الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
والبـحـث الـعـلمــي وزارة الـتـعلــيـم الـعـالي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة مصطفى اسطمبولي
معسكر

Université MUSTAPHA Stambouli
Mascara

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم: العلوم الاقتصادية

ملزمة دروس موجهة لطلبة السنة الثانية ماستر تخصص تحليل اقتصادي واستشراف

في مقياس:

نظرية الألعاب

إعداد الأستاذ: مولاي علي هواري

السنة الجامعية: 2023/2022

الفهرس

الفصل الرابع: المباراة ذات المعلومة غير التامة

مقدمة

يرتكز الاقتصاد الصناعي الحديث عند تحليل التفاعلات الاستراتيجية بين المؤسسات على نظرية الألعاب الاستراتيجية، خاصة في ظل تناظر المعلومات وحالة عدم اليقين التي أصبحت تميز أغلب الحالات. طبيعة الحركة قد تؤثر وتغير الكثير من المجريات والنتائج، وبالتالي إهمال هذا المتغير عند تحليل التفاعلات الاستراتيجية قد يؤثر على صحة هذه النتائج من الناحية النظرية والتجريبية. كذلك نظرية الألعاب تساعد كثيرا المؤسسات على التنبؤ بتصرفات المنافسين باعتبارها مجموعة من الوسائل التي تهدف إلى وصف وتنبؤ نتيجة استراتيجيات مجموعة من المتعاملين، في حالة ما إذا أثرت استراتيجية كل متعامل على عوائد المتعاملين الآخرين. هذا يساعد المؤسسات على اتخاذ القرار السديد.

عدم إدراج المتغيرات المذكورة آنفا في النموذج والمتمثلة أساسا في هيكل المباراة والتي تدخل في إطار حالات عدم اليقين (على سبيل المثال طبيعة المنافس من حيث التكلفة)، كذلك طبيعة المعلومة من حيث ملاحظة الاستراتيجية التي يتبناها المنافس من عدمه (على سبيل المثال الكمية المعروضة أو السعر) سيؤثر من دون شك على صحة النتائج وصحة القرار وبالتالي الابتعاد عن التوازن الفعلي.

كذلك بالنسبة لطاب العلوم الاقتصادية، وبعيدا عن ظروف المنافسة التامة والكاملة والتي لا تتحقق إلا نادرا، نظرية الألعاب هي مهمة جدا لاكتمال تكوين الطالب في هذا الإطار بما يسمح له بتحليل عديد الحالات خارج نطاق المنافسة التامة.

تحتوي هذا المطبوعة على أربعة فصول هي مستوحاة من برنامج الماستر تخصص تحليل اقتصادي واستشراف، الاقتصاد الصناعي والاقتصاد الكمي.

في الفصل الأول تطرقنا إلى مدخل إلى نظرية الألعاب من خلال عرض المفاهيم الأساسية والتطور وأهم الرواد، كذلك تطرقنا في هذا الفصل إلى طريقة عرض المباراة، الحل والتوازن.

في الفصل الثاني استعرضنا توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية والمختلطة في مباريات ذات المعلومة التامة وغير الكاملة.

في الفصل الثالث تناولنا توازن ناش في حالة مباراة ذات المعلومة التامة والكاملة وأهم التعديلات الواجب إدخالها على توازن ناش لجعله يتناسب مع هذا النوع من المعلومة.

مقدمة

في الفصل الرابع والأخير تطرقنا إلى المباريات ذات المعلومة غير التامة وهي الحالة التي يجهل فيها اللاعب أحد العناصر المهمة للمباراة أو هيكل المباراة، وتطرقنا إلى مفهوم توازن ناش البايزي والذي هو مناسب لهذا النوع من المباريات.

في جميع الفصول التي قسمت حسب طبيعة المعلومة تم إرفاقها بحالة اقتصادية في احتكار القلة وفقا لكل نوع من المعلومة. كذلك كل فصل أرفق بمجموعة من التمارين المحلولة. أما عن طريقة العرض جعلناها لا تستوجب أي مكتسبات مسبة للقارئ سواء من الناحية الاقتصادية أو من حيث المكتسبات في الرياضيات. الهدف من هذه الدروس ليس التطرق إلى نظرية الألعاب من وجهة نظر الرياضيات بقدر ما نهدف إلى التركيز على التفاعلات الاستراتيجية والجانب الاقتصادي لنظرية الألعاب.

الفصل الأول: مفاهيم أساسية في نظرية الألعاب

I. مدخل إلى نظرية الألعاب

II. الحل والتوازن لمباراة

III. تمارين

I. مدخل إلى نظرية الألعاب

درسنا في الاقتصاد الجزئي وضعيات بدون تفاعل استراتيجي بين المتعاملين (أفراد ومؤسسات)، في العرض والطلب مثلا، لم نأخذ بعين الاعتبار كيف ستؤثر إستراتيجية مؤسسة أو مجموعة من المؤسسات الأخرى على عرض مؤسسة معينة. المؤسسة تقرر الكمية التي تريد بيعها واحتمال أن تقرر السعر كذلك، يجب أن تقوم بذلك مع الأخذ بعين الاعتبار طبيعة المنافسة (قرارات المنافسين الآخرين). على سبيل المثال، إذا قامت المؤسسة ببيع منتجها بسعر أقل ستجد مشترين محتملين، لكن قد يكون هذا السعر غير كاف لهذه المؤسسة من حيث الوصول إلى الأرباح المرجوة أو حتى تغطية التكلفة الحدية. إذن يجب إيجاد السعر الذي يسمح للمؤسسة ببيع المنتج والاستجابة إلى تطلعاتها من حيث التكلفة والأرباح. لكن هذا ليس مرتبط بالمؤسسة وحدها أو المشترين المحتملين، لكن أيضا باستراتيجية البائعين الآخرين.

بعيدا عن الوضعيات النادرة للمنافسة التامة والكاملة، المؤسسات في السوق يواجهون هذا النوع من المشكلات. **كم كمية يجب وضعها في السوق وبأي سعر مع أخذ بعين الاعتبار استراتيجيات المنافسين؟ أي تأثير للمؤسسة على قرارات المؤسسات الأخرى؟** المؤسسات يجب عليهم ليس فقط معرفة مميزات الطلب في السوق، لكن أيضا التنبؤ بإستراتيجيات المؤسسات المنافسة (anticipation). الوضعيات يتم تحليلها بمساعدة ما يسمى **بنظرية الألعاب**.

نظرية الألعاب هي مجموعة من الوسائل تهدف إلى وصف وتنبؤ نتيجة استراتيجيات (actions ou stratégies) مجموعة من المتعاملين، بتفاعلهم مع بعضهم البعض، في حالة ما إذا أثرت إستراتجية كل متعامل على عوائد المتعاملين الآخرين (يسمون في نظرية الألعاب باللاعبين).

الفرضيات الأساسية لنظرية الألعاب فهي كالاتي:

- المقررون هم عقلانيون: يبحثون عن تعظيم عائداتهم.
- المقررون يأخذون بعين الاعتبار المعارف التي هي بحوزتهم والتوقعات المبنية على أساس تصرفات الآخرون (يفكرون بطريقة إستراتيجية).

نظرية الألعاب تطورت في الأصل من قبل علماء الرياضيات خاصة John Von Neumann و Emil Borel و Ernst Zermelo في سنوات 1920 واهتمت خاصة بألعاب المجتمع .

سنة 1944 Oskar Morgenstern أراد أن يعزز العلوم الاقتصادية بأسس متينة، تعاون مع John Von Neumann . فكرتهم الأساسية هي الإتيان بمباراة إستراتيجية (Jeu) بين أطراف عقلانيين ونظرية الألعاب الإستراتيجية هي الوسيلة الأساسية المستخدمة في هذا الإطار لتحليل هذه التفاعلات الإستراتيجية.

نظرية الألعاب تطورت بعد ذلك في سنوات 1950 بفضل أعمال John Nash، هو عالم رياضيات أمريكي(1928 - 2015). أعماله في نظرية الألعاب مكنته من نيل جائزة نوبل للاقتصاد عام 1994 . في عام 1951، ناش أعطى مفهوم عام لحل الألعاب غير التعاونية: أي الوضعيات التي تكون فيها قرارات المتعاملون في آن واحد ومن دون تفاهم. التوازنات في الألعاب غير التعاونية تم تسميتها لاحقا توازنات ناش "équilibres de Nash".

1. مختلف أصناف المباريات

1.1. المباريات التعاونية والمباريات غير التعاونية (Jeux coopératifs et jeux non-coopératifs):

الكيان الأساسي لنظرية الألعاب هو اللاعب، اللاعب يمكن أن يمثل كفرد وحيد أو مجموعة من الأفراد يأخذون قرارات.

مباراة تعاونية هي مباراة كل اللاعبين فيها إما يربحون معا أو يخسرون معا. بدلا من اللعب في صفوف متعارضة، واحد ضد الآخر، اللاعبون يلعبون معا لتحقيق هدف مشترك، بعيدا عن المنافسة. المباراة التعاونية تستلزم وجود اتصال بين الطرفين، والهدف منها تحقيق مصلحة الجميع.

في المباريات غير التعاونية اللاعبون لا يتصلون أو لا يمكنهم الاتصال ببعضهم البعض، كل واحد يبحث عن أحسن القرارات لمصلحته فقط (أي يبحث عن تعظيم عوائده الشخصية فقط). المؤسسات المكونة للاحتكار الثنائي "لكورنو " (Duopole de Cournot) تدخل في إطار المباريات غير التعاونية. في حين المؤسسات المكونة للكارتل (un cartel) التي تهدف إلى تحقيق هدف مشترك تدخل في إطار المباريات التعاونية.

2.1. مباراة الحركة المتزامنة ومباراة الحركة التالية (Jeux simultanés et jeux séquentiels):

مباريات الحركة المتزامنة (أو مباريات إستراتيجية) أين كل لاعب يختار خطته مرة واحدة في بداية المباراة. بالنتيجة خيارات جميع اللاعبين هي خيارات متزامنة الحركة. أيضا في الوقت الذي قام فيه اللاعب باتخاذ القرار لم يخبر بخيارات الآخرين.

في المقابل، مباراة الحركة التالية (jeu séquentiel) كل لاعب يتخذ قراراته ليس فقط في بداية المباراة، لكن في كل مرة يجب عليه فعلا أن يتخذ قرار (أو: اتخاذ القرارات من قبل اللاعبين يكون الواحد بعد الآخر وليس في آن واحد).

Jeu séquentiel = jeu dynamique

Jeu simultané = jeu statique = jeu stratégique

3.1. طبيعة المعلومات (La nature de l'information):

المعلومة الكاملة والمعلومة غير الكاملة

المعلومة الكاملة (information parfaite): نقول عن مباراة أنها ذات المعلومة الكاملة إذا كان كل لاعب يعلم بشكل كلي بقرارات اللاعبين الآخرين.

المعلومة غير الكاملة (information imparfaite): إذا جهل كل لاعب بقرارات اللاعبين الآخرين التي أجريت قبله.

لعبة الشطرنج هي مباراة ذات المعلومة الكاملة، لأن كل لاعب يرى الضربات (les coups) الملعوبة. في حين لعبة "الحجرة، الورقة والمقص" هي مباراة ذات المعلومة غير الكاملة.

المعلومة التامة والمعلومة غير التامة

نقول عن مباراة أنها ذات المعلومة التامة (jeu à information complète) إذا علم كل واحد من المشاركين (اللاعبين) بما يلي:

- مجموعة خياراته.
- مجموعة خيارات اللاعبين الآخرين (الخيارات المتاحة)، والعائد المقابل لكل منها.

- دوافع اللاعبين الآخرين ودوافعه أيضا.

أي في مباراة المعلومة التامة اللاعب يعلم جيدا قواعد اللعب، بالنتيجة فإن في مباراة المعلومة غير التامة (jeu à information incomplète) فإن اللاعب يجهل قواعد اللعب.

2. تعريف وعرض لوضعيات تفاعل (Définition et représentation des situations d'interaction):

العناصر التي تميز المباريات غير التعاونية (non-coopératif) هي كالتالي:

- عدد قليل من المتعاملين (اللاعبين) يتفاعلون.
- قرارات كل متعامل تؤثر على عوائد الآخرين.
- الأخذ بعين الاعتبار المعلومة التي يمتلكها كل متعامل عند أخذ قراره.
- الأخذ بعين الاعتبار حركة اتخاذ القرار مع الوقت (قرارات متزامنة الحركة وقرارات الحركة التالية).

القرارات المتزامنة الحركة تعرض غالبا في شكل جدول ويطلق عليه **الصيغة العادية للمباراة** (jeu en forme normale) ومباراة الحركة التالية (jeu séquentiel) تمثل على شكل شجرة ويطلق عليها **الصيغة الشاملة للمباراة** (jeu en forme extensive).

تعريف 1

المباراة توصف بالعناصر التالية:

- مجموعة ب n من اللاعبين، $\mathrm{I} \in \{1, 2, 3, \dots \dots \dots \mathrm{n}\}$.
- لكل لاعب i، $i \in \mathrm{I}$ مجموعة من الاستراتيجيات (تصرفات) $\mathrm{S_i}$ التي تحتوي على كل الاستراتيجيات المكنة لهذا اللاعب. $s_\mathrm{i} \in \mathrm{S_i}$ هي إستراتيجية خاصة للاعب i .

بالنتيجة، $S_i = s_i^1, s_i^2, s_i^3 \dots \dots \dots s_i^{K_i}$، بحيث K_i هي الاستراتيجيات الممكنة للاعب i. إذا اختار كل لاعب i الإستراتيجية s_i يمكننا عرض النتيجة (profil des stratégies) بواسطة شعاع الذي يحتوي على كل الاستراتيجيات:

$$s \equiv (s_1, s_2, \dots \dots, s_n)$$

- لكل لاعب i دالة عوائد (fonction de gain) U_{i} ، التي تمثل تفضيلات اللاعب i، وتعطي قيمة للاعب i مقابل كل نتيجة من المباراة: $U_{\mathrm{i}}(s)$ هي عدد حقيقي.

1.2. المباراة والإستراتيجية (jeu et stratégie)

<u>المباراة 01</u>

أنتم مع شريك مجهول الذي يلعب في نفس الوقت معكم ولا يمكنكم التواصل معه. الهدف من المباراة هو الحصول على أكبر عدد من النقاط. أنتم وشريككم لديكم الاختيار بين لونين: الأحمر (R) أو الأسود (N).

- ✓ إذا اخترتم N، ستربحون 7 نقاط، مهما يكن اللون الذي اختاره شريككم، هذا الأخير يربح 3 نقاط إذا لعب N و4 نقاط إذا لعب R.
- ✓ إذا لعبتم R وشريككم لعب N، ستربحون 3 نقاط وهو يربح 4 نقاط.
- ✓ إذا لعبتم R وشريككم لعب أيضا R ستربحون 10 نقاط وهو 5 نقاط.

المباراة ستعرف لاعبين اثنين، معطياتها هي موضحة في الجدول التالي:

اللون		عدد النقاط	
أنتم	شريككم	أنتم	شريككم
N	N	7	3
N	R	7	4
R	N	3	4
R	R	10	5

الوضعية أعلاه تضعنا أمام مباراة (jeu) لأنها تخص شخصين في تفاعل استراتيجي (en interaction stratégique) ، اختيار كل واحد يؤثر على وضعية الآخر.

بما أن اللاعبين سئلا منفصلين، من دون أي اتصال بينهما ودون الالتزام باتخاذ قرارات معينة، نحن نتكلم عن مباراة غير تعاونية (jeu non coopératif).

في المباراة 1، اللاعبان لعبا في وقت واحد: نحن نتكلم إذن عن مباراة ثابتة (jeu statique) أو مباراة الحركة المتزامنة (jeu simultané).

أول مفهوم استراتيجي في نظرية الألعاب هو الإستراتيجية.

***الإستراتيجية:** هي خطة عمل (plan d'action) الخاصة بمجموعة من القرارات التي يجب أن يتخذها اللاعب خلال المباراة.*

- في حالة مباراة متزامنة الحركة مثل المباراة 1، لكل لاعب قرار وحيد وإستراتيجيته تتزامن مع هذا القرار الوحيد. سنرى أن في حالة المباريات الديناميكية (jeux dynamiques) أو مباريات الحركة التالية (jeux séquentiels) اتخاذ القرار لا يكون مرة واحدة وإنما في أكثر من مرة.
- في المباراة 1، لدينا لاعبان ("أنت" و"شريكك") اللذان يجب أن يختارا بين إستراتيجيتين (N و R) لكي يعظما عدد نقاطهما. R وN تسمى استراتيجيات أصلية (stratégies pures).

تعريف 2

عدد اللاعبين (هنا هو 2) ، عدد الاستراتيجيات الأصلية لكل لاعب (R وN)، ترتيب تدخل كل لاعب (في وقت واحد) ، المعلومة التي يحوزها كل لاعب (هنا: معرفة هيكل المباراة أو قواعد اللعب، لكن لا يوجد أي معلومة عن الإستراتيجية التي سيتبناها الشريك أو اللاعب الثاني) وعوائد اللاعبين (هنا عدد النقاط)، في مختلف السيناريوهات الممكنة توصف المباراة 1 على أنها مباراة غير تعاونية (non-coopératif).

لعرض مباراة معينة هنالك احتمالين. عندما يلعب اللاعبون في وقت واحد كما في حالة المباراة 1، يفضل عرض المباراة بالشكل العادي (forme normale) يسمى أيضا استراتيجي، أي على شكل جدول يعرض عوائد كل اللاعبين وفقا لاستراتيجياتهم المختارة.

2.2. الصيغة العادية للمباراة (forme normale)

تعريف مباراة بالصيغة العادية يجب أن تجيب على ثلاثة أسئلة التالية:

1. من يلعب؟
2. ماهي الاستراتيجيات المتاحة لكل لاعب؟
3. ماهي القيمة التي يحصل عليها كل لاعب المقابلة لمختلف النتائج الممكنة للمباراة؟

فيما يخص المباراة 1، عرضها بالصيغة العادية هو على النحو التالي:

الجدول 1.1. الصيغة العادية للمباراة 1

		Joueur 02(votre partenaire)	
		Noire (N)	Rouge (R)
Joueur 01(vous)	Noire (N)	(7 , 3)	(7 , 4)
	Rouge (R)	(3 , 4)	(10 , 5)

في الأربعة خانات في الجدول، الرقم الأول جهة اليسار هو عدد النقاط التي يحصل عليها اللاعب الأول (أنتم)، والرقم الثاني هو عدد النقاط التي يحصل عليها اللاعب الثاني (شريككم). على سبيل المثال في الخانة السفلى على اليسار في الجدول تشير إلى: إذا اللاعب الأول لعب R، في حين أن اللاعب الثاني لعب N، الأول يحصل على 3 نقاط واللاعب الثاني يحصل على 4، وتكتب (3 , 4) في الخانة المعنية في الجدول.

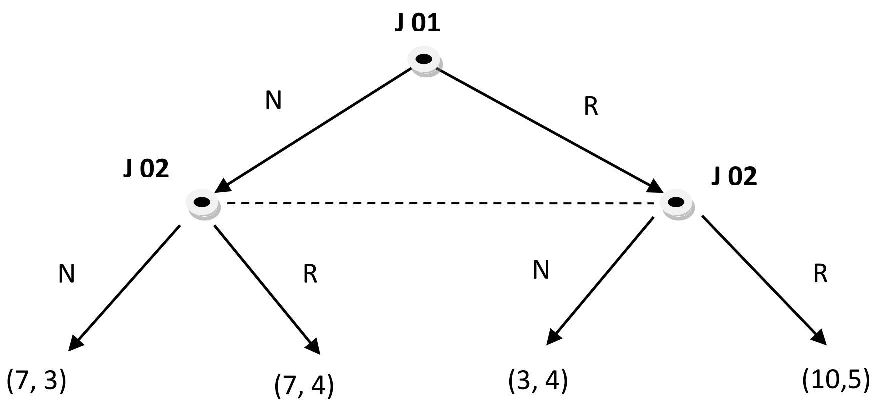
الأرقام الموضحة في الجدول من هذا النوع متعلقة بنتائج مباراة للاعبين لجميع الحالات الممكنة. هذه النتيجة يمكن أن تكون عبارة عن نقاط كما في (حالة مثالنا) كما يمكن أن تكون نقود كما في حالة التطبيقات الاقتصادية. بصفة عامة ومهما تكون الوحدة التي شكل بها الجدول، نتيجة المباراة للاعب غالبا تسمى المكسب أو العائد (payoff).

3.2. الصيغة الشاملة للمباراة (forme extensive)

الصيغة العادية هي ملائمة خاصة لعرض المباريات ذات الحركة المتزامنة. Selten (1975) اقترح عرض على شكل شجرة، تسمى أيضا شجرة Kuhn نسبة إلى الباحث في الرياضيات الذي طور هذا المفهوم (Kuhn, 1953). هي أكثر ملائمة لمباريات الحركة التالية يطلق عليها **الصيغة الشاملة**. مباريات الحركة التالية أين القرارات تأخذ في أوقات مختلفة ويمكن لكل لاعب أن يلعب عدة مرات. مع ذلك وبالرغم من أنها تبدو غير ملائمة إلا أننا يمكننا عرض المباريات ذات الحركة المتزامنة بالصيغة الشاملة.

عرض المباراة 1 بالصيغة الشاملة يعطى بالتمثيل التالي:

الشكل 1.1. الصيغة الشاملة للمباراة 1



- كل نقطة سوداء في الشكل أعلاه تسمى عقدة (Nœud)، كل سهم يمثل حركة من المباراة (coup du jeu). هذا العرض يبدو غير مناسب للمباراة المدروسة، بالنظر إلى أنه يظهر وجود ترتيب في اللعب المعطى باتجاه الأسهم. أيضا يبدو في الشكل أعلاه أن اللاعب الأول يلعب قبل الثاني، في حين أن في المباراة المقترحة اللاعبان يلعبان في نفس الوقت (simultanément). عندما يلعب اللاعبون في وقت واحد نربط بنقاط العقد المرتبطة بخيارات اللاعب الثاني لتبيان أن هذا الأخير يتجاهل اختيار اللاعب الأول في الوقت الذي لعب فيه. بعبارة أخرى، اللاعب الثاني يتجاهل في الوقت الذي يلعب فيه، في أي عقدة يتواجد، ولا يعلم بالإستراتيجية المتبناة من قبل اللاعب الأول.
- مجموعة العقد الموصولة بنقاط تسمى مجموعة معلومات (ensemble d'information). عندما تحتوي هذه الأخيرة على عقدتين على الأقل نقول عن المباراة أنها ذات المعلومة غير الكاملة (information imparfaite). في المقابل إذا كان كل مجموعات المعلومات لا تحتوي إلا على عقدة واحدة، نحن نتكلم عندئذ عن مباراة المعلومة الكاملة (information parfaite)، أين كل لاعب يعلم جيدا أين يوجد في شجرة المباراة في الوقت الذي سيلعب فيه.
- في المباراة 1، اللاعبان لعبا في وقت واحد: نحن نتكلم إذن عن مباراة ذات المعلومة غير الكاملة.

في بعض المرات، العرض بالصيغة الشاملة هو غير مناسب والعرض بالصيغة العادية هو كافي. لهذا فيما تبقى من الدروس، الشكل العادي للمباريات أين يتم أخذ القرار في نفس الوقت(الحركة متزامنة). في المقابل، بالنسبة للألعاب الديناميكية (ذات الحركة التالية) والتي لا يتدخل فيها اللاعبون في وقت واحد ولكن الواحد تلو الأخر، فإن العرض بالصيغة الشاملة يصبح مفضل لأنه يبين ترتيب الحركة.

II. الحل والتوازن لمباراة: مباراة المعلومة التامة وغير الكاملة

نأخذ دائما مبدأ العقلانية كمرجع. من بين النتائج الممكنة يجب أن نحدد تلك التي توصلنا إلى التوازنات. الحل الأمثل هو متعلق بتوازن وحيد (équilibre unique)، في هذه الحالة يمكننا تحديد بالضبط الحل للوضعية التنافسية. لكن لدينا غالبا توازن متعدد (équilibre multiple)، في حالات أخرى لا يوجد أي توازن (pas d'équilibre).

<u>**تسمية**</u>

مجموعة الاستراتيجيات التي تحتوي على استراتيجيات جميع اللاعبين ما عدا إستراتيجية اللاعب i . يمكننا كتابتها بالشكل التالي:

$$s_{-i} = (s_1 , s_2 \dots \dots , s_{i-1} , s_{i+1} \dots \dots , s_n); s_{-i} \in \prod_{j \neq i} S_j$$

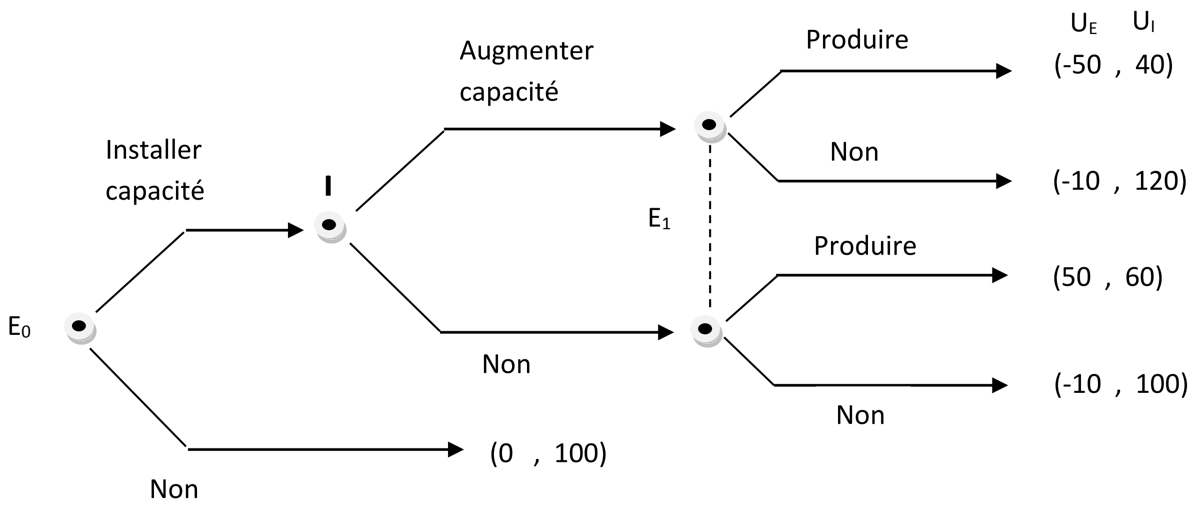
مجموعة الاستراتيجيات هي إذن: $s = (s_i , s_{-i})$

- قبل البحث عن التوازن لمباراة يمكن إلغاء الاستراتيجيات المتكررة والاستراتيجيات الأقل تماما من الأخرى. هذا الإلغاء يبسط المباراة ويسهل علينا البحث عن حل لكن لا يجب أن نتجاهل أن كل إلغاء يقلل لنا من المعلومات التي نعرضها في المباراة.
- المعلومات التي يتم إلغاءها يمكن أن تكون من دون أهمية، لكن يمكن أيضا أن تلعب دور مهم في تحديد أنواع أخرى من الحلول. الإلغاء يجب أن يكون بكل عناية وحذر.

<u>المباراة 02</u>: مباراة الدخول Jeu de l'entrée

لتكن لدينا المباراة التالية: تتعلق المباراة بتحليل تفاعل مشكل الدخول للسوق. المباراة تبدأ بقرار الداخل المحتمل (E): يجب أن يختار بين وضح إمكانات الإنتاج الضرورية لدخوله في هذا السوق الجديد أو لا. المؤسسة الموجودة في السوق (I) تلاحظ قرار المؤسسة (E) بالدخول ووضع إمكانات الإنتاج أو لا ، ويجب أن تختار (أي المؤسسة I) بين الرفع من قدراتها الإنتاجية أو لا . القرار المتخذ من قبل المؤسسة الموجودة(I) لا يلاحظ من قبل الداخل المحتمل(E)، هذا الأخير عليه أن يختار بين الإنتاج أو لا.

الشكل 2.1. عرض مباراة الدخول



إذا اختارت E منذ البداية عدم الدخول أي عدم وضع إمكانات الإنتاج، مشكل الدخول لم يعد مطروح و I يحافظ على احتكاره. لكن في الحالة الأخيرة، لا يمكننا اختصار إستراتيجية المؤسسة E في NON (لا تضع إمكانات الإنتاج)، لأن هذه الإستراتيجية لا تحدد لنا ماذا يفعل E في مجموعة المعلومات E_1 . كل لاعب يجب أن يحدد بالضبط خطة عمله في كل مرة من المحتمل أن يلعب فيها هذا اللاعب. بالتالي كل إستراتيجية ل E يجب أن تحدد بالضبط خطة عمل للمجموعة E_0 وأخرى في E_1 : $(Non /E_0 ; Produire/E_1)$ هي مثال على إستراتيجية متكاملة حتى وإنها تتعلق بخطة عمل متناقضة.

بنفس الطريقة مجموع الاستراتيجيات للاعب I يجب أن تحدد بالضبط خطة عمل اللاعب I : حتى وإن لم تكن لديه الفرصة للعب في حالة E اختار Non في E_0 وانتهت المباراة، يجب على اللاعب I أن يحدد خطة عمله في هذه الحالة الأخيرة. مجموعة استراتيجيات متكاملة لهذه المباراة سوف تكون على سبيل المثال: $((Non /E_0 ; Produire/E_1) ; (Non/I))$.

- اللاعب E يملك مجموعتين من المعلومات $(E_0\ et\ E_1)$ يجب أن يحدد بالضبط خطة العمل في E_0 وواحدة أخرى في E_1 :

$S_E = \{ (Installer /E_0 ; Produire/E_1) ; (Installer /E_0 ; Non/E_1) ; (Non /E_0 ; Produire/E_1) ; (Non /E_0 ; Non/E_1) \}$.

- اللاعب I يملك مجموعة معلومة واحدة (I) ويضع خطتي عمل:

S_I = { (Augmenter /I ; Non/I) } = { Augmenter , Non }

يمكننا استخدام هذه الاستراتيجيات لعرض الصيغة العادية لهذه المباراة.

الجدول 2.1. الصيغة العادية لمباراة لعبة الدخول

		I	
		Augmenter	**Non**
	(Installer /E_0 ; Produire/E_1)	**(- 50 , 40)**	**(50 , 60)**
E	**(Installer /E_0 ; Non/E_1)**	**(- 10 , 120)**	**(- 10 , 100)**
	(Non /E_0 ; Produire/E_1)	**(0 , 100)**	**(0 , 100)**
	(Non /E_0 ; Non/E_1)	**(0 , 100)**	**(0 , 100)**

العائد (40 , 50 -) هو مرتبط ب:

U_E ((Installer /E_0 ; Produire/E_1), Augmenter)= - 50 (عائد المؤسسة E)

U_I((Installer /E_0 ; Produire/E_1), Augmenter)= 40 (عائد المؤسسة I)

1. إلغاء الاستراتيجيات المتكافئة (Elimination des stratégies équivalentes)

الخطوة الأولى لحل المباراة هي إلغاء الاستراتيجيات التي تبدو متكررة، نسميها استراتيجيات متكافئة (équivalentes). نحصل بعدها على صيغة عادية مختصرة للمباراة (forme normale réduite).

تعريف:

إستراتيجيتان s_i و s'_i هما متكافئتان إذا وفقط إذا كان، عند كل الاستراتيجيات (profil de stratégies) الخاصة باللاعبين الآخرين، كل اللاعبين يحصلون على نفس المنفعة عندما اللاعب i يلعب s_i أو s'_i .

$$\forall j \in I;\ \forall s_{-i} \in S_{-i}\,, U_j(s_i\,, s_{-i}) = U_j(s'_i\,, s_{-i})$$

الصيغة العادية المختصرة لمباراة

يتم الحصول عليها انطلاقا من الصيغة العادية الأولية باستبدال كل الاستراتيجيات المتكافئة بإستراتيجية واحدة. إذا أخذنا المباراة في شكلها العادي لمثالنا السابق (مباراة الدخول (jeu d'entrée)، نلاحظ أن كل الاستراتيجيات التي تحتوي على خطة العمل Non/E_0 هي متساوية، بالتالي كل هذه الاستراتيجيات تكمل المباراة والاختيار في E_1 ليس له أهمية بالفعل. يمكن إذن استبدال $(Non/E_0;$ $Produire/E_1)$ و$(Non/E_0; Non/E_1)$ بالإستراتيجية (Non/E_0) لتشكيل الصيغة العادية المختصرة للمباراة (أنظر الجدول التالي):

الجدول 3.1. الصيغة المختصرة لمباراة الدخول بعد إلغاء الاستراتيجيات المتكافئة

		I	
		Augmenter	Non
E	$(Installer/E_0 ; Produire/E_1)$	(- 50 , 40)	(50 , 60)
	$(Installer/E_0 ; Non/E_1)$	(- 10 , 120)	(- 10 , 100)
	(Non/E_0)	(0 , 100)	(0 , 100)

من دون أن ننسى أنه يمكننا أن نفقد بهذا الإلغاء الاختيارات الممكنة للاعب E في E1، ما بين Produire وNon والأخطاء التي يمكن أن ترافق هذه الاختيارات.

2. إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها (Elimination des stratégies dominées)

تبسيط آخر للمباراة يمكن أن يرتكز على تقييم الاستراتيجيات، بعض الاستراتيجيات للاعبين يمكن أن تكون أسوأ من استراتيجيات أخرى، بالتالي لا يتم اختيارها أبدا من قبل لاعب عقلاني. يمكن إذن أن نختار إلغاءها من المباراة.

تعريف:

إستراتيجية s_i هي <u>مسيطر عليها تماما</u> (strictement dominée) للاعب i، إذا وجدت إستراتيجية s'_i بحيث عند جميع استراتيجيات اللاعبين الآخرين s_{-i}:

$$U_i(s'_i , s_{-i}) > U_i(s_i , s_{-i})$$

إستراتيجية s_i هي <u>مسيطر عليها بضعف</u> (faiblement dominée) للاعب i، إذا وجدت s'_i بحيث عند جميع استراتيجيات اللاعبين الاخرين s_{-i}:

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} \; / \; U_i(s'_i \, , s_{-i}) \geq U_i(s_i \, , s_{-i})$$

$$et \; \exists \; s_{-i} \in S_{-i} \; / \; U_i(s'_i \, , s_{-i}) > U_i(s_i \, , s_{-i})$$

في مثالنا (الجدول 1)، الإستراتيجية ($Installer/E_0$; Non/E_1) هي مسيطر عليها تماما من قبل (Non/E_0; $Produire/E_1$) و(Non/E_0; Non/E_1). بالنتيجة اللاعب E إذا كان عقلانيا، لا يجب أن يختار أبدا الإستراتيجية ($Installer/E_0$; Non/E_1) في وجود الإستراتيجية (Non/E_0; $Produire/E_1$) أو (Non/E_0; Non/E_1) .

بجمع النوعين من الإلغاءات نحصل على الصيغة العادية المختصرة للجدول الأول.

الجدول4.1. المباراة المختصرة لمباراة الدخول بعد إلغاء الاستراتيجيات المتكافئة والمسيطر عليها تماما

		I	
		Augmenter	**Non**
E	**($Installer/E_0$; $Produire/E_1$)**	**(-50 , 40)**	**(50 , 60)**
	(Non/E_0)	**(0 , 100)**	**(0 , 100)**

لا يمكننا التقدم أكثر في حل المباراة باستخدام إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما.

سنقوم بإلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف إن وجدت (لسنا متأكدين بأنه يتم الاختيار باستخدام مبدأ إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف). لكن قد يبدو أن هذا المبدأ مناسب للتقدم في حل المباراة ولا يتنافى مع عقلانية اللاعب (لأنه ليس لديه ما يخسره بإلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف).

نلاحظ أن الإستراتيجية Augmenter للاعب I هي مسيطر عليها بضعف من قبل الإستراتيجية Non (مساواة إذا اللاعب E لعب (Non/E_0)). المباراة تصبح :

الجدول 5.1. المباراة المختصرة بعد إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف

		I Non
E	(Installer /E_0 ; Produire/E_1)	(50 , 60)
	(Non /E_0)	(0 , 100)

نلاحظ أن الإستراتيجية (Installer /E_0 ; Produire/E_1) تسيطر تماما على الإستراتيجية (Non /E_0) للاعب E، بالتالي هذا الأخير لن يختار أبدا الإستراتيجية (Non /E_0). إذن اللاعب الأول (E)يختار الإستراتيجية (Installer /E_0 ; Produire/E_1) ، واللاعب الثاني (I) يختار Non .

<u>مثال</u>: مباراة معضلة السجين(dilemme de prisonnier).

في مثال معضلة السجين: حيث أن شخصين أوقفا من طرف الشرطة لارتكابهما مخالفة معينة، وضعا في خليتين متفرقتين من دون أي اتصال بينهما. كل واحد سئل على انفراد وعليه الاختيار بين الإستراتيجية N (يلتزم الصمت) أو الإستراتيجية D (يعترف على أنه المذنب الوحيد).

<u>عوائد المباراة</u>:

- إذا اللاعب الأول واللاعب الثاني اعترفا معا سيتم الحكم عليهما ب 8 سنوات سجنا.
- إذا لزما الصمت معا (أنكرا) ، سيتم الحكم علهما سنة واحدة سجن بسبب غياب الحجج.
- إذا لاعب واحد فقط اعترف، سيطلق سراحه كتعويض على تعاونه والحكم على الآخر ب 10 سنوات سجن.

يمكن عرض المباراة (مباراة ذات المعلومة التامة وغير الكاملة) بالصيغة العادية على النحو التالي:

الجدول1. 6. الصيغة العادية لمباراة معضلة السجين.

		J 02	
		N	D
J 01	N	(- 1 , - 1)	(- 10 , 0)
	D	(0 , - 10)	(- 8 , - 8)

نلاحظ أن N هي مسيطر عليها تماما من قبل الإستراتيجية D للاعبين الاثنين، وبالتالي لا اللاعب الأول، لا اللاعب الثاني سيختار الإستراتيجية N، بالتالي سيتم إلغاءها من المباراة لكلا اللاعبين. إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما تقودنا إلى الحل (D , D).

عندما يكون موجود ويكون وحيد، هذا النوع من الحلول (الحل عن طريق إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما) يقودنا إلى توقع واضح ومتين لنتيجة المباراة، هذا الحل هو قريب جدا من الطريقة التي يتفاعل بها المتعاملون الاقتصاديون في العالم، لكن هذا النوع من التوازنات لا يتحقق دائما.

III. تمارين

التمرين الأول

دولتان A وB يعبران بشكل منفصل عن طبيعة العلاقات السياسية بينهما. يجب أن يختارا بين حالة حرب (G) أو حالة سلم (P). إذا اختارا الاثنين معا الحرب سيكون مكسب كل منهما 2، إذا واحد فقط اختار الحرب سيحصل على 6 والآخر على 0، أما إذا اختارا السلم معا كل واحد سيحصل على مكسب 4.

المطلوب:

1) أعط مجموع اللاعبين ومجموع الاستراتيجيات لكل لاعب.
2) أعرض المباراة بالصيغة العادية.

التمرين الثاني: مباراة حجرة، ورقة، مقص

يتعلق الأمر بمباراة بين طفلين " ليلي" و" أمين". الاثنان يختاران واحد من الأشياء الثلاثة: ورقة (P)، مقص (Ci) وحجرة (Ca). حسب الاختيار، إما طفل يربح المباراة إما لا يوجد رابح (في الحالة الأخيرة إذا كان لهما نفس الاختيار). الحجرة (Ca) تربح مقص (Ci)، والمقص (Ci) يربح ورقة (P) والورقة (P) تربح الحجرة (Ca). سيكون 2 مكسب الطفل الرابح، 0 مكسب الخاسر و1 في حال التعادل.

المطلوب:

1) صف مجموع اللاعبين ومجموعة الاستراتيجيات لكل لاعب.
2) اكتب مباراة الحركة المتزامنة بالصيغة العادية.
3) هل يوجد استراتيجيات مسيطر عليها؟ اذكرها إن وجدت؟
4) اكتب مباراة الحركة المتزامنة بالصيغة الشاملة.
5) اكتب المباراة بالصيغة الشاملة إذا "أمين" غش ولاحظ اختيار ليلى قبل أن تلعب.
6) اكتب المباراة بالصيغة الشاملة إذا "أمين" لن يرى اختيار ليلى إلا إذا اختارت الحجرة (Ca).

التمرين الثالث: لدينا المباريات التالية:

المباراة 1

		J02	
		U	V
J01	X	(4 , 2)	(3 , 1)
	Y	(2 , 5)	(9 , 0)

المباراة 2

		J02	
		G	D
J01	H	(3 , 6)	(7 , 1)
	M	(5 , 1)	(8 , 2)
	B	(6 , 0)	(6 , 2)

المباراة 3

		J02		
		U	V	W
J01	X	(3 , 6)	(7 , 1)	(4 , 8)
	Y	(5 , 1)	(8 , 2)	(6 , 1)
	Z	(6 , 0)	(6 , 2)	(3 , 2)

المباراة 4

		J02		
		X	Y	Z
J01	A	(1 , 2)	(2 , 3)	(0 , 3)
	B	(2 , 2)	(2 , 1)	(3 , 2)
	C	(2 , 1)	(0 , 0)	(1 , 0)

المباراة 5

		J02			
		W	X	Y	Z
J01	A	(6 , 3)	(6 , 2)	(6 , 4)	(6 , 7)
	B	(1 , 1)	(1 , 99)	(1 , 4)	(1 , 0)
	C	(3 , 7)	(99 , 2)	(3 , 99)	(3 , 3)
	D	(5 , 1)	(0 , 2)	(99 , 4)	(5 , 5)

المطلوب:

هل المباريات أعلاه تقبل حل باستخدام إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما؟ هل المباريات أعلاه تقبل حل باستخدام إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف؟

حل التمرين الأول

1) **مجموع اللاعبين ومجموع الاستراتيجيات لكل لاعب:**

مجموع اللاعبين $I = \{A, B\}$.

مجموعة الاستراتيجيات لكل لاعب: $S_A = S_B = \{G, P\}$.

2) **الصيغة العادية للمباراة:**

		B	
		G	P
A	G	(2 , 2)	(6 , 0)
	P	(0 , 6)	(4 , 4)

حل التمرين الثاني

1) **مجموع اللاعبين ومجموعة الاستراتيجيات لكل لاعب:**

مجموع اللاعبين: نفترض أن ليلى هي اللاعب الأول وأمين اللاعب الثاني: $I = \{\text{ليلى , أمين}\}$.

مجموعة الاستراتيجيات لكل لاعب: $S_1 = S_2 = \{P, C_i, C_a\}$.

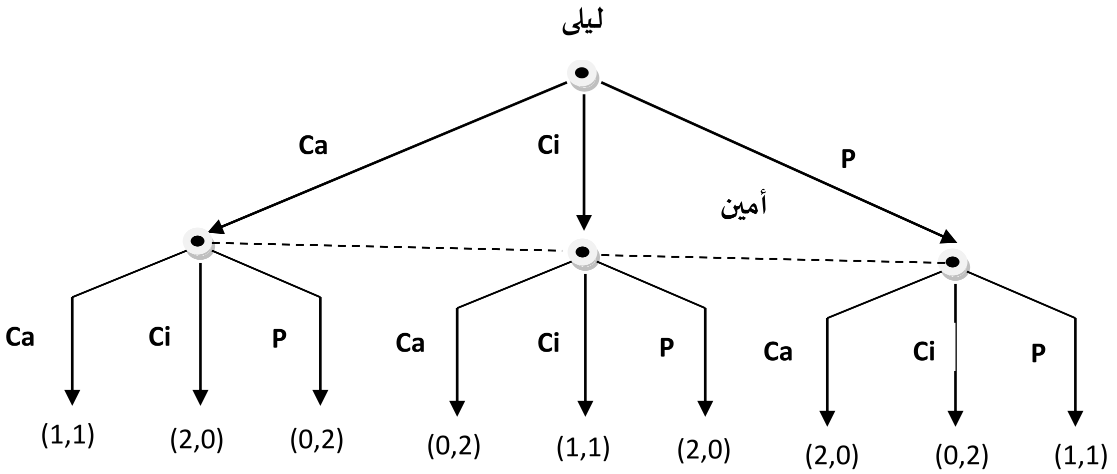
2) **الصيغة العادية للمباراة:**

		أمين		
		P	Ci	Ca
ليلى	P	(1 , 1)	(0 , 2)	(2 , 0)
	Ci	(2 , 0)	(1 , 1)	(0 , 2)
	Ca	(0 , 2)	(2 , 0)	(1 , 1)

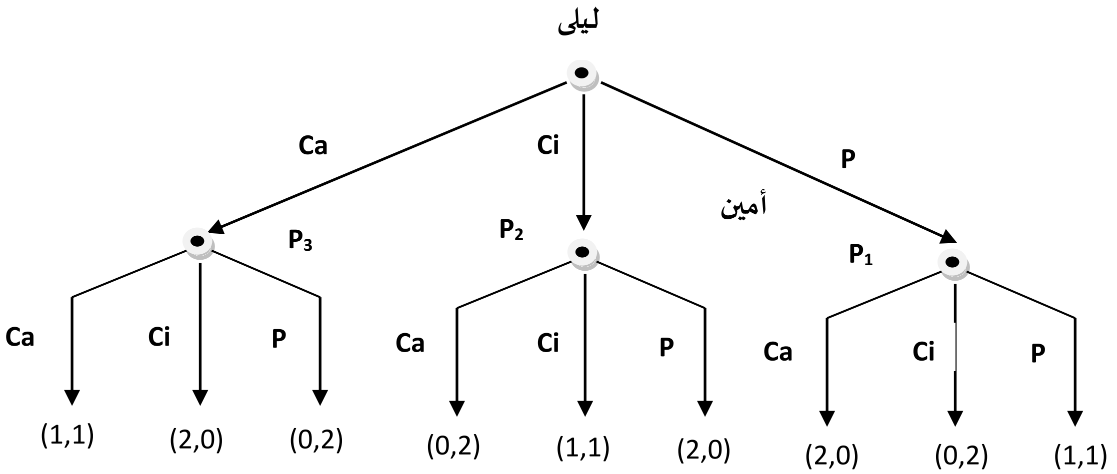
3) **لا يوجد أي إستراتيجية مسيطر عليها في هذه المباراة.**

4) **الصيغة الشاملة لمباراة الحركة المتزامنة:** الصيغة الشاملة لهذه المباراة يجب أن تأخذ بعين الاعتبار أن كل لاعب لن يرى اختيار اللاعب الآخر قبل أن يقوم باتخاذ قراره (في نفس الوقت).

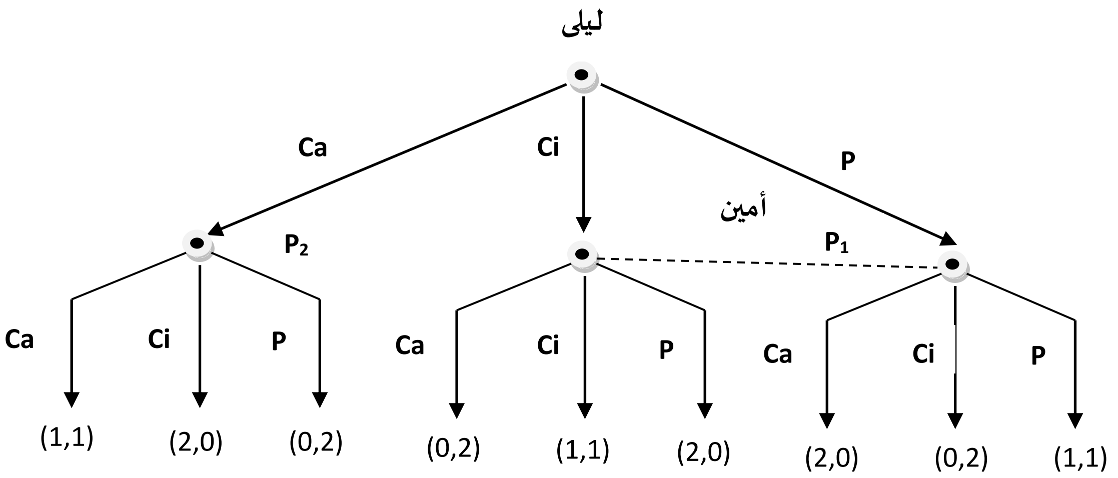
يمكن إذن أن نبدأ ب " ليلى" أو "أمين". إذا بدأنا ب "ليلى":



5) **المباراة بالصيغة الشاملة إذا "أمين" غش ولاحظ اختيار ليلى قبل أن تلعب:**



6) **المباراة بالصيغة الشاملة إذا "أمين" لن يرى اختيار ليلى إلا إذا اختارت الحجرة (Ca):**



حل التمرين الثالث

- **الحل باستخدام إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها:**

المباراة 1:

		J02 U	J02 V
J01	X	(4 , 2)*	(3 , 1)
J01	Y	(2 , 5)	(9 , 0)

أولا: الإستراتيجية V للاعب الثاني هي مسيطر عليها تماما من قبل الإستراتيجية U، وبالتالي اللاعب الثاني لن يختار أبدا الإستراتيجية V، وعليه سيتم إلغاءها من المباراة.

ثانيا: بعد إلغاء الإستراتيجية V للاعب الثاني، تصبح لدينا الإستراتيجية Y للاعب الأول مسيطر عليها تماما من قبل الإستراتيجية X . وعليه سيتم إلغاءها من المباراة.

بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها تماما نحصل على حل وحيد هو: لعب اللاعب الأول الإستراتيجية X ولعب اللاعب الثاني الإستراتيجية U عند التوازن.

$$(X , U)^* = (4, 2)$$

المباراة 2:

		J02 G	J02 D
J01	H	(3 , 6)	(7 , 1)
J01	M	(5 , 1)	(8 , 2)*
J01	B	(6 , 0)	(6 , 2)

أولا: الإستراتيجية H للاعب الأول هي مسيطر علها تماما من قبل الإستراتيجية M، وبالتالي اللاعب الأول لن يختار أبدا الإستراتيجية H في وجود M. إذن، سيتم إلغاء H من المباراة.

ثانيا: بعد إلغاء الإستراتيجية H للاعب الأول، تصبح لدينا الإستراتيجية G للاعب الثاني مسيطر علها تماما من قبل الإستراتيجية D . بالتالي سيتم إلغاء G من المباراة.

أخيرا، الإستراتيجية B للاعب الأول هي مسيطر علها تماما من قبل الإستراتيجية M وبالتالي سيتم إلغاء الإستراتيجية B من المباراة.

بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر علها تماما نحصل على حل وحيد هو: لعب اللاعب الأول الإستراتيجية M ولعب اللاعب الثاني الإستراتيجية D عند التوازن.

$$(M , D)^* = (8, 2)$$

<u>المباراة 3:</u>

		J02		
		U	V	W
J01	X	(3 , 6)	(7 , 1)	(4 , 8)
	Y	(5 , 1)	(8 , 2)*	(6 , 1)
	Z	(6 , 0)	(6 , 2)	(3 , 2)

أولا: الإستراتيجية X للاعب الأول هي مسيطر علها تماما من قبل الإستراتيجية Y (أو نقول الإستراتيجية Y مسيطرة على X)، بالتالي اللاعب الأول لن يختار أبدا الإستراتيجية X في وجود الإستراتيجية Y، سيتم إلغاءها من المباراة.

ثانيا: بعد إلغاء الإستراتيجية X للاعب الأول، تصبح لدينا الإستراتيجية U للاعب الثاني مسيطر علها تماما من قبل الإستراتيجية V . بالتالي سيتم إلغاء الإستراتيجية U للاعب الثاني من المباراة.

ثالثا: بعد إلغاء الإستراتيجيتين المذكورتين أعلاه، تصبح لدينا الإستراتيجية Z للاعب الأول مسيطر علها تماما من قبل الإستراتيجية Y . سيتم إلغاء الإستراتيجية Z للاعب الأول من المباراة.

أخيرا، الإستراتيجية W للاعب الثاني هي مسيطر عليها تماما من قبل الإستراتيجية V وبالتالي سيتم إلغاء الإستراتيجية W من المباراة.

بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها تماما نحصل على حل وحيد هو: لعب اللاعب الأول الإستراتيجية Y ولعب اللاعب الثاني الإستراتيجية V عند التوازن.

$$(Y, V)^* = (8, 2)$$

المباراة 4:

		J02		
		X	Y	Z
J01	A	(1 , 2)	(2 , 3)	(0 , 3)
	B	(2 , 2)	(2 , 1)	(3 , 2)
	C	(2 , 1)	(0 , 0)	(1 , 0)

لا توجد أي إستراتيجية مسيطر عليها تماما في هذه المباراة، وبالتالي سنبحث عن استراتيجيات مسيطر عليها بضعف إن وجدت.

لدينا:

أولا: الإستراتيجية B للاعب الأول هي مسيطرة **بضعف** على الإستراتيجيتين A وC، سيتم إلغاءهما من المباراة.

ثانيا: الإستراتيجية Y للاعب الثاني هي مسيطر عليها تماما من قبل الإستراتيجيتين X وZ، بالتالي سيتم إلغاء الإستراتيجية Y من المباراة.

كلا الإستراتيجيتين المتبقيتين للاعب الثاني Z وX تعطيه نفس العائد وبالتالي لا يمكن المفاضلة بينها.

بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها تماما والمسيطر عليها **بضعف** نحصل على حلين: لعب اللاعب الأول الإستراتيجية B ولعب اللاعب الثاني الإستراتيجية X أو Z.

<u>بتغيير ترتيب الإلغاء</u>: في المباراة 4 يمكن أن نحصل على حلول أخرى إذا غيرنا ترتيب الإلغاء بحيث:

لدينا:

		J02		
		X	Y	Z
	A	(1 , 2)	(2 , 3)	(0 , 3)
J01	B	(2 , 2)	(2 , 1)	(3 , 2)
	C	(2 , 1)	(0 , 0)	(1 , 0)

أولا: الإستراتيجية Z للاعب الثاني هي مسيطرة **<u>بضعف</u>** على الإستراتيجية Y، بالتالي سيتم إلغاء Y من المباراة.

ثانيا: الإستراتيجية A للاعب الأول هي مسيطر عليها **<u>بضعف</u>** من قبل الإستراتيجيتين B وC، بالتالي سيتم إلغاء الإستراتيجية A من المباراة.

ثالثا: الإستراتيجية Z للاعب الثاني هي مسيطر عليها **<u>بضعف</u>** من قبل الإستراتيجية X، سيتم إلغاء الإستراتيجية Z من المباراة.

بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها **<u>بضعف</u>** نحصل على حلين: لعب اللاعب الأول الإستراتيجية B أو C ، ولعب اللاعب الثاني الإستراتيجية X.

يمكن كذلك أن نغير الترتيب باستخدام إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف لنحصل على حلول أخرى، على سبيل المثال:

		J02		
		X	Y	Z
	A	(1 , 2)	(2 , 3)	(0 , 3)
J01	B	(2 , 2)	(2 , 1)	(3 , 2)
	C	(2 , 1)	(0 , 0)	(1 , 0)

لدينا:

أولا: الإستراتيجية C للاعب الأول هي مسيطر عليها **بضعف** من قبل الإستراتيجية B، بالتالي سيتم إلغاء C من المباراة.

ثانيا: الإستراتيجية X للاعب الثاني هي مسيطر عليها **بضعف** من قبل الإستراتيجية Z، سيتم إلغاء X من المباراة.

ثالثا: الإستراتيجية A للاعب الأول هي مسيطر عليها **بضعف** من قبل الإستراتيجية B، سيتم إلغاء A من المباراة.

أخيرا، الإستراتيجية Z للاعب الثاني هي مسيطر عليها تماما من قبل الإستراتيجية Y، سيتم إلغاء Z من المباراة.

بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها تماما والمسيطر عليها **بضعف** نحصل على حل وحيد: لعب اللاعب الأول الإستراتيجية B ولعب اللاعب الثاني الإستراتيجية Y.

يمكن كذلك أن نغير الترتيب باستخدام إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف لنحصل على حلول أخرى. إذن بتغيير الترتيب عن طريق إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف يمكن أن يتغير الحل.

المباراة 5:

		J02			
		W	X	Y	Z
J01	A	(6 , 3)	(6 , 2)	(6 , 4)	(6 , 7)*
	B	(1 , 1)	(1 , 99)	(1 , 4)	(1 , 0)
	C	(3 , 7)	(99 , 2)	(3 , 99)	(3 , 3)
	D	(5 , 1)	(0 , 2)	(99 , 4)	(5 , 5)

بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها تماما نحصل على حل وحيد عند التوازن :

$$(A , Z)^* = (6 , 7)$$

خصائص:

1) نقول عن مباراة أنها قابلة للحل (Résolvable) باستخدام الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها: إذا تحصلنا على حل وحيد عن طريق الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها **تماما**.
2) الحلول المحصل عليها بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها **تماما** غير مرتبطة بالترتيب المختار: أي، مهما غيرنا الترتيب عند الإلغاء باستخدام الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما فإننا نحصل على نفس الحل.
3) في المقابل، يمكننا الحصول على نتائج مختلفة عندما نختار ترتيب مختلف بعد الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها **بضعف**.
4) النتائج المحصل عليها باستخدام الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها تماما هي أكثر قوة ومتانة (robustes) من تلك المحصل عليها باستخدام الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها بضعف.
5) النتيجة أو الحل (الوحيد) المحصل عليه باستخدام الإلغاء المتتالي للاستراتيجيات المسيطر عليها تماما هو **توازن ناش** (هو الحل الوحيد للمباراة).

الفصل الثاني: مباراة المعلومة التامة و غير الكاملة

I. توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية

II. توازن ناش في الاستراتيجيات المختلطة

III. الاحتكار الثنائي لكورنو

IV. تمارين

I. توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية

ناش عمم مفهوم توازن" **كورنو**"، الفكرة الأساسية لتوازن ناش هي بسيطة للألعاب غير التعاونية (non-coopératifs). الألعاب غير التعاونية هي مرتبطة بوضعيات تفاعل بين أفراد أحرار في اختياراتهم ويهدفون إلى تحقيق أهداف خاصة. هؤلاء الأفراد لا يتصلون ببعضهم البعض وليسوا مجبرين على إتباع إستراتيجية معينة. ***توازن ناش(EN) هو نتيجة لا يكون لأي لاعب المصلحة في تغييرها مهما تكن الإستراتيجية الملعوبة من قبل اللاعبين الآخرين.***

تعريف:--

النتيجة $s^* = (s_1^*, s_2^*, \dots \dots s_n^*); s_i^* \in S_i \, ; i = 1 \dots \dots n$ هي توازن ناش إذا: لم يوجد أي لاعب من مصلحته تغيير الإستراتيجية s_i^* عندما يستمر اللاعبين الآخرين في لعب s_{-i}^* ، بالنتيجة يجب أن نحصل على:

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*) \quad , \forall s_i \in S_i \quad , \forall i \in 1 \dots \dots . . n$$

✓ **S^* هو توازن ناش التام (strict) إذا:**

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) > U_i(s_i, s_{-i}^*) \quad , \forall s_i \in S_i \quad , \forall i \in 1 \dots \dots . . n$$

- إذا كان توازن ناش تام فإن الانزياح عنه سينتج عنه تحمل تكلفة للاعبين.
- لاختبار إذا كانت النتيجة S هي توازن ناش، يجب علينا التحقق من أنه لا يوجد أي لاعب من مصلحته اختيار إستراتيجية أخرى، إذا لم يتحقق ذلك فإن S ليست توازن ناش. نأخذ مثال معضلة السجين:

جدول 1.2. مباراة معضلة السجين

		J02	
		N	D
J01	N	(-1 , -1)	(-10 , 0)
	D	(0, -10)	(-8 , -8)

من جانب اللاعب الثاني:

- عندما يختار اللاعب الأول الإستراتيجية N فإن اللاعب الثاني يختار الإستراتيجية D، وبالتالي (N, N) ليست توازن ناش لان:

$$\mathbf{U_2}(\mathbf{N}, N) = -1 < 0 = \mathbf{U_2}(\mathbf{N}, D)$$

- عندما يختار اللاعب الأول الإستراتيجية D، فإن اللاعب الثاني يختار الإستراتيجية D، وبالتالي (D, N) ليست توازن ناش لأن:

$$\mathbf{U_2}(\mathbf{D}, N) = -10 < -8 = \mathbf{U_2}(\mathbf{D}, D)$$

إذن اللاعب الثاني يختار دائما الإستراتيجية D (ليس من مصلحته الابتعاد عن D).

من جانب اللاعب الأول:

- عندما يختار اللاعب الثاني الإستراتيجية N فإن اللاعب الأول يختار الإستراتيجية D، وبالتالي (N, N) ليست توازن ناش لان:

$$\mathbf{U_1}(\mathbf{N}, N) = -1 < 0 = \mathbf{U_1}(\mathbf{D}, N)$$

- عندما يختار اللاعب الثاني الإستراتيجية D، فإن اللاعب الأول يختار الإستراتيجية D، وبالتالي (N, D) ليست توازن ناش لأن:

$$\mathbf{U_1}(\mathbf{N}, D) = -10 < -8 = \mathbf{U_1}(\mathbf{D}, D)$$

إذن اللاعب الأول يختار دائما الإستراتيجية D واللاعب الثاني يختار D، بالتالي (D , D) هي توازن ناش لان لا اللاعب الأول، لا اللاعب الثاني من مصلحته الابتعاد عن D مهما يكن اختيار اللاعب الآخر.

1. دوال أحسن رد وتوازن ناش (*Fonctions de meilleures réponses et équilibre de Nash*)

يمكننا تحديد لكل لاعب i الإستراتيجية المرتبطة بالرضا الأعظم الذي يمكن أن يحصل عليه مقابل كل إستراتجية S_{-i} ، إذن الاستراتيجيات مرتبطة بأحسن وضعية التي يمكن أن يتحصل عليها اللاعب i مقابل S_{-i} .

تعريف: --

في مباراة ب n من اللاعبين، دالة أحسن رد للاعب i ، $R_i(s_{-i})$ متعلقة باستراتيجية اللاعب i التي تعظم إيراداته عند كل توليفة لاستراتيجيات اللاعبين الآخرين s_{-i} :

$$\mathbf{U_i}(R_i(s_{-i}), s_{-i}) \geq \mathbf{U_i}(\mathbf{s_i}, s_{-i}) \quad , \forall \mathbf{s_i} \in \mathbf{S_i} \quad , \forall \mathbf{s_{-i}} \in \mathbf{S_{-i}}$$

فيما يلي أحسن رد مع إستراتيجية خالصة (*stratégie pure*) للاعبين *1* و*2* في مباراة معضلة السجين (المثال السابق):

جدول 2.2. أحسن رد *Meilleure réponse*

$J01 - R_1(s_2)$	$J02 - R_2(s_1)$
$N \longrightarrow D$	$N \longrightarrow D$
$D \longrightarrow D$	$D \longrightarrow D$

في العمود الخاص باللاعب الأول j01 ، $N \longrightarrow D$ تعني أن أحسن رد من طرف اللاعب الأول على الإستراتيجية N للاعب 2 هو لعب الإستراتيجية D . لأن:

$$\mathbf{U_1}(\mathbf{D}, N) = \mathbf{0} > -1 = \mathbf{U_1}(\mathbf{N}, N)$$

كما هو موضح في العمود N لمصفوفة المباراة.

طريقة أيضا سهلة لتبيان أحسن رد لكل لاعب هي بتمثيلها في مصفوفة المباراة. نمثل دالة رد الفعل للاعب 01 (J01) بالمربع (⊡)، والخاص باللاعب الثاني (J02) بالمثلث (Δ). هذا يعطينا الجدول التالي:

جدول 3.2. أحسن رد Meilleure réponse

		J02	
		N	**D**
J01	**N**		**Δ**
	D	⊡	$\boxed{\Delta}$

هذا التحليل يوضح لنا أنه مقابل الاختيار D للاعب معين، اللاعب الآخر لا يمكنه اختيار أفضل من D.

إذن (D , D) هو توازن Nash ويتعلق بتقاطع منحني رد الفعل.

بنفس الطريقة، تشكيل دالة أحسن رد في الاستراتيجيات الخالصة للاعب الأول واللاعب الثاني في مباراة صراع الجنسين (Bataille des sexes) .

<u>مباراة صراع الجنسين:</u>

تتعلق المباراة باتخاذ قرار في آن واحد بين شريكين (زوجين)، وعليهما الاختيار في آن واحد بين الذهاب إلى السينما (C) أو إلى مشاهدة مباراة في كرة القدم (C). عوائد اللاعبين ممثلة بالصيغة العادية ستكون على النحو التالي:

جدول 4.2. الصيغة العادية لمباراة صراع الجنسين (متزامنة الحركة)

		الزوجة	
		Cinéma (N)	**Foot (F)**
الزوج	**Cinéma (N)**	(2 , 1)	**(0 ,0)**
	Foot (F)	**(0 , 0)**	(1 , 2)

بإتباع نفس الطريقة لمثال معضلة السجين، نحصل على الجدولين التاليين:

جدول 5.2. أحسن رد لمباراة صراع الجنسين

$J01 - R_1(s_2)$	$J02 - R_2(s_1)$
$C \longrightarrow C$	$C \longrightarrow C$
$F \longrightarrow F$	$F \longrightarrow F$

بتمثيل رد الفعل في المصفوفة الأصلية لمباراة صراع الجنسين، الجدول التالي يبين دالة رد فعل الزوج (اللاعب الأول)الممثلة بالمربع، ورد فعل الزوجة (اللاعب الثاني)بالمثلث.

جدول 6.2. أحسن رد لمباراة صراع الجنسين

		J02	
		C	**F**
J01	**C**	$\boxed{\Delta}$	
	F		$\boxed{\Delta}$

تقاطع المنحنيين لدوال رد الفعل مرتبط بالنتيجتين (C , C) و(N , N) وهما توازنين لناش في الاستراتيجيات الأصلية لهذه المباراة.

<u>بصفة عامة:</u>

- إذا كان s^* هو توازن ناش، $\forall i \in 1 \ldots \ldots . n\ ;\ s_i^* = R(s_{-i}^*)$.
- $R(s_{-i}^*)$ تعظم $U_i(s_i, s_{-i}^*)$ ، لكل لاعب i، بالنتيجة لا يوجد أي لاعب من مصلحته الابتعاد من جانبه فقط (unilatéralement) عن الإستراتيجية s_i^* .

في الاحتكار الثنائي "لكورنو" دوال رد الفعل هي دوال أحسن رد للمباراة بالنسبة للمؤسستين، أين الاستراتيجيات هي الكميات. توازن كورنو (و توازن ناش) هو مرتبط بتقاطع منحني رد الفعل أين كل مؤسسة تنتج لتعظم أرباحها مع الأخذ بعين الاعتبار مستوى الإنتاج لمنافستها. البحث عن توازن ناش هو نفسه البحث عن نقطة تقاطع لدوال أحسن رد (رد الفعل) لكل اللاعبين.

2. توازن ناش والرفاهية الاجتماعية(Equilibre de Nash et bienêtre social)

في الألعاب غير التعاونية كل لاعب يبحث لوحدة عن تحسين وضعيته الفردية. السؤال المطروح: **هل الحل المعطى من خلال توازن ناش مرتبط بآلية ترابط (coordination) فعالة؟** للإجابة عن هذا السؤال يجب التطرق إلى مفهوم فعالية "**باريتو**" (efficacité Parétienne) ومفهوم أمثلية "باريتو" (optimum de Pareto). يمكننا تعريف هذه المفاهيم في مبارياتنا.

تعريف: ---

1) النتيجة $\hat{s}$ هي مسيطرة حسب "باريتو" (Pareto-domine) على النتيجة s إذا:

$$\mathbf{U_i(\hat{s}) \geq U_i(s)}\ ,\forall i \quad \underline{et}$$

$$\exists j\ ,\mathbf{U_j(\hat{s}) > U_j(s)}$$

2) النتيجة s^* هي مثلى حسب باريتو (optimum de Pareto) إذا لم يوجد أي نتيجة أخرى تسيطر حسب باريتو على هذه النتيجة.

نقول عن النتيجة X أنها تسيطر على النتيجة Y حسب مفهوم" باريتو" إذا كانت عوائد هذه النتيجة، أي عوائد X أكبر أو تساوي عوائد Y لجميع اللاعبين ($X \geq Y$ لجميع اللاعبين) وعوائد X أكبر تماما من عوائد Y على الأقل للاعب واحد ($X > Y$ على الأقل للاعب واحد).

II. توازن ناش في الاستراتيجيات المختلطة

نعود إلى قرار اللاعب i: هذا اللاعب يملك مجموعة من الاستراتيجيات الممكنة:

$$S_i = s_i^1, s_i^2, s_i^3 \ldots \ldots \ldots . s_i^{K_i}$$

يجب أن يلعب واحدة من هذه الاستراتيجيات الممكنة أو المتاحة، يمكنه إذن اختيار إستراتيجية من S_i بين هذه الاستراتيجيات، وهو ما افترضناه إلى غاية الآن في دروسنا السابقة. في هذه الحالة يلعب إستراتيجية أصلية (stratégie pure). على سبيل المثال في مباراة الدخول، يمكن للاعب E أن يختار الإستراتيجية الأصلية ($Installer/E_0$; $Produire/E_1$) أو (Non/E_0 ; $Produire/E_1$) أو (Non/E_0 ; $Produire/E_1$) أو الإستراتيجية الأصلية (Non/E_0 ; Non/E_1). نفس الشيء بالنسبة للاعب I الذي يمكنه اختيار واحدة من بين استراتيجياته والتي تسمى أصلية: Augmenter أو Non .

اللاعب i قد يختار بطريقة أخرى وذلك من خلال توزيع احتمالات على اختياراته، اللاعب i يختار k من القرارات أو الاختيارات $\sigma(s_i^1), \sigma(s_i^2), \sigma(s_i^3) \ldots \ldots \ldots , \sigma(s_i^{K_i})$ المرتبطة باحتمال اختيار استراتيجياته المتاحة: $s_i^1, s_i^2, s_i^3 \ldots \ldots \ldots . s_i^{K_i}$. في هذه الحالة نقول عن اللاعب i أنه لعب إستراتيجية مختلطة (une stratégie mixte).

إستراتيجية مختلطة للاعب E تعطي احتمالات لكل الاستراتيجيات الأصلية لهذا اللاعب، $P_E(s) \in [0,1]$ مع:

$$\sum_{s \in S_E} P_E(s) = 1$$

<u>مثال</u>: إستراتيجية مختلطة لمثالنا لعبة الدخول P_E هي:

P_E ($Installer/E_0$; $Produire/E_1$) = 1/5 ;

P_E ($Installer/E_0$; Non/E_1) = 3/5 ;

P_E (Non/E_0 ; $Produire/E_1$) = 1/5 ;

P_E (Non/E_0 ; Non/E_1) = 0.

مثال آخر لتوزيع الاحتمال في مثال لعبة الدخول:

P_E (Installer /E_0 ; Produire/E_1) = 1.

نظرية ناش Théorème de Nash :

كل مباراة منتهية (un jeu fini) تقبل على الأقل توازن ناش إذا كانت الاستراتيجيات المختلطة ممكنة.

أحسن رد مع إستراتيجية مختلطة:

أخذ بعين الاعتبار الاستراتيجيات المختلطة يمكن أن تظهر إمكانيات أخرى لأحسن رد. لملاحظة ذلك نأخذ مثال " صراع الجنسين" " Bataille des sexes " .

نكتب الاستراتيجيات المختلطة للاعبين ب $P_1 = (q , 1- q)$ و $P_2 = (t , 1- t)$ مع:

$$q \text{ et } t \in [0,1]$$

نحصل على الجدول التالي:

			الزوجة	
			t C	1-t F
الزوج	q	C	2 ,1	0 ,0
	1-q	F	0,0	1,2

نقارن الأمل الرياضي لعوائد الزوج للإستراتيجيتين الأصليتين الخاصة به:

C : $U_1 (P_1 , P_2) = EU_1 (P_1 , P_2) = 2t + 0(1- t)= 2t$

F : $U_1 (P_1 , P_2) = EU_1 (P_1 , P_2) = 0t + 1(1- t)= 1- t$

مقابل الإستراتيجية المختلطة للزوجة P_2، الزوج يختار C إذا:

$$2t > 1 - t \Rightarrow t > \frac{1}{3}$$

الزوج يختار كل الوقت الذهاب إلى السينما C (q = 1) ، إذا الزوجة اختارت الذهاب إلى السينما C أكثر من مرة على ثلاثة $(t > \frac{1}{3})$. الزوج يختار كل الوقت الذهاب الى كرة القدم F (q = 0) إذا الزوجة ذهبت إلى كرة القدم F أكثر من مرتين على ثلاثة:

$$t < \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - t > \frac{2}{3}$$

إذا $t = \frac{1}{3}$: الزوج لا يفرق بين الذهاب الى السينما C أو إلى كرة القدم F. في هذه الحالة الأخيرة كل توليفة من الاستراتيجيات هي متكافئة.

بالنتيجة دالة أحسن رد للزوج (اللاعب الأول) هي:

$$R_1(t) = q^*(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad t > \frac{1}{3} \\ \quad [0,1] \quad si \quad t = \frac{1}{3} \\ 0 \quad si \quad t < \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنفس الطريقة للزوجة، لدينا:

$C : U_2 (P_1 , P_2) = EU_2 (P_1 , P_2) = 1q + 0(1-q)= q$

$F : U_2 (P_1 , P_2) = EU_2 (P_1 , P_2) = 0q + 2(1-q)= 2-2 q$

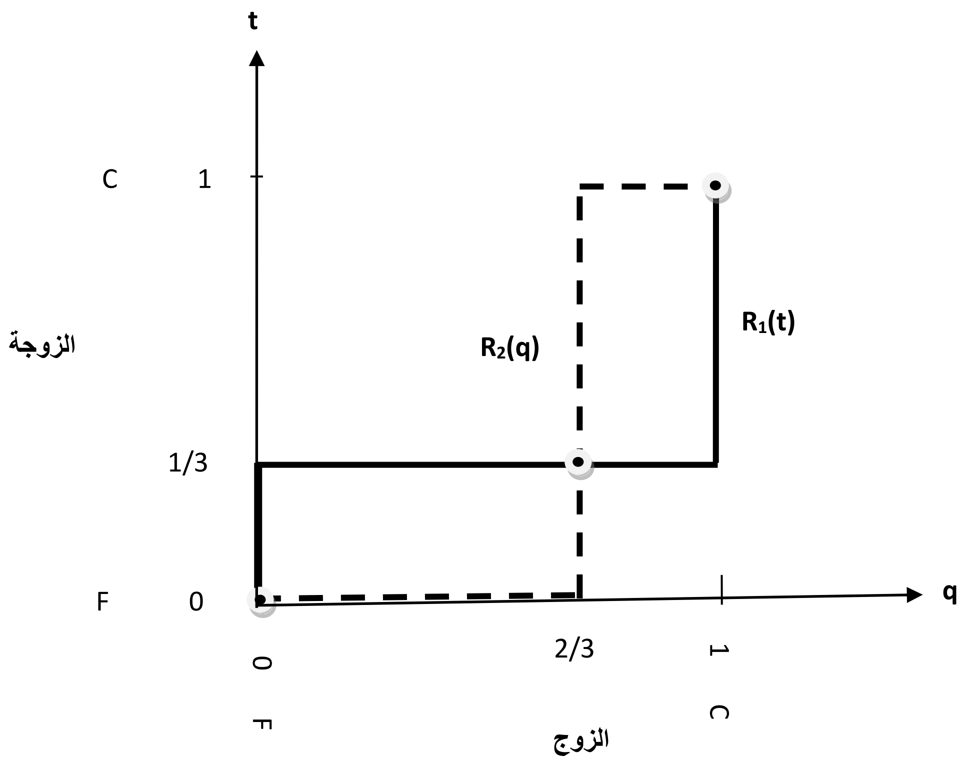
مقابل الإستراتيجية المختلطة للزوج P_1، الزوجة تختار C إذا:

$$q > 2 - 2q \Rightarrow q > \frac{2}{3}$$

إذن، فقط إذا الزوج يذهب إلى السينما C أكثر من مرتين على ثلاثة. بالنتيجة دالة أحسن رد للزوجة (اللاعب الثاني) هي:

$$R_2(q) = t^*(q) = \begin{cases} 1 \quad si \quad q > \frac{2}{3} \\ \quad [0,1] \quad si \quad q = \frac{2}{3} \\ 0 \quad si \quad q < \frac{2}{3} \end{cases}$$

يمكننا تمثيل دوال رد الفعل في بيان:



الشكل1.2. التمثيل البياني لدالتي رد الفعل.

هذا البيان يظهر ثلاث توازنات تظهر في نقاط تقاطع منحيات رد الفعل. توازنين في الإستراتيجية الخالصة (C , C) و(F , F) تظهر في النقاط القصوى (0 , 0) و(1 , 1). توازن جديد في الاستراتيجيات المختلطة يظهر: (q , t) = (2/3 , 1/3). في هذا التوازن، الزوج يذهب إلى السينما مرتين على ثلاثة (2/3) والزوجة تذهب مرة على ثلاثة (1/3).

العوائد المرجوة للاعبين هي:

$$\begin{aligned} U_i(P_1, P_2) &= EU_i(P_1, P_2) = EU_i(q, t) \\ &= q.t.U_i(C, C) + q.(1-t).U_i(C, F) + (1-q).t.U_i(F, C) \\ &+ (1-t).(1-q).U_i(F, F) \end{aligned}$$

$$EU_1 = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 0 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 0 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 1 = \frac{2}{3}$$

$$EU_2 = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 1 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 0 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 0 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 2 = \frac{2}{3}$$

العائد المتوقع هو إذن: $EU_i = 2/3\ ;\ i = 1,2$.

III. الاحتكار الثنائي لكورنو (Autoine Auguestin Cournot - 1838)

هو حالة مرتبطة بوضعية أين كل مؤسسة ستحدد منعزلة (وفي نفس الوقت) الكمية التي ستضعها في السوق. هذه الكميات تقرر بمعرفة هيكل السوق (عدد المنافسين = 1) ودالة الطلب. لا يوجد أي مؤسسة تعلم مسبقا بإنتاج المؤسسة الأخرى. المؤسستان تنتجان سلع متجانسة (من دون تمييز للمنتج)، أي المستهلك لا يفرق بين السلعتين عند الشراء.

دالة الطلب هي دالة خطية: $P = a - bQ$

بحيث Q تمثل الكمية الكلية المنتجة في السوق أو لهذه الصناعة $(Q = q_1 + q_2)$. q_1 هي كمية المؤسسة 1 و q_2 هي الكمية الخاصة بالمؤسسة 2. P هو السعر. نفترض أن المؤسستين لديهم تكاليف وحدوية ثابتة C_1 و C_2 . دالة التكلفة للمؤسسة i تكتب إذن:

$$C(q_i) = c_i \cdot q_i \quad ; i = 1, 2.$$

فكرة أن كل مؤسسة تتعامل بطريقة والمنافس ستكون له ردة فعل على قراراتها هي أساسية لتحديد التصرفات الإستراتيجية (التفاعلات الإستراتيجية).

في هذه الحالة، المؤسسة 1 يجب أن تختار الكمية التي تعظم أرباحها عند كل مستوى من الإنتاج لمنافستها (q_2)، بما يسمح لها بتحديد أحسن رد يمكن أن ترد به على كل الاستراتيجيات (الكمياتq_2). المؤسسة 1 لا تلاحظ أيضا من قبل المنافس، نفس المنطق والتحليل السابق بالنسبة للمؤسسة 2.

مشكل المؤسستين هو تعظيم أرباحهما مع الأخذ بعين الاعتبار استراتيجيات المؤسسة الأخرى (الكميات المنتجة من قبل المنافس):

$$\underset{q_1}{Max}\, \pi_1(q_1, q_2) \qquad , \qquad \underset{q_2}{Max}\, \pi_2(q_1, q_2)$$

الربح لكل مؤسسة يساوي الإيراد الكلي (السعر مضروب في الكمية) ناقص التكاليف الكلية.

عائد المؤسسة 1 المرتبط بالربح في هذه الحالة سيكون:

$$u_1(q_1, q_2) = \big(a - b(q_1 + q_2)\big)q_1 - C_1 q_1$$

$$u_1(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2) - C_1)q_1$$

عائد المؤسسة 2 سيكون:

$$\boldsymbol{u_2(q_1,q_2) = (a - b(q_1+q_2) - C_2)q_2}$$

بعد ذلك نحدد دالة أحسن رد للمؤسستين. لأننا نبحث عن توازن ناش : أحسن رد هو دالة بدلالة كمية المؤسسة الأخرى.

بالنسبة للمؤسسة i الشروط اللازمة لتعظيم الربح هي معطاة كما يلي:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0$$

<u>بالنسبة للمؤسسة (1)</u>:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi_1}}{\partial \boldsymbol{q_1}} = -b\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{q_1}+\boldsymbol{q_2}) - \boldsymbol{C_1} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi_1}}{\partial \boldsymbol{q_1}} = -2b\boldsymbol{q_1} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bq_2} - \boldsymbol{C_1} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{q_1^*(q_2)} = \frac{\boldsymbol{a - C_1}}{\boldsymbol{2b}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{q_2} \dots\dots\dots (\boldsymbol{R_1(q_2)})$$

<u>بالنسبة للمؤسسة (2)</u>:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi_2}}{\partial \boldsymbol{q_2}} = -2b\boldsymbol{q_2} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bq_1} - \boldsymbol{C_2} = \boldsymbol{0}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{q_2^*(q_1)} = \frac{\boldsymbol{a - C_2}}{\boldsymbol{2b}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{q_1} \dots\dots\dots (\boldsymbol{R_2(q_1)})$$

R_1 تعطينا الكميات التي يجب أن تنتجها المؤسسة1 عند كل مستويات الإنتاج للمنافسq_2 بما يسمح بتعظيم أرباحها: تسمى <u>دالة رد الفعل</u> للمؤسسة1.

R_2 تعطينا الكميات التي يجب أن تنتجها المؤسسة2 عند كل مستويات الإنتاج للمنافسq_1 بما يسمح بتعظيم أرباحها: تسمى <u>دالة رد الفعل</u> للمؤسسة2.

<u>السؤال المطروح</u>: ماذا سيكون توازن السوق؟

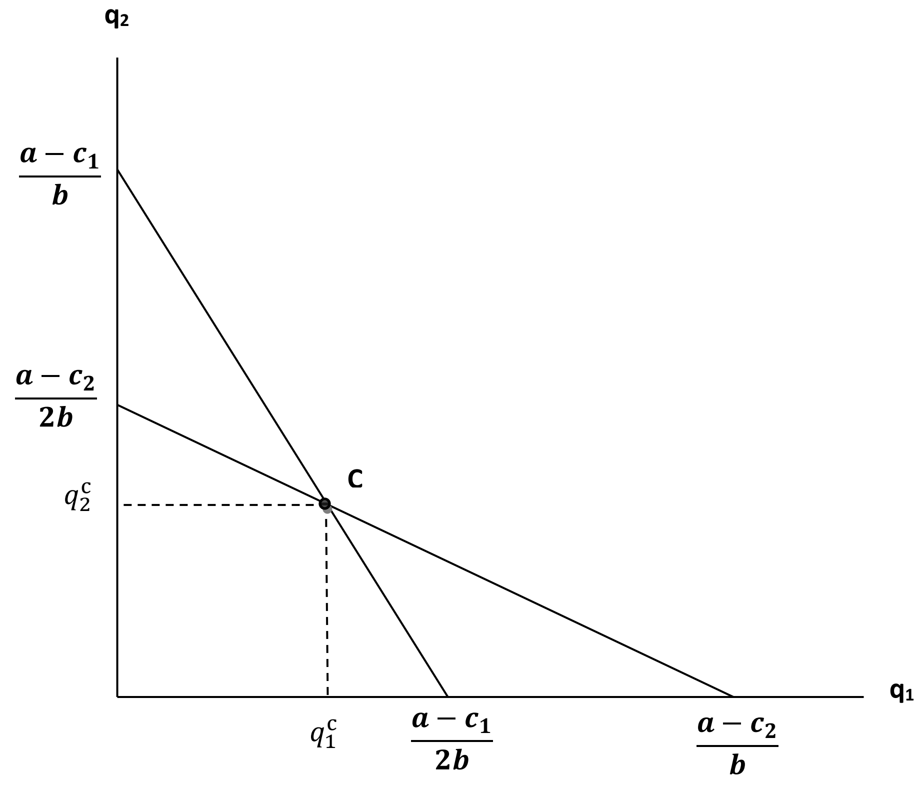
توازن السوق والذي هو نفسه توازن ناش يجب أن يكون موافق للوضعية التي إذا وصلنا إليها ليس من مصلحة أي من المؤسستين الابتعاد عنها، أي لا يمكن لأي مؤسسة أن تحسن من عوائدها بإنتاج كمية مختلفة عن كمية التوازن.

ليكن (q_1^C, q_2^C) هو توازن السوق.

سنحصل في هذه الحالة على:

1. $q_1^C = q_1^*(q_2^C)$ ، q_1^C يعظم ربح المؤسسة 1 بالنظر إلى كمية التوازن للمؤسسة 2 .
2. $q_2^C = q_2^*(q_1^C)$ ، q_2^C يعظم ربح المؤسسة 2 بالنظر إلى كمية التوازن للمؤسسة 1 .

يتحقق التوازن بيانيا عند تقاطع منحني رد الفعل (النقطة C) .



الشكل2.2. دالتي رد الفعل في الاحتكار الثنائي لكورنو

هذه الوضعية (q_1^C, q_2^C) هي <u>توازن كورنو(توازن ناش)</u> : كمية التوازن لكل مؤسسة هي أحسن رد فعل لها على كمية التوازن لمنافستها ولا يمكن للمؤسسة أن تحسن من أرباحها إذا غيرت هذه الكميات.

يجب إذن إيجاد تقاطع منحني رد الفعل (النقطة C) .

في مثالنا:

$$q_1^C = \frac{a - C_1}{2b} - \frac{1}{2} q_2^C \dots\dots\dots (R_1)$$

$$q_2^C = \frac{a - C_2}{2b} - \frac{1}{2} q_1^C \dots\dots\dots (R_2)$$

لدينا إذن جملة معادلتين خطيتين بمجهولين (q_1^C, q_2^C) للحل.

نعوض (2) في (1):

$$q_1^C = \frac{a - C_1}{2b} - \frac{1}{2} (\frac{a - C_2}{2b} - \frac{1}{2} q_1^C) \dots\dots\dots (R_1)$$

$$q_1^C = \frac{a - C_1}{2b} - \frac{a - C_2}{4b} + \frac{1}{4} q_1^C$$

$$\frac{3}{4} q_1^C = \frac{2a - 2C_1 - a + C_2}{4b}$$

$$q_1^C = \frac{a - 2C_1 + C_2}{3b} \dots\dots\dots\dots.. (3)$$

نعوض في (3) في (2):

$$q_2^C = \frac{a - 2C_2 + C_1}{3b}$$

نلاحظ أن كميات التوازن لكل مؤسسة هي متناقصة بالنسبة إلى تكاليفها ومتزايدة مع تكاليف منافستها.

يمكننا حساب العرض وسعر التوازن:

$$Q^C = q_1^C + q_2^C = \frac{2a - C_1 - C_2}{3b}$$

$$P^C = a - bQ^C = a - b\frac{2a - C_1 - C_2}{3b}$$

$$P^C = a - bQ^C = \frac{a + C_1 + C_2}{3}$$

هذا التوازن للسوق يظهر في حالة ما إذا كانت كل مؤسسة تأخذ قرارات الإنتاج الخاصة بها منعزلة (في نفس الوقت مع المؤسسة الأخرى)، ومن دون أي اتصال بين المؤسستين.

IV. تمارين

التمرين الأول

لدينا المباريتين التاليتين:

المباراة 01

		J02	
		G	D
	H	(3 , 6)	(7 , 1)
J01	M	(5 , 1)	(8 , 2)
	B	(6 , 0)	(6 , 2)

المباراة 02

		J02			
		W	X	Y	Z
	A	(6 , 3)	(6 , 2)	(6 , 4)	(6 , 7)
	B	(1 , 1)	(1 , 99)	(1 , 4)	(1 , 0)
J01	C	(3 , 7)	(99 , 2)	(3 , 99)	(3 , 3)
	D	(5 , 1)	(0 , 2)	(99 , 4)	(5 , 5)

المطلوب:

1) إيجاد رد فعل كلا اللاعبين على استراتيجيات اللاعب الآخر في المباراة 01 ؟
2) إيجاد توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية للمباراة 1 و2 ؟

التمرين الثاني

لتكن لدينا المباراة التالية بلاعبين:

		J02			
		E	F	G	H
J01	A	(0 , 0)	(4 , 1)	(2 , 0)	(5 , 0)
	B	(1 , 4)	(3 , 3)	(2 , 2)	(2 , 1)
	C	(0 , 2)	(2 , 2)	(1 , 1)	(8 , 1)
	D	(0 , 5)	(2 , 2)	(1 , 1)	(1 , 2)

المطلوب:

1) أوجد النتائج المثلى حسب باريتو (Parito optimum) ؟
2) بعد إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما (élimination des stratégies strictement dominée، أكتب الصيغة المختصرة للمباراة (Le tableau réduit)؟
3) حدد توازنات ناش في الاستراتيجيات الأصلية والمختلطة للمباراة المختصرة؟
4) مثل بيانيا هذه التوازنات المرتبطة بدوال أحسن رد في الاستراتيجيات المختلطة ؟

التمرين الثالث

لتكن المباراة الممثلة بالصيغة العادية التالية:

		B	
		G	D
A	G	1 ,1	1 ,1
	D	-1,-1	2,0

المطلوب:

1) ماهي توازنات **ناش** في الاستراتيجيات الأصلية (stratégies pures) لهذه المباراة ؟
2) أوجد النتائج المثلى حسب مفهوم **باريتو (Parito optimum)**.
3) أوجد توازن ناش في الاستراتيجيات المختلطة، ثم مثل دوال رد الفعل بيانيا.

حل التمرين الأول

1) إيجاد رد فعل كلا اللاعبين على استراتيجيات اللاعب الآخر في المباراة 01 :

<u>رد فعل اللاعب الأول</u>:

- اللاعب الأول يرد على الإستراتيجية G للاعب الثاني بلعب الإستراتيجية B .
- اللاعب الأول يرد على الإستراتيجية D للاعب الثاني بلعب الإستراتيجية M .

<u>رد فعل اللاعب الثاني</u>:

- اللاعب الثاني يرد على الإستراتيجية H للاعب الأول بلعب الإستراتيجية G .
- اللاعب الثاني يرد على الإستراتيجية M للاعب الأول بلعب الإستراتيجية D .
- اللاعب الثاني يرد على الإستراتيجية B للاعب الأول بلعب الإستراتيجية D .

2) إيجاد توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية للمباراة 1 والمباراة 2 :

<u>توازن ناش للمباراة 1</u> :

سنمثل دالة رد فعل كلا اللاعبين بالدائرة (◯) في مصفوفة المباراة.

		J02	
		G	D
	H	(3 , 6)	(7 , 1)
J01	M	(5 , 1)	(8 , 2)*
	B	(6 , 0)	(6 , 2)

بعد تمثيل رد فعل كل لاعب في مصفوفة المباراة، تحصلنا على توازن وحيد لناش هو مرتبط بتقاطع دوال رد الفعل. توازن ناش الوحيد هو لعب اللاعب الأول في التوازن الإستراتيجية M واللاعب الثاني الإستراتيجية D.

$$(M , D)^* = (8, 2)$$

توازن ناش للمباراة 2 :

		J02			
		W	X	Y	Z
J01	A	(6 , 3)	(6 , 2)	(6 , 4)	(6 , 7)*
	B	(1 , 1)	(1 , 99)	(1 , 4)	(1 , 0)
	C	(3 , 7)	(99 , 2)	(3 , 99)	(3 , 3)
	D	(5 , 1)	(0 , 2)	(99 , 4)	(5 , 5)

بعد تمثيل دوال رد الفعل لكل لاعب في مصفوفة المباراة، تحصلنا على توازن وحيد لناش هو مرتبط بتقاطع دوال رد الفعل. توازن ناش الوحيد هو لعب اللاعب الأول في التوازن الإستراتيجية A واللاعب الثاني الإستراتيجية Z .

$$(A , Z)^* = (6 , 7)$$

الملاحظ أن توازن ناش في المباراتين هو نفسه التوازن المحصل عليه عن طريق إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما.

حل التمرين الثاني

1) **النتائج المثلى حسب باريتو هي :**

(B, E)، (B , F) ، (D, E) و(C , H) هي مثلى حسب باريتو (Parito optimum) لأنه لا توجد أي نتيجة تسيطر حسب مفهوم باريتو على هذه النتائج .

باقي النتائج هي ليست مثلى حسب مفهوم باريتو لأن:

- النتيجة (A , E) هي ليست مثلى لان كل النتائج الأخرى تسيطر عليها حسب مفهوم باريتو.
- النتيجة (A , F) هي ليست مثلى لان النتيجة (C , H) تسيطر عليها حسب باريتو.

- النتيجة (A , G) هي ليست مثلى لأنه يوجد مجموعة من النتائج تسيطر عليها مثل: النتيجة (A , H) والنتيجة (B , F) والنتيجة (B , G) .... الخ(يوجد نتائج أخرى).
- النتيجة (A , H) هي ليست مثلى لان النتيجة (C , H) تسيطر عليها حسب باريتو.
- النتيجة (B , G) هي ليست مثلى لان النتيجة (B , F) تسيطر عليها حسب باريتو.
- النتيجة (B , H) هي ليست مثلى لأنه يوجد مجموعة من النتائج تسيطر عليها مثل: النتيجة (A , F) والنتيجة (B , F) والنتيجة (B , G) .... الخ(يوجد نتائج أخرى).
- النتيجة (C , E) هي ليست مثلى لأنه يوجد مجموعة من النتائج تسيطر عليها مثل: النتيجة (B , E) والنتيجة (B , F) والنتيجة (B , G) .... الخ(يوجد نتائج أخرى).
- النتيجة (C , F) هي ليست مثلى لان النتيجة (B , F) تسيطر عليها حسب باريتو.
- النتيجة (C , G) هي ليست مثلى لأنه يوجد مجموعة من النتائج تسيطر عليها مثل: النتيجة (A , F) والنتيجة (B , F) والنتيجة (B , G) .... الخ(يوجد نتائج أخرى).
- النتيجة (D , F) هي ليست مثلى لان النتيجة (B , F) تسيطر عليها حسب باريتو.
- النتيجة (D , G) هي ليست مثلى لأنه يوجد مجموعة من النتائج تسيطر عليها مثل: النتيجة (A , F) والنتيجة (B , F) والنتيجة (B , G) .... الخ(يوجد نتائج أخرى).
- النتيجة (D , H) هي ليست مثلى لأنه يوجد مجموعة من النتائج تسيطر عليها مثل: النتيجة (B , F) والنتيجة (B , G) والنتيجة (C , F) والنتيجة (D , F) .

2) إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما و كتابة الصيغة المختصرة للمباراة:

- الإستراتيجية B للاعب الأول مسيطرة تماما على D، بالتالي سيتم إلغاء D من المباراة.

- بعد إلغاء D، الإستراتيجية F للاعب الثاني مسيطرة تماما على G وH. سيتم إلغاء G وH من المباراة.

- ثم، B للاعب الأول مسيطرة تماما على C.

الجدول المختصر للمباراة بعد إلغاء الاستراتيجيات المسيطر عليها تماما هو إذن:

		J2	
		E	F
J1	A	**(0 , 0)**	**(4 , 1)**
	B	**(1 , 4)**	**(3 , 3)**

3) توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية والمختلطة للمباراة المختصرة:

لدينا توازنين لناش في الاستراتيجيات الأصلية هما: **(A , F)** و **(B , E)** .

توازن ناش في الاستراتيجيات المختلطة:

الإستراتيجيتان المختلطتان للاعبين هما: $P_1 = (q , 1\text{-}q)$ و $P_2 = (t , 1\text{-}t)$. مع $q , t \in [0,1]$

			J2	
			t	1-t
			E	F
J2	q	A	**(0 , 0)**	**(4 , 1)**
	1-q	B	**(1 , 4)**	**(3 , 3)**

الأمل الرياضي لعوائد اللاعب الأول للإستراتجيتين الأصليتين الخاصة به:

$A : U_1 = E_{U1} = 0 . t + 4 . (1\text{-}t) = 4 - 4t$

$B : U_1 = E_{U1} = 1 . t + 3 . (1\text{-}t) = t + 3 - 3 t$

اللاعب الأول يفضل الإستراتيجية A إذا:

$$4 - 4t > -2t + 3 \Rightarrow t < \frac{1}{2}$$

بالنتيجة دالة أحسن رد للاعب الأول هي:

$$R_1(t) = q^*(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad\quad t < \dfrac{1}{2} \\ \quad\quad [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \quad\quad si \quad\quad t = \dfrac{1}{2} \\ 0 \quad si \quad\quad t > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

الأمل الرياضي لعوائد اللاعب الثاني للإستراتجيتين الأصليتين الخاصة به:

$E : U_2 = E_{U2} = 0 . q + 4 . (1\text{-}q) = 4 - 4q$

$F: U_2 = E_{U2} = 1 . q + 3 . (1\text{-}q) = q + 3 - 3 q$

اللاعب الثاني يفضل الإستراتيجية E إذا:

$$4 - 4q > -2q + 3 \Rightarrow q < \frac{1}{2}$$

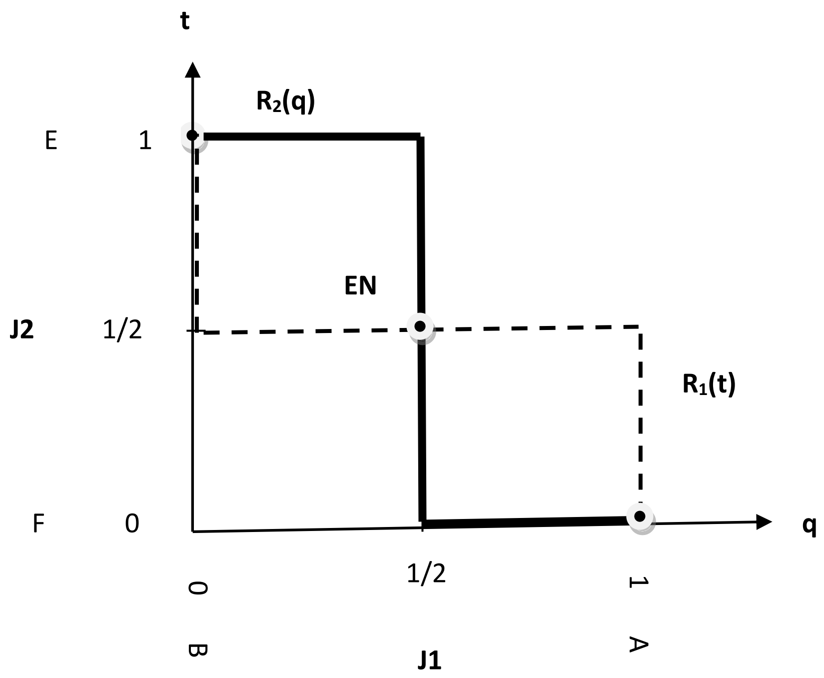
دالة أحسن رد اللاعب الثاني هي:

$$R_2(q) = t^*(q) = \begin{cases} 1 \quad si \quad\quad q < \dfrac{1}{2} \\ \quad\quad [\mathbf{0}, \mathbf{1}] \quad\quad si \quad\quad q = \dfrac{1}{2} \\ 0 \quad si \quad\quad q > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

توازن ناش في الإستراتيجيات المختلطة هو:

$$\left(t^* = q^* = \frac{1}{2}\right)$$

التمثيل البياني:



حل التمرين الثالث

1) توازنات ناش في الاستراتيجيات الأصلية للمباراة:

المباراة تحتوي على توازنين هما (G,G) و(D,D).

2) النتائج المثلى حسب باريتو (Parito optimum):

(D,G) هي ليست مثلى حسب باريتو لأن جميع النتائج الأخرى تسيطر عليها. باقي النتائج (G,G) و(G,D) و(D,D) كلها مثلى لأنه لا توجد أي نتيجة تسيطر عليهم.

3) توازن ناش في الاستراتيجيات المختلطة:

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">B</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>t
G</td><td>1-t
D</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>q</td><td>G</td><td>1 ,1</td><td>1 ,1</td></tr>
<tr><td>1-q</td><td>D</td><td>-1,-1</td><td>2,0</td></tr>
</table>

الإستراتيجيتان المختلطتان للاعبين هما: $P_A = (q , 1-q)$ و $P_B = (t , 1-t)$. مع : $q , t \in [0,1]$

الأمل الرياضي لعوائد اللاعب A للإستراتيجيتين الأصليتين الخاصة به:

$G : U_A = E_{UA} = t.1 + (1-t).1 = 1$

$D : U_A = E_{UA} = t. (-1) + (1-t).2 = 2 - 3t$

اللاعب A يفضل الإستراتيجية G إذا:

$$1 > 2 - 3t \Rightarrow t > \frac{1}{3}$$

اللاعب A يفضل الإستراتيجية G إذا اللاعب B لعب G أكثر من مرة على ثلاثة ولا يفرق بين الإستراتيجيتين G و D إذا $t = 1/3$.

الأمل الرياضي لعوائد اللاعب B للإستراتيجيتين الأصليتين الخاصة به:

$G : U_B = E_{UB} = q.1 + (1-q). (-1) = 2q - 1$

$D : U_B = E_{UB} = q.1 + (1-q).0 = q$

اللاعب B يفضل الإستراتيجية G إذا:

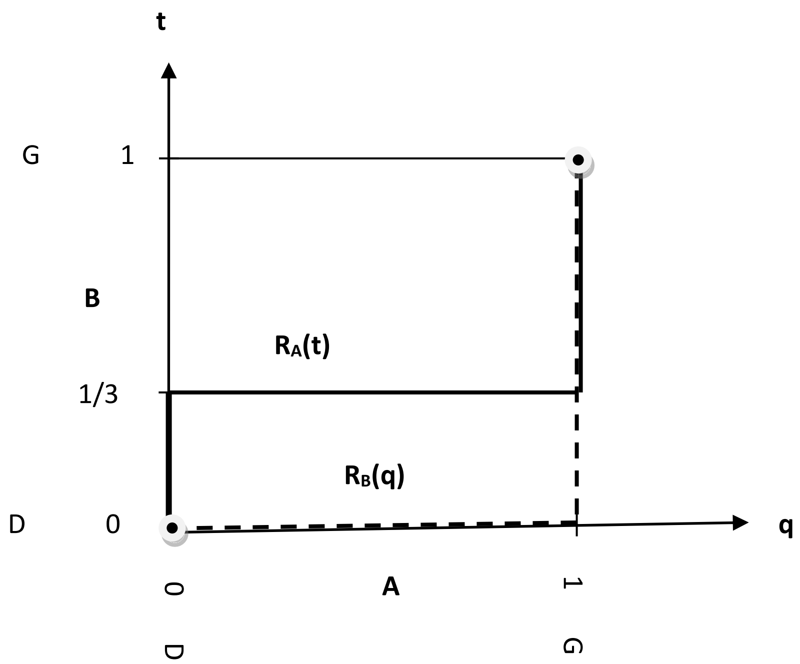
$$2q - 1 > q \Rightarrow q > 1$$

إذن، اللاعب B يلعب دائما D لأن q لا يمكن أن تكون أكبر تماما من 1، (دائما أصغر أو تساوي 1حسب التعريف). اللاعب B لا يفرق بين G و D إذا q =1 .

توازن ناش في الإستراتيجيات المختلطة هو:

$$\left(\boldsymbol{t = \frac{1}{3}; q = 1}\right)$$

- **تمثيل دوال رد الفعل بيانيا:**



الفصل الثالث: مباراة المعلومة التامة والكاملة

I. المعلومة الكاملة و الصيغة الشاملة لمباراة

II. ضرورة تعديل مفهوم توازن ناش

III. نموذج ستكالبرغ

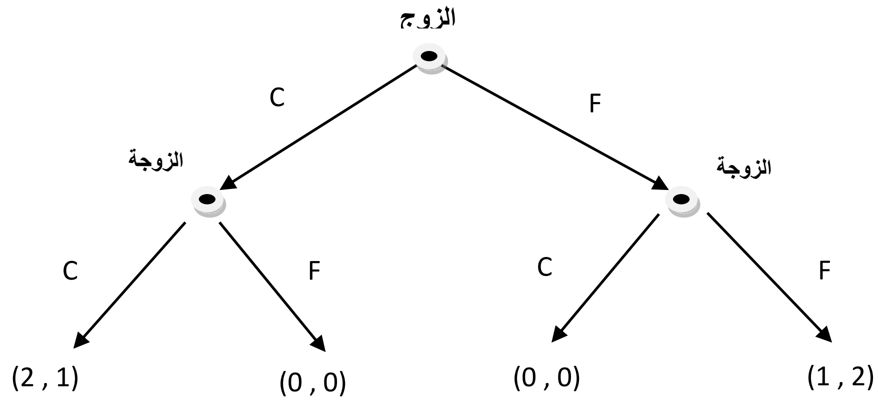
IV. تمارين

I. المعلومة الكاملة والصيغة الشاملة لمباراة

عندما يتدخل الواحد تلو الآخر في مباراة بترتيب محدد، وعدد خطط العمل تكون منتهية، الطريقة الأكثر ملائمة لعرض المباراة هي عرضها بالصيغة الشاملة.

أ- الصيغة الشاملة لمثال مباراة صراع الجنسين

في المثال التالي نأخذ بعين الاعتبار أن المباراة هي ذات الحركة التالية (المعلومة الكاملة). الزوج يخرج أولا ويترك رسالة لزوجته ليخبرها بالقرار الذي اتخذه. في الوقت الذي سوف تتخذ فيه قرارها، الزوجة هي على دراية بالقرار المتخذ من قبل الزوج.



الشكل 1.3. الصيغة الشاملة لمباراة صراع الجنسين (مباراة الحركة التالية)

الزوج يملك فقط مجموعة معلومات واحدة: العقدة الأولى الموجودة في أعلى شجرة المباراة. في المقابل الزوجة سوف تختار وهي على علم إذا الزوج اختار C أو اختار F . إذن الزوجة تملك مجموعتين من المعلومات الممثلة بالعقدتين الخاصة باختيارات الزوجة.

ب- مفهوم الإستراتيجية في مباراة الحركة التالية

في الدروس السابقة (الفصل 01)، اللاعبون يتدخلون مرة واحدة ويتجاهلون ويجهلون القرارات المتخذة من قبل الشريك. اختيار الإستراتيجية يتم اختصاره في خطة عمل خاصة. في مباراة الحركة التالية (jeu dynamique)، اللاعبون يمكن أن يتدخلوا في عدة مرات.

الإستراتيجية تحدد قبل بداية المباراة، يتعلق الأمر بخطة عمل التي تصف بطريقة متكاملة تصرف اللاعب خلال المباراة، اللاعب يجب أن يتنبأ باختياره عندما يتدخل. اللاعب i يمكن أن تكون له

مجموعات معلومات مختلفة (D_1^i, D_2^i ....) ، هذا اللاعب يمكنه أن يرفق مسبقا اختيار لكل مجموعة معلومات حين يجب عليه التدخل.

تعريف الإستراتيجية في مباراة ذات الحركة التالية ذات المعلومة التامة:

الإستراتيجية هي خطة عمل متكاملة يحددها اللاعب قبل بداية المباراة. للاعب i إستراتيجية S^{i} هي تمثل خطط عمل خاصة $\{s^{\mathrm{i}}(D_1^i), s^{\mathrm{i}}(D_2^i), \ldots.\}$ التي يرفقها اللاعب مسبقا بكل مجموعة معلومات .... D_1^i, D_2^i المتاحة له عندما يقوم باختياراته.

نطبق التعريف أعلاه على مباراة صراع الجنسين (ذات الحركة التالية):

- الزوج يتدخل أولا ويجب أن يختار بين C وF . له فقط مجموعة معلومات واحدة، يمكنه الاختيار بين إستراتيجيتين، لكل إستراتيجية خطة عمل واحدة C وF.
- الزوجة تتدخل ثانية ويجب أن تختار بين C وF . هي تملك مجموعتين من المعلومات: $D_1^{Mme} = C$ اذا الزوج اختار الذهاب إلى السينما و$D_2^{Mme} = F$ اذا اختار الزوج الذهاب الى كرة القدم. قبل بداية المباراة، الزوجة يمكنها التنبؤ بالاختيارات المقابلة لكل مجموعة معلومات: تلعب C أو F إذا كانت في مجموعة المعلومات الأولى وتلعب C أو F إذا كانت في مجموعة المعلومات الثانية. قبل المباراة، الزوجة يمكن أن تختار بين أربعة استراتيجيات مختلفة، هذه الاستراتيجيات هي:

$$\{s^{Mme}(C) = C, s^{Mme}(F) = C\}; \{s^{Mme}(C) = C, s^{Mme}(F) = F\};$$
$$\{s^{Mme}(C) = F, s^{Mme}(F) = C\}; \{s^{Mme}(C) = F, s^{Mme}(F) = F\}.$$

يمكن كتابة استراتيجيات الزوجة بطريقة أخرى:

$\{CC\}$: تختار دائما C .

$\{CF\}$: تختار نفس اختيار الزوج (تلعب C إذا لعب C وتختار F إذا لعب F).

$\{FC\}$: تختار عكس اختيار الزوج (تلعب F إذا لعب C وتختار C إذا لعب F).

$\{FF\}$: تختار دائما F .

ج- الصيغة العادية للمباراة ذات المعلومة التامة والكاملة

بعد تبيان مجموعة الاستراتيجيات لكل لاعب، يمكن عرض المباراة بالصيغة العادية. للإشارة فإن وصف المباراة بالصيغة العادية لا يعني أبدا أننا سنخسر معلومات ولا يحد ذلك من التفاعلات الإستراتيجية للاعبين.

<u>مثال</u>:

الصيغة العادية لمباراة صراع الجنسين (متزامنة الحركة)

تتعلق المباراة باتخاذ قرار في آن واحد بين شريكين (زوجين)، وعليهما الاختيار في آن واحد بين الذهاب إلى السينما (C) أو إلى مشاهدة مباراة في كرة القدم (C). عوائد اللاعبين ممثلة بالصيغة العادية ستكون على النحو التالي:

الجدول 1.3. الصيغة العادية لمباراة صراع الجنسين (متزامنة الحركة)

		الزوجة	
		Cinéma (N)	**Foot (F)**
الزوج	**Cinéma (N)**	(2 , 1)	**(0 ,0)**
	Foot (F)	**(0 , 0)**	(1 , 2)

الصيغة العادية لمباراة صراع الجنسين (ذات الحركة التالية)

الزوجة في هذه الحالة تلاحظ القرار المتخذ من قبل الزوج. الزوج يملك إستراتيجيتين والزوجة لها أربعة استراتيجيات:

الجدول 2.3. الصيغة العادية لمباراة صراع الجنسين (ذات الحركة التالية)

		الزوجة			
		C C	C F	F C	F F
الزوج	C	2 , 1	2 , 1	0 , 0	0 , 0
	F	0 , 0	1 , 2	0 , 0	1 , 2

II. ضرورة تعديل مفهوم توازن ناش

سنقوم بإيجاد توازن ناش كما رأيناه في الفصل 02 في الاستراتيجيات الأصلية لمباراة الحركة التالية (Jeux dynamiques) للتحقق من إمكانية تطبيق توازن ناش على هذا النوع من المباريات؟

نكمل مع مثال صراع الجنسين (الحركة التالية) ونبحث عن توازن ناش لهذه المباراة بالصيغة العادية.

سنمثل رد فعل كلا اللاعبين في مصفوفة المباراة بالدائرة ◯ .

		الزوجة			
		C C	C F	F C	F F
الزوج	C	2 , 1 *	2 , 1 *	0 , 0	0 , 0
	F	0 , 0	1 , 2	0 , 0	1 , 2 *

تحصلنا على ثلاث توازنات لناش في الإستراتيجية الأصلية هي:

التوازن الأول: (F, FF) أو $(\boldsymbol{s}^{\mathbf{Mr}} = \mathbf{F}; \{s^{Mme}(C) = F, s^{Mme}(F) = F\})$

التوازن الثاني: (C, CC) أو $(\boldsymbol{s}^{\mathbf{Mr}} = \mathbf{C}; \{s^{Mme}(C) = C, s^{Mme}(F) = C\})$

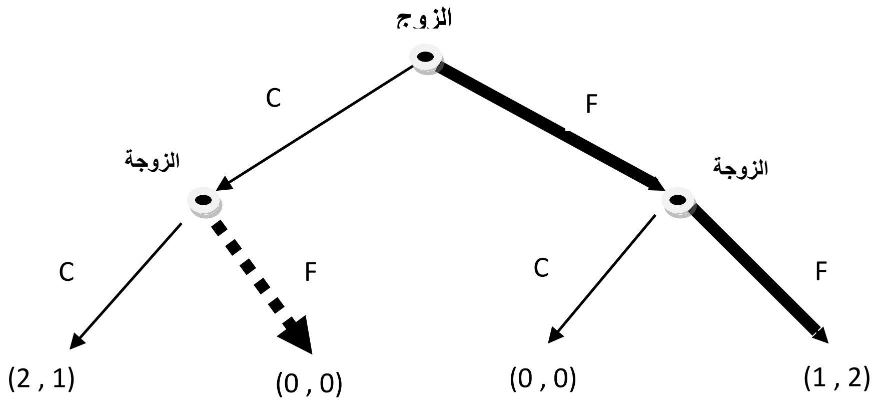
التوازن الثالث: (C, CF) أو $(\boldsymbol{s}^{\mathbf{Mr}} = \mathbf{C}; \{s^{Mme}(C) = C, s^{Mme}(F) = F\})$

سنقوم بالتحقق من مدى استجابة التوازنات الثلاثة للشروط النظرية لتوازن ناش (les arguments de stabilités). في نطاق مباراة ذات الحركة التالية من الضروري التحقق من مدى موافقة التوازنات المتوصل إليها للشروط الواجب تحققها في توليفة معينة لكي تكون توازن ناش حسب التعريف، أي اختبار واقية الاختيارات (la crédibilité des choix).

سوف نختبر التوازنات الثلاثة لناش المتحصل عليها في مباراة الحركة التالية لمثال صراع الجنسين.

<u>**توازن ناش الأول:**</u> (F, FF) أو $(\boldsymbol{s}^{\mathbf{Mr}} = \mathbf{F}; \{s^{Mme}(C) = F, s^{Mme}(F) = F\})$

التوازن الأول هو ممثل بثلاث قطع مستقيمة بالخط الغليظ في الشكل التالي. الخط المتقطع هو لتبيان الاختيار غير الواقعي أو غير العقلاني.



في إطار هذا التوازن الزوج يختار الذهاب إلى كرة القدم (F) والزوجة التي تلاحظ هذا الاختيار ستختار كذلك كرة القدم (F). تتابع الخيارات F وF يسمى بمسار التوازن (sentier d'équilibre).

إذا الزوجة لاحظت اختيار الزوج الذهاب للسينما (C) كانت ستختار الذهاب إلى كرة القدم (F) كذلك. هذا الخيار الأخير $s^{Mme}(C) = F$ هو خيار خارج مسار التوازن.

سنتحقق إذا كانت الثنائية من الاستراتيجيات أعلاه تشكل توازن ناش:

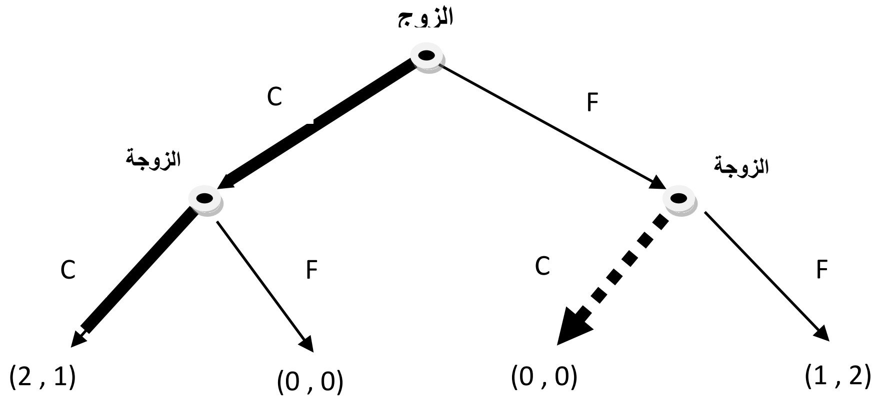
- مقابل الإستراتيجية F للزوج، أحسن رد من قبل الزوجة هو باختيار F لأنها تعطيها عائد يساوي 2 بدل من 0 إذا اختارت C.
- مقابل الإستراتيجية $\{s^{Mme}(C) = F, s^{Mme}(F) = F\}$ للزوجة، الزوج يقوم باختيار F ، لان الزوجة تكمل ب F وعائد الزوج سكون1 . اختيار C من قبل الزوج سيتبع ب F من قبل الزوجة وعائد الزوج سيكون 0 .

الزوج سيذهب إلى كرة القدم F لأنه يتفادى العائد 0 أقل من 1 . العائد 0 هو مرتبط باختيار الزوجة $s^{Mme}(C) = F$ وهو خارج مسار التوازن. كذلك هذا التهديد الأخير هو غير واقعي، بحيث بعد ملاحظة الزوجة لاختيار الزوج ل C ، الزوجة ستحصل على 1 إذا اختارت C و 0 إذا اختارت F. اختيار $s^{Mme}(C) = F$ يعني خسارة في الربح تساوي 1 . أيضا الإستراتيجية F للزوج هي أحسن رد على إستراتيجية الزوجة التي تحتوي على خيار غير واقعي.

بالتالي شروط توازن ناش لا تتوفر في هذا التوازن الأول، نقول عنه بأنه ليس **بتوازن ناش الكامل**.

توازن ناش الثاني: (C, CC) أو $(\mathbf{s^{Mr}} = \mathbf{C}; \{s^{Mme}(C) = C, s^{Mme}(F) = C\})$

التوازن الثاني هو ممثل بثلاث قطع مستقيمة بالخط الغليظ في الشكل التالي. الخط المتقطع هو لتبيان الاختيار غير الواقعي.



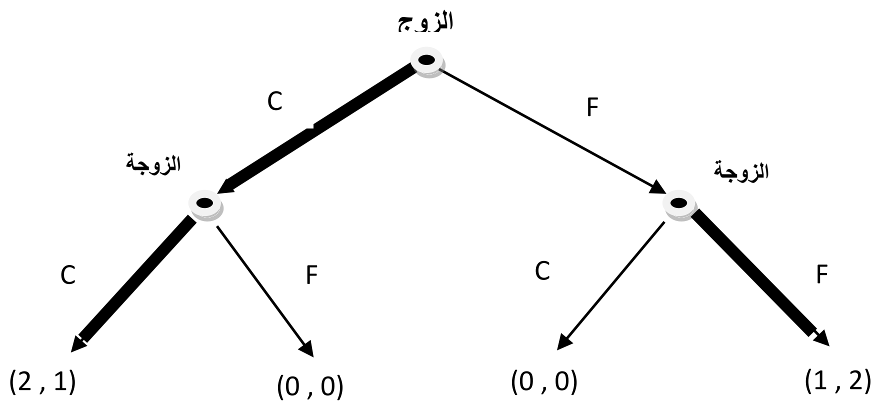
في هذا التوازن الزوج يختار الذهاب إلى السينما C ، الزوجة تلاحظ ذلك وستختار الذهاب إلى السينما C . إذا الزوجة لاحظت اختيار الزوج لكرة القدم F ستختار كذلك الذهاب إلى السينما C .

هذا التوازن هو مرتبط كذلك بتهديد غير عقلاني وخارج مسار التوازن. بحيث، بعد ملاحظة F من قبل الزوجة، ستحصل على 0 إذا لعبت C و2 إذا لعبت F . اختيار $s^{Mme}(F) = C$ يقود الى خسارة في الربح تساوي 2 .

بالنتيجة التوازن الثاني لا يمكن اختياره لأنه ليس توازن ناش الكامل.

توازن ناش الثالث: (C, CF) أو $(\mathbf{s^{Mr}} = \mathbf{C}; \{s^{Mme}(C) = C, s^{Mme}(F) = F\})$

التوازن الثالث هو ممثل بثلاث خطوط بالخط الغليظ في الشكل التالي:



في هذا التوازن الزوج يذهب إلى السينما C، الزوجة تلاحظ هذا الاختيار وستختار كذلك C . إذا الزوجة لاحظت اختيار الزوج ل F ستختار كذلك F.

مقابل إستراتيجية الزوجة، أحسن رد من قبل الزوج هو اختيار C لان الزوجة تكمل ب C وعائد الزوج سيكون 2. اختيار الزوج ل F سيقابله اختيار الزوجة ل F وعائد الزوج سيكون 1 .

الزوج إذن سيذهب إلى السينما C ليتفادى العائد 1 وأقل من 2 . العائد 1 هو مرتبط بالاختيار $s^{Mme}(F) = F$ للزوجة وهو خارج مسار التوازن. هذا الخيار الأخير هو عقلاني (Crédible). بعد ملاحظة الزوجة F للزوج، ستحصل على 0 إذا لعبت C و2 إذا لعبت F . إذن اختيار $s^{Mme}(F) = F$ هو أحسن خيار للزوجة في هذه الحالة.

كذلك الإستراتيجية C للزوج هي أحسن رد على إستراتيجية الزوجة التي لا تحتوي إلا على الاختيارات الواقعية. نقول على هذا التوازن الأخير لناش على أنه **توازن ناش كامل**.

يظهر إذن أنه من بين ثلاث توازنات لناش في الحركة التالية، 2 منها مبنية على تهديدات غير واقعية. هذه التوازنات لا يمكن أن يتم اختيارها كتوازنات في المباريات ذات الحركة التالية. فقط التوازن الثالث يمكن اختياره ليكون توازن ناش الكامل.

1. توازن ناش الكامل في المباريات ذات الحركة التالية

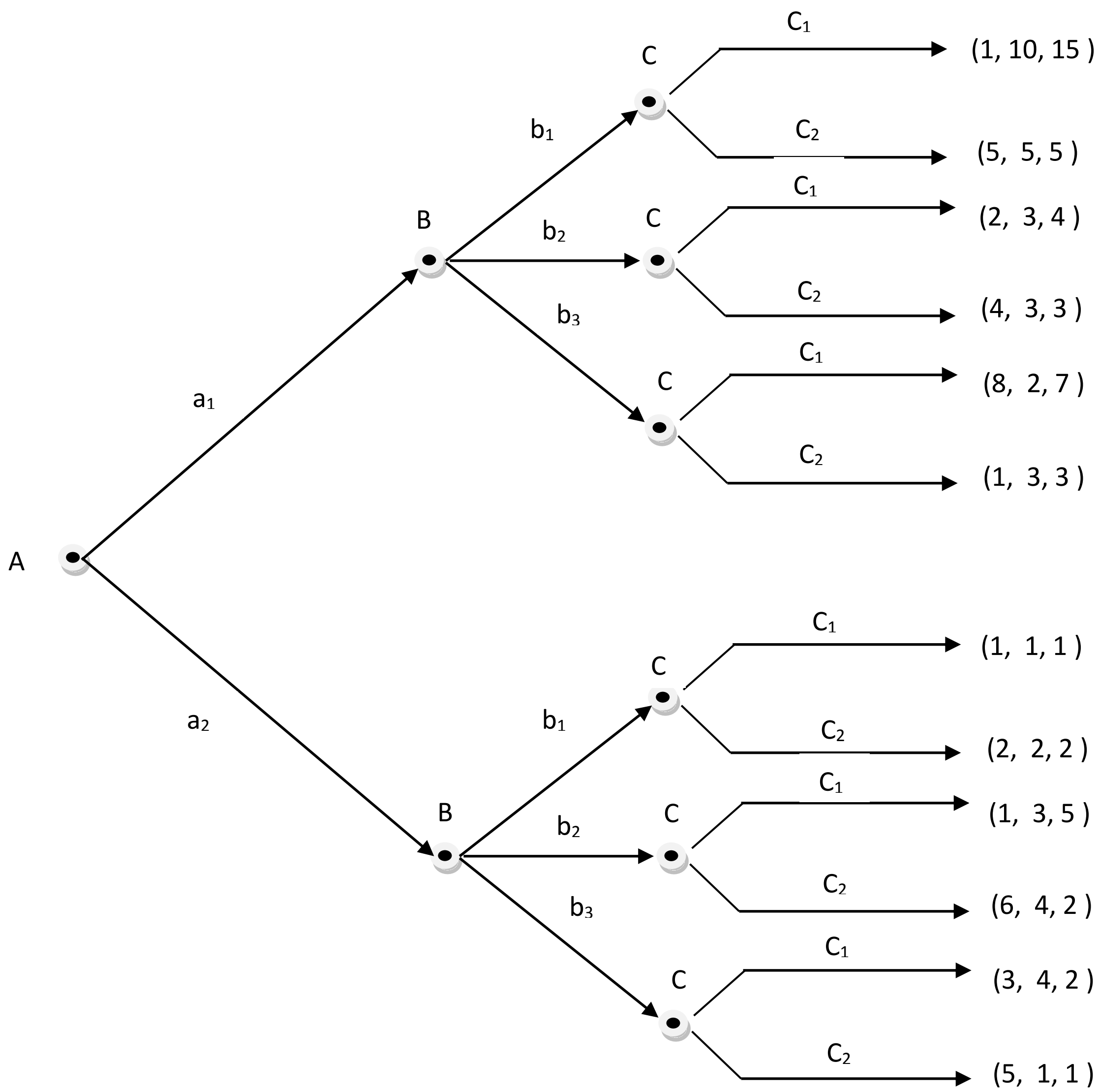
حل المباراة ذات الحركة التالية ومحاولة الوصول إلى توازنات لناش من خلال الصيغة العادية للمباراة والاعتماد على نفس الطريقة التي اتبعناها سابقا هي ليست الطريقة المثلى لحالة المباراة ذات الحركة التالية كما في حالة المثال السابق لصراع الجنسين أين تحصلنا على ثلاث توازنات، اثنين منها مبنية على تهديدات غير واقية، هي غير واقعية لأن من مصلحة لاعب على الأقل تغيير إستراتيجيته، وبالتالي إذا تحقق ذلك فإن هذا لا يعتبر توازن ناش كامل كما رأينا في تعريف توازن ناش في الفصل الأول: نتيجة معينة هي توازن ناش إذا لم يكن من مصلحة أي لاعب الابتعاد عنها. الطريقة المتبعة لا توصلنا إلى توازن ناش الكامل لأنها لا تبين لنا حركة القرارات بما يجعلها لا تحدد لنا مباشرة **توازن ناش الكامل** أو يسمى كذلك **توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية (équilibre de Nash parfait en sous- jeux).**

لنكون أكثر دقة يجب التطرق إلى مفهوم "المباريات الجزئية " (sous-jeux) ثم توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية.

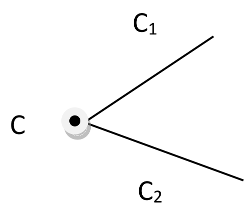
أ- المباريات الجزئية (sous-jeux)

في شجرة Kuhn يمكن الانطلاق من عقدة أيا كانت هذه العقدة، كل عقدة ناتجة عن المباراة الأصلية فهي مباراة جزئية. المباراة الجزئية تبدأ <u>**بعقدة منعزلة**</u> وتضم كل العقد الناجمة عنها مباشرة، والمباراة كلها عبارة عن مباراة جزئية .

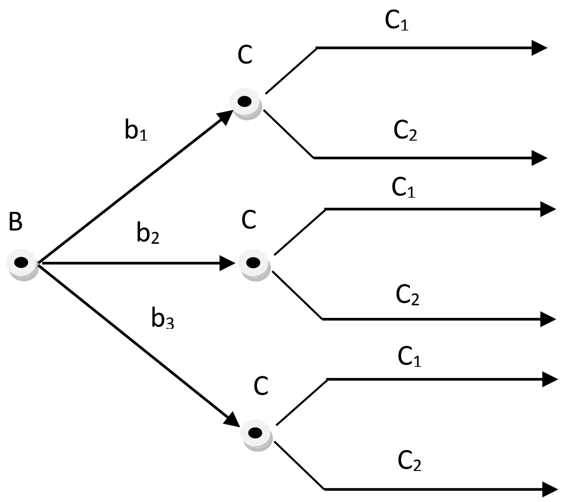
<u>**مثال**</u>: ليكن لدينا المباراة الممثلة بالصيغة الشاملة التالية:



- المباراة أعلاه تحتوي على 06 مباريات جزئية من النوع مباراة جزئية بفرعين متعلقة بالعقد الخاصة باختبارات C .



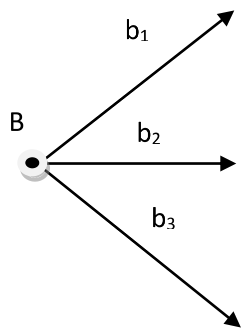
- لدينا مباريتين جزئيتين ب 9 فروع:



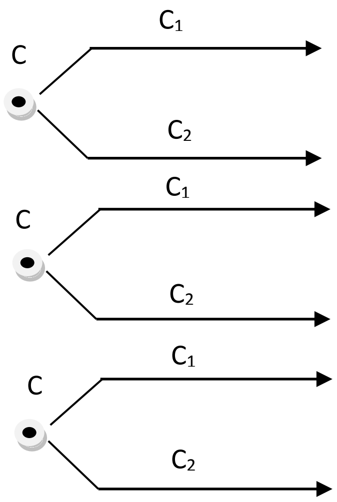
في النهاية المباراة بأكملها عبارة عن مباراة جزئية. إذن تحتوي هذه المباراة على 9 مباريات جزئية، 8 مباريات جزئية تسمى مباريات جزئية موفقة (sous- jeux propres) إضافة إلى المباراة الكاملة.

ملاحظة:

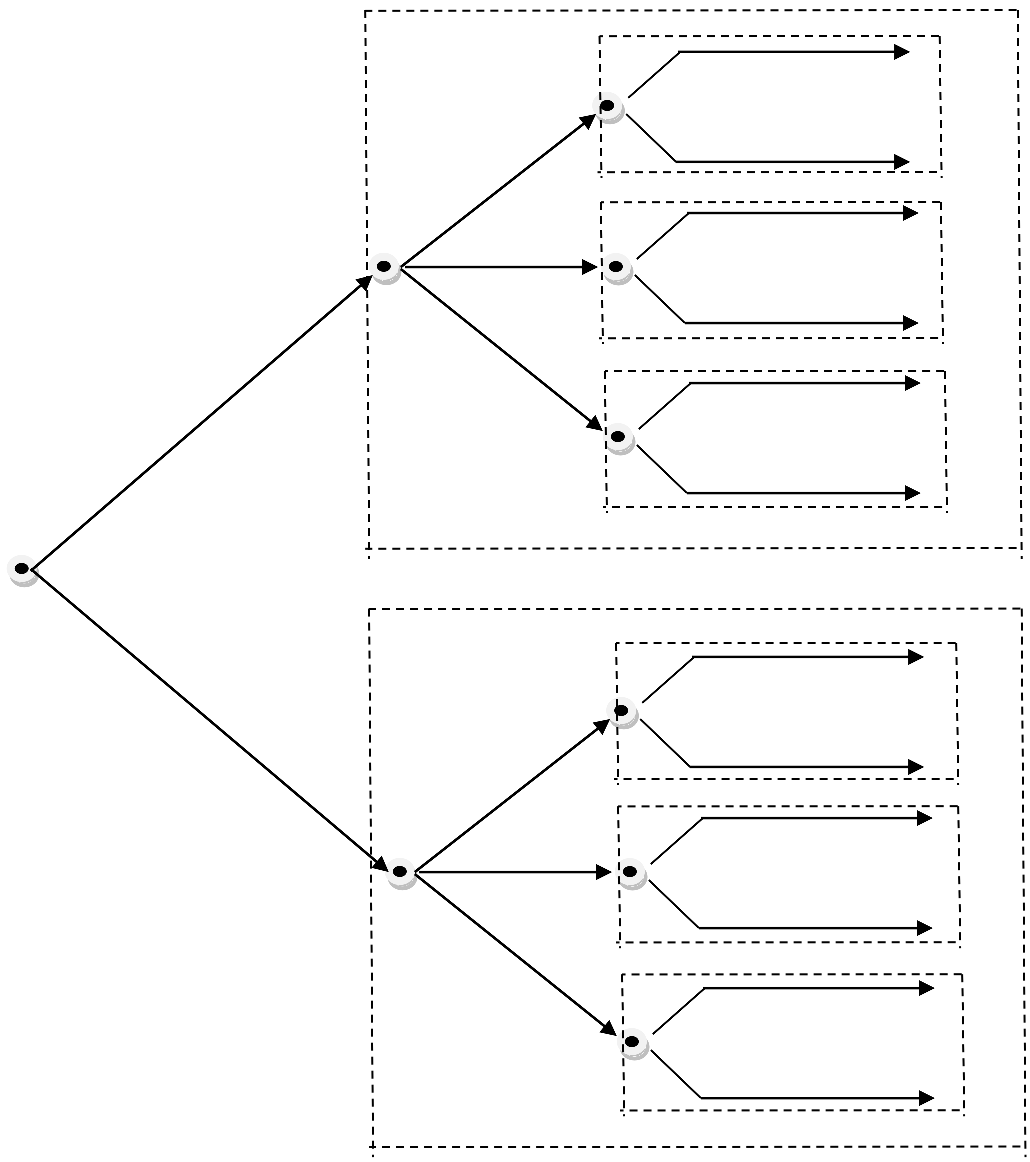
ما عدا المباريات الجزئية التسعة (9) المحددة، لا يمكن اعتبار أي مباراة أخرى مباراة جزئية. فمثلا المباراة الجزئية التالية ليست مباراة جزئية لأنها أهملت العقد الناجمة عنها:



كما أن المباراة التالية لا تعتبر مباراة جزئية لأنها لم تنتج عن عقدة منعزلة:



المباريات الجزئية للمثال السابق هي موضحة في الشكل التالي:



ب- توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية (équilibre de Nash Parfait en Sous- Jeux)

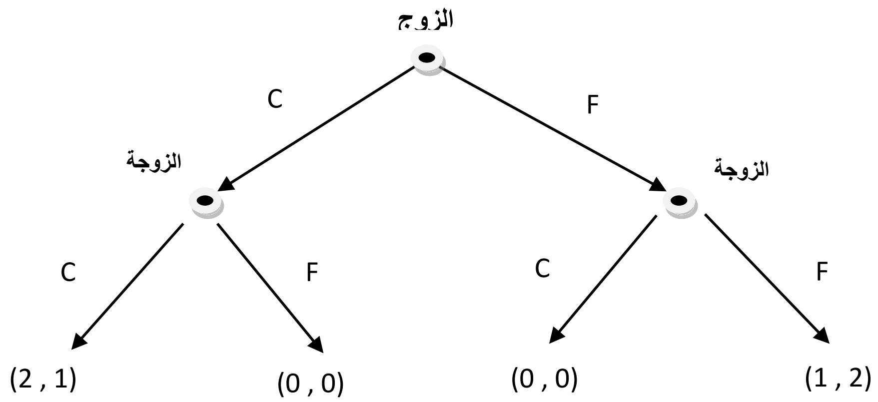
يكون توازن ناش كامل أو كامل في المباريات الجزئية إذا وفقط إذا كان ناتجا عن توازن ناش في كل المباريات الجزئية للمباراة المعنية.

مفهوم توازن ناش الكامل يسمح باختيار من بين توازنات ناش التوازن الأكثر عقلانية، أي يقوم بإلغاء توازنات ناش التي ترتكز على تهديدات غير واقعية (menaces non crédible).

بالنتيجة توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية (Selten, 1975) يشكل أول تعديل (raffinement) لتوازن ناش.

ملاحظة: كل مباراة ديناميكية (ذات الحركة التالية) منتهية (منتهية اللاعبين والاستراتيجيات) تقبل على الأقل توازن ناش كامل في المباريات الجزئية (ENPSJ).

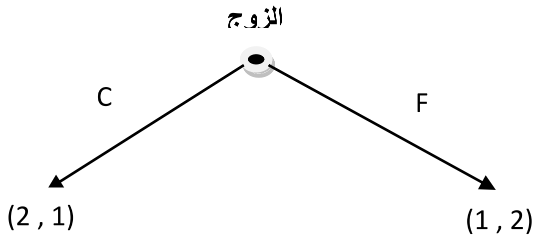
<u>مثال صراع الجنسين:</u>



نلاحظ في المباراة أعلاه أن هناك 3 مباريات جزئية، 2 مباريات موفقة والمباراة الكاملة. يمكن أن نحصل على توازن ناش الكامل من خلال **الاستقراء التنازلي أو العكسي (induction à rebours)** لأنها تنطلق في الحل من النهاية، بحيث تبدأ بتحديد الاختيارات عند كل عقدة للذي يلعب في الأخير، ثم للذي يلعب قبله وهكذا. هذه الطريقة تترجم بالاختصار التدريجي للفروع إلى حين بقاء عقدة واحدة فقط.

بالنسبة للمباراة أعلاه، نضع أنفسنا في الأسفل، عند المباريتين الجزئيتين للزوجة (الناتجة عن عقدتي الزوجة). الزوجة تلاحظ اختيار الزوج ل C أو ل F، ستسعى لتعظيم عوائدها، إذا اختار الزوج C ستختار C وإذا اختار F ستختار F .

المباراة تصبح:



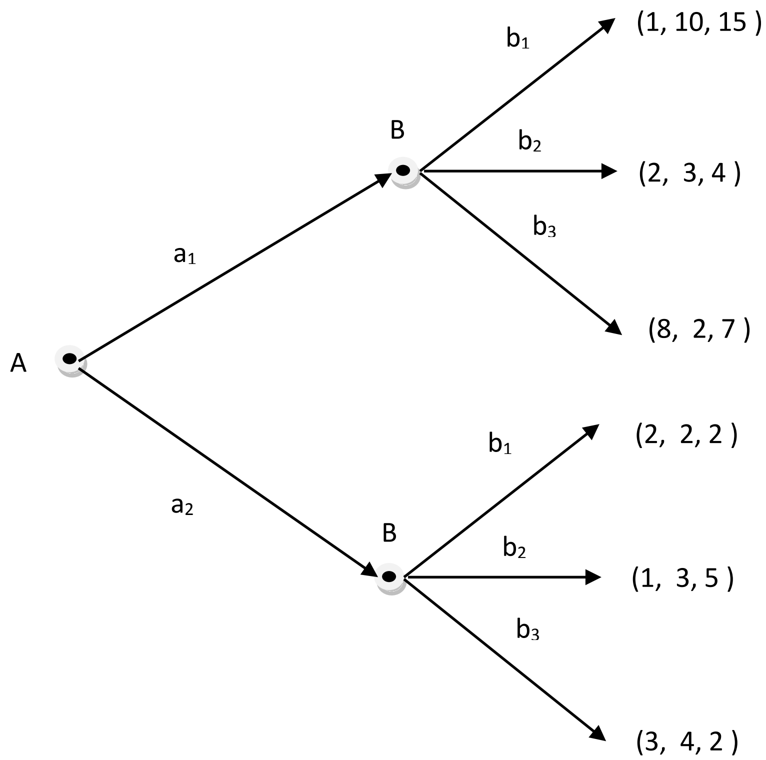
يقوم الزوج كذلك بتعظيم عوائده، فيختار C لأنها تعطيه عائد يساوي 2 أكبر من عائد F الذي يساوي1. بعد تحديد اختيار C للزوج نكون قد حددنا **توازن ناش الكامل**. الثنائية من الاستراتيجيات الخاصة بهذا التوازن هي اختيار الزوج الذهاب إلى السينما C والزوجة تختار نفس اختيارات الزوج، أي تختار Cإذا اختار C وتختار F إذا اختار F .

توازن ناش الكامل هو:

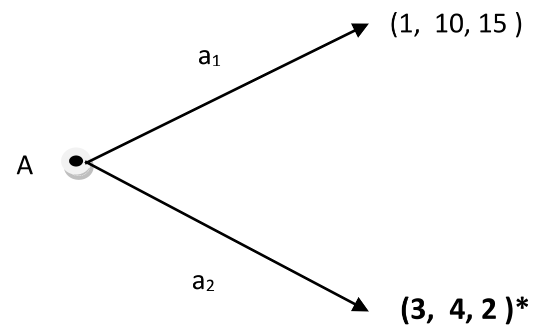
$$(\boldsymbol{s}^{\mathbf{Mr}} = \mathbf{C}; \{s^{Mme}(C) = C, s^{Mme}(F) = F\}) \text{ أو } \mathbf{(C, CF)}$$

<u>حل المثال السابق(ثلاث ضربات):</u>

حسب مبدأ الاستقراء التنازلي نبدأ بتحديد اختيارات C، نحصل على:



نحدد بعد ذلك اختيارات B بنفس الطريقة، بعد تقلص شجرة المباراة كلية نحصل على:



في الأخير اللاعب A يختار a_2.

الحل عن طريق الاستقراء التنازلي هو : A يختار a_2 ، B يختار b_3 ، وC يختار C_1 . المكاسب تعطى بالتوليفة التالية: (3, 4, 2) . الحل المعطى هو توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية.

III. نموذج ستكالبرغ (Von Stackelberg- 1934)

لنأخذ نفس معطيات نموذج كورنو (الفصل 02)، لدينا مؤسستين i=1,2 ، ينتجان على التوالي الكمية q_1 والكمية q_2 . المؤسستان لديهم تكاليف وحدوية ثابتة C_1 و C_2 . سعر التوازن في السوق سوف يكون: $P = a - bQ$. مع: $(Q = q_1 + q_2)$.

نموذج ستكالبرغ هو النسخة الديناميكية (la version dynamique) لنموذج كورنو. المؤسسة 1 غالبا تسمى بالقائد أو المسيطر (leader)، هذه الأخيرة تختار كميتها q_1 أولا . المؤسسة 2 تختار بعد ذلك الكمية الخاصة بها q_2 ، مع ملاحظة القرار المتخذ من قبل المؤسسة 1 ، المؤسسة 2 تسمى التابع (suiveur).

Von Stackelberg افترض وضعية تكون فيها واحدة من المؤسستين (القائد) تملك فكرة محددة عن المؤسسة الأخرى: على علم بدالة رد الفعل الخاصة بمنافستها وستدمجها في مسار القرار الخاص بها. المؤسسة الثانية (التابع) تلاحظ القرار المتخذ من قبل المؤسسة 1 والذي على أساسه تحدد دالة رد الفعل الخاصة بها.

مجموعات المعلومات للاعبين لا تحتوي إلا على عقدة واحدة في شجرة المباراة. إذن، يتعلق الأمر بمباراة ذات المعلومة الكاملة ويمكن حلها عن طريق الاستقراء العكسي أو التنازلي.

نضع أنفسنا في الأسفل، عندما المؤسسة 2 تختار كميتها المنتجة. لكل كمية q_1 ملاحظة من قبل المؤسسة 2 ، دالة الربح (أو العائد) تكتب:

$$u_2(q_1, q_2) = \left(a - b(q_1 + q_2)\right)q_2 - C_2 q_2$$

$$u_2(q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2) - C_2)q_2$$

ربح المؤسسة 2 يعتمد على اختياراته فقط: هذه المؤسسة تواجه فقط مشكلة تعظيم الربح. بتعظيم دالة الربح u_2 نسبة إلى الكمية q_2 ، **نحصل على أحسن رد للمؤسسة 2 على كل الاختيارات q_1 المعلومة أو الملاحظة.**

$$q_2^*(q_1) = \frac{a - C_2}{2b} - \frac{1}{2}q_1 \dots\dots\dots (R_2)$$

نصعد إلى خيارات اللاعب الأول (المؤسسة **1**)، المؤسسة **1** تعلم أن اختياراتها q_1 هي ملاحظة وستتبع برد فعل $q_2^*(q_1)$ من قبل اللاعب الثاني (المؤسسة 2)، وبالتالي ستأخذ رد فعل المؤسسة الثانية بعين الاعتبار وإدماجها في دالة الربح الخاصة بها. معادلة ربح المؤسسة **1** تكتب إذن:

$$u_1(q_1, q_2^*(q_1)) = (a - bq_1 - b(\frac{a - C_2}{2b} - \frac{1}{2}q_1) - C_1)q_1$$

$$u_1(q_1, q_2^*(q_1)) = \frac{1}{2}(a - bq_1 + C_2 - 2C_1)q_1$$

بتعظيم هذه الدالة نسبة إلى الكمية q_1، نحصل على أفضل كمية مختارة من قبل المؤسسة 1 :

$$\frac{\partial u_1(q_1, q_2^*(q_1))}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow q_1^* = \frac{1}{2}(\frac{a + C_2 - 2C_1}{b})$$

اختيارات المؤسستين في هذه الحالة هي <u>توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية</u>، هذا التوازن هو مشكل بالثنائية : $\{q_1^*; q_2^*(q_1)\}$ ، بحيث:

$$q_1^* = \frac{1}{2}(\frac{a+C_2-2C_1}{b}) \quad ; \text{et} \quad q_2^*(q_1) = \frac{a-C_2}{2b} - \frac{1}{2}q_1$$

على مسار التوازن، الكميات المعروضة من قبل المؤسستين ستكون:

$$q_1^S = q_1^* = \frac{1}{2}(\frac{a+C_2-2C_1}{b}) \quad ; \text{et} \quad q_2^S = q_2^* = q_2^*(q_1^S) = \frac{a-3C_2+2C_1}{4b}$$

نشير إلى أن مسار التوازن (q_1^S, q_2^S) لا يمكن أن يكون خالي من الاختيارات المحتملة $q_2^*(q_1)$ للتابع وتكون خارج مسار التوازن. لتوضيح ذلك، لدينا الثنائية من الاستراتيجيات التالية:

$$\{\boldsymbol{q_1} = \boldsymbol{q_1^C}; \quad \boldsymbol{q_2}(\boldsymbol{q_1}) = \boldsymbol{q_2^C} \quad \forall \boldsymbol{q_1}\}$$

بحيث: q_1^C و q_2^C هي الكميات المنتجة من قبل المؤسستين في توازن كورنو (الفصل02).

$$\boldsymbol{q_1^C} = \frac{\boldsymbol{a - 2C_1 + C_2}}{\boldsymbol{3b}}$$

$$\boldsymbol{q_2^C} = \frac{\boldsymbol{a - 2C_2 + C_1}}{3b}$$

هذه الثنائية من الاستراتيجيات تشكل توازن ناش لنموذج ستكالبرغ. بما أن توازن كورنو هو توازن ناش، q_2^C هي أحسن رد من قبل المؤسسة 2 على الكمية الملاحظة q_1^C ، و q_1^C هي أحسن من قبل المؤسسة 1 على q_2^C التي تم اختيارها من قبل المؤسسة 2 مهما تكن الكمية q_1 التي تم ملاحظتها.

هذا التوازن لا يعتبر توازن ناش كامل، لأن: إذا المؤسسة 2 لاحظت أن $q_1 \neq q_1^C$ ، ليس من مصلحتها اختيار إنتاج q_2^C . بالنتيجة، الكمية q_2 التي تعظم ربح المؤسسة 2 هي الكمية$\boldsymbol{q_2^*}(\boldsymbol{q_1})$:

$$\boldsymbol{q_2^*}(\boldsymbol{q_1}) = \frac{\boldsymbol{a - C_2}}{\boldsymbol{2b}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{q_1}$$

هذه الكمية تختلف عن $\boldsymbol{q_2^C}$ **عندما** $q_1 \neq q_1^C$. بعبارة أخرى، التهديد $\forall \boldsymbol{q_1}; \ \boldsymbol{q_2}(\boldsymbol{q_1}) = q_2^C$ **هو تهديد غير عقلاني عندما** $q_1 \neq q_1^C$.

ملاحظة:

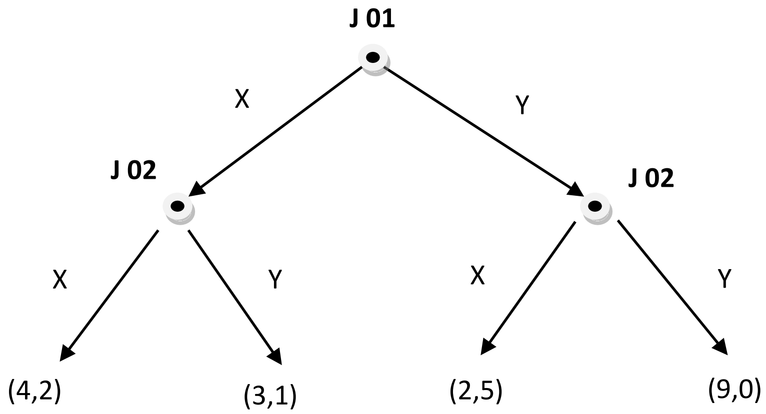
q_i^S : كمية التوازن حسب ستكالبرغ.

q_i^C : كمية التوازن حسب كورنو.

IV. تمارين

التمرين الأول

لتكن المباراة بلاعبين 01 و02 الممثلة بالصيغة الشاملة (forme extensive) :



المطلوب:

1) ماهي الاستراتيجيات الأصلية للاعبين الاثنين في مباراة الحركة التالية ؟
2) أكتب الصيغة العادية للمباراة.
3) أوجد توازنات ناش في الاستراتيجيات الأصلية.
4) أوجد توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية (équilibre de Nash parfait en sous jeux).

التمرين الثاني

نفترض أن دوال العوائد في هذا المثال هي معروفة لجميع اللاعبين.

1) لدينا لاعبين يبحثون عن قسمة كعكة تتكون من 6 اجزاء بنفس الحجم مرقمة من 1 الى 6. الإجراء هو على النحو التالي: اللاعب الأول يختار عددا x ، $x \in \{1,2,3,4,5\}$ ويتم قسمة الأجزاء إلى مجموعتين، المجموعة L_1 تحتوي على الأجزاء المرقمة من 1 الى x ، والمجموعة L_2 تحتوي على الاجزاء المرقمة من x+1 الى 6 . اللاعب الثاني يلاحظ اختيار اللاعب الأول ويختار $y \in \{L_1 , L_2\}$ ويحصل على المجموعة المرتبطة بذلك، في حين اللاعب الأول يحصل المجموعة الأخرى.

مثال: إذا اللاعب الأول اختار $x = 4$ ، اذن L_1 تتكون من الأجزاء: {1,2,3,4} ، المجموعة L_2 سوف تتكون من {5,6} . اللاعب الثاني سيختار بين L_1 وL_2 ، اذا اختار L_1 بالتالي اللاعب الأول سيحصل على المجموعة L_2.

المطلوب 1:

عرض المباراة بالصيغة الشاملة؟ ثم إيجاد توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية (équilibre de Nash parfait en sous jeux)؟

2) نفترض في الجزء الثاني من التمرين أن اللاعب الثاني يلاحظ دائما اختيار اللاعب الأول قبل اتخاذ قراره. في هذه الحالة سيضاف **الكرز** في الجزء رقم 1 . اللاعب الثاني يحب الكرز: عائده سيكون مساويا لحصته من الكعكة المحصل عليها اضافة الى ½ اذا تحصل على الكرز. اللاعب الاول لا يحب الكرز وسيرميه اذا تحصل عليه. عوائده ستكون فقط حصة الكعكة التي يحصل عليها.

المطلوب 2:

عرض المباراة بالصيغة الشاملة؟ ثم إيجاد توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية (équilibre de Nash parfait en sous jeux)؟

حل التمرين الأول

1) **الاستراتيجيات الأصلية للاعبين الاثنين في مباراة الحركة التالية هي:**

- اللاعب الأول الذي يلعب أولا ليس لديه إلا إستراتيجيتين هما X وY.
- اللاعب الثاني يملك أربع خطط عمل أو استراتيجيات : X X (يلعب دائما X)، Y Y (يلعب دائما Y)، XY (يلعب مثل اللاعب الأول) وY X (يلعب عكس اللاعب الأول).

2) **الصيغة العادية للمباراة:**

		J02			
		XX	YY	X Y	Y X
J01	X	4 ,2	3 ,1	4 ,2	3 ,1
	Y	2 ,5	9 ,0	9 ,0	2 ,5

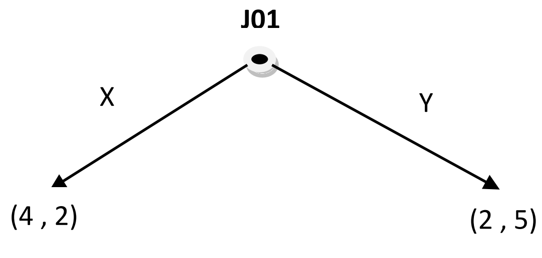
3) **إيجاد توازنات ناش في الاستراتيجيات الأصلية:**

هناك توازن ناش وحيد هو: $(X, XX) = (4, 2)$

4) **إيجاد توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية:**

نلاحظ في المباراة أعلاه أن هناك 3 مباريات جزئية، 2 مباريات موفقة والمباراة الكاملة. يمكن أن نحصل على توازن ناش الكامل من خلال **الاستقراء التنازلي**. نضع أنفسنا في الأسفل، عند المباريتين الجزئيتين للاعب الثاني (الناتجة عن عقدتي اللاعب الثاني). اللاعب الثاني يلاحظ اختيار اللاعب الأول ل X أو ل Y ، سيسعى لتعظيم عوائده، إذا اختار اللاعب الأول X اللاعب الثاني سيختار X وإذا اختار اللاعب الأول Y سيختار اللاعب الثاني X .

المباراة تصبح:

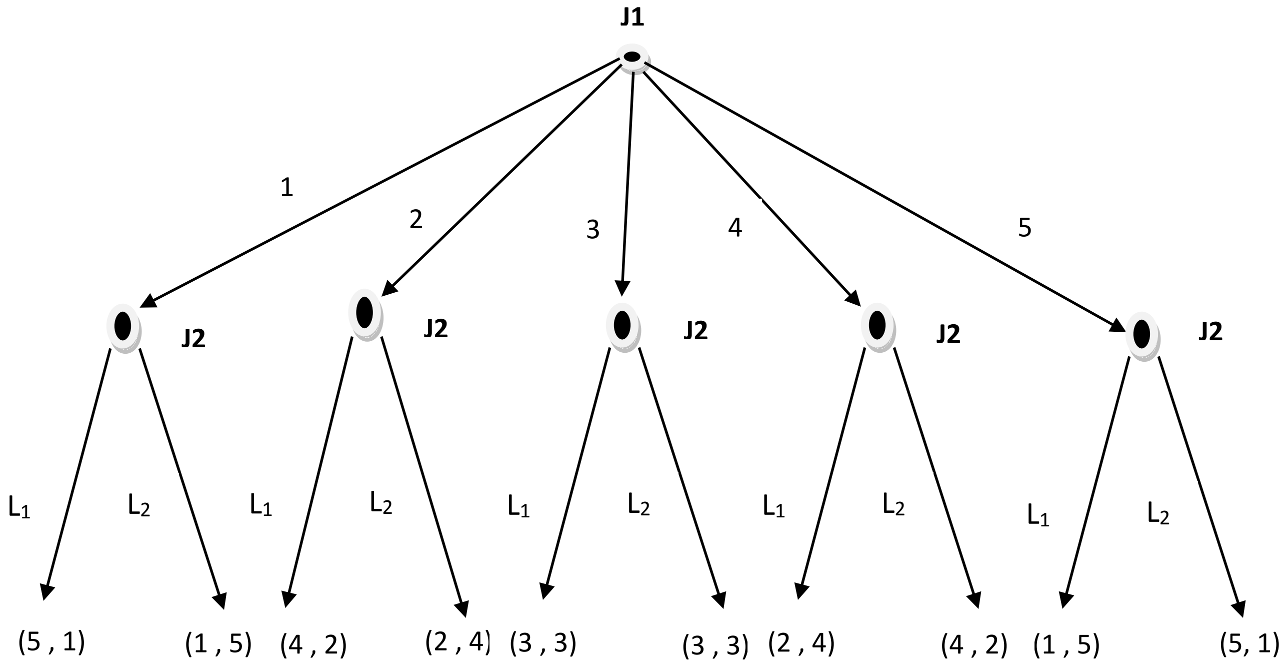


سنقوم بتعظيم عوائد اللاعب الأول كذلك، اللاعب الأول يختار X لأنها تعطيه عائد يساوي 4 أكبر من عائد Y الذي يساوي 2. بعد تحديد اختيار اللاعب الأول نكون قد حددنا **توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية**. **التوازن هو:** (X, XX) = (4, 2).

في حالة هذا التمرين التوازن هو نفسه توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية.

حل التمرين الثاني

1) عرض المباراة بالصيغة الشاملة:

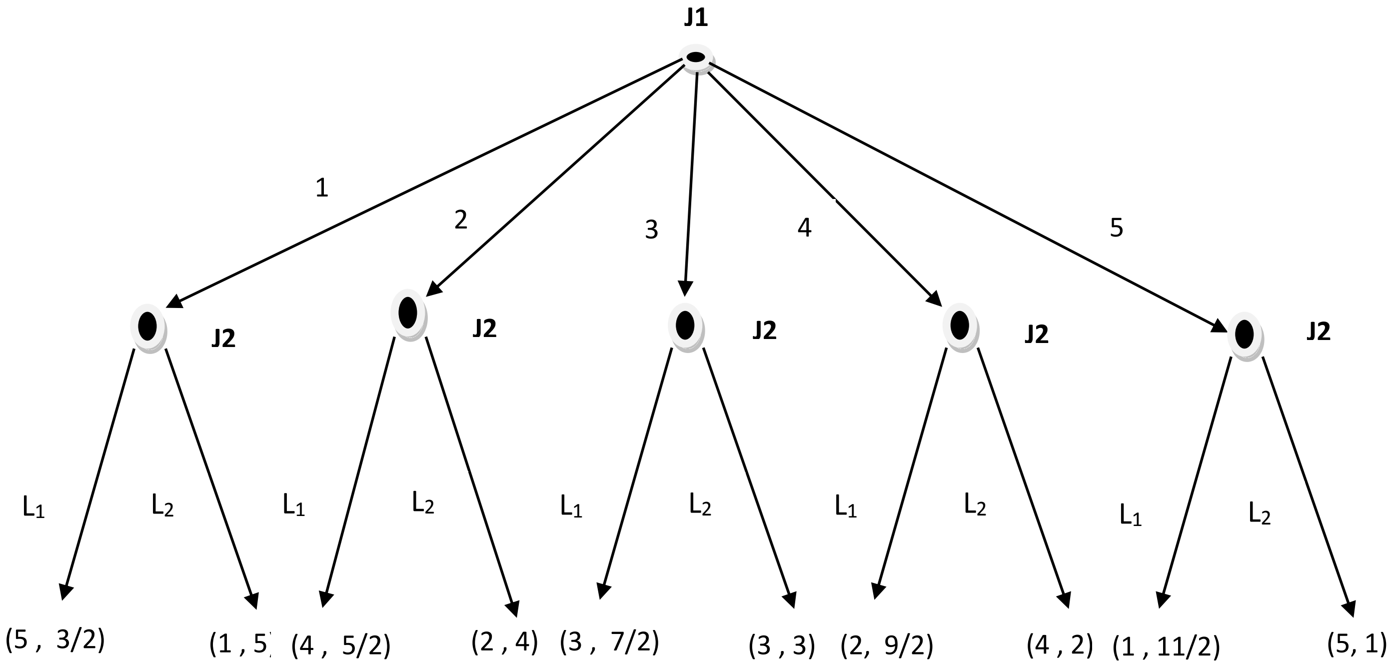


2) تحديد توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية:

توازن ناش الكامل هو: $(3, L_2\, L_2\, L_2\, L_1\, L_1)$ و $(3, L_2\, L_2\, L_1\, L_1\, L_1)$.

الجزء الثاني من التمرين:

1) عرض المباراة بالصيغة الشاملة:



2) تحديد توازن ناش الكامل في المباريات الجزئية:

توازن ناش الكامل هو: $(3, L_2\, L_2\, L_1\, L_1\, L_1)$

الفصل الرابع: المباريات ذات المعلومة غير التامة

I. ***مباراة*** **متزامنة الحركة ذات المعلومة غير التامة وتوازن بايز**

II. ***الاحتكار الثنائي لكورنو في المعلومة غير التامة***

III. **مباراة الحركة التالية ذات المعلومة غير التامة وتوازن بايز الكامل**

IV. ***تمارين***

I. مباراة متزامنة الحركة ذات المعلومة غير التامة وتوازن بايز

إذا جهل لاعب على الأقل هيكل المباراة نقول عن مباراة أنها ذات المعلومة غير التامة. نقول عن مباراة أنها ذات المعلومة التامة إذا حدث العكس.

سنقوم بتعديل العوائد الخاصة باللاعبين لجعلها مرتبطة بنوع كل لاعب:$\mu_i(s\,;t_i)$ هو معلوم للاعب i لكل نوع محتمل t_i لهذا اللاعب.

لدينا : $t_{-i} = (t_1, \dots \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots \dots, t_n)$ هو توزيع خاص لجميع أنواع اللاعبين ماعدا نوع اللاعب i .

حسب هذه المقاربة اللاعب i يعلم هو من أي نوع لكن لا يعلم نوع اللاعبين الآخرين، يعلم فقط توزيع الاحتمالات الشرطية على أنواع اللاعبين الآخرين: $p_i(t_{-i} \backslash t_i)$. في حالة عدم ارتباط أنواع اللاعبين، هذا التوزيع يختصر في $p_i(t_{-i})$.

<u>مثال</u>: لتكن لدينا المباراة التالية:

في هذه المباراة لدينا لاعبين، اللاعب 01 واللاعب 02 اللذان يلعبان في آن واحد. اللاعب 02 يمكن أن يكون من النوع A أو B.

إذا كان اللاعب الثاني من النوع A ، عوائد المباراة هي:

		J02	
		N	R
J01	N	3 , 1	2 , 0
	R	0 , 1	4 , 0

إذا كان اللاعب الثاني من النوع B ، عوائد المباراة هي:

		j02	
		N	R
J01	N	3 , 0	2 , 1
	R	0 , 0	4 , 1

اللاعب الثاني يعلم هو من أي نوع. في المقابل اللاعب الأول يتجاهل (لا يعلم) نوع اللاعب الثاني، يعلم فقط أنه قد يكون من النوع A أو من النوع B بنفس الاحتمال (*1/2*).

المطلوب:

1. ماذا يلعب اللاعب الثاني من النوع A في التوازن ؟
2. ماذا يلعب اللاعب الثاني من النوع B في التوازن ؟
3. ماذا يلعب اللاعب الأول ؟

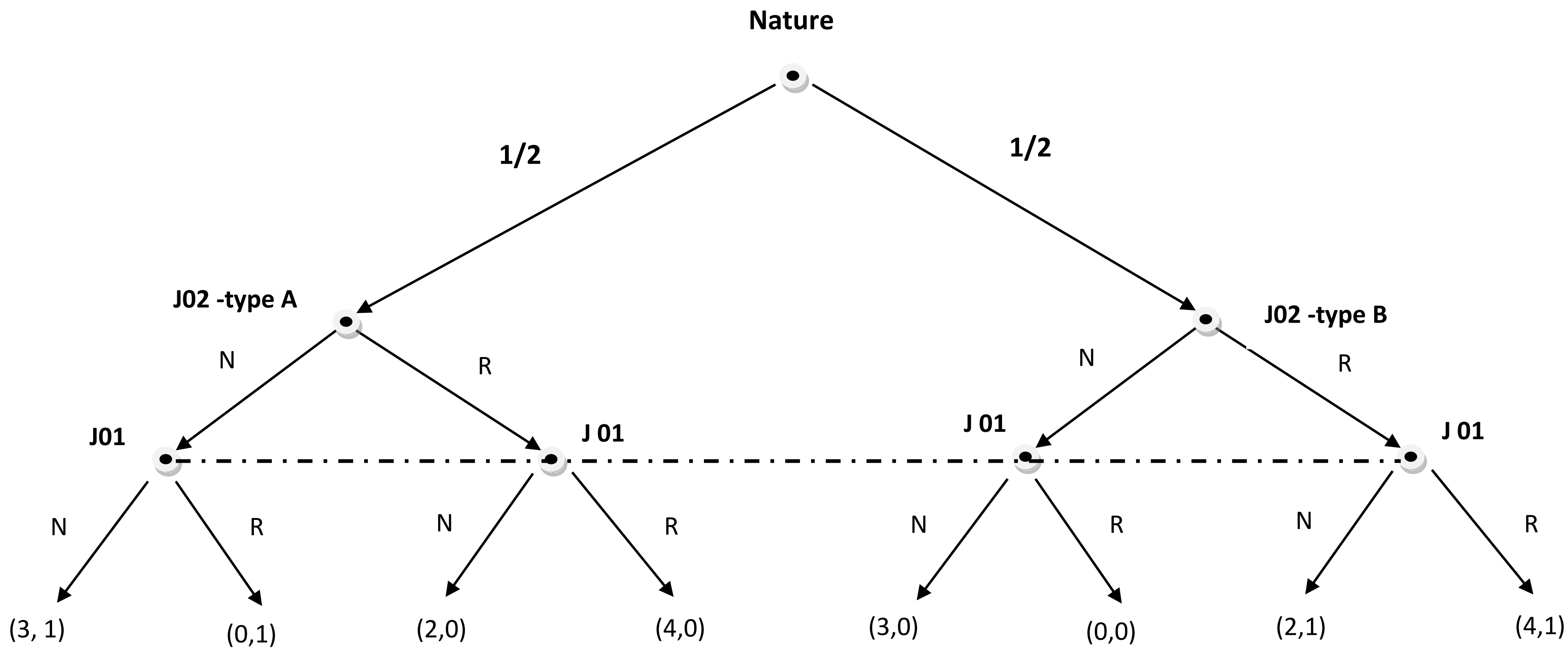
الإجابة:

المباراة أعلاه هي مختلفة عن كل ما رأيناه سابقا لأنها تتعلق بمباراة ذات المعلومة غير التامة (*Information incomplète*).

المباراة هي ذات المعلومة غير التامة لأن اللاعب الأول يجهل عنصر أساسي للمباراة المتمثل في نوع اللاعب الثاني.

Harsanyi (1967, 1968) بيّن أنه يمكن تحويل مباراة ذات المعلومة غير التامة إلى مباراة ذات المعلومة التامة لكن غير الكاملة (*Information imparfaite*) بشرط وجود توزيع احتمالات مسبقة (*à priori*) على المعالم المجهولة وهذا التوزيع للاحتمالات يكون معلوم لجميع اللاعبين. في هذه الحالة يكفي إدخال لاعب جديد يسمى الطبيعة (*nature*) غير مختلف تماما عن مجريات المباراة. مع هذا اللاعب الجديد، مباراة المعلومة غير التامة تصبح مباراة المعلومة التامة لكن غير الكاملة، لأن جميع اللاعبين لا يعلمون في الوقت الذي يلعبون فيه الإستراتيجية المتبناة من قبل اللاعب الطبيعة. يمكن تحليل المباراة السابقة بهذه الطريقة، لأن توزيع الاحتمالات على نوعي اللاعب الثاني هو معلوم من قبل اللاعبين(أي الاحتمال *1/2* لكل نوع ممكن) هو معلوم من قبل اللاعبين الاثنين.

تحويل *Harsanyi* يقود إلى التمثيل التالي للمباراة في الصيغة الشاملة:



الشكل1.4. عرض المباراة بالصيغة الشاملة

في هذا النوع من المباريات، حالة عدم اليقين تكون غالبا حول لاعب معين، أي على ما نطلق عليه **نوع اللاعب**. هذا النوع هو مرتبط على سبيل المثال بالتكلفة أو بالطلب في التطبيقات الاقتصادية، هي معلومة فقط للاعب نفسه وليس للاعبين الآخرين.

في نطاق هذه الحالة من عدم اليقين، سنعدل مفهوم الإستراتيجية التي استعملناها سابقا (في المعلومة التامة) بإدخال مفهوم **الإستراتيجية المقابلة للنوع** (***Stratégie contingente aux types S C T***):

الإستراتيجية المقابلة للنوع للاعب معين تحدد خطة عمل هذا اللاعب لكل نوع ممكن.

هذا المفهوم الجديد يسمح بإعطاء **توازن بايزي** (***Equilibre Bayésien***) مماثل لتوازن ناش.

تعريف: --

التوازن البايزي هو مجموعة من الاستراتيجيات المقابلة للنوع (واحدة لكل لاعب)، بحيث يقوم كل لاعب بتعظيم الأمل الرياضي للعائد الخاص به بالنظر إلى الاستراتيجيات المقابلة للنوع للاعبين الآخرين وتوزيع احتمال على أنواع هؤلاء اللاعبين.

يجب الإشارة إلى نتيجة نظرية مهمة هي أن: ***كل مباراة ذات الحركة المتزامنة منتهية ذات المعلومة غير التامة تقبل على الأقل توازن بايزي.***

تحديد التوازن البايزي للمباراة أعلاه يتطلب عرض المباراة بالصيغة العادية التالية:

		J02			
		Type A (probabilité 1/2)		Type B (probabilité 1/2)	
		N	R	N	R
J01	N	3 ,1	2 ,0	3 ,0	2 ,1
	R	0 ,1	4 ,0	0 ,0	4 ,1

واضح من الجدول أن لكل نوع للاعب الثاني إستراتيجية مسيطر عليها. بالنتيجة *R* مسيطر عليها تماما من قبل *N* للنوع *A*، و*N* هي مسيطر عليها تماما من قبل *R* للنوع *B*. اللاعب الثاني عليه أن يختار*N* إذا كان من نوع *A* و*R* إذا كان من النوع *B*. هذا الاختيار المرتبط بكل نوع للاعب الثاني يعتبر إستراتيجية مقابلة للنوع (*S C T*) .

ما هي إذن إستراتيجية التوازن للاعب الأول؟ هذا الأخير سيختار بين N وR مع تنبأ الإستراتيجية المقابلة للنوع (SCT) التي يتبناها اللاعب الثاني (يلعب N إذا كان من نوع A وR إذا كان من النوع B)[1] مع الأخذ بعين الاعتبار الاحتمالات للنوعين. إذا لعب N ، اللاعب الأول يعلم أنه سيحصل على 3 نقاط إذا كان اللاعب الثاني من الصنف A (لأن الأخير يلعب N) و2 نقاط إذا كان اللاعب الثاني من الصنف B (لأن الأخير يلعب R) . بما أن النوعين لهما نفس الاحتمال $½$ ، اختيار N يعطي للاعب الأول أمل ربح يساوي ($\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$) . إذا اللاعب الأول اختار R، يعلم أنه سيحصل على 0 إذا كان اللاعب الثاني من الصنف A (لأن الأخير يلعب N) و 4 نقاط إذا كان اللاعب الثاني من الصنف B (لأن الأخير يلعب R) . بما أن النوعين لهما نفس الاحتمال $½$ ، اختيار R يعطي للاعب الأول أمل ربح يساوي ($\frac{0+4}{2} = 2$) .

العائد المتوقع من الإستراتيجية N هو أكبر من عائد الإستراتيجية R، بالتالي اللاعب الأول يلعب N في التوازن.

في النهاية التوازن البايزي للمباراة يتمثل في لعب اللاعب الأول الإستراتيجية N وتبني اللاعب الثاني الإستراتيجية المقابلة للنوع المتمثلة في لعب N إذا كان من النوع A ولعب R إذا كان من النوع B .

[1] يمكن تحديد اختيارات كل نوع (SCT) عن طريق توازن ناش وتحديد اختيارات كل نوع من خلال تحديد دوال أحسن رد.

II. الاحتكار الثنائي لكورنو في المعلومة غير التامة

بنفس معطيات نموذج كورنو (**الفصل 02**)، بحيث دالة الطلب العكسي هي: $P = A - bQ$ مع $(Q = q_1 + q_2)$ ودالة التكلفة للمؤسسة i تكتب:

$$C(q_i) = c_i \cdot q_i \quad ; i = 1, 2.$$

C_1 هو معلوم من قبل المؤسستين، في حين هناك حالة عدم اليقين للمؤسسة 1 على C_2 لأن المؤسسة 1 لا تلاحظ تكلفة المؤسسة 2 :

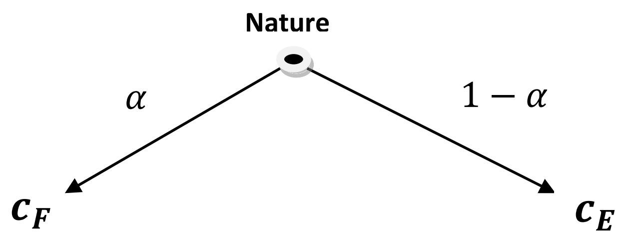
$$c_2 \in \{c_F , c_E\}$$

مع:

$$c_E > c_1 > c_F$$

$P[c_F] = \alpha = 1 - P[c_E]$ تعطي للمؤسسة 2 تكاليف أدنى(الشكل التالي).

المؤسسة 2 تعلم بطبيعة الحال مستوى تكاليفها.



الشكل 4.2. توزيع الاحتمالات على تكلفة المؤسسة 2.

دالة أحسن رد للمؤسسة 2 هي مرتبطة بنوع تكاليفها:

$$\underset{q_2}{Max}\left(A - b\left(q_1^* + q_2\right)\right) q_2 - C_F q_2 \qquad \text{si } c_2 = C_F$$

$$\underset{q_2}{Max}\left(A - b\left(q_1^* + q_2\right)\right) q_2 - C_E q_2 \qquad \text{si } c_2 = C_E$$

الإنتاج الأمثل للمؤسسة هو مرتبط بتكاليفها والمؤسسة 1 يجب أن تأخذ ذلك بعين الاعتبار. لتكن $q_2^*(C_F)$ الكمية المتوقعة المرتبطة بمستوى تكاليف منخفض و $q_2^*(C_E)$ الكمية المرتبطة بمستوى تكاليف مرتفع. المؤسسة 1 تعلم أن احتمال مواجهة النوع F هو α . يجب إذن أن تعظم ربحها المتوقع:

$$\underset{q_1}{Max}\ \alpha\left[\left(A-b\left(q_1+q_2^*(C_F)\right)\right)q_1-C_1q_1\right]+(1-\alpha)\left[\left(A-b\left(q_1+q_2^*(C_E)\right)\right)q_1-C_1q_1\right]$$

نحصل على دوال أحسن رد للمؤسستين بعد الشرط الأول لتعظيم الربح:

$$q_2^*(q_1,C_F)=\frac{A-C_F}{2b}-\frac{1}{2}q_1\ \ldots\ldots\ldots(R_2)$$

$$q_2^*(q_1,C_E)=\frac{A-C_E}{2b}-\frac{1}{2}q_1\ \ldots\ldots\ldots(R_2)$$

لدينا إذن:

$$q_2^*(q_1,C_F)>q_2^*(q_1,C_E),\quad \forall q_1$$

$$\text{Et}\quad E[q_2]=\frac{A-E[C_2]}{2b}-\frac{1}{2}q_1$$

مشكل المؤسسة 1 يصبح إذن:

$$\underset{q_1}{Max}\ (A-b(q_1+E[q_2])-C_1)q_1$$

بالتالي دالة أحس رد هي على النحو التالي:

$$q_1^*(q_2)=\frac{A-C_1}{2b}-\frac{1}{2}E[q_2]$$

$$q_1^*(q_2)=\frac{A-C_1}{2b}-\frac{1}{2}[\alpha q_2^*(C_F)+(1-\alpha)q_2^*(C_E)]$$

في هذه المباراة، توازن ناش هو مرتبط بالوضعية التي لا يمكن لأي مؤسسة الابتعاد عنها، هو مرتبط بتقاطع $q_1^*(q_2)$ مع $E(q_2)$ (النقطة E في الشكل 3.4). بسبب عدم يقين المؤسسة 1، النوع الأول والثاني للمؤسسة 2 جعلا مرتبطين.

$$q_1^*=\frac{A-2C_1+E[C_2]}{3b}$$

$$q_2^*(C_F)=\frac{2A-E[C_2]+2C_1-3C_F}{6b}$$

$$q_2^*(C_E)=\frac{2A-E[C_2]+2C_1-3C_E}{6b}$$

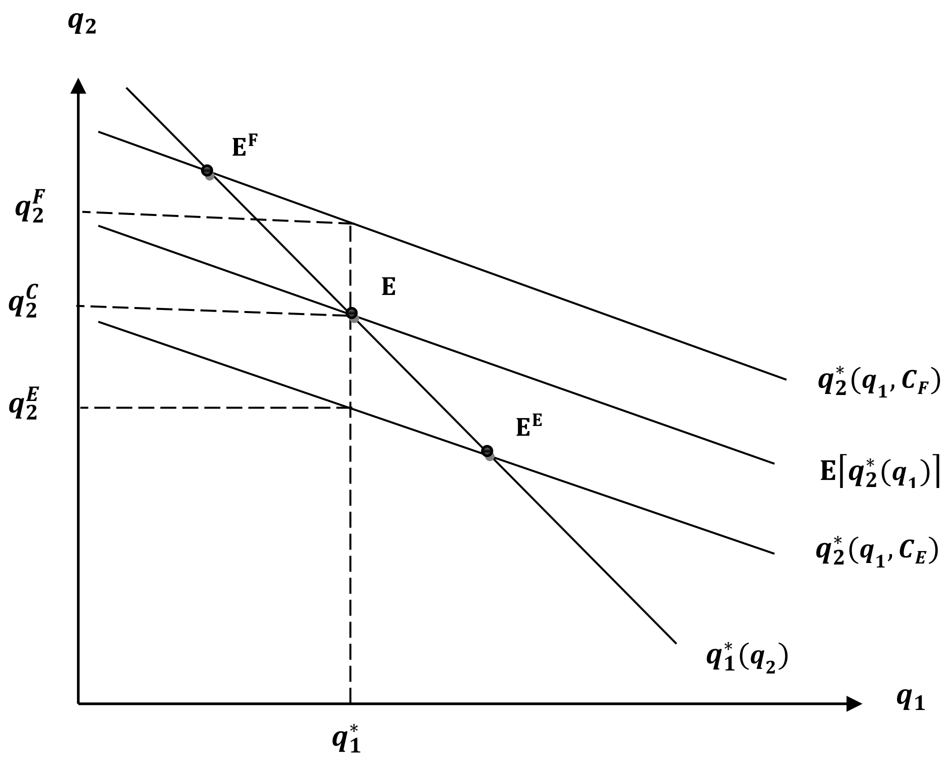
مع $q_2^*(c_E) > q_2^*(c_F)$ (q_2^F و q_2^E على التوالي في الشكل 3.4) . يمكن إعادة كتابة كميات التوازن لتسهيل المقارنة مع إنتاج المؤسسة 2 في حالة المعلومة التامة (E^{F} و E^E تمثل التوازنات التي كنا سنحصل عليها في حالة ما إذا كانت المعلومة تامة):

$$\boldsymbol{q_{\mathrm{i}}^* = \frac{A-2C_i+C_j}{3b} \quad , \qquad i \neq j = 1,2}$$

$$\boldsymbol{q_2^*(C_F) = \frac{A-2C_F+C_1}{3b} - (C_E - C_F)(1-\alpha) < \frac{A-2C_F+C_1}{3b}}$$

$$\boldsymbol{q_2^*(C_E) = \frac{A-2C_E+C_1}{3b} + \alpha(C_E - C_F) > \frac{A-2C_E+C_1}{3b}}$$

في توازن ناش في المعلومة غير التامة، المؤسسة بتكاليف مرتفعة تنتج كميات أكبر من كميات كورنو في المعلومة التامة والمؤسسة بتكاليف منخفضة تنتج كميات أقل من الحالة التي تكون فيها المعلومة تامة: حالة عدم اليقين (L'incertitude) لدى المنافس تمنعه من اغتنام التكاليف المنخفضة بشكل كلي لأنه يعلم أن رد فعل المنافس سيكون بأمل رياضي تدرج فيه $\boldsymbol{C_E}$.



الشكل3.4. توازن كورنو في المعلومة غير التامة

III. مباراة الحركة التالية ذات المعلومة غير التامة وتوازن بايز الكامل

لتكن لدينا المباراة التالية بلاعبين، أين اللاعب الأول يمكن أن يكون من النوع *A* أو من النوع B. اللاعب الأول يعلم هو من أي نوع، في حين اللاعب الثاني يعلم فقط احتمال بأن يكون اللاعب الأول من النوع *A* (P(A)= 1 /2) واحتمال بأن يكون من النوع B ((P(B) = 1- P(A)) .

اللاعب 1 عليه الاختيار بين I و S ، اللاعب الثاني سيلاحظ هذا الاختيار وعليه الاختيار بين ثلاث خيارات: C، D وE.

إذا كان اللاعب 1 من النوع A العوائد ستكون في الجدول التالي:

<u>الجدول A</u>

قرار اللاعب 1	قرار اللاعب 2	عائد اللاعب 1	عائد اللاعب 2
I	C	300	300
I	D	0	0
I	E	500	350
S	C	450	900
S	D	150	150
S	E	1000	300

إذا كان اللاعب 1 من النوع B العوائد ستكون في الجدول التالي:

<u>الجدول B</u>

قرار اللاعب 1	قرار اللاعب 2	عائد اللاعب 1	عائد اللاعب 2
I	C	500	500
I	D	300	450
I	E	300	0
S	C	450	0
S	D	0	300
S	E	0	150

المطلوب:

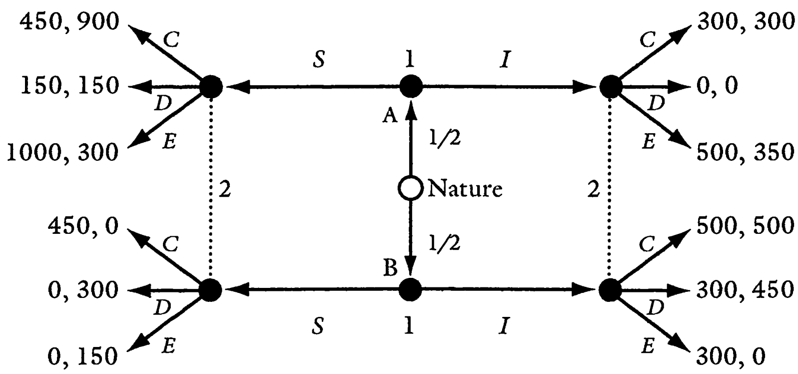
1. ماذا يلعب اللاعب الأول من النوع A ؟ I أو S ؟
2. ماذا يلعب اللاعب الأول من النوع B ؟ I أو S ؟

3. إذا لاحظ اللاعب الثاني بأن اللاعب الأول اختار I ، ماذا يلعب C، D أو E؟
4. إذا لاحظ اللاعب الثاني بأن اللاعب الأول اختار S ، ماذا يلعب C، D أو E؟

الإجابة:

المباراة أعلاه هي مباراة ذات المعلومة غير التامة لأن اللاعب الثاني يتجاهل نوع اللاعب الأول في الوقت الذي يلعب فيه. لا يعلم إلا توزيع الاحتمالات على نوع اللاعب (احتمال 1/2 لكل نوع). أيضا، المباراة هي ذات الحركة التالية، بالنتيجة اللاعبون يلعبون الواحد بعد الآخر: اللاعب الثاني يلعب بعد معرفة اختيار اللاعب الأول.

يمكن تمثيل هذه المباراة بالصيغة الشاملة بالطريقة التالية:



الشكل4.4. التمثيل بالصيغة الشاملة للمباراة

في هذا التمثيل الذي يختلف عما سبق، هو يظهر الجانب الديناميكي للمباراة (اللاعب الثاني يلعب بعد اللاعب الأول) والمعلومة غير التامة للاعب الثاني على نوع اللاعب الأول. استنادا على مقاربة Harsanyi (1967,1968)، قمنا بتحويل المباراة ذات المعلومة غير التامة إلى مباراة ذات المعلومة غير الكاملة. الشكل (4.4) يجسد هذا التحويل: اللاعب الثاني لا يعلم اختيار اللاعب الجديد (الطبيعة)، الذي لا يفرق بين نوعي اللاعب الأول وفقا لتوزيع الاحتمالات المحددة مسبقا (a priori). المباراة تصبح وكأن هنالك 3 لاعبين : الطبيعة ، اللاعب الأول واللاعب الثاني. الطبيعة تختار نوع اللاعب 1 (A أو B باحتمال يساوي 1/2) ويتم إخباره بالمعلومة. اللاعب الأول عليه أن يختار بين I أو S، ثم يأتي الدور على اللاعب الثاني، هذا الأخير يعلم في الوقت الذي يلعب فيه اختيار اللاعب الأول (I أو S)، لكن لا يعلم نوعه (A أو B). لهذا عقد اللاعب الثاني تم ربطها بنقاط، لتبيان أن اللاعب الثاني يعلم في أي جهة من شجرة المباراة هو موجود (أي يعلم إذا اللاعب الأول لعب I أو S)، لكن يتجاهل في أي عقدة

هو موجود في الوقت الذي يلعب فيه. بالنتيجة هو لا يعلم إذا كانت الإشارة (I أو S) التي يلاحظها هي تأتي من اللاعب 1 من النوع A (يتواجد في العقدة العليا) أو من النوع B (العقدة في الأسفل).

المباراة هي مباراة إشارة (jeu de signal) : اللاعب الأول يرسل إشارة إلى اللاعب الثاني من خلال القرار الذي يتخذه (I أو S) .

التوازن المستخدم لتحليل هذا النوع من المباريات هو **التوازن البايزي الكامل** (l'équilibre Bayésien parfait).

تعريف: --

التوازن البايزي الكامل هو مرتبط بمجموعة من الاستراتيجيات (واحدة لكل لاعب) والاعتقادات (système de croyances) التي تتولد عن هذه الاستراتيجيات (أي الاحتمالات المرتبطة بتحقق قيم المعالم المجهولة في المباراة)، بحيث يجب أن يتحقق في كل مرحلة من المباراة مما يلي:

- ***لا يوجد أي لاعب من مصلحته تغيير إستراتيجيته بالنظر إلى استراتيجيات اللاعبين الآخرين والاعتقادات، و***
- ***الاعتقادات هي ناتجة عن استراتيجيات التوازن وخطط العمل الملاحظة عند تطبيق قاعدة بايز.[2]***

التوازن البايزي الكامل هو امتداد لتوازن ناش الكامل في المباريات الجزئية للمباريات ذات الحركة التالية ذات المعلومة غير التامة. بالنتيجة وحسب هذه النظرية : كل مباراة منتهية ذات الحركة التالية ذات المعلومة غير التامة تقبل على الأقل توازن بايزي كامل.

---

[2] **قاعدة بايز** عبارة عن قانون احتمالات يسمح بمعرفة الاحتمال البعدي لوقوع حدث (probabilité à posteriori) بالاعتماد على المعرفة المسبقة للأحداث ذات الصلة بالحدث أو الاحتمال المسبق (la probabilité a priori). الاحتمال (يكون شرطي في بعض الأحيان) يأخذ بعين الاعتبار المعلومات المتوفرة.

قاعدة بايز تقول أن:

$$P(H_i \backslash X) = \frac{P(X \backslash H_i)P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(X \backslash H_k)P(H_k)}$$

H_i تمثل 1 من بين n حدث ممكن (على سبيل المثال، الأنواع الممكنة للاعب)، X هي الملاحظة المتوفرة (على سبيل المثال، خطة عمل لاعب معين).

للبحث عن توازن بايزي للمباراة التي تعتبر بسيطة ما يسمح بتحديد التوازن بسهولة، نبدأ بحل مشكل اللاعب 1 من النوع A، الجدول A يوضح لنا أن هذا اللاعب يقوم بإرسال إشارة I تمنح له حسب رد اللاعب 2 على العوائد (500 ,0 ,300) . نفس الجدول يبين أنه بإرسال الإشارة S يحصل حسب رد اللاعب 2 على العوائد (1000 ,150 ,450) . مسبقا (A priori) اللاعب 1 من النوع A يميل إلى اختيار S (اعتقاد يعتمد عليه اللاعب الثاني في تصرفه فيما بعد).

بالنسبة للاعب 1 من النوع B، النتيجة هي عكس الأولى. إرسال إشارة I تمنحه عوائد (,300 ,500 300) مقابل عوائد (0 ,0 ,450) إذا كانت الإشارة S. اللاعب 1 من النوع B يميل إلى إرسال الإشارة I.

كيف يجب أن يتصرف اللاعب 2 ؟ إذا كان عقلانيا، يجب أن يطبق قاعدة بايز لحساب احتمال أن يكون اللاعب الأول من النوع A أو من النوع B مع الأخذ بعين الاعتبار الإشارة الملاحظة (I أو S). إذا كانت الإشارة الملاحظة هي S ، اللاعب الثاني يستنتج (بتطبيق قاعدة بايز) باحتمال كبير أن اللاعب 1 هو من النوع A . من خلال الجدول A، اللاعب الثاني إذا رد ب C على الإشارة S للاعب الأول من النوع A يربح 900، في حين يربح 150 إذا رد ب D و300 إذا رد ب E . أحسن رد للاعب الثاني على الإشارة S هو بلعب C.

إذا اللاعب 2 لاحظ الإشارة I، يستنتج في هذه الحالة أن اللاعب الأول هو من النوع B. من خلال الجدول B، اللاعب الثاني إذا رد ب C على الإشارة I للاعب الأول من النوع B يربح 500، في حين يربح 450 إذا رد ب D و0 إذا رد ب E . أحسن رد للاعب الثاني على الإشارة I هو كذلك لعب C.

بتنبؤ ردة فعل اللاعب 2، أي يتنبأ بإمكانية اختيار اللاعب 2 ل C في الحالتين المكنتين، اللاعب 1 من مصلحته إرسال الإشارة S إذا كان من النوع A (لأنه يربح 450 مقابل 300 إذا أرسل الإشارة I) واللاعب الأول من مصلحته إرسال الإشارة I إذا كان من النوع B (لأنه يربح 500 مقابل 450 إذا أرسل الإشارة S).

ما سبق يشير إلى أن مجموع الاستراتيجيات التي تتميز بالإشارة S من جانب اللاعب 1 من النوع A، الإشارة I من جانب اللاعب الأول من النوع B ورد ب C من جانب اللاعب 2 ، هو **توازن بايز الكامل**. نشير أن هذا التوازن يوجب أن يكشف اللاعب 1 عن نوعه من خلال الإشارة التي يرسلها (من النوع A إذا كانت الإشارة المرسلة هي S، ومن النوع B إذا كانت الإشارة المرسلة هي I): نحن نتكلم عن **توازن**

مفرق (separateur) الذي يشير إلى التوازن الذي يفرق بين اللاعبين حسب أنواعهم: أي عندما كل نوع يختار خطة عمل تختلف عن الآخر.

المباراة تقبل توازن بايزي كامل آخر. هذا التوازن يتميز بإرسال الإشارة I من كلا النوعين للاعب 1، رد اللاعب 2 ب C على الإشارة I والرد ب D على الإشارة S، وبيقين اللاعب 2 بأن الإشارة S المنحرفة عن التوازن أتت من اللاعب 1 نوع B. نتحقق بأن هذه المجموعة من الاستراتيجيات واليقين تشكل توازن بايزي كامل. بالنظر إلى إستراتيجية اللاعب 1 (أي يرسل الإشارة I مهما يكن نوعه) والاحتمالات لكل نوع، اللاعب 2 ليس من مصلحته تغيير إستراتيجيته بما أن C هي أحسن رد على الإشارة I وD هي أحسن رد على الإشارة S المنحرف عن التوازن إذا اعتقد اللاعب 2 بأن هذه الإشارة أرسلت من قبل اللاعب الأول نوع B . بالنظر إلى أن اللاعب 2 يلعب C بعد إشارة I وD بعد الإشارة S، اللاعب 1 من مصلحته إرسال إشارة I إذا كان من النوع A (يربح 300 بدلا من 150) أو من النوع B (يربح 500 بدلا من 0). عكس الأول، التوازن الثاني لا يستلزم كشف نوع اللاعب 1. نحن نتكلم عن **توازن مختلط** (équilibre mélangeant): عندما جميع أنواع اللاعب تختار نفس خطة العمل.

في المباراة أعلاه، التوازن المفرق هو عقلاني أكثر من التوازن المختلط (هذه ليست نتيجة عامة: في مباريات أخرى تتميز بوجود توازن مفرق وتوازن مختلط، التوازن الثاني يمكن أن يكون كذلك عقلاني أو أكثر عقلانية من الأول). الأمر الذي يطرح مشكل في التوازن المختلط لمباراتنا هو أنه يرتكز على اعتقاد غير واقعي للاعب الثاني بأن اللاعب الأول من النوع B سيبتعد نحو الإشارة S . هذا الاعتقاد هو غير واقعي لأن اللاعب 1 من النوع B يحصل على 500 في التوازن (الإشارة I والرد C)، ما يمثل الحد الأقصى. بعبارة أخرى، ليست من مصلحته الابتعاد عن التوازن لأنه يضمن له أقصى عائد.

على العكس، اللاعب 1 من النوع A، الذي يربح 300 في التوازن المختلط، يمكن أن يربح أكثر (450 أو حتى 1000) إذا انزاح عن هذا التوازن. بالنتيجة اعتقاد اللاعب 2 بانزياح اللاعب 1 من النوع B نحو الإشارة S هو غير واقعي. رغم ذلك، هذا الاعتقاد لا يتعارض مع التوازن البايزي الكامل لأنه يخرج عن مسار التوازن (يقع في جزء من المباراة لم يتم التوصل إليه عندما اللاعبون يتصرفون وفقا للتوازن المتفق عليه).

مع ذلك، ميزة مفهوم التوازن البايزي الكامل أنه لا يتطلب اعتقاد يتوافق مع قاعدة بايز فقط على مسارات التوازن. خارج مسار التوازن، معيار التوازن البايبزي الكامل يفرض فقط وجود نظام

اعتقادات (système de croyances)، من دون أي قيود على طبيعة وخصائص هذا النظام. [في الواقع، قاعدة بايز ليست ملزمة لهذه الاعتقادات خارج مسار التوازن، ببساطة لأن احتمال خطة عمل خارج مسار التوازن هي معدومة: بالضرورة يتحقق في خطة عمل خارج مسار التوازن، $P(X \backslash H_i) = 0, \ \forall H_i$. أيضا، مقام معادلة قاعدة بايز يساوي الصفر، تصبح قاعدة بايز غير صالحة. هذا يفسر، أن خارج مسار التوازن، أي نظام اعتقاد (بشرط أن يكون موجود) يستجيب لشروط التوازن البايزي الكامل !]

التحسينات (raffinement) التي أجريت مؤخرا على التوازن البايزي الكامل (التي ترتكز على الاستقراء الاسقاطي induction projective) تسمح بإلغاء التوازنات التي ترتكز على اعتقادات غير واقعية (contre-intuitives) . على سبيل المثال في مبارتنا، يمكن تطبيق المعيار الواقعي (critère intuitif) Cho et Kreps (1987) الذي يسمح بإلغاء الاعتقادات غير الواقعية للاعب 2 التي تقود إلى التوازن المختلط، وبالنتيجة يكون هناك توازن وحيد يستجيب إلى الأسس النظرية هو التوازن المفرق.[3]

[3] للاطلاع على هذه المعايير والمقاربات التي أسست لتعديلات أجريت على التوازن البايزي الكامل والتي ترتكز أساسا على إلغاء الاعتقادات غير الواقعية، يمكن الاطلاع على (*NICOLAS Eber*, 2013) .

IV. تمارين

التمرين الأول

لدينا مباراة بلاعبين اثنين 01 و02، أين اللاعب الأول يجهل نوع اللاعب الثاني، يعلم فقط أن اللاعب الثاني قد يكون من النوع A أو من النوع B بنفس الاحتمال 1/2، في حين اللاعب الثاني يعلم هو من أي نوع ونوع اللاعب الأول.

إذا كان اللاعب الثاني من النوع A ، عوائد المباراة هي:

		02	
		P	C
01	P	30 ,30	25 ,15
	C	15,25	20,20

إذا كان اللاعب الثاني من النوع B ، عوائد المباراة هي:

		02	
		P	C
01	P	30 ,20	25 ,25
	C	15,15	20,30

المطلوب:

1) حدد دوال أحسن رد للاعب الأول ولكلا النوعين للاعب الثاني؟
2) حدد توازن ناش البايزي للمباراة؟

التمرين الثاني

لدينا المباراة ذات الحركة المتزامنة، بمجموعة استراتيجيات لكل لاعب هي: $S_i = \{A, B, C\}$. اللاعب الثاني يعلم هو من أي نوع، كما أنه يعلم بيقين نوع اللاعب الأول. في المقابل اللاعب الأول يتجاهل (لا يعلم) نوع اللاعب الثاني، يعلم فقط أنه قد يكون من النوع A أو من النوع B بنفس الاحتمال $(1/2)$.

إذا كان اللاعب الثاني من النوع A، عوائد المباراة هي:

		J02		
		A	B	C
J01	A	(4 , 4)	(4 , 0)	(4 , -2)
	B	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)
	C	(1, -2)	(1 , 0)	(1 , 1)

إذا كان اللاعب الثاني من النوع B، عوائد المباراة هي:

		J02		
		A	B	C
J01	A	(4 , 16)	(4 , 0)	(4 , 4)
	B	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)
	C	(1 , 4)	(1 , 0)	(1 , 1)

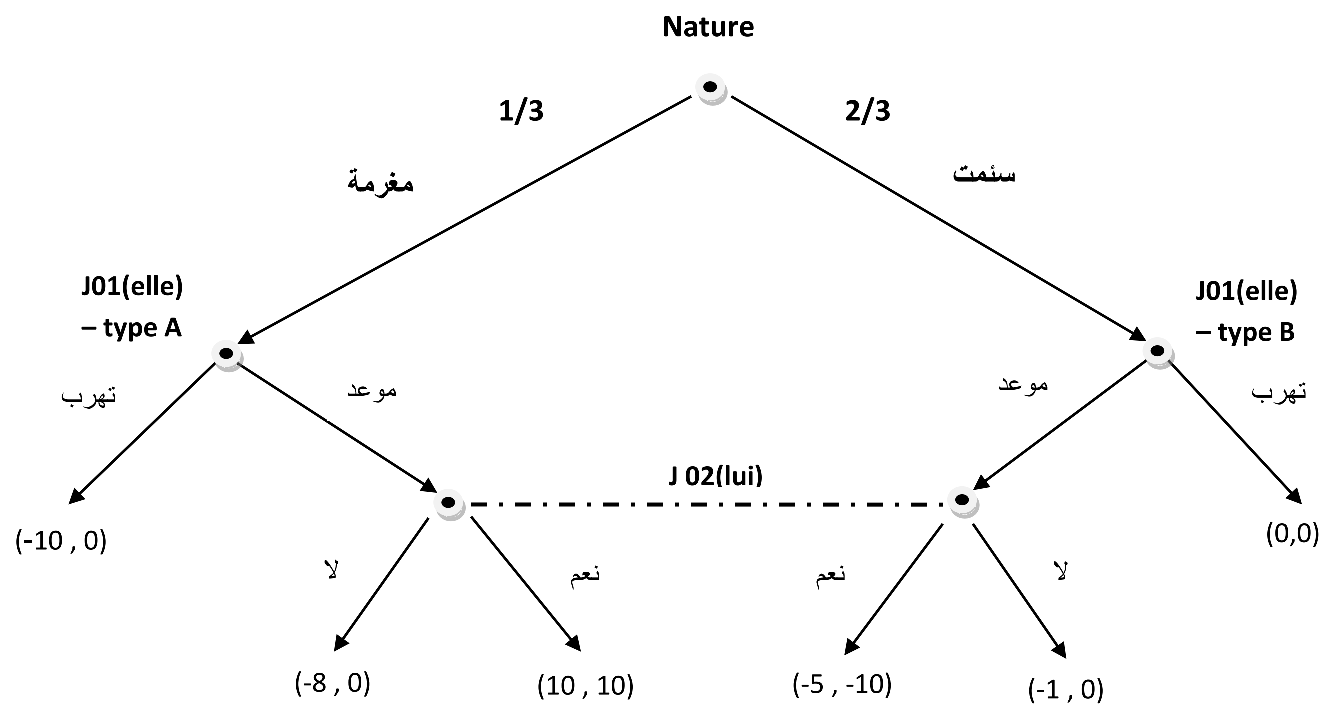
المطلوب:

1) مثّل شجرة المباراة لجعل المعلومة تامة حسب طريقة ***Harsanyi*** ؟
2) أعرض المباراة كاملة بالصيغة العادية؟
3) حدد دوال أحسن رد للاعب الأول ولكلا النوعين للاعب الثاني؟
4) حدد توازن ناش البايزي للمباراة؟

التمرين الثالث

المباراة تخص لاعبين، رجل وامرأة. يحتمل أن تكون المرأة مغرمة أو سئمت وهذه الخاصية تحدد لنا نوعها. يمكنها اختيار تحديد موعد مع هذا الرجل أو الهروب منه. الرجل يلاحظ القرار المتخذ من قبل المرأة، وهو لن يكون إلا من نوع واحد ومعروف للاعبين. عليه الاختيار بين قبول الموعد أو الرفض. اعتقاداته المسبقة على نوع المرأة (t^{Elle}) هي: مغرمة ($t^{Elle} = A$) باحتمال 1/ 3 أو سئمت ($t^{Elle} = B$) باحتمال 2/3 .

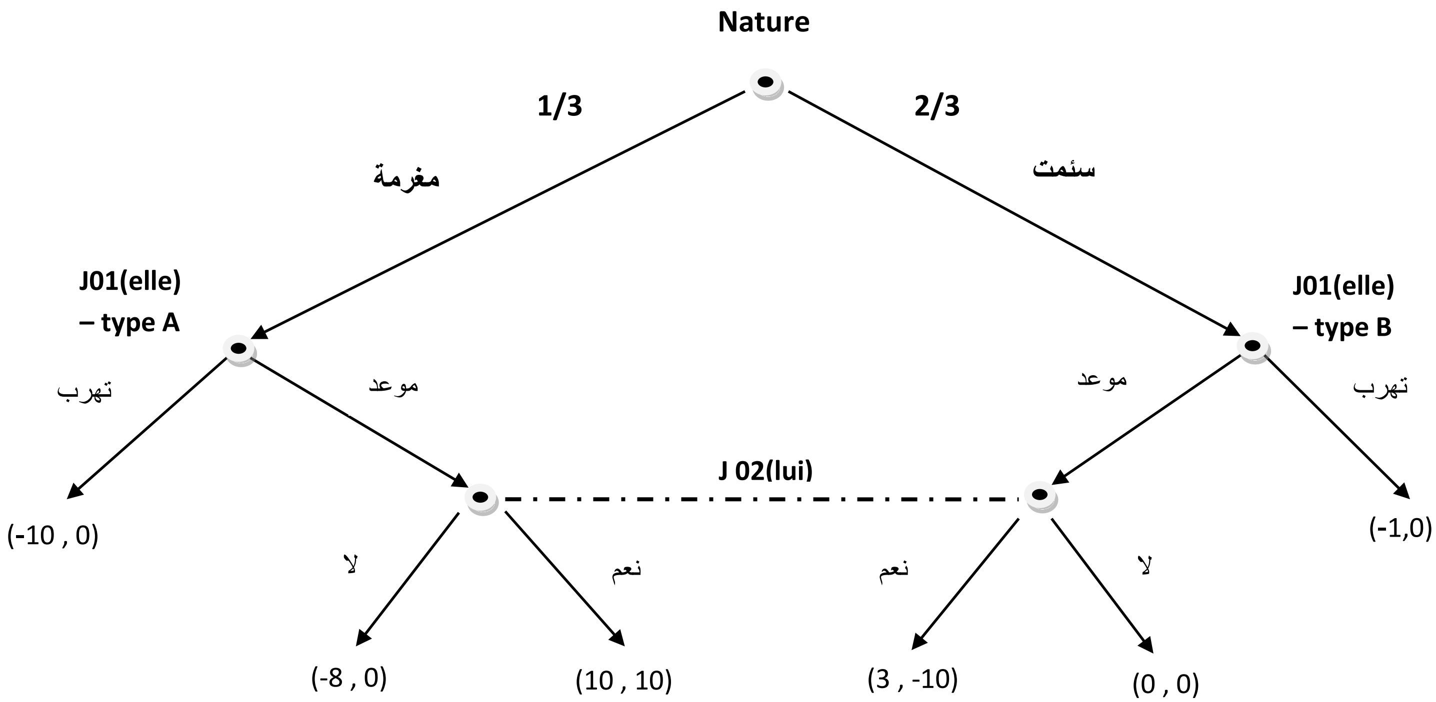
شجرة المباراة والعائد المقابل هي على النحو التالي، والمطلوب هو تحديد **التوازن البايزي الكامل المفرق.**


Nature
1/3
2/3
مغرمة
سئمت
J01(elle)
– type A
J01(elle)
– type B
تهرب
موعد
موعد
تهرب
J 02(lui)
(-10 , 0)
(0,0)
لا
نعم
نعم
لا
(-8 , 0)
(10 , 10)
(-5 , -10)
(-1 , 0)

التمرين الرابع

نأخذ نفس معطيات التمرين السابق، فقط هنا، المرأة التي سئمت أصبحت تدعم بشكل أقل الوحدة مقارنة بالمثال السابق.

شجرة المباراة هي مشابهه للتمرين السابق، وهي على النحو التالي، المطلوب هو تحديد **التوازن البايزي الكامل المختلط.**



حل التمرين الأول

1) **دوال أحسن رد للاعب الأول ولكلا النوعين للاعب الثاني:**

- أحسن رد للاعب الأول هو بلعب الإستراتيجية P مهما يكن نوع اللاعب الثاني ومهما تكن الإستراتيجية الملعوبة من قبل اللاعب 2 (لأن P هي مسيطرة تماما على الإستراتيجية C).
- **دالة أحسن رد للاعب الثاني:**

دالة أحسن للاعب الثاني نوع A هي:

$$s_2^*(s_1) = \begin{cases} P & si \quad s_1 = P \\ P & si \quad s_1 = C \end{cases}$$

دالة أحسن للاعب الثاني نوع B هي:

$$s_2^*(s_1) = \begin{cases} C & si \quad s_1 = P \\ C & si \quad s_1 = C \end{cases}$$

2) **توازن ناش البايزي للمباراة:**

اختيار P من طرف اللاعب الأول يعطيه أمل رياضي للعائد يساوي: $\left(25 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(30 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{55}{2}$.

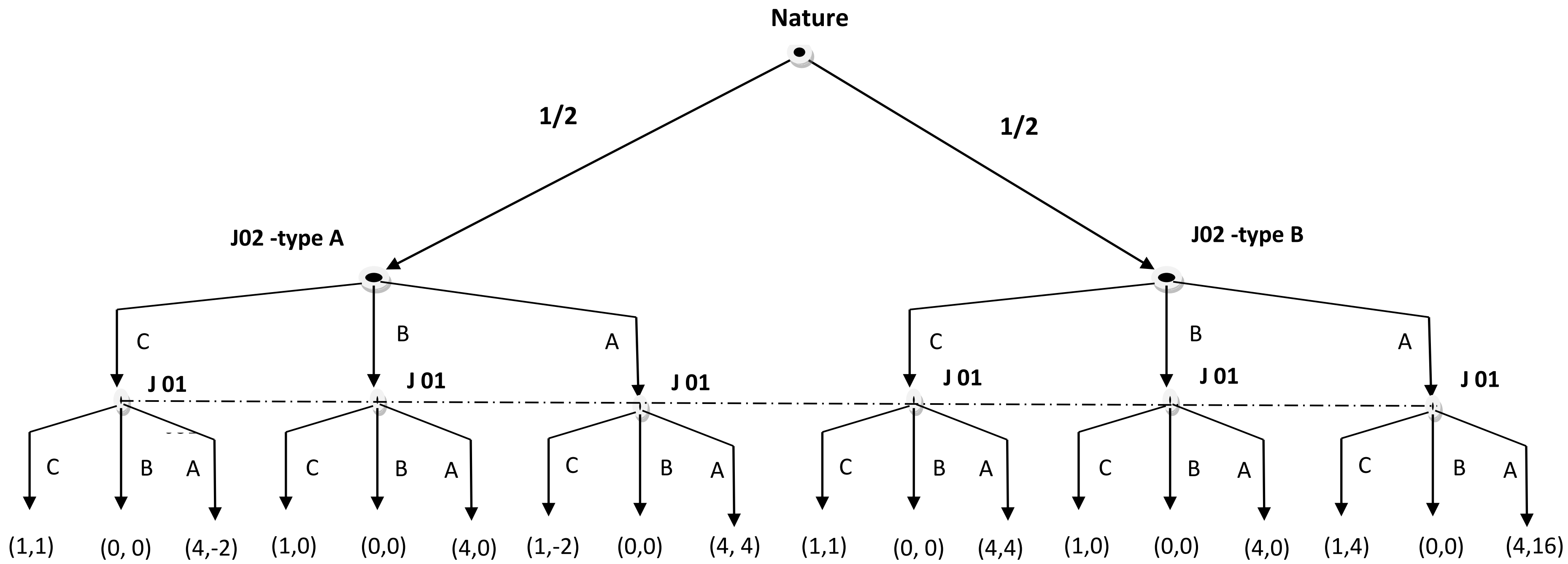
اختيار C من طرف اللاعب الأول يعطيه أمل رياضي للمنفعة يساوي: $\left(20 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(15 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{35}{2}$.

$\frac{55}{2} > \frac{35}{2}$ وبالتالي اللاعب الأول يختار الإستراتيجية P في التوازن.

توازن ناش البايزي لهذه المباراة هو الثلاثية : $(s_1^*, (s_A^*, s_B^*)) = (P, (P, C))$. بحيث: اللاعب الأول يختار الإستراتيجية P واللاعب الثاني من النوع A يختار في التوازن الإستراتيجية P واللاعب الثاني من النوع B يختار في التوازن الإستراتيجية C.

حل التمرين الثاني

1) شجرة المباراة لجعل المعلومة تامة على طريقة *Harsanyi* :



الشكل: تمثيل المباراة بالصيغة الشاملة

2) الصيغة العادية للمباراة:

اللاعب الأول يملك مجموعة معلومات واحدة في حين اللاعب الثاني يملك مجموعتان من المعلومات.

		J02					
		Type A (probabilité 1/2)			Type B (probabilité 1/2)		
		A	B	C	A	B	C
J01	A	(4 , 4)	(4 , 0)	(4 , -2)	(4 , 16)	(4 , 0)	(4 , 4)
	B	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 0)
	C	(1, -2)	(1 , 0)	(1 , 1)	(1 , 4)	(1 , 0)	(1 , 1)

3) دوال أحسن رد للاعب الأول ولكلا النوعين للاعب الثاني:

أحسن رد للاعب الأول هو بلعب الإستراتيجية A مهما يكن نوع اللاعب الثاني ومهما تكن الإستراتيجية الملعوبة من قبل اللاعب 2 (لأن A هي مسيطرة تماما على الاستراتيجيات الأخرى).

دالة أحسن للاعب الثاني نوع A هي:

$$\boldsymbol{s_2^*(s_1) = \begin{cases} A & si & s_1 = A \\ \{A, B, C\} & si & s_1 = B \\ C & si & s_1 = C \end{cases}}$$

دالة أحسن للاعب الثاني نوع B هي:

$$\boldsymbol{s_2^*(s_1) = \begin{cases} A & si & s_1 = A \\ \{A, B, C\} & si & s_1 = B \\ A & si & s_1 = C \end{cases}}$$

4) توازن ناش البايزي للمباراة:

توازن ناش البايزي لهذه المباراة هو الثلاثية: $(\boldsymbol{s_1^*}, (\boldsymbol{s_A^*}, \boldsymbol{s_B^*})) = (A, (A, A))$.

اختيارات النوعين A وB للاعب الثاني في التوازن تم استخراجها عن طريق تحديد توازن ناش في الاستراتيجيات الأصلية.

الملاحظ أننا لم نقم بحساب الأمل الرياضي لمنفعة اللاعب الأول لأنها غير مرتبطة بنوع اللاعب الثاني. لكن حتى وإن حسبنا الأمل الرياضي لمنفعة اللاعب الأول بنفس طريقة التمرين الأول سنحصل على نفس الحل.

حل التمرين الثالث

تحديد التوازن المفرق (L'équilibre Bayésien parfait séparateur):

<u>الاستراتيجيات المتاحة للاعبين:</u>

المرأة هي من تلعب أولا ويمكن أن تكون إما مغرمة (النوع A) أو قد سئمت من ذلك (النوع B) وهي تملك أربعة استراتيجيات:

$$\left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{تهرب}, S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{تهرب}\right\}; \left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{تهرب}, S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{موعد}\right\}$$

$$\left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد}, S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{تهرب}\right\}; \left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد}, S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{موعد}\right\}$$

الرجل نوع واحد فقط ويلاحظ اختيار المرأة قبل اتخاذ قراره. هو يملك إذن مجموعتين من المعلومات: عندما الفتاة تهرب أو عندما تعرض عليه موعد. هو لا يتدخل إلا في الحالة الثانية: هو يملك إذن إستراتيجيتين اثنين:

$$\left\{S^{\text{Lui}} = \text{نعم}\right\} \text{et} \left\{S^{\text{Lui}} = \text{لا}\right\}$$

<u>اختيار المرأة:</u>

- إذا اختارت المرأة من النوع A الهروب، $S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{تهرب}$ ستحصل إلى عائد 10- . اختيار، $S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد}$ يقود الى عائد 8- أو 10 حسب اختيار الرجل نعم أو لا. أحسن اختيار للمرأة هو بأن تختار ، $S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد}$.
- إذا اختارت المرأة من النوع B الهروب، $S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{تهرب}$ ستحصل على عائد 0 . اختيار، $S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{موعد}$ يقود الى عائد 1- أو 5- حسب اختيار الرجل نعم أو لا. أحسن اختيار للمرأة هو بأن تختار ، $S^{\text{Elle}}(B) = \text{تهرب}$.

بالنتيجة، هي تملك إستراتيجية مسيطرة:

$$\left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد}, S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{تهرب}\right\}$$

<u>اختيار الرجل</u>:

- $\left\{S^{\text{Lui}} = \text{لا}\right\}$ يقود الى عائد 0 مهما يكن نوع المرأة.
- $\left\{S^{\text{Lui}} = \text{نعم}\right\}$ يقود الى عائد 10 إذا كانت المرأة من النوع A (مغرمة) أو 10- إذا كانت المرأة من النوع B (سئمت).

حساب الأمل الرياضي للعائد المرتبط باختيار $\left\{S^{\text{Lui}} = \text{نعم}\right\}$، لن يرتكز بالضرورة على اعتقاداته المسبقة:

$$P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = \text{A}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = \text{B}\right) = \frac{2}{3}$$

اختيار المرأة الملاحظ، بأنها تختار الموعد يمكن أن يكون بمثابة إشارة للرجل لكشف نوع المرأة. سيراجع إذن اعتقاداته المسبقة وفقا لهذه الإشارة.

في مثالنا، اختيار المرأة يكشف نوعها. كما رأينا أن لها إستراتيجية مسيطرة تتمثل تحديد موعد إذا كانت مغرمة وتهرب إذا سئمت.

هو يقوم إذن بإجراء قاعدة بايز لمعتقداته المسبقة:

$$P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = \text{A} \setminus \text{موعد}\right) = 1 \quad \text{et} \quad P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = B \setminus \text{موعد}\right) = 0$$

الأمل الرياضي المرتبط بالاختيار، $S^{\text{Lui}} = \text{نعم}$ هو اذن:

$$1(10) + 0\,(-10) = 10$$

نحن نعلم أن الاختيار، $S^{\text{Lui}} = \text{لا}$ يقود بالتأكيد الى عائد 0 . بالنتيجة أحسن اختيار للرجل هو:

$$S^{\text{Lui}} = \text{نعم}$$

التوازن البايزي الكامل المفرق:

التوازن البايزي الكامل لهذه المباراة يتشكل ب:

- **الثنائية من الاستراتيجيات:**

$$\left(\left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد}, S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{تهرب}\right\}, \left\{S^{\text{Lui}} = \text{نعم}\right\}\right)$$

- **نظام اعتقادات للرجل:**

$$P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = \text{A} \setminus \text{موعد}\right) = 1 \quad \text{et} \quad P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = B \setminus \text{موعد}\right) = 0$$

$$P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = \text{A} \setminus \text{تهرب}\right) = 0 \quad \text{et} \quad P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = B \setminus \text{تهرب}\right) = 1$$

هذا التوازن البايزي الكامل يتميز بأنه مفرق (Séparateur) لأن إستراتيجية التوازن للمرأة تعطي إشارة توضح بصفة كاملة نوعها: $\text{t}^{\text{Elle}} = \text{A}$ أو $\text{t}^{\text{Elle}} = \text{B}$.

حل التمرين الرابع:

تحديد التوازن البايزي الكامل المختلط (L'équilibre Bayésien parfait mélangeant):

التوازن البايزي الكامل يطلق عليه مختلط إذا استراتيجيات اللاعبين لم تعط أي إشارة يمكن من خلالها تحديد طبيعة اللاعبين.

<u>الاستراتيجيات المتاحة للاعبين:</u>

كما في المثال السابق، المرأة تكون إما مغرمة (النوع A) أو قد سئمت من ذلك (النوع B) وهي تملك أربعة استراتيجيات، نكتبها بشكل مختصر:

$$\left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد} , \text{تهرب} \ ; \ S^{\text{Elle}}(B) = \text{موعد} , \text{تهرب}\right\}$$

الرجل يملك إستراتيجيتين اثنين:

$$\left\{S^{\text{Lui}} = \text{نعم}\right\} \text{et} \left\{S^{\text{Lui}} = \text{لا}\right\}$$

اختيار المرأة:

- إذا اختارت المرأة من النوع A الهروب، $S^{\text{Elle}}(\text{A}) =$ تهرب ستحصل إلى عائد 10- . اختيار، $S^{\text{Elle}}(\text{A}) =$ موعد يقود الى عائد 8- أو 10 حسب اختيار الرجل نعم أو لا. أحسن اختيار للمرأة هو بأن تختار ، $S^{\text{Elle}}(\text{A}) =$ موعد .
- إذا اختارت المرأة من النوع B الهروب، $S^{\text{Elle}}(\text{B}) =$ تهرب ستحصل إلى عائد 1- . اختيار، $S^{\text{Elle}}(\text{B}) =$ موعد يقود الى عائد 0 أو 3 حسب اختيار الرجل نعم أو لا. أحسن اختيار للمرأة هو بأن تختار ، $S^{\text{Elle}}(B) =$ موعد .

بالنتيجة، هي تملك إستراتيجية مسيطرة:

$$\left\{S^{\text{Elle}}(\text{A}) = \text{موعد}, S^{\text{Elle}}(\text{B}) = \text{موعد}\right\}$$

اختيار الرجل:

- $\left\{S^{\text{Lui}} = \text{لا}\right\}$ يقود الى عائد 0 مهما يكن نوع المرأة.
- $\left\{S^{\text{Lui}} = \text{نعم}\right\}$ يقود الى عائد 10 إذا كانت المرأة من النوع A (مغرمة) أو 10- إذا كانت المرأة من النوع B (سئمت).

في هذا المثال، ملاحظة اختيار المرأة لا يعطي أي معلومة إضافية حول نوع هذه الأخيرة. المرأة لها إستراتيجية مسيطرة تتمثل في تحديد موعد إذا كانت من النوع A أو من النوع B .

المراجعة حسب قاعدة بايز لاعتقاداته المسبقة لن تغير من هذه المعتقدات:

$$P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = \text{A} \setminus \text{موعد}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P^{\text{Lui}}\left(\text{t}^{\text{Elle}} = B \setminus \text{موعد}\right) = \frac{2}{3}$$

الأمل الرياضي للعائد المرتبط باختيار $\left\{S^{\text{Lui}} = \text{نعم}\right\}$ هو:

$$1/3(10) + 2/3(-10) = -10/3$$

نحن نعلم أن الاختيار، $S^{\text{Lui}} = \text{لا}$ يقود بالتأكيد إلى عائد 0 . بالنتيجة أحسن اختيار للرجل هو:

$$S^{\text{Lui}} = \text{لا}$$

التوازن البايزي الكامل المختلط:

التوازن البايزي الكامل لهذه المباراة يتشكل ب :

- **الثنائية من الاستراتيجيات:**

$$\left(\left\{S^{\mathrm{Elle}}(\mathrm{A}) = \text{موعد}, S^{\mathrm{Elle}}(\mathrm{B}) = \text{موعد}\right\}, \left\{S^{\mathrm{Lui}} = \text{لا}\right\}\right)$$

- **نظام اعتقادات للرجل على مسار التوازن:**

$$P^{\mathrm{Lui}}\left(\mathrm{t}^{\mathrm{Elle}} = \mathrm{A} \setminus \text{موعد}\right) = \frac{1}{3} \quad \mathrm{et} \quad P^{\mathrm{Lui}}\left(\mathrm{t}^{\mathrm{Elle}} = B \setminus \text{موعد}\right) = \frac{2}{3}$$

- **نظام اعتقادات للرجل خارج مسار التوازن:**

$$P^{\mathrm{Lui}}\left(\mathrm{t}^{\mathrm{Elle}} = \mathrm{A} \setminus \text{تهرب}\right) = 1 \quad - \quad P^{\mathrm{Lui}}\left(\mathrm{t}^{\mathrm{Elle}} = B \setminus \text{تهرب}\right): quelconques$$

هنا، تظهر خصوصية خارج مسار التوازن: الرجل يواجه حدث باحتمال معدوم. بالنتيجة، إذا لعبت المرأة استراتيجية التوازن، سوف تختار تحديد "**موعد**" مهما يكن شعورها. اختيار "**تهرب**" لا يمكن (لا ينبغي) ملاحظتها. مقابل حدث باحتمال معدوم، لا يمكن استعمال قاعدة بايز. بالتالي، كيف يمكن له مراجعة معتقداته إذا لاحظ اختيار "**تهرب**"؟ في مثالنا، الإجابة هي: لا يهم. بالنتيجة، اختيار " **تهرب**" لا يسمح للرجل باللعب. بالنتيجة، أيا كانت اعتقادات هذا اللاعب خارج مسار التوازن، لن تتأثر حجج استقرار التوازن المذكور أعلاه. بالتالي، الاعتقادات المراجعة $P^{\mathrm{Lui}}\left(\mathrm{t}^{\mathrm{Elle}} \setminus \text{تهرب}\right)$ يمكن أن تكون كيفية(quelconques).

هذا التوازن البايزي الكامل يتميز بأنه مختلط لأن إستراتيجية التوازن للمرأة لا تعطي أي إشارة حول نوعها : $\mathrm{t}^{\mathrm{Elle}} = \mathrm{A}$ أو $\mathrm{t}^{\mathrm{Elle}} = \mathrm{B}$.

المراجع

- Cavagnac, Michel. Théorie des jeux. Gualino éditeur-Paris, 2006.
- Dennis W. Carlton, Jeffrey M.Perloff. Economie industrielle. De Boeck Supérieur, 2e édition, 2008.
- Eric Rasmusen;Games and Information: An Introduction to Game Theory. Wiley–Blackwell ; 4th Edition, 2006.
- Etner, Johanna, and Meglena Jeleva. *Microéconomie*. Dunod, 2014.
- Lepelley, Dominique, Michel Paul, and Hatem Smaoui. *Introduction à la théorie des jeux (1): jeux non coopératifs*. No. hal-01258586. 2013.
- Nicolas, Eber. *Théorie des jeux*. 3e édition, Edition Dunod, 2013.
- Watson, Joel. Strategy: an introduction to game theory, third edition, University of California, San Diego, W. W. NORTON & COMPANY, 2013.
- YILDIZOGLU, Murat. Introduction à la microéconomie. *Université Paul Cézanne. Marseille: Edition libre*, 2009.
- Yildizoglu, Murat. *Introduction à la théorie des jeux-2e édition: Manuel et exercices corrigés*. Dunod, 2011.