \frac{z - z_p}{r} = \frac{z - z_p}{\sqrt{R^2 + (z - z_p)^2}}$$

$$dE_z(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z - z_p) \sigma dz_p d\theta}{[R^2 + (z - z_p)^2]^{3/2}}$$



Donc

$$\begin{aligned}\vec{E}(M) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma Z \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{(z-z_p)}{(R^2+(z-z_p)^2)^{\frac{3}{2}}} dz_p \int_0^{2\pi} d\theta \vec{k} \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma Z \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z-z_p)}{(R^2+(z-z_p)^2)^{3/2}} dz_p \vec{k}\end{aligned}$$

Ce qui donne,
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma \left[\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-\frac{h}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+(z+\frac{h}{2})^2}} \right] \vec{k}$$

✚ si $z \gg h$ et R le champ $\vec{E}(M)$ sera approximativement donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{R}{2|z|\epsilon_0} \sigma \left[1 + \frac{h}{2z} - \frac{R^2}{2Z^2} - 1 + \frac{h}{z} + \frac{R^2}{2z^2} \right] \vec{k}$$

D'où

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma R h}{2|z|\epsilon_0} \vec{k}$$

✚ Si le point M est au centre géométrique O du cylindre, le champ $\vec{E}(M)$ sera nulle.

✚ si $z \gg h$ (le cylindre est infiniment long), le champ $\vec{E}(M)$ sera nulle.

Exercice 13

Parmi les distributions de charges suivantes, quelles sont celles pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique ?

Exprimer alors ce champ en précisant sa direction et son sens :

- 1) fil de longueur de densité linéique de charge λ .
- 2) fil infini de densité linéique de charge λ .
- 3) circonférence de densité linéique de charge λ .
- 4) disque de densité surfacique de charge σ .
- 5) plan infini (π) de densité surfacique de charge σ .

RÉSOLUTION

1) **Fil de longueur finie** : non, on ne peut appliquer le théorème de Gauss.

2) **Fil de longueur infinie** : oui. Dans ce cas, la surface de Gauss est un cylindre ayant pour axe le fil. Soit h et r respectivement la hauteur et le rayon de ce cylindre, r étant la distance



du fil au point M où l'on calcule le champ électrique. Pour des raisons de symétrie, ce champ est radial. On a :

$$\sum q_{int} = q = \sigma S = \sigma 2\pi r \ell$$

le champ E en un point M situé à la distance r de l'axe est donc de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{u}_r$$

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre fermé d'axe (Oz) , de rayon r et de hauteur ℓ

$$\text{Le théorème de Gauss : } \Phi = \oiint_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

La surface latérale du cylindre est $S = 2\pi r \ell$

$$\text{Soit : } E(r) \cdot 2\pi r \ell = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} .$$

D'où

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \cdot \epsilon_0}$$

$\lambda > 0$ \vec{E} est dans le sens de \vec{u}_r

$\lambda < 0$ \vec{E} est opposé à \vec{u}_r

3) Circonférence : non.

4) Disque : non.

5) Selon le Plan infini suivant. On peut appliquer le théorème de Gauss :

La distribution est invariante par translation quelconque parallèle au plan et V ne dépend donc que de la distance z au plan.

Par conséquent, le champ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\frac{dV}{dr}\vec{k}$

est perpendiculaire au plan (π) . Tant que le calcul est fait en un point M tel que (π) puisse être considéré comme infini, E est uniforme de part de d'autre de π , seul son sens change. En effet, si l'on prend pour surface de Gauss un cylindre de hauteur h et de

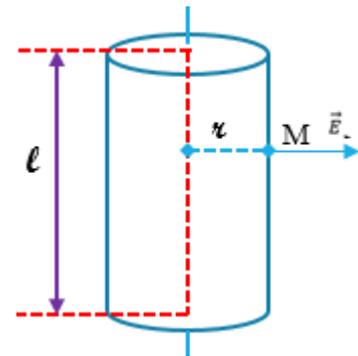
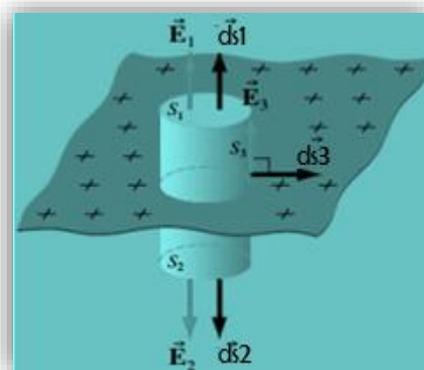


Figure I.62





surface de base S , symétrique par rapport à (π) , (voir figure ci-contre), on a :

Figure I.50

$$\Phi = \oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\text{Soit } 2 \cdot E \cdot S = \frac{\sigma}{\epsilon_0} S$$

$$\opl� \quad E(r) = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

$$\text{Donc} \quad E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

Le sens de E indiqué sur la figure correspond à $\sigma > 0$. Les sens de E_1 et E_2 changent si $\sigma < 0$

Exercice 14

Un cylindre a un rayon de 7 cm, et il porte une densité surfacique σ où $\sigma = 3,250 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$.

1. Quel est le champ électrique à une distance de 4,00 cm de l'axe du cylindre ?
2. Quel est le champ électrique à une distance de 9,0 cm de l'axe du cylindre ?

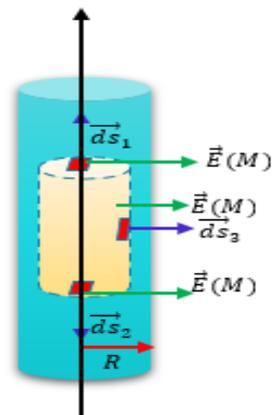


Figure I.63

RÉSOLUTION

L'intégrale de surface fermée peut être divisée en trois intégrales de surface : pour le cercle de gauche, la partie courbe (le côté du cylindre) et le cercle de droite :

$$\Phi_S = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

Comme le montre la figure (I.27), \vec{E} et \vec{dS}_1 sont perpendiculaires. \vec{E} et \vec{dS}_3 le sont également. Alors,

$$\Phi_1 = \int_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 = \int_{S_1} E \cdot S \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\Phi_3 = \int_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3 = \int_{S_3} E \cdot S \cdot \cos 90^\circ = 0$$

De plus, \vec{E} et \vec{dS}_1 ont la même orientation, et le module de doit être constant le long de la surface de Gauss selon la symétrie cylindrique. Alors,



$$\Phi_2 = \int_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \int_{S_2} E \cdot S \cdot \cos(0^\circ) = E \cdot S = E 2\pi r l$$

1°) Cas $r = 4\text{cm} < R = 7\text{cm}$ (à l'intérieur du disque) :

Selon la coupe transversale de la figure (I.08), il n'y a pas de charge à l'intérieur du cylindre de Gauss $\sum q_{\text{int}} = 0$, car la charge est limitée à la surface du cylindre chargé.

Alors,
$$\vec{E} = \vec{0} \text{ N/C}$$

2°) Cas $r = 9\text{cm} > R = 7\text{cm}$ (à l'extérieur du disque) :

Dans ce cas-là, nous utilisons la charge surfacique du cylindre et son rayon, en plus de la longueur de la surface de Gauss, car la partie du cylindre chargé, comprise dans la surface de Gauss a une longueur (l) :

La charge intérieure totale est :

$$\sum q_{\text{int}} = q = \sigma 2\pi R l$$

Surface d'un système de cylindre de rayon R

$$S_{\text{cylindre}} = 2\pi R l$$

Surface d'un cylindre de Gauss de rayon r

$$S_{\text{cylindre de Gauss}} = 2\pi r l$$

$$E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{\sigma 2\pi R l}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

$$\text{AN : } \vec{E} = \frac{\sigma \cdot R}{2 \cdot \epsilon_0} \vec{k} = \frac{3,25 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 10^{-2}} \vec{k} = 28,5 \cdot 10^4 \text{ N/C } \vec{u}_r$$

Exercice 15

Un plan infini, parallèle au plan des xy , a une charge surfacique $\sigma = 2,80 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$. Une charge ponctuelle $q = 8,90 \mu\text{C}$ est placée à une distance de $4,50 \text{ cm}$ au-dessus du plan. Calculez la force électrique exercée sur la charge par le plan.

RÉSOLUTION

Tout d'abord, nous traçons la surface de Gauss du cylindrique qui s'étend de chaque côté du plan et qui est centrée par rapport au plan.

L'aire transversale du cylindre est égale à A .

$$\text{On a : } \vec{F}(M) = q \vec{E}(M)$$

$$\text{et } \Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$



La surface de Gauss peut être divisée en trois surfaces :

les deux bouts et le côté du cylindre :

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \int_{S_1} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} + \int_{S_2} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} + \int_{S_3} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}$$

Pour la première surface, \vec{E} et \vec{dS}_1 ont la même orientation, et le module de E ne change pas

sur la surface. la même remarque a été vue pour la deuxième surface \vec{E} et \vec{dS}_2 et Pour le côté

du cylindre, \vec{E} et \vec{dS}_3 sont perpendiculaires donc on peut écrire :

$$\Phi_S = \int_{S_1} E \cdot S \cdot \cos 0^\circ + \int_{S_2} E \cdot S \cdot \cos 0^\circ + \int_{S_3} E \cdot S \cdot \cos 90^\circ$$

Donc

$$\Phi_S = 2E \cdot S = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

D'où :

$$F = q \cdot E = q \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}$$

AN :

$$\vec{F} = q \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \vec{k} = \frac{8,9 \cdot 10^{-6} \cdot 2,8 \cdot 10^{-4}}{2,8854 \cdot 10^{-12}} \vec{k} = 141 \vec{k}$$

Exercice 16

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique $E(r)$ créé par une distribution volumique de charges ρ ($\rho > 0$) répartie entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie et de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) dans les trois cas : $r < R_1$,

$$R_1 < r < R_2$$

RÉSOLUTION

Par symétrie le champ électrostatique créé par ce cylindre est radial et est invariant (reste le même), ce qui signifie que le champ ne dépend pas de θ ni de z :

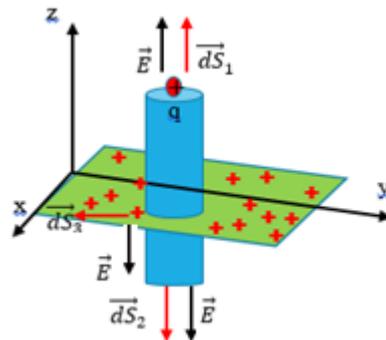


Figure I.64



$$\vec{E} = E\vec{u}_r$$

Pour ces raisons de symétrie, on choisit la surface de Gauss SG un cylindre de rayon r et de hauteur h . $S_{\text{Cylindre de Gauss}} = 2\pi r h$

$$\text{Charge intérieure à la surface de Gauss : } \sum q_{\text{int. } S.G} = \rho V = \rho \pi r^2 h$$

$$\text{Soit : } E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

Pour déterminer le champ E en tout point de l'espace, on applique le théorème de Gauss à un cylindre fermé d'axe (Oz) , de rayon r et de hauteur h

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{\text{int.}}}{\epsilon_0}$$

On constate qu'il existe trois surfaces dS_1 , dS_2 et dS_3 . Comme le champ électrostatique est perpendiculaire à la surface, \vec{dS}_1 et à la surface \vec{dS}_2 , son flux à travers ces deux surfaces est nul,

$$\text{D'où : } \Phi = \Phi_3 = \int_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot \vec{dS}_3 = \int_{S_2} E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = E \cdot S = E 2\pi r h$$

2) Détermination de l'expressions du champ dans les trois cas :

Région 1 : Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r < R_1$:

Dans cette région, la surface de Gauss ne renferme aucune charge électrique, $q_{\text{int. } S.G} = 0$

$$\text{Soit : } E(r) 4\pi r^2 = \frac{10\pi r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{5}{2\epsilon_0}$$

$$\text{D'où : } \vec{E}(r) = 0 \cdot \vec{u}_r \quad \text{et le flux } \Phi = \Phi_3 = 0$$

Région 2 : Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $R_1 < r < R_2$:

La Charge intérieure de la surface de Gauss : $Q_{\text{int. } S.G} = \iiint \rho dv$

$$Q_{\text{int. } S.G} = \rho 2\pi \int_{R_1}^r r dr \int_0^h dz = \rho 2\pi h \int_{R_1}^r r dr = \left[\rho 2\pi h \frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^r = \rho 2\pi h \left[\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right]$$

$$\text{Soit : } E(r) 2\pi h r = \frac{\rho 2\pi h (r^2 - R_1^2)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho h (r^2 - R_1^2)}{2r \epsilon_0}$$

D'où

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho h (r^2 - R_1^2)}{2r \epsilon_0} \vec{u}_r$$

Région 3 : Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r > R_2$:

La Charge intérieure de la surface de Gauss : $Q_{\text{int. } S.G} = \iiint \rho dv$



$$Q_{int.s.G} = \rho 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r dr \int_0^h dz = \rho 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r dr = \left[\rho 2\pi h \frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} = \rho 2\pi h \left[\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right]$$

$$\text{Soit : } E(r) 2\pi h r = \frac{\rho \pi h (R_2^2 - R_1^2)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho h (R_2^2 - R_1^2)}{2r \varepsilon_0}$$

D'où

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho h (R_2^2 - R_1^2)}{2r \varepsilon_0} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(r) = 0 \cdot \vec{u}_r$$

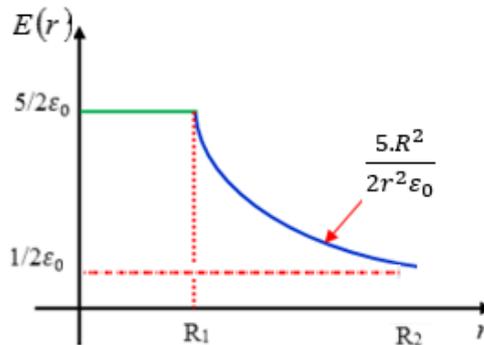


Figure I.65 : représentation graphique du champ $E(r)$.

Exercice 17

Une sphère isolante a une charge q uniformément chargée dans son volume et un rayon R . Calculer le champ pour un point à l'intérieur de la sphère et situé à une distance r du centre.

RÉSOLUTION

Le champ doit être radial et son module doit dépendre de r , la distance par rapport au centre de la sphère.

Comme la charge est uniformément distribuée, cela veut dire que la charge volumique ρ est uniforme :

$$q = \sum q_{int} = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$$

Selon le théorème de Gauss on a :

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

La sphère de Gauss se trouve à l'intérieure du sphère ($r < R$) :

Le champ est parallèle à, et son module ne change pas le long de la surface de Gauss.



Alors:

$$\Phi = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_{\text{sphère}} E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = E \cdot S = E 4\pi r^2$$

Q_{int} représente la charge à l'intérieur de la sphère de Gauss

$$q = \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\text{D'où : } E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Le champ varie linéairement avec la distance au centre r

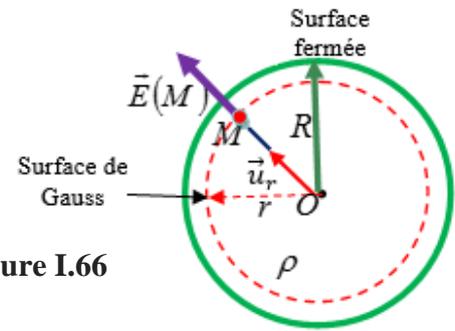


Figure I.66

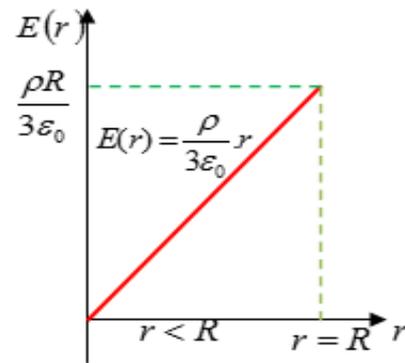


Figure I.67: représentation graphique du champ $E(r)$.

Exercice 18

Une sphère de centre O et de rayon R est chargée par une densité de charge surfacique σ ($\sigma > 0$)

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les expressions du champ électrique $E(r)$ en un point M placé à une distance r du centre dans les deux cas : $r \leq R$ et $r \geq R$.

RÉSOLUTION

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss Σ dépend de la position de M. Deux cas peuvent être distingués : M est extérieur à la sphère chargée (S) ou M est intérieur à (S).

1°) Détermination de l'expressions du champ dans les deux cas $r \leq R$ et $r \geq R$:

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss Σ dépend de la position de M. Deux cas peuvent être distingués : M est extérieur à la sphère chargée (S) ou M est intérieur à (S).

Par l'application du théorème de Gauss on a : $\Phi = \oiint_{S,G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int.S.Gauss}}{\epsilon_0}$.



M est à l'intérieur de la sphère de rayon R : $r \leq R$

Surface de Gauss considérée : sphère de rayon r

La surface d'une sphère de rayon r : $S_G = 4\pi r^2$.

Selon la coupe transversale de la figure suivante, il n'y a pas de charge à l'intérieur de la sphère de Gauss $\sum q_{int} = 0$, car la charge est limitée à la surface du c sphère chargé. Alors,

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ N/C}$$

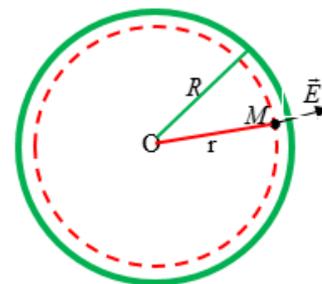


Figure I.68 : cas $r \leq R$.

(I-106)

M est à l'extérieur de la sphère de rayon R : $r \geq R$

La charge intérieure totale est :

$$\sum q_{int} = q = \sigma 4\pi R^2$$

Surface d'un système d'une sphère de rayon R

$$S_{sphere} = 4\pi R^2$$

Surface d'une sphère de Gauss de rayon r

$$S_{sphere \text{ de Gauss}} = 4\pi r^2$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

(I-107)

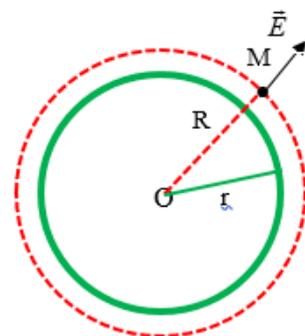
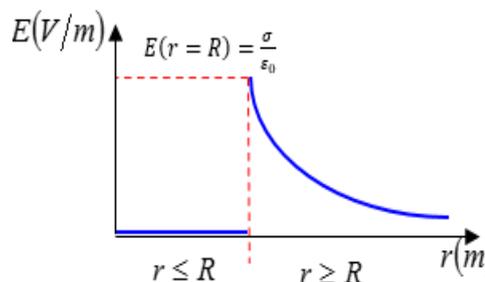


Figure I.69 : cas $r \geq R$.

Figure I.70 : représentation graphique du champ $E(r)$.



Exercice 19

Deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) chargées avec la densité volumique :

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & r \leq R_1 \\ \frac{\alpha}{r}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0, & r > R_2 \end{cases}$$

Calculer à l'aide du théorème de Gauss le champ électrique \vec{E} en tout point de l'espace.



RÉSOLUTION

Pour déterminer les expressions des champs \vec{E} , On utilise le théorème de Gauss, on a donc trois régions.

Selon le théorème de Gauss on a :

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{int.s.G}}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon r .

$$S_{sphere\ Gauss} = 4\pi r^2$$

La sphère de rayon R est chargée en volume par la densité de charge volumique ρ .

$$V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Région 1 : La sphère de Gauss se trouve entre $r < R_1$:

Charge intérieure de la surface de Gauss :

$$q_{int.s.G} = \iiint \rho dv = \iiint \rho_0 dv = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\text{Soit : } \phi = E_{r1}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$\text{D'où : } E_{r1}(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}$$

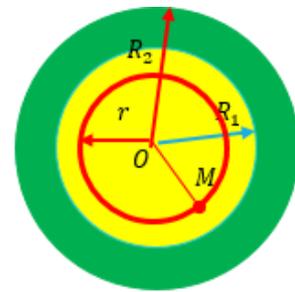


Figure I.71 : cas $r < R_1$

Région 2 : La sphère de Gauss se trouve entre $R_1 \leq r \leq R_2$:

Charge intérieure de la surface de Gauss :

$$q_{int.s.G} = \iiint \rho dv = \iiint \frac{\alpha}{r} \cdot dv$$

$$\text{On a : } dv = 4\pi r^2 dr$$

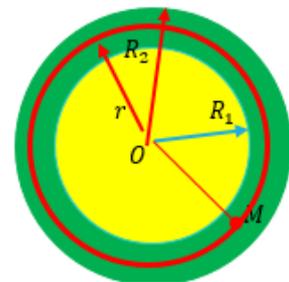


Figure I.72 : cas $R_1 \leq r \leq R_2$.

Donc :

$$q_{int.s.G} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\alpha}{r} \cdot 4\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \alpha \cdot 4\pi r dr = \left[\alpha \cdot \frac{4}{2}\pi r^2 \right]_{R_1}^{R_2} = \alpha \cdot 2\pi [R_2^2 - R_1^2]$$

soit :

$$\phi = E_{r2}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\alpha \cdot 2\pi [R_2^2 - R_1^2]}{\epsilon_0}$$



D'où :

$$E_{r2}(r) = \frac{\alpha \cdot [R_2^2 - R_1^2]}{2\varepsilon_0 r^2}$$

Région 3 : La sphère de Gauss se trouve entre $r > R_2$:

Charge intérieure de la surface de Gauss :

$$Q_{int.s.G} = \iiint \rho dv = \iiint 0 \cdot dv$$

la surface de Gauss renferme une charge totale $Q = Q_{int1} + Q_{int2}$

$$\text{soit : } \phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = E_{r3}(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 + \alpha \cdot 2\pi [R_2^2 - R_1^2]}{\varepsilon_0}$$

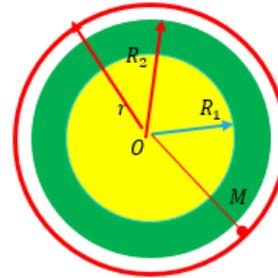


Figure I.73 : cas $r > R_2$

D'où :

$$E_{r3}(r) = \frac{\rho_0 \cdot 2r^3 + 3\alpha [R_2^2 - R_1^2]}{6\varepsilon_0 r^2}$$

Exercice 20

Une distribution de charges électriques de densité volumique uniforme ρ , est répartie entre deux sphères concentriques de centre O et de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

Calculer à l'aide du théorème de Gauss le champ électrique \vec{E} à la distance r du centre.

Distinguer les trois cas : $x < R_1$, $R_1 < x < R_2$ et $x > R_2$.

RÉSOLUTION

Pour déterminer les expressions des champs \vec{E} , On utilise le théorème de Gauss, donc on a trois régions.

Selon le théorème de Gauss on a :

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot \vec{dS} = \frac{\sum q_{int.s.G}}{\varepsilon_0}$$

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon r .

$$S_{sphere\ Gauss} = 4\pi r^2$$

La sphère de rayon R est chargée en volume par la densité de charge volumique ρ .

$$V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $x < R_1$:



Région 1 : La sphère de Gauss se trouve en $r < R_1$:

Charge intérieure à la surface de Gauss est $q_{int.s.G} = 0C$

Soit :

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = 0 \text{ V/m.}$$

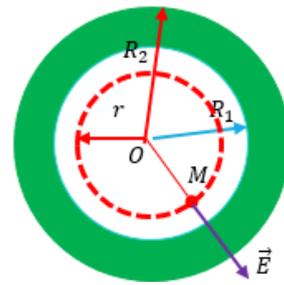


Figure I.74 : cas $x > R_1$

Région 2 : La sphère de Gauss se trouve entre $R_1 < r < R_2$

Charge intérieure de la surface de Gauss est :

$$\begin{aligned} q_{int.s.G} &= \int_{R_1}^r \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \rho \cdot 4\pi \int_{R_1}^r r^2 dr = \left[\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \right]_{R_1}^r \\ &= \rho \cdot \frac{4}{3} \pi [r^3 - R_1^3] \end{aligned}$$

soit : $\phi = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi [r^3 - R_1^3]}{\epsilon_0}$

d'où $E(r) = \frac{\rho \cdot [r^3 - R_1^3]}{3\epsilon_0 r^2}$

Région 3 : la sphère de Gauss se trouve en $r > R_2$:

$R_1 = r \quad E(r) = 0$

Charge intérieure de la surface de Gauss est :

$$\begin{aligned} q_{int.s.G} &= \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \rho \cdot 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr = \left[\rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \right]_{R_1}^{R_2} = \\ &\rho \cdot \frac{4}{3} \pi [R_2^3 - R_1^3] \end{aligned}$$

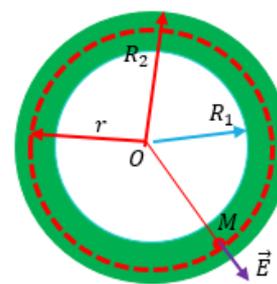


Figure I.75 : cas $R_1 > r > R_2$.

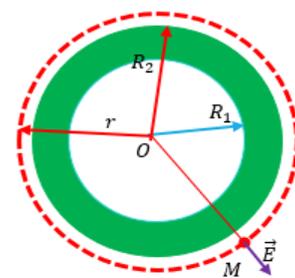


Figure I.76 : cas $r > R_2$.

Soit : $\phi = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3} \pi [R_2^3 - R_1^3]}{\epsilon_0}$

$\Leftrightarrow E(r) = \frac{\rho \cdot [R_2^3 - R_1^3]}{3\epsilon_0 r^2}$

Exercice 21

On considère $V(r) = \frac{B}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}$ le potentiel créé par une distribution de charges avec B et λ sont des constantes positives.



- 1) déterminer le flux du champ électrique \vec{E} à travers la surface d'une sphère de centre O et de rayon R
- 2) Donner l'expression la charge électrique à l'intérieur de la sphère. Etudier les cas où R tend vers 0 et ∞

RÉSOLUTION**1°) Détermination de l'expressions du flux :**

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon r.

$$S_{\text{sphere Gauss}} = 4\pi r^2$$

La sphère de rayon R est chargée en surface par la densité de charge σ .

$$S_{\text{sphere}} = 4\pi R^2$$

Comme la charge est uniformément distribuée, cela veut dire que la charge surfacique σ est uniforme :

$$q = \sigma 4\pi R^2$$

Le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss est donné par :

$$\Phi = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_{\text{sphère}} E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = E \cdot S = E 4\pi r^2$$

Car le champ \vec{E} et la surface \vec{dS} sont colinéaire et la composante radiale du champ est constante sur une sphère de rayon r.

Pour déterminer le champ électrostatique on utilise la relation suivante :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \Leftrightarrow E_r \vec{u}_r + E_\phi \vec{u}_\phi = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{u}_\phi\right)$$

Le potentiel en un point de l'espace est donné par : $V(r) = \frac{B}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}$

Le potentiel dépend que de la composante radiale, donc la dérivée par rapport à la composante angulaire est nulle, ainsi :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{u}_r$$

$$\text{Donc : } \vec{E} = -\frac{\partial \left(\frac{B}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}\right)}{\partial \rho} \vec{u}_r = \frac{B}{r^2} e^{-\frac{r}{\lambda}} \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) \vec{u}_r$$

A partir de l'équation précédente l'expression du flux devient :

$$\Phi = 4\pi B \cdot \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}}$$

Pour $r = R$, on a :



$$\Phi = 4\pi B. \left(1 + \frac{R}{\lambda}\right) e^{-\frac{R}{\lambda}}$$

Pour déterminer la charge à l'intérieur de la sphère, on utilise le théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Soit

$$q_{int} = \Phi. \epsilon_0 = 4\pi B. \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right) e^{-\frac{r}{\lambda}}. \epsilon_0$$

Cas où $R \rightarrow 0$

$$q_{int} = \Phi. \epsilon_0 = 4\pi \epsilon_0 B = \frac{B}{K}$$

Cas où $R \rightarrow \infty$

$$q_{int} = 0$$

Exercice 21

Soient deux sphères concentriques de même centre O et de rayons respectifs $R_1 = R$ et $R_2 = R\sqrt{5}$.

- La sphère interne $S_1(O, R_1)$ porte une charge $q_1 = q$ répartie avec une densité

de charge volumique (en C/m^3).

- La sphère externe $S_2(O, R_2)$ porte une charge $q_2 = -q_1$ répartie uniformément avec une densité de charge surfacique constante σ (en C/m^2).

L'élément de volume pour une sphère est $dv = 4\pi r^2 dr$

Avec $\rho = \frac{r}{5} C/m^3$

Déterminer en fonction de R la charge totale Q portée par la sphère S_1 . En déduire la valeur de la densité surfacique σ de la sphère.

Déterminer le champ électrique E en tout point de l'espace M tel que $OM = r$ avec $0 < r < \infty$. Tracer le module du champ électrique E en fonction de r .

Déterminer le potentiel électrique en tout point de l'espace sachant qu'à l'infini, le potentiel est nul.

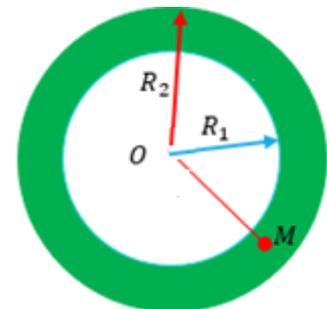


Figure I.77

RÉSOLUTION

Détermination du champ électrique \vec{E} , En utilisant le théorème de Gauss, donc on a trois régions.



Selon le théorème de Gauss on a :

$$\Phi_S = \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{int_S_G}}{\epsilon_0}$$

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon r .

$$S_{sphere\ Gauss} = 4\pi r^2$$

La sphère de rayon R est chargée en volume par la densité de charge volumique ρ .

$$V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

1) La charge totale R_1 portée par la sphère S_1 :

$$q_{int.S.G} = \int_0^{R_1} \rho \cdot 4\pi r^2 dr = \int_0^{R_1} \frac{5}{r} \cdot 4\pi r^2 dr = 20\pi \int_0^{R_1} r dr = [10\pi r^2]_0^{R_1} = \frac{4}{3}\pi R_1^2 = 10\pi R^2$$

$$q_1 = 10\pi R^2$$

On a :

La sphère de rayon R est chargée en surface par la densité de charge σ .

$$S_{sphere} = 4\pi R^2$$

$$q_2 = -q_1 = \iint \sigma ds = \sigma \cdot s = \sigma 4\pi R_2^2 = \sigma 4\pi (R\sqrt{5})^2 = -10\pi R^2$$

D'où :

$$\sigma = -0.5 \text{ C/m}^2$$

2) Détermination de l'expressions du champ dans les deux cas :

Région 1 : Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r < R_1$:

$$\text{Soit : } E(r)4\pi r^2 = \frac{10\pi r^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{5}{2\epsilon_0}$$

D'où

$$\vec{E}(r) = \frac{5}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Région 2 : Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $R_1 < r < R_2$:

$$\text{Soit : } E(r)4\pi r^2 = \frac{10\pi R_1^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{5 \cdot R^2}{2r^2 \epsilon_0}$$

D'où

$$\vec{E}(r) = \frac{5 \cdot R^2}{2r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$$

Région 3 : Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r > R_2$:

Charge intérieure à la surface de Gauss est :



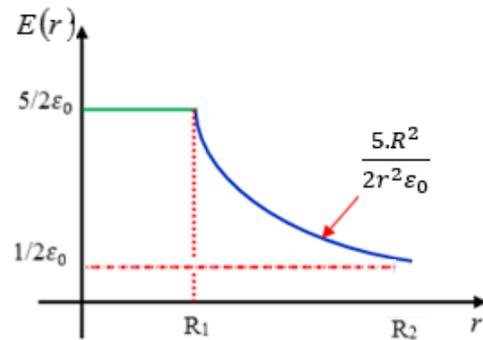
$$q_{int.s.G} = q_1 + q_2 = \sigma 4\pi R_2^2 + 10\pi R_1^2 = (-0.5) \cdot 4 \cdot \pi (\sqrt{5}R)^2 + 10 \cdot \pi R^2 = 0$$

$$\text{Soit : } E(r)4\pi r^2 = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = 0$$

D'où

$$\vec{E}(r) = 0 \cdot \vec{u}_r$$

Figure I.78 : représentation graphique du champ $E(r)$.



2) Détermination de l'expressions du potentiel les trois régions :

*** M est extérieur à (S) : $r > R$ Le potentiel en M est :**

On pose :

$$\vec{E}(r) = \frac{5}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Soit :

$$\int dV_1(M) = - \int E(r) dr$$

D'où :

$$V_1(M) = -\frac{5 \cdot r}{2\epsilon_0} + C_1$$

*** M se situe entre $R_1 < r < R_2$; Le potentiel en M est :**

$$\vec{E}(r) = \frac{5 \cdot R_1^2}{2r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$$

$$\text{On a : } \int dV_2(M) = - \int E(r) dr = - \int \frac{5 \cdot R_1^2}{2r^2 \epsilon_0} dr$$

D'où :

$$V_2(M) = -\frac{5 \cdot R^2}{2\epsilon_0 r} + C_2$$

*** M se situe entre $r > R_2$; Le potentiel en M est :**

$$\vec{E}(r) = 0 \vec{u}_r$$

$$\text{On a : } \int dV_3(M) = - \int 0 dr = C_3$$

D'où :

$$V_3(M) = C_3$$

Puisque à l'infini ($r \rightarrow \infty$) les charges n'existent pas ($q=0$) \Rightarrow le $V(r)=0$ donc : $C_3 = 0V$.



Donc $V_3(M) = 0$

Pour déterminer le constant C_2 en utilisant la continuité du potentiel à l'interface

$$V_2(r = R_2 = \sqrt{5}R) = V_3(r = R_2 = \sqrt{5}R) = 0$$

On a : $V_2(M) = -\frac{5.R^2}{2\varepsilon_0 r} + C_2$

Soit : $V(r) = -\frac{5.R^2}{2\varepsilon_0 \sqrt{5}R} + C_2 = 0$

Donc on peut écrire : $C_2 = \frac{5R}{2\varepsilon_0 \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}R}{2\varepsilon_0}$

D'où :

$$V_2(M) = -\frac{5.R^2}{2\varepsilon_0 r} + \frac{\sqrt{5}R}{2\varepsilon_0}$$

Pour déterminer le constant C_1 en utilisant la continuité du potentiel à l'interface

$$V_1(r = R_1 = \sqrt{5}R) = V_2(r = R_1 = \sqrt{5}R)$$

On a : $V_1(M) = -\frac{5.r}{2\varepsilon_0} + C_1$

Soit : $-\frac{5.R}{2\varepsilon_0} + C_1 = -\frac{5.R}{2\varepsilon_0} + \frac{\sqrt{5}R}{2\varepsilon_0}$

Donc on peut écrire : $C_1 = \frac{\sqrt{5}R}{2\varepsilon_0}$

D'où :

$$V_1(M) = -\frac{5.r}{2\varepsilon_0} + \frac{\sqrt{5}R}{2\varepsilon_0}$$

Exercice 22

Une boule métallique de rayon r est reliée à la terre (son potentiel est donc nul). On place à une distance x du centre de la boule une charge ponctuelle $q > 0$.

1. Où se trouvent les charges et commenter leur signe.
2. En calculant le potentiel au centre de la boule, calculer la charge Q portée par cette dernière.
3. Tracer les lignes de champ.

RÉSOLUTION

1. La boule acquiert une densité surfacique de charges $q > 0$; des charges (venant de la Terre) négatives vont être attirées sur la boule. Le potentiel de la boule reste nul puisqu'elle est reliée à la Terre.

2. Le potentiel au centre de la boule est nul :

$$V(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x} = 0 \quad (\text{I-150})$$



$$Q = -\frac{q}{x} \cdot r$$

On remarque bien que $Q < 0$.

3. Comme l'infini et la boule sont au même potentiel nul, aucune ligne de champ ne peut partir de l'un pour aller à l'autre.

Les lignes de champ partent donc de la charge q pour aller soit à l'infini soit sur la boule

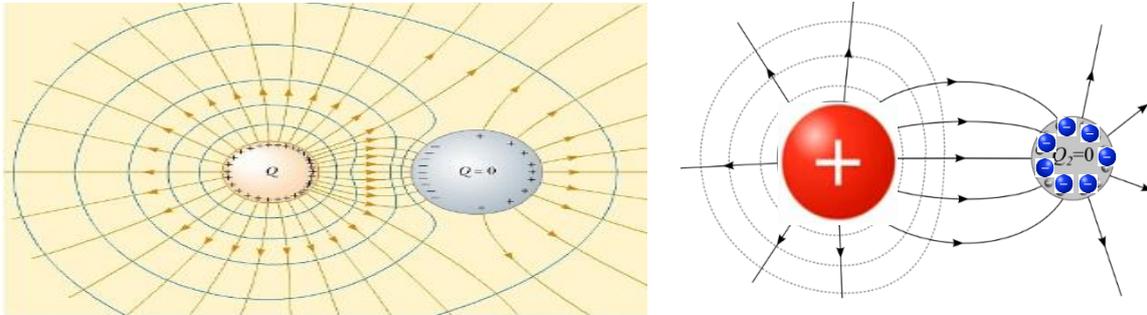


Figure I.79

Exercice 23

La charge Q d'un conducteur isolé q est proportionnelle à son potentiel V ; $Q = C_i \cdot V$

Le coefficient de proportionnalité C_i est appelé capacité du conducteur isolé. La capacité C_i du conducteur isolé ne dépend que de sa géométrie. C_i s'exprime en farads.

1 farads correspond à une charge de 1 Coulomb quand le potentiel est de 1 Volt.

Quelle est la charge d'une sphère isolée de rayon 5 cm.

RÉSOLUTION

La surface de Gauss choisie est une sphère concentrique de rayon r .

$$S_{\text{sphère Gauss}} = 4\pi r^2$$

Le flux du champ électrique à travers la surface de Gauss est donné par :

$$\Phi = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n} = \int_{\text{sphère}} E \cdot S = E 4\pi r^2$$

Car le champ \vec{E} et la surface $d\vec{S} \cdot \vec{n}$ sont colinéaire et la composante du champ est radiale sur une sphère de rayon r .

Comme la charge est uniformément distribuée, cela veut dire que la charge volumique ρ est uniforme :



$$\sum q_{int} = q$$

Selon le théorème de Gauss on a :

$$\Phi_S = E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Alors :
$$E = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0}$$

Le potentiel donc lui aussi le même que pour une charge ponctuelle :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

A la surface $r = R$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \tag{I-151}$$

En plus on a : $q = C.V$ (I-152)

En comparant (II-51) avec (II-52) on trouve : $C = 4\pi\epsilon_0 R$

AN :
$$C = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{7 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} = 1,28 \times 10^{-11} = 12,8 \text{ pF}$$

La sphère de Gauss se trouve à l'intérieure du sphère ($r < R$) :

Le champ est parallèle à, et son module ne change pas le long de la surface de Gauss.

Alors:

$$\Phi = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot dS \cdot \vec{n} = \int_{\text{sphère}} E \cdot S \cdot \cos 0^\circ = E \cdot S = E4\pi r^2$$

q_{int} représente la charge à l'intérieur de la sphère de Gauss

$$q = \sum q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

Exercice 24

- 1) Rappeler les propriétés générales d'un conducteur en équilibre électrostatique.
- 2) Une sphère conductrice (S_1) isolée, de centre O_1 et de rayon R_1 porte une charge $q_1 = Q$ (figure (I-80a) :

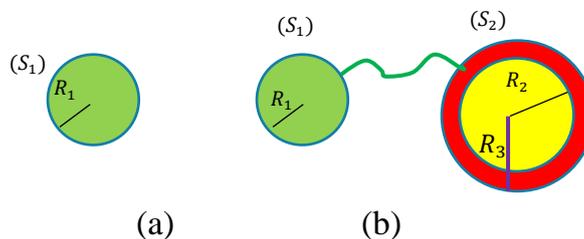


Figure I.80

- a) Calculer la densité surfacique de charge σ_1 de (S_1). Enoncer le théorème de Coulomb et exprimer le champ électrostatique \vec{E}_1 au voisinage de la surface (S_1).





b) Calculer le potentiel V_1 de (S_1) et en déduire sa capacité C et son énergie électrostatique

E_e

3) Une seconde sphère conductrice (S_2) creuse, de rayon intérieur $R_2 > R_1$ et de rayon extérieur $R_3 = 2R_1$ porte une charge $q_2 = 2q > 0$ est placée à une distance d de (S_1) , suffisamment éloignée pour que l'on puisse négliger les phénomènes d'influence. Les deux sphères sont reliées par un fil conducteur de capacité négligeable (figure b). On note q'_1 et q'_2 les charges portées respectivement par (S_1) et (S_2) à l'équilibre.

a) Comment se répartissent les charges sur les surfaces intérieure et extérieure de (S_2) ? justifier votre réponse.

b) Calculer en fonction de q les charges q'_1 et q'_2 .

RÉSOLUTION

1) Propriétés générales d'un conducteur en équilibre électrostatique

Le champ \vec{E}_{int} et la charge q_{int} à l'intérieur du conducteur sont nuls. Le potentiel est constant.

✓ Puisque les forces extérieures sont nulles : $\vec{F} = \vec{0}$

✓ Donc : $\vec{E}_{int} = \vec{0}$ et $q_{int} = 0$

On obtient alors $V(r)$ en utilisant la relation : $\Rightarrow \int dV = - \int E_{int}(r) dr = cste$

La densité surfacique de charge σ_1 de (S_1) :

Comme la charge est uniformément distribuée, cela veut dire que la charge surfacique σ_1 est uniforme :

$$q_1 = \sigma_1 4 \pi R_1^2$$

Alors :

$$\sigma_1 = \frac{4 \pi R_1^2}{q_1}$$

Selon le Théorème de Coulomb on a : $\vec{E}_{extR1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_{(r)}$

Le champ électrostatique \vec{E}_1 au voisinage de la surface (S_1) .

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_{(r)}$$

b) Calculer le potentiel V_1 de (S_1)

Le potentiel donc lui aussi le même que pour une charge ponctuelle :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1}$$



La capacité $C = \frac{q_1}{V_1}$

L'énergie électrostatique de ce système est :

$$E_e = \frac{q_1^2}{2C}$$

a) Répartition de charges sur les surfaces intérieure et extérieure de (S_2) :

puisque la sphère conductrice lié à un autre conducteur par un fil conducteur, alors la surface interne de S_2 contient $Q_{int} = 0$

b) Calcule des charges Q'_1 et Q'_2 :

On a :

$$q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 = 3q$$

De plus (S_1) et (S_2) ont le même potentiel $V'_1 = V'_2$, donc :

$$\frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Leftrightarrow \frac{q'_1}{R_1} = \frac{q'_2}{R_2}$$

d'où :

$$q'_1 + R_2 \frac{q'_1}{R_1} = 3q \Leftrightarrow q'_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = 3q \Leftrightarrow q'_1 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) = 3q$$

$$\text{Alors } q'_1 = \frac{3qR_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad q'_2 = \frac{3qR_2}{R_1 + R_2}$$

Exercice 25

Soient une sphère creuse (S_1) conductrice de rayon R_1 et une sphère creuse (S_2) concentrique, de rayon $R_2 > R_1$ et d'épaisseur infiniment mince.

On désigne par q_1 et q_2 les charges totales portées par chacune des sphères et par V_1 et V_2 leurs potentiels respectifs.

1. Donner l'expression de la capacité C_1 du condensateur sphérique ainsi formé.

A.N. $R_2 = 2R_1$; $R_1 = 9 \cdot 10^{-2}$ m ; calculer C_1 .

2. On applique une différence de potentiel $V_0 = V_1 - V_2$ entre les armatures de ce condensateur. Que vaut la charge du condensateur q_0 ? A.N. $V_0 = 2000$ V.

3. Ce condensateur de capacité C_1 est ensuite isolé, puis relié à un autre condensateur sphérique de capacité C_2 , initialement neutre. Exprimer, dans le nouvel équilibre Electrostatique, les charges q_1 et q_2 de chacun des condensateurs en fonction de C_1 , C_2 et V_0 .

Déterminer la différence de potentiel V aux bornes des condensateurs. Calculer q_1 , q_2 et V dans le cas où $C_2 = 3C_1$.



RÉSOLUTION

L'expression de la capacité C du condensateur sphérique :

le champ \vec{E} est radiale sur une sphère de rayon r

La surface de Gauss choisie est une sphère S_I , de rayon r .

$$S_{\text{sphère Gauss}} = 4\pi r^2$$

Le flux du champ électrique sortant à travers la surface de Gauss est donné par :

$$\Phi = \int_{\text{sphère}} \vec{E} \cdot dS \cdot \vec{n} = \int_{\text{sphère}} E \cdot S = E4\pi r^2$$

Pour déterminer les expressions des champs \vec{E} , On utilise le théorème de Gauss, on a donc trois régions.

Région 1 : la sphère de Gauss se trouve entre $r < R_1$:

Charge intérieure de la surface de Gauss :

$$q_{\text{int.s.G}} = 0 \Rightarrow \phi = 0 \text{ donc } \vec{E} = \vec{0}$$

Région 2 : la sphère de Gauss se trouve entre $R_1 < r < R_2$

$$q_{\text{int.s.G}} = q_1 \Rightarrow \phi = \frac{q_1}{\epsilon_0} \text{ donc } \vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Région 3 : la sphère de Gauss se trouve entre $r > R_2$:

$$q_{\text{int.s.G}} = q_1 + q_2 = 0 \Rightarrow \phi = 0 \text{ et donc } \vec{E} = \vec{0}$$

$$V_1 - V_2 = - \int_{R_2}^{R_1} E(r) dr = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_{R_2}^{R_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

On a :

$$c = \frac{q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \right).$$

$$\text{Si } R_2 = R_1 + e \text{ avec } e \ll R_1 \text{ alors } c = \frac{q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1^2}{e} \right) = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

On retrouve la capacité d'un condensateur plan.

$$AN : C = 4\pi\epsilon_0 2R_1 = \frac{10^{-1}}{9,10^9} = 11 \text{ pF}$$

Soit $V_0 = V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre les armatures de ce condensateur

Donc on peut écrire $q_0 = q_1 = CV_0 = 11 \cdot 10^{-12} \cdot 2000 = 22 \text{ nC}$

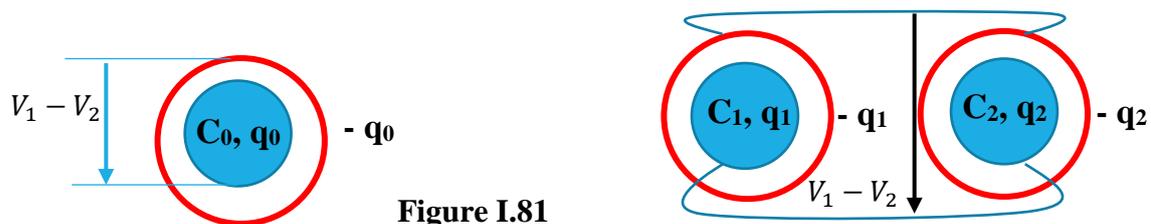


Figure I.81



La conservation de la charge s'écrit :

$$q_0 = CV_0 = q_1 + q_2 \quad (\text{I-153})$$

D'après la figure (Figure I.81) on remarque que Les condensateurs sont montés en parallèle et ils sont soumis à la même tension entre leurs armatures :

$$V_1 = V_2 = V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad (\text{I-154})$$

De l'équations (I-151) et (I-154), on Obtient :

$$q_1 = \frac{C_1^2 \cdot V_0}{C_1 + C_2}$$

et

$$q_2 = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot V_0}{C_1 + C_2}$$

b) pour $C_2 = 3C_1$

$$q_1 = \frac{C_1^2 \cdot V_0}{4C_1} = \frac{C_1 \cdot V_0}{4} = \frac{11 \cdot 10^{-12} \cdot 2000}{4} = 0.55 \text{ pC}$$

et

$$q_2 = \frac{3C_1 \cdot V_0}{4} = \frac{3 \cdot 11 \cdot 10^{-12} \cdot 2000}{4} = 1.65 \text{ pC}$$

$$V = \frac{V_0}{4} = \frac{2000}{4} = 500 \text{ V}$$

Exercice 26

I) Soit une sphère conductrice de rayon $R_1 = 5 \text{ cm}$ est portée au potentiel $V = V_1 - V_2 = 950 \text{ Volts}$.

- 1) Calculer sa capacité C .
- 2) Quelle est son énergie électrostatique E_p ?

II) On considère un condensateur dont l'armature interne est constituée par la sphère précédente l'armature externe ayant pour rayon $R_2 = 6 \text{ cm}$.

- 1) Donner l'expression du champ électrostatique \vec{E} entre les deux armatures.
- 2) Trouver l'expression approchée de la capacité C' du condensateur ainsi formé.



3) Déterminer le potentiel V' entre les armatures, pour que l'énergie du condensateur soit la même.

RÉSOLUTION**Calcul de la capacité C :**

La capacité du condensateur est définie par : $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$

$$\text{A.N : } C = 4\pi \times 8,82 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^{-2} = 5,54 \text{ pF}$$

1) Energie électrostatique E_p

L'énergie d'un condensateur de charge q est donnée par : $E_p = \frac{1}{2} CV^2$

$$\text{A.N : } E_p = \frac{1}{2} 5,54 \cdot 10^{-12} \times (950)^2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

B/ On a : $R_2 = 6 \text{ cm}$.

1) Calcul du champ entre les armatures

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V).$$

$$\Rightarrow E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow -\int_{V_1}^{V_2} dV = V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \cdot dr = (R_2 - R_1)E$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} = \frac{950}{R_2 - R_1} = 9,5 \cdot 10^4 \text{ V/m}$$

2) Calcul de la capacité C' du condensateur sphérique

$$\text{Soit : } E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) \quad \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$$

On obtient alors $V(r)$ en utilisant la relation :

$$\Rightarrow \int dV = -\int E(r) dr$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

C_1 est la constante d'intégration.

La différence de potentiel d.d.p. entre les deux armatures est donc :

$$V_1 - V_2 = \int E(r) dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q_1}{\epsilon_0} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{R_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\text{Et comme } c = \frac{q_1}{V_1 - V_2}$$

$$\text{Alors : } c = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \right).$$

$$\text{A.N : } c = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \right) = 4\pi \times 8,82 \times 10^{-12} \left(\frac{(5 \times 6) 10^{-4}}{(6-5) 10^{-2}} \right) \quad \text{A.N : } C = 33,2 \text{ pF}$$

3) Calcul de la différence de potentiel V'



L'énergie d'un condensateur de charge q est donnée par : $E_p = \frac{1}{2} CV^2$

$$E_p = \frac{1}{2} C' V'^2 = \frac{1}{2} C V^2 \Rightarrow V' = V \sqrt{\frac{C}{C'}}$$

$$\text{A.N : } V' = 2850 \sqrt{\frac{10^{-11}}{9,1 \cdot 10^{-11}}} = 299,80 \text{ Volts} . V' = 950 \cdot \sqrt{\frac{5,54}{33,2}} = 388,08 \text{ volts}$$

Exercice 27

Une sphère conductrice creuse a un rayon intérieur $R_1 = 2,00 \text{ cm}$ et un rayon extérieur $R_2 = 5,00 \text{ cm}$. La sphère a une charge $Q = 2,50 \mu\text{C}$. Au centre de la cavité, il y a une charge ponctuelle $q = 4,50 \mu\text{C}$.

- Calculer la charge surfacique sur la surface intérieure de la sphère creuse.
- Quel est le champ électrique à une distance $r = 3,00 \text{ cm}$ de la charge ponctuelle ?
- Calculer la charge surfacique sur la surface extérieure de la sphère creuse.

RÉSOLUTION

- La sphère de rayon R_1 est chargée en surface par la densité de charge σ_1 .

$$S_{\text{sphere } 1} = 4\pi R_1^2$$

Comme la charge est uniformément distribuée, cela veut dire que la charge surfacique σ est uniforme :

$$q = \sigma_1 4\pi R_1^2$$

D'où

$$\sigma_1 = \frac{q}{4\pi R_1^2} = \frac{4,5 \cdot 10^{-6}}{4\pi (0,02)^2} = 8,95 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

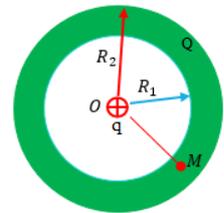


Figure I.82

- Le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur : $\vec{E} = \vec{0}$

la conservation de la charge pour la sphère conductrice :

$$q = q_2 + q_1$$

Alors :

$$q_2 = q - q_1 = 4,5 \cdot 10^{-6} - (2,5 \cdot 10^{-6}) = 2 \cdot 10^{-6} \mu\text{C}$$

- La charge surfacique sur la surface extérieure est :



$$\sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_1^2} = \frac{7 \cdot 10^{-6}}{4\pi(0,05)^2} = 63,71 \mu\text{C}/\text{m}^2$$

Exercice 28

On considère deux sphères conductrices chargées, de rayons R_1 et R_2 , dont les centres sont distants de a , tel que $a \gg R_1, R_2$. Calculer les capacités C_{11} , C_{22} et les capacités coefficients d'influence C_{12} et C_{21} d'un tel système.

RÉSOLUTION

On a : $\|\overrightarrow{O_1O_2}\| = a$

La superposition des états d'équilibre permet d'écrire :

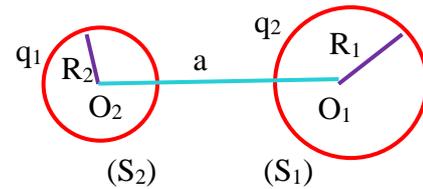


Figure I.83

$$q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$

$$q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

$$V_1 = \frac{C_{22}}{(C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21})} q_1 - \frac{C_{12}}{(C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21})} q_2$$

$$V_2 = -\frac{C_{21}}{(C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12})} q_1 + \frac{C_{11}}{(C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12})} q_2$$

La distance a étant très grande comparée à R_1 et R_2 , on peut assimiler le potentiel de (S_1) dû à (S_2) au potentiel créé par (S_2) au centre O_1 , soit

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{a}$$

En faisant de même pour le potentiel de (S_2) dû à (S_1) , on peut écrire :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{a}$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}$$

La matrice C des coefficients de capacité et d'influence est alors obtenue selon les équations (I-151)



$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{C_{12}}{(C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \\ -\frac{C_{21}}{(C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \end{array} \right. \Rightarrow C_{12} = C_{21} \text{ (la matrice } \mathbf{C} \text{ est symétrique)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_{22}}{(C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \\ \frac{C_{11}}{(C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{array} \right. \Rightarrow C_{22} = C_{11} \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{II-155})$$

De l'équation (II-55) on tire :

$$C_{11} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1}{1 - \frac{R_2 R_1}{a^2}} \quad \text{et} \quad C_{22} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2}{1 - \frac{R_2 R_1}{a^2}}$$

En faisant tendre a vers l'infini, on retrouve la capacité de la sphère S_1 seule, soit :

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 R_1$$

On remarque que : C_{11} et C_{22} sont positifs, Tandis que C_{12} et C_{21} sont négatifs.

Exercice 29

Soit un condensateur de capacité de $5 \mu F$ et un condensateur de capacité de $2 \mu F$ sont montés en série.

1. donner l'expression générale de la capacité équivalente ?
2. Une d.d.p de 300 Volts est appliquée à l'ensemble. Trouver la charge de chacun des condensateurs et la d.d.p aux bornes de chacun d'entre eux

RÉSOLUTION

La capacité équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}} = \frac{7}{10} \mu F$$

$$\text{D'où : } c_{eq} = \frac{10}{7} \mu F$$

La tension totale (d.d.p) est : $U_T = U_{AB} = U_1 + U_2$, (mode série)

En plus, en série les charges q_1 et q_2 sont égaux.

$$q = q_1 = q_2$$

Et on a : $q = CV$

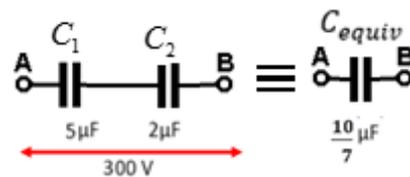


Figure I. 84



$$\text{Donc } q = 300 \cdot \frac{10}{7} = 428,57 \mu\text{C}$$

$$q = q_1 = q_2 = 428,57 \mu\text{C}$$

d'où :

$$V_A - V_B = q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{q_1}{C_{eq}}$$

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{428,57 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}} = 85,71 \text{ volt}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{428,57 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-6}} = 214,29 \text{ volt}$$

Exercice 30

On considère le montage suivant (figure (II-19)). Initialement, les condensateurs C_1 et C_2 étaient non chargés et le condensateur C_1 portait la charge q_0

On prendra $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

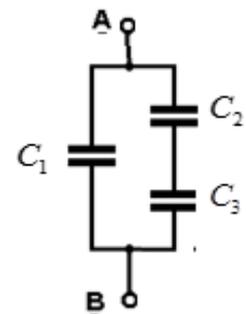


Figure I.85

A l'équilibre, déterminer la différence de potentiel (ddp ou la tension) $U_{AB} = V_A - V_B$ et les charges q_1 , q_2 et q_3 des trois condensateurs en fonction de C et q_0 .

RÉSOLUTION

▣ La différence de potentiel $V_{AB} = V_A - V_B$ en fonction de C et q_0

$$q_0 = C_1 \cdot V_1 = C_{equiv} V_{AB}$$

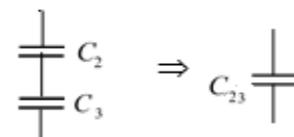
$$\oplus V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0}{C}$$

D'où :

$$\oplus V_{AB} = V_{23} = V_1 = \frac{q_0}{C} \quad (\text{mode parallèle})$$

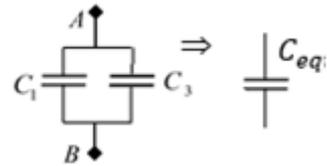
Capacité C_{eq} équivalente aux trois condensateurs:

$$\oplus C_{23} = (C_2 \text{ est en serie avec } C_3) = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} = \frac{C}{2}$$





$$\begin{aligned}
 C_{eq} &= (C_{23} \text{ est en parallèle } C_1) \\
 &= C_{23} + C_1 = \frac{C}{2} + C = \frac{3C}{2}
 \end{aligned}$$



D'où : $q_{eq} = V_{AB} C_{eq} = \frac{q_0}{C} \cdot \frac{3C}{2} = \frac{3q_0}{2}$

Puisque C_2 est en serie avec C_3

$q_2 = q_3 = q_{23}$ et $q_1 = q_0$ donc :

$$q_{23} = q_{eq} - q_1 = \frac{3q_0}{2} - q_0 = \frac{q_0}{2}$$

Alors : $q_2 = q_3 = q_{23} = \frac{q_0}{2}$

Exercice 31

Cinq condensateurs sont connectés en série et en parallèle avec une batterie, comme dans la figure ci-contre (I.86), on donne : $C_1 = C_3 = 8 \mu F$, $C_2 = C_4 = 4 \mu F$, $C_5 = 5 \mu F$ et $V_{AB} = 48V$.

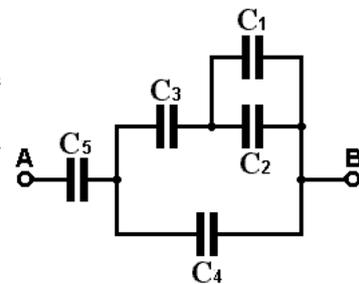


Figure I.86

- 1) Calculer la capacité équivalente C_{eq} des cinq condensateurs.
- 2) déterminer la charge q de chaque condensateur ainsi que leur tension.
- 3) Calculer l'énergie électrique totale emmagasinée dans les condensateurs.

RÉSOLUTION

1) Calcul de la capacité C_{AB} équivalente aux cinq condensateurs :

C_1 est en parallèle avec C_2

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 8 + 4 = 12 \mu F$$

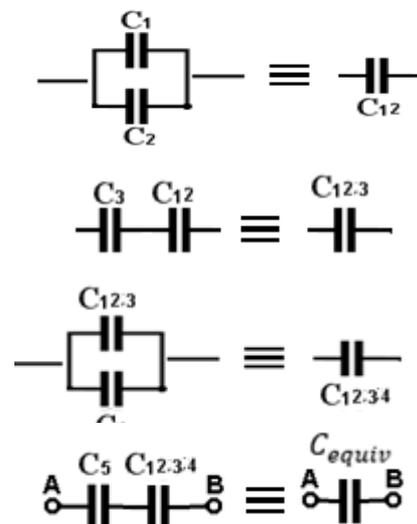
C_3 est en serie avec C_{12}

$$C_{123} = \frac{C_3 \times C_{12}}{C_3 + C_{12}} = \frac{12 \times 8}{12 + 8} = 4,8 \mu F$$

C_{123} est en parallèle avec C_4

$$C_{1234} = C_{123} + C_4 = 4,8 + 4 = 8,8 \mu F$$

C_{1234} est en serie avec C_5





$$C_{equiv} = \frac{C_5 \times C_{1234}}{C_5 + C_{1234}} = \frac{8,8 \times 5}{8,8 + 5} = 3,26 \mu F$$

2) Calcul de la charge et la tension aux bornes de chaque condensateur

La charge totale $q_{eq} = V_{AB} C_{eq} = 48 \times 3,26 = 156,48 \mu C$

puisque C_5 et C_{1234} sont en série : $q_{eq} = q_{1234} = q_5$, donc :

$$q_5 = 156,48 \mu C \text{ et } V_5 = \frac{q_5}{C_5} = 31,3 V$$

Pour trouver les charges Q_4 et Q_{123} il faut d'abord trouver la tension $V_5 - V_B$

$$V_{1234} = V_{AB} - V_5 = 48 - 31,3 = 16,7 V$$

$$V_{1234} = V_{123} = V_4 = 16,7 V \text{ (mode parallèle)}$$

$$\text{Donc : } V_4 = 16,7 V$$

$$\text{D'où : } q_4 = V_4 \cdot C_4 = 16,7 \times 4 = 66,8 \mu C$$

$$\text{On a : } q_{123} = V_{123} \cdot C_{123} = 16,7 \times 4,8 = 80,16 \mu C$$

puisque C_3 et C_{12} sont en série : $q_{123} = q_{12} = q_3$, donc :

$$q_3 = 80,16 \mu C$$

$$\text{Donc : } V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{80,16}{8} = 10,02 V$$

$$\text{On a ; } V_{12} = V_{123} - V_3 = 16,7 - 10,2 = 6,5 V \text{ (mode serie)}$$

puisque C_1 et C_2 sont en parallèle, la tension $V_{12} = V_1 = V_2$

$$V_1 = V_2 = 6,5 V$$

$$\text{Alors : } q_1 = V_1 \cdot C_1 = 6,5 \times 8 = 52 \mu C$$

$$q_2 = V_2 \cdot C_2 = 6,5 \times 4 = 26 \mu C$$

3) L'énergie électrique totale emmagasinée dans les condensateurs.

$$E_e = \frac{1}{2} q(V_A - V_B) = \frac{1}{2} 156,48 \times 48 = 3,755 \cdot 10^{-6} \text{ joule}$$

Exercice 32

Soit le branchement de condensateurs, dans la figure ci-contre

(figure I.87), $C_1 = C_2 = 2C$, et $C_3 = C_4 = 4C$ et que

$$q_1 = 30 \mu C, \text{ on pose } C = 3 \mu F. \text{ Déterminer :}$$

- 1) la capacité équivalente C_{eq} entre A et B,
- 2) la charge et la tension de chacun des condensateurs de circuit,
- 3) la tension U_{AB} que subit l'ensemble du système.

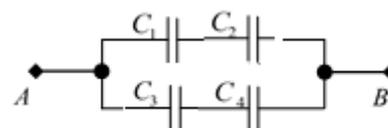


Figure I.87



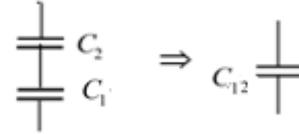
RÉSOLUTION

a°) la capacité C_{AB} équivalente aux quatre condensateurs:

$$C_{AB} = (C_{AE} \text{ en série avec } C_{EB}) = \left[\frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \text{ en série avec } \left(C_3 + \frac{C_4 \cdot C_5}{C_4 + C_5} \right) \right]$$

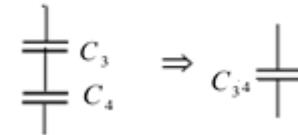
✚ C_1 est en série avec C_2

$$C_{12} = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} = C = 3 \mu F$$



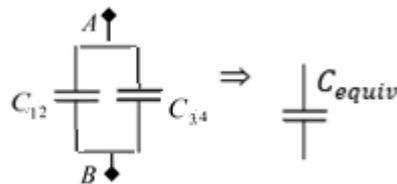
✚ C_3 est en série avec C_4

$$C_{34} = \frac{C_3 \times C_4}{C_3 + C_4} = 2C = 6 \mu F$$



✚ C_{12} est en parallèle avec C_{34}

$$C_{equiv} = C_{12} + C_{34} = C + 2C = 3C = 9 \mu F$$



D'où : $C_{equiv} = 9 \mu F$

la charge et la tension de chacun des condensateurs de circuit,

puisque C_1 et C_2 sont en série : $q_1 = q_2$ donc :

$$q_1 = q_2 = 12 \mu C$$

$$\text{pour } q_1 \text{ on a : } V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 5V$$

$$\text{pour } q_2 \text{ on pose : } V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6}} = 5V$$

puisque C_3 et C_4 sont en série alors : $q_3 = q_4$ donc :

$$q_3 = q_4 = 30 \mu C$$

$$q_3 = q_4 = V_{AB} \cdot C_{34} = 10 \cdot 6 = 60 \mu C$$

$$\text{pour } q_1 \text{ on a : } V_3 = \frac{q_3}{C_3} = \frac{60 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-6}} = 5V$$

$$\text{pour } q_2 \text{ on pose : } V_4 = \frac{q_4}{C_4} = \frac{60 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-6}} = 5V$$

la tension U_{AB} que subit l'ensemble du système

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 20V$$

Exercice 33

On considère le montage de condensateurs (voir la figure II-74).

Sachant que $V_{AB} = 15V$, $C_5 = C_3 = C_1 = 25 \mu F$, $C_4 = C_2 = 75 \mu F$ et .



- 1) Calculer la capacité équivalente C_{eq} .
- 2) Calculer la charge et la tension aux bornes du condensateurs C_4 .
- 3) Calculer l'énergie totale emmagasinée.

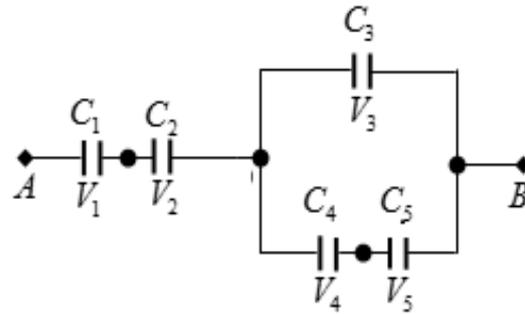
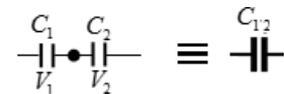


Figure I.88

RÉSOLUTION

- 1) Calcul de la capacité équivalente C_{eq}

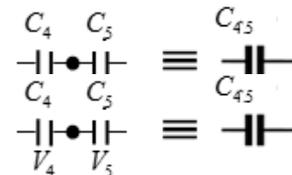
C_1 et C_2 sont montées en série :



$$C'_{eq} = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{A.N : } C'_{eq} = \left(\frac{50 \times 150}{50 + 150} \right) \times 10^{-6} = 37,5 \times 10^{-6}$$

$$C'_{eq} = 37,5 \mu F$$

C_4 et C_5 sont en série :



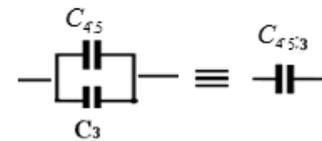
$$\text{A.N : } C_{45} = \left(\frac{150 \times 50}{150 + 50} \right) \times 10^{-6} = 37,5 \times 10^{-6}$$

$$C_{45} = 37,5 \mu F$$

C_3 // C_{45} :

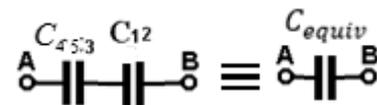
$$C''_{eq} = C_3 + C_{45} \quad \text{A.N : } C''_{eq} = (50 + 37,5) \times 10^{-6} = 87,5 \times 10^{-6}$$

$$C''_{eq} = 87,5 \mu F$$



C'_{eq} et C''_{eq} sont montées en série:

$$C_{eq} = \frac{C'_{eq} \times C''_{eq}}{C'_{eq} + C''_{eq}}$$



$$\text{A.N : } C_{eq} = \left(\frac{37,5 \times 87,5}{37,5 + 87,5} \right) \times 10^{-6} = 26,25 \times 10^{-6}$$

Donc la capacité équivalente du circuit est : $C_{eq} = 26,25 \mu F$.

- 2) Charge et la tension aux bornes des deux condensateurs C_3 et C_5

Puisque C_1 et C_2 sont montées en série :





$$Q_1 = Q_2$$

D'autre part, Q_1 est la charge qui circule le long du circuit, donc :

$$Q_1 = Q_2 = V_{AB} \cdot C_{AB} = 787,5 \mu\text{C}$$

$$V_{AD} = V_A - V_D = \frac{Q_1}{C_1} = 15,75 \text{ V}$$

$$V_{DE} = V_D - V_E = \frac{Q_2}{C_2} = 5,25 \text{ V}$$

Pour trouver les charges Q_3 et Q_4 il faut d'abord trouver la tension $V_E - V_B$.

$$V_{EB} = V_E - V_B = V_{AB} - V_{AD} - V_{DE} = 9 \text{ V}$$

Donc : $V_{EB} = 9 \text{ V}$ et $Q_3 = V_{EB} \cdot C_3 = 450 \mu\text{C}$

Puisque C_4 et C_5 sont montées en série : $Q_4 = Q_5$

Donc : $Q_2 = Q_3 + Q_5$ et $Q_5 = Q_2 - Q_3$ A.N : $Q_5 = 337,5 \mu\text{C}$

$$V_{FB} = \frac{Q_5}{C_5} = 6,75 \text{ V}$$

3) Energie total emmagasinée E_p

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{Q_T^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} Q_T V_{AB} = \frac{1}{2} Q_T \frac{1}{2} C_{eq} V_{AB}^2$$

$$\text{A.N: } E_p = \frac{1}{2} 26,25 \times (30)^2 = 11812,5 \quad E_p = 11812,5 \text{ J}$$



1

Quelle est l'unité du champ électrique ?

- a. volt / mètre [V/m]
 b. volt / Coulomb [V/C]
 c. Ampère / mètre [A/m]

2

Deux particules de matière portent respectivement des charges électriques q_1 et q_2 .

- a. les particules s'attirent, si q_1 et q_2 sont électriquement neutres.
 b. les particules s'attirent, si q_1 et q_2 ont des mêmes signes.
 c. les particules s'attirent, si q_1 et q_2 ont des signes différents.

3

Si la distance entre deux corps en interaction électrostatique double, alors :

- a. la norme de la force est multipliée par 4.
 b. la norme de la force est divisée par 4.
 c. la norme de la force est divisée par 2.

4

La norme des forces électrostatiques que deux corps exercent l'un sur l'autre est proportionnelle.

- a. aux masses des corps en interaction.
 b. aux charges électriques des corps en interaction.
 c. aux charges des corps en répulsion.

5

Deux corps de charges électriques opposées sont placés en A et B. Une ligne de champ électrostatique les relie. Elle est orientée de A vers B

- a. La charge du corps placé en A est positive et celle du corps placé en B est négative.
 b. La charge du corps placé en A est négative et celle du corps placé en B est positive.
 c. La charge du corps placé en A est négative et celle du corps placé en B est négative.

6

Que peut-on dire de la force électrostatique exercée sur une particule de charge q ?

- a. Elle est inversement proportionnelle à la valeur du champ électrostatique.



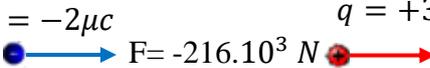
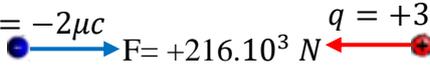
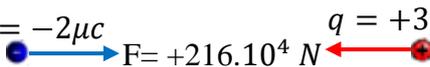
- b. Elle est proportionnelle à la charge de la particule.
- c. Elle est de sens opposé au champ électrostatique si la charge q est positive

7 La force électrostatique est donnée par la relation :

- a. $\vec{F}_{A/C} = K \frac{q_A q_C}{\|\vec{AC}\|^3} \vec{AC}$
- b. $\vec{F}_{A/C} = K \frac{q_A q_C}{\|\vec{AC}\|^2} \vec{AC}$.
- c. $\vec{F}_{A/C} = K \frac{q_A q_C}{\|\vec{AC}\|} \vec{u}_A$

8 Deux charges valant respectivement $+1$ mC et -2 mC sont à 50 cm de distance.

Quelles sont les forces qui agissent sur ces charges ? (grandeur, direction et sens)

- a. $q = -2\mu\text{C}$  $F = -216.10^3 \text{ N}$
- b. $q = -2\mu\text{C}$  $F = +216.10^3 \text{ N}$
- c. $q = -2\mu\text{C}$  $F = +216.10^4 \text{ N}$

9 Quel est le champ électrique d'une charge ponctuelle de $+4 \mu\text{C}$ à 2 m (une réponse détaillée).

- a. Le champ électrique est $+9\ 000 \text{ V/m}$
- b. Le champ électrique est $+9\ 000 \text{ V/m}$, son vecteur dirigé vers la charge.
- c. Le champ électrique est $+9\ 000 \text{ V/m}$, son vecteur dirigé vers l'extérieur par rapport vers la charge.

10 L'interaction électrostatique est

- a. toujours attractive.
- b. toujours attractive, parfois répulsive.
- c. toujours répulsive.

11 Quand on double la charge électrique d'un corps en interaction avec un autre corps chargé électriquement, la valeur de la force d'interaction électrostatique :

- a. se double.



b. se divise.

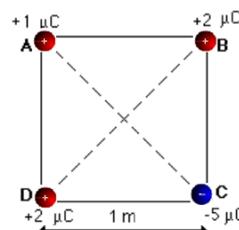
c. reste inchangée.

12 Les relations liant le champ au potentiel sont :

a. $\vec{E} = -\text{grad}(\vec{V})$ b. $\vec{E} = \text{grad}(V)$

c. $E = \text{grad}(V)$ d. $\vec{E} = -\text{grad}(V)$

13 Au sommet d'un carré de 4 m de côté, il y a quatre charges indiquées sur le dessin ci-contre. Quel est le champ électrique au centre du carré ?



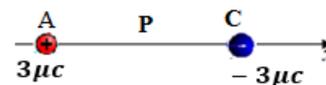
a. Le champ $\vec{E} = 270 \vec{i} V/m$.

b. Le champ $\|\vec{E}\| = 270 V/m$.

Figure I.89

c. Le champ $\|\vec{E}\| = 0$ est nul (la somme des charges est nulle).

14 On donne deux points A et C distants de 2m. Quel est le champ électrique en P, milieu de AC ?



a. Le champ vaut 54 000 V/m.

b. Le champ vaut 6 000 V/m.

Figure I.90

c. Le champ est nul

15 Donnez la définition d'une ligne de champs :

a. Ce sont des cercles concentriques autour de la charge.

b. Ce sont des rayons de ces cercles concentriques autour de la charge.

c. Ce sont des courbes plus compliquées

16 Que peut-on dire de la force électrostatique exercée sur une particule de charge q ?

a. Elle est proportionnelle à la charge de la particule.

b. Elle est proportionnelle au temps.

c. Elle est inversement proportionnelle à la valeur de la fréquence.

17 On en déduit que la distribution de charges qui crée ce potentiel est constituée :

a. d'une charge q placée en O et d'une charge -q répartie dans tout l'espace.

b. Le champ vaut 6 000 V/m.

c. Le champ est nul

**18** Une bille électrisée chargée positivement

- a. a perdu des électrons
- b. a acquis des protons
- c. a perdu des neutrons

19 De quoi sert le théorème de Gauss ?

- a. Permet de calculer le flux d'un champ électrique
- b. De calculer facilement des potentiels électrostatiques
- c. De déterminer la forme des lignes de champ charges

20 Soit une sphère uniformément chargée en surface :

- a. le potentiel est continu à la traversée de la sphère chargée
- b. le champ électrique qu'elle crée est radial
- c. pour tout point n'appartenant pas à la sphère

21 Le potentiel en un point M de l'espace tel que $R_2 \geq OM \geq R_1$ est :

- a. $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$
- b. $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) + V_1$
- c. $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1} \right)$

22 Soit une sphère de rayon R chargée en surface avec $\sigma = a \cos \theta$ avec $a > 0$ quelle est la direction du champ électrique créée par cette sphère en au centre de la sphère :

- a. \vec{u}_r
- b. \vec{u}_θ
- c. \vec{u}_z

23 Soit une sphère de rayon R chargée en surface avec $\sigma = a \cos \theta$ avec $a > 0$ quelle est la direction du champ électrique créée par cette sphère en un point M à l'extérieur de la sphère :

- a. suivant \vec{u}_r
- b. sa composante suivant \vec{u}_θ est nulle
- c. aucune réponse n'est correcte



24 On considère un cylindre d'axe (O, \vec{u}_z) , de hauteur h et de rayon R . Dans le repère cylindrique, l'élément de surface orienté qui entoure un point M de la surface Latérale s'écrit :

a. $d\vec{S} = Rd\theta dz \vec{u}_r$

b. $d\vec{S} = Rd\theta dr \vec{u}_r$

c. $d\vec{S} = Rd\theta dr \vec{u}_z$

Une sphère creuse (S), de centre O , de rayon extérieur R et de rayon intérieur nR ; ($n < 1$), est électriquement chargée en volume avec une charge volumique uniforme ρ . On repère un point M de l'espace par son vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ où $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$

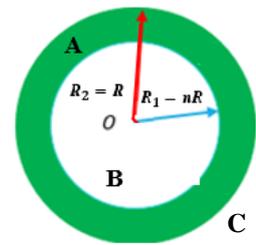


Figure I.91

25 Le champ électrostatique $\vec{E}_1(r)$ produit par (S) dans la région (C) est définie par ($r > R$) :

a. $\vec{E}_1(r) = (1 - n) \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$

b. $\vec{E}_1(r) = (1 - n^3) \frac{\rho R^3}{3r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$

c. $\vec{E}_1(r) = (1 - n^3) \frac{\rho R^3}{r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r$

26 L'expression du potentiel électrostatique $V_B(r)$ de la région (B) est définie par ($r < nR$) :

a. $V_B(r) = (1 - n^2) \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$

b. $V_B(r) = (1 - n) \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$

c. $V_B(r) = ((n^2 - 1) \frac{\rho R^2}{2\pi\epsilon_0})$

27 Le potentiel électrostatique $V_C(r)$ de la région (C) en choisissant son origine l'infini :

a. $V_C(r) = (1 - n^3) \frac{\rho R^3}{2\epsilon_0}$

b. $V_C(r) = (1 - n^3) \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$

c. $V_C(r) = (1 - n) \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$



28 Un conducteur (sans cavité) en équilibre comporte les propriétés suivantes :

- a. C'est un volume équipotentiel
- b. Le champ qu'il crée est nul.
- c. Il n'est chargé qu'en volumes

29 On rappelle que la capacité C d'un conducteur est défini par $Q = CV$, où q est la charge du conducteur et V son potentiel. On considère une boule de rayon R , de centre O , seule dans l'espace. Sa capacité C est :

- a. $C = 4\pi\epsilon_0 R$
- b. $C = 4\pi^2\epsilon_0 R$
- c. $C = 4\pi\epsilon_0 R^2$

30 Un conducteur possède une cavité vide de charge :

- a. Le potentiel dans la cavité est nul.
- b. La charge sur la surface de la cavité est non nulle
- c. Le potentiel dans la cavité est constant.

31 Lorsque deux conducteurs sont en influence totale, les charges des deux Surfaces en influence sont :

- a. nulles
- b. sans relation
- c. Opposées

32 Lorsque les deux sphères sont en présence les potentiels V_1 et V_2 sont :

- a. $V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_2}$
- b. $V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{R_2}$
- c. $V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{2R_2}$

33 Le potentiel entre les deux armatures est :

- a. $V(x) = \frac{V_2 - V_1}{e} \cdot x + V_1$
- b. $V(x) = \frac{V_2 - V_1}{e} \cdot x - V_1$
- c. $V(x) = \frac{V_2 - V_1}{2e} \cdot x + V_1$

34 La capacité d'un condensateur plan est :



a. $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{4e}$

b. $C = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{e}{S}$

c. $C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{e}$

35 Lorsque deux conducteurs sont en influence totale, les charges des deux surfaces en influence sont :

a sans relation

b. nulles

c opposées

36 On rappelle que la capacité C d'un conducteur est défini par $Q = CV$, où Q est la charge du conducteur et V son potentiel. On considère une boule de rayon R , de centre O , seule dans l'espace. Sa capacité C est :

a. $C = 2\pi\varepsilon_0 R$

b. $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

c. $C = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0 R^3$

37 Donner l'expression de la capacité C de ce condensateur :

a. $C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \right)$.

b. $C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right)$.

c. $C = 2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} \right)$.

38 Soit le circuit ci-contre, avec deux condensateurs. Quelle proposition est-elle correcte ?

a. Les charges sont égales et la capacité équivalente est $32 \mu\text{F}$

b. Les charges sont inégales et la capacité équivalente est $32 \mu\text{F}$

c. Les charges sont inégales et la capacité équivalente est $50 \mu\text{F}$

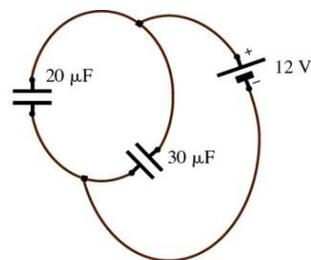


Figure I.92



Exercices

NON RÉSOLUS

Exercice 1

Dans un nuage se trouvent deux charges de même grandeur et de signes opposés ($\pm 40 \text{ C}$) distantes de 5 km (figure I.93). En supposant qu'elles peuvent être considérées comme des charges ponctuelles, quel est le module de la force électrique qu'elles exercent l'une sur l'autre ?

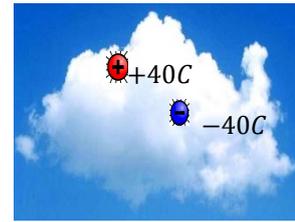


Figure I.93

Exercice 2

Quatre charges $q_1 = -4 \mu\text{C}$, $q_2 = +10 \mu\text{C}$, $q_3 = -10 \mu\text{C}$, et $q_4 = -8 \mu\text{C}$ sont placées aux sommets d'un rectangle de longueur 2.5 cm, et de largeur 1.5cm, voir la figure (I.94).

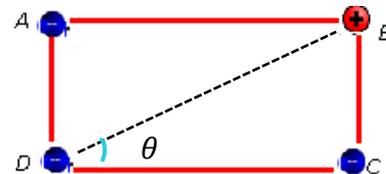


Figure I.94

1. Quelle est l'intensité de la force F appliquée sur q_4 ?
2. Déterminer la direction de la force F .

Exercice 3

Soit trois charges q_1 , q_2 et q_3 (figure (I.72)). $q_1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$; $q_2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ C}$; $q_3 = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ C}$; $AC = 1 \text{ m}$ et $BC = 0,5 \text{ m}$.

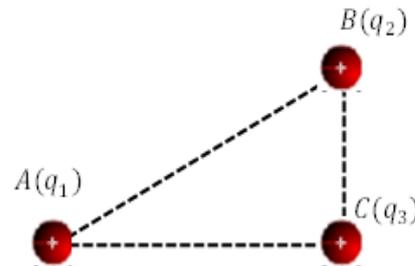


Figure I.95

- ➡ Calculer la force et le champ électrique résultant au point C (direction, sens et module).
- ➡ Calculer le potentiel créé par q_1 et q_2 au point C

Exercice 4

- ➡ Quel est la grandeur et la direction du champ électrique à l'endroit indiqué sur la figure ?

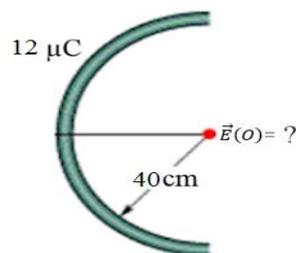


Figure I.96



Exercice 5

Quel est la grandeur et la direction du champ électrique à l'endroit indiqué sur la figure ?

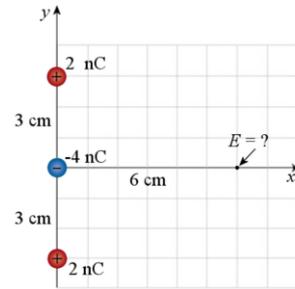


Figure I.97

Exercice 6

Quel est la grandeur et la direction du champ électrique à l'endroit indiqué sur la figure ?

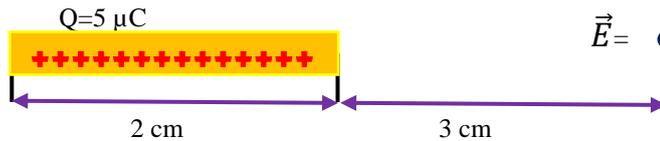


Figure I.98

Exercice 7

Soit trois charges électriques ponctuelles q_1 , q_2 et q_3 sont placées aux points $A(4,0)$, $B(0,4)$ et $C(-4, 0)$ respectivement. On donne : $q_1 = q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, $q_2 = -2q$, $q_3 = 2q$.

1. Déterminer champ électrique \vec{E} créé au point O .
2. Calculer le potentiel électrique V créé par ces trois charges au point O .
3. En déduire la force électrostatique \vec{F} exercée sur une charge ($q' = -q$) placée en O .

Exercice 8

Dans un plan (XOY) , on fixe deux charges ponctuelles q_1 et q_2 sur les points $A(2a, a)$ et $B(-2a, a)$. On donne : $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$

$q_1 = 3.5 \mu\text{C}$, $q_2 = 1.5 \mu\text{C}$ et $a = 8 \text{ cm}$.

1. Déterminer en fonction de x , a et q le vecteur champ électrique $\vec{E}(x)$ et le potentiel $V(x)$ créés par les charges q_1 et q_2 en un point $M(x, 0)$.

On fixe une troisième charge $q' = -q$ au point $O(0,0)$.

- 2- Déduire la force électrique \vec{F} appliquée à la charge q' et son énergie potentielle.

Exercice 9

Soit six charges qui sont arrangées sur les coins d'un hexagone voir la figure (I.76)





- Le potentiel au centre de l'hexagone est-il nul ?
- Le champ électrique au centre de l'hexagone est-il nul ?

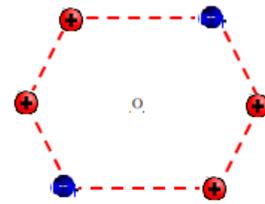


Figure I.99

Exercice 10

Considérons maintenant un fil infini, chargé uniformément par une densité linéaire de charge $dl > 0$.

Déterminer l'expression du le champ électrique et le potentiel en point M situé à la distance r du fil. On note que La distribution de charges présente une symétrie axiale, il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques (r, u, z) pour décrire la position du point M .

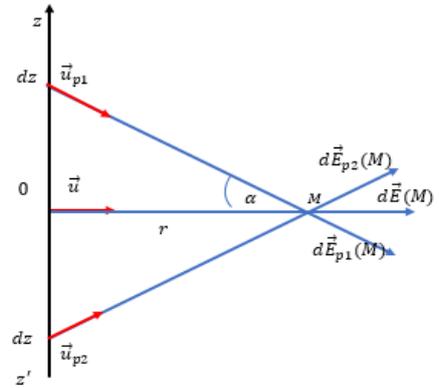


Figure I.100

Exercice 11

Considérons deux plans parallèles distants de d . Le premier plan est chargé positivement avec une densité surfacique de charge $+\sigma$ (en C/m^2). Le second plan est chargé négativement avec une densité surfacique de charge $-\sigma$.

Déterminer le champ électrostatique créée par les deux plans en un point quelconque de l'espace

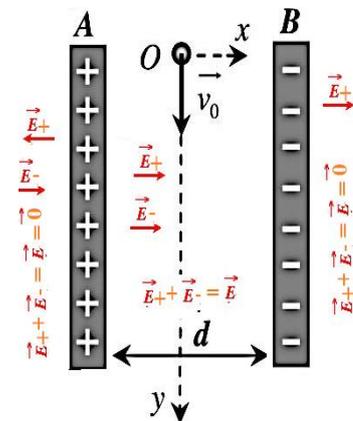


Figure I.101

Exercice 12

Soit un disque, de centre O et de rayon R , est chargé positivement avec une densité surfacique de charge σ .

Calculer le potentiel électrique V en O , lorsque la distribution est uniforme : $\sigma = \sigma_0$.

La charge surfacique σ est maintenant donnée par : $\sigma(r) = A/(R_2 - r_2)^{1/2}$ où A est une constante et r la distance à O .

Calculer le potentiel électrique V en O , et l'exprimer en fonction de R et de $\sigma(C) = \sigma(O)$.

**Exercice 13**

a. Un disque de centre O et de rayon R est chargée par une densité de charge surfacique σ ($\sigma > 0$)

1) Calculer le potentiel électrique V en O , lorsque la distribution est uniforme : $\sigma = \sigma_0$.

b. La charge surfacique s est maintenant donnée par : $\sigma(r) = \frac{B}{\sqrt{(R^2 - r^2)}}$ où B est une constante et r la distance à O .

Calculer le potentiel électrique V au point O en fonction de R on pose $\sigma_c = \sigma(0)$

Exprimer la charge q du disque en fonction de V et de R

Exercice 14

Soit un fil infini d'axe (Oz) portant une densité linéaire λ constante.

1) En utilisant le théorème de Gauss, établir les expressions du champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrique $V(r)$.

2) On considère deux fils infinis parallèles à l'axe (Oz) situés en ($x = -4, y = 0$) et ($x = 4, y = 0$) portant respectivement des densités linéaires de charges $-\lambda$ et $+\lambda$. Donner l'expression général du potentiel en un point de l'espace défini par les distances R_1 et R_2 aux deux fils, en choisissant $V = 0$ à égale distance des deux fils.

Exercice 15

On considère un cylindre creux infini de rayons (x_1 et x_2), tels que $x_2 < x_1$ chargé uniformément en volume avec une densité $\rho > 0$ entre les cylindres de rayons x_1 et x_2

En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique à une distance r de l'axe du cylindre z . (On distingue les trois régions : $r < x_1$; $x_1 < r < x_2$ et $r > x_2$)

Exercice 16

On considère deux sphères concentriques de centre O de rayons R_1 et R_2 respectifs tel que $R_1 < R_2$.

La sphère de rayon R_1 est chargée en volume. La seconde de rayon R_2 est chargée en surface.

1- En utilisant le théorème de Gauss calculer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace.

2- En déduire l'expression du potentiel électrique $V(r)$.

3- Donner l'expression générale reliant un champ de force et l'énergie potentielle associée.

**Exercice 17**

Sphères concentriques : Soit un système de trois sphères concentriques de centre O , de rayons x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$. La répartition de charge sur le système est organisée comme suit :

- ✚ La sphère de rayon x_1 porte une densité surfacique de charge $\sigma > 0$,
- ✚ La sphère de rayon x_2 une densité surfacique de charge $-\sigma$.
- ✚ La sphère de rayon x_3 une densité surfacique de charge σ .

a) Calculer le champ électrique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace. Utiliser le théorème de Gauss et considérer les quatre cas :

- ▣ $r < x_1$
- ▣ $x_1 < r < x_2$
- ▣ $x_2 < r < x_3$
- ▣ $r > x_3$

b) Calculez le potentiel électrique $V(r)$ dans les quatre cas. Calculer le potentiel au point O pour déterminer la première constante d'intégration et une propriété du potentiel pour calculer les autres constantes d'intégration.

c) Evaluer l'allure des variations de E et V en fonction de r .

Exercice 18

Soit une charge q ($q < 0$) répartie en volume entre deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2 . On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2 . Le champ électrostatique se met sous la forme :

$\vec{E}(r) = a(r - R_1)\vec{u}_r$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$; R_1 avec a une constante. On donne, pour un champ à symétrie sphérique : $\text{div}\vec{E}(r) = \frac{dE_r}{dr} + 2\frac{E_r}{r} dr$ avec $E(r) = \vec{E}(r)\vec{u}_r$

- ✚ Déterminer $\rho(r)$ en fonction de a, r, R_1 et ε_0 .
- ✚ Déterminer a en fonction de q, ε_0, R_1 et R_2
- ✚ Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
- ✚ Représenter graphiquement E_r en fonction de r .

**Exercice 19**

On considère une sphère (S) de rayon $R=2$ cm et de centre O porte une charge totale $q > 0$ chargée uniformément en volume. Soit le point M de l'espace est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{u}_r$ et que le potentiel électrique créé par cette sphère (S) soit nul pour ($r \rightarrow \infty$)

- 1) En utilisant le théorème de Gauss, établir les expressions du champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrique $V(r)$ créé par (S) pour $r > R$
- 2) Calculer le flux Φ_I du champ électrique à travers la sphère pour $R_I = 30$ cm, sachant que $E(R_I) = 4.103$ V/m.

Exercice 20

On définit trois sphères concentriques de rayons (R_1, R_2 et R_3), tels que $R_1 < R_2 < R_3$. La sphère de rayon R_1 est chargée en surface. La répartition volumique ρ est compris entre les sphères de rayons R_2 et R_3 .

Déterminer le champ électrique E en tout point de l'espace M tel que $OM = r$ avec $0 < r < \infty$. Tracer le module du champ électrique E en fonction de r .

Exercice 21

Soit la distribution de charges volumique à symétrie sphérique constituée d'une charge q uniformément répartie dans le volume $r \leq R_1$ et d'une charge ($-q$) uniformément répartie dans le volume $R_2 \leq r \leq R_3$ avec $R_1 < R_2$.

Déterminer l'expression du potentiel et du champ électrostatique créés par cette distribution en tout point de l'espace. On prendra la référence de potentiel à l'infini.

Exercice 22

Soit une sphère de centre O et de rayon R . On considère un point M de l'espace est repéré par le vecteur \overrightarrow{OM} , on appelle θ l'angle que fait \overrightarrow{OM} avec l'axe Oz . La sphère porte une densité surfacique de charge $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, σ_0 étant une constante.

1. En utilisant l'étude des symétries de la distribution de charge, déterminer la direction du champ \vec{E} en O .
2. Calculer le champ électrostatique \vec{E} et le potentiel V en point O .

**Exercice 23**

Trois sphères conductrices creuses (S_1), (S_2) et (S_3) concentriques et de rayons respectifs R_1 , R_2 et R_3 ($R_1 < R_2$ et $R_3 = 2R_1$) sont placés dans le vide. (S_1) et (S_3) sont reliées à la masse et (S_2) porte la charge q .

Calculer le potentiel V_2 de la sphère (S_2) ainsi que les charges internes q_i et les charges externes q_e portées par leurs faces, en fonction de q , R_1 , R_2 et R_3 .

Exercice 24

Considérons deux plans parallèles distants de d .

Le premier plan est chargé positivement avec une densité surfacique de charge $+\sigma$ (en C/m^2).

Le second plan est chargé négativement avec une densité surfacique de charge $-\sigma$.

Déterminer le champ électrostatique créée par les deux plans en un point quelconque de l'espace

Exercice 25

Deux conducteurs sphères métalliques, concentriques de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$, se sont en position d'influence totale lorsque l'un des deux entoure complètement l'autre. A l'équilibre, l'armature intérieure est au potentiel V_1 tandis que l'armature extérieure est à la Terre (potentiel 0).

Montrer que les charges portées par les armatures sont égales en valeur absolue et de signes opposés. Dans la suite, on notera q la charge de l'armature intérieure.

- 1) En utilisant les symétries de ce système de conducteurs,

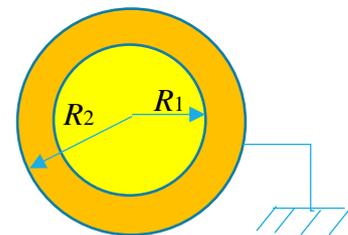


Figure I.102

préciser la forme du champ électrostatique \vec{E} en tout point de l'espace.

- 2) Déterminer ce champ en tout point M , en fonction de q , ϵ_0 et de la distance $r = OM$.
- 3) Déterminer la charge Q en fonction de V_1 , R_1 , R_2 et ϵ_0 . En déduire la capacité C de ce condensateur sphérique.



Exercice 26

Dans le circuit suivant, les condensateurs ont les capacités suivantes : $C_1 = 3,00 \mu\text{F}$, $C_2 = 5,00 \mu\text{F}$, $C_3 = 4,00 \mu\text{F}$, $C_4 = 2,00 \mu\text{F}$ et $C_5 = 3,00 \mu\text{F}$.

- Quelle est la capacité équivalente entre les points A et B?
- Si la charge sur C_2 est de $120 \mu\text{C}$, quelle est la différence de potentiel aux bornes du condensateur C_5 ?

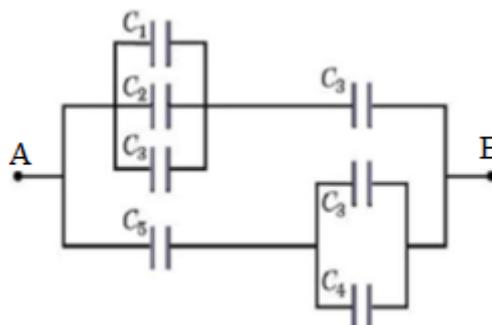


Figure I.103

Exercice 27

Trois condensateurs ont des capacités C , $2C$ et $C/2$ respectivement. On les branche de trois façons différentes, comme il est indiqué à la figure I.104. Classer les situations par ordre croissant de $C_{\text{éq}}$.

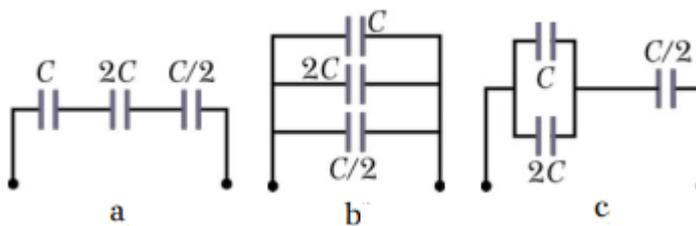


Figure I.104

Exercice 28

Pour le circuit de la figure I.105, les capacités des condensateurs sont $C_1 = 12,0 \mu\text{F}$, $C_2 = 6,00 \mu\text{F}$ et $C_3 = 8,00 \mu\text{F}$. Les condensateurs sont branchés à une source de f.é.m. $E = 120 \text{ V}$.

- Quelle est la capacité équivalente du circuit ?
- Quelle est l'énergie électrique emmagasinée dans le circuit complet ?
- Calculez la charge de chaque condensateur.
- Quelle est la différence de potentiel aux bornes de chaque condensateur ?
- Calculez l'énergie emmagasinée sur chaque condensateur.

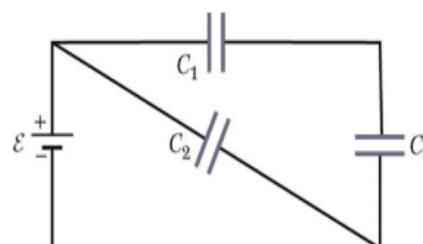


Figure I.105



Exercice 29

Dans le circuit de la figure (I.106), les condensateurs ont les capacités suivantes : $C_1 = 3,00 \mu F$, $C_2 = 5,00 \mu F$, $C_3 = 4,00 \mu F$, $C_4 = 2,00 \mu F$ et $C_5 = 3,00 \mu F$.

a. Quelle est la capacité équivalente entre les points A et B ?

b. Si la charge sur C_2 est de $120 \mu C$, quelle est la différence de potentiel aux bornes du condensateur C_5 ?

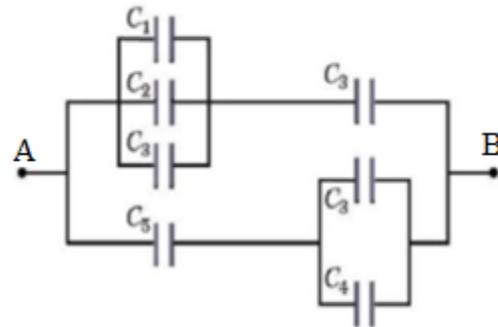


Figure I.106

Exercice 30

Quelle est la capacité du condensateur de la figure (I.107), qui a des armatures d'aire A qui sont séparées d'une distance d , avec trois diélectriques entre les armatures, sachant que les diélectriques 2 et 3 ont chacun une épaisseur de $d/2$?

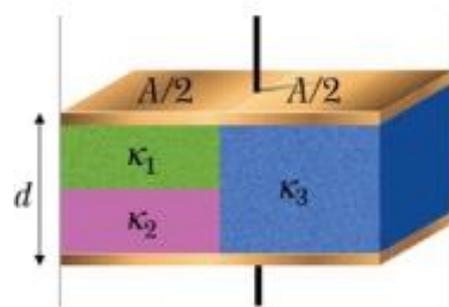


Figure I.107

Chapitre

III

Electrocinétique



Sommaire

1. Introduction
2. Conducteur électrique
3. Loi d'ohm
4. Circuit électrique
5. Lois de Kirchhoff
6. Théorème de Thévenin
7. Puissance - dipôles récepteurs et générateurs
8. Exercices résolus
9. QCM
10. Exercices résolus



Rappels

II.1 Introduction

L'**électrocinétique** est l'étude du mouvement d'ensemble des porteurs de charges dans un circuit électrique assez simple composé de sources, résistance, bobine, condensateur, etc.

Conducteur et isolants

Selon la capacité de la matière à conduire l'électricité, il est possible de la classer en deux grandes catégories : les **conducteurs** et les **isolants**. Un matériau capable de conduire l'électricité est un matériau conducteur, en revanche lorsqu'il ne conduit pas l'électricité c'est un isolant. Un isolant se distingue d'un conducteur par le fait que ses électrons périphériques sont fortement liés au noyau (fort potentiel d'ionisation), contrairement à ceux des conducteurs qui sont libres de se déplacer dans le matériau (sous l'effet d'un champ électrique).

II.2 Conducteurs électrique*II.2.1 Définition : Qu'est-ce qu'un conducteur électrique ?*

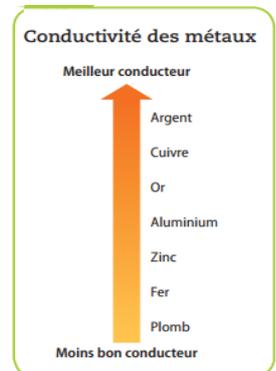
Un conducteur est un matériau qui contient des porteurs microscopiques chargés pouvant se déplacer librement sous l'action d'un champ électrique.

*II.2.2 Courant électrique***a) Définitions**

Le courant électrique i traduit le déplacement ordonné d'un ensemble de charges dans un matériau conducteur. L'unité du courant électrique à l'échelle internationale est l'Ampère de symbole A . Dans le système international, l'Ampère est l'une des quatre unités fondamentales Il est défini par la relation :

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (\text{II-1})$$

dq représente la quantité algébrique de charge (en coulombs) traversant la section S du

**Figure II.1**



conducteur pendant un intervalle de temps dt (en secondes).

Par convention, le sens positif du courant est indiqué par une flèche. Ce sens correspond au sens de déplacement des charges positives. Si ce sont les électrons qui conduisent le courant, alors ils se déplacent dans le sens opposé au courant

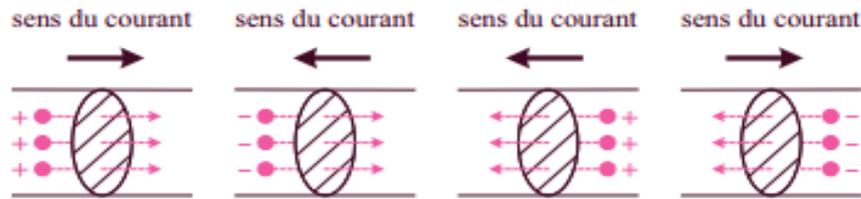


Figure II.2 : Composition des champs électriques

b) Densité de courant électrique

Le vecteur densité de courant \vec{j} caractérise le mouvement d'ensemble des porteurs de charges dans un circuit électrique :

Soit un conducteur comportant des charges libres identiques, de charge q , et se déplaçant à la vitesse \vec{v} . Le vecteur densité de courant est : $\vec{j} = nq\vec{v}$ où n présente le nombre de charges libres par unité de volume.

Soit ρ_m la densité volumique de charges mobiles (en $C \cdot m^{-3}$): $\rho_m = nq$

Le vecteur densité de courant peut alors s'écrire :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} \tag{II-2}$$

s'exprime en $A \cdot m^{-2}$.

Soit dq la charge traversant une section S du conducteur parcouru par le courant d'intensité I pendant le temps dt .

On peut exprimer l'intensité du courant électrique en fonction des caractéristiques de l'écoulement des porteurs de charge, à savoir leur vitesse moyenne et leur densité volumique. $dq = \rho_m dV = \rho_m dS \cdot dx$

$$dx = v \cdot dt$$

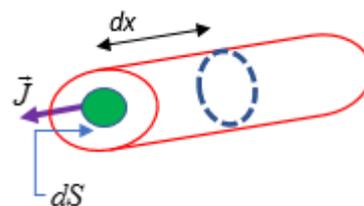


Figure II.3 : conducteur comportant des charges libres

Donc :

$$dq = \rho_m dS \cdot v \cdot dt \tag{II-3}$$



La quantité de courant qui traverse la surface est alors :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{dt} dq = \iint \rho_m dS \cdot v \cdot dt \cdot \frac{1}{dt} = \iint j \cdot dS \cdot dt \cdot \frac{1}{dt} = \iint j \cdot dS \quad (\text{II-4})$$

D'où :

$$i = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot \iint dS \quad (\text{II-5})$$

$$j = \frac{i}{S} \quad (\text{II-6})$$

L'unité de j est $(\Omega \cdot m^{-2})$ et S représente la section droite du conducteur.

c) Intensité du courant électrique

L'intensité du courant mesure la quantité algébrique d'électricité (c'est-à-dire, la charge électrique) traversant la section d'un circuit orienté par unité de temps. L'unité de charge est le coulomb (C) et l'unité d'intensité est l'ampère (A).

$$i = \frac{q}{t} \quad (\text{II-7})$$

En régime continu permanent, l'intensité I du courant à travers un conducteur est constante, et l'on peut écrire : $i = \frac{dq}{dt}$ où dq est la quantité d'électricité ayant traversé une section du conducteur pendant la durée dt

II.3 Loi d'Ohm

L'expérience montre que le rapport, entre la différence de potentiel V entre deux points d'un conducteur métallique et le courant qui le traverse, est constant, la température étant maintenue constante. Loi d'Ohm est :

$$U = Ri \quad (\text{II-8})$$

a) Conductivité électrique

En présence d'un champ électrique \vec{E} , il y a une densité de courant donnée par la relation

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II-9})$$

avec

$$\sigma = \frac{n \cdot \tau \cdot e^2}{m} \quad (\text{II-10})$$



et σ : la conductivité électrique, $\tau = \frac{m}{K}$: temps de relaxation

m : masse de l'électron. σ est exprimée en *Siemens/m²* = $A/V.m = \Omega^{-1}.m^{-1}$

b) Résistivité électrique

La résistivité est l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{II-11})$$

Elle s'exprime en $\Omega.m$

c) Puissance électrique

La puissance est définie comme la quantité d'énergie délivrée par unité de temps :

$$P = \frac{W}{\Delta t} = i(V_a - V_b) = UI \quad (\text{II-12})$$

L'unité de puissance est le *Watt*.

• Puissance par effet *joule*:

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad (\text{II-13})$$

d) Effet Joule

L'**effet Joule** est la transformation d'énergie électrique en énergie thermique. La puissance Joule dissipée dans une résistance de valeur R , parcourue par un courant d'intensité I , soumise à une tension U , est :

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

Définition

Lorsqu'un électron parcourt un fil électrique, son mouvement n'est pas une ligne droite. Il est en effet en mouvement dans un milieu constitué d'atomes métalliques et de cations fixes.

Il est alors soumis à de nombreuses interactions avec les ions du réseau ou avec les plans de rupture de l'empilement des atomes. Ces interactions, dénommées chocs, perturbent sa trajectoire. L'électron perd de l'énergie à chaque choc, au profit des atomes et cations du fil, qui s'échauffent alors. Cette perte d'énergie des électrons, et l'échauffement du fil qui en résulte, est nommée effet Joule.

Une charge positive Q circule dans le même sens que celui du courant. Par conséquent, elle passe d'un potentiel V_A vers un potentiel plus bas V_B , et son énergie potentiel diminue car $\Delta E_p = Q(V_B - V_A) < 0$. L'énergie dissipée sous forme de chaleur par effet joule est :



$$W = -\Delta E_p = q(V_A - V_B) = RI^2t \quad (\text{II-14})$$

Et donc ;

$$dW = dq(V_A - V_B) = idt(V_A - V_B)$$

On a la puissance

$$P = \frac{dW}{dt} = i(V_A - V_B) \quad (\text{II-15})$$

II.4 Circuit électrique

II.4.1 Définition

Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs (une association série ou parallèle) appelés dipôles par exemple, les composants passifs (résistances, bobines, condensateurs, etc...) et éléments actifs (générateurs, transistors, Amplificateurs, moteurs, etc. ...), reliés entre eux par un fil conducteur et formant ainsi une structure fermée.

➤ Les composants actifs et passifs sont différenciés sur divers facteurs tels que la nature de la source, ses fonctions, le gain de puissance, le contrôle du flux de courant. Divers exemples du composant, de la nature de l'énergie, de la nécessité de la résistance externe. La différence entre les **Composants actif** et **Composants passifs** est donné ci-dessous sous forme de tableau.

➤ **Tableau II.1**

BASE	COMPOSANTS ACTIFS	COMPOSANT PASSIF
Nature de la source	Les composants actifs fournissent du courant ou de l'énergie au circuit.	Les éléments passifs utilisent la puissance ou l'énergie du circuit.
Exemples	Diodes, transistors, SCR, circuits intégrés, etc.	Résistance, condensateur, inducteur, etc.
Fonction du composant	Dispositifs produisant de l'énergie sous forme de tension ou de courant.	Dispositifs qui stockent de l'énergie sous forme de tension ou de courant.
Gain de puissance	Ils sont capables de fournir un gain de puissance.	Ils sont incapables de fournir un gain de puissance.

II.4.2 Dipôle électrique

On appelle dipôle électrique un dispositif électrique quelconque qui présente deux bornes A et B permettant de le relier à un circuit extérieur.



Il existe deux possibilités d'orientations relatives de la tension et de l'intensité : de même sens ou de sens opposé.

Ces deux orientations relatives conduisent à deux conventions p : la convention génératrice et la convention récepteur

Notes

Il convient de noter les deux points importants suivants.

- L'intensité et la tension sont des grandeurs algébriques, elles peuvent être positives ou négatives suivant que l'orientation effective correspond ou non à l'orientation conventionnelle choisie, celle-ci étant choisie arbitrairement.

● **Le générateur (dipôle actif)** : est un système qui fournit de l'énergie électrique. Le rôle de ce dernier le circuit électrique est de mettre en mouvement les électrons qui sont présents dans ses composants (fil, ampoule, résistance, etc.) pour maintenir un courant.

Convention génératrice : où l'intensité i et la tension U sont choisies de même sens

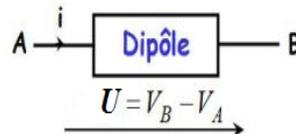


Figure II.4 : convention récepteur

● **Récepteur (dipôles passifs)** : Le récepteur transforme l'énergie électrique en une énergie autre qu'électrique (mécanique, chimique). La polarité d'un récepteur dépend du sens du courant

Convention récepteur : où l'intensité i et la tension U sont choisies de sens opposé.

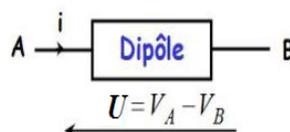


Figure II.5 : convention récepteur

II.4.3 Interrupteur idéal

L'interrupteur idéal possède deux états : ouvert ou fermé

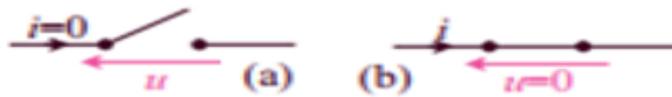


Figure II.6 : (a) interrupteur ouvert (b) interrupteur fermé

II.4.4 Resistance (élément passive)

Une résistance ou résistor est un composant électronique ou électrique dont la principale caractéristique est d'opposer une plus ou moins grande résistance (mesurée en ohms) à la circulation du courant électrique,

Certains éléments, appelés conducteur Ohmique, présentent une tension à leurs bornes proportionnelle au courant les traversant. Cette propriété est exprimée par la loi d'Ohm. Ils sont modélisés par une résistance R dont l'unité est l'ohm (V).

$$R_i = \frac{U}{I_i} \tag{II-16}$$

a) Résistivité électrique

La résistivité est l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{R \cdot S}{L} \tag{II-17}$$

Avec :

R : la résistance du fil en ohm (Ω), ρ : la résistivité du matériau ($\Omega \cdot m$)

S : l'aire de la section du fil (m^2), L : la longueur du fil en mètre (m)

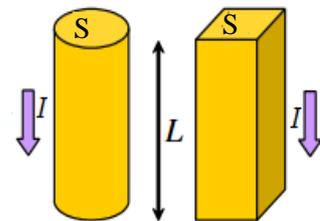


Figure II.7 : conducteur Ohmique

La caractéristique d'un conducteur ohmique est une droite. C'est un dipôle passif.

La conductance G est l'inverse de la résistance ;

elle s'exprime en siemens (symbole S)

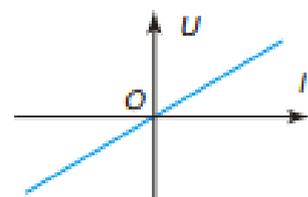


Figure II.8 : caractéristique d'un conducteur ohmique

b) Association de résistances en série :

La résistance R équivalente à deux résistances en série se calcule aisément :





➤ Les deux résistances (résistors) sont traversées par le même courant d'intensité I

La loi d'Ohm vue précédemment appliquée à chacun des résistances donne

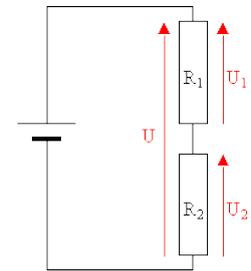
$$U_1 = R_1 I \quad U_2 = R_2 I$$

La tension U aux bornes de l'ensemble est égale à la somme des tensions aux bornes de chacun:

$$U = U_1 + U_2$$

D'où : $U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$

(II-18)



La résistance équivalente $R = U/I$ vaut donc :

Figure II.9 : Association en série

$$R = R_1 + R_2$$

(II-19)

✚ Soient n résistances R_i mises bout à bout dans un circuit et parcourues par un courant I . La tension aux bornes de la chaîne est simplement.

$$U = (V_0 - V_1) + (V_1 - V_2) + \dots + (V_{n-1} - V_n) = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I$$

(II-20)

c'est à dire analogue à celle obtenue par une résistance unique dont la valeur est

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

(II-21)

c) Association de résistances en parallèle (ou dérivation) :

➤ Les deux résistances sont soumises à la même tension

$$U = U_1 = U_2$$

(II-22)

L'intensité du courant du générateur est égale à la somme des intensités des courants circulant dans les résistors :

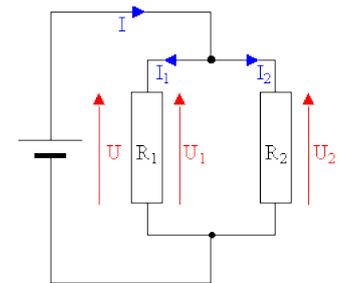


Figure II.10 : Association en parallèle

$$I = I_1 + I_2$$

(II-23)

➤ La loi d'Ohm appliquée à chacun des résistances donne :

$$U_1 = R_1 I_1 \quad U_2 = R_2 I_2$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

(II-24)



La résistance équivalente $R = U/I$ vaut donc:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{II-25}$$

Soient n résistances R_i mises en parallèle sous une tension $U = V_1 - V_2$ et alimentées par un courant I . Le courant se sépare alors en n courants dans chacune des n branches.

En vertu de la conservation du courant (voir ci-dessous), on a :

$$I_i = \frac{U}{R_i} \tag{II-26}$$

$$\sum_{i=1}^n i_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} \tag{II-27}$$

c'est à dire que l'ensemble des n branches est analogue à une résistance équivalente en

série :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \tag{II-28}$$

d) Code de couleurs :

On ne peut pas fabriquer les résistances avec toutes les valeurs possibles. Les résistances sont fabriquées en grandes séries par les constructeurs des composants électroniques. On les fabrique alors suivant des valeurs normalisées, qui couvrent largement les besoins en résistances. Ces valeurs sont indiquées sur ces résistances sous forme d'anneaux en couleur suivant le code suivant :

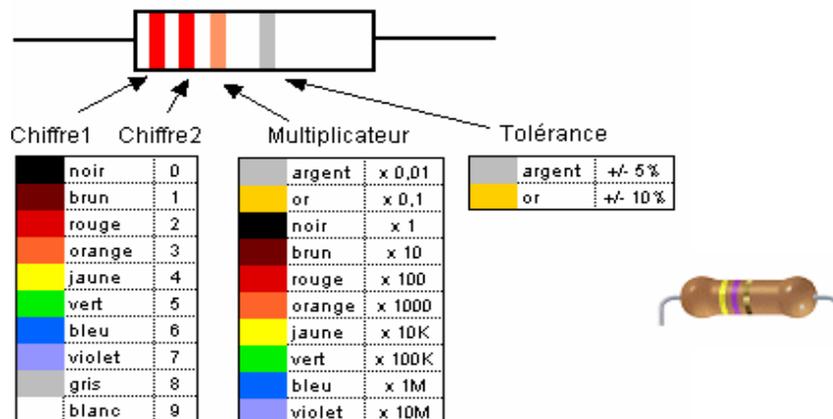


Figure II.11 : Code de couleurs résistance

La tolérance est un pourcentage qui indique la précision de la résistance. Connaissant la valeur de chaque chiffre on peut déterminer la valeur de la résistance comme suit :

$R = [(1er\ chiffre \times 1) + (2eme\ chiffre \times 10)] \times 10\ Multiplicateur \pm la\ tolérance\ en\ \Omega$



II.5 Lois de Kirchhoff

II.5.1 Terminologie des circuits

Avant d'étudier les circuits électriques on a besoin de définir quelques termes relatifs à leur constitution.

- Un **dipôle** est un élément de circuit relié au reste du circuit par deux bornes.
- Une **branche** est un ensemble de dipôles reliés par des fils de connexion et disposés en série c'est-à-dire que chaque borne d'un dipôle n'est reliée qu'à un seul autre dipôle.



Figure II.12 : une branche

Un **nœud** est un point où se rejoignent au moins deux branches.

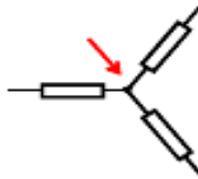


Figure II.13 : un nœud

Une **maille** est un ensemble de branches se refermant sur elles-mêmes.

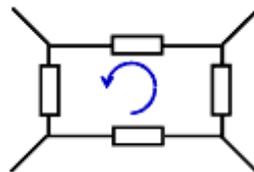


Figure II.14 : une maille



Application

Soit le circuit électrique de la figure ci-dessous. On donne :

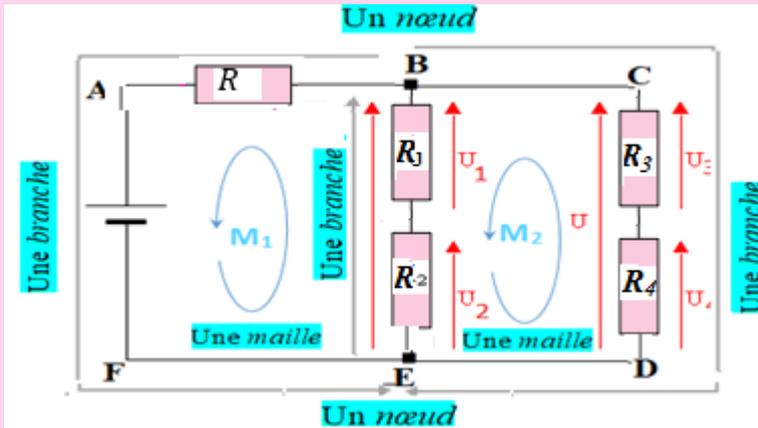


Figure II.15 : circuit électrique

1. les nœuds du circuit sont **B** et **E**
2. les mailles indépendantes dans ce circuit sont **ABEFA** , **BCDEB**
3. les branches du circuit sont **EFAB** , **BE** et **BCDE**

II.5.2 lois de KIRCHHOFF

a) Première loi (Loi des nœuds)

En un nœud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle.

Selon la loi des nœuds

$$\sum_j I_j \text{ entrants} = \sum_j I_j \text{ sortants} \quad (\text{II-29})$$

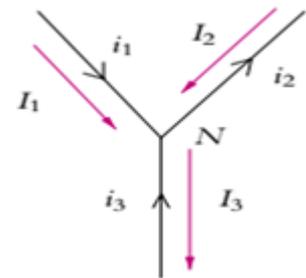


Figure II.16 : nœud à trois branches

b) Deuxième loi (loi des mailles)

Pour une maille d'un circuit, la somme algébrique des f.é.m. est égale à la somme algébrique des produits RI .

Selon la loi des mailles on a :

$$\sum_j E_j = \sum_j R_j \cdot I_j \quad (\text{II-30})$$

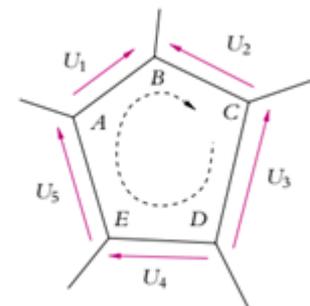


Figure II.17 : maille à cinq branches



On choisit un sens de parcours de la maille et on applique la loi en comptant positivement les tensions dans le sens de la maille et négativement celles en sens opposé.

II.6 Théorème de Thévenin

Tout réseau linéaire compris entre deux bornes A et B , aussi compliqué soit-il, est équivalent à un générateur unique de fém e et de résistance interne r telles que la fém $e=E$ est la tension entre les bornes de R .

La résistance interne $r=R_{eq}$ est la résistance du réseau entre les bornes de A et B , obtenue en posant que toutes les fém et fcém sont nulles.

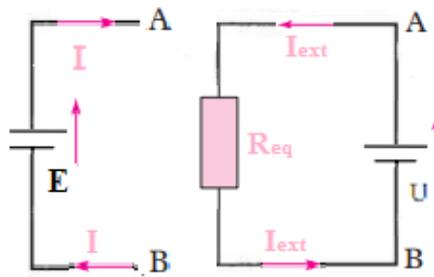


Figure II.18 : Circuit de Thévenin

II.7 Puissance – dipôles récepteurs et générateurs

Soit un dipôle parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ et aux bornes duquel on a une tension $u(t) = V_A - V_B$. On notera que du fait de la non accumulation de charges, l'intensité du courant entrant dans le dipôle et celle du courant sortant du dipôle sont les mêmes.

La puissance instantanée est par définition la quantité :

$$P(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (\text{II-31})$$

Si on est en régime continu alors intensité et tension ne dépendent pas du temps et on peut écrire :

$$P(t) = V \cdot I \quad (\text{II-32})$$

L'énergie dégagée par la résistance R parcourue par le courant I pendant la durée t vaut :

$$W = RI^2t \quad (\text{II-33})$$



Exercices RÉSOLUS

Exercice 01

Pour recharger une batterie, un chargeur délivre un courant d'intensité $5,0 \text{ A}$ sous une tension de 12 V et fonctionne pendant 10 heures .

- 1) Quelle quantité d'électricité circule dans les fils d'alimentation de la batterie lors de cette charge ?
- 2) Les porteurs de charge sont les électrons. Combien d'électrons ont circulé pendant cette charge ?

RÉSOLUTION

- 1) L'intensité du courant $I = 5,0 \text{ A}$ est constante.

La durée de la charge est $t = 10 \text{ h} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ s}$.

La quantité d'électricité circulant dans les fils d'alimentation vaut donc :

$$q = i \cdot t = 5 \times 3,6 \cdot 10^4 = 18 \cdot 10^4 \text{ C}$$

- 2) La valeur absolue de la charge d'un électron est $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Pour avoir la charge q , il a donc circulé dans les fils N électrons tels que :

$$q = Ne \quad \text{d'où} \quad N = \frac{q}{e} = \frac{18 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,125 \cdot 10^{22} e^-.$$

Exercice 02

Un fil électrique de section droite $S = 1,0 \text{ mm}^2$ est parcouru par un courant d'intensité constante $I = 10 \text{ A}$ (ordre de grandeur du courant d'alimentation d'un radiateur ou d'un lave-linge). La densité volumique des porteurs (électrons de charge $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) est $n = 1,0 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

- 1) Que vaut la norme j de la densité de courant ?
- 2) Déterminer la vitesse moyenne des porteurs

RÉSOLUTION

- 1) Lorsque la section est droite, le vecteur densité de courant est colinéaire au vecteur normal à la section orientée.

On a donc :

$$I = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot S = j \cdot S$$



D'où :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{10}{1.10^{-6}} = 10^7 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

2) Par définition, on a : $j = \frac{n}{V} \cdot \frac{1}{q}$ où V est la vitesse moyenne des porteurs. On en déduit

donc :

$$V = \frac{j}{n \cdot e} = \frac{10^7}{1.10^{29} \times 1.6 \cdot 10^{-19}} = 6.25 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice 03

Soit le circuit illustré à la figure (II.19).

Combien y trouve-t-on (a) de nœuds ; (b) de mailles ;

(c) de branches ?

Dans chaque cas, les nommer.

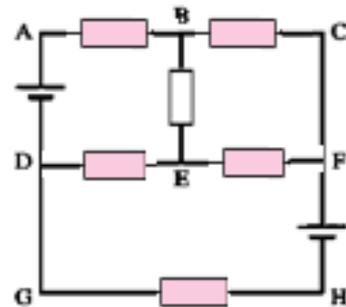


Figure II.19 : circuit électrique

RÉSOLUTION

a) Un nœud est un endroit où trois fils ou plus se rejoignent. On compte donc quatre nœuds dans ce circuit, soit les points **B, D, E et F**.

b) Une maille est un parcours fermé. Les premières qui sautent aux yeux sont les «petites» mailles **ABEDA, BCFEB** et **DFHGD**. Mais la loi des mailles peut être appliquée à n'importe quel parcours fermé, pas qu'aux plus petits.

Notes

➔ Il y a aussi le plus grand, **ACHGA**, et ceux de taille intermédiaire, **ACFEDA, ABEFHGA** et **BCFHGDEB** l'orientation effective correspond ou non à l'orientation conventionnelle choisie, celle-ci étant choisie arbitrairement.

c) Une branche est un tronçon qui relie deux nœuds consécutifs. On compte donc les branches **DAB, BCF, BE, DE, EF et DGHF**

Notes

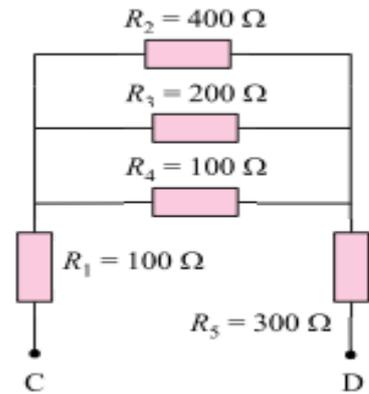
➔ On note une ambiguïté : **BAD et DAB**, par exemple, désignent la même branche.



Exercice 04

Déterminer la résistance équivalente R_{eq} du dipôle CD représenté sur la figure (II-20).

Figure II.20 : circuit électrique



RÉSOLUTION

Les trois résistances R_2 , R_3 et R_4 sont en parallèle et forment donc une résistance équivalente que nous baptiserons temporairement r , telle que :

$$\frac{1}{R_{234}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{400} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100} = \frac{7}{400}$$

Donc $R_{234} = 57.1\Omega$

Le dipôle CD est donc équivalent à l'association en série des résistances R_1 , R_{234} et R_5

Sa résistance équivalente est donc :

$$R_{eq} = R_1 + R_{234} + R_5 = 100 + 57.1 + 300 = 457.1\Omega$$

alors :

$$R_{eq} = 457.1\Omega$$

Exercice 05

On considère le circuit suivant, dans lequel la nature des dipôles n'est pas précisée.

- Dénombrer les mailles qui peuvent être définies dans ce circuit.
- Appliquer la loi des mailles à chacune de celles-ci. Combien de relations indépendantes obtient-on ainsi ?
- Déterminer les tensions u_{AC} , u_{CD} et u_{DF} .

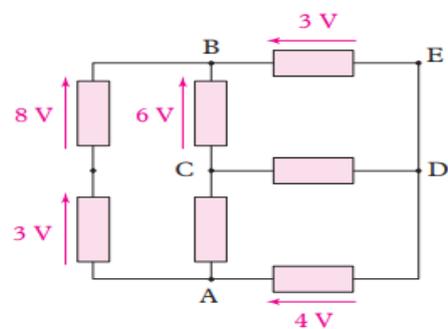


Figure II.21 : circuit électrique

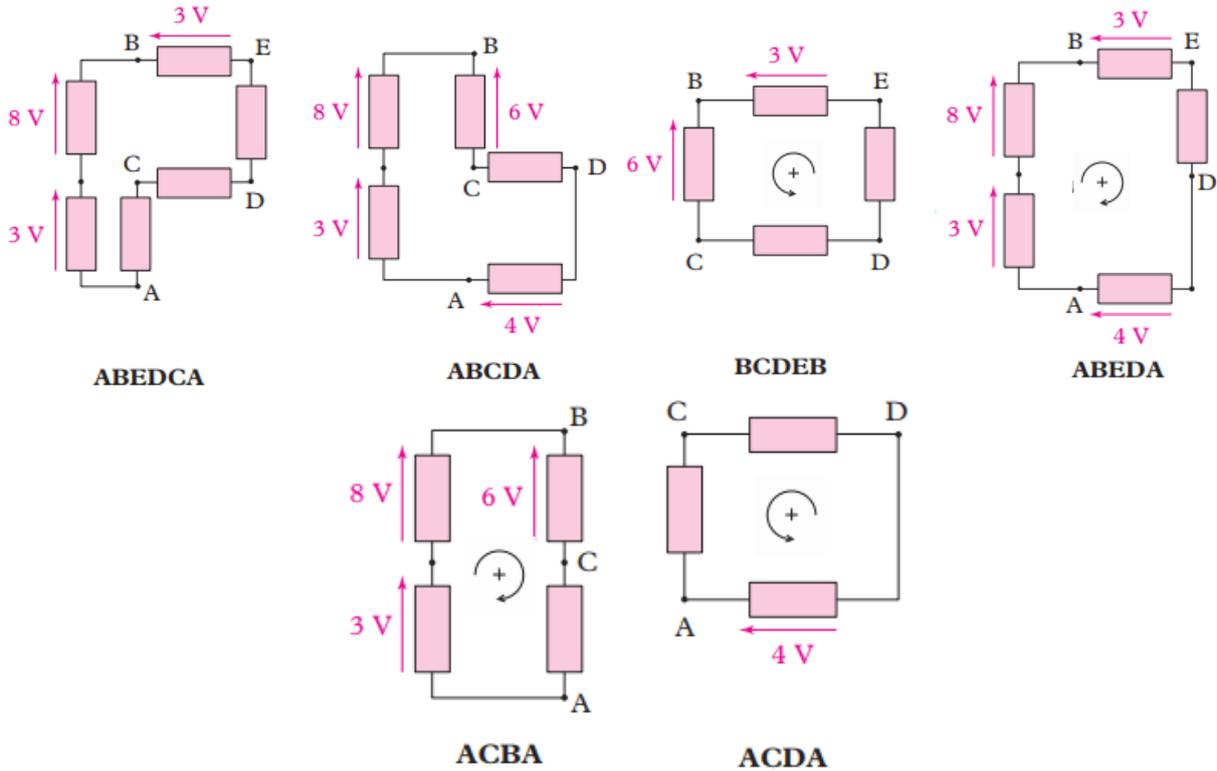


RÉSOLUTION

a) On dénombre 6 mailles dans le circuit :

ABEDCA ; ABCDA ; BCDEB ; ABEDA ; ACBA ; ACDA.

b)



On obtient le système suivant :

- Maille **ABCDA** : $3 + 8 - 6 + V_{DC} + 4 = 0$ (1)
- Maille **ABEDCA** : $3 + 8 - 3 + V_{DE} + V_{CD} + V_{AC} = 0$ (2)
- Maille **BCDEB** : $-6 + V_{DC} + V_{ED} + 3 = 0$ (3)
- Maille **ABEDA** : $3 + 8 - 3 + V_{DE} + 4 = 0$ (4)
- Maille **ACBA** : $3 + 8 - 6 + V_{AC} = 0$ (5)
- Maille **ACDA** : $V_{AC} + V_{CD} - 4 = 0$ (6)

Les relations (1), (4) et (5) permettent de définir des tensions inconnues : elles sont donc **indépendantes**.

Les relations (2), (3) et (6) s'obtiennent par combinaison linéaire : elles ne sont donc pas **indépendantes**

b) À partir de (6), (4) et (2), on trouve facilement :

$$V_{AC} = -5 \text{ V} ; V_{DE} = -12 \text{ V} ; V_{CD} = 9 \text{ V}$$



Exercice 06

La figure suivante montre un circuit mixte composé de quatre résistances ($R_1 = 40\text{ ohms}$, $R_2 = 4\text{ ohms}$, $R_3 = 10\text{ ohms}$ et $R_4 = 15\text{ ohms}$) branchées à une source de tension $U=32\text{ V}$.

On désire calculer :

- a) la valeur de la résistance équivalente.
- b) le courant fourni par la source.

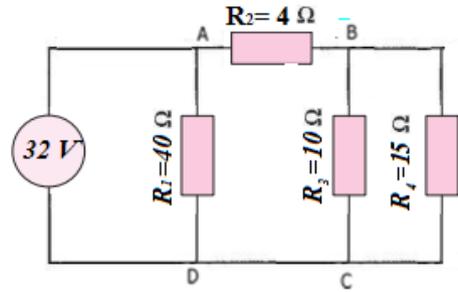


Figure II.22 : circuit électrique

RÉSOLUTION

a°) *Calcul de la résistance équivalente :*

D'après cette figure on peut citer les nœuds ; qui sont 4 nœuds (**A, B, C** et **D**)

Une fois on a introduit et nommé les nœuds,

on peut introduire la résistance équivalente. R_2 et R qui sont en série :

Nœuds B et C

La résistance R_3 est reliée en parallèle avec la résistance R_4 ,

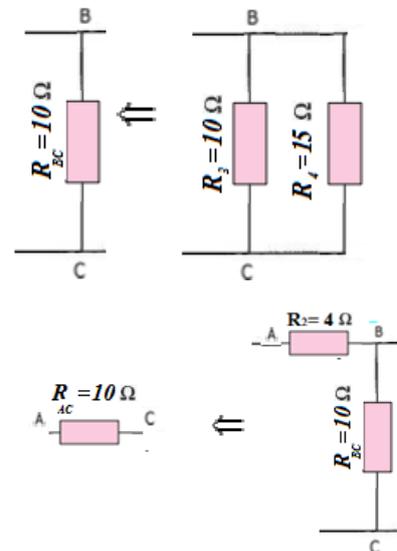
A.N : $R_{BC} = \frac{10 \times 15}{10 + 15} = 6\Omega \Rightarrow R_{BC} = 6\Omega$

➤ **Branche A et C**

La résistance R'_{eq} est reliée en série avec la résistance R_2 ,

$R_{AC} = \frac{R_{BC} \cdot R_2}{R_{BC} + R_2} \quad C''_{eq} = C_3 + C_{45}$

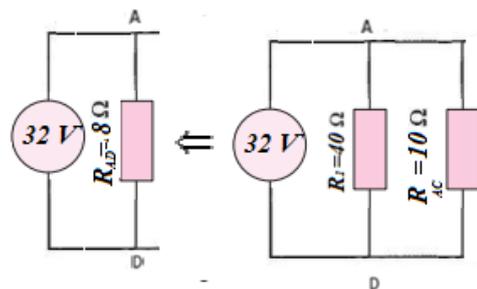
A.N : $R_{AC} = 6 + 4 = 10\Omega \Rightarrow R_{AC} = 10\Omega$



➤ **Nœuds A et D (C est confondu avec D)**

Il apparaît que R_{AC} est en parallèle avec R_1

A.N : $R_{eq} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40} = 8\Omega \Rightarrow R_{eq} = 8\Omega$





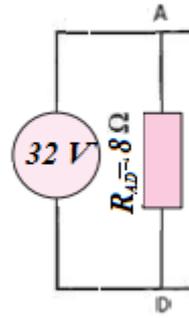
b*) Calcul du courant fourni par la source :

➤ pour déterminer la valeur du courant fourni par la source on applique la loi d'ohm.

$$U = R \times I$$

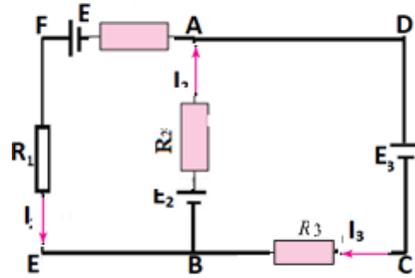
$$I = \frac{U}{R_{eq}}$$

c) A.N: $I = \frac{32}{8} = 4A$ $I = 4A$



Exercice 07

Soit le montage de la Figure (II.23) : $E_1 = 12V$; $E_2 = 12V$; $E_3 = 6V$; $R_1 = 8\Omega$; $R_2 = 12\Omega$; $R_3 = 18\Omega$; $r_1 = 1\Omega$



1. Nommer les nœuds du circuit.
2. Nommer les mailles indépendantes dans ce circuit.
3. Nommer les branches du circuit.
4. Calculer I_1 , I_2 et I_3 . (En appliquant les lois de Kirchhoff)

Figure II.23 : circuit électrique

Soit le montage de la Figure 2.

RÉSOLUTION

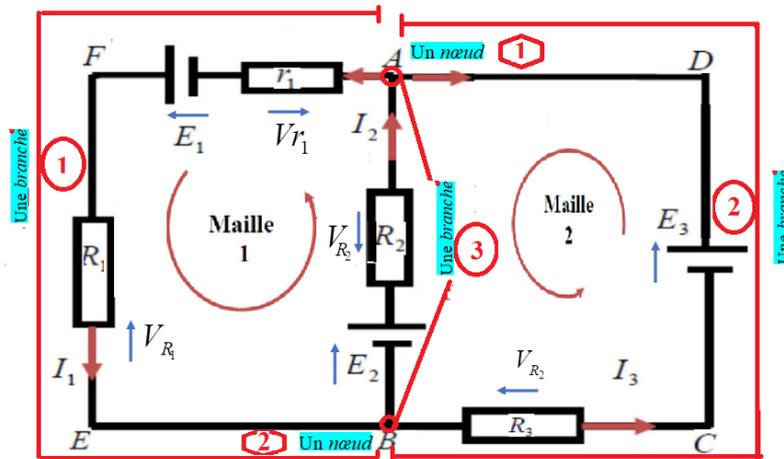


Figure II.24 : circuit électrique

1°) Dans le circuit suivant, les points **A** et **B** sont des nœuds (deux cercles rouges).



2°) les mailles indépendantes dans ce circuit sont **AFEBA** et **ABCD**.

3°) les branches du circuit sont **AFEB**, **AB** et **ADCB**. (Trois traits rouge)

4°) Calcule I_1 , I_2 et I_3 . (En appliquant les lois de Kirchhoff).

Lois de Kirchhoff :

Loi des nœuds :

$$\sum_J I_J \text{ entrants} = \sum_J I_J \text{ sortants} \Rightarrow I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1$$

Loi des mailles :

$$\sum_J R_J \cdot I_J - \sum_J E_J = 0$$

➤ Pour la maille 01 :

$$-E_1 + V_{R_1} - E_2 + V_{R_2} + V_{R_1} = 0$$

$$-E_1 + R_1 \cdot I_1 - E_2 + R_2 \cdot I_2 + r \cdot I_1 = 0 \Rightarrow E_1 + E_2 = (R_1 + r) \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2$$

➤ Pour la maille 02 :

$$-E_3 + V_{R_2} + E_2 + V_{R_3} = 0$$

$$-E_3 + R_2 \cdot I_2 + E_2 + R_3 \cdot I_3 = 0 \Rightarrow E_3 - E_2 = R_3 \cdot I_1 - (R_2 + R_3) \cdot I_2$$

$$E_1 + E_2 = (R_1 + r_1)I_1 + R_2 I_2 \quad (\text{II-34})$$

$$E_3 - E_2 = R_3 I_1 - (R_2 + R_3)I_2 \quad (\text{II-35})$$

Soit on utilise le déterminant **(Méthode 01)**

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1 + r_1) & R_2 \\ R_3 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 18 & -30 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = -270 - 216 = -486$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 + E_2 & R_2 \\ E_3 - E_2 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\text{A.N : } I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 12 \\ -6 & -30 \end{vmatrix}}{-486} \Rightarrow I_1 = 1,333 \text{ A}$$



$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + r_1) & E_1 + E_2 \\ R_3 & E_3 - E_2 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

A.N : $I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 24 \\ 18 & -6 \end{vmatrix}}{-486} \Rightarrow I_2 = 1 \text{ A}$

$$I_3 = I_1 - I_2 \tag{II-36}$$

A.N : $I_3 = 0,333 \text{ A}$

Soit on utilise la simplification : **(Méthode 02)**

On multiplie l'équation (II-34) par $R_2 + R_3$ et l'équation (II-35) par R_2 :

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = (R_1 + r_1)I_1 + R_2I_2 \dots\dots\dots \text{multiplie par } (R_2 + R_3) \\ E_3 - E_2 = R_3I_1 - (R_2 + R_3)I_2 \dots\dots\dots \text{multiplie par } (R_2) \end{cases}$$

$$E_1 + E_2)(R_2 + R_3) = (R_2 + R_3)(R_1 + r_1)I_1 + R_2I_2(R_2 + R_3) \tag{II-37}$$

$$E_3 - E_2)(R_2) = R_2R_3I_1 - (R_2 + R_3)R_2I_2 \tag{II-38}$$

Puis on fait (II-37) + (II-38), on trouve :

$$(E_1 + E_2)(R_2 + R_3) + (E_3 - E_2)(R_2) = (R_2 + R_3)(R_1 + r_1)I_1 + R_2R_3I_1$$

On fait sortir I_1 et on trouve :

D'où :

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)(R_1 + r_1) + R_2R_3}{(E_1 + E_2)(R_2 + R_3) + (E_3 - E_2)(R_2)}$$

A.N : $I_1 = 1,333 \text{ A}$

Puis on remplace I_1 dans l'équation (II-34) et on calcul I_2 et I_3 dans l'équation (II-36)

A.N : $I_2 = 1 \text{ A} ; I_3 = 0,333 \text{ A}$

Exercice 08

Soit le circuit électrique de la figure ci-dessous. On demande de :

1. Citer les nœuds du circuit.





2. Citer les mailles indépendantes dans ce circuit.
3. Citer les branches du circuit.
4. calculer les intensités dans toutes les branches du réseau.

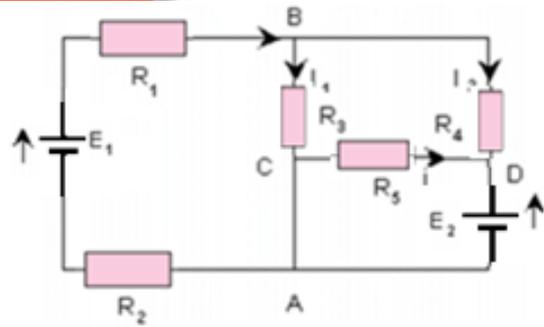


Figure II.25 : circuit électrique

RÉSOLUTION

Les intensités des courants dans les branches **BD, BA, CD**, sont des inconnues indépendantes, et les mailles **BADB, BCADB, BCDB** sont des mailles indépendantes. L'application de la **loi des mailles** donne :

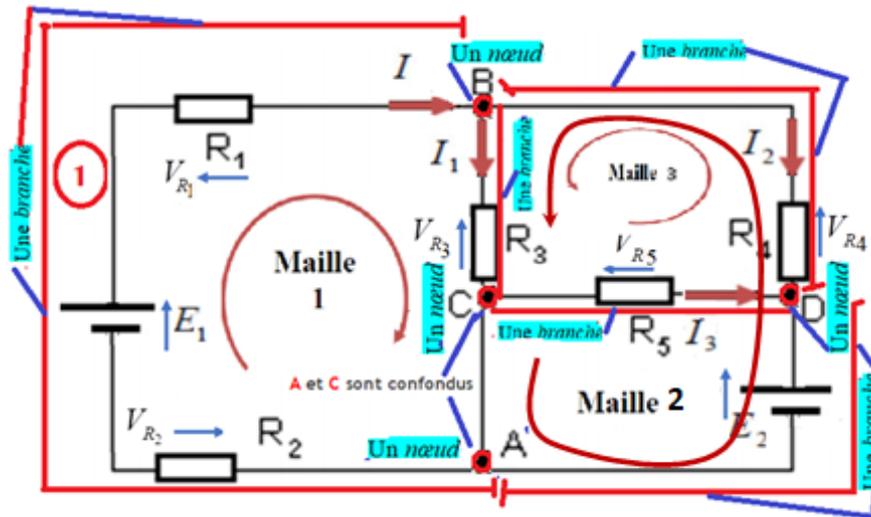


Figure II.26 : circuit électrique

- 1°) Dans le circuit suivant, les points **A, B** et **D** sont des **nœuds** (trois cercles rouge), (puisque, électriquement, **A** et **C** sont confondus)
- 2°) les **branches** du circuit sont **AB, BD, CD, DA** et **BC**. (cinq traits rouge).
- 3°) les **mailles** indépendantes dans ce circuit sont **BCAB, BCADB** et **BCDB**.
- 4°) **Les intensités dans toutes les branches du réseau (I_1, I_2, I_3 et I).**

Lois de Kirchhoff :

Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire :

Loi des nœuds :

$$\sum_j I_j \text{ entrants} = \sum_j I_j \text{ sortants}$$



$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 \quad (\text{II-39})$$

Loi des mailles :

$$\sum_J R_J \cdot I_J - \sum_J E_J = 0$$

➤ **La maille 01 : (BCAB)**

$$\text{On a : } E_1 - V_{R_3} - V_{R_2} + V_{R_2} = 0$$

$$E_1 - R_1 I - R_2 I - R_3 I_1 = 0 \Rightarrow E_1 - (R_1 + R_2)I - R_3 I_1 = 0$$

$$\Rightarrow E_1 = (R_1 + R_2)I + R_3 I_1 \quad (\text{II-40})$$

➤ **La maille 02 : (BCADB)**

$$\text{On a : } -V_{R_3} + V_{R_4} + E_2 = 0$$

$$E_2 - R_3 I_1 + R_4 I_2 = 0$$

$$\Rightarrow E_2 = R_3 I_1 - R_4 I_2 \quad (\text{II-41})$$

➤ **La maille 03 : (BCAB)**

$$\text{On a : } -V_{R_3} + V_{R_4} - V_{R_5} = 0$$

$$-R_5 I_3 - R_3 I_1 + R_4 I_2 = 0$$

$$\Rightarrow +R_5 I_3 + R_3 I_1 - R_4 I_2 = 0 \quad (\text{II-42})$$

Pour pouvoir résoudre le problème des intensités du courant (I_1 , I_2 , I_3 et I), il faut tout d'abord éliminer l'intensité I ,

de l'équation (II-39) et (II-40) On a : $\Rightarrow E_1 = (R_1 + R_2)(I_1 + I_2) + R_3 I_1$

$$\Rightarrow E_1 = (R_1 + R_2 + R_3)I_1 + (R_1 + R_2)I_2 \quad (\text{II-43})$$

On résout ensuite ce système d'équations à trois inconnues (intensités du courant (I_1 , I_2 , et I_3)), par la méthode 2 de l'exercice 07 vue précédemment.

et l'on obtient :

$$\begin{cases} E_1 = (R_1 + R_2 + R_3)I_1 + (R_1 + R_2)I_2 \\ E_2 = R_3 I_1 - R_4 I_2 \\ R_5 I_3 + R_3 I_1 - R_4 I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{R_4 \cdot E_1 + (R_1 + R_2)E_2}{(R_1 + R_2)R_3 + R_4(R_1 + R_2 + R_3)} ; \quad I_2 = \frac{R_3 \cdot E_1 - (R_1 + R_2 + R_3)E_2}{(R_1 + R_2)R_3 + R_4(R_1 + R_2 + R_3)} ;$$



$$I_3 = \frac{-E_2}{R_3} ;$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{R_4 \cdot E_1 + (R_1 + R_2) \cdot E_2 + R_3 \cdot E_1 - (R_1 + R_2 + R_3) E_2}{(R_1 + R_2) R_3 + R_4 (R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{(R_4 + R_3) \cdot E_1 - R_3 E_2}{(R_1 + R_2) R_3 + R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}$$

D'où $I = I_1 + I_2 = \frac{(R_4 + R_3) \cdot E_1 - R_3 E_2}{(R_1 + R_2) R_3 + R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}$

Exercice 09

Dans le circuit illustré à la figure (II-27), $E_1=17\text{ V}$, $E_2=6\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=4\ \Omega$, $R_3=3\ \Omega$.

(a) Trouver les courants dans chacune des résistances.

(b) Vérifier que la puissance totale fournie par les piles est bien transformée entièrement en chaleur dans les résistances.

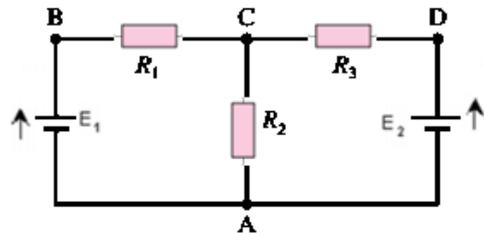


Figure II.27 : circuit électrique

RÉSOLUTION

a) Calcul des courants : I_1 , I_2 et I_3 .

Selon les **Lois de Kirchhoff on a :**

Loi des nœuds :

$$\sum_j I_j \text{ entrants} = \sum_j I_j \text{ sortants}$$

Lorsqu'on choisit d'appliquer au nœud C ; en choisissant le signe positif pour le courant sortant, on trouve :

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_2 = I_1 + I_3 \tag{II-44}$$

Puisque nous avons 3 inconnues, il manque deux équations, qu'on trouve en appliquant la loi des mailles aux « petites » mailles **ABCA** et **ACDA**.

Loi des mailles :

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_j R_j \cdot I_j - \sum_j E_j = 0$$

➤ **Pour la maille 01 :**

$$E_1 - V_{R_1} + V_{R_2} = 0$$

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 = 0 \Rightarrow E_1 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2$$

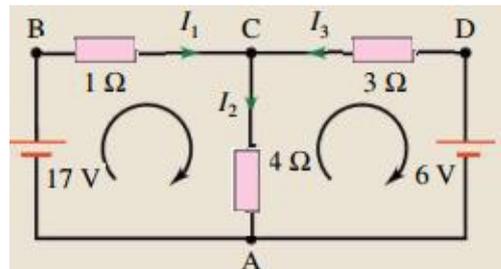


Figure II.28 : circuit électrique



➤ Pour la maille 02 :

$$-E_2 + V_{R_2} + V_{R_3} = 0$$

$$-E_2 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = 0 \Rightarrow E_2 = R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3$$

$$E_1 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \quad (\text{II-45})$$

$$E_2 = R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 \quad (\text{II-46})$$

AN :

$$17 = 1 \cdot I_1 + 4 \cdot I_2 \quad (\text{II-47})$$

$$6 = 4 \cdot I_2 + 3 \cdot I_3 \quad (\text{II-48})$$

On remplace (II-44) dans (II-47) on trouve :

$$17 = 5I_1 + 4 \cdot I_3 \quad (\text{II-49})$$

On fait la même chose pour (II-48) on aura :

$$6 = 4 \cdot I_1 + 7 \cdot I_3 \quad (\text{II-50})$$

On multiplie (II-49) par 4 et (II-50) par 5 puis on fait (II-50) – (II-49) on aura :

$$30 - 68 = (35 - 16) \cdot I_3 \Rightarrow -38 = 19 \cdot I_3$$

D'où

$$I_3 = -2 \text{ A}$$

De (05) on peut calculer I_1

$$6 = 4 \cdot I_1 + 7 \cdot (-2)$$

Alors : $I_1 = 5 \text{ A}$

On a $I_2 = I_1 + I_3$

D'où on tire : $I_2 = 5 - 2 = 3 \text{ A}$

❏ Le signe négatif pour I_3 signifie que notre hypothèse de sens pour I_3 était mauvaise : le courant dans la résistance de 3Ω est de 2 A vers la droite.

b) Le courant dans la résistance $R_1 = 1 \Omega$ égale $I_1 = 5 \text{ A}$, pour une puissance

$P_1 = R_1 I_1^2 = 1 \cdot 25 = 25 \text{ W}$. De même, on trouve que

$P_2 = R_2 I_2^2 = 4 \cdot 9 = 36 \text{ W}$ et $P_3 = R_3 I_3^2 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ W}$ sont respectivement dissipés dans R_2 et R_3 .

La puissance totale dissipée dans les résistances est :

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 25 + 36 + 12 = 73 \text{ W}.$$

Le courant qui traverse la pile $E_1 = 17 \text{ V}$ est de $I_1 = 5 \text{ A}$, pour une puissance



$$P_{E_1} = E_1 \cdot I_1 = 17.5 = 85 \text{ W}.$$

Dans l'autre pile, $P_{E_2} = E_2 \cdot I_2 = 6.2 = 12 \text{ W}.$

Or, il faut tenir compte du fait que la pile E_2 est en train de se recharger (car I_3 traverse la pile « dans le mauvais sens »). Ainsi, la puissance de 12 W calculée pour E_2 est une puissance absorbée par la pile. La puissance totale fournie par les piles est bien $85 \text{ W} - 12 \text{ W} = 73 \text{ W}$, et l'énergie est bel et bien entièrement dissipée tel qu'attendu

Exercice 10

Soit le circuit de la figure (II-29).

(a) Déterminer les courants, sachant que

$$r_1 = r_2 = 2 \Omega, r_3 = 1 \Omega, R_1 = 4 \Omega, R_2 = 3 \Omega, E_1 = 15 \text{ V}, E_2 = 6 \text{ V} \text{ et } E_3 = 4 \text{ V}.$$

(b) Quelle est la différence de potentiel

$$V_A - V_B?$$

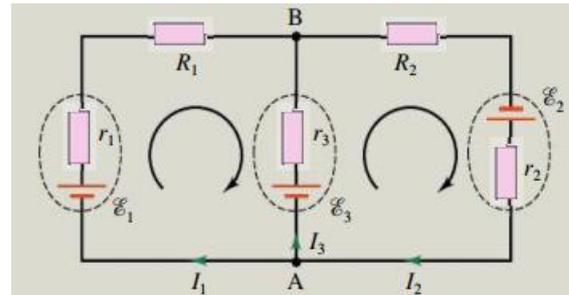


Figure II.29 : circuit électrique

RÉSOLUTION

a) **Selon la méthode globale de Kirchhoff,**

Loi des nœuds :

$$\sum_j I_j \text{ entrants} = \sum_j I_j \text{ sortants}$$

En choisissant le signe positif pour le courant sortant, La loi des nœuds appliquée au nœud A. on trouve :

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_2 = I_1 + I_3 \tag{II-51}$$

Pour appliquer la loi des mailles, on parcourt chaque maille à partir du point A, en sens horaire tel qu'indiqué.

Loi des mailles :

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0 \text{ ou } \sum_j R_j \cdot I_j - \sum_j E_j = 0$$

➤ **Pour la maille 01 :**

$$E_1 - V_{R_1} - V_{r_1} + V_{R_3} - E_3 = 0$$

$$E_1 - R_1 \cdot I_1 - r_1 \cdot I_1 + r_3 \cdot I_3 - E_3 = 0 \Rightarrow E_1 - E_3 = (R_1 + r_1) \cdot I_1 - r_3 \cdot I_3$$



➤ **Pour la maille 02 :**

$$E_2 + E_3 + V_{R_2} + V_{r_2} + V_{r_3} = 0$$

$$E_2 + E_3 - R_2 \cdot I_2 - r_2 \cdot I_2 - r_3 \cdot I_3 = 0 \Rightarrow E_2 + E_3 = (R_2 + r_2) \cdot I_2 + r_3 \cdot I_3$$

$$E_1 - E_3 = (R_1 + r_1) \cdot I_1 - r_3 \cdot I_3 \quad (\text{II-52})$$

$$E_2 + E_3 = (R_2 + r_2) \cdot I_2 + r_3 \cdot I_3 \quad (\text{II-53})$$

AN :

$$11 = 6 \cdot I_1 - 1 \cdot I_3 \quad (\text{II-54})$$

$$10 = 5 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3$$

On remplace (II-51) dans (II-53) on trouve :

$$10 = 5I_1 + 6 \cdot I_3 \quad (\text{II-55})$$

On multiplie (II-55) par 6 et (II-54) par 5 puis on fait (II-55) - (II-54) on aura :

$$60 - 55 = (36 + 5) \cdot I_3 \Rightarrow 5 = 41 \cdot I_3$$

D'où

$$I_3 = 0.12 \text{ A}$$

De (II-55) on peut calculer I_1

$$10 = 5 \cdot I_1 + 6 \cdot (0.12)$$

$$\text{Alors : } I_1 = 1.85 \text{ A}$$

$$\text{On a } I_2 = I_1 + I_3$$

$$\text{D'où on tire : } I_2 = 1.85 + 0.12 = 1.97 \text{ A}$$

Le long de la branche centrale, on trouve :

$$V_B + r_3 \cdot I_3 - E_3 = V_A$$

Donc :

$$V_A - V_B = r_3 \cdot I_3 - E_3 = 0.12 \cdot 1 - 4 = -3.88 \text{ V}$$

Le signe négatif signifie que V_A est inférieur à V_B .

Exercice 11

Soit un circuit composé de deux sources et de trois résistances, représentées par la figure suivante. Le montage possède deux bornes A et B lesquelles peuvent être raccordées à



une résistance R_{eq} . Trouvez la valeur et le sens du courant circulant dans la résistance de 6Ω (Figure II-30).

RÉSOLUTION

a) Le théorème de Thévenin permet de trouver la tension et le courant dans une résistance à la fois. Puisqu'il s'agit de la résistance de $R_3 = 12 \Omega$, on doit déterminer le circuit équivalent de Thévenin entre les bornes A et B (Figure II-30)

Ainsi, trouvons d'abord la tension de Thévenin E apparaissant entre ces bornes à circuit ouvert, c'est-à-dire en enlevant la résistance de $R_3 = 12 \Omega$ (Figure II-30).

En appliquant le diviseur de tension ; La tension aux bornes de la résistance de $R_3 = 12 \Omega$ est alors

$$V_2 = V_4 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2} = 40 \cdot \frac{12}{12 + 4} = 36 V$$

On a : $V = V_1 + V_2 = V_{AB} + V_2$

D'où La tension de Thévenin E vaut donc :

$$V_{AB} = V - V_2 = 108 - 36 = 72 V$$

En suppose que les sources de $108 V$ et de $48 V$ soient mises en court-circuit, donc maintenant, on calcule la résistance qui se trouve entre les bornes A et B .

Cette dernière est composée d'une résistance de $R = 12 \Omega$ en parallèle avec une résistance de $R_2 = 4 \Omega$, soit une résistance de

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Alors : $R_{Th} = 3 \Omega$

Lorsque la résistance de $R_1 = 6 \Omega$ est branchée entre les bornes A et B , on trouve qu'elle porte un courant de

$$I_{R_1} = \frac{V}{R_{Th} + R_1} = 8 A$$

b) Le courant circule de gauche à droite dans la résistance.

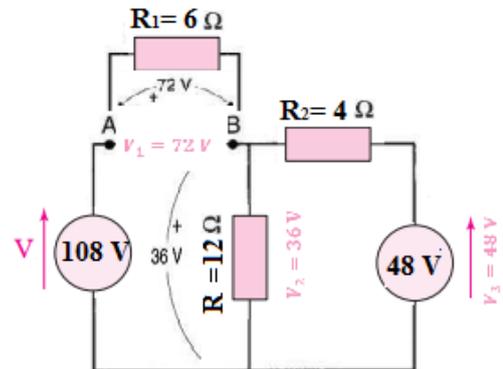
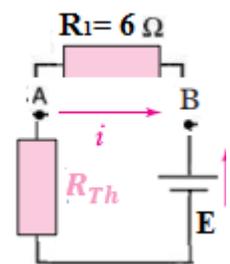
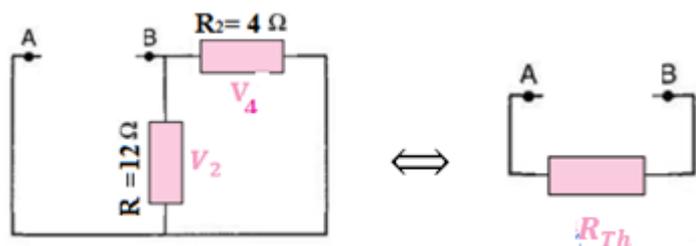


Figure II.30 : circuit de Thévenin





Exercice 12

Calculer on utilisant le théorème de Thevenin le courant I de la branche AB du circuit suivant :

Figure II.30 : circuit de Thévenin

RÉSOLUTION

Au début, on doit déterminer le circuit équivalent de Thévenin entre les bornes A et B , On commence par débrancher la branche du résistance R_2

Donc :

$$E_{Th} = V_A - V_B = \frac{R_2 \cdot E}{R_2 + R_1}$$

En suppose que la source E soit mise en court-circuit, donc maintenant, on calcule la résistance de Thévenin qui se trouve entre les bornes A et B .

Cette dernière est composée d'une résistance de R_1 en parallèle avec la résistance R_2

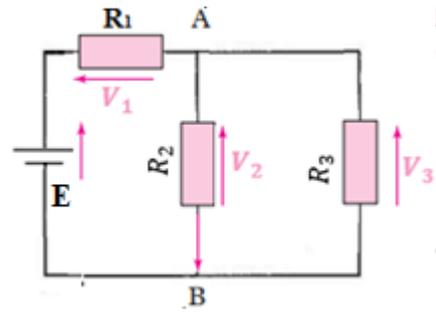
soit la résistance R_{Th} :

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

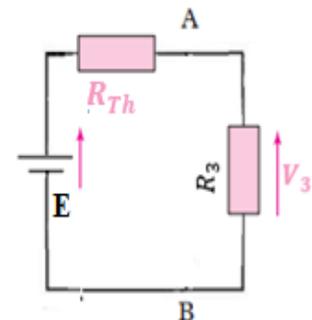
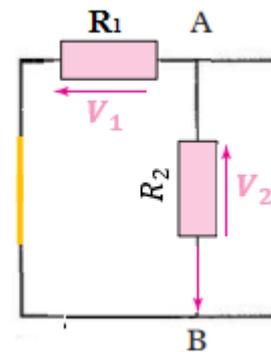
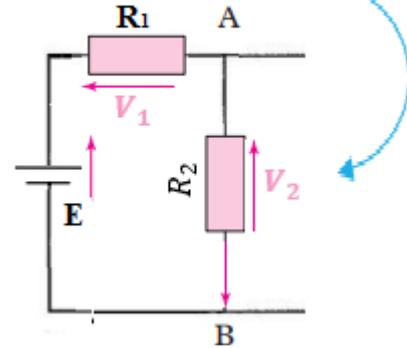
D'où : $R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

$$I_3 = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_3}$$

$$I_3 = \frac{\frac{R_2 \cdot E}{R_2 + R_1}}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{R_2}{R_2 R_1 + R_3 (R_1 + R_2)} E$$



Toute cette partie sera remplacée par un seul générateur





1 Un fil de cuivre de diamètre 1,2 est parcouru par un courant d'intensité $I=5$ A. Calculer la densité de courant dans ce fil ?

a. $j = \sigma \frac{l}{S}$

b. $j = \frac{l}{\sigma S}$

c. $j = \frac{\sigma}{lS}$

2 On considère un barreau conducteur d'axe (Ox) , de sections de longueur et de conductivité γ . Ce barreau est parcouru par une intensité I selon (Ox) et soumis à une tension U entre ses deux extrémités. Déterminer la résistance R du barreau.

a. $R = \frac{l}{S} = \frac{5}{\pi(0.6 \cdot 10^{-3})^2} = 4.42 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

b. $j = \frac{I}{S} = \frac{5}{\pi(1.2 \cdot 10^{-3})^2} = 12.27 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

c. $j = \frac{I}{S} = \frac{5}{4\pi(0.6 \cdot 10^{-3})^2} = 1.105 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

3 Un récepteur électrique alimenté sous une tension de 12 V est traversé par un courant de 350 mA. Il fonctionne pendant 8,0 minutes, l'énergie électrique reçue vaut

a. $3,4 \cdot 10^4 \text{ J}$

b. 34 J

c. $2,0 \cdot 10^3 \text{ J}$

4 Lorsque deux résistances sont associées en parallèle ($R_1 < R_2$), la résistance équivalente à cette association est toujours :

a. supérieure à la valeur la plus élevée des deux résistances.

b. inférieure à la valeur la plus faible des deux résistances

c. supérieure à la valeur la plus faible des deux résistances.

5 Le dipôle ci-dessous a un caractère générateur



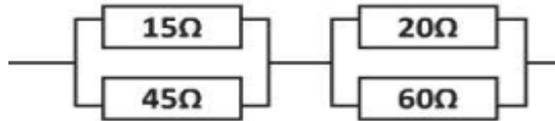


6 Un générateur de courant parfait alimente deux résistances $R_1 = 10 \Omega$ et $R_2 = 10 \Omega$ placées en parallèle :

- a. Les deux résistances sont parcourues par le même courant et ce courant vaut I .
- b. La tension aux bornes du générateur de courant est indéterminée
- c. Les deux résistances sont parcourues par le même courant et ce courant vaut $I/2$

7 On réalise l'association de conducteurs ohmiques, la résistance équivalente est

- a. 140Ω
- b. 26Ω
- c. 0.16Ω



8 Un ensemble de résistances $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$ et $R_3 = 20 \Omega$ est construit comme suit : R_2 et R_3 sont associées en parallèle et R_1 est placé en série avec cette association. Le tout est alimenté par un générateur de tension parfait $E = 10 V$. Quelle est la valeur du courant I délivré par le générateur ?

- a. $I = 860 mA$
- b. $I = 520 mA$
- c. $I = 500 mA$

9 La loi des nœuds sert

- a. À calculer une tension
- b. À calculer un courant
- c. À calculer une puissance

10 On associe un nombre croissant de conducteurs ohmiques identiques en parallèle, la résistance équivalente

- a. Augmente
- b. Diminue
- c. N'évolue pas



Exercice 01

Considérons le circuit de la figure figure (II-31). ci-dessous.

1. Calculer la résistance équivalente R_{AB} entre les points A et B du circuit.
2. On relie les points A et B aux pôles d'un générateur de f. e. m. $E=96 V$ et de résistance interne négligeable. Calculer l'intensité I du courant débité par le générateur en précisant son sens de passage.
3. On se propose de calculer de façon simple le courant dans la branche CD .

a. Calculer la chute de tension V_{AC} entre les points A et C .

b. En déduire le courant dans la branche CD .

Préciser son sens.

4. En procédant de la même façon qu'à la 3ième question, on demande de déterminer le courant qui circule dans la branche EF .

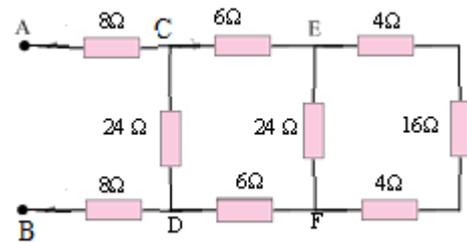


Figure II.31 : résistances équivalentes

Exercice 02

On donne $V_{AC} = 30 V$. Déterminer :

1. la résistance équivalente entre les nœuds A et C ,
2. la valeur de la tension V_{BC} ,
3. les intensités des courants dans chaque résistance,
4. la puissance Joule dissipée dans R_4 .

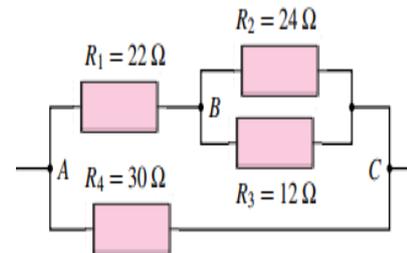


Figure II.32 : résistances équivalentes

Exercice 03

Toutes les résistances sont identiques et de valeur

$R = 102 \Omega$. On donne $I_3 = 8 A$,

$I_4 = 10 A$ et $I_5 = 5 A$. Déterminer I_1, I_2, U_{AB}, U_{AC} et

U_{BD} .

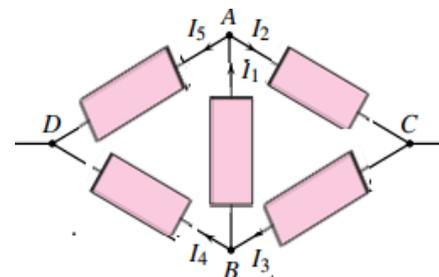


Figure II.33 : pont de résistances



Exercice 04

On considère le circuit de la figure (II-34).

Déterminer les courants I_1, I_2, I_3 , respectivement dans les branches AB, CD, EF

On se donne arbitrairement les sens de courant indiqués sur la figure.

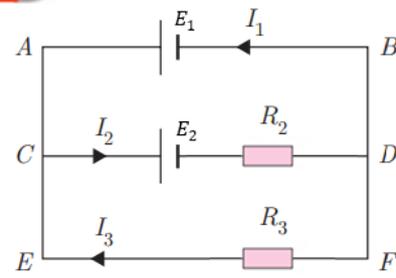


Figure II.34 : circuit électrique

Exercice 05

On considère le circuit suivant, dans lequel la nature des dipôles n'est pas précisée

- a) Dénombrer les mailles qui peuvent être définies dans ce circuit.
- b) Appliquer la loi des mailles à chacune de celles-ci. Combien de relations indépendantes obtient-on ainsi ?
- c) Déterminer les tensions V_{AC}, V_{CD} et V_{DF} .

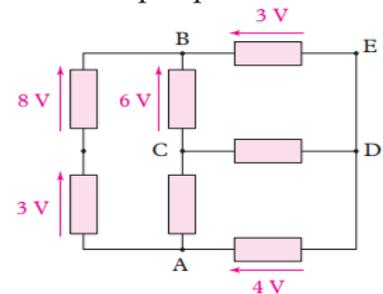


Figure II.35 : résistances équivalentes

Exercice 06

Dans notre expérience nous avons réalisé le montage de la figure (II-36), et on a mesuré les courants i

i_1, i_2, i_3 et i_4 . On a obtenu :

$i_1=2 A ; i_2 = 1 A ; i_3 = 0,5 A$ et $i_4 = 1,5 A$.

Déterminer les intensités des courants i_5, i_6, i_7, i_8, i_9

- b) On a mesuré les potentiels des points A, B, C, D, E et F , on a obtenu :

$V_A = 7 V ; V_B = 3 V ; V_C = 5 V ; V_D = 2 V ;$
 $V_E = 0 V$ et $V_F = -2 V$.

Déterminer la puissance reçue par chaque dipôle.

Préciser ceux qui sont générateurs et ceux qui sont récepteurs.

- c) Déterminer la puissance totale reçue par tous les dipôles.

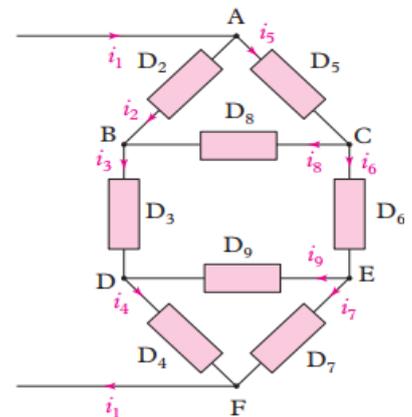


Figure II.36 : résistances équivalentes

Exercice 07

Un circuit électrique est constitué comme l'indique la figure (II-37), On désigne respectivement par I_1, I_2, I_3 les intensités des courants dans les branches ACB, ADB et AB .



(M) est un récepteur polarisé de f.c.é.m. $E_1 = 2 \text{ volts}$. Montrer que, quelle que soit la position de ses pôles sur la branche AB, ce récepteur se comporte comme un générateur.

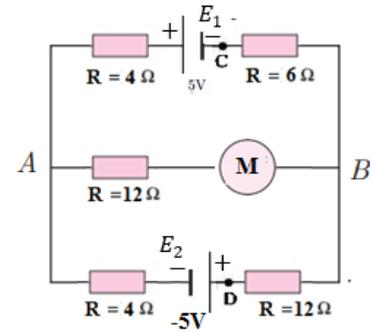


Figure II.37 : circuit électrique

Exercice 08

Trouver le circuit équivalent de Thévenin du circuit de la figure (II-38)

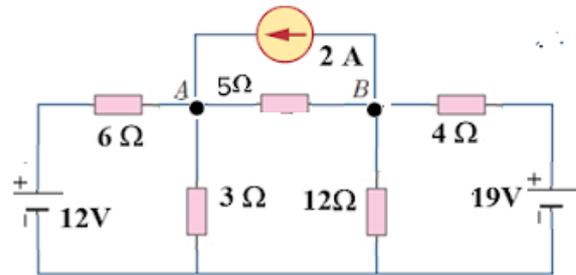


Figure II.38 : circuit électrique

Exercice 09

En Appliquant le théorème de Thevenin; calculer le courant I de la figure (II-39) :
On donne : $E_1 = 20 \text{ V}$; $E_2 = 70 \text{ V}$; $R_1 = 2 \Omega$;
 $R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 5 \Omega$

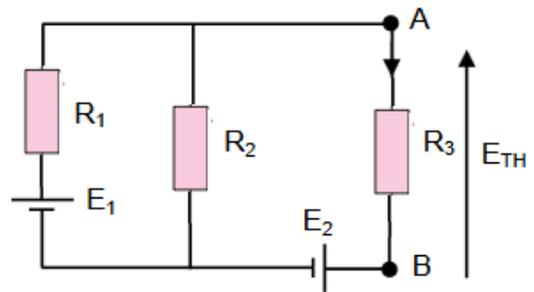


Figure II.39 : circuit électrique

Exercice 10

Soit le circuit électrique de la figure suivante :

On donne : $E_1 = 10 \text{ V}$; $E_2 = 5 \text{ V}$;
 $R_1 = R_3 = R_4 = 100 \Omega$; $R_2 = 50 \Omega$

Calculer le courant I en appliquant le théorème de Thevenin

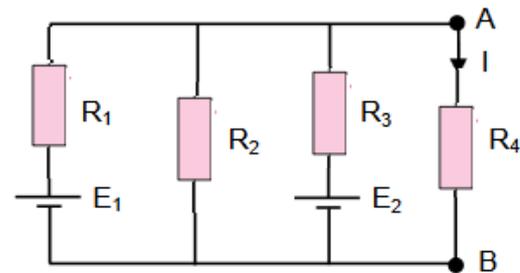
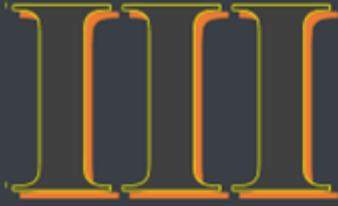
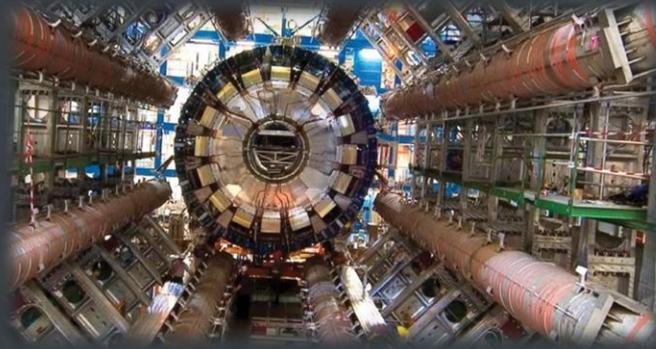


Figure II.40 : circuit électrique

Chapitre



Electromagnétisme



Sommaire

1. Introduction
2. Définition du champ magnétique et de la force de Lorenz
3. Loi de Laplace
4. Loi de Biot et Savart
5. Loi d'Ampère
6. Loi de Faraday
7. La loi de Lenz
8. Flux magnétique
9. Dipôle magnétique
10. Exercices résolus
11. QCM
12. Exercices résolus



Rappels

III.1 Introduction

Les aimants sont connus depuis l'Antiquité, sous le nom de magnétite, pierre trouvée à proximité de la ville de Magnesia (Turquie). C'est de cette pierre que provient le nom actuel de champ magnétique.

Les chinois furent les premiers à utiliser les propriétés des aimants, il y a plus de 1000 ans, pour faire des boussoles.

Mais il faut attendre la fin du XIX^{ème} siècle pour qu'une théorie complète apparaisse, la théorie de l'électromagnétisme.

Tout commença avec l'expérience de Oersted en 1820. Il plaça un fil conducteur au-dessus d'une boussole et y fit passer un courant. En présence d'un courant l'aiguille de la boussole est effectivement déviée, L'étude quantitative des interactions entre aimants et courants fut faite par les physiciens Biot et Savart (1820). Ils mesurèrent la durée des oscillations d'une aiguille aimantée en fonction de sa distance à un courant rectiligne. Ils trouvèrent que la force agissant sur un pôle est dirigée perpendiculairement à la direction reliant ce pôle au conducteur et qu'elle varie en raison inverse de la distance. De ces expériences, Laplace déduisit ce qu'on appelle aujourd'hui la loi de Biot et Savart. Une question qui s'est ensuite immédiatement posée fut : si un courant dévie un aimant, alors est-ce qu'un aimant peut faire dévier un courant ?

L'élaboration de la théorie électromagnétique mit en jeu un grand nombre de physiciens de renom : Oersted (1820), Ampère, Arago, Faraday, Foucault, Henry, Lenz, Maxwell, Weber, Helmholtz, Hertz, Lorentz et bien d'autres.

Une charge électrique, de par sa seule présence, produit une modification des propriétés de l'espace autour d'elle appelée champ électrique. Lorsqu'elle est en mouvement, s'ajoute au champ électrique qu'elle rayonne un second phénomène que, historiquement, l'on a longtemps cru distinct : un champ magnétique.

Le mouvement des particules chargées dans un champ électrique et/ou magnétique est un sujet important du fait du grand nombre d'applications qui l'utilisent.



III.2 Définition du champ magnétique et la force de Lorentz

La force qui agisse sur une charge ponctuelle q dépend généralement non seulement de la position de cette charge mais également de sa vitesse \vec{v} . Cette force \vec{F}_m est décomposée en deux composantes, la composante électrique \vec{F}_e (qui ne dépend pas de la vitesse de la charge) et la composante magnétique \vec{F}_m (qui dépend de la vitesse de la charge). Toutes les propriétés de la force magnétique peuvent être décrites par l'introduction de la notion de champ magnétique noté usuellement \vec{B} qui s'exprime en tesla (T). La force magnétique \vec{F}_m est décrite par :

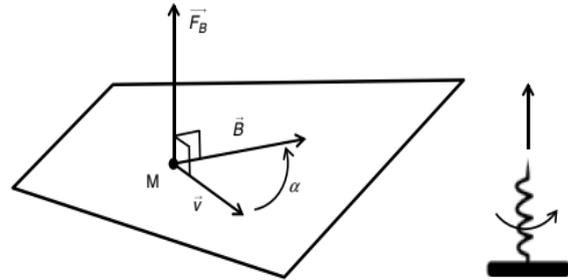


Figure III.1 : force de Lorentz

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{III-1})$$

Le champ magnétique est défini à partir

de son action sur une particule chargée, de charge q , se déplaçant à la vitesse \vec{v} dans un référentiel.

F : force de Lorentz ; v : vitesse de la particule ; q : charge de la particule

B : champ magnétique ; E : champ électrique

Remarques

Si la vitesse \vec{v} a la même direction que le champ magnétique, la particule ne subit pas de force.

Dans les autres cas de figures, la force subie par la particule est perpendiculaire à la fois à \vec{v} et à \vec{B} .

Dans le système international, l'unité de B est le Tesla et $1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$

Quand une charge se déplace dans une région de l'espace, où règnent un champ magnétique et un champ électrique, la résultante est égale à la somme des deux forces : électrique et magnétique :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\text{III-2})$$



III.2.1 Sources de champ magnétique

On peut distinguer deux sources de champ magnétique :

Les aimants : certains matériaux, comme le fer, le nickel ou le cobalt, sont capables d'engendrer en leur voisinage un champ magnétique ; ils constituent des aimants permanents et sont dits ferromagnétiques.

Un aimant possède toujours deux pôles, un pôle nord et un pôle sud, même si l'aimant est brisé en deux : il n'est pas possible d'isoler les deux pôles (Par une substance électrisée présente soit une charge positive, soit une charge négative).

Les courants électriques : c'est-à-dire des charges en mouvement d'ensemble : un conducteur parcouru par un courant électrique crée un champ magnétique en son voisinage.

Donnons quelques ordres de grandeur des champs magnétiques pour estimer l'étendue de leurs valeurs .

- ➡ Champ géomagnétique : $10 \mu T$
- ➡ Champ magnétique terrestre : $5.10^{-5} T$
- ➡ Champ créé par un aimant (champ généré dans un moteur électrique) : 0,1 à 1 T.

Les phénomènes de l'électromagnétisme dans leur ensemble pouvaient ainsi être décrits en toute généralité à partir de quatre équations appelées équations de Maxwell.

✚ Les quatre équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique \vec{E} , \vec{B} dans le vide, en un point M caractérisé par une densité volumique de charge $\rho(M)$ et un vecteur densité de courant $\vec{j}(M)$ sont :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Équation de Maxwell Gauss}$$

Par ailleurs, les lois décrivant les phénomènes d'induction mis en évidence par Faraday ont montré que les variations temporelles du champ magnétique donnaient naissance à :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Équation de Maxwell Faraday}$$

Les champs magnétiques n'étant quant à eux créés que par des courants et non par des charges magnétiques isolées, ils vérifient l'équation :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Équation de Maxwell Thomson ou flux}$$



Enfin, les expériences d'Ampère liant l'apparition d'un champ magnétique à la circulation d'un courant électrique stationnaire conduisent à l'équation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad \text{Équation de Maxwell Ampère}$$

Dans le vide, ces équations sont totalement symétriques (Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{J} = \vec{0}$)

$$\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Équation de Maxwell Gauss}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Équation de Maxwell Faraday}$$

$$\text{div}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{Équation de Maxwell Thomson ou flux}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Équation de Maxwell Ampère}$$

Le champ électromagnétique se propage par les effets superposés de l'induction et du courant déplacement. Si le champ magnétique décroît, il apparaît alors un champ électrique opposé à sa disparition (loi de Faraday) ; à l'inverse si le champ électrique disparaissait, il apparaîtrait dans le même temps un champ magnétique. Ainsi champs magnétiques et champs électriques se soutiennent l'un l'autre et se propagent dans le vide.

III.2.2 Principe de superposition

Le principe de superposition s'applique au champ magnétique comme il s'appliquait au champ électrostatique ;

Soient deux champs magnétiques \vec{B}_1 et \vec{B}_2 . Une particule de charge q animée d'une vitesse \vec{v} subit une force magnétique \vec{F}_1 due à \vec{B}_1 et une force magnétique \vec{F}_2 due à \vec{B}_2 avec :

$$\vec{F}_1 = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}_1 \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}_2$$

Au total, elle est soumise à l'action de la somme des forces comme le stipule le principe fondamental de la dynamique

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}_1 + q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}_2 = q \cdot \vec{v} \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{(III-3)}$$

Tout se passe comme s'il n'y avait qu'un seul champ magnétique :

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B} \quad \text{(III-4)}$$

Si plusieurs champs magnétiques $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \dots, \vec{B}_n$ agissent simultanément sur une charge électrique en mouvement, ou sur une aiguille aimantée, le champ magnétique \vec{B} équivalent, est égal à la somme vectorielle de tous les champs agissant (figure III.2) :

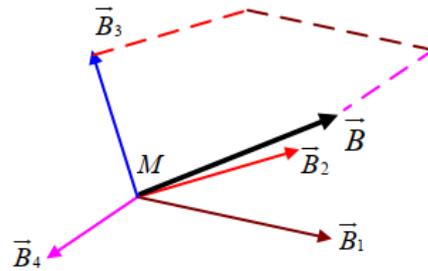


Figure III.2 : composition des champs magnétiques

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n \quad (\text{III-5})$$

a) Lignes de champ magnétique (Champ magnétique créé par une spire circulaire)

Une **spire circulaire** est un cercle conducteur parcouru par un courant électrique. La figure ci-dessous représente les lignes de champ magnétique créées par une spire circulaire dans un plan quelconque contenant l'axe de la spire. La spire est représentée en perspective et le sens du courant qui la parcourt est indiqué par une flèche.

Les lignes de champ sont des courbes fermées et la première règle de la main droite est bien vérifiée. On observe de plus que les lignes de champ traversent la spire de courant dans un sens donné, aussi, par la règle de la main droite :

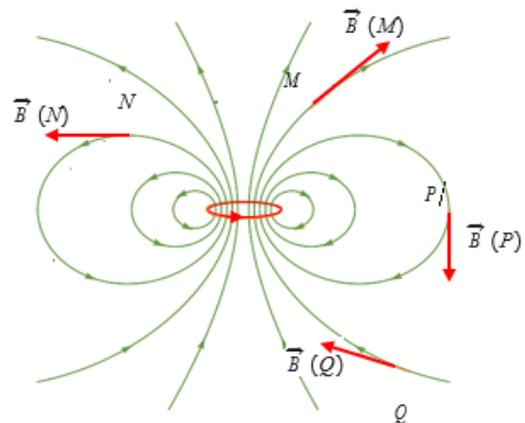


Figure III.3 : Lignes de champ magnétique

b) Travail de la force de Lorentz

Le travail infinitésimal d'une force \vec{F} pendant un déplacement élémentaire \vec{dl} s'écrit :

$$dw = \vec{F} \cdot \vec{dl} \quad (\text{III-6})$$

La force de Lorentz étant par définition, à tout instant t , perpendiculaire à la vitesse \vec{v} de la particule (propriété du produit vectoriel), elle est aussi perpendiculaire, à tout instant t , au vecteur déplacement élémentaire, ce qui entraîne $dW = 0$ quel que soit le déplacement élémentaire

$$\vec{dl} = \vec{v} \cdot dt \quad (\text{III-7})$$



- Si la vitesse \vec{v} a la même direction que le champ magnétique, la particule ne subit pas de force.
- Dans les autres cas de figures, la force subie par la particule est perpendiculaire à la fois à \vec{v} et à \vec{B}

III.3 Loi de Laplace

III.3.1 Définition

Un conducteur traversé par un courant et placé dans un champ magnétique est soumis à une force \vec{F}_m dont le sens est déterminé En utilisant la « règle de la main droite » représentée sur la figure (III.4). Tout comme la force électrique, elle change de sens lorsque le signe de la charge change

$$d\vec{F}(\vec{r}) = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \quad (\text{III-8})$$

F : Force en Newtons

B : Induction magnétique en teslas

I : Intensité dans le conducteur en ampères

L : Longueur du conducteur en mètres

Pour déterminer le sens de la force, il faut placer les trois doigts (pouce, index, majeur) perpendiculairement entre eux.

Le pouce se place dans le sens du champ (le sens des lignes d'induction est toujours du N au S à l'extérieur d'un aimant et du S au N à l'intérieur).

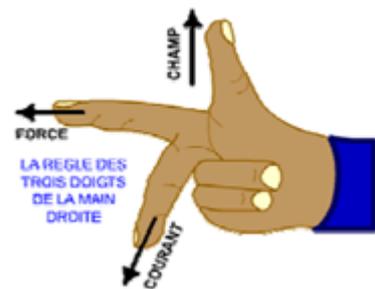


Figure III.4 : règle des trois doigts

Le majeur se place dans le sens du courant (sens conventionnel toujours du + vers le -).

L'index détermine alors le sens de la force.

III.3.2 Caractéristiques de la force de Laplace

Un conducteur de longueur l placé dans un champ magnétique \vec{B} est parcouru par un courant I , est soumis à une force de Laplace $\vec{F}(m)$.

- ▣ direction : ($\vec{F}(m) \perp (\vec{l} \text{ et } \vec{B})$) perpendiculaire au plan formé par le conducteur et \vec{B}



- sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite pouce : sens du courant
- index : sens de \vec{B}
- majeur : sens de $\vec{F}(m)$.
- norme : $F(m) = I \cdot B \cdot l \cdot \sin\alpha$
où I est l'intensité de courant (A)

B est l'intensité (la norme) du vecteur champ magnétique (T) ; α est l'angle formé par B par rapport au conducteur l.

III.3.3 Vecteur d'excitation magnétique

En introduisant le vecteur excitation magnétique H ($A \cdot m^{-1}$) défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \tag{III-9}$$

La quantité μ_0 est une constante universelle portant le nom de *perméabilité du vide*.

Elle vaut : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$

III.4 Loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart a été postulée en 1820 par ses auteurs sous la forme qui va être énoncée puisqu'elle permettait de rendre compte de la réalité du champ magnétique observé et de calculer l'induction magnétique en un point de l'espace, créée par un conducteur, quel que soit sa forme, et traversé par un courant électrique.

Soit un circuit filiforme parcouru par un courant d'intensité I . Une longueur \vec{dl}_p de ce circuit a une densité linéique de courant $I\vec{dl}_p$ dans le sens de parcours du courant.

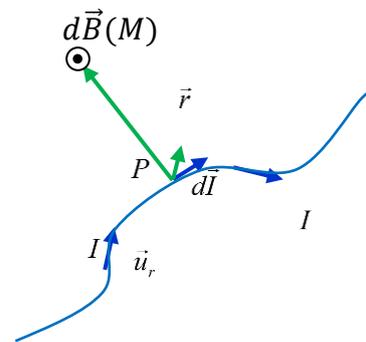


Figure III.5 : champ magnétique élémentaire créé par un element du courant.

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi \|\vec{PM}\|^2} d\vec{l} \wedge \frac{\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\vec{l} \wedge \vec{u}_r \tag{III-10}$$

Elle est liée à la permittivité du vide ϵ_0 et à la vitesse de la lumière dans le vide c par la relation : $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$



III.5 Loi d'Ampère

Cette loi est une conséquence de la loi de Biot et Savart. Elle confirme que les courants électriques sont des sources de champ magnétique.

III.5.1 Forme intégrale

La circulation du champ \vec{B} le long d'une courbe Γ , est proportionnelle au courant traversant la surface \mathcal{S} délimitée par la courbe Γ :

$$\text{Am} = \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-11})$$

III.5.2 Forme locale

D'après le théorème de Stokes, $\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s}$

$$\text{Soit } \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

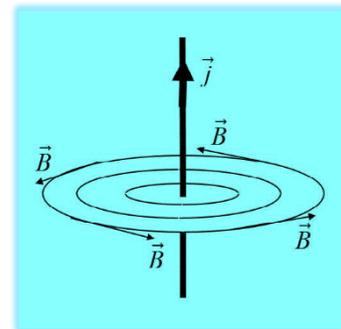


Figure III.6 : lignes de champ magnétique.

$$\text{Alors } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{III-12})$$

Cette équation montre que la densité de courant \vec{j} crée un champ \vec{B} qui tourne autour de \vec{j} (qui se confond alors avec l'axe de rotation de \vec{B})

III.6 Loi de Faraday

III.6.1 Phénomènes d'induction électromagnétique

Le phénomène d'induction se traduit par une f.é.m. induite (induit ouvert ou fermé) et/ou un courant induit (induit fermé seulement) dans l'induit lors du déplacement relatif de l'inducteur par rapport à l'induit ou bien lors des variations temporelles du courant dans l'inducteur.

L'inducteur est un aimant fixe.

L'induit est un circuit électrique mobile.

Lorsque l'induit est ouvert, le voltmètre dévie. Lorsque l'induit est fermé, l'ampèremètre dévie.

Note

On appelle **inducteur** la source de champ magnétique. Ce peut être un aimant ou un électroaimant.

On appelle **induit** le circuit électrique, siège du phénomène d'induction, il peut être ouvert (fermé par un voltmètre parfait par exemple) ou fermé (fermé par un ampèremètre par exemple).

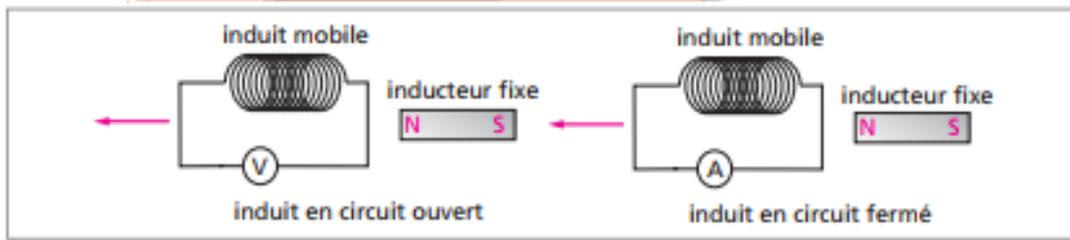


Figure III.7 : phénomène d'induction électromagnétique

Interprétation dans le cas d'un induit ouvert

– **Le champ électromoteur d'induction** : l'induit est un conducteur rectiligne animé d'une vitesse \vec{v} dans un champ magnétique uniforme \vec{B}_M perpendiculaire à \vec{v} et au barreau. Les électrons de l'induit, de charge q , sont soumis à la force de Lorentz. $\vec{F}_M = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}_M$ Ils se déplacent, s'accumulent en N et quittent M. Il apparaît une d.d.p. $V_M - V_N$ dont le signe ne dépend que du sens de \vec{v} et \vec{B}_M

L'induit se comporte comme un **générateur** où règne un champ électromoteur d'induction :

$$\vec{E}_M = \vec{v} \wedge \vec{B}_M$$

Attention : \vec{E}_M n'est pas un champ électrostatique, sa circulation n'est pas conservative.

– **La force électromotrice d'induction** : ce générateur est caractérisé par une f.e.m. d'induction $e = \int \vec{E}_M \cdot \vec{dl}$ dont le signe dépend du choix de l'orientation du conducteur : e est positif dans le premier cas et négatif dans le second

III.6.2 Enoncé de la Loi de Faraday

Soit un champ magnétique \vec{B} qui traverse une surface orientée S .

Alors le flux du champ \vec{B} à travers la surface S s'écrit :
$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

On considère un circuit électrique filiforme fermé orienté arbitrairement. Toute variation temporelle du flux magnétique à travers le circuit est responsable de l'apparition d'une force électromotrice induite e exprimée en volt (V) donnée par la loi de Faraday :

$$e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \tag{III-13}$$

La f.é.m est mesurée en *volts*, le flux magnétique F en weber (Wb).

L'orientation du circuit, qui permet de définir la surface orientée S , donne son orientation à la f.é.m. et ainsi le sens du courant induit dans le circuit.



Remarques

Le signe (-) qui apparaît dans la loi de Faraday montre qu'il y a opposition entre la f.é.m. induite et la variation de flux, ceci est la traduction de la loi de Lenz :

Les effets s'opposent aux causes.

III.7 La loi de Lenz

Le flux magnétique produit par le courant induit dans un circuit fermé tend à s'opposer à la variation du flux qui le cause.

Elle s'apparente à la loi de l'action et de la réaction en mécanique.

Cette loi permet de déterminer facilement le sens du courant induit dans un circuit par suite d'une variation du flux magnétique.

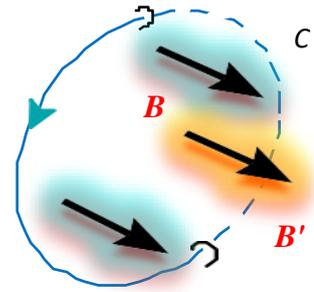


Figure III.8 : Flux magnétique

Ainsi, dans le circuit de la figure (III.8), placé dans un champ B décroissant, le courant est induit dans le sens indiqué, de façon que son champ B' tende à maintenir la valeur de B . Une inversion du sens de B ou de son taux de variation dB/dt entraîne une inversion du courant.

Application

Exemple : La f.é.m induite est négative lorsque l'on approche un circuit du pôle nord d'un aimant, car le flux augmente. Le champ magnétique induit sera alors opposé à celui de l'aimant et le courant induit sera négatif. Deux conséquences

- 1) L'augmentation du flux à travers le circuit est amoindrie.
- 2) Il apparaît une force de Laplace $\vec{F} = I \overrightarrow{grad} \phi$, se révèle négative et s'oppose à l'approche de l'aimant. Dans la loi de Faraday, également connue sous le nom de loi de Lenz, le signe (-) indique que dans des conditions normales, il n'y a pas de possibilité d'emballement (par exemple, le courant ne faisant qu'augmenter). Remarque sur la convention de signe

La détermination du sens du courant induit se fait de la façon suivante :

- a) On se choisit arbitrairement un sens de circulation le long du circuit.
- b) Ce sens définit, grâce à la règle du bonhomme d'Ampère, une normale au circuit.
- c) Le signe du flux est alors déterminé en faisant le produit scalaire du champ magnétique par cette normale.
- d) En utilisant ensuite la loi de Faraday, on obtient la valeur et le signe de la fém.
- e) Enfin, le courant est obtenu à partir de la loi d'Ohm (son signe peut aussi être directement connu en utilisant la loi de Lenz)



III.8 Flux magnétique

III.8.1 Enoncé

Considérons une région de l'espace où se manifeste un champ magnétique B . Le flux du champ magnétique est mesuré à travers une surface S .

Son expression est :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (\text{III.14})$$

où M est un point quelconque de la surface S , \vec{n} correspondant à la normale en ce point.

Le flux magnétique s'exprime en weber (Wb). en hommage au physicien allemand Wilhelm Eduard Weber (1804-1891).

$$\Phi = \|\vec{B}(M)\| \cdot S \cdot \cos\theta \quad (\text{III.15})$$

où θ est l'angle entre les lignes du champ d'induction $\vec{B}(M)$ et le vecteur normal au plan de la surface S .

III.8.2 Propriété du flux magnétique

Le flux magnétique à travers une surface fermée est toujours nul. Cette propriété dite de conservation du flux s'exprime sous la forme :

$$\iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_{ext} \cdot dS = 0 \quad (\text{III.16})$$

Pour que cette relation soit valable, il faut que la surface S soit fermée.

On considère un contour fermé C sur lequel s'appuient deux surfaces S_1 et S_2 (Figure III.9).

On note S la surface fermée, composée des deux surfaces ouvertes S_1 et S_2 .

Le flux magnétique à travers S peut s'exprimer, de par sa propriété de linéarité, sous la forme :

$$\iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_{ext} \cdot dS = - \iint_{(S_1)} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_1 \cdot dS_1 + \iint_{(S_2)} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_2 \cdot dS_2 = 0$$

D'où :

$$\iint_{(S_1)} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_1 \cdot dS_1 = \iint_{(S_2)} \vec{B}(M) \cdot \vec{n}_2 \cdot dS_2 \quad (\text{III.17})$$

Alors :

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (\text{III.18})$$

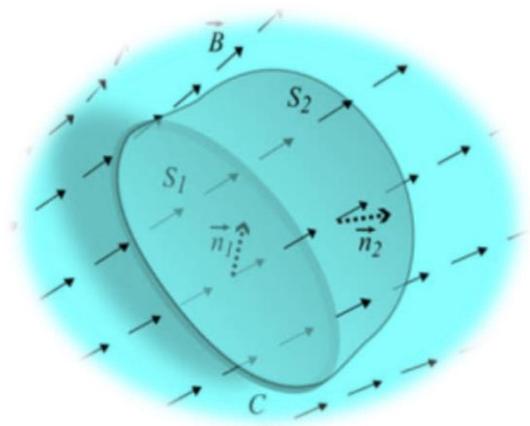


Figure III.9 : Flux magnétique



III.9 Dipôle magnétique

A chaque dipôle magnétique est associé un moment magnétique M . En présence d'un champ magnétique uniforme \vec{B} , ce dipôle va être soumis à un couple électromagnétique \vec{C} et une force \vec{F} .

Un circuit ou un aimant de moment magnétique \vec{M} plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} subit un couple magnétique de moment :

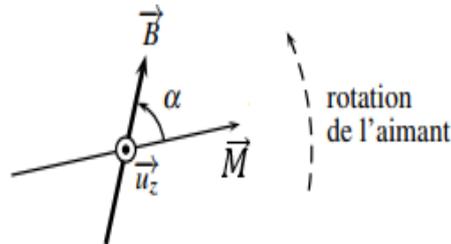


Figure III.10 : Couple magnétique de moment

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B} \Rightarrow C = M \cdot B \cdot \sin\alpha \quad (\text{III-19})$$

III.9.1 Moment magnétique d'une spire plane :

Le **moment magnétique** d'une spire plane, de surface S , parcourue par un courant d'intensité algébrique I , est le vecteur :

$$\vec{M} = I\vec{S} \quad (\text{III-20})$$

1) Le vecteur surface \vec{S} d'une spire plane orientée se définit comme suit :

- sa norme est égale à la surface S de la spire,
- sa direction est orthogonale au plan de la spire,
- son sens se déduit du sens conventionnel positif du courant selon la règle de la main droite

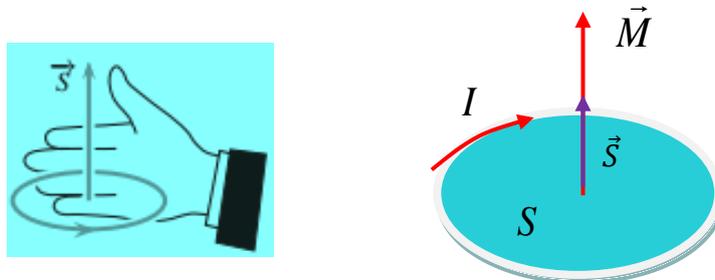


Figure III.11 : Moment magnétique



III.9.2 Moment magnétique d'une bobine

Le moment magnétique d'une bobine, assimilée à un ensemble de spires, est la somme vectorielle des moments magnétiques des spires.

Soit la bobine représentée sur la figure (III.12), qui comporte N spires circulaires de rayon r de vecteur normal \vec{u} ; le moment magnétique de la bobine est donc :

$$\vec{M} = NI\pi r^2 \vec{u} \quad (\text{III-21})$$

La norme du moment magnétique s'exprime en $A.m^2$

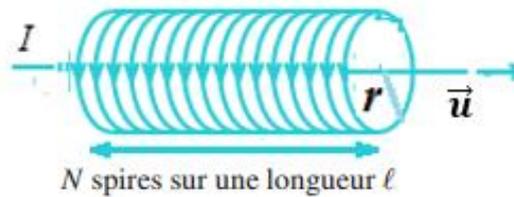


Figure III.12 : moment magnétique d'une bobine

III.9.3 Lignes de champ d'un moment magnétique

Un moment magnétique \vec{M} représente tout aussi bien une spire, une bobine ou un aimant. On démontre que le champ magnétique créé par ces sources à distance très supérieure à leur taille caractéristique ne dépend, en première approximation, que de la valeur de \vec{M} . Ses lignes de champ ont l'allure montrée sur la figure suivante.

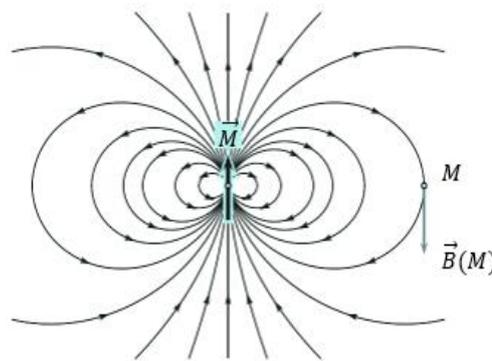


Figure III.13 : lignes de champ d'un moment magnétique



Exercices **RÉSOLUS**

Exercice 01

Soit un câble de rayon R , de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité $I=I_R$. La densité de courant J est constante à travers toute la section du cylindre et parallèle à l'axe (Oz). En appliquant le théorème d'Ampère, trouver les expressions du champ magnétique $B(r)$ en un point M placé à une distance r du centre dans les deux cas : $r \leq R$ et $r \geq R$. Représenter graphiquement ses variations.

RÉSOLUTION

1°) Détermination de l'expression du champ magnétique dans les deux cas

$r \leq R$ et $r \geq R$:

Deux cas peuvent être distingués : M est à l'extérieur de câble ou M est à l'intérieur de ce dernier.

Par l'application du théorème d'Ampère avec un contour circulaire (C) centré sur le

câble. : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$

$$\oint B \cdot dl = B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 I$$

Alors : $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Champ magnétique à l'extérieur du câble Pour $r > R$:

$$B(r) 2\pi r = \mu_0 I_0$$

D'où $B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$

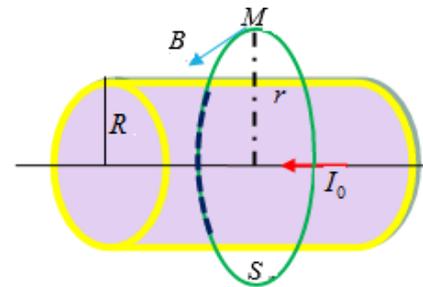


Figure III.14 : cas de $r > R$.

Champ magnétique à l'intérieur du câble Pour $r < R$:

$$2\pi B(r)r = \mu_0 I_r$$

$$J = \frac{I_R}{S_R} = \frac{I_r}{S_r}$$

D'où $I_r = \frac{I_R}{S_R} S_r = \frac{I_R}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{I_r r^2}{R^2}$

$$S_0 = \pi R^2 \text{ et } S = \pi r^2$$

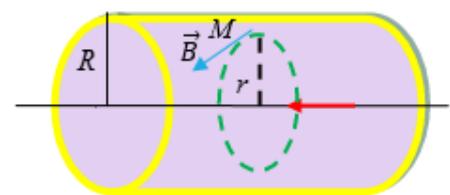


Figure III.15 : cas de $r < R$.



$$2\pi B(r)r = \mu_0 I_R = \mu_0 \frac{I_r r^2}{R^2}$$

$$\text{D'où : } B(r) = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi R^2} r$$

2) Représentation graphique du champ magnétique $B(r)$

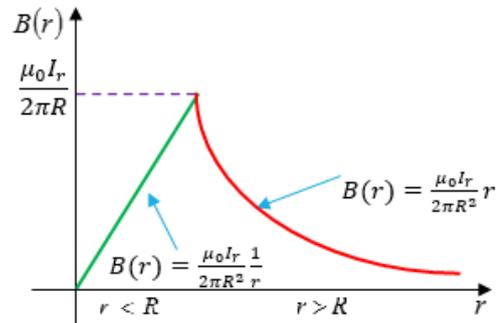


Figure III.16: représentation graphique du champ magnétique.

Exercice 02

La figure (III.17) représente un fil infiniment long, parcouru par un courant électrique d'intensité I . Déterminer le champ d'induction magnétique \vec{B} produit par tout le fil en un point P situé sur l'axe (Oz).

RÉSOLUTION

Puisque $\vec{r} = r\vec{u}_r \Rightarrow \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, on peut écrire la loi sous

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dz \vec{k} \wedge (-z\vec{k} + x\vec{i})}{r^3}$$

On a : $dz\vec{k} \wedge +x\vec{i} = xdz(\vec{k} \wedge \vec{i}) = xdz\vec{j}$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{xdz\vec{j}}{r^3}$$

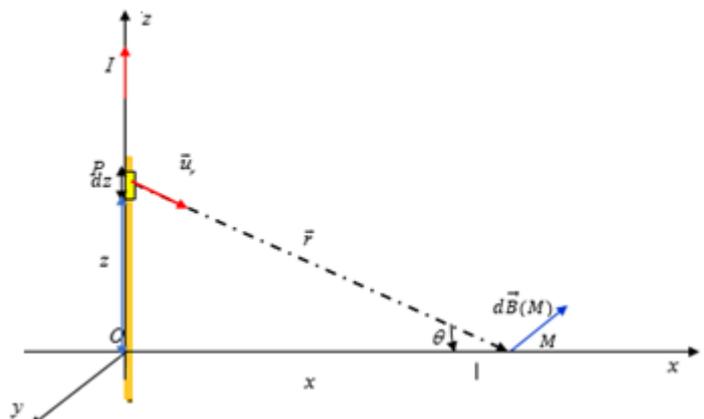


Figure III.17 : fil infiniment long

Puisque $r = \frac{x}{\cos \theta}$; $x = \frac{z}{\tan \theta} \Rightarrow z =$

$$x \cdot \tan \theta, dz = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$xdz = r^2 \cos \theta \cdot d\theta$$

Par substitution, on obtient : $d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r^2 \cos \theta \cdot d\theta \vec{j}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos \theta \cdot d\theta \vec{j}}{r}$



En intégrant cette expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{j} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{j}$$

Finalement, on arrive à l'expression finale du champ d'induction magnétique produit par tout le fil est :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Exercice 03

Le vecteur \vec{B} dans ce cas, est perpendiculaire au plan (Oxy) et dirigé selon des règles d'orientation.

Soit une spire d'axe (Oz), de centre O, de rayon R parcourue par un courant d'intensité I.

Calculer $\vec{B}(M)$ en un point M de l'axe (Oz).

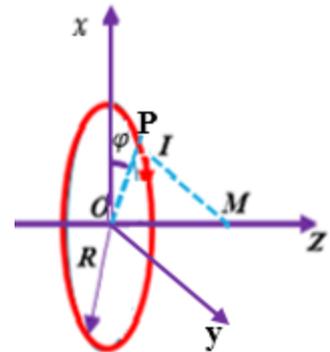


Figure III.18

RÉSOLUTION

Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie des courants donc \vec{B} appartient à ces plans, donc à leur intersection, soit : $\vec{B}(M) = B\vec{u}_z$

Calculons $\vec{B}(M)$ en utilisant la loi de Biot et Savart :

Soit un élément de courant $I\vec{dl}$ en P avec $\vec{dl} = R d\varphi \vec{u}_\varphi$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi} \frac{\vec{u}_\varphi \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3} = \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi} \frac{\vec{u}_r}{\|\vec{PM}\|^2}$$

Donc la composante sur z est :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi \|\vec{PM}\|^2} \sin\theta$$

On sait que $\sin\theta = \frac{R}{PM}$ donc
$$dB_z = \frac{\mu_0 I \sin^3\theta}{4\pi R} d\varphi$$

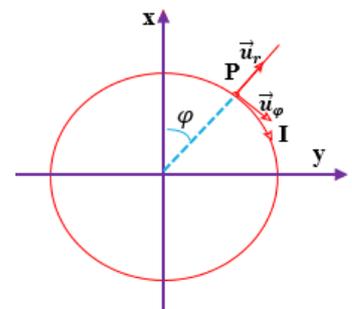


Figure III.19



φ varie de 0 à 2π :

$$B_z = \frac{\mu_0 I \cdot \sin^3 \theta}{4\pi R} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I \cdot \sin^3 \theta}{2 R}$$

Et $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \cdot \sin^3 \theta}{2 R} \vec{u}_z$

M sur l'axe ; avec $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2 R}$, ce dernier résultat pouvant se retrouver très rapidement.

Exercice 04

Soit un fil conducteur ohmique de conductivité σ , assimilé à un cylindre d'axe (Oz) et de rayon r , est soumis au champ électrique uniforme et permanent :

Déterminer le champ magnétique engendré par les courants du cylindre.

RÉSOLUTION

Le fil est parcouru par la densité volumique de courant uniforme :

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = j \cdot \vec{k}$$

Le champ magnétique créé par cette distribution est de la forme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{j}$$

$$\vec{E} = E \vec{u}_r = \frac{(q_{int})}{\epsilon_0} = \frac{(\rho \pi r^2)}{\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{nq}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r$$

$$\vec{B} = B \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 j \pi r^2}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 n q v}{2} r \vec{u}_\theta$$

On a : $I = j \cdot S = j \pi r^2$

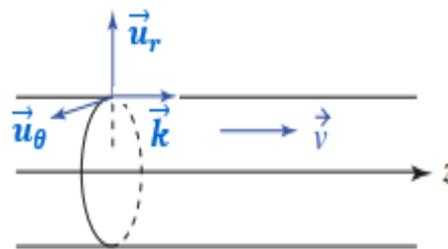


Figure III.20 : Fil conducteur ohmique

Exercice 05

Soit une bobine plate B , circulaire comportant $N=15$ spires de diamètre $d=4.5$ cm.

Elle est parcourue par un courant d'intensité $I=6$ A.

- 1) Représenter sur un schéma clair, le vecteur moment magnétique de la bobine.
- 2) Calculer numériquement ce moment magnétique.



RÉSOLUTION

1) Représentation du vecteur moment magnétique Le sens du vecteur moment magnétique \vec{M} est donné par le bras gauche de l'observateur Ampère, en regardant l'intérieur du circuit, où

bien on utilise le fait que le le vecteur \vec{M} sort de la face nord du circuit

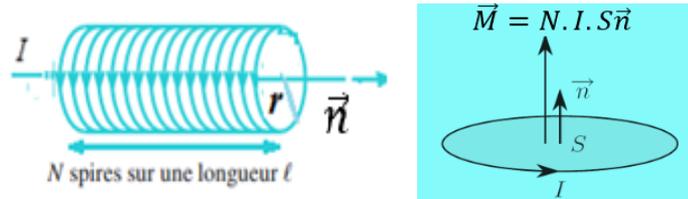


Figure III.21 : moment magnétique de la bobine

2) Calculer numériquement de ce moment magnétique

On a : $\vec{M} = N.I.S\vec{n} = NI\pi r^2\vec{n}$

Donc $M = NI\pi r^2 = NI\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$

AN :

$M = 15 \times 6 \times \pi \times \left(\frac{4,5}{2}\right)^2 = 0,143 \text{ A.m}^2$

IV.11 QCM



RÉSOLUS

Je m'évalue

QCM

1 Dans la loi de Biot et Savart $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl\vec{n} \wedge \vec{u}_r$

- a. Volt / mètre [V/m]
- b. Volt / Coulomb [V/C]
- c. Ampère / mètre [A/m]

2 Le champ $\vec{B}(M)$ est tel que q_2 .

- a. $\vec{B}(M) = B(M) \cdot \vec{u}_r$
- b. $\vec{B}(M) = B(M) \cdot \vec{u}_\theta$
- c. $\vec{B}(M) = B(M) \cdot \vec{u}_\phi$

3 La forme locale du théorème d'Ampère est :

- a. $\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$



b. $\text{div}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

c. $\text{div}(\vec{B}) = \vec{\mu}_0 \cdot \vec{j}$

4 L'expression de la force de Laplace élémentaire $d\vec{F}(r)$ s'exerçant sur un élément de conducteur de longueur $dl \cdot \vec{n}$ parcouru par une intensité I et placé dans un champ $\vec{B}(r)$ s'écrit :

a. $d\vec{F}(r) = I \cdot dl \wedge \vec{B}(r)$

b. $d\vec{F}(r) = I \cdot dl \cdot \vec{n} \wedge \vec{B}(r)$

c. $d\vec{F}(r) = I \cdot \vec{B}(r) \wedge dl \cdot \vec{n}$

5 Une boucle circulaire de fil de rayon 50 mm conduit un courant constant de $I \text{ A}$ et produit un champ magnétique de grandeur $B_1 \text{ T}$ en son centre. Une autre boucle circulaire de fil a un rayon de 150 mm . Sachant que ce fil conduit également un courant constant de $I \text{ A}$, laquelle des affirmations suivantes exprime correctement la relation entre B_2 , l'intensité du champ magnétique produit par la plus grande boucle en son centre, et B_1 ?

a. $B_1 = B_2$

b. $B_2 = \frac{1}{3} B_1$

c. $B_1 = \frac{1}{3} B_2$

6 La perméabilité magnétique du vide μ_0 est un coefficient sans dimension.

a. Vrai

b. Faux son unité est le $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

c. Faux son unité est le $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

7 Quelle est l'unité du champ magnétostatique ?

a. Gauss

b. $\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

c. $\text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}$

8 Parmi ces affirmations, laquelle est fautive ?

a. Deux lignes de champ magnétostatique peuvent se couper

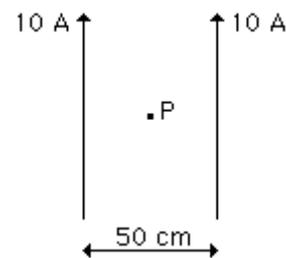
b. Les lignes de champ magnétostatique divergent à partir des sources du champ.



c. Les lignes de champ magnétostatique sont des courbes fermées.

9 Deux fils parallèles de grande longueur sont parcourus par des courants de même sens valant chacun 10 A. Les fils sont distants de 50 cm.

Que vaut la norme du champ magnétique au point P , milieu entre les deux fils ?



a. $16 \cdot 10^{-6} T$

b. $1,6 \cdot 10^{-6} T$

c. nulle

10 Le champ magnétique est un champ :

a. scalaire

b. vectoriel

c. Quelconque

11 L'équation locale associée au flux nul de \vec{B} à travers une surface fermée S est :

a. $\text{div}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

b. $\text{div}(\vec{B}) = 0 \vec{j}$

c. $\text{div}(\vec{B}) = \vec{dl} \wedge \vec{F}(r)$

Exercices

NON RÉSOLUS

Exercice 01

Soit une bobine plate est formée en enroulant un long fil sur un cylindre de carton de 3,00 cm de rayon. La bobine a 600 spires. À une distance de 17 cm au-dessus de la bobine et sur son axe, le module du champ magnétique est de $4,5 \times 10^{-5} T$.

- Quel est le module du moment magnétique de la bobine ?
- Quel est le courant qui circule dans la bobine ?

Exercice 02

Une bobine plate et circulaire de 22 mm de rayon avec N spires porte un courant constant de 0,45 A. L'intensité du champ magnétique produit au centre de la bobine par le courant est de $2,3 \times 10^{-5} T$. Calcule N en arrondissant la valeur au nombre entier le plus proche. Utilise une valeur de $4\pi \times 10^{-5} T \cdot m/A$ pour μ_0



Exercice 03

On considère une demi spire circulaire de rayon R , placée dans le plan (xoy) où règne un champ magnétique $\vec{B} = B \cdot \vec{k}$ ($B > 0$). La demi spire est parcourue par un courant d'intensité I (voir la figure (III.22)).

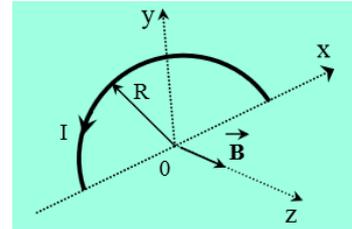


Figure III.22 : demi spire circulaire de rayon R

- 1- Déterminer l'expression de la force magnétique agissant sur la demi spire
- 2- Représenter sur un schéma clair, le vecteur de la force magnétique.

Exercice 04

Un long fil, de rayon R , est parcouru par un courant i uniformément distribué sur sa section transversale.

- a. Calculer le module du champ magnétique à l'intérieur du fil, à une distance $r < R$ du centre du fil.
- b. Calculer le module du champ magnétique à l'extérieur du fil, à une distance $r > R$ du centre du fil.

Exercice 05

Soit un solénoïde rectiligne de rayon x , de longueur $l \gg r$ comportant N spires est parcouru par un courant variable $I(t)$. Une boucle plate de rayon R est placée de telle sorte que son axe de révolution coïncide avec celui du solénoïde.

déterminer la f.é.m. d'induction dans la boucle dans le cas où $R > r$ et $R < r$?

Un barreau cylindrique de longueur l et de rayon R possède une aimantation permanente \vec{M} supposée uniforme et parallèle à l'axe (zz) du barreau.

1. Quels sont les courants ampériens surfacique et volumique, équivalents j_e et J_e dans un tel aimant ?

Exercice 06

Une bobine circulaire, ayant un rayon de $20,0 \text{ cm}$ et composée de $50,0 \text{ spires}$, est placée autour d'un long solénoïde, qui a $3\,500 \text{ spires par mètre}$ et un rayon de $12,0 \text{ cm}$. Le solénoïde est parcouru par un courant variable $I = 10,00 - 35,0 t$, où t est exprimé en secondes et i , en ampères. La bobine a une résistance de $0,500 \, \Omega$.

- a. Quelle est la f.é.m. induite dans la bobine ?
- b. Quel est le courant induit dans la bobine ?

**Exercice 07**

Soit, dans le vide, un champ électrique de composantes :

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)},$$

1. Calculer sa divergence et son rotationnel.
2. En déduire les composantes du champ magnétique \vec{B} qui l'accompagne ;
3. Calculer $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ et $\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$.
4. Quelle relation doit lier α et β pour que soient satisfaites les équations de Maxwell ?

Exercice 08

Un fil est recourbé pour former un arc de cercle, de rayon $R = 10,0 \text{ cm}$ et dont l'angle au sommet est $f = 160^\circ$. Un courant $I = 15 \text{ A}$ circule dans le fil, comme le montre la figure ci-contre. Calculer le champ magnétique créé par l'arc de cercle au point P . (Le fil fait partie d'un circuit, qui n'est pas illustré ici.)

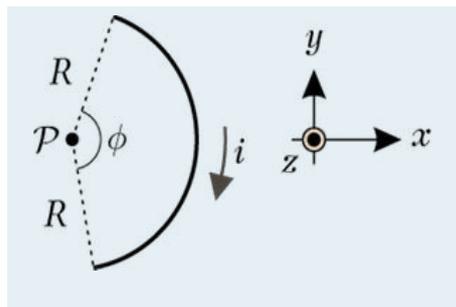


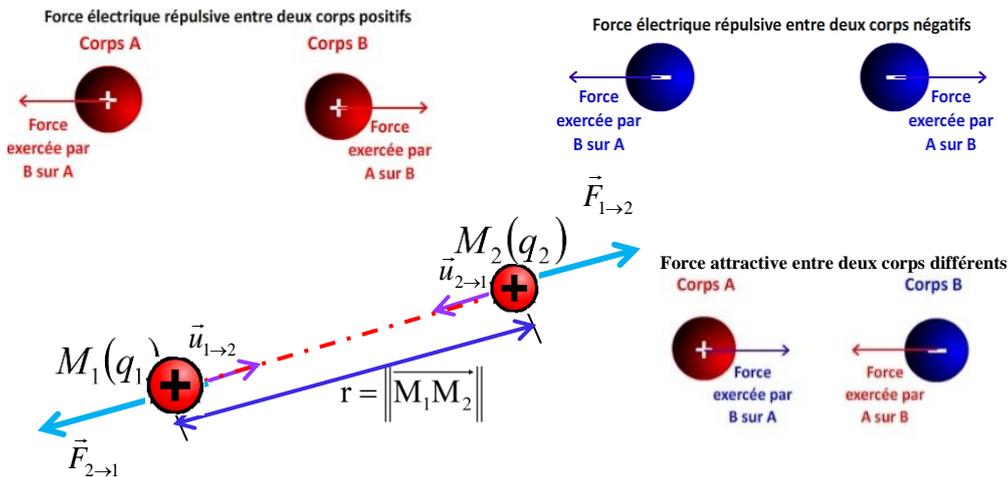
Figure III.23 : demi spire circulaire de rayon R



Chapitre I :

□ Les caractéristiques électriques de l'espace autour de deux charges ponctuelles ou d'un ensemble de charges peuvent être décrites par une force d'attraction ou de répulsion (pour des charges supposées immobiles).

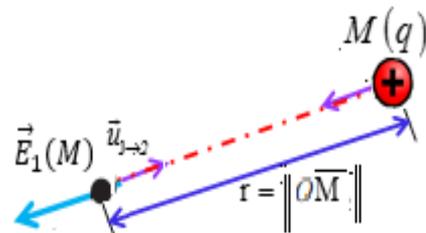
$$\vec{F}_{1/2}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$



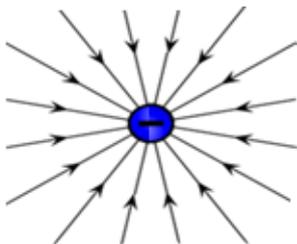
□ Les caractéristiques électriques de l'espace autour d'une charge ponctuelle ou d'un ensemble de charges peuvent être décrites par un champ vectoriel électrostatique et un potentiel électrostatique (pour des charges supposées immobiles)

$$\vec{E}_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad V =$$

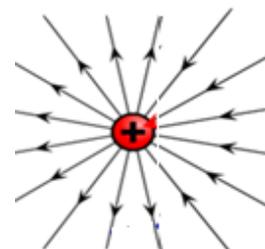
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$$



□ Le champ électrique est schématiquement représenté par des lignes de champ qui divergent à partir de l'objet chargé ou convergent vers lui



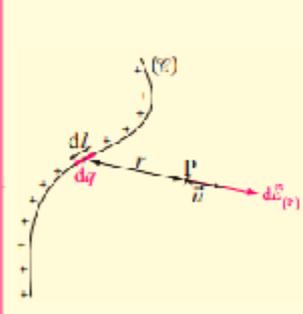
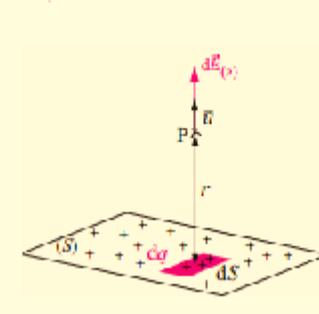
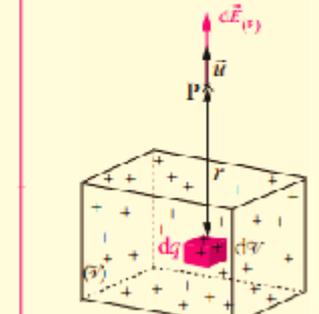
Les lignes de champ électrique divergent (pointent vers l'extérieur) d'une charge



Les lignes de champ électrique convergent (pointent vers l'intérieur) d'une charge



Électrostatique	Gravitation
charge q	masse m
densité volumique de charge μ	masse volumique
force $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot qq' \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$	force $\vec{F} = -G \cdot mm' \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$
champ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$	champ $\vec{C} = -G \cdot m \cdot \frac{\vec{u}}{r^2}$
constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	constante - G

Distribution linéique de charges	Distribution surfacique de charges	Distribution volumique de charges
Densité linéique de charge :	Densité surfacique de charge :	Densité volumique de charge :
$\lambda = \frac{dq}{dl}$	$\sigma = \frac{dq}{dS}$	$\rho = \frac{dq}{dV}$
Expression du potentiel électrostatique :	Expression du champ électrostatique :	Expression du champ électrostatique :
$d\vec{E}_{(P)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$	$\vec{E}_{(P)} = \iint_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{u}$	$\vec{E}_{(P)} = \iiint_{(V)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \vec{u}$
Expression du potentiel électrostatique :	Expression du potentiel électrostatique :	Expression du potentiel électrostatique :
$V_{(P)} = \int_{(V)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r}$	$V_{(P)} = \iint_{(S)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r}$	$V_{(P)} = \iiint_{(V)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r}$
		



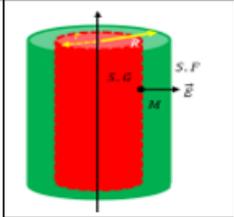
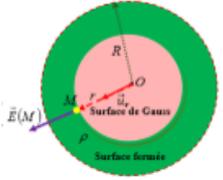
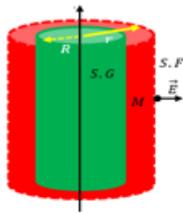
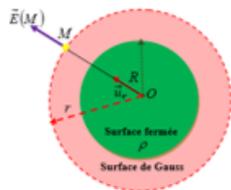
Chapitre I :

- ❑ Dans un conducteur à l'équilibre électrostatique, le champ électrique est nul. Les charges qu'il porte sont réparties à la surface.
- ❑ Le volume occupé par un conducteur à l'équilibre est un volume équipotentiel. La surface du conducteur est une surface équipotentielle.
- ❑ Il est impossible de définir le champ électrostatique en un point situé *sur* la surface d'un conducteur.
- ❑ **Théorème de Gauss** : le flux du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ sortant à travers toute surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface fermée, divisé par la permittivité du vide ϵ_0 , est donné par :

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int. S.Gauss}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int. S.Gauss}}}{\epsilon_0}$$

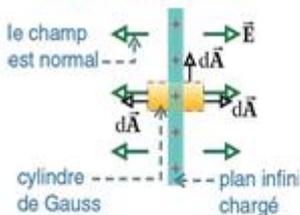
Système	Surface	Volume	Surface de Gauss
Cylindrique	$S = 2\pi R.h$	$V = \pi R^2 h$	$S_G = 2\pi r.h$
Sphérique	$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S_G = 4\pi r^2$

Distribution surfacique	<p>Cas $r < R$:</p> <p>(Intérieur d'un système de rayon R)</p>	<p>$\sum q_{\text{int. S.Gauss}} = 0$</p> <p>$E(r)2\pi r h = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = 0 \text{ V/m}$</p>	<p>$E(r)4\pi r^2 = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = 0 \text{ V/m}$</p>
Distribution surfacique	<p>Cas $r > R$:</p> <p>(Extérieur d'un système de rayon R)</p>	<p>$\sum q_{\text{int. S.Gauss}} = \sigma S = 2\pi \sigma R h$</p> <p>$E(r)2\pi r h = \frac{2\pi \sigma R h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$</p>	<p>$\sum q_{\text{int. S.Gauss}} = \sigma S = 4\pi \sigma R^2$</p> <p>$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi \sigma R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{R^2}{r^2}$</p>

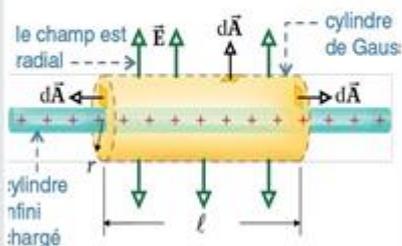
Distribution volumique	<p>Cas $r < R$:</p> <p>(Intérieur d'un système de rayon R)</p>	 $\sum q_{int. S. Gauss} = \rho V = \pi \rho r^2 h$ $E(r) 2\pi r h = \frac{\pi \rho r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$	 $\sum q_{int. S. Gauss} = \rho V = \frac{4}{3} \rho \pi r^3$ $E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho r^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$
Distribution volumique	<p>Cas $r > R$:</p> <p>(Extérieur d'un système de rayon R)</p> <p>(Intérieur d'un système de rayon R)</p>	 $\sum q_{int. S. Gauss} = \rho V = \pi \rho R^2 h$ $E(r) 2\pi r h = \frac{\pi \rho R^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$	 $\sum q_{int. S. Gauss} = \rho V = \frac{4}{3} \rho \pi R^3$ $E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho R^3}{3\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$

Le théorème de Gauss et la symétrie sont utiles pour calculer le champ électrique dans les cas suivants

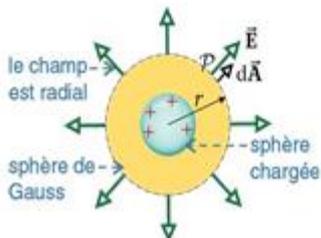
La symétrie plane



La symétrie cylindrique



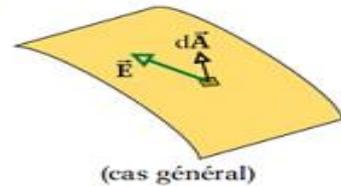
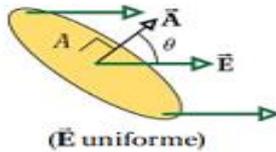
La symétrie sphérique



Le flux électrique à travers une surface est proportionnel au nombre de lignes de champ qui traversent la surface.

$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta$ (champ uniforme)

$\Phi_E = \int_{surface} \vec{E} \cdot d\vec{A}$ (équation générale)



La valeur approximative de la constante diélectrique à 20 °C

Substance	k
Air	1,00059
Eau	80,4
Germanium	16
Glycérine	42,5
Méthanol	33,6
Mica	3 à 6
Papier	3
Porcelaine	6 à 8
PVC	3,4
Teflon	2,1
Verre	4 à 7

Chapitre II :

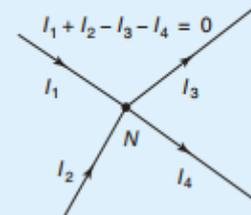
- Un circuit électrique est un ensemble de conducteurs reliés entre eux par des fils de jonction et dans lequel circule un courant électrique.
- Un dipôle est un composant électrique limité par deux bornes.
- Un nœud est un point commun à plus de deux dipôles.
- Une maille est une partie d'un circuit électrique formant un contour fermé.
- Une branche est une suite de dipôles entre deux nœuds consécutifs

Loi des nœuds

La somme des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent :

Selon la loi des nœuds

$$\sum_j I_j \text{ entrants} = \sum_j I_j \text{ sortants}$$

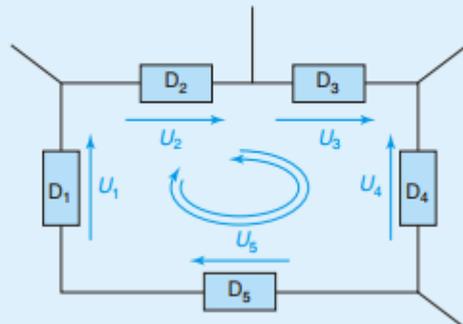


Loi des mailles

La somme des tensions aux bornes des dipôles d'une maille est nulle :

$$\sum_j E_j = \sum_j R_j \cdot I_j ; \quad \sum \epsilon_k U_k = 0.$$

- $\epsilon_k = +1$, si la flèche tension U_k est dans le sens du parcours ;
- $\epsilon_k = -1$, si la flèche tension U_k est dans le sens opposé à celui du parcours.



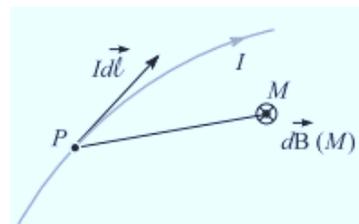
Association de	Schéma association et équivalent	condensateurs	Les symboles utilisés dans les circuits																
<i>n</i> dipôles de même nature en série		$R_{éq} = \sum_{k=1}^n R_k$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Composants</th> <th>Symbole</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Pile</td> <td> ϵ</td> </tr> <tr> <td>Résistance</td> <td> R</td> </tr> <tr> <td>Condensateur</td> <td> C</td> </tr> <tr> <td>Fil</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Interrupteur</td> <td> ouvert fermé</td> </tr> <tr> <td>Ampèremètre</td> <td></td> </tr> <tr> <td>Voltmètre</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Composants	Symbole	Pile	ϵ	Résistance	R	Condensateur	C	Fil		Interrupteur	ouvert fermé	Ampèremètre		Voltmètre	
Composants	Symbole																		
Pile	ϵ																		
Résistance	R																		
Condensateur	C																		
Fil																			
Interrupteur	ouvert fermé																		
Ampèremètre																			
Voltmètre																			
<i>n</i> dipôles de même nature en parallèle		$\frac{1}{R_{éq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$																	

Chapitre III :

- Le champ magnétique total en M est la somme de ces contributions pour tous les points P de la distribution :

Loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(M) = \oint_{P \in L} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l}(P) \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$



- Les lignes de champ sont circulaires et le sens du champ est donné par la règle de la main droite.

- le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul

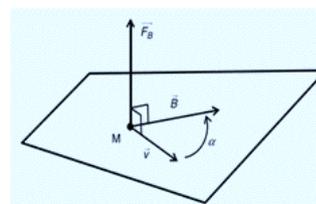
Flux du champ magnétique

$$\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = 0$$

- Le champ magnétique est logiquement à l'origine d'une nouvelle force qui agit sur toute particule chargée en mouvement. Son expression a été donnée par le physicien hollandais Lorentz :

Force de Lorentz

$$\vec{F}_m = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$



- Soit un circuit filiforme parcouru par une intensité I . Les porteurs de charges de ce circuit subissent la force exprimée au paragraphe précédent soit, compte tenu de la distribution linéique de charges envisagée ici :

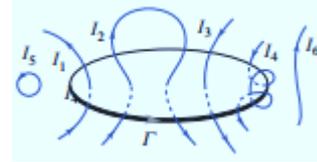
Force de Laplace

$$d\vec{F}(\vec{r}) = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B}(\vec{r})$$

- Le théorème d'Ampère relie la circulation du champ magnétique le long d'un contour au courant enlacé par ce contour

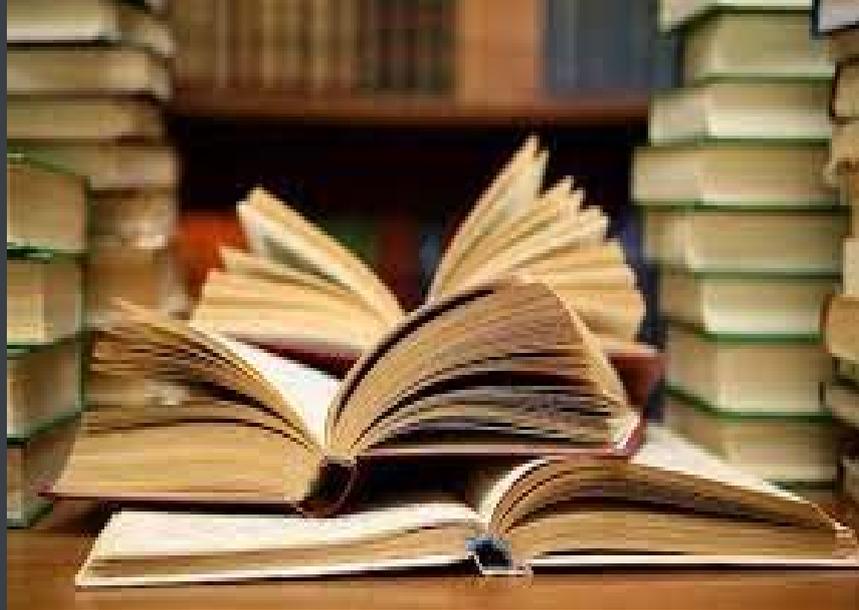
Théorème d'Ampère

$$\text{rot} \cdot \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}$$



Le tableau ci-dessous met en correspondance les propriétés de ces forces et des champs associés.

Force d'interaction entre deux particules Charges $\{q, Q\}$. Masses $\{m, M\}$	$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F}_g = -K \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r$
Forces électrostatique \vec{F}_e et gravitationnelle \vec{F}_g subies par des particules dans des champs \vec{E} et \vec{G}	$\vec{F}_e = q \vec{E}$	$\vec{F}_g = m \vec{G}$
Les champs électrostatique \vec{E} et gravitationnel \vec{G} dérivent de potentiels scalaires V et Φ_g	$\vec{E} = -\text{grad}V$	$\vec{G} = -\text{grad}\Phi_g$
\vec{E} et \vec{G} sont à circulation conservative	$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$	$\text{rot} \vec{G} = \vec{0}$
Forme locale du théorème de Gauss : ρ_e est la densité volumique de charge électrique et ρ la masse volumique	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$	$\text{div} \vec{G} = -4\pi K \rho$
Forme intégrale du théorème de Gauss : Q_{int} est la charge intérieure et M_{int} la masse intérieure à la surface de Gauss	$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oiint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi K M_{\text{int}}$
Relations entre énergies potentielles et potentiels	$E_p^e = qV + C^e$	$E_p^g = m\Phi_g + C^g$
Energies potentielles d'interaction entre deux particules. Charges $\{q, Q\}$. Masses $\{m, M\}$	$E_p^e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r} + C^e$	$E_p^g = -m \frac{KM}{r} + C^g$



Bibliographie

Bibliographie

1. B.Gendreau et C.Gripon ."*Electrocinétique Class prépa Tout le cours MPSI PCSI PTSI*" Dunod. Pages 150 (2006).
 2. R. Langet, "*Electromagnétisme Tous les exercices*". PCSI et MPSI Prépas. Nathan. Pages 106 (2007).
 3. C. Cappe, " *Electromagnétisme - Cours avec exemples concrets, QCM, exercices corrigés* " Dunod. Pages 240 (2019).
 4. J.M.Brebec T.Desmarais, M.Ménétrier, B.Noel, R.Noel, et C.Orsinaliti. "*Electronique : électrocinétique :H Prépa MPSI PCSI* ". Pages 322 (2003).
 5. J.L. Caubarrere, J Fourny, et H Ladjouze. "*Electricité, ondes, cours, exercices et travaux pratiques*". 1^{ère} année de Sciences Exactes et de la Technologie. 8^{ème} Edition, OPU. Pages 269 (2009).
 6. J.Bergua, J.L. Baudy, I.Pierron. "*Physique Exercices MP*". Licence 1^{ère} et 2^{ème} année. Hachette Supérieur Précis. Pages 322 (2003).
 7. J. Baliti. "*Electronique : électrocinétique : 1^{ère} année MPSI PCSI*". Université Sultan Moulay Slimane. Pages 39 (2018).
 8. J.M.Brebec T.Desmarais, M.Ménétrier, B.Noel, R.Noel, et C.Orsinaliti. "*Electromagnétisme HPrépa MPSI PCSI PTSI*" Pages 212 (2003).
 9. A. Fizazi. "*Electricité et magnétisme*". OPU, (2012).
 10. A.Terras, J. Cipriani, J. Bennaïm et N. Piccioli. "*Précis de physique et électricité appliquées en productique 1^{ère} et 2^{ème} année*". Breal. Pages 151 (2004).
 11. D. Sivoukhine, "*Cours de physique général, tome III électricité*" Union Soviétique, traduction Française, Edition Mir, (1987).
 12. M. Berlin, J.P. Faroux et J. Renault, "*Electromagnétisme 1, électrostatique*", Dunod, (1977).
 13. J.L. Queyrel, J. Mesplède, "*Précis de physique, électricité 2, cours, exercices résolus*", Bréal, (1985).
 14. A-E. Badel et F. Clausset"*Physique tout-en-un MPSI-PCSI-PTSI 1e année : Cours et exercices corrigés*"1538 Pages ·(2008)
-

15. F. clausset et A.M Clausset, « *Physique MP-PT : J'évalue en 500 questions mon niveau* ». Dunod. Pages 363 (2012).
 16. E. Amzallag, J. Cipriani, J. Bennaim et N. Piccioli. "*La physique du Fac, électrostatique et électrocinétique*". 2^{ème} Edition, Edi-Science, (2006).
 17. Y. Granjon. "*Electricité : Exercices et méthodes*". Dunod. Pages 303 (2017).
 18. M.N.Sanz, A.E. Badel, et F Clausset. "*Physique tout-en-un*". 1^{ère} année MPSI PCSI et PTSI. 3^{ème} Edition, Pages 1538 (2002)
 19. M.henry. "*QCM-Question*". 1^{ère} année, Dunod Pages 111 (1993)
 20. A. Mustapha. "*Polycopié de cours physique 2*". USTO-MB. Pages 69 (2015).
 21. N. Benhalima. "*Polycopié de cours physique 2*". Université Dr. Moulay Tahar de Saida. Pages 158 (2020).
-



annexe



A N n n e x e

Décomposition en facteurs :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Théorème de Pythagore et trigonométries :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

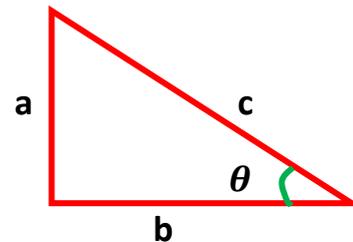
$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$

$$\csc \theta = \frac{c}{a}$$

$$\sec \theta = \frac{c}{b}$$

$$\cot \theta = \frac{b}{a}$$



Identités trigonométriques :

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$$

$$\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\sin(2A) = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\sin(-A) = -\sin(A)$$

$$\cos(-A) = \cos(A)$$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos(2A)}{2}$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos(2A)}{2}$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Propriétés des exposants :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a)^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$(a)^0 = 1$$

Propriétés des logarithmes :

$$\log_a(MN) = \log_a(M) + \log_a(N)$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a(M) - \log_a(N)$$

$$\log_a(M^k) = k \log_a(M)$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\ln A = B \Leftrightarrow e^B = A$$

$$e^{\ln A} = A$$

$$\ln e^B = B$$

Formules de dérivation :

Fonction	Dérivée
K (constante)	0
x, (identité)	1
$x^a \forall a \in \mathcal{R}$	ax^{a-1}
$kf(x)$	$kf'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$(f(x))^r$	$r(f(x))^{r-1} f'(x)$
$g(f(x))$	$g'(f(x)) \cdot f'(x)$
$\sin f(x)$	$(\cos f(x)) f'(x)$
$\cos f(x)$	$(-\sin f(x)) f'(x)$
$\tan f(x)$	$(\sec^2 f(x)) f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\log_a f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$\text{Arc sin } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$
$\text{Arc cos } f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$
$\text{Arc tan } f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f(x)]^2}}$

Formules d'intégration :

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad \forall a \in \mathcal{R} \text{ et } a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \text{ou } a > 0 \text{ et } a \neq 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{x+a}{x-a} \right] + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x + c$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2-x^2} + a \cdot \ln \left[\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} \right] + c$$

Intégration, par partie :

$$\int x dy = x \cdot y - \int y \cdot dx$$

Expression contenant ln

$$\int \ln^2 x dx = x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + 2x + c$$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int x \cdot \ln x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^n \cdot \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \left(\ln x - \frac{1}{x+1} \right) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Expressions trigonométriques

$$\int \cos x dx = \sin(x) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan(x) + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot(x) + c$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + x \frac{\sin(ax)}{a} + c$$

$$\int x \cos^2 2a dx = \frac{x^2}{4} + \frac{\cos(2ax)}{8a^2} + x \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int x \sin^2 2a dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2} - x \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

Formules d'approximation :

$$(1 \pm \delta)^2 = 1 \pm 2\delta$$

$$(1 \pm \delta)^n = 1 \pm n\delta$$

$$\sqrt{1 + \delta} = 1 + \frac{1}{2}\delta$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \delta}} = 1 + \frac{1}{2}\delta$$

$$e^\delta = 1 + \delta$$

$$\ln(1 + \delta) = \delta$$

Table de l'alphabet grec, des lettres et des symboles

Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	Alpha
β	B	Beta
γ	Γ	Gamma
δ	Δ	Delta
ε	E	Epsilon
λ	Λ	Lambda
π	Π	Pi
ρ	P	Rho
σ	Σ	Sigma
τ	T	Tau
ϕ	Φ	Phi