**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ MUSTAPHA STAMBOULI DE MASCARA**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

# Polycopié de Cours

# *ALGÈBRE 3*

Présenté par :

**KADI FATIMA ZOHRA**

*Ce cours est destiné aux étudiants de 2 année spécialité mathématique*

**Algérie 2023**

# TABLE DES MATIÈRES

**Avant-propos** **4**

**1 Applications linéaires et matrices** **5**
- 1.1 Application linéaire . . . 5
- 1.2 Image et noyau . . . 7
- 1.3 Matrices associées aux applications linéaires . . . 9
- 1.4 Changement de base . . . 11
  - 1.4.1 Matrice de passage . . . 11
- 1.5 Changement de base pour un vecteur . . . 13
- 1.6 Changement de base pour une application linéaire . . . 14
- Exercices . . . 17

**2 Réduction des endomorphismes** **19**
- 2.1 Les éléments propres . . . 19
- 2.2 Polynôme caractéristique . . . 22
- 2.3 Diagonalisabilité . . . 26
- 2.4 Application de la diagonalisation . . . 31
  - 2.4.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée . . . 31
  - 2.4.2 Suites récurrentes linéaires simultanées du $1^{er}$ ordre à coefficients constants . . . 33
  - 2.4.3 Suites recurrentes linéaires à coefficients constants . . . 35
- Exercices . . . 38
- 2.5 Trigonalisation . . . 42
- 2.6 Polynômes annulateurs, Théorème de Cayley-Hamilton . . . 45

2.6.1 Lemme fondamental . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49
2.7 Recherche de polynôme minimal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
2.8 Réduction en blocs triangulaires . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 57
2.9 La réduction de Jordan . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
2.9.1 Endomorphisme nilpotent . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
2.9.2 Puissance d'une matrice trigonalisable . . . . . . . . . . . . . . . . 69
Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 76

**3 Exponentielle d'une matrice** **82**
3.1 Exponentielle d'une matrice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
3.1.1 Cas d'une matrice diagonalisable . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
3.1.2 Cas d'une matrice nilpotente . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
3.1.3 Cas d'une matrice triangulaire avec une seule valeur propre . . . 85
3.1.4 Cas d'une matrice triangulaire . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86
3.2 Dérivée . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87
3.3 Résolution d'un système différentiel homogène . . . . . . . . . . . . . . . 88
3.3.1 Cas d'une matrice diagonalisable . . . . . . . . . . . . . . . . . . 89
3.3.2 Cas d'une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ . . . . . 91
3.3.3 Cas d'une matrice trigonalisable non diagonalisable . . . . . . . 93
Exercices . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97

**Table des notations** **98**

**Références** **99**

# AVANT-PROPOS

En algèbre linéaire, en dimension finie, tout endomorphisme est représentable par une matrice, cette réprésentation n'est pas unique puisqu'elle dépend du choix de la base, les matrices qui représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, sont dites semblables. La réduction d'une matrice carrée ou un endomorphisme en dimension finie consiste à chercher une matrice semblable la plus simple possible c'est à dire une matrice qui contient le plus grand nombre possible d'éléments nuls, dans le meilleur des cas, une matrice diagonale (dont tous les éléments non diagonaux sont nuls il s'agit alors d'une diagonalisation), sinon une matrice triangulaire supérieure (dont tous les éléments sous diagonaux sont nuls il s'agit alors de trigonalisation). La réduction d'une matrice (diagonalisation ou trigonalisation) facilite le calcul des puissances de cette matrice ainsi que son exponentielle.
Ce cours d'Algèbre 3 est destiné aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques qui ont déjà étudié l'algèbre linéaire en première année. Il contient trois chapitres : dans le premier chapitre on donne un petit rappel sur les applications linéaires et on s'intéresse à la matrice de passage (changement de bases pour les endomorphismes). Le second chapitre est consacré à la réduction, plus précisement la diagonalisation et la trigonalisation en particulier Jordanisation des matrices, de plus on donne quelque applications de la réduction dans les calculs de la puissances d'une matrice.
Dans le troisième chapitre, on donne la definition de l'exponentielle d'une matrice et on le calcul en utilisant la réduction.

# CHAPITRE 1

# APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Les applications linéaires sont des applications entre des espaces vectoriels qui conservent la structure d'espace vectoriel.

## 1.1 Application linéaire

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif. En pratique : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Définition 1.1.1.**

1. *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f$ une application de $E$ dans $F$. On dit que $f$ est **linéaire** si :*
   *(a)* $f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \forall u, v \in E,$
   *(b)* $f(\lambda u) = \lambda f(u) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E.$

   *L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est noté $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ ou plus simplement $\mathfrak{L}(E,F)$.*
2. *Une application linéaire de $E$ dans $E$ est dite **endomorphisme de E**. L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $E$ est noté $End(E)$, $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(E)$ ou $\mathfrak{L}(E)$.*

**Remarque 1.1.1.** *Pour toute $f \in \mathfrak{L}(E,F)$; $\quad f(0_E) = 0_F$. En effet, on a*

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E).$$

*Une autre méthode pour trouver le resultat : on remplace $\lambda$ par $0_{\mathbb{K}}$ dans $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.*

**Définition 1.1.2.** *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.*

1. *On dit que $f$ est un* ***isomorphisme*** *si $f$ est bijective.*
2. *Un isomorphisme de $E$ dans $E$ est dit* ***automorphisme de E****.*

**Exemple 1.1.1.**

1. *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, l'application*

   $\begin{array}{rccc} f: & E & \to & F \\ & v & \to & 0 \end{array}$ *est une application linéaire dite* ***application nulle****.*

2. *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'application*

$$\begin{array}{rccc} id_E: & E & \to & E \\ & v & \to & v \end{array}$$

   *est un endomorphisme de $E$ dit* ***identité*** *sur $E$ ou application* ***identique*** *de $E$. Plus précisément, $id_E$ est un* ***automorphisme*** *de $E$.*

3. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \to & (x+y, 2x, 2y) \end{array}$$

   *est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.*
   *On a, en effet, si $v = (x, y), w = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{array}{rcl} f(v+w) & = & f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') \\ & = & ((x+x')+(y+y'), 2(x+x'), 2(y+y')) \\ & = & ((x+y)+(x'+y'), 2x+2x', 2y+2y') \\ & = & (x+y, 2x, 2y) + (x'+y', 2x', 2y') = f(v)+f(w), \\ f(\lambda v) & = & f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x, 2\lambda y) \\ & = & \lambda(x+y, 2x, 2y) = \lambda f(v). \end{array}$$

4. *Soient $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ les espaces vectoriels des applications $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ respectivement continues et à dérivée continue. L'application*

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \\ & f & \to & f' \end{array}$$

*est une application linéaire, puisque, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ on a :*

$$\begin{aligned} D(f+g) &= (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g), \\ D(\lambda f) &= (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda D(f). \end{aligned}$$

**Définition 1.1.3.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle **forme linéaire sur E** toute application linéaire $f$ de $E$ dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur $E$ est noté $E^*$. $E^*$ est appelé le **dual** de $E$.*

**Exemple 1.1.1.** *L'application*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \to & 2x+z \end{array}$$

*est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.*

**Proposition 1.1.1.** *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application. $f$ est linéaire si et seulement si :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (v,w) \in E^2; \quad f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w). \tag{1.1}$$

## 1.2 Image et noyau

**Proposition 1.2.1.** *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.*

1. *Pour tout sous espace vectoriel $F'$ de $F$, **l'image réciproque***

$$f^{-1}(F') = \{v \in E / f(v) \in F'\} \subset E$$

   *est un sous espace vectoriel de $E$.*

2. *Pour tout sous espace vectoriel $E'$ de $E$, **l'image directe***

$$f(E') = \{x \in F / \exists v \in E',\, x = f(v)\} \subset F$$

   *est un sous espace vectoriel de $F$.*

**Définition 1.2.1.** *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On appelle **noyau** de $f$, et on note $Kerf$ le sous espace vectoriel de $E$ définie par :*

$$Kerf = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in E / f(v) = 0_F\}.$$

*On appelle* ***image*** *de $f$, et on note $Imf$, le sous espace vectoriel de $F$ définie par*

$$Imf = f(E) = \{x \in F/\exists v \in E,\, x = f(v)\}.$$

**Exemple 1.2.1.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Le noyau de l'application nulle est $E$.*
2. *Le noyau de l'application identité $id_E$ sur $E$ est $\{0\}$.*

**Proposition 1.2.2.** *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. $f$ est injective si et seulement si $Kerf = \{0\}$.*

**Définition 1.2.2.** *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On appelle* ***rang de f****, et on note $rgf$, l'entier naturel défini par :*

$$rgf = dim(Imf).$$

**Proposition 1.2.3.** *Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On a :*

$$dim(E) = rgf + dim(Kerf). \tag{1.2}$$

**Remarque 1.2.1.** *Si $dimE = dimF = n$ alors $f$ est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective.*
*En effet, il est clair que si $f$ est bijective alors elle est injective et surjective.*
Reciproquement :

1. *supposons que $f$ soit injective, d'après la Proposition 1.2.2, $Kerf = \{0\}$ ce qui implique que $dimKerf = 0$. En utilisant la formule (1.2) on trouve*

$$n = dimE = rgf$$

*alors $Imf = F$ d'où $f$ est surjective donc bijective.*

2. *supposons que $f$ soit surjective alors $Imf = F$, d'après (1.2)*

$$rgf = n = dimE$$

*ce qui implique que $dimKerf = 0$ on conclut que $Kerf = \{0\}$ alors $f$ est injective donc bijective.*

## 1.3 Matrices associées aux applications linéaires

Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension $n$ et $p$ respectivement et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Choisissons une base $B_E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $E$ et $B_F = \{v_1, \ldots, v_p\}$ de $F$. Les images par $f$ des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ se décomposent sur la base $\{v_1, \ldots, v_p\}$ :

$$\begin{array}{rcl} f(u_1) & = & a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{p1}v_p \\ f(u_2) & = & a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{p2}v_p \\ \vdots & & \\ f(u_n) & = & a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{pn}v_p \end{array}$$

**Définition 1.3.1.** *On appelle matrice de $f$ dans les bases $B_E$, $B_F$ la matrice notée $M_{B_E,B_F}(f)$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ dans la base $B_F$ :*

$$M_{B_E,B_F}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(u_1) & f(u_2) & \ldots & f(u_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_p \end{array} \end{array}$$

**Remarque 1.3.1.** *Il clair que la matrice associée à $f$ dépend du choix des bases de $E$ et $F$.*
*Dans le cas où $f$ est un endomorphisme, on peut choisir la même base dans $E$ considéré comme espace de départ et d'arrivée. Dans ce cas, on notera $M_{B_E}(f)$ au lieu de $M_{B_E,B_E}(f)$.*

**Exemple 1.3.1.** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension $n$ et $B$ une base dans $E$.*

1. *La matrice associée à l'application nulle est la matrice nulle :*

$$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *La matrice associée à l'application identité $id_E$ sur E, est la matrice unité :*

$$M_{B_E}(id_E) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

**Exercice 1.3.1.** *Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, on considère l'application linéaire "décalage" suivante :*

$$\begin{array}{rccc} dec: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P(X) & \to & P(X+1) \end{array}$$

1. *Écrire la matrice $A = M_{B,B}(dec)$ avec $B = \{1, X, X^2, X^3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.*
2. *Déterminer Ker (dec).*

**Solution.** On a

$$\begin{aligned} dec(1) &= 1 \\ dec(X) &= X + 1 \\ dec(X^2) &= (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1 \\ dec(X^3) &= (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \end{aligned}$$

d'où la matrice de *dec* est :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} dec(1) & dec(X) & dec(X^2) & dec(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} .$$

**Détèrminons** $Ker(dec)$ **:**
Soit $Q(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ un vecteur de $\mathbb{R}_3[X]$.
Détèrminons l'image de $Q(X)$ par l'application dec :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ a_2 + 3a_3 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

alors

$$dec(Q(X)) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + (a_1 + 2a_2 + 3a_3)X + (a_2 + 3a_3)X^2 + a_3X^3$$

$$\begin{aligned} Ker(dec) &= \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]/dec(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3) = 0\} \\ &= \Big\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]/ \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \Big\} = \{0\}. \end{aligned}$$

On conclut que l'application dec est injective donc elle est bijective.

## 1.4 Changement de base

### 1.4.1 Matrice de passage

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ et $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de $E$. Les vecteurs $e'_i$ s'écrivent comme combinaisons linéaires des vecteurs $e_i$ :

$$\begin{aligned} e'_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n \\ e'_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n \\ &\vdots \\ e'_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n \end{aligned}$$

**Définition 1.4.1.** *On appelle matrice de passage de la base $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ à la base $B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ la matrice noté $Pass(B, B')$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de $B'$ exprimés sur la base $B$.*

$$Pass(B, B') = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

**Exemple 1.4.1.** *Soient $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B' = \{e'_1 = (1, 2), e'_2 = (3, 4)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$. Les vecteures $e'_1$ et $e'_2$ sont des* *combinaisons linéaires de $e_1$ et $e_2$ :*

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + 2e_2 \\ e'_2 &= 3e_1 + 4e_1 \end{aligned}$$

*alors la matrice de passage de $B$ à $B'$ est*

$$Pass(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Remarquons que :**

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^2}(e'_1) &= e'_1 = e_1 + 2e_2 \\ id_{\mathbb{R}^2}(e'_2) &= e'_2 = 3e_1 + 4e_1 \end{aligned}$$

*alors*

$$Pass(B, B') = M_{B',B}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{array}{cc} id_{\mathbb{R}^2}(e'_1) & id_{\mathbb{R}^2}(e'_2) \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}\right)} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$$

**Proposition 1.4.1.** *Pour toutes bases $B, B'$ de $E$ : $Pass(B, B') = M_{B',B}(id_E)$.*

**Proposition 1.4.2.** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $B, B', B''$ des bases de E. On a :*

1. *$Pass(B, B'') = Pass(B, B').Pass(B', B'')$.*
2. *$Pass(B, B) = I_n$.*
3. *$Pass(B, B')$ est inversible et $(Pass(B, B'))^{-1} = Pass(B', B)$.*

*Démonstration.*

1. Soient $B, B', B''$ des bases de E. On a

$$\begin{aligned} Pass(B, B') &= M_{B'',B}(id_E) = M_{B',B}(id_E)M_{B'',B'}(id_E) \\ &= Pass(B, B').Pass(B', B'') \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{id_E} & E & \xrightarrow{id_E} & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B'' & & B' & & B \end{array}$$

2. Tout vecteur $e_j$ de $B$, $j \in \{1, \cdots, n\}$, est une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \cdots, e_n$,

$$e_j = 0e_1 + 0e_2 + \cdots + 0e_{j-1} + 1e_j + 0e_{j+1} + \cdots + 0e_n$$

alors la matrice

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

est la matrice de passage de $B$ à $B$. Il clair que $Pass(B, B) = I_n$.

3. $Pass(B, B').Pass(B', B) = Pass(B, B) = I_n$. On conclut que $Pass(B, B')$ est inversible et $(Pass(B, B'))^{-1} = Pass(B', B)$.

□

**Remarque 1.4.1.**

1. *Toute matrice de passage est inversible.*
2. *Toute matrice inversible peut être considérée comme matrice de passage.*

## 1.5 Changement de base pour un vecteur

Soient $B = \{e_1, \cdots, e_n\}, B' = \{e'_1, \cdots, e'_n\}$ deux bases de E et $x \in E$, de composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $B$ et $(x'_1, \cdots, x'_n)$ dans $B'$. On détermine les relations entre $x_i$ et $x'_i$ à l'aide de la matrice de passage $Pass(B, B')$.

Notons $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_B(x)$, $X' := \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M_{B'}(x)$ et $P = Pass(B, B')$.

Alors

$$PX' = M_{B',B}(id_E)M_{B'}(x) = M_B(id_E(x)) = X.$$

**Proposition 1.5.1.** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $B, B'$ deux bases de $E$ et $x \in E$, avec $P = Pass(B, B')$, $X = M_B(x)$ et $X' = M_{B'}(x)$. Alors*

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X.$$

**Exemple 1.5.1.** *Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{1, X, X^2\}$ et $B' = \{1, 1 + X, 1 - X^2\}$ deux bases de $E$ alors*

$$P = Pass(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Soit $Q$ un vecteur de $\mathbb{R}_2[X]$, en notant $a_0, a_1, a_2$ les composantes de $Q$ dans la base $B'$ c'est à dire :* $X := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = M_{B'}(Q)$, *alors les composantes de $Q$ dans $B$ est*

$$M_B(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 \\ a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$$

## 1.6 Changement de base pour une application linéaire

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension $n$ et $m$ respectivement

**Proposition 1.6.1.** *Soient $f \in \mathfrak{L}(E, F)$, $B, B'$ deux bases de $E$ et $C, C'$ deux bases de $F$. Notons*

$$A = M_{B,C}(f), \;\; A' = M_{B',C'}, \;\; P = Pass(B, B'), \;\; Q = Pass(C, C').$$

*On a alors*

$$A' = Q^{-1}.A.P.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{array}{rcl} A' & = & M_{B',C'}(f) = M_{B',C'}(id_F \circ f \circ id_E) \\ & = & M_{CC'}(id_F) M_{BC}(f) M_{B'B}(id_E) \\ & = & Pass(C'C).A.Pass(B, B') \\ & = & Q^{-1}AP \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \overset{id_E}{\underset{\overset{Pass(B,B')}{\rightsquigarrow}}{\rightarrow}} & E & \overset{f}{\underset{\overset{A}{\rightsquigarrow}}{\rightarrow}} & F & \overset{id_F}{\underset{\overset{Pass(C',C)}{\rightsquigarrow}}{\rightarrow}} & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & & B & & C & & C' \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A' & = & M_{B',C'}(f) = M_{B',C'}(id_F \circ f \circ id_E) \\ & = & M_{CC'}(id_F) M_{BC}(f) M_{B'B}(id_E) \\ & = & Pass(C'C).A.Pass(B, B') \\ & = & Q^{-1}AP \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} E & \overset{id_E}{\underset{\overset{Pass(B,B')}{\rightsquigarrow}}{\rightarrow}} & E & \overset{f}{\underset{\overset{A}{\rightsquigarrow}}{\rightarrow}} & F & \overset{id_F}{\underset{\overset{Pass(C',C)}{\rightsquigarrow}}{\rightarrow}} & F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B' & & B & & C & & C' \end{array}$$

$\square$

Le cas des endomorphismes est particulierement important, en particulier l'orsqu'on prend la même base dans l'espace de depart et d'arrivée. Dans ce cas

**Corollaire 1.6.1.** *Soit $f \in End(E)$ et $B, B'$ deux bases de E. Notons :*

$$A = M_B(f), \qquad A' = M_{B'}(f) \text{ et } P = Pass(B, B').$$

*Alors :*

$$A' = P^{-1}AP.$$

**Définition 1.6.1.** *Deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables, et on note $A \sim A'$, s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$A' = P^{-1}AP.$$

**Remarque 1.6.1.** *Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme en des bases différentes.*

**Exemple 1.6.1.** *Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est dans la base canonique $B^c = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ est représenté par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Déterminons la matrice $A'$ qui repésente $f$ dans la base $B' = \{e_1 = (1,1,0), e_2 = (1,0,1), e_3 = (0,1,1)\}$. On a*

$$A' = P^{-1}AP \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$P^{-1} = Pass(B', B^c) =?$
*On a*

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_3 \\ e'_3 = e_2 + e_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_2 - e'_3) \\ e_2 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3 - e'_2) \\ e_3 = \frac{1}{2}(e'_2 + e'_3 - e'_1) \end{cases}, \text{ alors } P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

*donc la matrice de $f$ dans $B'$ est*

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Les matrices*

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

*sont semblables.*

# Exercices

**Exercice 1.6.1.**

1. *Soient $E$ un $K$-espace vectoriel et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$Kerf \subset Kerf^2 \subset Kerf^3 \subset \cdots Kerf^p.$$

$$Imf \supset Imf^2 \supset Imf^3 \supset \cdots Imf^p.$$

2. *On suppose $E$ de dimension finie. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*
   (a) $Kerf = Kerf^2$
   (b) $Imf = Imf^2$
   (c) $E = Imf \oplus Kerf$.

**Exercice 1.6.2.** *Montrer que les applications suivantes sont linéaires :*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \rightarrow & x+y-3z \end{array} \quad ; \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \rightarrow & (x+y, y+z) \end{array}$$

$$der: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \rightarrow & P'(X) \end{array} \quad ; \quad dec: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \rightarrow & P(X+1) \end{array}$$

- ✓ *Détèrminer l'image et le noyau de ces applications.*
- ✓ *Sont elles bijectives ?*
- ✓ *Détèrminer les matrices associées à ces applications dans les bases canoniques.*

**Exercice 1.6.3.** *Détérminer les applications linéaires présentées, dans les bases canoniques, par les matrices suivantes :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 13 & 26 & 13 & 26 \\ 9 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 21 & 7 & 14 \\ 2 & 24 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1.6.4.** *Soit $V_1 = (\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}), V_2 = (1, \frac{3}{2}, 1), V_3 = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ :*

1. *Montrer que $B_1 = \{V_1, V_2, V_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver la matrice de passage $P$ de la base canonique à $B_1$.*

2. *Calculer* $P^{-1}$.
3. *Soit* $W$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^3$ *telle que les coordonnées de* $W$ *dans la base canonique sont :* $2, \frac{1}{2}, 3$. *Ecrire* $W$ *dans* $B_1$.

**Exercice 1.6.5.** *Soit* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n$. *Deux matrices carrées* $A$,$B$ *d'ordre* $n$ *sont dites semblables et on note* $A \sim B$ *s'il existe une matrice* $P$ *de* $GL_n(\mathbb{K})$ *telle que :* $B = P^{-1}AP$.
*Montrer que* $\sim$ *est une relation d'équivalence dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 1.6.6.** *On considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (2x+y, x+z, y-z) \end{array}$$

1. *Montrer que* $f$ *est une application linéaire.*
2. *Déterminer le noyau de* $f$ *et Imf.* $f$ *est elle bijective*
3. *Déterminer la matrice de* $f$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Déterminer la matrice de* $f$ *dans la base* $B = \{u_1 = (-1,1,1), u_2 = (1,-1,1), u_3 = (1,1,-1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.

# CHAPITRE 2

# RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

## 2.1 Les éléments propres

**Définition 2.1.1.** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ $(n \geq 1)$ et $f$ un endomorphisme de $E$ $(f \in End(E))$.*

1. *Un scalaire $\lambda$ de $\mathbb{K}$ est dit* ***valeur propre*** *de $f$ si il existe un vecteur $v$ de $E$ non nul tel que*
$$f(v) = \lambda v.$$
*$v$ est dit vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$*
2. *Un vecteur $v$ de $E - \{0\}$ est dit* ***vecteur propre*** *de $f$ si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que*
$$f(v) = \lambda v.$$
*On appelle spectre de $f$, et on note $Sp_{\mathbb{K}}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de $f$.*
3. *Les valeurs propres et les vecteurs propres sont globalement appellés* ***éléments propres****.*

**Remarque 2.1.1.**

1. *Les vecteurs propres sont non nuls par Definition 2.1.1, la valeur propre peut être nulle, les vecteurs (non nuls) de Kerf sont les vecteurs propres associés à $\lambda = 0$.*
2. *Si $v$ est un vecteur propre associé à $\lambda$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, $\alpha v$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.*

*En effet :*

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v).$$

*D'après la remarque 2 la droite vectorielle $D$ engendré par un vecteur propre est invariant par $f$, c'est à dire : $f(D) \subset D$.*

**Exemple 2.1.1.**

1. *Soit $E$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*
   (a) *L'endomorphisme nul n'a qu'une valeur propre $\lambda = 0$.*
   (b) *L'application identité $id_E$ sur $E$ n'a qu'une valeur propre $\lambda = 1$.*
2. *On définit, sur $E = \mathbb{K}^3$, l'endomorphisme $f$ par*

$$f(x, y, z) = (x + 2y, z + 2x, y + 2z).$$

*Le vecteur $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre de $f$. En effet :*

$$f(1, 1, 1) = (3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$$

*alors $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.*

**Proposition 2.1.1.** *Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a*

$$\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) \Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\} \Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ non injective.}$$

*Démonstration.* Soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $1 \Longrightarrow 2$
  Si $\lambda$ est un vecteur propre de $f$ alors il existe un vecteur $x$ non nul de $E$ tel que $f(x) = \lambda x$ d'où $(f - \lambda id_E)(x) = 0$, c'est à dire que $x \in Ker(f - \lambda id_E)$ donc $Ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\}$.
- $2 \Longrightarrow 1$
  Si $Ker(f - \lambda id_E) \neq \{0\}$ alors il existe un vecteur $x$ non nul de $E$ tel que $x \in Ker(f - \lambda id_E)$, d'où $(f - \lambda id_E)(x) = 0$ donc $f(x) = \lambda x$ c'est à dire que $x$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.
- D'après la Proposition 1.2.2 on a l'quivalence entre 2 et 3.

**Méthode 2 :**

$$\begin{aligned}
\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) &\Leftrightarrow \exists v \in E - \{0\}; \quad f(v) = \lambda v \\
&\Leftrightarrow \exists v \in E - \{0\}; \quad f(v) - \lambda v = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists v \in E - \{0\}; \quad (f - \lambda Id_E)(v) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists v \in E - \{0\}; \quad v \in Ker(f - \lambda Id_E) \\
&\Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ non injective.}
\end{aligned}$$

□

**Définition 2.1.2.** *(Proposition)*
*Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ ($n \geq 1$). Pour toute valeur propre $\lambda$ de $f$, le sous espace vectoriel $Ker(f - \lambda Id_E)$ est formé de vecteurs propres associé à la valeur propre $\lambda$ et du vecteur nul.*
*Le sous espace vectoriel $Ker(f - \lambda Id_E)$ est appelé le sous espace propre de $f$ associé à $\lambda$ et noté $E_\lambda$.*

**Proposition 2.1.2.** *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des scalaires deux à deux distincts. Les espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.*

*Démonstration.* Par récurrence sur p.
Pour $p = 1$ il y a rien à demontrer.
Supposons que $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe et montrons que $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_{p+1}}$ sont aussi en somme directe. Il sagit de demontrer que si $x \in (E_{\lambda_1} + \ldots + E_{\lambda_p}) \cap E_{\lambda_{p+1}}$ alors $x = 0$. Soit

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + \ldots + x_p \quad \text{avec } x_k \in E_{\lambda_k} \\
f(x) &= \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

D'autre part

$$f(x) = \lambda_{p+1} x = \lambda_{p+1} x_1 + \ldots + \lambda_{p+1} x_p. \tag{2.2}$$

En faisant la différence (2.2)-(2.1) on obtient :

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_{p+1}) x_1 + \ldots + (\lambda_p - \lambda_{p+1}) x_p.$$

Or $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe, donc :$(\lambda_k - \lambda_{p+1}) x_k = 0$ pour $k = 1, \ldots, p$, comme les $\lambda_i$ sont deux à deux distincts alors pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $x_k = 0$ donc $x = 0$. □

## 2.2 Polynôme caractéristique

Dans tout ce qui suit $E$ designe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \geq 1$)

**Proposition 2.2.1.** *Soit $f \in End(f)$. L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda & \rightarrow & det(f - \lambda Id_E) \end{array}$$

*est un polynôme, appelé polynôme caractéristique de $f$, et noté $\chi_f$.*

*Démonstration.* Soient B une base de $E$ et $M_B(f) = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Il clair, par développement du déterminant que l'application

$$\lambda \rightarrow det(f - \lambda d_E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

est un polynôme de degré n. □

**Exemple 2.2.1.** *Soit $f$ l'endomorphisme sur $\mathbb{K}^3$ defini par :*

$$f(x, y, z) = (2x + y, z, 2y - x) \qquad \textit{pour tout } (x, y, z) \in \mathbb{K}^3.$$

*La matrice de $f$ dans la base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ est*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

*Le polynôme caractéristique de $f$ est donné par*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}; \qquad \chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 2).$$

**Proposition 2.2.2.** *Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique c'est à dire*

$$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad A \sim B \Rightarrow \chi_A = \chi_B.$$

*Autrement dit : le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $f$ ne dépend que de $f$ et non du choix de la base.*

*Démonstration.* Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telle que $A \sim B$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.
On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) &= det(B - \lambda I_n) = det(P^{-1}AP - \lambda I_n)\\ &= det[P^{-1}(A - \lambda I_n)P] = det(P^{-1})det(A - \lambda I_n)det(P)\\ &= \chi_A(\lambda).\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.2.1.** *La réciproque de la Proposition 2.2.2 est fausse (si $n \geq 2$), pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $A \nsim B$ et $\chi_A = \chi_B = X^2$.*

**Proposition 2.2.3.** *Pour tout $f \in End(E)$, on a*

$$Sp_{\mathbb{K}}(f) = \chi_f^{-1}(\{0\}).$$

*Autrement dit : les valeurs propres d'un endomorphisme sont les zéros du polynôme caractéristique de cet endomorphisme.*

*Démonstration.* Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f) &\Leftrightarrow Ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0\}\\ &\Leftrightarrow (f - \lambda Id_E) \text{ non injective}\\ &\Leftrightarrow det(f - \lambda Id_E) = 0\\ &\Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.2.1.** *Le spectre d'un endomorphisme de $E$ ($dimE = n$) est une partie finie de $\mathbb{K}$, ayant au plus $n$ éléments.*

**Exemple 2.2.2.** *Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ représenté dans une base de $\mathbb{K}^3$ par la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Calculons les valeurs propres de $f$ :**
*Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a*

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 2 \\ -1 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & -4 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2+\lambda)(\lambda-4)$$

*alors $Sp_{\mathbb{K}}(f) = \{-2, 2, 4\}$.*

- **Calculons les vecteurs propres de $f$ :**
- **Pour $\lambda = -2$ :**

$$\begin{aligned} Soit\ u = (x,y,z) \in E_{-2} &\Leftrightarrow Ker(f+2Id_E)(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y+2z=0 \\ -x+4y-3z=0 \\ -4y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2y \\ x=-2y \end{cases}, \end{aligned}$$

*on peut choisir $y = 1$, on obtient $u = (-2, 1, 2)$.*

- **Pour $\lambda = 2$ :**

$$\begin{aligned} Soit\ v = (x,y,z) \in E_{2} &\Leftrightarrow Ker(f-2Id_E)(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4y+2z=0 \\ -x-3z=0 \\ -4y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}z \\ x=-3z \end{cases}, \end{aligned}$$

*on peut choisir $z = -1$ on obtient $(3, \frac{1}{2}, -1)$.*
- **Pour $\lambda = 4$ :**

$$\begin{aligned} Soit\ w = (x,y,z) \in E_{4} &\Leftrightarrow Ker(f-4Id_E)(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4y+2z=0 \\ -x-2y-3z=0 \\ -4y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=-z \end{cases} \end{aligned}$$

*on peut choisir $z = -1$ on obtient $w = (1, 1, -1)$.*

*Les sous espaces propres sont*

- $E_{-2} = \{y(-2, 1, 2)/y \in \mathbb{K}\}$.
- $E_2 = \{\alpha(3, \frac{1}{2}, -1)/\alpha \in \mathbb{K}\}$.

- $E_4 = \{\alpha(1, 1, -1)/\alpha \in \mathbb{K}\}$.

**Définition 2.2.1.** *Soient $f \in End(E)$, $\lambda_0$ une valeur propre de $f$. On appelle ordre de multiplicité de $\lambda_0$ l'ordre de multiplicité de $\lambda_0$ en tant que zero du polynôme caractéristique.*

**Exemple 2.2.3.** *Soit $f \in End(\mathbb{K}^6)$ avec $\chi_f(X) = X(X-1)^2(X+2)^3$.*
*Les valeurs propres de $f$ sont : 0,1,-2.*

- *L'ordre de multiplicité de 0 est 1 (racine simple).*
- *L'ordre de multiplicité de 1 est 2 (racine double).*
- *L'ordre de multiplicité de -2 est 3.*

**Remarque 2.2.2.**

1. *Soit $f \in End(E)$. Si 0 est une valeur propre de $f$ alors $Ker f \neq \{0\}$ donc $f$ non injective.*
2. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\alpha_i$ est l'ordre de multiplicité de $\lambda_i$. Alors $det(A) = \chi_A(0) = \prod\limits_{i=1}^{k} \lambda_i^{\alpha_i}$.*

**Proposition 2.2.4.** *Soient $f \in End(E)$, $\lambda_0 \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$ et $\alpha_0$ l'ordre de multiplicité de $\lambda_0$. On a alors*

$$1 \leq dim E_{\lambda_0} \leq \alpha_0.$$

*Démonstration.*

- Puisque par definition $E_{\lambda_0} = Ker(f - \lambda_0 Id_E) \neq \{0\}$ alors $dim E_{\lambda_0} \geq 1$.
- Supposons par l'absurd que $\alpha_0 < \beta = dim E_{\lambda_0} \leq n$ et soient $e_1, \ldots, e_\beta$ une base de $E_{\lambda_0}$, d'après le Théorème de la base incomplète, il existe $e_{\beta+1}, \ldots, e_n \in E$ tel que $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ soit une base de E. On a

$$M_B(f) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & A \\ & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & B \end{array}\right) \\ \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{\beta} \end{array} \quad ; \qquad B \in \mathcal{M}_{n-\beta}(\mathbb{K}),$$

le polynôme caractéristique de $f$ est

$$\chi_f(X) = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - X & & & \\ & \ddots & & A \\ & & \lambda_0 - X & \\ \hline & & & \\ & 0 & & B - XI_{n-\beta} \end{array}\right| = (\lambda_0 - X)^{\beta} det(B - XI_{n-\beta}),$$

alors $\lambda_0$ serait donc valeur propre d'ordre de multiplicité au moins égal à $\beta$ qui exclu.

□

**Exemple 2.2.4.** *Soit $f$ un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ représenté dans une base de $\mathbb{K}^3$ par la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Le polynôme caractéristique de $f$ est*

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -3 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

*et le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1 = \{x(1,1,1)/x \in \mathbb{K}\}$ alors $dim E_1 = 1$.*

**Corollaire 2.2.2.** *Soit $f \in End(E)$. Pour toute valeur propre simple $\lambda_0$ de $f$, la dimension de $E_{\lambda_0}$ vaut 1.*

## 2.3 Diagonalisabilité

Dans tout ce qui suit $E$ designe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($n \geq 1$).

**Définition 2.3.1.** *Soit $f \in End(E)$. On dit que $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $B$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans $B$ soit diagonale.*

Autrement dit $A = M_B(f)$ est diagonalisable si et seulement si :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in D_n(\mathbb{K}); \quad A = PDP^{-1}.$$

**Remarque 2.3.1.**

1. *Si $f$ est diagonalisable, il existe une base $B'$ de $E$ telle que la matrice $M_{B'}(f) = D$ soit diagonale et, en notant $P = Pass(B, B')$ on a alors $A = PDP^{-1}$.*
2. *Toute matrice diagonale est diagonalisable.*

**Théorème 2.3.1.** *Soit $f \in End(f)$. $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base de $E$ formée de vecteurs propres de $f$.*

*Démonstration.* Si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est une base de $E$ formée de vecteurs propres correspondants aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors on a :

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \quad f(v_2) = \lambda_1 v_2, \cdots\cdots, f(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Ainsi

$$M_B(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & \ldots & f(v_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \end{array},$$

et donc la matrice de $f$ dans $B$ est diagonale.
Reciproquement, si il existe une base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que la matrice $M_B(f)$ est diagonale, c'est à dire :

$$M_B(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \ldots & f(v_n) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array},$$

alors on aura

$$f(e_1) = a_{11} e_1, \quad f(e_2) = a_{22} e_2, \cdots\cdots, f(e_n) = a_{nn} e_n$$

se qui signifie que les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$. □

**Corollaire 2.3.1.** *$f$ est diagonalisable si et seulement si $E$ est somme directe d'espaces propres.*

*Démonstration.* Supposons que $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$ ce qui veut dire que si $B_1, \ldots, B_p$ sont des bases de $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ respectivement alors $B = B_1 \cup \ldots \cup B_p$ est une base de $E$. Puisque $B$ formée de vecteurs propres alors $f$ est diagonalisable.
Reciproquement, supposons qu'il existe une base $B$ de $E$ formée de vecteurs propres. Soit $B = \{\underbrace{v_1^1, \ldots, v_{n_1}^1}_{\in E_{\lambda_1}}, \ldots, \underbrace{v_1^p, \ldots, v_{n_p}^p}_{\in E_{\lambda_p}}\}$ on a $dimE_{\lambda_1} + \ldots + dimE_{\lambda_p} = dimE$ donc $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}$. □

**Définition 2.3.2.** *(Polynôme Scindé)*
*Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On dit que $P$ est scindé dans $\mathbb{K}$, si $P$ admet $n$ racines dans $\mathbb{K}$ en comptant chaque racine avec multiplicité.*

**Théorème 2.3.2.** *Soit $f \in End(E)$. $f$ est diagonalisable si et seulement si :*

1. *$\chi_f$ est scindé dans $\mathbb{K}$, c'est à dire*
$$\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$$
*avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ et $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$.*
2. *Pour chaque valeur propre $\lambda_i$ de multiplicité $\alpha_i$, on a*
$$dimE_{\lambda_i} = \alpha_i.$$

*Démonstration.* Si les conditions 1 et 2 sont satisfaites, on aura $dimE_{\lambda_1} + \ldots + dimE_{\lambda_p} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$ et donc d'après le Corollaire 2.3.1, $f$ est diagonalisable.
Réciproquement, supposons que $f$ est diagonalisable. Si $\chi_f$ n'est pas scindé alors il existe $Q \in \mathbb{K}$ tel que :
$$\chi_f(X) = Q(X)(X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}, \text{ avec } \alpha_1 + \ldots + \alpha_p < n,$$
donc
$$dimE_{\lambda_1} + \ldots + dimE_{\lambda_p} \leq \alpha_1 + \ldots + \alpha_p < n$$
ce qui est exclu d'après le Corollaire 2.3.1. $\chi_f$ donc est scindé
$$\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p} \text{ avec } \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n.$$
S'il existait un $\lambda_0$ tel que $dimE_{\lambda_0} < \alpha_0$ on aurat :
$$dimE_{\lambda_1} + \ldots + dimE_{\lambda_p} < \alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$$

ce qui exclu. Donc la condition 2 est vérifiée. $\square$

**Exemple 2.3.1.** *Soit* $f \in End(\mathbb{K}^3)$ *représentée dans la base canonique* $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**• Montrons que $f$ est diagonalisable :**

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(3-\lambda),$$

*les valeurs propres de $f$ sont $\lambda_1 = 0$ racine double et $\lambda_2 = 3$ racine simple. Alors $f$ est diagonalisable si et seulement si $dimE_0 = 2$.*

$$\begin{aligned} E_0 = Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / f(x,y,z) = 0\} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / x+y+z = 0\} \\ = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / x = -y-z\} &= \{y(-1,1,0) + z(-1,0,1)/(y,z) \in \mathbb{K}^2\} \end{aligned}$$

*puisque $dimE_0 = 2$ alors $f$ est diagonalisable.*

**• Diagonalisation de $f$ :**

$$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / f(x,y,z) - 3(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / \left\{ \begin{array}{l} -2x+y+z=0, \\ x-2y+z=0, \\ x+y-2z=0. \end{array} \right. \}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 / x = y = z\} = \{x(1,1,1)/x \in \mathbb{K}\}$$

$B' = \{e'_1 = (-1,1,0), e'_2 = (-1,0,1), e'_3 = (1,1,1)\}$ *est la base formée de vecteurs propres. Soit*

$$P = Pass(B,B') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

*alors*

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

*la matrice de $f$ dans $B'$ est donnée par*

$$M_{B'}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Corollaire 2.3.2.** *Si $f$ admet $n$ valeurs propres deux à deux distinctes alors $f$ est diagonalisable.*

**Exemple 2.3.2.** *Soit $f \in End(\mathbb{K}^3)$ représentée dans la base canonique $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

• **Montrons que $f$ est diagonalisable :**

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda)$$

*Puisque $f$ admet trois valeurs propres simples alors $f$ est diagonalisable.*

**Remarque 2.3.2.** *Deux matrices diagonalisables ont mêmes valeurs propres sont semblables.*
*En effet, soient $D$ une matrice diagonale et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $A \sim D$ et $B \sim D$. Puisque $\sim$ est une relation d'équivalence alors elle est symétrique et transitive donc $A \sim B$.*

**Exemple 2.3.3.** *Les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

*sont semblables.*
*On a*

$$A \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad avec \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B \sim D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad avec \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Alors*

$$A \sim B \quad avec \quad P = P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# 2.4 Application de la diagonalisation

## 2.4.1 Calcul des puissances d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable, alors :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \exists D \in D_n(\mathbb{K}) \text{ telles que : } D = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PDP^{-1}.$$

Donc

$$A^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})}_{k\ fois} = PD^kP^{-1}.$$

Or, si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$,
et donc $A^k$ se calcule facilement par la formule

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}.$$

**Exercice 2.4.1.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *Montrer que* $A$ *est inversible et calculer, pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $A^k$.

**Solution.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -8 & 6 \\ -1 & -8-\lambda & 7 \\ 1 & -14 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3).$$

Alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-2, 2, 3\}$, puisque les valeurs propres de $A$ sont simples alors $A$ est diagonalisable.

• **Les sous espaces propres :**

- **Pour** $\lambda = -2$ **:** Soit $v_1 = (x, y, z) \in E_{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 6y + 7z = 0 \\ x - 14y + 13z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z,$

alors $E_{-2} = \{x(1, 1, 1)/x \in \mathbb{R}\}$

- **Pour** $\lambda = 2$ : Soit $v_2 = (x, y, z) \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 10y + 7z = 0 \\ x - 14y + 9z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x, \end{cases}$

alors $E_2 = \{\beta(1, 2, 3)/\beta \in \mathbb{R}\}$.

- **Pour** $\lambda = 3$ : Soit $v_3 = (x, y, z) \in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 8y + 6z = 0 \\ -x - 11y + 7z = 0 \\ x - 14y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{3}y \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$

alors $E_3 = \{\gamma(2, 3, 5)/\gamma \in \mathbb{R}\}$.

Soit $B' = \{v_1(1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3), v_3 = (2, 3, 5)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres, et $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $B'$.

Alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

or

$$D^k = \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^k - 2^{k+1} + 2.3^k & (-2)^k + 3.2^k - 4.3^k & -(-2)^k - 2^k + 2.3^k \\ (-2)^k - 2^{k+2} + 3^{k+1} & (-2)^k + 6.2^k - 6.3^k & -(-2)^k - 2^{k+1} + 3^{k+1} \\ (-2)^k - 3.2^{k+1} + 5.3^k & (-2)^k + 9.2^k - 10.3^k & -(-2)^k - 3.2^k + 5.3^k \end{pmatrix}.$$

Puisque les valeurs propres de $A$ sont non nulles alors $A$ est inversible ($detA = -2 \times 2 \times 3 = -12 \neq 0$), ainsi $A^{-1}$ et $A^k$ ($k \in \mathbb{Z}^*$) existent.
On a $\forall k \in \mathbb{Z}^*_-$

$$A^k = (A^{-1})^{(-k)} = [(PDP^{-1})^{-1}]^{(-k)} = (PD^{-1}P^{-1})^{(-k)} = PD^kP^{-1}.$$

Autrement dit, la formule $A^k = PD^kP^{-1}$ est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

### 2.4.2 Suites récurrentes linéaires simultanées du $1^{\text{er}}$ ordre à coefficients constants

Soient $n \in \mathbb{N}^*, A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. On considère la suite récurrente linéaire simultanées du $1^{\text{er}}$ ordre à coefficients constants $(x_k^1)_{k\in\mathbb{K}}, \ldots, (x_k^n)_{k\in\mathbb{K}}$ définie par :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rl} \forall j \in \{1, \ldots, n\}, & x_0^j = \alpha_j \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \forall k \in \mathbb{N}, & x_{k+1}^j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ji} x_k^i \end{array} \right.$$

Il sagit de calculer les $x_k^j$.

En notant $X_k = \begin{pmatrix} x_k^1 \\ \vdots \\ x_k^n \end{pmatrix}$, le système (S) se ramène à : $\left\{ \begin{array}{l} X_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = AX_k. \end{array} \right.$

On a donc :$\forall k \in \mathbb{N}, X_k = A^k X_0$, et la détermination de $X_k$ se ramène au calcul de $A^k$.

**Exemple 2.4.1.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{rl} u_{n+1} = & 3v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = & 2u_n - 2v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = & -u_n + w_n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

*Le système (S) est équivalent à*

$$X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

*d'où, par récurrence*

$$X_n = A^n X_0 \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Calculons** $A^n$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -2 \\ 2 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(4+\lambda)(2-\lambda).$$

- **Les sous espaces propres :**
  - ✓ $E_{-4} = \{\alpha(5,-6,1)/\alpha \in \mathbb{R}\}$,
  - ✓ $E_1 = \{\beta(0,1,\frac{3}{2})/\beta \in \mathbb{R}\}$,
  - ✓ $E_2 = \{\gamma(1,0,-1)/\gamma \in \mathbb{R}\}$.

*Puisque $\chi_A$ est scindé simple alors $A$ est diagonalisable c'est à dire*

$$A \sim D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 12 & 12 & 12 \\ 20 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

*alors*

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 12 & 12 & 12 \\ 20 & 15 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2^{n+1}+10(-4)^n+18 & 3.2^n-3 & 2.(-4)^n-2^{n+1} \\ 12.2^n+60(-4)^n-72 & 18.2^n+12 & 12(-4)^n-12.2^n \\ 100(-4)^n-10.2^n-90 & 15-15.2^n & 10.2^n+20(-4)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donnés en fonction de $n$ par*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2^{n+1}+10(-4)^n+18 & 3.2^n-3 & 2.(-4)^n-2^{n+1} \\ 12.2^n+60(-4)^n-72 & 18.2^n+12 & 12(-4)^n-12.2^n \\ 100(-4)^n-10.2^n-90 & 15-15.2^n & 10.2^n+20(-4)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}(-4)^n+\frac{3}{5} \\ \frac{12}{5}(-4)^n-\frac{12}{5} \\ (-4)^{n+1}-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*autrement dit*

$$\begin{cases} u_n = \frac{2}{5}(-4)^n + \frac{3}{5} & \textit{divergente} \\ v_n = \frac{12}{5}(-4)^n - \frac{12}{5} & \textit{divergente} \\ w_n = (-4)^{n+1} - 3 & \textit{divergente} \end{cases}$$

### 2.4.3 Suites recurrentes linéaires à coefficients constants

Soient $p \in \mathbb{N}^*, (a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$. On considère la suite recurrente linéaire à coefficients constants $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} (u_0, \dots, u_{p-1}) \in \mathbb{K}^p & \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p} = a_i u_{n+i} = a_0 u_n + \dots + a_{p-1} u_{n+p-1} \end{cases}$$

Il s'agit de calculer $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Notons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

Ainsi le calcul de $u_n$ se ramène à celui des puissance de $A$.

**Exemple 2.4.2.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente linéaire à coefficients constants définie par :*

$$(S) : \begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = -2, \quad u_2 = 1 \\ u_{n+3} = -6u_n + 5u_{n+1} + 2u_{u+2} \end{cases}$$

*Le sysrème (S) est équivalent à*

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

*Notons*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \text{ et } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

*d'où, par récurrence*

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• **Calculons $A^n$ :** *On a*

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda).$$

*Puisque $\chi_A$ est scindé simple alors $A$ est diagonalisable.*
**Les sous espaces propres :**

- $E_{-2} = \{\alpha(1, -2, 4)/\alpha \in \mathbb{R}\}$,
- $E_1 = \{\beta(1, 1, 1)/\beta \in \mathbb{R}\}$,
- $E_3 = \{\gamma(\frac{1}{3}, 1, 3)/\gamma \in \mathbb{R}\}$,

*alors* $A \sim D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $P^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 30 & 5 & -5 \\ -18 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} d'où\ A^n &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -8 & 2 \\ 30 & 5 & -5 \\ -18 & 9 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3(-2)^{n+1} - 2.3^{n+1} + 30 & 3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5 & -(-2)^{n+1} + 3^{n+1} - 5 \\ 30 - 2.3^{n+2} - 3(-2)^{n+2} & (-2)^{n+4} + 3^{n+2} + 5 & 3^{n+2} - (-2)^{n+2} - 5 \\ -3(-2)^{n+3} - 2.3^{n+3} + 30 & 3^{n+3} + (-2)^{n+5} + 5 & -(-2)^{n+3} + 3^{n+3} - 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

*le terme général de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3(-2)^{n+1} - 2.3^{n+1} + 30 & 3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5 & -(-2)^{n+1} + 3^{n+1} - 5 \\ 30 - 2.3^{n+2} - 3(-2)^{n+2} & (-2)^{n+4} + 3^{n+2} + 5 & 3^{n+2} - (-2)^{n+2} - 5 \\ -3(-2)^{n+3} - 2.3^{n+3} + 30 & 3^{n+3} + (-2)^{n+5} + 5 & -(-2)^{n+3} + 3^{n+3} - 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3(-2)^{n+3} - 3^{n+2} + 15 \\ -3(-2)^{n+4} - 3^{n+3} + 15 \\ -3(-2)^{n+5} - 3^{n+4} + 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Autrement dit :* $u_n = \frac{1}{10}(5 - (-2)^{n+3} - 3^{n+1})$.

# Exercices

**Exercice 2.4.2.** *Soient un $\mathbb{K}$-ev, $f, g \in \mathfrak{L}(E)$ tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que tout sous espace propre pour $f$ est stable par $g$, et que Ker(f) et Imf sont stables par $g$.*

**Exercice 2.4.3.** *Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{{}^tA} = \chi_A$.*
*En particulier $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $Sp_{\mathbb{K}}({}^tA) = Sp_{\mathbb{K}}(A)$.*

**Exercice 2.4.4.**

1. *Trouver tous les $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ tels que la matrice*

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

   *admette 1,2,3 comme valeurs propres.*

2. *Trouver tous les $(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$, tels que la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & a \\ 1 & \beta & b \\ 1 & \gamma & c \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

   *admette* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *comme vecteurs propres.*

**Exercice 2.4.5.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*, E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $f$ définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \to & E \\ & P & \to & X(1-X)P' + nXP \end{array}$$

1. *Montrer que $f \in \mathfrak{L}(E)$.*
2. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $f$.*

**Exercice 2.4.6.** *Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ a+2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

*Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que $A$ admette (1) pour valeur propre, dans ce cas, la diagonalisée.*

1. *Calculer les valeurs propres de $A$.*
2. *$A$ est elle diagonalisable ?*

**Exercice 2.4.7.** *Montrer que les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

*sont semblables.*

**Exercice 2.4.8.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et* $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \\ A & \to & {}^tA \end{array}$

1. *Montrer que $f$ est linéaire.*
2. *Détèrminer les éléments propres de $f$, $f$ est elle diagonalisable ?*

**Exercice 2.4.9.** *Calculer $A^n$ dans les cas suivants :*

$$1)\, A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -8 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad 2)\, A = \begin{pmatrix} \frac{49}{12} & \frac{7}{6} & \frac{9}{4} \\ -\frac{23}{12} & \frac{7}{6} & -\frac{15}{4} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}, \quad 3)\, A = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ -5 & 1 & 4 \\ -\frac{10}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.4.10.**

1. *Pour $(a, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$.*
2. *Trouver au moins une matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
3. *Trouver toutes les matrices $B$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ et $tr(B) = 0$, où*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.4.11.**

✓ *Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

✓ *Déterminer une matrice inversible $P$ telle que $A_2 = PA_1P^{-1}$.*

✓ *Calculer $A_1^n$.*

**Exercice 2.4.12.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que : $A^2 = 4I_3$, en déduire les valeurs propres de $A$.*
2. *Déterminer les vecteurs propres de $A$. En déduire le polynôme caractéristique de $A$.*
3. *Montrer que $A$ est inversible.*
4. *Déterminer le polynôme minimal et les valeurs propres de $A^{-1}$.*
5. *Déterminer les vecteurs propres de $A^{-1}$.*
6. *Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}; \quad A^n = \begin{cases} 4^k I_3 & \text{pour } n = 2k \\ 4^k A & \text{pour } n = 2k+1 \end{cases}$$

**Exercice 2.4.13.**

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad v_0 = 1 & w_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & \begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + w_n \end{cases} \end{cases}$$

*Calculer $u_n, v_n, w_n$ et étudier la convergence de ces trois suites.*

2. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *les suites réelles définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad v_0 = -\alpha & w_0 = \gamma \\ \forall n \in \mathbb{N} & \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 2w_n \end{cases} \end{cases}$$

*Calculer* $u_n, v_n, w_n$ *et étudier la convergence de ces trois suites.*

**Exercice 2.4.14.** *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1, & u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

*Calculer* $u_n$ *en fonction de* $n$.

**Exercice 2.4.15.** *Soient* $u_0 \geq 0, u_1 \geq 0$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{2}{\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+1}}}.$$

*Calculer* $u_n$ *puis* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

## 2.5 Trigonalisation

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \text{resp. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Remarque 2.5.1.**

- *Si $A$ est triangulaire alors les éléments de la diagonale $a_{ii}$ sont les valeurs propres de $A$, autrement dit : $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - \lambda)$.*
- *Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.*
  *En effet, soit $A$ une matrice triangulaire supérieure et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui dans la base cononique $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est représenté par $A$ :*

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

*Considérons la base $B' = \{u_1 = e_n, u_2 = e_{n-1}, \ldots u_n = e_1\}$. On aura*

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{1n}u_n + a_{2n}u_{n-1} + \ldots + a_{nn}u_1 \\ f(u_2) &= a_{1n-1}u_n + a_{2n-1}u_{n-1} + \ldots + a_{n-1n-1}u_2 \\ &\vdots \\ f(u_{n-1}) &= a_{12}u_n + a_{22}u_{n-1} \\ f(u_n) &= a_{11}u_n \end{aligned}$$

*alors la matrice de $f$ dans la base $B'$ est*

$$A' = M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} a_{nn} & 0 & 0 \\ a_{n-1n} & a_{n-1n-1} & 0 \\ & & \\ a_{1n} & a_{1n-1} & a_{11} \end{pmatrix}$$

*$A$ et $A'$ sont semblables car elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.*

**Définition 2.5.1.** *Soit $f \in End(\mathbb{K})$. On dit que $f$ est trigonalisable si et seulemnet si il existe une base $B$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans $B$ soit triangulaire.*

**Remarque 2.5.2.** *Toute matrice triangulaire est trigonalisable.*

Le problème qui se pose est de savoir quand une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable (ou quand un endomorphisme est représentable dans une certaine base par une matrice triangulaire).

**Théorème 2.5.1.** *Un endomorphisme est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.*

*Démonstration.* Supposons que l'endomorphisme $f$ soit trigonalisable et soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $E$ telle que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

on a

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$$

donc $\chi_f$ est scindé.
Réciproquement, supposons $\chi_f$ scindé et montrons par récurrence que $f$ est trigonalisable.

- Pour $n = 1$ il y a rien à montrer.
- Supposons le resultat vrai à l'ordre $n - 1$. Puisque $\chi_f$ est scindé, il admet au moins une racine $\lambda \in \mathbb{K}$ et donc il existe au moins un vecteur propre $e_1 \in E$.

Complétons $\{e_1\}$ en une base $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de $E$. On a

$$A = M_B(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & b_2 & \cdots & b_n \\ \hline 0 & & C & \end{array}\right) \text{ ou } C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Soit $F$ le sous espace vectoriel engendré par $B' = \{e_2, \ldots, e_n\}$ et $g$ l'endomorphisme de $F$ tel que $M_{B'}(g) = C$. On a :

$$\chi_f(X) = det(A - XI_n) = (\lambda - X)det(C - XI_{n-1}) = (\lambda - X)\chi_g(X).$$

Puisque $\chi_f$ est scindé alors $\chi_g$ est scindé et donc d'après l'hypothèse de récurrence, $C$ est trigonalisable, c'est à dire il existe une base $B'' = \{u_2, \ldots, u_n\}$ de $F$ telle que $M_{B''}(g)$ est triangulaire. Ainsi, dans la base $\{e_1, u_2, \ldots, u_n\}$ la matrice de $f$ est triangulaire.

□

**Corollaire 2.5.1.** *Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \leq 1$. Tout endomorphisme de $E$ est trigonalisable.*

En effet, d'après le Théorème d'Alembert tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé et puisque pour tout endomorphisme $f$ de $E$, $\chi_f \in \mathbb{C}[X]$ alors $\chi_f$ est scindé donc $f$ est trigonalisable.

**Exemple 2.5.1.** *Soit $f$ un endomorphime de $\mathbb{K}^3$ représenté dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

*On a*

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} - \lambda & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} - \lambda & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^3,$$

*$f$ admet une seule valeur propre $\lambda = 1$. Puisque le polynôme caractéristique $\chi_f$ est scindé dans $\mathbb{K}$ alors $f$ est trigonalisable dans $\mathbb{K}$, c'est à dire il existe une base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$ telle que $M_B(f)$ soit de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{K},$$

*autrement dit*

$$\begin{cases} f(v_1) & = v_1 \\ f(v_2) & = av_1 + v_2 \\ f(v_3) & = bv_1 + cv_2 + v_3 \end{cases}$$

- **Cherchons les vecteurs** $v_1, v_2, v_3$

  1. **Calculons** $v_1$ **:** *$v_1$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre 1.*

     *Soit* $v_1 = (x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2x \end{cases}$

     *alors* $v = (x, 2x, x)$. *Pour* $x = 1$ *:* $v_1 = (1, 2, 1)$

  2. **Calculons** $v_2$ **:** *On résout l'équation* $(f - Id_{\mathbb{K}^3})(v_2) = av_1$

     *Soit* $v_2 = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ *tel que*

     $(f - Id_{\mathbb{K}^3})(v_2) = v_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 5z = 4a \\ 5x - 3y + z = 8a \\ x - y + z = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + a \\ y = 2z - a \end{cases}$

     *alors* $v_2 = (z + a, 2z - a, z)$. *Pour* $z = 1$ *et* $a = 2$ : $v_2 = (2, -2, 0)$ *(a ne doit être pas nul).*

  3. **Calculons** $v_3$ **:** *On résout l'équation* $(f - Id_{\mathbb{K}^3})(v_3) = bv_1 + cv_2$

     *Soit* $v_2 = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ *tel que*

     $(f - Id_{\mathbb{K}^3})(v_2) = v_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 5z = 4b + 8c \\ 5x - 3y + z = 8b - 8c \\ x - y + z = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z + b - 4c \\ y = 2z - b - 4c \end{cases}$

     *alors* $v_2 = (z + b - 4c, 2z - b - 4c, z)$. *Pour* $z = 0$*,*$b = 2$ *et* $c = 1$ *:*
     $v_2 = (-2, -6, 0)$.

*Alors*

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad avec \; P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.6 Polynômes annulateurs, Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $Q \in \mathbb{K}[X]$

$$Q(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0.$$

Si $f \in End(E)$, on note $Q(f)$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$Q(f) = a_m f^m + a_{m-1} f^{m-1} + \ldots + a_1 f + a_0 id_E.$$

où $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{k fois}}$.

**Remarque 2.6.1.** *Pour tout $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a*

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

*En effet, si $P(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i f^i$ et $Q(f) = \sum_{j=1}^{n} b_j f^j$. On a*

$$\begin{aligned} P(f) \circ Q(f) &= (\sum_{i=1}^{n} a_i f^i) \circ (\sum_{j=1}^{n} b_j f^j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j f^i \circ f^j \\ &= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{n} a_i f^j \circ f^i = Q(f) \circ P(f). \end{aligned}$$

**Définition 2.6.1.** *Soit $f \in End(E)$. Un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ est dit annulateur de $f$ si $Q(f) = 0$.*

**Exemple 2.6.1.** *On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par :*

$$f(x, y, z) = (-4x - 2z, y, 5x + y + 3z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

*Le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X + 2$ est annulateur de $f$.*
*En effet, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (-4x - 2z, y, 5x + y + 3z) \\ f^2(x, y, z) &= (6x + 2z - 2y, y, -5x + 4y - z) \\ f^3(x, y, z) &= (-14x - 6z, y, 15x + 3y + 7z) = 3f(x, y, z) - 2(x, y, z). \end{aligned}$$

**Exemple 2.6.2.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

*$Q(X) = (X - 2)(X - 4)$ est un polynôme annulateur de $A$. On a, en effet,*

$$(A - 2I_3)(A - 4I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Remarque 2.6.2.** *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P$ est un polynôme annulateur de $f$ alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $P.Q$ est un polynôme annulateur de $f$.*
*En effet, si $P$ est un polynôme annulateur de $f$ ($P(f) = 0$). Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ on a*

$$(P.Q)(f) = (Q.P)(f) = Q(f) \circ P(f) = 0.$$

**Proposition 2.6.1.** *Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $f$. Alors les valeurs propres de $f$ appartient à l'ensemble des racines de $Q$.*

*Démonstration.* Si $\lambda$ est une valeur propre de $f$ alors il existe un vecteur $v$ non nul de $E$ tel que $f(v) = \lambda v$. On a

$$\begin{aligned} f^2(v) &= f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda^2 v \\ f^3(v) &= \lambda^3 v \\ &\vdots \\ f^k(v) &= \lambda^k v \end{aligned}$$

Soit $Q(x) = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme annulateur de $f$ c'est à dire :

$$Q(f) = a_m f^m + a_{m-1}f^{m-1} + \ldots + a_1 f + a_0 id_E = 0.$$

En appliquant cette relation au vecteur $v$ on obtient

$$a_m f^m(v) + a_{m-1}f^{m-1}(v) + \ldots + a_1 f + a_0 v = 0$$

d'où $$(a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)v = 0$$

Or $v \neq 0$, donc $a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ c'est à dire $Q(\lambda) = 0$. □

La question qui se pose : pour tout endomorphisme $f$ de $E$ existe-il un polynôme annulateur autre que le polynôme nul ? la réponse est affirmative.
Si $dimE = n$ alors $dimEnd(E) = n^2$. Donc toute famille de $n^2 + 1$ endomorphismes est liée. En particulier les endomorphismes $id_E, f, f^2, \ldots f^{n^2}$ sont liés, il existe donc $a_0, a_1, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{K}^{n^2}$ tels que

$$a_0 id_E + a_1 f + \ldots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$$

ce qui veut dire que le polynôme

$$Q(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n^2} X^{n^2}$$

est un polynôme annulateur de $f$.

**Théorème 2.6.1. (Théorème de Cayley-Hamilton)**
*Soit $f \in End(E)$ et $\chi_f$ le polynôme caractéristique de $f$. On a*

$$\chi_f(f) = 0.$$

*Démonstration.* Soit $x \in E - \{0\}$. La famille $(f^k(x))_{0 \leq k \leq n}$ ayant $n+1$ éléments, est liée il existe donc un plus grand entier $k_x$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $(x, f(x), \ldots, f^{k_x-1}(x))$ soit libre. Puisque $x, f(x), \ldots, f^{k_x}(x)$ est liée alors il existe $a_0, \ldots, a_{k_x-1} \in \mathbb{K}$ tel que

$$f^{k_x}(x) = \sum_{i=1}^{k_x-1} a_i f(x).$$

Notons $E_{f(x)}$ le sous espace vectoriel engendré par $(x, f(x), \ldots, f^{k_x-1})$. Puisque $f^{k_x}(x)$ se décompose linéairement sur $x, f(x), \ldots, f^{k_x-1}$, il est clair que $E_{f(x)}$ est stable par $f$. Notons $g_x$ l'endomorphisme induit par $f$ sur $E_{f(x)}$. La matrice $B$ de $g_x$ dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{k_x-1})$ de $E_{f(x)}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & a_2 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & a_{k_x-1} \end{pmatrix}$$

on a pour tout $\lambda$ de $\mathbb{K}$

$$\chi_{g_x}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & a_2 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & a_{k_x-1} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^{k_x}(\lambda^{k_x} - a_{k_x-1}\lambda^{k_x-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0).$$

D'ou $(\chi_{g_x}(f))(x) = (-1)^{k_x}(f^{k_x}(x) - a_{k_x-1}f^{k_x-1}(x) - \ldots - a_1 f(x) - a_0 x) = 0$. Puisque $\chi_{g_x} \backslash \chi_f$ alors il existe donc $Q_x \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_f = Q_x \chi_{g_x}$, on a

$$\chi_f(f) = Q_x(f) \circ \chi_{g_x}(f)$$

Ceci prouve que pour tout $x$ de $E$ :

$$\chi_f(f)(x) = Q_x(f)(x) \circ \chi_{g_x}(f)(x) = 0 \text{ c'est à dire } \chi_f(f) = 0.$$

□

### 2.6.1 Lemme fondamental

**Lemme 2.6.1.** *Soient $f \in End(E)$ et $Q(X) = Q_1(X) \dots Q_p(X)$ un polynôme decomposé en produit de polynômes premiers entre eux.*
*Si $Q(f) = 0$ alors $E = KerQ_1(f) \oplus \dots \oplus KerQ_p(f)$.*

*Démonstration.*

- Pour $p = 1$, le lemme est évident $Q(X) = Q_1(X)$ et par hypothèse $Q_1(f) = 0$, ce qui veut dire que pour tout $x$ de $E$ ; $Q_1(f)(x) = 0$ c'est à dire $E \subset KerQ_1(f)$ donc $E = KerQ_1(f)$.
- Pour $p = 2$.
  Soit $Q = Q_1Q_2$, puisque $Q_1$ et $Q_2$ sont premiers entre eux alors d'après le lemme de Bezout, il existe deux polynômes $U_1$ et $U_2$ tels que

  $$U_1Q_1 + U_2Q_2 = 1,$$

  d'où

  $$U_1(f) \circ Q_1(f) + U_2(f) \circ Q_2(f) = id_E,$$

  ainsi

  $$\forall x \in E; \quad x = U_1(f) \circ Q_1(f)(x) + U_2(f) \circ Q_2(f)(x), \tag{2.3}$$

  c'est à dire $E \subset ImU_1(f) \circ Q_1(f) + ImU_2(f) \circ Q_2(f)$ et donc

  $$E = ImU_1(f) \circ Q_1(f) + ImU_2(f) \circ Q_2(f)$$

  or $Q_2(f) \circ U_1(f) \circ Q_1(f) = 0$ car $Q_2(f) \circ Q_1(f) = (Q_2.Q_1)(f) = 0$, donc

  $$ImU_1(f) \circ Q_1(f) \subset Q_2(f).$$

  De même

  $$ImU_2(f) \circ Q_2(f) \subset Q_1(f),$$

  et par conséquent

  $$E = KerQ_1(f) + KerQ_2(f).$$

D'autre part, si $x \in KerQ_1(f) \cap KerQ_2(f)$ d'après (2.3) on a $x = 0$ et donc

$$E = KerQ_1(f) \oplus KerQ_2(f).$$

- Supposons maintenant le Théorème vrai jusqu'a l'ordre $p-1$ et écrivons

$$Q = \underbrace{Q_1.Q_2 \dots Q_{p-1}}_{\overline{Q}}.Q_p$$

D'après le cas $p = 2$

$$E = Ker\overline{Q}(f) \oplus KerQ_p(f).$$

Il reste à montrer que

$$Ker\overline{Q}(f) = KerQ_1(f) \oplus \dots \oplus KerQ_{p-1}(f).$$

Soit $F = Ker\overline{Q}(f)$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$F = \widetilde{Ker}Q_1(f) \oplus \dots \oplus \widetilde{Ker}Q_{p-1}(f)$$

où $\widetilde{Ker}Q_i(f) = \{x \in F/Q_i(f)(x) = 0\} \subset KerQ_i(f)$. Or $\widetilde{Ker}Q_i(f) = KerQ_i(f)$. En effet, si $x \in KerQ_i(f)$ on a $\overline{Q}(f)(x) = 0$ donc $x \in F$ et donc $x \in KerQ_i(f)$ c'est dire $x \in \widetilde{Ker}Q_i(f)$. Ainsi donc

$$F = KerQ_1(f) \oplus \dots \oplus KerQ_{p-1}.$$

□

**Exemple 2.6.3.** *Considérons un projecteur sur $E$ c'est à dire un endomorphisme $f$ tel que $f^2 = f$. Le polynôme $Q(X) = X(X-1)$ annule $f$.*
*Puisque $X$ et $X-1$ sont premiers entre eux, on a $E = Kerf \oplus Ker(f - id_E)$. Donc $E$ est somme directe d'espaces propres de $f$, et donc $f$ est diagonalisable.*
*Plus généralement si*

$$Q(X) = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p) \text{ avec } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{pour tous} \quad i \neq j$$

*est un polynôme annulateur de $f$, on a*

$$E = Ker(f - \lambda_1 id_E) \oplus \dots \oplus Ker(f - \lambda_p id_E) = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p},$$

*et donc $f$ est diagonalisable.*

**Théorème 2.6.2.** *Un endomorphisme $f$ est diagonalisable si et seulement il existe un polynôme scindé n'ayant que des racines simples et qui annule $f$.*

**Corollaire 2.6.1.** *Si $\chi_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\dots(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a alors*

$$E = Ker(f-\lambda_1 id_E)^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus Ker(f-\lambda_p id_E)^{\alpha_p}.$$

## 2.7 Recherche de polynôme minimal

**Définition 2.7.1.** *On appelle polynôme minimal de $f$, noté $\pi_f$, le polynôme normalisé*[1] *annulateur de $f$ de degré le plus petit.*

**Proposition 2.7.1.** *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $P$ est un polynôme annulateur de $f$ si et seulement si il est un multiple de $\pi_f$.*

*Démonstration.* De la Definition 2.7.1, on a $\pi_f(f) = 0$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un multiple de $\pi_f$ alors il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P = A.\pi_f$, d'où

$$P(f) = A(f) \circ \pi_f(f) = A(f) \circ 0 = 0.$$

Réciproquement, supposons que $P(f) = 0$. En effectuant la division euclidienne de $P$ par $\pi_f$, on a :

$$P = A.\pi_f + R \text{ avec } A, R \in \mathbb{K}[X] \text{ et } d^\circ R < d^\circ \pi_f.$$

On a $P(f) = A(f) \circ \pi_f(f) + R(f) = 0$ ce qui implique que $R(f) = 0$. Donc $R$ est un annulateur de $f$ et puisque $\pi_f$ est l'annulateur de degré le plus petit on aura $R = 0$. □

**Corollaire 2.7.1.** *Soit $f \in End(E)$. $\pi_f$ divise $\chi_f$.*

### Unicité du polynôme minimal

Soient $\pi_f^1$ et $\pi_f^2$ deux polynômes minimaux. Puisqu'ils sont annulateurs de $f$ alors
$$\begin{cases} \pi_f^1 \text{ divise } \pi_f^2, \\ \pi_f^2 \text{ divise } \pi_f^1, \end{cases} \quad \text{c'est-dire : } \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{K}, & \pi_f^2 = k_1\pi_f^1, \\ \exists k_2 \in \mathbb{K}, & \pi_f^1 = k_2\pi_f^2, \end{cases}$$
Or $\pi_f^1$ et $\pi_f^2$ sont normalisés alors $k_1 = k_2 = 1$ donc $\pi_f^1 = \pi_f^2$.

1. un pôlynome normalisé veut dire que le coefficient du terme de plus grand degré égal à 1

### Recherche du polynôme minimal

**Proposition 2.7.2.** *Soit $f \in End(E)$. $\chi_f$ et $\pi_f$ ont les mêmes racines avec une multiplicité en général différente. En d'autre termes, si*

$$\chi_f(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}\dots(X-\lambda_p)^{\alpha_p} \text{ avec } \alpha_1+\dots+\alpha_p = n \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j$$

*alors*

$$\pi_f(X) = (X-\lambda_1)^{\beta_1}\dots(X-\lambda_p)^{\beta_p} \text{ avec } 1 \leq \beta_i \leq \alpha_i$$

*Démonstration.* Puisque $\pi_f$ divise $\chi_f$ alors il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\chi_f = A.\pi_f$, il est clair que si $\lambda$ est une racine de $\pi_f$ alors elle est racine de $\chi_f$.
Réciproquement, soit $\lambda$ racine de $\chi_f$ c'est-à-dire ; $\lambda$ est une valeur propre de $f$ alors il existe $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. Soit $\pi_f(X) = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \dots + a_1X + a_0$. Puisque $\pi_f(f) = 0$, on a

$$\pi_f(f) = f^r + a_{r-1}f^{r-1} + \dots + a_1 f + a_0 id_E = 0$$

d'où

$$f^r(v) + a_{r-1}f^{r-1}(v) + \dots + a_1 f(v) + a_0 id_E(v) = 0$$

comme $f^p(v) = \lambda^p v$ alors

$$(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)v = 0$$

ce qui implique que :

$$\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad \text{car } v \neq 0,$$

c'est à dire $\pi_f(\lambda) = 0$. □

**Exemple 2.7.1.**

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *On a*

$$\chi_A(X) = -(X-4)(X+6)(X-2)$$

*alors le polynôme minimal de $A$ est*

$$\pi_A(X) = (X-4)(X+6)(X-2).$$

*2.* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *On a*

$$\chi_A(X) = -(X-2)(X-4)^2$$

*alors le polynôme minimal de* $A$ *est*

$$\pi_A(X) = (X-2)(X-4)$$

*ou*

$$\pi_A(X) = (X-2)(X-4)^2.$$

*Calculons* $(A-2I_3)(X-4I_3)$, *si on trouve 0 alors le polynôme minimal sera le premier, sinon ce sera le second.*

$$\begin{aligned}(A-2I_3)(X-4I_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

*donc*

$$\pi_A(X) = (X-2)(X-4)^2.$$

**Théorème 2.7.1.** *Un endomorphisme* $f$ *de* $E$ *est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple.*

*Démonstration.* La condition est suffisante d'après le Théorème 2.6.2.
Réciproquement, soit $f$ diagonalisable alors $\chi_f$ est scindé et comme $\pi_f$ divise $\chi_f$ alors $\pi_f$ est scindé. Il existe par ailleurs une base de vecteurs propres $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Supposons que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \quad (p \leq n)$ soient deux à deux distinctes.
Si $v \in B$, on a

$$(f - \lambda_1 id_E)(f - \lambda_2 id_E)\ldots(f - \lambda_p id_E)v = 0$$

donc

$$(f - \lambda_1 id_E)(f - \lambda_2 id_E)\ldots(f - \lambda_p id_E) = 0,$$

c'est à dire le polynôme $Q(X) = (X-\lambda_1)\ldots(X-\lambda_p)$ est un polynôme annulateur de

$f$. Par conséquent $\pi_f$ divise $Q$, puisque $Q$ est scindé simple alors $\pi_f$ n'a que des racines simples. □

**Exemple 2.7.2.** *Cherchons le polynôpme minimal dans les cas suivants :*

1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, *on a* $\chi_A(X) = -(X-1)^3$ *alors le polynôme minimal de* $A$ *est :*

   $\pi_A(X) = (X-1)$ *impossible car* $A - I_3 \neq 0$ *donc* $A$ *n'est pas diagonalisable.*
   $\pi_A(X) = (X-1)^2$ *ou*
   $\pi_A(X) = (X-1)^3$

   *Calculons* $(A - I_3)^2$ *:*

   $$(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   *alors le polynôme minimal de* $A$ *est* $\pi_A(X) = (X-1)^3$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *alors le polynôme caractéristique de* $A$ *est*

   $$\chi_A(X) = -(X+2)^2(X-2)$$

   *donc le polynôme minimal de* $A$ *est :*

   $$\pi_A(X) = (X-2)(X+2)$$

   *ou*

   $$\pi_A = (X-2)(X+2)^2.$$

   *Calculons* $(A - 2I_3)(A + 2I_3)$ *:*

   $$\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   *d'où le polynôme minimal de* $A$ *est* $\pi_A(X) = (X-2)(X+2)^2$ *donc* $A$ *n'est pas* *diagonalisable.*

**Exercice 2.7.1.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. *Montrer que :*
$$A^2 - 9I_3 = 0.$$
*En déduire les valeurs propres de A.*
2. *Déterminer les vecteurs propres de A. En déduire le polynôme caractéristique de A.*
3. *Montrer que A est inversible.*
4. *Montrer que :*
$$A^{-1} = \frac{1}{9}A.$$
*En déduire le polynôme minimal et les valeurs propres de* $A^{-1}$.
5. *Déterminer les vecteurs propres de* $A^{-1}$.

**Solution.** On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. **Montrons que** $A^2 - 9I_3 = 0$ : On a

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3 \Leftrightarrow A^2 - 9I_3 = 0 \end{aligned}$$

En déduire que le polynôme minimal de A est $\pi_A(X) = X^2 - 9 = (X-3)(X+3)$, donc les valeurs propre de A sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 3$.
**Remarque :** On conclut que A est diagonalisable car $\pi_A$ est scindé simple.

2. **Déterminons les vecteurs propres de A**

   **<u>Pour $\lambda = -3$</u>**

   Soit $X = (x,y,z) \in E_{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y-2z = -3x \\ -2x-y+2z = -3y \\ -2x+2y-z = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y-2z = 0 \\ -2x+2y+2z = 0 \\ -2x+2y+2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $x = y+z$, alors $X = (x+y,y,z) = x\underbrace{(1,1,0)}_{V_1} + y\underbrace{(1,0,1)}_{V_2}$, d'où

   $$E_{-3} = \{x(1,1,0)+y(1,0,1)/x,y \in \mathbb{R}\}, \quad dimE_{-3} = 2.$$

   **<u>Pour $\lambda = 3$</u>**

   *Soit* $X = (x,y,z) \in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2y-2z = 3x \\ -2x-y+2z = 3y \\ -2x+2y-z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x-2y-2z = 0 \\ -2x-4y+2z = 0 \\ -2x+2y-42z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases}$, alors $X = (-y,y,y) = y\underbrace{(-1,1,1)}_{V_3}$, d'où

   $$E_3 = \{y(-1,1,1)/y \in \mathbb{R}\}, \quad dimE_3 = 1.$$

   Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = -(3+X)^\alpha(X-3)^\beta$ et puisque A est diagonalisable en déduire que $\alpha = dimE_{-3} = 2$ et $\beta = dimE_3 = 1$ alors $\chi_A(X) = -(3+X)^2(X-3)$

3. **Montrons que A est inversible :** $detA = \prod_{i=1}^{3}\lambda_i = (-3)^2 3 = 27 \neq 0$, alors A est inversible donc $A^{-1}$ existe.

4. **Montrons que :** $A^{-1} = \frac{1}{9}A$ : On a

   $$\begin{aligned} A^2 - 9I_3 = 0 \Leftrightarrow A^{-1}A^2 - 9I_3 = A - 9A^{-1} = 0 \\ \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{9}A. \end{aligned}$$

   **Le polynôme minimal de $A^{-1}$ :** On a

   $$A - 9A^{-1} = 0 \Leftrightarrow A^{-1}(A-9A^{-1}) = I_3 - 9A^{-2} = 0 \Leftrightarrow A^{-2} - \frac{1}{9}I_3 = 0$$

   on conclut que le polynôme minimal de $A^{-1}$ est $\pi_{A^{-1}} = X^2 - \frac{1}{9} = (X+\frac{1}{3})(X-\frac{1}{3})$
   remarquons que $A^{-1}$ est diagonalisable.
   Les valeurs propres de $A^{-1}$ sont $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{3}$.

5. **Déterminons les vecteurs propres de $A^{-1}$ :**
Comme $A^{-1} = \frac{1}{9}A$ alors

$$E_{-\frac{1}{3}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = E_{-3}$$

de même on a $E_3 = E_{\frac{1}{3}}$ c'est à dire que $A^{-1}$ et A ont mêmes vecteurs propres.

## 2.8 Réduction en blocs triangulaires

D'après le Théorème 2.5.1, si $\chi_f$ est scindé alors il existe une base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ telle que :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Définition 2.8.1.** *Soit $\chi_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\ldots(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = n$. On appelle sous espace caractéristique associé à la valeur propre $\lambda_i$ le sous espace vectoriel*

$$N_{\lambda_i} = Ker(f - \lambda_i Id_E)^{\alpha_i}.$$

D'après le Corollaire 2.6.1, si $\chi_f$ est scindé $E$ est toujours somme d'espaces caractéristiques [2]

$$E = N_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus N_{\lambda_p}.$$

**Remarque 2.8.1.** *Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $\alpha$ l'ordre de multiplicité de $\lambda$.*

1. *$E_\lambda \subset N_\lambda$.*
*En effet, si $x \in E_\lambda$ alors $(f - \lambda Id_E)(x) = 0$ donc $(f-\lambda Id_E)^\alpha(x) = 0$*
2. *Les sous espaces caractéristiques sont stables par $f$ ; c'est à dire $f(N_\lambda) \subset N_\lambda$.*
*En effet, si $x \in N_\lambda$ alors $(f-\lambda Id_E)^\alpha(x) = 0$ d'où*

$$f(f-\lambda Id_E)^\alpha(x) = (f-\lambda Id_E)^\alpha f(x) = 0$$

2. Dans le cas où $f$ est diagonalisable ou non.

*c'est à dire $f(x) \in N_\lambda$.*

**Lemme 2.8.1.** *Soit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ où les sous espaces $E_i$ sont stables par $f$ ($f(E_i) \subset E_i$). Alors si $B_1, \ldots, B_p$ sont des bases de $E_1, \ldots, E_p$ respectivement alors la matrice de $f$ dans la base $B = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ de $E$ est*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_p \end{pmatrix} \quad \text{où } M_i = M_{B_i}(f_{|_{E_i}}).$$

*Démonstration.* Soient $B_1 = \{e_1^1, e_2^1, \ldots, e_{n_1}^1\}, \ldots, B_p = \{e_1^p, e_2^p, \ldots, e_{n_p}^p\}$. Puisque $f(E_i) \subset E_i$, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} f(e_1^1) = a_{11}^1 e_1^1 + a_{21}^1 e_2^1 + \cdots + a_{n_1 1}^1 e_{n_1}^1 \\ f(e_2^1) = a_{12}^1 e_1^1 + a_{22}^1 e_2^1 + \cdots + a_{n_1 2}^1 e_{n_1}^1 \\ \vdots \\ f(e_{n_1}^1) = a_{1n_1}^1 e_1^1 + a_{2n_1}^1 e_2^1 + \cdots + a_{n_1 n_1}^1 e_{n_1}^1 \end{array} \right. \quad \cdots \left\{ \begin{array}{c} f(e_1^p) = a_{11}^p e_1^p + a_{21}^p e_2^p + \cdots + a_{n_p 1}^p e_{n_p}^p \\ f(e_2^p) = a_{12}^p e_1^p + a_{22}^p e_2^p + \cdots + a_{n_p 2}^p e_{n_p}^p \\ \vdots \\ f(e_{n_p}^p) = a_{1n_p}^p e_1^p + a_{2n_p}^p e_2^p + \cdots + a_{n_p n_p}^p e_{n_p}^p \end{array} \right.$$

Donc

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & & 0 \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{M_p} \end{pmatrix} \quad \text{où } M_k = (a_{ij}^k)_{ij}.$$

□

**Théorème 2.8.1.** *(Réduction selon les sous espaces caractéristiques)*
*Soit $\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ et $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = n$. Il existe alors une base $B = \bigcup_{i=1}^{p} B_i$ de $E$ avec pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $B_i$ est une base de $N_{\lambda_i}$ telle*

*que*

$$M_B(f) = \left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_p & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{matrix}} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\alpha_1} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\alpha_2} \quad \cdots \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\alpha_p}$$

*et* $\begin{pmatrix} \lambda_p & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} = M_{B_i}(f_{|N_{\lambda_i}})$.

*Démonstration.* Puisque les $N_{\lambda_i}$ sont stables par $f$, il existe une base $B$ de $E$ telle que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & & 0 \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{M_p} \end{pmatrix} \quad \text{où } M_j = M_{B_j}(f_j) \quad \text{avec } f_j = f_{|N_j}.$$

Il reste à montrer que chaque matrice $M_j$ est trigonalisable et son spectre est $\{\underbrace{\lambda_j, \ldots, \lambda_j}_{\alpha_j \text{ fois}}\}$[3].

Or $N_{\lambda_j} = Ker(f - \lambda_j id_E)^{\alpha_j}$ donc pour tout $x$ de $N_{\lambda_j}$, $(f - \lambda_j id_E)^{\alpha_j}(x) = 0$ c'est à dire $(f_j - \lambda_j id)^{\alpha_j} = 0$. Ainsi le polynôme $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ annule $f_j$ et par conséquent le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $f_j$ sont du type

$$\pi_{f_j}(X) = (X - \lambda_j)^{\gamma_j} \quad \text{avec } 1 \leq \gamma_j \leq \alpha_j,$$
$$\chi_{f_j}(X) = (-1)^{\delta_j}(X - \lambda_j)^{\delta_j} \quad \text{avec } \gamma_j \leq \delta_j \leq \alpha_j,$$

donc $\chi_{f_j}$ est scindé ainsi $M_j$ est trigonalisable est sont spectre est $\{\underbrace{\lambda_j, \ldots, \lambda_j}_{\alpha_j \text{ fois}}\}$.

3. $M_j$ est semblable à une matrice triangulaire d'ordre $\alpha_j$ qui ne contient que $\lambda_j$ dans le diagonale.

Montrons que $\delta_j = \alpha_j$. On a

$$\begin{aligned}\chi_f(X) &= det(M_1 - \lambda_1 I_{\alpha_1}) \dots det(M_p - \lambda_p I_{\alpha_p}) \\ &= \chi_{f_1}(X) \dots \chi_{f_p}(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\delta_1} \dots (X - \lambda_p)^{\delta_p},\end{aligned}$$

alors $\delta_1 + \dots + \delta_p = n$ et comme

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}, \text{ avec } \alpha_1 + \dots + \alpha_p = n,$$

on conclut que $\delta_i = \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. $\square$

**Exemple 2.8.1.**
*Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *la matrice associé à l'endomorphisme $f$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^4$. On a*

$$\chi_f(X) = X^2 (X - 1)^2$$

*alors $f$ admet deux valeurs propres doubles 0 et 1 de plus $f$ est trigonalisable d'où il existe une base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{K}^4$ telle que :*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*c'est à dire*

$$\begin{cases} f(v_1) = v_1 & \textit{vecteur propre associé à 1} \\ f(v_2) = av_1 + v_2 & \\ f(v_3) = 0 & \textit{vecteur propre associé à 0} \\ f(v_4) = bv_4 & \end{cases}$$

**- Calculons** $v_1$ **:** *On résout le système* $Av_1 = v_1$ *avec* $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ *c'est à dire :*

$$\begin{cases} -y+2z-2t=0 \\ -y+z-t=0 \\ x-y=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=0 \\ z=t \end{cases}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*d'où* $E_1 = \{\alpha(0,0,1,1)/\alpha \in \mathbb{K}\}$, *remarquons que* $dim E_1 = 1 \neq 2$ *donc* $f$ *n'est pas diagonalisable.*

**- Calculons** $v_2$ **:** *On résout le système* $(A - I_4)v_2 = av_1$ *:*

$$\begin{cases} -y+2z-2t=0 \\ -y+z-t=0 \\ x-y=a \\ x-y+z-t=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a \\ y=0 \\ z=t \end{cases}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad a \neq 0.$$

**- Calculons** $v_3$ **:** *On résout le système* $Av_3 = 0$ *:*

$$\begin{cases} x-y+2z-2t=0 \\ z-t=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=t=0 \end{cases}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**- Calculons** $v_4$ **:** *On résout le système* $Av_4 = bv_3$ *:*

$$\begin{cases} x-y+2z-2t=0 \\ z-t=0 \\ x-y+z=b \\ x-y+z=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-b \\ z=b \\ t=0 \end{cases}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b \neq 0.$$

*Ainsi*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0,$$

*la matrice de passage est*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.9 La réduction de Jordan

**Définition 2.9.1.** *On appelle bloc de Jordan une matrice carrée du type*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

*Pour les matrices de type (1,1) :* $J(\lambda) = (\lambda)$.

**Propriété 2.9.1.** *Soit* $J(\lambda)$ *une bloc de Jordan d'ordre* $n$*, on a*

$$\begin{aligned} \chi_J(X) &= (-1)^n (X-\lambda)^n \\ \pi_J(X) &= (X-\lambda)^n \\ dim E &= 1 \end{aligned}$$

**Théorème 2.9.1. (Théorème de Jordan)** *Soit* $f \in End(E)$ *tel que* $\chi_f$ *soit scindé.*

1. *Supposons que* $f$ *n'ait qu'une seule valeur propre et que l'on ait :*

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n, \quad \pi_f(X) = (X-\lambda)^\beta, \quad dim E = \gamma.$$

*Il existe alors une base* $B$ *de* $E$ *telle que :*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{J_1(\lambda)} & & & 0 \\ & \boxed{J_2(\lambda)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_\beta(\lambda)} \end{pmatrix} \underset{notation}{=} \widetilde{J}(\lambda),$$

*où*

- *les* $J_k(\lambda)$ *sont les blocs de Jordan ;*
- *l'ordre du plus grand bloc est* $\beta$*,*

- *le nombre des blocs est* $\gamma$,
- *la somme des ordres est* $n$.

2. *Si* $f$ *admet les valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *de multiplicité* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ *c'est à dire :*

$$\chi_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \ldots (X - \lambda_p)^{\alpha_p}, \quad \text{avec } \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{et } \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = n$$

*alors il existe une base* $B$ *de* $E$ *telle que (avec les notation de 1)*

$$M_B(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\widetilde{J}(\lambda_1)} & & & 0 \\ & \boxed{\widetilde{J}(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\widetilde{J}(\lambda_p)} \end{pmatrix} \\ \underline{\quad\alpha_1\quad} \quad \underline{\quad\alpha_2\quad} \qquad \underline{\quad\alpha_p\quad} \end{array}$$

**Exemple 2.9.1.** *Soient* $E$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension 5 et* $f \in End(E)$. *Supposons que :*

$$1)\chi_f(X) = -(X+2)^5, \qquad 2)\pi_f(X) = (X+2)^3 \qquad 3)dim E_{-2} = 2.$$

**• Détèrminons les réduites de Jordan de** $f$ **:**
*Puisque* $dim E_{-2} = 2$ *alors il y a deux blocs de Jordan* $J_1(-2)$ *et* $J_2(-2)$, *l'ordre du plus grand bloc est 3 et la somme des ordres des blocs de Jordan est 5 c'est à dire* $ord J_1(-2) + ord J_2(-2) = 5$ *d'où*

$$J_1(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_2(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*donc il existe une base de* $E$ *telle que la matrice de* $f$ *dans cette base soit de la forme suivante :*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 2.9.2.** *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telles que* $\chi_A$ *ou* $\chi_B$ *sont sindé sur* $\mathbb{K}$. *Pour* *que $A$ et $B$ soient semblables, il faut et il suffit qu'elles aient la même réduite de Jordan [ à l'ordre près des blocs de Jordan].*

### 2.9.1 Endomorphisme nilpotent

**Définition 2.9.2.** *Soit $f \in End(E)$. $f$ est dit nilpotent s'il existe un entier $p$ ($p \in \mathbb{N}$) tel que $f^p = 0$. Le plus petit $p$ vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de $f$.*

**Remarque 2.9.1.** *Soit $f \in End(E)$.*

1. *Si $f$ est nilpotent d'indice de nilpotence $p$ alors*

$$\chi_f(X) = (-1)^n X^n \quad et \quad \pi_f(X) = X^p,$$

*c'est à dire un endomorphisme nilpotent n'a qu'une valeur propre $\lambda = 0$.*

2. *$f$ est diagonalisable si et seulement si $p = 1$ c'est à dire $f = 0$.*

**Exemple 2.9.2.**

1. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ 7 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice 2.*

*En effet,*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ 7 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \\ 7 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Alors on conclut que*

- *le polynôme minimal de $A$ est $\pi_A(X) = X^2$,*
- *le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(X) = X^4$,*

*de plus on a : $E_0 = \{\alpha(1,3,1,0) + \beta(1,0,1,3)/(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2\}$ alors $dimE_0 = 2$.*

• **La réduite de Jordan de A :**

*Puisque $dimE_0 = 2$ alors il y a deux blocs de Jordan $J_1(0)$ et $J_2(0)$ tel que $ordJ_1(0) = 2$ et $ordJ_1(0) + ordJ_2(0) = 4$ donc $ordJ_2(0) = 2$ c'est dire :*

$$J_1(0) = J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*d'où*

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *de* $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ *est nilpotente d'indice 4.*

   *En effet*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & -10 & 15 \\ 10 & -15 & -15 & 35 \\ 35 & -15 & -15 & 10 \\ 15 & -10 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

*et*

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -10 & -10 & 15 \\ 10 & -15 & -15 & 35 \\ 35 & -15 & -15 & 10 \\ 15 & -10 & -10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & -25 & -25 & -25 \\ 200 & -50 & -50 & -50 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \end{pmatrix}$$

*finalement*

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 6 \\ 6 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & -25 & -25 & -25 \\ 200 & -50 & -50 & -50 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \\ 100 & -25 & -25 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On conclut que* $\chi_A(X) = \pi_A(X) = X^4$ *de plus on a* $E_0 = \{\alpha(1,2,1,1)/\alpha \in \mathbb{K}\}$ *c'est à dire que* $dim E_0 = 1$.

• **La réduite de Jordan de A :**

*Puisque* $dim E_0 = 1$ *alors il y a un seul bloc de Jordan* $J_1(0)$ *tel que* $ord J_1(0) = 4$

*donc*

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lemme 2.9.1.** *Soit $f$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $\beta$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\beta = n$, *c'est à dire* $\chi_f(X) = (-1)^n X^n, \quad \pi_f(X) = X^n$.
2. *Il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de $E$ ( on dit que $f$ est cyclique).*
3. *Il existe une base $B$ de $E$ telle que $f$ est représentable par un bloc de Jordan, c'est à dire :*

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* $\mathbf{(1 \overset{?}{\Rightarrow} 2)}$
Puisque $f^{n-1} \neq 0$ alors il existe un vecteur non nul $x$ de$E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrons que $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ est une famille libre :

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}; \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

On a

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^{n-i}(x)$$

en prenant l'image par $f^{n-1}$,$f^{n-2}, \ldots, f$, on trouve

$$0 = \lambda_i f^{n-1}(x) \quad \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

et puisque $f^{n-1}(x) \neq 0$ alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
$\mathbf{(2 \overset{?}{\Rightarrow} 3)}$
Supposons qu' il existe un vecteur $x \in E$, $x \neq 0$, tel que $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de $E$.

On pose : $v_1 = f^{n-1}(x), v_2 = f^{n-2}(x), \ldots, v_k = f^{n-k}(x), \ldots, v_n = x$, alors la matrice de $f$ dans la base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

**(3$\overset{?}{\Rightarrow}$1)**

Si il existe une base $B$ de $E$ telle que

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

alors par un simple calcul on trouve $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$ et $\pi_f(X) = X^n$. □

**Exercice 2.9.1.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. *Montrer que $A$ est nilpotente. En déduire les valeurs propres, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $A$*
2. *Déterminer la réduite de Jordan de $A$.*
3. *Montrer que $A$ est semblable à*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solution.** On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Montrons que A est nilpotente :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   A est nilpotente alors

   (a) les valeurs propres de A sont $\lambda = 0$

   (b) le polynôme minimal de A est $\pi_A(\lambda) = \lambda^2$

   (c) le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3$

2. Déterminons la réduite de Jordan de A :
   cherchons la dimension du sous espace propre ;

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -x - y + 3z = 0 \\ -2x - 2y + 6z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y + 3z\} = \{y(-1,1,0) + z(3,0,1)/y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

   $dimE_0 = 2$ il y a deux blocs de Jordan $J_1(0)$ *et* $J_2(0)$ tels que $ordJ_1(0) = 2$ et $ordJ_1(0) + ordJ_2(0) = 3 \rightarrow ordJ_2(0) = 1$
   Alors la réduite de Jordan de A est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Montrons que A est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a
$$B.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $B$ est nilpotente et elle admet le même polynôme minimal et le même polynome caractéristique que $A$. Pour montrer que $A$ et $B$ sont semblables il suffit de montrer qu'elles ont la même dimension du sous espace propre.

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\} \\ &= \{x(1,0,0) + z(0,0,1)/x, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$dimE_0 = 2$ alors $A$ et $B$ sont semblables.

**Méthode 2 :**

Supposons que $B$ est la matrice associée à un endomorphisme $f$ dans une base $B^c = \{e_1, e_2, e_3\}$, si on pose $C = \{v_1 = e_1, v_2 = e_3, v_3 = e_2\}$ on obtient

$$M_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors la matrice $B$ est semblable à $A$.

### 2.9.2 Puissance d'une matrice trigonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A$ est triganlisable alors

$$\exists P \in GL_n(K), \exists J \in T_{n,s}(\mathbb{K}); \quad A = PJP^{-1}.$$

$J$ est décomposable sous la forme suivante :

$$J = D + N \text{ avec } DN = ND$$

où $D$ est une matrice diagonale et $N$ une matrice nilpotente. Comme $D$ et $N$ commutent, alors on applique la formule du binôme de Newton pour calculer $J^k$, $k \in \mathbb{N}$,

alors

$$J^k = (D+N)^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l D^{k-l} N^l \quad \text{avec } C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$$

Puisque $N$ est nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}(p \leq n)$ tel que : $N^p = 0$.
Alors la somme devient :

$$J^k = (D+N)^k = \sum_{l=0}^{p-1} C_k^l D^{k-l} N^l.$$

**Exemple 2.9.3.** *Soit $f \in End(\mathbb{R}^3)$ représentée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

*Soit $k \in \mathbb{K}$, calculons $A^k$ :*

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

• **Les vecteurs propres :**

**- Pour $\lambda = 2$ :** *Soit $v_1 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,*

$$v_1 \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ -2x-y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y \\ x=-y \end{cases}. \text{ Pour } y=-1,\ v_1=(1,-1,1)$$

**- Pour $\lambda = 4$ :** *Soit $v_2 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,*

$$v_2 \in E_4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3y+z=0 \\ 2x-3y-z=0 \\ -2x-y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-y \\ x=y \end{cases}. \text{ Pour } y=1,\ v_2=(1,1,-1)$$

**Les sous espaces propres** *:*

- $E_2 = \{\alpha(1,-1,1)/\alpha \in \mathbb{R}\}$ *on conclut que $A$ n'est pas diagonalisable puisque $dimE_2 \neq 2$.*
- $E_4 = \{\beta(1,1,-1)/\beta \in \mathbb{R}\}$.

• **La réduite de Jordan de** $A$ **:** *On a*

1. *le polynôme caractéristique de* $A$ *est :* $\chi_A(X) = -(X-2)^2(X-4)$,
2. *le polynôme minimal de* $A$ *est :* $\pi_A(X) = (X-2)^2(X-4)$, *car* $A$ *n'est pas diagonalisable,*
3. $dimE_2 = 1$ *il y a un seul bloc de Jordan* $J(2)$ *tel que* $ordJ(2) = 2$, *c'est à dire :* $J(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
4. $dimE_2 = 1$ *il y a un seul bloc de Jordan* $J(4)$ *tel que* $ordJ(4) = 1$, *c'est à dire :* $J(4) = (4)$.

*d'où*

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

*alors il existe une base* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $M_B(f) = J$ *c'est à dire :*

$$\begin{cases} f(u_1) = 4u_1 & \textit{vecteur propre associé à la valeur propre 4} \\ f(u_2) = 2u_2 & \textit{vecteur propre associé à la valeur propre 2} \\ f(u_3) = u_2 + 2u_3 & \end{cases}$$

• **Cherchons** $u_3$ **:** *Soit* $u_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *tel que*

$$(f - 2I_3)(u_3) = u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y + 2 \\ x = -y \end{cases}$$

*on prend* $u_3 = (0, 0, 2)$ *alors la matrice de passage est*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*D'autre part, on a*

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$$= D + N$$

*$N$ est une matrice nilpotente d'indice 2, en effet, on a*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*de plus on a*

$$DN = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

*alors pour tout $k \in \mathbb{N}$*

$$J^k = (D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N + \underbrace{\sum_{l=2}^{k} C_k^l D^{k-l} N^l}_{=0}$$

$$= \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

• **Finalement ;**

$$A^k = PJ^kP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} \dfrac{2^k+4^k}{2} & (k-2)2^{k-2} + \dfrac{4^k}{2} & k2^{k-2} \\ \dfrac{4^k-2^k}{2} & (2-k)2^{k-2} + \dfrac{4^k}{2} & -k2^{k-2} \\ \dfrac{2^k-4^k}{2} & (k+2)2^{k-2} - \dfrac{4^k}{2} & (k+4)2^{k-1} \end{array}\right)$$

**Exercice 2.9.2.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. *Montrer que 1 est une valeur propre de A.*
2. *Montrer que $(1,2,1)$ est un vecteur propre de A.*
3. *Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de A. En déduire le polynôme minimal de A.*
4. *A est elle inversible ?*
5. *Montrer par récurrence que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-1)^n & 3(-1)^n - 3 & 1-(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & 6(-1)^n - 2 & 2-2(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 3(-1)^n - 3 & 5-(-1)^n \end{pmatrix}$$

**Solution.** On considère la matrice suivante :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. **Montrons que 1 est une valeur propre de A :**
   On a

$$\chi_A(1) \quad = \quad \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3-2 & -3 & 1 \\ 2 & -4-2 & 2 \\ 1 & -3 & 3-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   Alors 1 est une valeur propre de A.

2. **Montrons que (1, 2, 1) est un vecteur propre de A :**
On a
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Alors (1,2,1) est un vecteur propre associé a la valeur propre -1.

3. **Déterminons les valeurs propres :**
$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 3-2\lambda & -3 & 1 \\ 2 & -4-2\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-2\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2-2\lambda & 0 & 2\lambda-2 \\ 2 & -4-2\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-2\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8}(2-2\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4-2\lambda & 2 \\ 1 & -3 & 3-2\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(2-2\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4-2\lambda & 4 \\ 1 & -3 & 4-2\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{8}(2-2\lambda)(4\lambda^2-4) = -(1-\lambda)^2(\lambda+1).
\end{aligned}$$
Alors les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ (racine double) et $\lambda_2 = -1$ (racine simple).

4. **Déterminons les sous espaces propres de A :**
**-Pour** $\lambda = -1$
On a (-1) est une valeur propre simple associée au vecteur (1,2,1) alors le sous espace propre $E_{-1}$ est de dimension 1. On conclut que
$$E_{-1} = \{\alpha(1,2,1)/\alpha \in \mathbb{R}\}$$
**- Pour** $\lambda = 1$
$$\begin{aligned}
E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{c} 3x-3y+z=2x \\ 2x-4y+2z=2y \\ x-3y+3z=2z \end{array}\right.\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{\begin{array}{c} x-3y+z=0 \\ 2x-6y+2z=0 \\ x-3y+z=0 \end{array}\right.\} \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ x = 3y-z \right.\} = \{y(3,1,0)+z(-1,0,1)/y,z \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

On remarque que $dimE_1 = 2$ alors A est diagonalisable. On conclut que le polynome minimal de A est $\pi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-1)$.

5. A est inversible car $detA = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = (1)^2(-1) = -1 \neq 0$

6. **Montrons par récurrence que :**

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 1-(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & 6(-1)^n-2 & 2-2(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 5-(-1)^n \end{pmatrix}$$

Pour n=0, on a

$$A^0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-1 & 3-3 & 1-1 \\ 2-2 & 6-2 & 2-2 \\ 1-1 & 3-3 & 5-1 \end{pmatrix} = I_3 \quad (vraie)$$

.

Pour n=1, on a

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-(-1) & 3(-1)-3 & 1-(-1) \\ 2-2(-1) & 6(-1)-2 & 2-2(-1) \\ 1-(-1) & 3(-1)-3 & 5-(-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix} = A \quad (vraie).$$

supposons l'hypothèse est vraie jusqu'a l'ordre n, et on montre qu'elle est vraie pour n+1 :
On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A.A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 1-(-1)^n \\ 2-2(-1)^n & 6(-1)^n-2 & 2-2(-1)^n \\ 1-(-1)^n & 3(-1)^n-3 & 5-(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10+4(-1)^n & -6(-1)^n-6 & 2+2(-1)^n \\ 4+4(-1)^n & -12(-1)^n-4 & 4+4(-1)^n \\ 2+2(-1)^n & -6(-1)^n-6 & 10+2(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5-(-1)^{n+1} & 3(-1)^{n+1}-3 & 1-(-1)^{n+1} \\ 2-2(-1)^{n+1} & 6(-1)^{n+1}-2 & 2-2(-1)^{n+1} \\ 1-(-1)^{n+1} & 3(-1)^{n+1}-3 & 5-(-1)^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Exercices

**Exercice 2.9.3.** *Soient* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *la base canonique de* $\mathbb{C}^n$ *et* $f$ *l'endomorphisme de* $\mathbb{C}^n$ *défini par :*

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_{i+1} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \\ &\vdots \\ f(e_n) &= e_1 \end{aligned}$$

1. *Calculer* $f^k(e_i)$ *pour* $k = 2, \ldots, n$ *et* $i = 1, \ldots, n$*. En déduire que* $f$ *est diagonalisable.*
2. *Montrer que* $id, f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ *sont linéairement indépendants. En déduire le polynôme minimal.*
3. *Détèrminer les valeurs propres, le polynôme caractéristique et le déterminant de* $f$*.*

**Exercice 2.9.4.** *Soient* $a \in \{1, 2, 3\}$ *et* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Montrer :*

$$A \sim B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_A = \chi_B \\ \pi_A = \pi_B \end{array} \right.$$

**Exercice 2.9.5.** *Soit* $f \in End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ *tel que* $f^2$ *soit diagonalisable.*

1. *On suppose* $det f \neq 0$ *et on note* $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ *les valeurs propres deux à deux distinctes de* $f^2$*. Montrer que le polynôme* $Q(X) = (X^2 - \lambda_1) \cdots (X^2 - \lambda_p)$ *est annulateur de* $f$ *et en déduire que* $f$ *est diagonalisable.*
2. *On suppose que* $det f = 0$ *et* $Ker f = Ker f^2$*. En notant* $\{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p\}$ *les valeurs propres deux à deux distinctes de* $f^2$*, montrer que :*

$$f \circ (f^2 - \lambda_1 id) \circ \cdots \circ (f^2 - \lambda_p id) = 0$$

   *et en déduire que* $f$ *est diagonalisable.*
3. *En tenant compte du résultat ci-dessus, montrer que si* $f \in End_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ *alors*

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow f^2 \text{ est diagonalisable et } Ker f = Ker f^2.$$

4. **Application :** *Donner les conditions necessaires et suffisantes sur les* $a_i$ *pour*

*que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & a_1 \\ & a_2 & \\ & & \\ a_n & & 0 \end{pmatrix}$$

*soit diagonalisable.*

**Exercice 2.9.6.** *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \qquad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

*n'est pas diagonalisable.*

**Exercice 2.9.7.** *Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :*

$$A^3 - 8A^2 + 21A - 18I = 0.$$

**Exercice 2.9.8.** *Soit la matrice*

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. *Montrer que $X^2 - 4X + 4$ est un polynôme minimal de $A$. En deduire les valeurs propres de $A$.*
2. *Déterminer les sous espaces propres de $A$.*
3. *Déterminer la réduite de Jordan de $A$.*
4. *Montrer que $A$ est inversible.*
5. *Montrer que $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}A$.*

**Exercice 2.9.9.** *On considère les deux matrices suivantes*

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -6 & 2 & 6 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que (-1) est une valeur propre de $A$.*

2. *A est elle diagonalisable ?*
3. *Déterminer le polynôme minimal de A.*
4. *Montrer que les matrices A et B sont semblables et déterminer la matrice de passage P telle que $B = P^{-1}AP$.*

**Exercice 2.9.10.** *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que $\alpha \neq \beta$, $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A(X) = (X-\alpha)^4(X-\beta)^2$ et $\pi_A(X) = (X-\alpha)^2(X-\beta)^2$. Quelle sont les réduites de Jordan possibles pour A ?*

**Exercice 2.9.11.** *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$, déterminer la réduite de Jordan J de A et une matrice inversible P telle que $A = PJP^{-1}$.*
2. *Montrer que A est inversible.*

**Exercice 2.9.12.** *Montrer que les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -9 & 8 & 7 & 15 \\ -15 & 14 & 7 & 15 \\ -6 & -10 & 4 & 24 \\ -33 & 26 & 13 & 33 \end{pmatrix}$$

*sont semblables dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.*

**Exercice 2.9.13.** *Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ non diagonalisable. On suppose que A admet une valeur propre simple $\lambda_1$ et une valeur propre double $\lambda_2$. Montrer que A est semblable à*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.9.14.** *Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A^3 + A = 0$ et $A \neq 0$. Montrer que :*

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.9.15.** *Soit la matrice :*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

*En discutant selon les valeurs de $\alpha$, donner une réduite de Jordan ainsi qu'une matrice de passage.*

**Exercice 2.9.16.**

$\star$ *Montrer que les deux matrices suivantes sont semblables :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$\star$ *Détèrminer une matrice inversible $P$ telle que $A_1 = PA_2P^{-1}$.*

**Exercice 2.9.17.**

Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}, = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.
Montrer que $\chi_A = \chi_B$, $\pi_A = \pi_B$ et $A \not\sim B$.

**Exercice 2.9.18.** *On considère la matrice*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}$$

*Calculer $N^2$ et montrer qu'il n'éxiste aucune matrice $X$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que*

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.9.19.** *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que $A$ et $B$ sont nilpotentes.*
2. *Détèrminer la réduite de Jordan de $A$ et $B$. En déduire que $A$ et $B$ sont semblables.*

**Exercice 2.9.20.** *Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ -4 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que $A^2 = 5A$. En deduire les valeurs propres de $A$.*
2. *Détèrminer les sous espaces propres de $A$. $A$ est elle diagonalisable ?*
3. *Détèrminer la réduite de Jordan de $A$.*
4. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad A^n = 5^{n-1}A$.*

**Exercice 2.9.21.** *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

1. *Montrer que $A$ est nilpotente, en déduire les valeurs propres de $A$.*
2. *Détèrminer les sous espaces propres de $A$.*
3. *Détèrminer la réduite de Jordan $J$ de $A$ et une matrice inversible $P$ telle que $J = P^{-1}AP$.*
4. *Calculer $A^n$.*

**Exercice 2.9.22.** *On considere les matrices suivantes*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 12 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. *Sont elles nilpotantes ?*
2. *Déterminer le polynôme minimal de chaque matrice.*
3. *Donner la réduite de Jordan de ces matrices.*
4. *Calculer* $A_i^n$ *pour* $i = 1, 2, 3, 4$.

# CHAPITRE 3

# EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE

## 3.1 Exponentielle d'une matrice

On munit l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) d'une norme par exemple :
si $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$||A|| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

**Définition 3.1.1.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La série $\sum_{k\geq 0} \dfrac{A^k}{k!}$ est normalement convergente sur tout compact. On l'appelle exponentielle de la matrice $A$, et on la note $exp(A) = e^A$.*

**Propriété 3.1.1.** *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, on a*

1. *Si $A.B = B.A$ alors $e^{A+B} = e^A e^B$.*
2. *Si $A$ est inversible alors $e^{A^{-1}} = e^{-A}$.*
3. $e^{{}^tA} = {}^t(e^A)$.
4. $e^{PAP^{-1}} = Pe^AP^{-1}$.

**Remarque 3.1.1.**

1. $e^0 = I_n$ *(0 étant ici la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).*
2. $e^I = \lambda I + \lambda I + \dfrac{\lambda^2 I}{2!} + \cdots + \dfrac{\lambda^k I}{k!} + \cdots = e^\lambda I.$
   *En particulier*
   $$e^I = eI.$$

3. *Si* $A.B \neq B.A$ *alors* $e^{A+B} \neq e^A.e^B$*, par exemple si :*
   $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*. On a*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   *d'autre part on a*

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-1}+e & e-e^{-1} \\ e-e^{-1} & e^{-1}+e \end{pmatrix} = e^{A+B}$$

### 3.1.1 Cas d'une matrice diagonalisable

Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que $A$ est diagonalisable alors il existe une matrice diagonale $D$ est une matrice inversible $P$ telles que : $A = PDP^{-1}$. D'où

$$e^A = Pe^D P^{-1}.$$

**Exemple 3.1.1.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -1 & -8 & 7 \\ 1 & -14 & 11 \end{pmatrix}.$$

*A est diagonalisable (voir Exemple 2.4.1), c'est à dire :*

$$A \sim D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

*avec*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad et \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Calculons** $e^A$ **:** *On a*

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

*Alors*

$$\begin{aligned} e^A = Pe^D P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2} - 2e^2 + 2e^3 & e^{-2} + 3e^2 - 4e^3 & 2e^3 - e^2 - e^{-2} \\ e^{-2} - 4e^2 + 3e^3 & e^{-2} + 6e^2 - 6e^3 & 3e^3 - 2e^2 - e^{-2} \\ e^{-2} - 6e^2 + 5e^3 & e^{-2} + 9e^2 - 10e^3 & 5e^3 - 3e^2 - e^{-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.1.2 Cas d'une matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Supposons que $A$ est nilpotente alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que : $A^k = 0$. D'où

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{p-1}}{(p-1)!}.$$

**Exemple 3.1.2.** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ -3 & -7 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$A$ **est nilpotente :**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ -3 & -7 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ -3 & -7 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 12 \\ 9 & 15 & 12 \\ -18 & -30 & -24 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ -3 & -7 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 15 & 12 \\ 9 & 15 & 12 \\ -18 & -30 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*alors $A$ est nilpotente d'indice 3.*

• **Calculons** $e^A$ **:**

$$e^A = I_3 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 13 & 11 \\ -3 & -7 & -5 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & 15 & 12 \\ 9 & 15 & 12 \\ -18 & -30 & -24 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{29}{2} & \frac{41}{2} & 17 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -12 & -16 & -13 \end{pmatrix}$$

### 3.1.3 Cas d'une matrice triangulaire avec une seule valeur propre

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire avec une seule valeur propre sur sa diagonale alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et une matrice nilpotente $N$ tels que : $A = \lambda I_n + N$. On suppose que l'indice de nilpotence de $N$ est $p$ $(p \leq n)$ alors

$$e^A = e^{\lambda I} e^N = e^{\lambda}(I + N + \frac{N^2}{2!} + \cdots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}).$$

**Exemple 3.1.3.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. *On a*

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

*avec*

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*et*

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*alors*

$$e^A = e^3(I + N + \frac{1}{2}N^2) = e^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & e^3 & \frac{3}{2}e^3 \\ 0 & e^3 & e^3 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

### 3.1.4 Cas d'une matrice triangulaire

**Lemme 3.1.1.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix}$ *où pour tout* $i \in \{1, \cdots, r\}$, $A_i$ *est une matrice carrée. Alors*

$$e^A = \begin{pmatrix} \boxed{e^{A_1}} & & & 0 \\ & \boxed{e^{A_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{e^{A_r}} \end{pmatrix}.$$

Le lemme se démontre facilement en utilisant le fait que

$$A^k = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^k} & & & 0 \\ & \boxed{A_2^k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r^k} \end{pmatrix}.$$

**Exemple 3.1.4.** *On considère la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

*A est trigonalisable (Exemple 2.9.3), c'est à dire :*

$$A \sim J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*avec*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On a*

$$e^J = \begin{pmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^2\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

*alors*

$$e^A = Pe^JP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2+e^4 & e^4 & e^2 \\ e^4-e^2 & e^4 & -e^2 \\ e^2-e^4 & 2e^2-e^4 & 3e^2 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 Dérivée

Si $A$ est une matrice dont les coéfficients $a_{ij}($ sont des fonctions dérivables de la variable t, alors la dérivée de $A$ est la matrice $A'$ dont les coefficients sont les dérivées $a'_{ij}$. La dérivée d'une matrice vérifie les propriétés usuelles des dérivées. En particulier, si les matrices $A$ et $B$ sont dérivables, alors le produit aussi et on a

$$(AB)' = A'B + AB' \qquad \text{(attention le produit n'est pas commutatif).}$$

**Remarque 3.2.1.** *Si les coéfficients de A sont constantes alors $A'$ est la matrice nulle.*

**Proposition 3.2.1.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $t \to e^{tA}$ est dérivable et on a :*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

*Démonstration.* On a

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{tA} &= \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = \frac{d}{dt}(I + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j t^j}{j!} \\ &= Ae^{tA}\end{aligned}$$

□

## 3.3 Résolution d'un système différentiel homogène

Un système différentiel linéaire homogène est un système d'équations différentielles de la forme :

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & \\ \dfrac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

où les $x_i$ sont des fonctions dirivables sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et les $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) pour tout $(1 \leq i, j \leq n)$.

**Écriture matricielle :**

On pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \frac{d}{dt}X = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avec cette notation, le système différentiel (S) est équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = AX$$

Résoudre le système (S), c'est trouver tous les vecteurs $X$ qui le vérifient.

**Théorème 3.3.1.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les solutions du système différentiel homogène $\frac{d}{dt}X = AX$ sont les fonctions dérivables $X : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n$ définies par*

$$X = e^{tA}X_0$$

*où $X_0$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{K}^n$.*

**Corollaire 3.3.1.** *(Théorème de Cauchy-Lipschitz). Pour $X_0 \in \mathbb{K}^n$ fixé, il existe une et une seule solution $X$ vérifiant le système différentiel $\frac{d}{dt}X = AX$ avec $X(0) = X_0$ est la condition initiale.*

**Corollaire 3.3.2.** *L'ensemble des solutions du système différentiel $\frac{d}{dt}X = AX$ (avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.*

## 3.3.1 Cas d'une matrice diagonalisable

**Théorème 3.3.2.** *Soient $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ diagonalisable à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres de $A$ et $B = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ une base de vecteurs propres associés. Alors, l'ensemble des solutions de $\frac{d}{dt}X = AX$ sur un intervalle quelconque $I$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, et*

$$X = k_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + k_2 e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}v_n \quad k_i \in \mathbb{K} \text{ pour } 1 \leq i \leq n$$

*Si, de plus, on fixe la condition initiale $X(0) = X_0$ alors la solution existe et unique.*

*Démonstration.* Soit $P = P(B^c, B)$ avec $B^c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
On a

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

On pose : $Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY$ et puisque la matrice $P$ est constante alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y &= P^{-1}\frac{d}{dt}X = P^{-1}AX = P^{-1}APY \\ &= DY \end{aligned}$$

d'où le système $(S)$ est équivalent au $\quad \dfrac{d}{dt}Y = DY.$

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors le système devient :

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \lambda_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = \lambda_2 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = \lambda_n \end{cases} \quad \text{qui se résout par} \quad \begin{cases} y_1 = k_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = k_2 e^{\lambda_2 t} \\ \quad\vdots \\ y_n = k_n e^{\lambda_n t} \end{cases} \qquad \text{avec } k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{K}.$$

Enfin, puisque $X = PY$ alors :

$$X = k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + k_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

On remarquera que le calcul de $P^{-1}$ est inutile.

**Exemple 3.3.1.** *On considère le système suivant*

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 3y + 3z \end{cases}$$

*Le système(S)est équivalent à :*

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\frac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$

$$A \sim D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad avec \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*alors la solution de (S) est de la forme :*

$$\begin{aligned} X &= k_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 e^{4t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} k_1 e^{-2t} + k_2 e^{2t} - k_3 e^{4t} \\ k_1 e^{-2t} - k_2 e^{2t} + k_3 e^{4t} \\ -k_1 e^{-2t} + k_2 e^{2t} + k_3 e^{4t} \end{pmatrix}, \qquad avec\ k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Cas d'une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A$ admet des valeurs propres complexes non réells alors ces valeurs sont deux à deux conjuguées et on peut prendre des vecteurs propres deux à deux conjugués c'est à dire : si $v = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ est un vecteur propre associé à une valeur propre $\lambda$ alors $\overline{v} = (\overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots, \overline{z_n})$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$. Pour un tel couple :

$$Vect(e^{\lambda t} v, e^{\overline{\lambda} t} \overline{v}) = Vect(Re(e^{\lambda t} v), Im(e^{\lambda t} v))$$

avec $Vect(e^{\lambda t} v, e^{\overline{\lambda} t} \overline{v})$ et $Vect(Re(e^{\lambda t} v), Im(e^{\lambda t} v))$ sont les sous espaces vectoriels engendrés respectivement par $\{e^{\lambda t} v, e^{\overline{\lambda} t} \overline{v}\}$ et $\{Re(e^{\lambda t} v), Im(e^{\lambda t} v))\}$.
En effet, sachant que

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} v &= Re(e^{\lambda t} v) + i\ Im(e^{\lambda t} v) \\ e^{\overline{\lambda} t} \overline{v} &= (\overline{e^{\lambda t} v}) = Re(e^{\lambda t} v) - i\ Im(e^{\lambda t} v) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} Re(e^{\lambda t} v) &= \frac{e^{\lambda t} v + e^{\overline{\lambda} t}}{2} \\ Im(e^{\lambda t} v) &= \frac{e^{\lambda t} v - e^{\overline{\lambda} t}}{2i} \end{aligned}$$

Or, $Re(e^{\lambda t} v)$ et $Im(e^{\lambda t} v)$ est une famille libre des solutions du système différentiel sur $\mathbb{R}$. Ce qui donne le théorème suivant : □

**Théorème 3.3.3.** *Si $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ alors pour les valeurs* *propres non réelles, il suffit de remplacer dans la famille génératrice des solutions*

$$\alpha e^{\lambda t}v + \beta e^{\overline{\lambda} t}\overline{v}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

*par*

$$k_1 FRe(e^{\lambda t}v) + k_2 Im(e^{\lambda t}v); \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 3.3.2.** *On considére le système différentiel suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + 2y + 2z \end{cases}$$

*L'écriture matricielle de* $(S)$ *est :*

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\frac{dX}{dt}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X}$$

*Les valeurs propres de* $A$ *sont* $1, 2i, -2i$ *et les vecteurs propres associés sont* $v_1 = (\frac{1}{2}, 0, 1)$, $v_2 = (1, i, 1)$ *et* $v_3 = (1, -i, 1)$ *respectivement.*

*Les solutions sont donc :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

$$= \alpha e^{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t}(cost + isint) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{2t}(cost - isint) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha e^{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\beta + \gamma) e^{2t} \begin{pmatrix} cost \\ -sint \\ cost \end{pmatrix} + i(\beta - \gamma) e^{2t} \begin{pmatrix} sint \\ cost \\ sint \end{pmatrix}$$

*alors les solutions sur* $\mathbb{R}$ *sont de la forme*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1 e^{t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{2t} \begin{pmatrix} cost \\ -sint \\ cost \end{pmatrix} + k_3 e^{2t} \begin{pmatrix} sint \\ cost \\ sint \end{pmatrix}; \qquad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}.$$

### 3.3.3 Cas d'une matrice trigonalisable non diagonalisable

Supposons que A est triangularisable, non diagonalisable c'est à dire $(A \sim J)$ avec $J$ la réduite de Jordan associée à $A$ et soit P la matrice de passage telle que

$$J = P^{-1}AP$$

On pose : $X = PY$, on obtient : $\frac{d}{dt}X = P\frac{d}{dt}Y$, car P est constant.

Le système différentiel (S) est équivalent à : $\frac{d}{dt}Y = JY$ qui se résout par $Y = e^{Jt}Y_0$ avec $Y_0$ un vecteur quelconque. D'où

$$PY = Pe^{Jt}P^{-1}PY_0 \Rightarrow X = Pe^{Jt}X_0$$

**Exemple 3.3.3.** *On considère le système suivant*

$$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z \\ \dfrac{dy}{dt} & = -2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ \dfrac{dz}{dt} & = 2x + \frac{5}{2}y + \frac{5}{2}z \end{cases}$$

*Le système $S$ est équivalent à*

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & . \\ \dfrac{d}{dt}X & = & A & X & \end{array}$$

*La matrice $A$ est semblable à*

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*D'ou le système (S) se résout par*

$$\begin{aligned} X = Pe^{Jt}X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{2t} & 0 \\ e^{-2t} & -e^{2t} & 0 \\ -e^{-2t} & e^{2t} & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}x_0 + e^{2t}y_0 \\ e^{-2t}x_0 - e^{2t}y_0 \\ -e^{-2t}x_0 + e^{2t}y_0 + e^{2t}z_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1}$$

## Cas d'une matrice nilpotente

**Exercice 3.3.1.** *On considère la matrice suivante :*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

- *Montrer que $B$ est nilpotente.*

- *Calculer $e^B$.*
- *Résoudre le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 2x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} &= -y + z \\ \dfrac{dz}{dt} &= 2x - y - z \end{cases}$$

**Solution.** On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

- **Montrons que $B$ est nilpotente :**

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $B$ est nilpotente d'indice 3.

- Calculons $e^B$.

$$\begin{aligned} e^B &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = I_3 + B + \frac{B^2}{2!} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Résolvons le système différentiel suivant :**

$$(S): \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 2x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} &= -y + z \\ \dfrac{dz}{dt} &= 2x - y - z \end{cases}$$

La forme matricielle du système (S)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système $(S)$ est équivalent à

$$\frac{d}{dt}X = BX \Rightarrow X = e^{Bt}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Calculons $e^{Bt}$

$$\begin{aligned} e^B &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{tB^k}{k!} = I_3 + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t & -t & -t \\ 0 & -t & t \\ 2t & -t & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 & 0 & -t^2 \\ t^2 & 0 & -t^2 \\ t^2 & 0 & -t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2t+t^2 & -t & -(t+t^2) \\ t^2 & 1-t & t-t^2 \\ 2t+t^2 & -t & 1-t-t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors la solution du système $(S)$ est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 1+2t+t^2 & -t & -(t+t^2) \\ t^2 & 1-t & t-t^2 \\ 2t+t^2 & -t & 1-t-t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 + (2k_1 - k_2 - k_3)t + (k_1 - k_3)t^2 \\ k_2 + (k_3 - k_2)t + (k_1 - k_3)t^2 \\ k_3 + (2k_1 - k_2 - k_3)t + (k_1 - k_3)t^2 \end{pmatrix}$$

## Exercices

**Exercice 3.3.2.** *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

1. *Montrer que $A$ est diagonalisable est inversible. En déduire le polynôme minimal.*
2. *Calculer $A^{-1}$.*
3. *Calculer $e^A$ et $e^{-A}$.*

**Exercice 3.3.3.** *Soient $a \in ]-1, 1[$, $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $B$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $e^B = A$.*

**Exercice 3.3.4.** *Calculer $e^{A_i}$ ; $1 \leq i \leq 3$*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 & 6 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.3.5.**

1. *Résoudre l'équation $e^X = I_n$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ est diagonalisable si et seulemet si $e^A$ l'est.*

**Exercice 3.3.6.** *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a & 1 \\ 1-b & a & a-1 & -b \\ b & -a & 1-a & 1+b \\ 0 & a & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), \ \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

1. *Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $A$ soit diagonalisable.*
2. *A l'aide du spectre de $A$, montrer que $A + I$ est inversible. Calculer $(A + I)^{-1}$ lorsque $A$ est diagonalisable.*
3. *Soit $a = 1$ et $b = 0$ :*

(a) *Calculer* $A^n$.

(b) *Résoudre le système* $\dfrac{dX}{dt} = AX$.

**Exercice 3.3.7.** *Résoudre les systèmes différentiels suivants :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -x+y \\ \frac{dy}{dt} &= -y+z \\ \frac{dz}{dt} &= x-y \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 7x+4y \\ \frac{dy}{dt} &= -12x-7y \\ \frac{dz}{dt} &= 20x+11y-6z-12w \\ \frac{dw}{dt} &= -12x-6y+6z+11w \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 3x-y+z \\ \frac{dy}{dt} &= 2x+z \\ \frac{dz}{dt} &= x-y+2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x+7y-4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x+15y-12z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x+14y-14z \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x-3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x-13y+16z \\ \dfrac{dz}{dt} = 13x-7y+4z \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x-y+2z \\ \dfrac{dy}{dt} = x+3y-2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -3x-y+6z \end{cases}.$$

# TABLE DES NOTATIONS

Cette table réprensente quelques symboles utilisées dans ce manuscrit.

- $\mathbb{N}$ : L'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{Z}$ : L'anneau des entiers relatifs.
- $\mathbb{K}$ : Un corps commutatif peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{K}^n$ : $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n
- $\mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ : L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.
- $End(E), \mathfrak{L}_{\mathbb{K}}(E)$ : L'ensemble des endomorphismes de $E$.
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ : L'ensemble des matrices de type $(m, n)$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ : L'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- $GL_n(\mathbb{K})$ : L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n.
- $D_n(\mathbb{K})$ : L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.
- $T_{n,s}(\mathbb{K})$ : L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n.
- $\mathbb{K}[X]$ : L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ : L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $\chi_A$ : Le polynôme caractéristique de $A$.
- $\pi_A$ : Le polynôme minimal de $A$.
- $E_\lambda$ : Le sous-espace propre associé à $\lambda$.
- ${}^tA$ : La transposée de $A$.
- $Vect(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ : Le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$.
- $dim(E)$ : Dimension d'un espace vectoriel $E$. item $Im(f)$ : L'image d'une application linéaire $f$.
- $Ker(f)$ : Le noyau d'une application linéaire $f$.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Grifone, *Algèbre linéaire*, Cépaduès-Éditions,1995.

[2] J. M. Monier, *Algèbre 2, Cours et 500 exercices corrigés*, 2eédition, DUNOD, Paris, 1998.

[3] J. M. Monier, *Algèbre 1, Cours et 600 exercices corrigés*, 2eédition, DUNOD, Paris, 2000.