الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
****
جامعة مصطفى اسطمبولي - معسكر
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات
*****

مطبوعة رياضيات
لطلبة السنة الأولى ماستر
تخصص هندسة تفاضلية و تطبيقاتها

المنحنيات و السطوح

المنحنيات و السطوح

الدكتور **بالجيلالي غريسي**

السنة الدراسية
2021 - 2020

المحتويات

المحتويات

شكر و إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله و الصلاة و السلام على رسول الله - صلى الله عليه و سلم - و بعد...
فإلى روحي والديّ الكريمين -رحمهما الله- اللذان غرسا في نفسي بذور الفضائل مذ كنت صبيا...
إلى زوجتي المصون و أبنائي البررة -حفظهم الله- ما حافظوا على الصلاة بعد موتي و مادمت حيا...
إلى أساتذتي الذين علّموني أنه لا حياة مع اليأس و لا فشل مع التوكّل على الله و السعى سعيا ...
إلى إخواني و أحبابي الذين امتزجت روحي بأرواحهم فمازالت تحثّني كي أكون مخلصا تقيا ...
إلى طلبتي الأعزّاء الذين أرى في عيونهم عزما و إصرارا على بلوغ الثّريا...

إلى كل هؤلاء... شكرا لكم.

كلمة لابد منها

الأكيد أن الرجوع إلى اللغة الأصلية من أركان التنمية الحقيقة لأية أمة، كما ذهب إلى ذلك المفكر المغربي الكبير: المهدي المنجرة رحمه الله، منطلقا من التجربة اليابانية الناجحة، والتي اعتمدت في سيرورتها التنموية على لغتها الأصلية.

تؤكد الأمم المتحدة في تقرير لها، ليوم الثلاثاء 18 ديسمبر 2018 نُشر عبر موقعها الإلكتروني، أن للغة العربية أهمية قصوى لدى المسلمين. فهي أكثر اللغات انتشاراً في العالم، حيث يتحدّث بها أكثر من 422 مليون نسمة و عدد كلماتها 12 مليون في حين عدد مفردات اللغة الفرنسية 150 ألفا و اللغة الروسية 130 ألفا و اللغة الإنجليزية الأكثر انتشارا 600 ألف. و هي واحدة من ست لغات معتمدة بالأمم المتحدة، تتحدث بها ستون دولة و هي لغة رسمية في 26 دولة، بالإضافة إلى كونها لغة القرآن الكريم، ولغة العبادة لمليار ونصف المليار مسلم في جميع أرجاء العالم. كما تُعدّ أيضاً مصدراً لتراث ثقافي وعلمي بديع، فضلاً عن كونها وسيلة للتواصل في الحياة اليومية. و قد تصنّف اللغة العربية الأولى عالميا من حيث دقة المعاني و بها 16 ألف جذر لغوي متفوقة عن كل اللغات.

فيها أقصر كلمة "قِ" بالكسرة و تأتي بمعنى الوقاية كقولنا " قِ نفسك من البرد". و بها أقوى بيت شعري للمتنبي

أَلَمٌ أَلَمَّ أَلَمْ أُلِمَّ بِدَائِهِ * إِنْ أَنَّ آنٌ آنَ آنُ أَوَانِهِ

و معناه

(وجع) (أحاط بي) (لم) (أعلم) (بمرض) * (إذا توجع) (المريض) (حان) (وقت) (شفائه).

و بها كلمة "أَنُلْزِمُكُمُوهَا" التي ترجمت للإنجليزية باستعمال سبع كلمات

"Shall we compel you to accept it".

هل اللغة العربية لغة علم؟

كثير من الباحثين والمثقّفين يعتقدون أن اللغة العربية ليست لغة علم، وهذا الحكم الذي وقع فيه معظمهم راجع لعدة أسباب:

أولها: جهلنا باللغة العربية واتساعها وإمكانياتها اللامحدودة.

ثانيا: معظمهم درسوا في جامعات غربية، أو درسوا و درّسوا تلك المواد العلمية في بلدانهم بلغة (الغرب).

ثالثا: لأننا في هذا الزمان لا نعدو أن نكون مستهلكين لما يصل إليه الغرب من علوم وتقنيات .

رابعا: انقطاعنا عن ماضينا التليد و عصر حضارتنا المجيد دون المطالبة بتراثنا المدفون في مكتبات الغرب و كذلك يراد لنا أن نبقى.

وقد يبدوا للبعض أن اللغة العربية لغة (ثقيلة) في العلوم خاصة في الرياضيات وهذا الثقل الذي قد يجده البعض ثقل نسبي يتعلق بمدى تعود الدارس للمصطلحات التي يستعملها، وليس له علاقة برحابة اللغة للعلم أو ضيقها..

والدليل على هذا أن الذي يدرس الرياضيات بالعربية مدة من الزمن ثم يتحول إلى لغة جديدة كطلبتنا قبل البكالوريا و بعدها، يجد صعوبة وثقلا في بادئ الأمر، نظرا لاحتياجه لمدة كافية للتعود والاستئناس و الخطير في الأمر أن كثير منهم يفقد لغته الأم دون التحكم في لغة العلوم المزعومة. و حسبنا أن نورد هنا مقطعا من مقال نشر في جريدة الشروق اليومي الجزائرية للدكتور أبو بكر خالد سعد الله أستاذ جامعي قسم الرياضيات / المدرسة العليا للأساتذة- القبة في عددها 5081 ليوم السبت 28 أفريل 2018 م الموافق لـ 12 شعبان 1439 هـ جاء فيه:

"أما اللغة العربية فيصنفها الكثيرون بأنها اللغة التي تحتوي على أكبر عدد من الكلمات فـ"لسان العرب" لابن منظور (القرن 13م) وحده يشمل أزيد من 4 ملايين كلمة، ويقدّر بعض الإحصائيين عدد الكلمات العربية الفصحى (بدون تفاصيل الاشتقاق) بأكثر من 12 مليون كلمة. ثم إن مؤلفاتها شملت خلال القرون الخالية جميع فنون العلم والمعرفة. وعندما كان بن يهودا يطوّر اللغة العبرية ويبحث عن مصطلح عبري لكلمة "مطعم" و"ساعة" و"جريدة" كان المناضلون اللغويون العرب قد بلغوا شوطا متقدما في مثل هذه الأعمال إذ كانوا آنذاك يعربون كتب الطب والرياضيات الجامعية ويضعون مصطلحات، مثل "القطار" و"السيارة" و"المطار" و"الطائرة" و"الكهرباء" و"النسبية"... ثم "الصاروخ" و"المسبار" و"القمر الصناعي"... ولما تأسست الأكاديمية العبرية ووحّدت المصطلح، وصارت "الناطق الرسمي" لهذه اللغة تأسست المجامع اللغوية في البلاد العربية وصار كل منها ينطق بهواه وتشتت الجهود. ورغم ذلك قاومت اللغة العربية هذا التشرذم بطاقتها الكامنة لأنها كانت بمثابة سلسلة متواصلة ظلت حلقاتها حيَّة لم تنقطع منذ الجاهلية إلى اليوم، وقد أراد بها الاستعمار المتعدد الأشكال سوءا في كل البلاد العربية. و ما يثبت في الواقع حيوية اللغة العربية أمثلة كثيرة ففي جامعة كيوتو (Kyoto) اليابانية الشهيرة، التي تأسست في نهاية القرن التاسع عشر (1897)، مجلة في العلوم الإنسانية عنوانها "مجلة دراسات العالم الإسلامي" ينشر فيها الباحثون اليابانيون اليوم باللغة العربية مواضيع

أكاديمية في العلوم الاجتماعية والإسلامية! كما نجد في جامعة برشلونة الإسبانية مجلة دولية أكاديمية، صدرت منذ عقدين، تُعنى بتاريخ العلوم لا تقبل النشر إلا باللغتين الأنكليزية والعربية. والأجمل من ذلك أن المجلة سُمّيت "سُهَيل"، وقد كُتب عنوانها بالحرف العربي في أعلى صفحة الغلاف. ويشرح ناشروها ضمن فقرة كاملة اختيارهم لهذا العنوان بالذات، فقالوا إن "سُهَيل" هو اسم النجم الذي يستعمل في التقليد الإسلامي لمعرفة اتجاه القِبْلة!!.

فإذا كُنّا قد أضعنا اليوم لغتنا ومقوماتنا فاللغة العربية لديها من الرصيد الفكري وطول النفس ما سيجعلها تظل صامدة و حيوية ما دامت الدنيا قائمة.

و قبل ختام هذه الكلمة، أحببت أن أقتبس مرّة أخرة من الدكتور أبو بكر خالد سعد الله من مقال نشر له بجريدة الشروق في عددها 6820 ليوم الأربعاء16 جوان 2021 م الموافق لـ 6 ذو القعدة 1442 هـ فقرة معبّرة بعنوان **لغة المنطق ومنطق اللغة** جاء فيها:

" ريتشارد فينمان Feynman (1918-1988) فيزيائي ورياضياتي أمريكي كان يتمتع بشهرة لا نظير لها لدى جمهور العلماء. وقد نال جائزة نوبل في الفيزياء عام 1965. كتب هذا العالم في مذكراته أنه كان له شرف إدخال اللغة البرازيلية (البرتغالية تقريبا) إلى أكاديمية العلوم البرازيلية! حدث ذلك عندما استضافته هذه الأكاديمية ليلقي فيها محاضرة فراح يعدّها باللغة البرازيلية- وهو لم يدرس هذه اللغة قطّ- مستعينا قبل زيارته بمعارفه البرازيليين في الولايات المتحدة.

وعندما وصل إلى هذه الأكاديمية لاحظ أن الجميع يلقون كلماتهم ومحاضراتهم بالإنكليزية، وهم من البرازيليين. وعندما أتى دور فينامان فاجأ الحضور بمخاطبهم بالبرازيلية. ويضيف فينمان أن الأكاديمي الذي جاء بعده من المحاضرين البرازيليين قال : بما أن هذا الأمريكي ألقى محاضرته بلغتنا فسألقي محاضرتي بلغتي! ويختم فينمان روايته بالملاحظة الوجيهة : يقع على عاتق المحاضر والأستاذ تحمّل مثل هذه الصعاب اللغوية لتوصيل فكرته إلى الحضور وليس العكس.

أما عندنا فيتذرّع بعض أساتذتنا بأنهم لا يلّمون بالعربية، ولذا يدرّسون الرياضيات بالفرنسية رغم أن الطالب سيزيد تحصيله العلمي واستيعابه لو واصل تعليمه في السنوات الأولى الجامعية بالعربية. بمعنى أن الأستاذ يمتنع عن بذل جهد في المجال اللغوي في سبيل تقريب المعنى والمفاهيم للطالب!

لكن نفس الأستاذ يبذل قصارى جهده، من أجل ترقيته الخاصة، في كتابة مقالاته باللغة الإنكليزية لأنه لا حول في كتابتها باللغة الفرنسية. فكل المجلات الرياضياتية تنشر بالأنكليزية، بما فيها مجلة أكاديمية العلوم الفرنسية (CRAS) الشهيرة في الرياضيات التي تصدر منذ تاريخ احتلال فرنسا للجزائر. وكذلك الشأن مثلا بالنسبة لمجلة "حوليات هنري بوانكريه" التي تصدر منذ نحو قرن. ففي هاتين المجلتين لم نجد في آخر أعدادها مقالا واحدا بلغة أخرى غير الإنكليزية. لذا فأدْعى بهؤلاء الأستاذة البخلاء على طلبتهم والمغدقين على أنفسهم

-إذا ما تصوروا أن في التدريس بالعربية تخلفًا- أن يتقدَّموا ويدرّسوا العلوم باللغة التي ينشرون بها أبحاثهم... فهذا يغنيهم عن الكيل بمكيالين في التعامل مع اللغات."

و ختاما، قد أجابت اللغة العربية على لسان حافظ إبراهيم رحمه الله، عن كل التساؤلات قديمها و حديثها، فقالت:

وَسِعْتُ كِتَابَ اللهِ لَفْظًا وَغَايَةً * وَمَا ضِقْتُ عَنْ آيٍ بِهِ وَعِظَاتِ
فَكَيْفَ أَضِيقُ اليَوْمَ عَنْ وَصْفِ * آلَةٍ وَتَنْسِيقِ أَسْمَاءٍ لِمُخْتَرَعَاتِ
أَنَا البَحْرُ فِي أَحْشَائِهِ الدرُّ كَامِنٌ * فَهَلَّ سَأَلُوا الغَوَّاصَ عَنْ صَدَفَاتِي؟

مقدمة

تعتبر الهندسة من أكثر فروع الرياضيات تعقيدا عند أكثر المهتمين بحقل الرياضيات، ذلك لما لها من ارتباطات و تداخلات بأغلب فروع الرياضيات الأخرى كالطبولوجيا، التحليل، الجبر و غيرها. و تجدر الإشارة هنا أن نشأة الهندسة تعود لحقب تاريخية بعيدا جدا، فقد أجابت حينها عن مشاكل حياتية ملموسة و مسائل ضرورية صادفها الإنسان كالمسافات والمساحات و النجوم و غيرها.

الهندسة التفاضلية هي فرع من أهم فروع الهندسة في عصرنا، فهي علم يستخدم فيه التفاضل والتكامل والجبر لدراسة المسائل الهندسية و قد أثبتت فاعليتها و عرفت أهميتها مع ظهور نظرية اينشتاين النسبية والتي تقترح أن الفضاء الكوني بشكل عام هو منحني و ليس مستويا كما زعم إقليدس.

تهتم الهندسة التفاضلية بدراسة الأشكال الهندسية و العلاقات التي تربطها. في مقدمة هذه الأشكال، المنحنيات، السطوح ومغلفات المنحنيات والسطوح في الفضاءات الإقليدية واللاإقليدية و تستند في دراستها إلى طرائق التحليل الرياضي وفي مقدمتها حساب التفاضل و التكامل. يتم التركيز خصوصاً على الخصائص التفاضلية للأشكال الهندسية وهي الخصائص اللامتغيرة بالنسبة للحركة. لقد ارتبط ظهور الهندسة التفاضلية ارتباطاً وثيقاً بظهور وتطور مفهوم الإحداثيات في النصف الأول من القرن 17م على يد العالمين ديكارت وفيرما. كما أضاف نيوتن وليبنز بعض المفاهيم المندرجة ضمن الهندسة التفاضلية كالمماس، الناظم و التقوس. في القرن 18م على يد أولر ظهرت فكرة تعيين التمثيل الوسيطي (البارامتري) للمنحنى وكذا تحديد الأشعة الأساسية للسطوح، كما أدخل مفهوم الفتل (الإلتواء). ولقد نُشر في عام 1795م أول مؤلف شامل في الهندسة التفاضلية من قبل العالم مانغ. وفي عام 1827م قام غوس في مؤلفه "دراسة عامة للسطوح المنحنية" بصياغة وتطوير مفهوم هندسة السطوح، كما أوجد الصيغتين الأساسيتين الأولى والثانية للسطح، وأثبت أن التقوّس التام للسطح ينتمي إلى الهندسة الذاتية (الداخلية) التي تهتم بالخواص اللامتغيرة على السطح تحت تأثير تحويلات التناظر الأحادي أو تساوي القياس. ويتضح ذلك في صيغ سيريه- فرينيه للمنحنى.

بحمد الله و عونه ، تمّ إنجاز هذا الكتاب ليكون موافقا لمتطلبات البرنامج الخاص بمقياس المنحنيات و السطوح المقرّر لطلبة السنة الأولى ماستر رياضيات تخصّص هندسة. هذا المرجع يضم دراسة مستفيضة للمنحنيات والسطوح الكائنة في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد، دراسة خارجية نظرا لضرورة وجود فضاء

حاو للعناصر الهندسية قيد الدراسة من منحنيات أو أسطح و دراسة ذاتية من خلال التحكّم في الخواص اللامتغيرة فيها.

هذا الكتاب مجزّأ الى ثلاثة أبواب، الأول خُصّص للتذكير ببعض المفاهيم التي نحتاجها و التي لا بد منها. الباب الثاني خاص بالمنحنيات، دراسة خارجية و داخلية (ذاتية). فهو يشمل جميع المفاهيم المتعلقة بالمنحنيات في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد مع أمثلة مفصّلة و تمارين محلولة.

الباب الثالث، يتناول السطوح في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد مع إدراج دراسة المنحنيات على السطوح مع أمثلة توضيحية وتمارين محلولة.

لذا، وجب على الطالب الإلمام بالجبر الخطي و الجبر الشعاعي و كذا أساسيات التحليل المألوفة. كما يمكن أن يكون مرجعا للأستاذ يحضّر منه دروسه في حالة قدّم المقياس باللغة العربية.

و نشير في الختام، أن هذا المرجع قد أُعدّ باللغة العربية على خلاف الشائع، ذلك كي لا نجمع على طلبتنا صعوبتين، طبيعة المادة المجرّدة و اللغة الأجنبية (الفرنسية) غير المتحكّم فيها. سيشعر الطالب و هو يتناول المفاهيم من خلال هذا الكتاب بدفء مراحل التعليم ما قبل الجامعة و يحنّ إليها ذلك لوجود كثير من المصطلحات والمفاهيم التي قدّمت في المرحلة الثانوية.

نأمل أن يجد مستعمل هذا الكتاب بغيته و نرحّب بكل اقتراح بنّاء . كما نعد بحول الله و توفيقه بتقديم مراجع أخرى لمقاييس أخرى باللغة العربية مساهمة منا في إثراء المكتبة العربية. هذا، و الله من وراء القصد.

الفصل 1

مفاهيم أولية

في هذا الفصل سنذكّر بجملة من المفاهيم الأساسية التي لابد منها، إذ سنحتاج في دراسة المنحنيات و السطوح في الفضاء لمفاهيم الجبر الخطي و خاصة ماتعلّق بالمصفوفات، ومن جهة أخرى نحتاج لمفاهية الهندسة في الفضاء و تحديدا الأشعة في الفضاء و العمليات عليها. لذا وجب على الطالب أن لا يكتفي بما سنورده هنا من تذكير مختصر جدا بل عليه الرجوع الى الكتب المتخصِّصة في حالة عدم تمكنه من هذه المفاهيم.

1.1 الأشعة في الفضاء و العمليات عليها

تصنف الفضاءات الى قسمين رئيسيين، الفضاء الإقليدي و الفضاء غير الإقليدي. في هذا الفصل نحتاج للفضاء الإقليدي خاصة ثلاثي الأبعاد و ذلك للتذكير ببعض المفاهيم الرياضياتية التي سنحتاجها في الفصول اللاحقة. ببساطة، نقصد بالفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد و الذي يرمز له بالرمز $\mathbb{E}^3$ على أنه جميع النقط الهندسية $\{M\}$ و التي تمثل بمجموعة الثلاثيات (x^1, x^2, x^3) أو (x_1, x_2, x_3) المختصرة في الرمز (x^i) أو (x_i) و هذا يعطى من خلال التطبيق الحيادي

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3,$$

أي كل نقطة هندسية M يمكن تمثيلها كمايلي:

$$\forall M \in \mathbb{E}^3 \qquad M \equiv (x^i), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \qquad \forall x^i \in \mathbb{R},$$

و $\mathbb{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعريف 1.1.1. يعُرّف الجداء السلّمي للشعاعين $U = (u^i)$ و $V = (v^i)$ كمايلي

$$< U, V >= U \cdot V = \sum_{i=1}^{3} u^i . v^i. \tag{1.1}$$

و في الفضاء الإقليدي $\mathbb{E}^3 = \{M \equiv (x^i) \in \mathbb{R}^3\}$ يُعرّف الجُداء السلّمي $< V, V >$ كمايلي

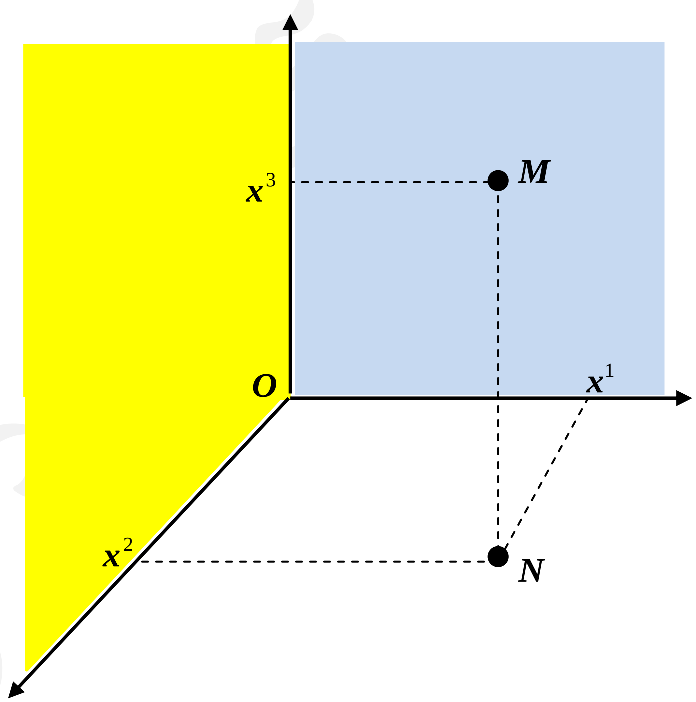
$$< V, V >= V \cdot V = \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2, \tag{1.2}$$

حيث $V = \overrightarrow{OM}$ و النقطة O تُمثّل بالثلاثية $(0, 0, 0)$.
و من هنا نستطيع حساب البعد بين نقطتين M و N من الفضاء $\mathbb{E}^3$ كمايلي

$$MN = \sqrt{< \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN} >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y^i - x^i)^2}, \tag{1.3}$$

حيث النقطة N تمثل بالثلاثية (y^i).

وبهذه المقدمة البسيطة نكون قد عرّفنا الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد، و بأسلوب أكثر دقة، يعرف الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد على أنه فضاء شعاعي معياري بُعده 3 معرّف على حقل الأعداد الحقيقية أي أنه فضاء شعاعي له أساس متعامد و متجانس.
و نشير أن الأعداد الحقيقية x^i تسمى الإحداثيات الديكارتية و تُمثّل أبعاد النقطة M عن مستويات الإحداثيات حسب ما يبيّنه الشكل التالي



تعريف 2.1.1. يُعرّف الجُداء الشعاعي للشعاعين U و V و الذي يُرمز له بالرمز $U \times V$ أو $U \wedge V$ كمايلي

$$U \times V = U \wedge V = |U|.|V|. \sin\theta \tag{1.4}$$

حيث θ هي قيس الزاوية الموجّهة بالشعاعين U و V.

أهم ما ينبغي الإشارة إليه هنا، أنّ حاصل الجُداء الشعاعي لشعاعين هو شعاع عمودي عليهما معا. يتمتع الجُداء الشعاعي بالخواص التالية

$$U \wedge V = -V \wedge U, \qquad V \wedge V = 0,$$

$$U \wedge V = 0 \Leftrightarrow U = 0 \ \vee \ V = 0 \ \vee \ U = \lambda V, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$
$$\alpha U \wedge V = U \wedge \alpha V = \alpha(U \wedge V), \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
$$U \wedge (V + W) = U \wedge V + U \wedge W$$

ملاحظة 1.1.1. من أجل

$$U = \sum_{i=1}^{3} u^i \mathrm{e}_i, \qquad V = \sum_{i=1}^{3} v^i \mathrm{e}_i$$

يكون

$$U \wedge V = \begin{bmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} = (u^2v^3 - u^3v^2)\mathrm{e}_1 - (u^1v^3 - u^3v^1)\mathrm{e}_2 + (u^1v^2 - u^2v^1)\mathrm{e}_3.$$

تعريف 3.1.1. الجُداء السلّمي الثلاثي

يُعرّف الجُداء السلّمي الثلاثي للأشعة U، V و W على أنّه الجُداء السُلّمي للشعاعين $U \wedge V$ و W أي أنّه $(U \wedge V) \cdot W$ و نرمز له بالرمز $[.,.,.]$ و نكتب $[U, V, W] = (U \wedge V) \cdot W$

أهم ما ينبغي الإشارة إليه هنا، أنّ القيمة المطلقة للجُداء السلّمي الثلاثي تساوي حجم متوازي المستطيلات المكوّن بهذه الأشعة الثلاثة.
يتمّع لجُداء السلّمي الثلاثي بالخواص التالية

$$[U, V, W] = (U \wedge V) \cdot W = U \cdot (V \wedge W) = V \cdot (W \wedge U) = W \cdot (U \wedge V)$$

ملاحظة 2.1.1. الشرط الكافي و اللازم كي تكون ثلاثة أشعة موازية لمستوٍ هو أن يكون جُداؤها السلّمي الثلاثي معدوما. أما إذا كان غير معدوم فتكون الأشعة مستقلة خطيا.

2.1 الدوال الشعاعية

تعريف 4.2.1. الدالة الشعاعية هي تطبيق من الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو جزء منها $I \subset \mathbb{R}$ نحو الفضاء الإقليدي $\mathbb{E}^3$ بحيث لكل $t \in I \subset \mathbb{R}$ توجد نقطة M في $\mathbb{E}^3 = \mathbb{R}^3$. نعبّر عن الدالة الشعاعية التي مجال تعريفها I بالشكل

$$f = f(t) = \overrightarrow{OM} = \big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$$

و تسمى الدالة الشعاعية أحيانا حقل أشعة.

تعريف 5.2.1. كل النُقط الهندسية في الفضاء الإقليدي الموافقة لقيم t و المعرّفة بالدالة الشعاعية f تُشكّل منحنى في الفضاء.

إذا كان $\{\mathrm{e}_i\}$ أساسا للفضاء فإن $f(t)$ يمكن كتابتها بالشكل

$$f(t) = f_1(t)\mathrm{e}_1 + f_2(t)\mathrm{e}_2 + f_3(t)\mathrm{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\mathrm{e}_i$$

و ببساطة، نقول عن الدالة الشعاعية أنها مستمرة إذا كانت جميع مركباتها $f_i(t)$ مستمرة. و نقول عنها أنها قابلة للتفاضل إذا كانت جميع مركباتها $f_i(t)$ قابلة للتفاضل أيضا. نكتفي هنا بالمفاهيم البسيطة التالية:

المشتقة التفاضلية الأولى

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{df_i(t)}{dt} = \Big(\frac{df_1(t)}{dt}, \frac{df_2(t)}{dt}, \frac{df_3(t)}{dt}\Big) = f'^i(t) \tag{1.5}$$

تعريف 6.2.1. نقول عن دالة شعاعية أنها من الصنف $\mathcal{C}^m$ إذا كانت كل المشتقات التفاضلية حتى الرتبة m هي دوال تفاضلية.

إذا كانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial f_i}{\partial x^i}$ موجودة فإن المصفوفة التالية

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة اليعقوبية.

مبرهنة 1.2.1. مبرهنة الدالة العكسية:
لتكن $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^1$ في الجزء المفتوح U.

و نعتبر التطبيق الخطي df_{x_0} المعرّف من المستوي المماس $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ في النقطة x_0 نحو المستوي المماس $T_{f(x_0)}\mathbb{R}^n$ في النقطة $f(x_0)$ أي

$$df_{x_0} : T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{f(x_0)}\mathbb{R}^n$$

بالمصفوفة اليعقوبية $J(f)$ ذات المحدِّد غير المعدوم في النقطة x_0 :

◄ يوجد جوار مفتوح V_{x_0} و جوار مفتوح $V_{f(x_0)}$ بشرط أن يكون $f \in \mathcal{C}^1$ تماثل تفاضلي (*diféomorphisme*).

◄ الدالة العكسية $\left(f^{-1}\right)^i \in \mathcal{C}^1$ في الجوار $V_{f(x_0)}$ و تفاضلية الدالة العكسية يعرّف من خلال المصفوفة اليعقوبية العكسية

$$(df^{-1})_{f(x_0)} = (df_{x_0})^{-1}.$$

مبرهنة 2.2.1. مبرهنة الدالة الضمنية

في حساب التفاضل للدوال ذات متغيرات عديدة، نظرية الدوال الضمنية تنص على أنه لمجموعة مناسبة من المعادلات يمكن التعبير عن بعض المتغيرات كدوال لباقي المتغيرات. هذه العملية تقتضي كثير من الشروط. مثلا دائر الوحدة $x^2 + y^2 = 1$ تمثل مجموعة نقط في المستوي $\mathbb{R}^2$; و لكن

$$f : \mathbb{R}^2 \to [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto x, \qquad (x, -y) \longmapsto x$$

أي أن f ليست تقابلي. و علاوة على ذلك، المماسات عند النقطتين $(-1, 0)$ و $(1, 0)$ شاقولية، أي أن y لا يمكن التعبير عنها بدالة ذات المتغير x أو إذا كانت $y = \sqrt{1 - x^2}$ فإن

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

تؤول الى الملانهاية لما x يؤول الى 1 أو -1.

الفصل 2

المنحنيات

1.2 مفهوم منحنى

حينما تسافر مشيا على الأقدام من مكان A نحو مكان آخر B يبعد مسافة $6Km$ في مدة زمنية تقدر بساعة واحدة $60mn$، آثار خطواتك تكون قد رسمت مسارا "منحنى" بين A و B. فإذا فرضنا جدلا أن خطواتك منتظمة، يمكننا توقّع موضعك بعد أي فترة زمنية t من المجال $[0;60mn]$ و نكون بذلك قد عرّفنا تطبيقا x كمايلي

$$x:[0;60mn]\to\mathbb{R}^3$$
$$t\mapsto x(t).$$

نسمي هذا التطبيق تمثيلا وسيطيا لمسار السفر حيث t هو الوسيط.
و لو فرضنا مرّة أخرى أنك قطعت نفس المسار بسيارة سرعتها ثابتة تساوي $60Km/h$ لحتما ستكون مدة السفر أقل، بالضبط ستكون $10mn$ و نكون بذلك قد عرّفنا تمثيلا وسيطيا آخر لنفس المسار "المنحنى"

$$x:[0,;10mn]\to\mathbb{R}^3$$
$$t\mapsto x(t).$$

تمثيل وسيطي آخر مهم جدا يمكننا التعبير به عن مسار السفر. لنرفق كل نقطة من مسار السفر بالمسافة بينها و بين نقطة الانطلاق A، و بما أن طول المسار هو $6Km$ فيمكننا اعطاء تمثيل وسيطي طبيعي

$$x:[0;6Km]\to\mathbb{R}^3$$
$$s\mapsto x(s).$$

و الذي يرفق من أجل كل مسافة مقطوعة $s\in[0;6Km]$ النقطة $x(s)$ من المسار و التي تبعد مسافة s عن نقطة البداية A. هذا التمثيل الوسيطي لا يتأثر بسرعة وسيلة السفر، لذلك يسمى تمثيلا طبيعيا و سيأتي الحديث عنه مفصلا في الصفحات القادمة.

يمكنك أن تتصور أن أي منحنى في فضاء بُعده n هو كائن هندسي يمكن رسمه بنقطة تتحرك بمرور الوقت. بمعنى آخر ، لا يتطلب الأمر سوى إحداثية واحدة لوصفها و تحديد موضعها هي الوقت. لهذا نقول عن المنحني أن بُعده 1.

في هذا الفصل، نسلط الضوء على المنحنيات في $\mathbb{R}^n$ و على وجه الخصوص $\mathbb{R}^3$. ندرس التمثيل الوسيطي المنتظم لمنحنى و المسافة القوسية و علاقتها بالتمثيل الوسيطي و نقدّم المعلم المتحرك (معلم فريني) بكل تفصيل.

1.1.2 التمثيل الوسيطي المنتظم لمنحنى

تعريف 7.1.2. لتكن

$$x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto x(t) = \big(x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)\big)$$

دالة شعاعية معرّفة على المجال I من $\mathbb{R}$. نقول عن x أنها تمثيل وسيطي منتظم للمنحنى (C) إذا تحقق الشرطان التاليان:

- أن تكون x من الصنف $\mathcal{C}^1$ على المجال I.
- أن تكون $x'(t) \neq 0$ من أجل كل $t \in I$.

المتغير الحقيقي t يسمى وسيطا.

الشرط الثاني يعني توجد على الأقل مركبة واحدة $x_i'(t)$ لا تنعدم من أجل كل قيم t من I.

ملاحظة 3.1.2. إذا اخترنا أساسا للفضاء $\mathbb{E}^n$ و ليكن $\{\,\mathrm{e}_i\}_{1\leq i\leq n}$ يمكننا التعبير عن x بـ

$$x = x^1(t)\,\mathrm{e}_1 + x^2(t)\,\mathrm{e}_2 + ... + x^n(t)\,\mathrm{e}_n.$$

مثال 0.1.2. نعتبر التمثيل الوسيطي التالي

$$x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (r\cos t; r\sin t), \qquad r > 0.$$

x هي من الصنف $\mathcal{C}^1$ لأن الدالتين المثلثيتين cos و sin هما من الصنف $\mathcal{C}^1$ على المجال$I = [0, 2\pi]$، بالإضافة الى أن

$$x'(t) = (-r\sin t; r\cos t),$$
$$\|x'(t)\| = r \neq 0, \qquad \forall t \in [0; 2\pi],$$

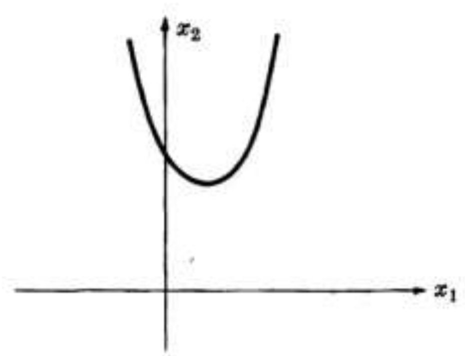
و منه x هي تمثيل وسيطي منتظم. و زيادة على ذلك

$$\begin{aligned} x([0;2\pi]) &= C(0,r) \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=r^2\}. \end{aligned}$$

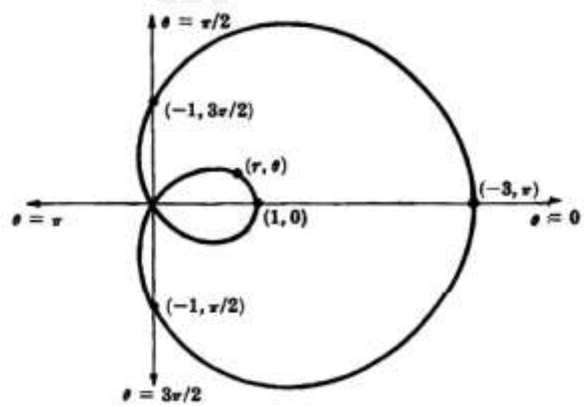
مثال 0.1.2. الدالة الشعاعية

$$x=(t+1)\,\mathrm{e}_1+(t^2+3)\,\mathrm{e}_2,\qquad -\infty<t<+\infty$$

هي تمثيل وسيطي منتظم، لأن $x'=\mathrm{e}_1+2t\,\mathrm{e}_2$ هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ و $x'\neq 0$ من أجل كل $t\in\mathbb{R}$.
يعطى المنحنى المقصود بهذا التمثيل الوسيطي بالشكل (1.2)



الشكل 1.2



الشكل 2.2

مثال 0.1.2. المنحنى (أنظر الشكل 2.2) و الذي معادلته معطاة بالإحداثيات القطبية كمايلي

$$r=2\cos\theta-1,\qquad 0\leq\theta\leq 2\pi,$$

العلاقة بين الإحداثيات القطبية و الإحداثيات الديكارتية معطاة كمايلي

$$x_1=(2\cos\theta-1)\cos\theta,\qquad x_2=(2\cos\theta-1)\sin\theta,\qquad 0\leq\theta\leq 2\pi,$$

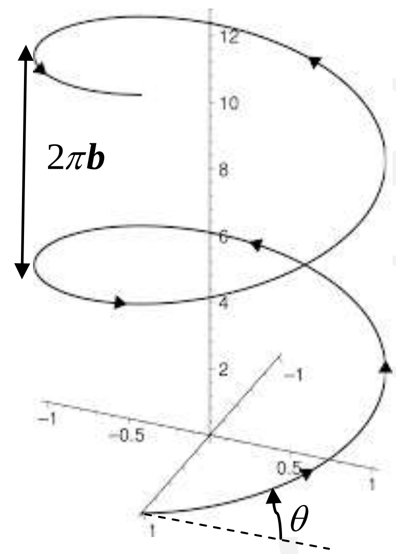
هذا التمثيل الوسيطي هو منتظم باعتبار أن

$$x'=\sin\theta(-4\cos\theta+1)\,\mathrm{e}_1+(4\cos 2\theta-\cos\theta)\,\mathrm{e}_2$$

هي دالة شعاعية مستمرة و كذلك يمكن أن نتأكد من أن $\|x'\|=\sqrt{5-4\cos\theta}\neq 0$ من أجل كل $\theta\in[0,2\pi]$.

مثال 0.1.2. سنورد هنا مثالا عن منحنى شهير، يتعلق الأمر بالمنحني **الحلزوني الدائري** و هو منحنى مرسوم على اسطوانة قائمة (أنظر الشكل المقابل). إذا كان نصف قطر الإسطوانة r و قيس الزاوية θ المبيّن في الشكل هو الوسيط، فإن التمثيل الوسيطي المنتظم للمنحني الحلزوني الدائري يعطى بالشكل التالي

$$x_1 = r\cos\theta,\ x_2 = r\sin\theta,\ x_3 = b\theta, \quad b \neq 0.$$



مثال 0.1.2. الدالة الشعاعية

$$x = (t^2+1)\ \mathrm{e}_1 + (t^3+3)\ \mathrm{e}_2 + t^4\ \mathrm{e}_3, \qquad -\infty < t < +\infty$$

ليست تمثيلا وسيطيا منتظما، لأن $x' = 2t\ \mathrm{e}_1 + 3t^2\ \mathrm{e}_2 + 4t^3\ \mathrm{e}_3$ هي دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ ولكن $x'(0) = 0$.

مبرهنة 3.1.2. ليكن $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ تمثيلا وسيطيا منتظما لمنحن على I، من أجل كل نقطة $t_0 \in I$ يوجد جوار مفتوح لـ t_0 فيه يكون x تطبيقا تقابليا.

البرهان 1.1.2. بما أن x هو تمثيل وسيطي منتظم فإن $x'(t_0) \neq 0$ ، أي يوجد $i \in \{1, 2, ..., n\}$ بحيث $x_i'(t_0) \neq 0$.
و بما أن $x_i'(t_0)$ هي دالة مستمرة عند t_0 إذن، يوجد $V \in v(t_0)$ (جوار t_0)، فيه يكون $x_i'(t_0) \neq 0$.
نعتبر $t_1, t_2 \in v(t_0)$ بحيث $t_1 \neq t_2$ و $x(t_1) \neq x(t_2)$، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية، يوجد $t_1 \leq r \leq t_2$ حيث

$$0 = \frac{x_i(t_1) - x_i(t_2)}{t_1 - t_2} = x_i'(r),$$

و هذا تناقض باعتبار $x'(t) \neq 0$ في V، إذن x هي تطبيق تقابلي في V.

مثال 0.1.2. الدالة
$$x = a\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + a\sin\theta\ \mathrm{e}_2$$
مع $a \neq 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$ هي تمثيل وسيطي منتظم لدائرة مركزها المبدأ $O(0,0)$ و نصف قطرها $|a|$.
لدينا
$$\left|\frac{dx}{d\theta}\right| = |-a\sin\theta\ \mathrm{e}_1 + a\cos\theta\ \mathrm{e}_2| = |a| \neq 0.$$
لاحظ أن كل نقطة من هذا التمثيل الوسيطي هي نقطة مضاعفة (دورية). بحيث من أجل كل θ_0،
$$x = a\cos(\theta_0 + 2\pi)\ \mathrm{e}_1 + a\sin(\theta_0 + 2\pi)\ \mathrm{e}_2 = a\cos\theta_0\ \mathrm{e}_1 + a\sin\theta_0\ \mathrm{e}_2$$
و بالتالي، اقتصار الدالة الشعاعية x على المجال $[\theta_0 - \pi; \theta_0 + \pi[$ يجعلها تطبيقا تقابليا.

2.1.2 تغيير الوسيط

تعريف 8.1.2. الدالة الحقيقية $t = t(\theta)$ المعرّفة على المجال I_θ تسمى تغييرا وسيطيا مقبولا على I_θ إذا تحقق مايلي

- أن تكون $t(\theta)$ من الصنف $\mathcal{C}^1$ على المجال I_θ.
- أن تكون $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$ من أجل كل $\theta \in I_\theta$.

مبرهنة 4.1.2. إذا كان $t = t(\theta)$ هو تغييرا وسيطيا مقبولا هلى I_θ فإنه تطبيق تقابلي من I_θ نحو $I_t = t(I_\theta)$ و تطبيقه العكسي هو أيضا تغيير وسيطي مقبول.

البرهان 2.1.2. بما أن $\frac{dt}{d\theta}$ هي دالة مستمرة على I_θ، و كذلك $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$ يبيّن أن $\frac{dt}{d\theta} > 0$ أو $\frac{dt}{d\theta} < 0$ أي الدالة $t(\theta)$ هي دالة متزايدة تماما أو متناقصة تماما و بالتالي في كلتا الحالتين هي تطبيق تقابلي. عكسيا، الدالة $\theta = \theta(t)$ هي دالة من الصنف $\mathcal{C}^1$ و متزايدة باعتبار $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}}$ و بالتالي $\theta = \theta(t)$ هو أيضا تغييرا وسيطيا مقبولا.

مثال 0.1.2. الدالة
$$t = (b-a)\theta + a, \qquad 0 \leq \theta \leq 1, \qquad a < b,$$
هي تغيير وسيطي مقبول يحول $[0,1]$ الى $[a,b]$ و العكس
$$\theta = \frac{t-a}{b-a},$$
هو أيضا تغيير وسيطي مقبول.

تعريف 9.1.2. نقول عن التمثيل الوسيطي المنتظم

$$x = x(t), \qquad t \in I_t,$$

أنه يكافئ التمثيل الوسيطي المنتظم

$$x = \tilde{x}(\theta), \qquad \theta \in I_\theta,$$

إذا وُجد تغيير وسيطي مقبول $t = t(\theta)$ على I_θ بحيث

$$(1):\ t(I_\theta) = I_t, \qquad (2): x\big(t(\theta)\big) = \tilde{x}(\theta).$$

مثال 0.1.2. بإدراج التغيير الوسيطي المنتظم $\theta = t + 1$ مع $-1 \leqslant t \leqslant 2\pi - 1$ في التمثيل الوسيطي المنتظم

$$x_1 = (2\cos\theta - 1)\cos\theta, \qquad x_2 = (2\cos\theta - 1)\sin\theta \qquad\qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

المعطى في المثال (0.1.2)، ينتج التمثيل الوسيطي المنتظم المكافئ

$$x_1 = \big(2\cos(t{+}1){-}1\big)\cos(t{+}1), x_2 = \big(2\cos(t{+}1){-}1\big)\sin(t{+}1) \quad -1 \leq t \leq 2\pi{-}1,$$

مرّة أخرى، لو استعملنا التغيير الوسيطي المنتظم $\theta = -t$ مع $-2\pi \leqslant t \leqslant 0$ لحصلنا أيضا على تمثيل وسيطي منتظم مكافئ آخر.

تعريف 10.1.2. المنحنى المنتظم من الصنف $\mathcal{C}^k$ هو مجموعة التمثيلات الوسيطية المنتظمة من الصنف $\mathcal{C}^k$ بحيث كل تمثيلين و سيطين من هذه المجموعة هما متكافئان أي مرتبطان من خلال تغيير وسيطي مقبول من الصنف $\mathcal{C}^k$.

3.1.2 التمثيل الضمني لمنحنى

توجد طرق كثيرة لتمثيل منحنى في الفضاء $\mathbb{R}^3$. منها، اعتباره ناتج تقاطع سطحين إذا كانت معادلته

$$F_1(x_1, x_2, x_3) \equiv 0, \quad F_2(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$$

حيث الدالتان التفاضليتان F_1 و F_2 تمثلان سطحين في الفضاء الثلاثي.
إذا كان مثلا $J = det\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}\right) \neq 0$ فإنه يوجد منحنى له تمثيل وسيطي على النحو التالي

$$x_1 = x_1(x_3), \quad x_2 = x_2(x_3), \quad x_3 = x_3.$$

أي أنه تمّ حل المعادلتين $F_1 = 0$ و $F_2 = 0$ باعتبار x_3 معلوم يؤُخذ كوسيط. و نفس الشيئ لو اعتبرنا x_2 أو x_1 وسيطا.

مثال 0.1.2. ليكن (C) منحنى من $\mathbb{R}^3$ معرّف كمايلي

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = x - z^2 = 0 \\ F_2(x,y,z) = xz - y^2 = 0 \end{cases}$$

لدينا

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & -2y \end{pmatrix},$$

و بما أن $det(J) = -z \neq 0$ فإن

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{z} = t^3 \\ \\ y = z^2 = t^2 \end{cases}$$

و بالتالي التمثيل الوسيطي للمنحنى (C) هو

$$x(t) = \left(t^3, t^2, t\right) \qquad t \in \mathbb{R}^*.$$

4.1.2 طول قوس المنحنى

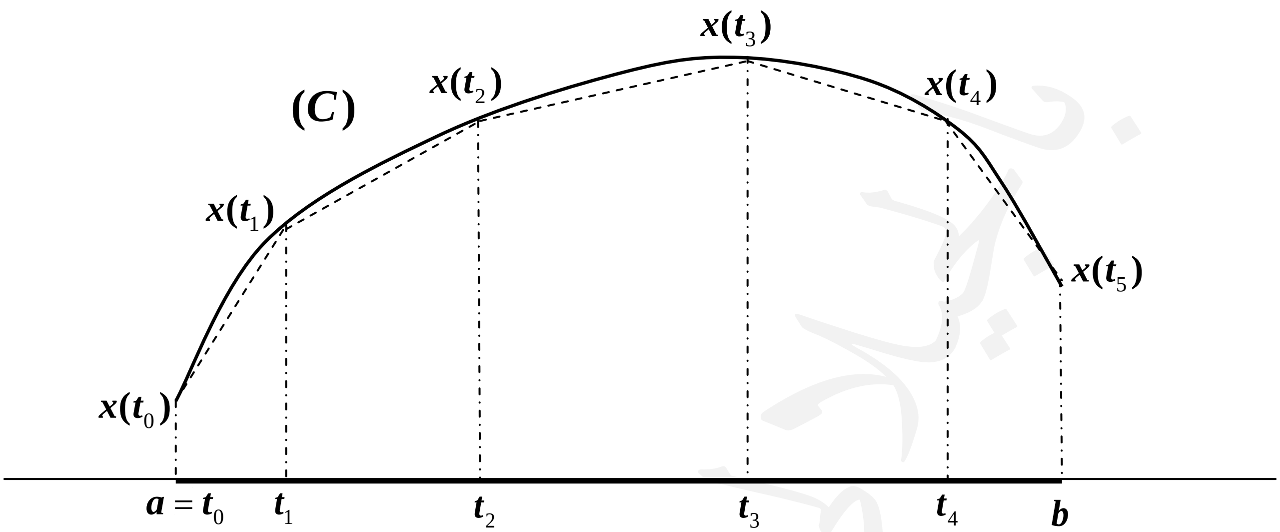
تعريف 11.1.2. نعتبر $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ تمثيلا وسيطيا منتظما لمنحنى (C). و نعتبر التجزئة النونية للمجال $[a,b]$ باستعمال النقط $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$.
يعرّف طول القوس L بأنه طول الخط المنكسر الواصل بين النقط $x(t_i)$ عندما يؤول طول أكبر قطعة مستقيمة الى الصفر و هذا يكافئ

$$L = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|x(t_i) - x(t_{i-1})\| \tag{2.1}$$

حيث

$$\delta = Max(t_1 - t_0, t_2 - t_1, ..., t_n - t_{n-1}).$$

عندما تكون النهاية موجودة نقول عن المنحنى أنه قابل للتعديل (أنظر الشكل التالي)



إذا كانت الدوال $x_i(t) \in (C^1)$ قابلة للتفاضل، فباستخدام نظريات التكامل و مجموع ريمان نحصل على

$$L = \int_a^b \|x'(t)\| dt \tag{2.2}$$

مع

$$\|x'(t)\| = \sqrt{< x'(t), x'(t) >} = \sqrt{(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + ... + (x'_n)^2}.$$

من أجل $t = b$ يكون طول قوس المنحنى عبارة عن دالة ذات المتغير t و لتكن $s = s(t)$ حيث

$$s(t) = \int_a^t \|x'(t)\| dt \tag{2.3}$$

و بالتفاضل بالنسبة لـ t نحصل على

$$\frac{ds}{dt} = \|x'(t)\| > 0 \tag{2.4}$$

أي أن $s(t)$ هي دالة متزايدة تماما على المجال $[a, t]$.

مثال 0.1.2. أوجد طول قوس المنحنى الحلزوني الدائري المعرّف بـ:

$$x_1 = \cos t,\ x_2 = \sin t,\ x_3 = t$$

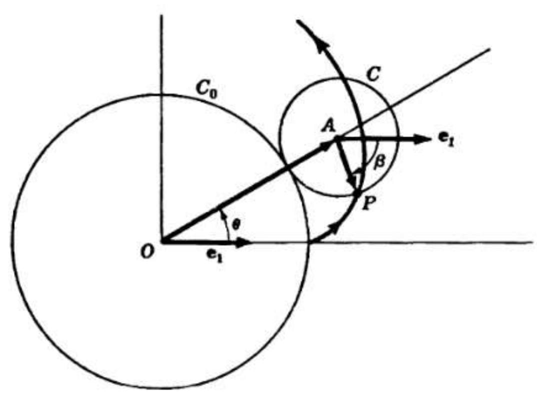
من $t=0$ الى أي نقطة اختيارية t ثم أكتب التمثيل الوسيطي المعطى بدلالة القوس s.
الحل:
لدينا

$$s=\int_0^t \sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}dt=\sqrt{2}t$$

و على هذا الأساس يمكن استبدال الوسيط t بالوسيط الجديد s و الذي نسميه **وسيط طبيعي** (إحداثية منحنية) حيث $t=\frac{s}{\sqrt{2}}$ و التمثيل الوسيطي الطبيعي يكون

$$x_1=\cos\frac{s}{\sqrt{2}},\ x_2=\sin\frac{s}{\sqrt{2}},\ x_3=\frac{s}{\sqrt{2}}.$$

تمرين 1. الدويري الخارجي هو منحنى مستوي مولّد بحركة نقطة ثابتة p على دائرة تتدحرج خارجيا على دائرة أخرى كما يوضحه الشكل التالي



1°) أوجد تمثيلا وسيطيا مناسبا.
2°) أحسب طول قوس المنحنى.
الحل
1°) إعتماد على الشكل لدينا

$$x=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP},$$

لكن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= |OA|\cos\theta\,\mathrm{e}_1+|OA|\sin\theta\,\mathrm{e}_2\\ &= (r_0+r)\big(\cos\theta\,\mathrm{e}_1+\sin\theta\,\mathrm{e}_2\big),\end{aligned}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= |AP|\cos\beta\,\mathrm{e}_1 + |AP|\sin\beta\,\mathrm{e}_2\\ &= r\left(\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta-\pi\right)\,\mathrm{e}_1+\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta-\pi\right)\,\mathrm{e}_2\right)\\ &= -r\left(\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\,\mathrm{e}_1+\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\,\mathrm{e}_2\right)\end{aligned}$$

باعتبار

$$\beta=\widehat{OAP}+\theta-\pi=\theta\frac{r_0}{r}+\theta-\pi=\frac{r_0+r}{r}\theta-\pi,$$

و بالتالي

$$x=\left[(r_0+r)\cos\theta-r\cos\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right]e_1+\left[(r_0+r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{r_0+r}{r}\theta\right)\right]e_2.$$

2°)

$$L=4\frac{(r_0+r)r}{r_0}\left(\cos\left(\frac{r_0}{2r}\theta\right)-1\right).$$

مبرهنة 5.1.2. نقول عن تمثيل وسيطي منتظم أنه طبيعي إذا وفقط إذا كان $\|x'(t)\|=1$.

البرهان 3.1.2. نفرض أن t هو طول القوس للمنحنى (C) الذي تمثيله الوسيطي $x=x(t)$ انطلاقا من قيمة اختيارية ثابتة t_0 أي لدينا $s=t-t_0$. باستخدام العلاقة (2.4) نحصل على

$$\|x'(t)\|=\|\frac{dx}{dt}\|=\|\frac{ds}{dt}\|=1.$$

و العكس، إذا كان $\|\frac{dx}{dt}\|=1$ فباستعمال (2.4) ينتج $ds=dt$ أي أن

$$s=\int_{t_0}^{t}dt=t-t_0$$

تمرين 2. برهن أن

$$x=\frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\mathrm{e}_1+\frac{1}{2\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)}\mathrm{e}_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(s+\sqrt{s^2+1}\right)\mathrm{e}_3,$$

هو تمثيل وسيطي طبيعي.

الحل

نضع $t = s + \sqrt{s^2+1}$، يصبح

$$x = \frac{1}{2}t\mathrm{e}_1 + \frac{1}{2t}\mathrm{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\log t\mathrm{e}_3,$$

و لدينا

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \left(\frac{1}{2}t\mathrm{e}_1 + \frac{1}{2t}\mathrm{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\log t\mathrm{e}_3\right)\left(1 + \frac{s}{\sqrt{s^2+1}}\right),$$

و ينتج

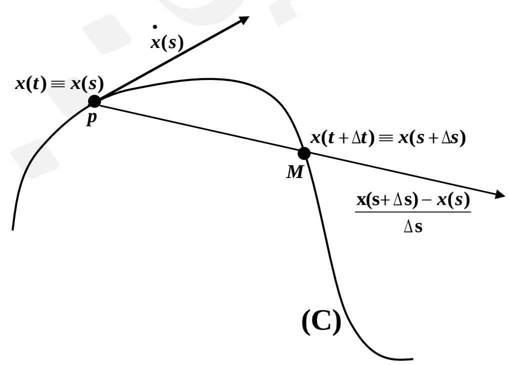
$$\|\frac{dx}{ds}\| = \|\frac{dx}{dt}\| \, \|\frac{dt}{ds}\| = 1.$$

2.2 المعلم الطبيعي المتحرك (معلم فريني)

نعتبر المنحني (C) المعرّف بالتمثيل الوسيطي المنتظم $x = x(t)$.

1.2.2 شعاع الوحدة المماس

نعلم أن المماس للمنحنى عند نقطة $p \in (C)$ يعرّف بانه الوضع النهائي لمستقيم يقطع المنحني في نقطتين p و نقطة أخرى M تتحرك لتؤول الى p (أنظر الشكل).



أي أن

$$\lim_{\triangle t\to 0}\frac{x(t+\triangle t)-x(t)}{\triangle t} = x'(t)$$

مع $\triangle t = t_M - t_p$. و هكذا يمكننا استنتاج المستقيم (D) الماس للمنحنى في النقطة p

$$y \in (D) \Leftrightarrow y - x(t) = \lambda\, x'(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

سنعتبر دوما الإتجاه الموجب للمماس هو إتجاه زيادة الإحداثية الطبيعية s.

يُعتبر $x'(t)$ شعاعا توجيهيا للمستقيم (D) و بالتالي $\frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}$ هو شعاع توجيهي طويلته تساوي 1.
من جهة أخرى، باستعمال (2.3) نستنتج أن $\frac{ds}{dt} = \|x'(t)\|$ و بالتالي

$$x'(t) \;=\; \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = \|x'(t)\|\frac{dx(t)}{ds}$$

أي أن

$$\frac{dx(t)}{ds} = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|}$$

نرمز للمقدار $\frac{dx}{ds}$ بالرمز $\dot{x}$ ينتج التعريف التالي

تعريف 12.2.2. نسمي **شعاع الوحدة المماس** (اختصارا شعاع المماس)، الشعاع $\boldsymbol{T} = \dot{x}$ الماس للمنحنى و الذي طويلته تساوي 1.

بناء على ماسبق، لدينا

$$\mathbf{T} = \dot{x} = \frac{x'}{\|x'\|}.$$

مثال 2.2.2. رجوعا للمنحنى الحلزوني الدائري، لدينا

$$x = r\cos t\,\mathrm{e}_1 + r\sin t\,\mathrm{e}_2 + bt\,\mathrm{e}_3, \quad b \neq 0,$$

ينتج

$$x' = -r\sin t\,\mathrm{e}_1 + r\cos t\,\mathrm{e}_2 + b\,\mathrm{e}_3, \quad b \neq 0,$$

و كذلك

$$\|x'\| = \sqrt{r^2 + b^2}$$

إذن

$$\boldsymbol{T} = \frac{x'}{\|x'\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}\big(-r\sin t\,\mathrm{e}_1 + r\cos t\,\mathrm{e}_2 + b\,\mathrm{e}_3\big).$$

لاحظ أنه على طول المنحنى، يصنع شعاع المماس زاوية قيسها ثابت مع محور الرواقم x_3

$$\theta = \cos^{-1}(\boldsymbol{T}\cdot\mathrm{e}_3) = \cos^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{r^2+b^2}}\right).$$

2.2.2 شعاع التقوّس

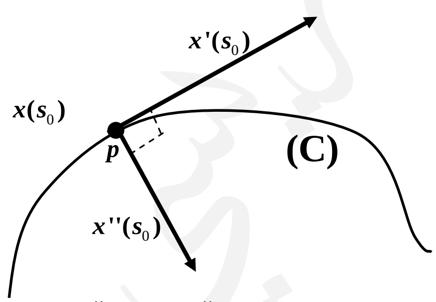
من الطبيعي أن نتساءل عن الإنحناءات و التقوّسات التي نراها على المنحنى. للإجابة عن هذا التساؤل، نعتبر $x(s)$ التمثيل الوسيطي الطبيعي للمنحنى (C) و نحسب النشر المحدود للدالة الشعاعية x من الرتبة الثانية، نجد

$$x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{1}{2}(s - s_0)^2 x''(s_0) + o\big((s - s_0)^2\big).$$

لاحظ أنه إذا كان $x''(s_0) = 0$ ينتج

$$x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0).$$

هندسيا، هذه المعادلة تعرّف مستقيما أما إذا كان $x''(s_0) \neq 0$ فالنشر المحدود يوضّح أن المنحنى ينجذب في اتجاه $x''(s_0)$. بمعنى آخر، الشعاع $x''(s_0)$ يعطي معلومات عن شكل المنحنى بجوار $x(s_0)$. بشكل حدسي، نلاحظ أنه كلما كانت قيمة $\|x''(s_0)\|$ أكبر و كلما كان تقوّس المنحنى أكبر مبتعدا عن خط المماس في هذه النقطة. في الواقع ، سوف يسمح لنا هذا المقدار الموجب (المعيار) بتحديد التقوّس (الانحناء).



$$\|x'(s_0)\| = 1$$
$$x'(s_0) \perp x''(s_0)$$

تعريف 13.2.2. نسمي **شعاع التقوّس** (أو شعاع الإنحناء)، الشعاع العمودي على شعاع المماس $\boldsymbol{T}$ و الذي سنرمز له بـ κ و المعرّف كمايلي

$$\kappa = \ddot{x} = \dot{\boldsymbol{T}} = \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{T}}{dt} / \frac{ds}{dt} = \frac{\boldsymbol{T}'}{\|x'\|}.$$

بالإضافة الى ذلك، تسمى طويلة الشعاع κ تقوّس المنحنى سنرمز لها بالرمز ρ و مقلوبها $R = \frac{1}{\rho}$ يسمى نصف قطر التقوّس.

مثال 2.2.2. في المثال السابق (المنحنى الحلزوني الدائري)، لدينا

$$x = r\cos t\,\mathrm{e}_1 + r\sin t\,\mathrm{e}_2 + bt\,\mathrm{e}_3, \quad b \neq 0, \qquad \|x'\| = \sqrt{r^2+b^2}$$

و

$$\boldsymbol{T} = \frac{x'}{\|x'\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+b^2}}\big(-r\sin t\,\mathrm{e}_1 + r\cos t\,\mathrm{e}_2 + b\,\mathrm{e}_3\big).$$

فينتج

$$\kappa = \frac{\boldsymbol{T}'}{\|x'\|} = \frac{-r}{\sqrt{r^2+b^2}}\big(\cos t\,\mathrm{e}_1 + \sin t\,\mathrm{e}_2\big).$$

$$\rho = \|\kappa\| = \frac{r}{\sqrt{r^2+b^2}}, \qquad R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\sqrt{r^2+b^2}.$$

لاحظ أن شعاع التقوّس يوازي المستوي (x_1x_2) و تقوّس المنحنى دوما ثابت.

إذا كان التقوّس لمنحنى دوما معدوما أي $\rho = 0$ فإن $\dot{\mathbf{T}} = 0$ و باستعمال التكامل بالنسبة للوسيط الطبيعي s ينتج $\mathbf{T} = a \in \mathbb{R}^*$ و بما أن $\mathbf{T} = \dot{x}$ فبالتكامل مرّة أخرى نجد

$$x = as + b, \qquad b \in \mathbb{R}$$

و هذا يعني أن المنحنى (C) هو عبارة عن مستقيم يشمل النقطة b و يوازي a. عكسيا، إذا كان (C) هو مستقيم معرّف بالمعادلة

$$x = at + b, \qquad a \neq 0$$

فإن

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{dt}\Big/\frac{ds}{dt} = \frac{a}{|a|} \in \mathbb{R}, \qquad \rho = \|\dot{\mathbf{T}}\| = 0$$

و منه المبرهنة التالية

مبرهنة 6.2.2. كل منحنى منتظم من الصنف C^2 هو خط مستقيم إذا و فقط إذا كان تقوّسه معدوم دوما.

قضية 1.2.2. إذا كانت $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^2$، فإن $x(t) = \big(t, f(t)\big)$ هو تمثيل وسيطي منتظم و زيادة على ذلك يعطى التقوّس بالعلاقة التالية

$$\rho = \frac{|f''|}{\big(1+f'^2\big)^{3/2}}.$$

قضية 2.2.2. إذا كانت φ و ψ دالتين من الصنف $\mathcal{C}^2$ على $I \subset \mathbb{R}$، فإن $x(t) = \big(\varphi(t), \psi(t)\big)$ هو تمثيل وسيطي منتظم إذا و فقط إذا كان

$$\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$$

و زيادة على ذلك يعطى التقوّس بالعلاقة التالية

$$\rho = \frac{|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''|}{\big(\varphi'^2 + \psi'^2\big)^{3/2}}.$$

مبرهنة 7.2.2. إذا كان $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ هو تمثيل وسيطي منتظم فإن تقوّس المنحني يعطى بالعلاقة التالية

$$\rho = \frac{\|x' \wedge x''\|}{\|x'\|^3}.$$

البرهان 4.2.2. لدينا

$$\dot{x} = \frac{x'}{\|x'\|} \Leftrightarrow x' = \|x'\|.\dot{x}$$

بالاشتقاق ينتج

$$\begin{aligned} x'' &= \|x'\|'\dot{x} + \|x'\|\dot{x}' \\ &= \|x'\|'\dot{x} + \|x'\|\frac{d\dot{x}}{dt} \\ &= \|x'\|'\dot{x} + \|x'\|\frac{d\dot{x}}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= \|x'\|'\dot{x} + \|x'\|^2\ddot{x} \end{aligned}$$

و بالتالي

$$\begin{aligned} x' \wedge x'' &= (\|x'\|.\dot{x}) \wedge \big(\|x'\|'\dot{x} + \|x'\|^2\ddot{x}\big) \\ &= \|x'\|^3\dot{x} \wedge \ddot{x} \\ &\Rightarrow \|x' \wedge x''\| = \|x'\|^3\big(\|\dot{x}\|.\|\ddot{x}\|.\sin\frac{\pi}{2}\big) \\ &\Rightarrow \|x' \wedge x''\| = \|x'\|^3\|\ddot{x}\| \\ &\Rightarrow \rho = \|\ddot{x}\| = \frac{\|x' \wedge x''\|}{\|x'\|^3}. \end{aligned}$$

3.2.2 الشعاع العمودي الأساسي

ليكن $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ تمثيلا وسيطيا منتظما للمنحني (C) و $\mathbf{T}$ شعاع المماس في النقطة $x(t_0)$. إذن، يوجد مستو وحيد P يشمل النقطة $x(t_0)$ و ناظمه $\mathbf{T}$. نسمي هذا المستوي بالمستوي العمودي الأساسي و يعرّف بالعلاقة التالية

$$y \in (P) \Leftrightarrow \big(y - x(t_0)\big) \cdot x'(t_0) = 0.$$

من الضروري أن تلاحظ أن المستوي (P) يشمل شعاع التقوّس κ و منه التعريف التالي

تعريف 14.2.2. ليكن (C) منحنى من الصنف $\mathcal{C}^2$ بحيث شعاع التقوّس κ يتغير بشكل مستمر عليه. نسمي **الشعاع العمودي الأساسي** (اختصارا الشعاع الأساسي)، شعاع الوحدة $\boldsymbol{N}$ المعرّف بالعلاقة

$$\boldsymbol{N} = \frac{\kappa}{\|\kappa\|}$$

المستقيم القاطع للمنحنى في النقطة p و الموازي للشعاع العمودي الأساسي $\mathbf{N}$ يسمى المستقيم العمودي الأساسي للمنحنى (C) في النقطة p و يعرّف بالعلاقة التالية

$$y = p + \lambda \mathbf{N}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

أما المستوي القاطع للمنحنى في النقطة p و الموازي للشعاعين $\mathbf{T}$ و $\mathbf{B}$ يسمى المستوي اللاصق للمنحني (C) في النقطة p معادلته تعرف بالجداء السلمي الثلاثي

$$[y - x, \mathbf{T}, \mathbf{N}] = (y - x) \cdot \mathbf{T} \wedge \mathbf{B} = 0. \tag{2.6}$$

باعتبار $\mathbf{T} = \dot{x}$ و $\dot{\mathbf{T}} = \ddot{x}$ فعند كل نقطة فيها $\kappa \neq 0$، معادلة المستوي المقوّم تعطى بالشكل

$$[y - x, \dot{x}, \ddot{x}] = 0. \tag{2.7}$$

تمرين 3. أوجد معادلة المستوي العمودي الأساسي و معادلة المماس للمنحني

$$x(t) = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}; \frac{\sin t}{\sqrt{2}}; \cos t\right)$$

عند النقطة p الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{4}$ ثمّ اوجد الشعاع العمودي الأساسي $\boldsymbol{N}$ عند p أيضا.

الحل:

نعلم أن

$$x'(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}; \frac{\cos t}{\sqrt{2}}; -\sin t\right), \qquad \|x'(t)\| = 1,$$

$$T = \frac{x'(t)}{\|x'(t)\|} = x'(t), \qquad \kappa = \frac{T'}{\|x'(t)\|} = x''(t) = \left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}}; \frac{-\sin t}{\sqrt{2}}; -\cos t\right)$$

و بما أن $\boldsymbol{T} = \frac{x'}{\|x'\|}$، فإنه عند النقطة p الموافقة لـ $t = \frac{\pi}{4}$ يكون

$$p = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad \boldsymbol{T} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم المماس للمنحنى في النقطة p هو

$$y = x(t_0) + \lambda x'(t_0) \Leftrightarrow y = p + \lambda T$$

مع λ وسيط حقيقي هذا ما يكافئ

$$x_1 = \frac{\lambda + 1}{2}; \quad x_2 = \frac{\lambda + 1}{2}; \quad x_3 = \frac{1 - \lambda}{\sqrt{2}}.$$

معادلة المستوي العمودي (مستوي عمودي على المنحنى عند النقطة $p = x\left(\frac{\pi}{4}\right)$) تعطى بـ

$$< y - p, \boldsymbol{T} >= 0 \Leftrightarrow y_1 + y_2 - \sqrt{2}y_3 = 0.$$

واضح أن ناظمي المستوي العمودي هو $(1; 1; -\sqrt{2})$ و هو يوازي شعاع الوحدة $\boldsymbol{T}$.

بالنسبة للشعاع العمودي الأساسي $\boldsymbol{N}$ نعلم أن

$$\boldsymbol{N} = \frac{\kappa}{\|\kappa\|} = \kappa(p) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

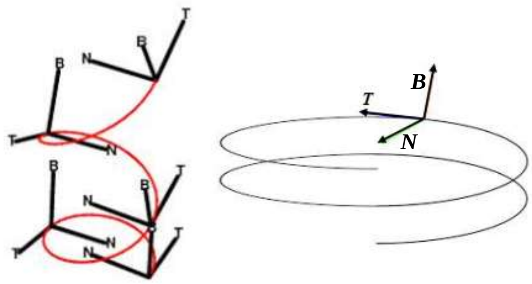
4.2.2 الشعاع العمودي الثانوي

ليكن $x(s)$ تمثيل وسيطي طبيعي للمنحنى (C) من الصنف C^2. لقد عرّفنا عند كل نقطة من المنحنى شعاعي وحدة هامين الشعاع المماس و الشعاع العمودي الأساسي. باستعمال الجُداء الشعاعي الخارجي يمكننا تعريف شعاع جديد.

تعريف 15.2.2. نسمي الشعاع العمودي الثانوي و نرمز له بالرمز $\boldsymbol{B}$ شعاع الوحدة المعرّف بالعلاقة

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \wedge \boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}.$$

بداية يجب الإنتباه أن الشعاع العمودي الثانوي عمودي على شعاع المماس و الشعاع العمودي الأساسي و باعتبار الأشعة الثلاثة هي أشعة وحدة (طويلة كل منها يساوي 1) فيمكن القول أن الثلاثية $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ أساسا متعامدا و متجانسا متحركا على المنحنى. هذا الأساس يسمى المعلم المتحرك أو معلم فريني نسبة الى أول من تطرق له (جون فريدريك فريني 1816-1900).



المستقيم القاطع للمنحنى في النقطة p و الموازي للشعاع العمودي الثانوي $\mathbf{B}$ يسمى المستقيم العمودي الثانوي للمنحنى (C) في النقطة p و يعرّف بالعلاقة التالية

$$y = p + \lambda\mathbf{B}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

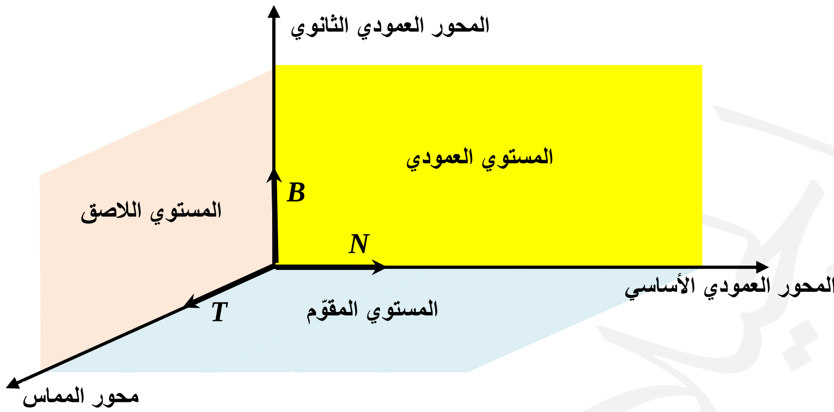
المستوي القاطع للمنحنى في النقطة p و الموازي للشعاعين $\mathbf{T}$ و $\mathbf{B}$ يسمى المستوي المقوّم (أو المعدّل) للمنحني (C) في النقطة p و يعرّف بالعلاقة التالية

$$(y - x) \cdot \mathbf{N} = 0. \tag{2.9}$$

ختاما لهذه الفقرة، نستطيع أن نقول أنه في كل نقطة p من المنحنى (C) في $\mathbb{R}^3$ لدينا ثلاثة محاور و ثلاثة مستويات مميّزة هي:

محور المماس	$y = p + \lambda\mathbf{T}$
محور العمود الأساسي	$y = p + \lambda\mathbf{N}$
محور العمود الثانوي	$y = p + \lambda\mathbf{B}$
المستوي العمودي	$(y - p) \cdot \mathbf{T} = 0$
المستوي المقوّم	$(y - p) \cdot \mathbf{N} = 0$
المستوي اللاصق	$(y - p) \cdot \mathbf{B} = 0$

و نبيّنها في الشكل التالي:



5.2.2 الفتل

نعتبر $x = x(s)$ تمثيلا طبيعيا لمنحنى (C) من الصنف $\mathcal{C}^1$. بمفاضلة العلاقة $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s)$ نحصل على

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}}(s) &= \dot{\mathbf{T}}(s) \wedge \mathbf{N}(s) + \mathbf{T}(s) \wedge \dot{\mathbf{N}}(s) \\ &= \rho(s)\big(\mathbf{N}(s) \wedge \mathbf{N}(s)\big) + \mathbf{T}(s) \wedge \dot{\mathbf{N}}(s) \\ &= \mathbf{T}(s) \wedge \dot{\mathbf{N}}(s), \end{aligned} \tag{2.10}$$

بما أن $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ ينتج $\frac{d}{ds}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) = 2\dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{N} = 0$ و هذا يعني أن الشعاع $\dot{\mathbf{N}}$ عمودي على $\mathbf{N}$ أي يوازي المستوي المقوّم (المولد بالشعاعين $\mathbf{T}$ و $\mathbf{B}$) و نستنتج أن الشعاع $\dot{\mathbf{N}}$ يكتب بمزج خطي للشعاعين $\mathbf{T}$ و $\mathbf{B}$. نضع

$$\dot{\mathbf{N}}(s) = \mu(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)$$

بالتعويض في المعادلة (2.10) ينتج

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}}(s) &= \mathbf{T}(s) \wedge \big(\mu(s)\mathbf{T}(s) + \tau(s)\mathbf{B}(s)\big) \\ &= \tau(s)\big(\mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{B}(s)\big) \\ &= -\tau(s)\mathbf{N}(s) \end{aligned} \tag{2.11}$$

طبعا، باستعمال المعلم المتحرك اليميني (عكس عقارب الساعة) $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ أي $\mathbf{T} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{N}$

تعريف 16.2.2. نسمي الدالة المستمرة $\tau(s)$ المعرّفة في العلاقة (2.11) **فتل** المنحني و تسمى أيضا التقوّس الثاني للمنحني.

ملاحظة 4.2.2.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{B}}(s) = -\tau(s)\boldsymbol{N}(s) \;&\Leftrightarrow\; \dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) = -\tau(s)\boldsymbol{N}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)\\ &\Leftrightarrow\; \tau(s) = -\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) \qquad (2.12)\end{aligned}$$

خواص 1.2.2. دالة الفتل τ هي خاصية ذاتية للمنحنى، لا تتأثر بإتجاه الشعاع $\boldsymbol{N}$ و لا باتجاه المنحنى.

البرهان 5.2.2. نفرض أن $\tilde{\boldsymbol{N}} = -\boldsymbol{N}$ إذن

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}\wedge\tilde{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{T}\wedge(-\boldsymbol{N}) = -\boldsymbol{B}$$

و بالتالي

$$\tilde{\tau} = -\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\tilde{\boldsymbol{N}} = -(-\dot{\boldsymbol{B}})\cdot(-\boldsymbol{N}) = -\dot{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{N} = \tau.$$

بالنسبة للخاصية الثانية، نفرض أن

$$\tilde{s} = -s + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

إذن $\tilde{\boldsymbol{T}} = -\boldsymbol{T}$ و منه

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{T}}\wedge\boldsymbol{N} = -(\boldsymbol{T}\wedge\boldsymbol{N}) = -\boldsymbol{B}$$

و كذلك

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{B}}}{d\tilde{s}} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{B}}}{ds}\frac{ds}{d\tilde{s}} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}(-1) = \frac{d\boldsymbol{B}}{ds}$$

و بالتالي، نحصل أيضا على

$$\tilde{\tau} = -\frac{d\tilde{\boldsymbol{B}}}{d\tilde{s}}\cdot\boldsymbol{N} = -\frac{d\boldsymbol{B}}{ds}\cdot\boldsymbol{N} = \tau.$$

جملة سيري-فريني

لدينا

$$\begin{aligned}\mathbf{N} = \mathbf{B}\wedge\mathbf{T} \Rightarrow \dot{\mathbf{N}} &= \dot{\mathbf{B}}\wedge\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{B}\wedge\dot{\mathbf{T}}\\ &= -\tau\mathbf{N}\wedge\mathbf{T} + \rho\mathbf{B}\wedge\mathbf{N}\\ &= -\rho\mathbf{T} + \tau\mathbf{B},\end{aligned}$$

و بالتالي من أجل كل تمثيل وسيطي طبيعي $x = x(s)$ لدينا العلاقات التالية

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{T}} = \rho\,\mathbf{N}\\ \dot{\mathbf{N}} = -\rho\,\mathbf{T} + \tau\,\mathbf{B}\\ \dot{\mathbf{B}} = -\tau\mathbf{N}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\dot{\mathbf{T}}\\ \dot{\mathbf{N}}\\ \dot{\mathbf{B}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \rho & 0\\ -\rho & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

هذه الجملة تسمى جملة سيري-فريني.

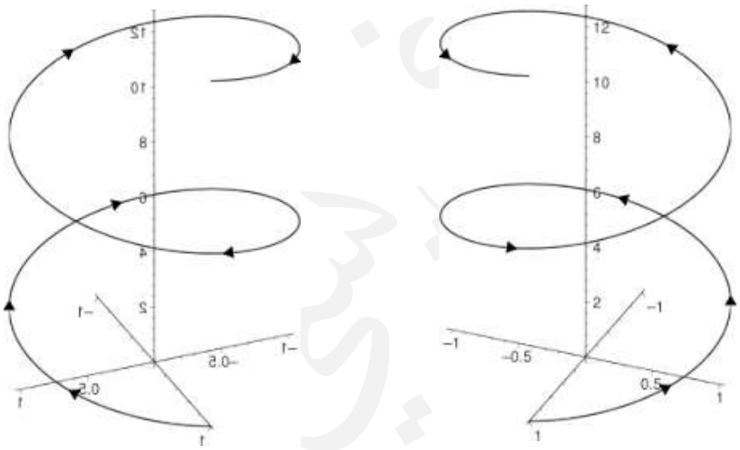
تمرين 4. نعتبر r و a عددين حقيقيين. و ليكن (C) منحنى من الفضاء معرف بـ:

$$x=\big(r\cos t, r\sin t, at\big).$$

1°) أوجد تمثيلا طبيعيا للمنحنى
2°) إعط معلم سيري-فريني $(\dot{\boldsymbol{T}},\dot{\boldsymbol{N}},\dot{\boldsymbol{B}})$.
3°) أحسب تقوّس المنحنى ρ_a عند كل نقطة منه. ماذا تلاحظ؟
4°) أحسب فتل المنحنى τ_a عند كل نقطة منه. ماذا تلاحظ؟
5°) أحسب النهايات

$$\lim_{a\to 0}\rho_a \qquad et \qquad \lim_{a\to 0}\tau_a$$

ثم فسّر هندسيا النتائج.
الحل:
التمثيل الوسيطي المعطى هو تمثيل لمنحي حلزوني دائري



منحنى حلزوني دائري شِمالي $\tau>0$ منحنى حلزوني دائري يميني $\tau<0$

لدينا

$$x=\big(r\cos t, r\sin t, at\big).$$

ومنه

$$x'=\frac{dx}{dt}=\big(-r\sin t, r\cos t, a\big), \qquad \|x'\|=\sqrt{r^2+a^2}.$$

1°) إيجاد الوسيط الطبيعي s

$$s=\int_0^t\|x'\|dt=\int_0^t\sqrt{r^2+a^2}dt=t\sqrt{r^2+a^2},$$

و بالتالي التمثيل الوسيطي الطبيعي للمنحنى هو

$$y = x(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), r\sin\left(\frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}\right), \frac{as}{\sqrt{r^2+a^2}} \right)$$

2°) يتشكل معلم سيري-فريني من الأشعة $(\dot{\boldsymbol{T}}, \dot{\boldsymbol{N}}, \dot{\boldsymbol{B}})$
لدينا

$$\boldsymbol{T} = \dot{y} = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(-r\sin\theta, r\cos\theta, a\right), \qquad \theta = \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

و منه

$$\dot{\boldsymbol{T}} = \ddot{y} = \frac{1}{r^2+a^2}\left(-r\cos\theta, -r\sin\theta, 0\right), \qquad \theta = \frac{s}{\sqrt{r^2+a^2}}$$

و لدينا أيضا

$$\boldsymbol{N} = \frac{\ddot{y}}{\|\ddot{y}\|} = \left(-\cos\theta, -\sin\theta, 0\right), \quad \|\ddot{y}\| = \frac{r}{r^2+a^2}$$

فينتج

$$\dot{\boldsymbol{N}} = \frac{1}{r^2+a^2}\left(\sin\theta, -\cos\theta, 0\right),$$

و أخيرا

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\wedge\boldsymbol{N} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & a \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\left(a\sin\theta, -a\cos\theta, r\right),$$

فينتج

$$\dot{\mathbf{B}} = \frac{a}{r^2+a^2}\left(\cos\theta, \sin\theta, 0\right).$$

3°)

$$\rho_a = \|\ddot{y}\| = \frac{r}{r^2+a^2}.$$

و نلاحظ أن التقوّس ثابت (لا يتغير بتغيّر s).
4°)

$$\tau_a = -\dot{\mathbf{B}}\cdot\mathbf{N} = \frac{a}{r^2+a^2}.$$

و نلاحظ أن الفتل ثابت أيضا. 5°)

$$\lim_{a\to 0}\rho_a = \frac{1}{r}, \qquad \lim_{a\to 0}\tau_a = 0$$

نلاحظ أن التمثيل الوسيطي يؤول الى تمثيل وسيطي لدائرة لما a تؤول الى الصفر. و عليه، فالتقوس يؤول الى تقوّس الدائرة المعلوم $\frac{1}{r}$ و الفتل يؤول الى الصفر باعتبار منحنى الدائرة هو منحني مستو.

مبرهنة 8.2.2. نعتبر التمثيل الوسيطي الطبيعي $x(s)$ للمنحنى (C) في الفضاء $\mathbb{R}^3$. إذا كان التقوّس ρ موجبا تماما فإن إنعدام الفتل τ معناه أن المنحنى مستو (أي محتواً في مستوي).

البرهان 6.2.2. إذا كان $\tau = 0$ ينتج

$$\dot{\boldsymbol{B}} = -\tau \boldsymbol{N} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{B} = B_0$$

حيث B_0 شعاع ثابت. و منه

$$\frac{d}{ds}(x \cdot \boldsymbol{B}) = \frac{d}{ds}(x \cdot \boldsymbol{B}_0) = \dot{x} \cdot \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0$$

ذلك لأن $\boldsymbol{T} \perp \boldsymbol{B}$ إذن $x \cdot \boldsymbol{B} = c \in \mathbb{R}$ و هذا يعني أن المنحني مستوٍ.
عكسياً، بفرض المنحني مستوٍ ينتج

$$x \cdot \boldsymbol{B} = c, \qquad \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^3 - \{0\}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

إذن،

$$\frac{d}{ds}(x \cdot \boldsymbol{B}) = \dot{x} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

و منه

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{B}) = \dot{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \rho\, \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \ \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

فيكون

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{B}) = 0 \Rightarrow \dot{N} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow (-\rho \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow \tau = 0.$$

نختم هذه الفقرة بتقديم عبارة الفتل باستعمال التمثيل الوسيطي المنتظم غير طبيعي لمنحنى.

مبرهنة 9.2.2. نعتبر التمثيل الوسيطي المنتظم $x(t)$ للمنحنى (C) . عند كل نقطة من المنحنى يكون فيها التقوّس ρ غير معدوم، يعطى الفتل τ بالعبارة التالية

$$\tau = \frac{[x', x'', x''']}{|x' \wedge x''|^2}$$

البرهان 7.2.2. نعلم أن

$$\dot{x}=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}=x'\dot{t}, \qquad \ddot{x}=\frac{d}{ds}(x'\dot{t})=x'\ddot{t}+\dot{x}'\dot{t}=x'\ddot{t}+x''\dot{t}^2.$$

$$\dddot{x}=\frac{d\ddot{x}}{ds}=\frac{d}{ds}(x'\ddot{t}+x''\dot{t}^2)=x'\dddot{t}+3x''\dot{t}\ddot{t}+x'''\dot{t}^3.$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}
[\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}] &= \dot{x}\cdot(\ddot{x}\wedge\dddot{x})\\
&= (x'\dot{t})\cdot\big((x'\ddot{t}+x''\dot{t}^2)\wedge(x'\dddot{t}+3x''\dot{t}\ddot{t}+x'''\dot{t}^3)\big)\\
&= (x'\dot{t})\cdot\big(3\ddot{t}^{\,2}\dot{t}(x'\wedge x'')+\ddot{t}\dot{t}^3(x'\wedge x''')+\dddot{t}\dot{t}^2(x''\wedge x')+\dot{t}^5(x''\wedge x''')\big)\\
&= \dot{t}^2\ddot{t}^{\,2}[x',x',x'']+\ddot{t}\dot{t}^4[x',x',x'']+\dot{t}^3\dddot{t}[x',x'',x']+\dot{t}^6[x',x'',x'''],
\end{aligned}$$

و بما أن $[x',x',x'']=0$ ينتج

$$[\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}]=\dot{t}^6[x',x'',x''']$$

و باعتبار

$$\dot{t}=\frac{dt}{ds}=\frac{1}{ds/dt}=\frac{1}{|x'|}$$

نجد

$$[\dot{x},\ddot{x},\dddot{x}]=\frac{[x',x'',x''']}{|x'|^6}. \tag{2.13}$$

من جهة أخرى،

$$\begin{aligned}
\dddot{x} &= \frac{d}{ds}(\ddot{x})=\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\dot{\boldsymbol{T}}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}(\rho\boldsymbol{N})\right)=\dot{\rho}\boldsymbol{N}+\rho\dot{\boldsymbol{N}}\\
&= \dot{\rho}\boldsymbol{N}+\rho\frac{d}{ds}(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{T})=\dot{\rho}\boldsymbol{N}+\rho(\dot{\boldsymbol{B}}\wedge\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\wedge\dot{\boldsymbol{T}})\\
&= \dot{\rho}\boldsymbol{N}+\rho\big((-\tau\boldsymbol{N})\wedge\boldsymbol{T}+\boldsymbol{B}\wedge(\rho N)\big)\\
&= \dot{\rho}\boldsymbol{N}-\rho^2\boldsymbol{T}+\rho\,\tau\,\boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\ddot{x}\wedge\dddot{x} &= \dot{\boldsymbol{T}}\wedge\dddot{x}=\rho\,\boldsymbol{N}\wedge(\dot{\rho}\boldsymbol{N}-\rho^2\boldsymbol{T}+\rho\,\tau\,\boldsymbol{B})\\
&= \rho\,\dot{\rho}\,\boldsymbol{N}\wedge\boldsymbol{N}-\rho^3\,\boldsymbol{N}\wedge\boldsymbol{T}+\rho^2\,\tau\,\boldsymbol{N}\wedge\boldsymbol{B}\\
&= \rho^3\,\boldsymbol{B}+\rho^2\,\tau\,\boldsymbol{T}
\end{aligned}$$

فينتج مرّة أخرى

$$[\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}] = \dot{x} \cdot (\ddot{x} \wedge \dddot{x}) = \boldsymbol{T} \cdot (\ddot{x} \wedge \dddot{x}) = \rho^3 \, (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{B}) + \rho^2 \, \tau \, (\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}) = \rho^2 \, \tau. \quad (2.14)$$

بتعويض العلاقة (2.14) في العلاقة (2.13) مع توظيف المبرهنة (7.2.2) التي تنص على أن

$$\rho = \frac{\|x' \wedge x''\|}{\|x'\|^3}$$

نجد

$$\tau = \frac{[\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}]}{\rho^2} = \frac{[x', x'', x''']}{\rho^2 |x'|^6} = \frac{[x', x'', x''']}{|x' \wedge x''|^2}.$$

و هو المطلوب.

3.2 الدراسة الذاتية لمنحنى في الفضاء

أهم العلاقات التي رأيناها في الفصل الأول بالنسبة لمنحنى معرّف بتمثيل وسيطي طبيعي $x = x(s)$ هي على النحو التالي:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \rho \, \mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} = -\rho \, \mathbf{T} + \tau \, \mathbf{B} \\ \dot{\mathbf{B}} = -\tau \mathbf{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{N}} \\ \dot{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho & 0 \\ -\rho & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

هذه الجملة تسمى جملة سيري-فريني، سيكون لها دور مهم في هذا الفصل.

1.3.2 المعادلات الذاتية لمنحنى

تعريف 17.3.2. نعتبر التمثيل الوسيطي الطبيعي $x(s)$ للمنحنى (C) من الفضاء. نسمي المعادلتين

$$\rho = \rho(s), \qquad \tau = \tau(s)$$

المعبِّرتين عن تقوّس و فتل المنحنى على الترتيب بالمعادلات الذّاتية (أو الطبيعية) للمنحنى.

مبرهنة 10.3.2. لتكن $\rho = \rho(s)$ و $\tau = \tau(s)$ دالتين مستمرتين على المجال $[0; a]$. إذن، يوجد منحنى واحد و وحيد (C) - مع إمكانية إختلاف الوضعية في الفضاء - بحيث تكون الدالة $\rho = \rho(s)$ هي تقوّسه و الدالة $\tau = \tau(s)$ هي فتله.

البرهان 8.3.2. نعتبر (C) و $(\tilde{C})$ منحنيين من الفضاء بحيث من أجل كل $s \in [0; a]$ يكون

$$\rho(s) = \tilde{\rho}(s), \qquad \tau(s) = \tilde{\tau}(s).$$

من أجل قيمة ثابتة $s_0 \in [0; a]$ نحصل على نقطة ثابتة $x(s_0)$ من (C) و نقطة أخرى ثابتة $x(\tilde{s_0})$ من $(\tilde{C})$. بانسحاب معلوم نستطيع أن نطابق بين هاتين النقطتين ثم بدوران معلوم أيضا نستطيع أن نطابق بين معلمي فريني عند نقطة التطابق $(\boldsymbol{T}_0, \boldsymbol{N}_0, \boldsymbol{B}_0)$ و $(\tilde{\boldsymbol{T}}_0, \tilde{\boldsymbol{N}}_0, \tilde{\boldsymbol{B}}_0)$. لنفاضل الآن الجُداء السلّمي $\boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}}$ و نستعمل معدلات جملة سيري-فريني على النحو التالي

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}}) &= \dot{\boldsymbol{T}} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{T} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{T}}} \\ &= \rho \boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{T} \cdot \tilde{\rho} \tilde{\boldsymbol{N}} = \rho(\boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}), \end{aligned}$$

بالمثل لدينا

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}) &= \dot{\boldsymbol{N}} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{N} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{N}}} \\ &= (-\rho \boldsymbol{T} + \tau \boldsymbol{B}) \cdot \tilde{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{N} \cdot (-\tilde{\rho} \tilde{\boldsymbol{T}} + \tilde{\tau} \tilde{\boldsymbol{B}}) \\ &= -\rho(\boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}) + \tau(\boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}}), \end{aligned}$$

و أيضا

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\boldsymbol{B} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}}) &= \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B} \cdot \dot{\tilde{\boldsymbol{B}}} \\ &= -\tau \boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B} \cdot (-\tilde{\tau} \tilde{\boldsymbol{N}}) = -\tau(\boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}), \end{aligned}$$

بجمع العلاقات الثلاثة المحصّل عليها أعلاه ينتج

$$\frac{d}{ds}(\boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{B} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}}) = 0$$

و بالمكاملة نجد

$$\boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{B} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = c \in \mathbb{R}$$

لكن عند s_0 يكون

$$\boldsymbol{T}_0 = \tilde{\boldsymbol{T}}_0, \qquad \boldsymbol{N}_0 = \tilde{\boldsymbol{N}}_0, \qquad \boldsymbol{B}_0 = \tilde{\boldsymbol{B}}_0$$

و نعلم أن

$$\boldsymbol{T}_0 \cdot \tilde{\boldsymbol{T}}_0 = \boldsymbol{N}_0 \cdot \tilde{\boldsymbol{N}}_0 = \boldsymbol{B}_0 \cdot \tilde{\boldsymbol{B}}_0 = 1,$$

هذا كله عند s_0 أما من أجل كل $s \in [0;a]$ نستنتج أن

$$\boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} + \boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}} + \boldsymbol{B} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = 3.$$

الآن، يمكننا ملاحظة أن

$$\boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} = \|\boldsymbol{T}\| \|\tilde{\boldsymbol{T}}\| \cos(\widehat{\boldsymbol{T}, \tilde{\boldsymbol{T}}}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{T}, \tilde{\boldsymbol{T}}}),$$

أي أن

$$-1 \leq \boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} \leq 1,$$

ممّا يسمح باستنتاج التالي

$$\boldsymbol{T} \cdot \tilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{N} \cdot \tilde{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{B} \cdot \tilde{\boldsymbol{B}} = 1.$$

إذن، من أجل كل s من المجال $[0;a]$ لدينا

$$\boldsymbol{T} = \tilde{\boldsymbol{T}}, \qquad \boldsymbol{N} = \tilde{\boldsymbol{N}}, \qquad \boldsymbol{B} = \tilde{\boldsymbol{B}}.$$

و عليه، بما أن

$$\boldsymbol{T} = \frac{dx}{ds} = \tilde{\boldsymbol{T}} = \frac{d\tilde{x}}{ds},$$

ينتج

$$x(s) = \tilde{x}(s) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

لكن $x(s_0) = \tilde{x}(s_0) \Rightarrow c = 0$ و منه

$$x(s) = \tilde{x}(s)$$

هذا ما يؤكد أن المنحنيين يتطبقان تماما على بعضهما البعض.

أمثلة 2.3.0. :

1) المعادلات الذاتية للخط المستقيم هي:

$$\rho = 0, \qquad \tau = 0.$$

2) المعادلات :

$$\rho \in \mathbb{R}^*, \qquad \tau = 0.$$

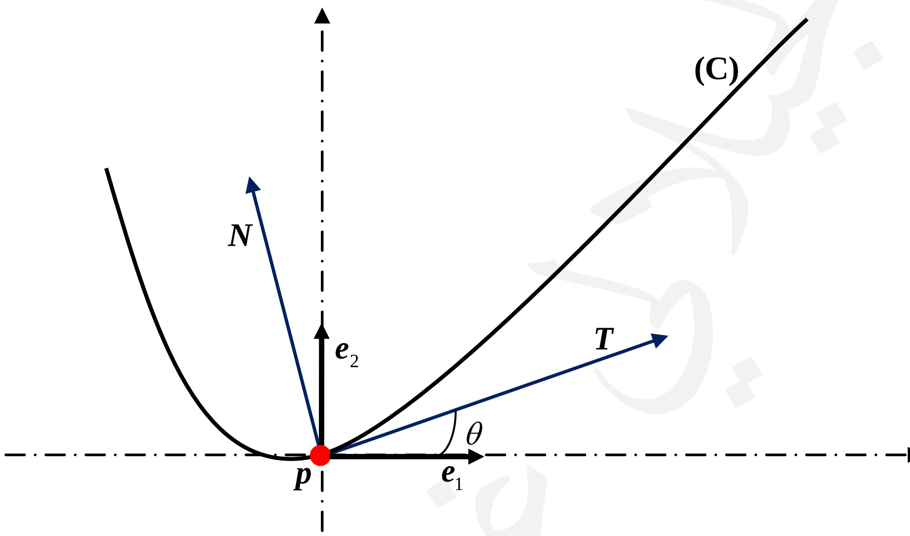
هي معادلات ذاتية لدائرة نصف قطرها $r = \frac{1}{\rho}$

3) المعادلات الذاتية لمنحنى حلزوني دائري هي:

$$\rho \in \mathbb{R}^*, \qquad \tau \in \mathbb{R}^*.$$

هذا المنحنى يقع على سطح اسطوانة نصف قطرها $\frac{|\rho|}{\rho^2+\tau^2}$ و طوره يساوي $\frac{2\pi|\tau|}{\rho^2+\tau^2}$ و هو يميني في حالة $\tau > 0$ و شِمالي في حالة $\tau < 0$.

ملاحظة 5.3.2. حالة خاصة هامة
عندما يكون المنحني (C) عو عبارة عن منحني مستوٍ، أي $\tau = 0$



من الشكل لدينا

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \cos\theta \mathrm{e}_1 + \sin\theta\ \mathrm{e}_2 \\ \boldsymbol{N} = -\sin\theta \mathrm{e}_1 + \cos\theta\ \mathrm{e}_2 \end{cases}$$

و منه

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{T}} = -\dot{\theta}\sin\theta\ \mathrm{e}_1 + \dot{\theta}\cos\theta\ \mathrm{e}_2 = \dot{\theta}\boldsymbol{N} \\ \dot{\boldsymbol{N}} = -\dot{\theta}\cos\theta\ \mathrm{e}_1 - \dot{\theta}\sin\theta\ \mathrm{e}_2 = -\dot{\theta}\boldsymbol{T} \end{cases}$$

من جهة أخرى، نعلم أن

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{T}} = \rho\boldsymbol{N} \\ \dot{\boldsymbol{N}} = -\rho\boldsymbol{T} \end{cases}$$

بالمطابقة نجد $\rho = \dot{\theta}$ و بالتالي

$$\begin{aligned} x(s) &= \int \boldsymbol{T}(s)ds \\ &= \int (\cos\theta \mathrm{e}_1 + \sin\theta\ \mathrm{e}_2)ds \\ &= \int \frac{ds}{d\theta}(\cos\theta \mathrm{e}_1 + \sin\theta\ \mathrm{e}_2)d\theta. \end{aligned}$$

مثال 4.3.2. نعتبر (C) منحنى مستوٍ تقوّسه $\rho(s) = \frac{1}{s}$ مع $s > 0$.
لدينا

$$\dot{\theta} = \rho(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \theta = \ln s + c_1 \Rightarrow s = \mathrm{e}^{\theta - c_1},$$

و بالتالي

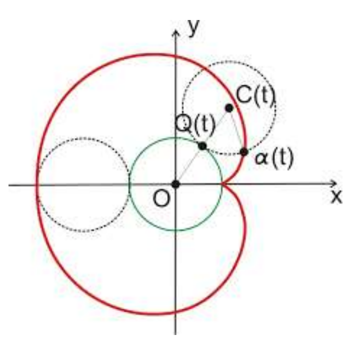
$$\begin{aligned} x(s) &= \int \frac{ds}{d\theta}(\cos\theta \mathrm{e}_1 + \sin\theta\ \mathrm{e}_2)d\theta \\ &= \int \mathrm{e}^{\theta - c_1}(\cos\theta \mathrm{e}_1 + \sin\theta\ \mathrm{e}_2)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\big((\cos\theta + \sin\theta)\mathrm{e}_1 + (\sin\theta - \cos\theta)\mathrm{e}_2\big) + c_2. \end{aligned}$$

لاحظ أن تغيير ثابت التكامل يعُرِّف انسحابا للمنحنى.

4.2 تمارين محلولة

التمرين 1 : المنحني المستوي التالي يعرف باسم **المنحني القَلْبي**

المنحنى القلبي يظهر بوضوح في طنجرة حديدية



يعطى تمثيله الوسيطي بمايلي

$$x(t) = \big((1-\cos t)\cos t\ ,\ (1-\cos t)\sin t\big).$$

حدّد متى يكون المنحنى القلبي منتظما و أوجد دالة تقوّسه ρ ثمّ أحسب طوله l.
الحل :
لدينا

$$x'(t) = \big(-\sin t + \sin 2t\ ,\ \cos t - \cos 2t\big),$$
$$x''(t) = \big(-\cos t + 2\cos 2t\ ,\ -\sin t + 2\sin 2t\big)$$
$$\|x'(t)\|^2 = 2 - 2\cos t,$$

و عليه، يكون المنحنى منتظما إذا و فقط إذا كان $t \in \mathbb{Z} - \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
لحساب التقوّس، يمكن اعتبار

$$x(t) = \big((1-\cos t)\cos t\ ,\ (1-\cos t)\sin t\ ,\ 0\big).$$

و بالتالي

$$\rho = \frac{|x'(t)\wedge x''(t)|}{\|x'(t)\|^3} = \frac{3}{\sqrt{8(1-\cos t)}}.$$

نستطيع حساب طول المنحنى القلبي كمايلي

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 4\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 8.$$

التمرين 2 : نعرّف المنحنى (C) في الفضاء $\mathbb{R}^3$ $x : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^3$ كمايلي

$$x(t) = \Big(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}\ ,\ \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}\ ,\ \frac{t}{\sqrt{2}}\Big).$$

1) حدّد النقاط التي من أجلها يكون المنحنى منتظما ثم إعط معلم فريني عند كل نقطة.
2) أحسب التقوّس ρ و الفتل τ للمنحنى.
الحل : 1) لدينا

$$x'(t) = \Big(\frac{1}{2}(1+t)^{1/2}\ ,\ -\frac{1}{2}(1-t)^{1/2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big), \qquad \|x'(t)\|^2 = 1 \neq 0.$$

أي المنحنى C هو منحنى منتظم و يمكننا تمثيله بوسيط طبيعي $s = t$ و نستنتج أن

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds} = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}x'(t).$$

لدينا

$$\mathbf{T}' = x''(t) = \Big(\frac{1}{4}(1+t)^{-1/2} \, , \, \frac{1}{4}(1-t)^{-1/2} \, , \, 0\Big),$$

و أيضا

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}'}{\|\mathbf{T}'\|} = \Big(\sqrt{\frac{1-t}{2}} \, , \, \sqrt{\frac{1+t}{2}} \, , \, 0\Big).$$

و كذلك

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} = \Big(-\frac{\sqrt{1+t}}{2} \, , \, \frac{\sqrt{1-t}}{2} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

2) التقوّس يعطى كمايلي

$$\rho = \|\mathbf{T}'\| = \frac{1}{2\sqrt{2(1-t^2)}}$$

بالنسبة للفتل τ، لدينا

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N} \Leftrightarrow \tau = -\mathbf{B}' \cdot \mathbf{N}, \qquad \mathbf{B}' = \Big(-\frac{1}{4\sqrt{1+t}} \, , \, -\frac{1}{4\sqrt{1-t}} \, , \, 0\Big).$$

ينتج

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{2(1-t^2)}}.$$

التمرين 3 : أعط التقوّس ρ و الفتل τ على طول المنحنى (C) المعرّف كمايلي

$$x = 3t - t^3, \qquad y = 3t^2, \qquad z = 3t + t^3.$$

الحل : حساب التقوّس

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{|x' \wedge x''|}{|x'|^3} = \frac{|\big((3-3t^2)\mathrm{e}_1 + 6t\mathrm{e}_2 + (3+3t^2)\mathrm{e}_3\big) \wedge \big(-6t\mathrm{e}_1 + 6\mathrm{e}_2 + 6t\mathrm{e}_3\big)|}{|(3-3t^2)\mathrm{e}_1 + 6t\mathrm{e}_2 + (3+3t^2)\mathrm{e}_3|^3} \\
&= \frac{18|(t^2-1)\mathrm{e}_1 - 2t\mathrm{e}_2 + (1+t^2)\mathrm{e}_3|}{27|(1-t^2)\mathrm{e}_1 + 2t(\mathrm{e}_2 + (1+t^2)\mathrm{e}_3|^3} \\
&= \frac{2}{3(1+t^2)^2}.
\end{aligned}$$

حساب الفتل

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{[x', x'', x''']}{|x' \wedge x''|^2} = \frac{(x' \wedge x'') \cdot x'''}{|x' \wedge x''|^2}\\ &= \frac{18\big((t^2-1)\mathrm{e}_1 - 2t\mathrm{e}_2 + (1+t^2)\mathrm{e}_3\big) \cdot 6(-\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3)}{18^2|(t^2-1)\mathrm{e}_1 - 2t\mathrm{e}_2 + (1+t^2)\mathrm{e}_3|^2}\\ &= \frac{2}{3(1+t^2)^2}.\end{aligned}$$

التمرين 4: أوجد التقوّس ρ و الفتل τ على طول المنحنى (C) المعرّف كمايلي

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = \frac{2}{3}t^3.$$

الجواب

$$\rho = \tau = \frac{2}{(1+2t^2)^2}.$$

نلاحظ أن لهاذين المنحنيين ميزة خاصة ألا و هي عند كل نقطة تقوّسهما يساوي فتلهما. لكن هذه الميزة ليست عامة لجميع المنحنيات.

التمرين 5:

1) أنجز رسما للمنحنى المعرّف بـ:

$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad z = 4t.$$

2) أوجد:

أ) شعاع الوحدة المماس **T**.

ب) شعاع الوحدة العمودي الأساسي **N**، التقوّس ρ و نصف قطر التقوّس R.

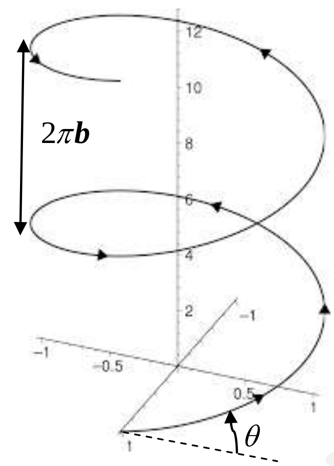
ج) شعاع الوحدة العمودي الثانوي **B** و الفتل τ.

الحل

1) بما أن $z = 4t$ يمكننا أن نكتب

$$x = 3\cos\frac{z}{4}, \qquad y = 3\sin\frac{z}{4},$$

و عليه، فالمنحنى يرتكز على الأسطوانة ذات المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ فهو منحنى حلزوني دائري.



2) **أ)**: شعاع الوضعية لأية نقطة من المنحنى يعطى بالعلاقة

$$x = 3\cos t\ \mathrm{e}_1 + 3\sin t\ \mathrm{e}_2 + 4t\ \mathrm{e}_3$$

باعتبار s هي الإحداثية المنحنية (الوسيط الطبيعي) فإن

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{dx}{ds} = \frac{dr}{dt} \times \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt} \times |\frac{dx}{dt}| \\ &= \frac{1}{5}\big(-3\sin t\ \mathrm{e}_1 + 3\cos t\ \mathrm{e}_2 + 4\mathrm{e}_3\big).\end{aligned}$$

ب): نعلم أن

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{ds} = \rho\mathbf{N}$$

و عليه،

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}} &= \frac{dT}{dt} \times \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{-3}{25}\big(\cos t\ \mathrm{e}_1 + \sin t\ \mathrm{e}_2, \big)\end{aligned}$$

فينتج

$$|\dot{\mathbf{T}}| = |\rho\mathbf{N}| = |\rho|, \qquad |\mathbf{N}| = 1,$$

و بالتالي

$$\rho = |\dot{\mathbf{T}}| = \frac{3}{25}, \qquad R = \frac{1}{\rho} = \frac{25}{3}.$$

و

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\rho}\dot{\mathbf{T}} = -\cos t\ \mathrm{e}_1 - \sin t\ \mathrm{e}_2.$$

ج):

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\wedge\mathbf{N}=\begin{vmatrix} \mathrm{e}_1 & \mathrm{e}_2 & \mathrm{e}_3 \\ -\frac{3}{5}\sin t & \frac{3}{5}\cos t & \frac{4}{5} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}=\frac{4}{5}\left(\sin t\ \mathrm{e}_1-4\cos t\ \mathrm{e}_2+3\mathrm{e}_3\right),$$

لحساب الفتل τ لدينا

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}\Leftrightarrow\frac{4}{25}(\cos t\ \mathrm{e}_1+\sin t\ \mathrm{e}_2)=-\tau(-\cos t\ \mathrm{e}_1-\sin t\ \mathrm{e}_2),$$

فينتج

$$\tau=\frac{4}{25}.$$

التمرين 6:
حدّد المعادلات الشعاعية و الديكارتية لكل من مستويات معلم فريني للمنحنى المعرّف في التمرين (2) عند النقطة $t=1$.
الحل: بحساب بسيط نجد

$$\mathbf{T}=\frac{1}{3}(1,2,2),\qquad \mathbf{N}=\frac{1}{3}(-2,-1,2),\qquad \mathbf{B}=\frac{1}{3}(2,-2,1),$$

ليكن V شعاعا كيفيا معطى. باعتبار X_0 و X شعاعي الوضعية لنقطة الإنطلاق و لنقطة كيفية من V على الترتيب، فإذا كان الشعاع $X-X_0$ موازيا للشعاع V تكون معادلة V على الشكل

$$(X-X_0)\wedge V=0.$$

و منه
- ◄ معادلة المستوي المماس هي $(X-X_0)\wedge\mathbf{T}=0$.
- ◄ معادلة المستوي العمودي الأساسي هي $(X-X_0)\wedge\mathbf{N}=0$.
- ◄ معادلة المستوي العمودي الثانوي هي $(X-X_0)\wedge\mathbf{B}=0$.

المعادلات على الشكل الديكارتي مع

$$X=(x,y,z),\qquad X_0=\left(1,1,\frac{2}{3}\right),\qquad t=1.$$

هي على الترتيب

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2/3}{2},$$
$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2/3}{1},$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2/3}{1}.$$

و يمكننا كتابتها أيضا على الشكل الوسيطي، مثلا

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2/3}{2}=t \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=2t+\frac{2}{3} \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

و نفس الشيئ بالنسبة للمعادلتين الأخريتين.

التمرين 7: أحسب طول قوس المنحنى (C) المعرّف كمايلي

$$x=\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{e}_1+\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{e}_2+\mathrm{e}^t\mathrm{e}_3, \qquad 0\leq t\leq \pi.$$

الجواب $l=3(\mathrm{e}^{\pi}-1)$.

التمرين 8:

برهن أنه من أجل كل منحنى موجود على سطح كرة نصف قطرها r، المعادلة التالية تكون محقّقة

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\dot\rho}{\rho^2\tau}\right)^2=r^2,$$

حيث ρ و τ هما تقوّس و فتل المنحنى على الترتيب.

الحل:

نعتبر $x=x(s)$ نقطة على الكرة ذات المركز x_0 و نصف القطر r مع s الوسيط الطبيعي (الإحداثية المنحنية). إذن، من أجل كل قيمة لـ s لدينا

$$dist(x,x_0)=r^2 \Leftrightarrow \big(x-x_0\big)\cdot\big(x-x_0\big)=r^2 \qquad (1).$$

نشتق هذه العبارة بالنسبة لـ s نجد

$$2\big(x-x_0\big).\dot x=0 \Leftrightarrow \big(x-x_0\big)\cdot\mathbf{T}=0.$$

نشتق مرّة ثانية العبارة الأخيرة نجد

$$(x-x_0)\cdot\dot{\mathbf{T}}+\dot x\cdot\mathbf{T}=0 \Leftrightarrow \rho(x-x_0)\cdot\mathbf{N}+1=0$$

باعتبار

$$\dot{\mathbf{T}}=\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\rho\mathbf{N}, \quad \dot x=\frac{dx}{ds}=\mathbf{T}, \quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}=1.$$

بما أن المنحنى موجود على كرة فإن $\rho \neq 0$ و عليه

$$(x - x_0) \cdot \mathbf{N} = \frac{-1}{\rho}$$

مرّة أخرى، نشتق هذه العبارة بالنسبة لـ s ينتج

$$\dot{x} \cdot \mathbf{N} + (x - x_0) \cdot \dot{\mathbf{N}} = \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \Leftrightarrow (x - x_0) \cdot (-\rho \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}) = \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}$$

نعلم أن $(x - x_0) \cdot \mathbf{T} = 0$ و بالتالي $(x - x_0) \cdot \mathbf{B} = \frac{\dot{\rho}}{\tau\rho^2}$.

نلخّص ما حصُلنا عليه كمايلي

$$(x - x_0) \cdot \mathbf{T} = 0, \qquad (x - x_0) \cdot \mathbf{N} = \frac{-1}{\rho}, \qquad (x - x_0) \cdot \mathbf{B} = \frac{\dot{\rho}}{\tau\rho^2}$$

و هذا معناه أن مركبات الشعاع $(x - x_0)$ في معلم فريني $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ هي $\left(0,\ \frac{-1}{\rho},\ \frac{\dot{\rho}}{\tau\rho^2}\right)$، و عليه يكون

$$x - x_0 = \frac{-1}{\rho}\mathbf{N} + \frac{\dot{\rho}}{\tau\rho^2}\mathbf{B}$$

باستعمال المعادلة (1) ينتج

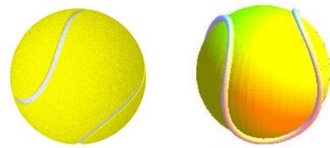
$$\begin{aligned}
(x - x_0) \cdot (x - x_0) &= \left(\frac{-1}{\rho}\mathbf{N} + \frac{\dot{\rho}}{\tau\rho^2}\mathbf{B}\right) \cdot \left(\frac{-1}{\rho}\mathbf{N} + \frac{\dot{\rho}}{\tau\rho^2}\mathbf{B}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\rho}^2\right) + \left(\frac{\dot{\rho}}{\tau\rho^2}^2\right) = r^2.
\end{aligned}$$

التمرين 9 : كرة التنس

ليكن a و b عددين موجبين تماما. نعتبر المنحنى $\gamma : [0; 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ المعطى بـ:

$$t \mapsto \gamma(t) = \left(a\cos t + b\cos 3t\ ,\ a\sin t - b\sin 3t\ ,\ 2\sqrt{ab}\sin 2t\right)$$

1) حدّد النقط المنتظمة للمنحنى γ.
2) برهن أن Γ حامل المنحنى γ محتوا في كرة يطلب تحديدها.
3) ليكن r الدوران في $\mathbb{R}^3$ ذي الزاوية π حول الشاقول. برهن أن حامل المنحنى γ هو صامد بالدوران r.
4) أوجد نقط تقاطع Γ مع خط الاستواء للكرة.
5) من أجل أي قيم لـ b يكون للمنحنى مماسا شاقوليا عند نقط التقاطع مع خط الاستواء؟



كرة التنس

الحل لدينا

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t + b\cos 3t \\ y(t) = a\sin t - bsin3t \\ z(t) = 2\sqrt{ab\sin 2t} \end{cases}$$

(1

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= (-a\sin t - 3b\sin 3t)^2 + (a\cos t - 3b\cos 3t)^2 + 4ab(2\cos 2t)^2 \\ &= a^2 + 9b^2 - 6ab(\cos t - \sin 3t\sin t) + 8ab(1+\cos 4t) \\ &= a^2 + 9b^2 - 6ab\cos 4t + 8ab(1+\cos 4t) \\ &= a^2 + 9b^2 + 8ab + 2ab\cos 4t \\ &= a^2 + 9b^2 + 6ab + 2ab(1+\cos 4t) \\ &= (a+3b)^2 + 4ab\cos^2 2t \neq 0. \end{aligned}$$

و عليه، المنحنى γ منتظم دوما.
2) لدينا

$$\begin{aligned} \|\gamma(t)\|^2 &= (a\cos t + b\cos 3t)^2 + (a\sin t - b\sin 3t)^2 + 4ab\sin^2 2t \\ &= a^2 + b^2 + 2ab(\cos t\cos 3t - \sin t\sin 3t) + 2ab(1-\cos 4t) \\ &= a^2 + b^2 + 2ab\cos 4t + 2ab(1-\cos 4t) \\ &= (a+b)^2. \end{aligned}$$

و بالتالي، حامل المنحنى γ محتوى في كرة مركزها المبدأ و نصف قطرها $a+b$.
3) من جهة لدينا

$$r(x,y,z) = (-x,-y,z)$$

ومن جهة أخرى

$$\gamma(t+\pi) = \big(-x(t), -y(t), z(t)\big),$$

هذا ما يبيّن أن حامل المنحنى γ هو صامد بالدوران r.
4) يكفي حل المعادلة

$$z(t) = 0.$$

و سنجد $t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ و بالتالي النقط المرافقة هي

$$\gamma(0) = (a+b, 0, 0), \quad \gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, a+b, 0),$$

$$\gamma(\pi) = (-a-b, 0, 0), \quad \gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, -a-b, 0).$$

5) لدينا

$$\gamma'(0) = (0, a-3b, 4\sqrt{ab}), \quad \gamma'(\frac{\pi}{2}) = (-a+3b, 0, -4\sqrt{ab}),$$

$$\gamma'(\pi) = (0, -a+3b, 4\sqrt{ab}), \quad \gamma'(\frac{3\pi}{2}) = (a-3b, 0, -4\sqrt{ab}).$$

و عليه، المنحنى له مماس شاقولي عند نقط التقاطع مع خط الإستواء إذا و فقط إذا كان $b = \frac{a}{3}$.

الفصل 3

السطوح

في حياتنا اليومية نرى و نتعامل مع سطوح كثيرة مثل الكرات، الأنابيب، ... و الأغشية الرقيقة مثل فقاعات الصابون و التي تمثل نماذج فيزيائية ... لدراسة هذه السطوح و الإستفادة منها نحتاج الى احداثيات لإجراء مختلف الحسابات كالتفاضل و التكامل. هذه السطوح بطبيعة الحال موجودة في عالمنا ثلاثي الأبعاد لكن لا يمكن أن نفكر بأنها ثلاثية الأبعاد. على سبيل المثال، إذا قطعنا أسطوانة مقطعا طوليا و فتحناها سنتحصل على قطعة مستوية مستطيلة الشكل ذات بعدين.هذا يعطينا الإنطباع الأولي عن كيفية الوصف الهندسي للسطوح.
يعتبر هذا الفصل تطبيقا على الدالة الشعاعية ذات متغيرين. سنقدم هنا التمثيل الوسيطي المنتظم للسطوح كما نتعرض لمفهوم توجيه سطح و كذلك حساب شعاع الوحدة العمودي على السطح في نقطة و المستوي المماس في هذه النقطة. كما سنتطرق للشكل الثنوي الأحادي الأساسي و الشكل الثنوي الثنائي الأساسي مع حساب مساحة سطح كل هذا في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

1.3 التمثيل الوسيطي للسطوح المنتظمة

1.1.3 التمثيل الوسيطي المنتظم و السطوح المنتظمة

حدسيا، سطح منتظم محليا (بجوار نقطة منه) يمكن تشبيهه بجزء من المستوي. هذه هي الحالة عندما يكون السطح S مكونًا محليًا بدالة منتظمة بشكل كافٍ. وبما أننا نرغب في استخدام أدوات حساب التفاضل والتكامل، سنفترض أن هذه الدالة هي على الأقل من صنف $\mathcal{C}^1$. وللتأكد من أنه في كل نقطة من هذا السطح يمكننا التفكير في مستوي مماس، نشترط أن تكون رتبة المصفوفة اليعقوبية لهذه الدالة هي 2 في هذه النقطة. ومن هنا التعريف التالي:

تعريف 18.1.3. التمثيل الوسيطي من الصنف $\mathcal{C}^m$ لمجموعة من النقط S من $\mathbb{R}^3$ هو تطبيق $x = f(u,v)$ لمجموعة مفتوحة U من المستوي (uv) نحو S بحيث

- أن تكون f من الصنف $\mathcal{C}^m$ على U.
- إذا كان $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ أساسا لـ $\mathbb{R}^3$ و

$$f(u,v) = f_1(u,v)\mathrm{e}_1 + f_2(u,v)\mathrm{e}_2 + f_3(u,v)\mathrm{e}_3,$$

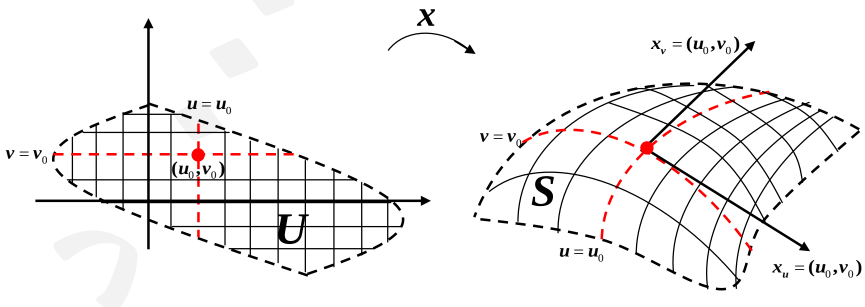
فإنه من أجل كل $(u,v) \in U$

$$rang(J) = rang \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix} = 2$$

و كما رأينا في حالة المنحنيات، يسمى المتغيران u و v بالوسيطين و سنرمز للتمثيل الوسيطي لسطح ما بالرمز $x(u,v)$. المشتقات الجزئية لـ x يُرمز لها بـ

$$x_u = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad x_v = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \ldots$$

صورة U بالتطبيق x هي مجموعة النقط S التي نسميها سطح من الصنف $\mathcal{C}^m$. الخط (u, v_0) ذو الإحداثية الثابتة v_0 صورته في S هي منحن وسيطه u، نرمز له بالرمز $x(u) = x(u, v_0)$ و نفس الشيئ يُقال عن الخط (u_0, v).
في المستوي (uv) يتقاطع الخطان (u, v_0) و (u_0, v) في النقطة (u_0, v_0) و $x_u u_0) = x_u(u_0, v_0)$ هي المشتقة الشعاعية في إتجاه u و هي تمثل مماسا للمنحنى $x(u)$ عند النقطة (u_0, v_0) و نفس الشيئ بالنسبة $x_v(v_0) = x_u(u_0, v_0)$ فهي المشتقة الشعاعية في إتجاه v و هي مماس للمنحنى $x(v)$ عند النقطة (u_0, v_0).



و لتحديد المستوي المماس للسطح عند النقطة (u_0, v_0)، يلزم و يكفي أن يكون $x_u \wedge x_v \neq 0$ عند هذه

النقطة مع العلم أن

$$\begin{aligned} x_u \wedge x_v &= det \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \mathrm{e}_2 & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \\ \mathrm{e}_3 & \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)\mathrm{e}_1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)\mathrm{e}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)\mathrm{e}_3. \end{aligned}$$

إذن، الشرط $rang\ (J) = 2$ يكافئ $x_u \wedge x_v \neq 0$ أما الشرط الثاني في التعريف أعلاه فيكافئ

$$\forall (u,v) \in U \qquad x_u \wedge x_v \neq 0.$$

مثال 4.1.3. التمثيل الوسيطي

$$x(u,v) = (u+v)\mathrm{e}_1 + (u-v)\mathrm{e}_2 + (u^2+v^2)\mathrm{e}_3$$

يعرِّف تطبيقا من المستوي (uv) نحو الجسم المكافئ $x_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ مع

$$det(x_u \wedge x_v) = det \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & 1 & 1 \\ \mathrm{e}_2 & 1 & -1 \\ \mathrm{e}_3 & 2u & 2v \end{pmatrix} = 2\sqrt{1+2(u^2+v^2)} \neq 0.$$

هذا التمثيل الوسيطي هو منتظم و حتى أنه من الصنف $\mathcal{C}^\infty$.

مثال 4.1.3. التمثيل الوسيطي

$$x(\theta,\phi) = (\cos\theta \sin\phi)\mathrm{e}_1 + (\sin\theta\sin\phi)\mathrm{e}_2 + (\cos\phi)\mathrm{e}_3$$

يعرِّف تطبيقا من المستوي $(\theta\phi)$ نحو كرة الوحدة التي سنرمز لها بالرمز $\mathbb{S}^2 : |x| = 1$ أي

$$\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

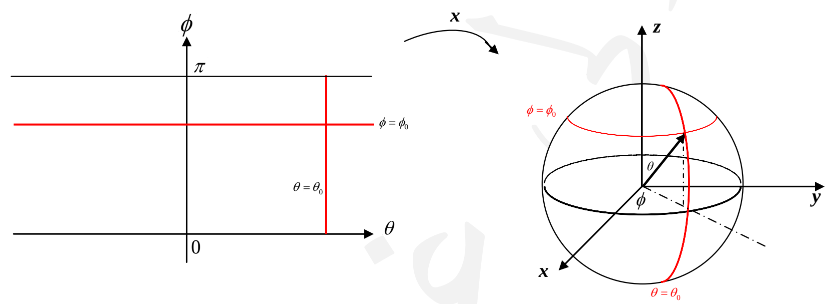
هذا التمثيل الوسيطي غير منتظم على امتداد الخطوط $\phi = \pm n\pi,\ n \in \mathbb{N}$، لأن

$$det(x_\theta \wedge x_\phi) = det \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 & -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \\ \mathrm{e}_2 & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \mathrm{e}_3 & 0 & -\sin\phi \end{pmatrix} = |\sin\phi|.$$

و هذا المقدار ينعدم من أجل $\phi = n\pi$. في المقابل لو نحذف الجلّة $B = \{(\theta,\phi)/\theta \in \mathbb{R}\ ; \phi \in]0;\phi[\}$، يصبح التمثيل الوسيطي منتظما و من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ و تكون صورته الهندسية عندئذ $\mathbb{S}*^2$ أي الكرة $\mathbb{S}^2$ باستثناء القطبين الشمالي و الجنوبي.

من أجل كل قيمة $\phi = \phi_0$ ثابتة نجد خطَّ عَرضٍ و من أجل كل قيمة $\theta = \theta_0$ ثابتة نجد خطَّ طول. كما نلاحظ أن خطوط العرض و خطوط الطول تتقاطع مشكلة زوايا قائمة، لأن

$$x_\theta \cdot x_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix} = 0.$$



تعريف 19.1.3. نقول عن جزء $S \subset \mathbb{R}^3$ أنه **سطح منتظم** من الصنف $\mathcal{C}^m$ إذا كان لكل نقطة $p \in S$ جوارمفتوح $V \subset \mathbb{R}^3$ و تطبيق

$$x : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \cap S$$

بحيث

- x قابلة للمفاضلة من الصنف $\mathcal{C}^m$
- x هو تشاكل طوبولوجي محلي من U نحو $V \cap S$ أي،

$x^{-1} : V \cap S \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ موجود و مستمر.

- من أجل كل $q \in U$ يكون الشكل التفاضلي $\mathrm{d}x$ غامر أي،

$rang(J_x) = 2 \Leftrightarrow x_u \wedge x_v \neq 0$.

تعريف 20.1.3. **إحداثية محلية** من الصنف $\mathcal{C}^m$ على سطح S من $\mathbb{R}^3$ هي التطبيق $x = x(u,v)$ من الجزء المفتوح W للمستوي (uv) نحو S بحيث

- x تطبيق من الصنف $\mathcal{C}^m$ على W،
- من أجل كل $(u,v) \in W$ يكون $x_u \wedge x_v \neq 0$،
- x هي تشاكل طوبولوجي محلي (x تقابلي و مستمر).

و نسمي **خريطة محلية**، المجموعة $w = x(W)$ صورة W بالتمثيل الوسيطي ذي الإحداثية المحلية.

ملاحظة 6.1.3.
◄ الشرط الثاني يكافئ رتبة المصفوفة اليعقوبية تساوي 2 كما بيّنا سابقا، و هو يكافئ أيضا أن التطبيق $\mathrm{d}x$ غامر مع d هو مؤثر الإشتقاق الخارجي.
◄ تسمى x التمثيل الوسيطي أو منظومة إحداثيات محلية بجوار نقطة (محليا) و نسمي x^{-1} الخريطة المحلية.

مثال 4.1.3. نعتبر التمثيل الوسيطي التالي

$$x(u,v) = u\mathrm{e}_1 + v\mathrm{e}_2 + u\sqrt{1-(u^2+v^2)}\mathrm{e}_1, \qquad u^2+v^2 < 1.$$

هو تطبيق للقرص

$$D(0,1) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u^2+v^2 < 1\}$$

نحو نصف الكرة العلوي

$$\mathbb{S}^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2+y^2+z^2 = 1, \ z > 0\}$$

. من الواضح أن $x \in \mathcal{C}^\infty$ و كذلك

$$\begin{aligned} \|x_u \wedge x_v\| &= \left\|\left(\mathrm{e}_1 - \frac{u}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\mathrm{e}_3\right) \wedge \left(\mathrm{e}_2 - \frac{v}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}\mathrm{e}_3\right)\right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(u^2+v^2)}}, \qquad \forall u,v \in D(0,1). \end{aligned}$$

إذن، x هو تمثيل وسيطي من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على نصف الكرة العلوي، و هو تقابلي أيضا. كما أنه مستمر و تطبيقه العكسي $(x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1,x_2) = (u,v)$ هو إسقاط و بالتالي فهو مستمر أيضا و منه هذا التمثيل الوسيطي هو إحداثية محلية من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ على نصف الكرة.

قضية 3.1.3. لتكن $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^2$ ، منحنى f المعرّف بـ

$$G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad z = f(x,y)\}$$

هو سطح منتظم.

قضية 4.1.3. لتكن $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^\infty$ و لتكن $a \in f(U)$ نقطة منتظمة أي،

$\forall p \in f^{-1}(\{a\})$، $\mathrm{d}_p f$ يكون غامرا.

إذن، $f^{-1}(\{a\})$ هو سطح منتظم.

ملاحظة 7.1.3. لتكن $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة من الصنف $\mathcal{C}^\infty$.
الشرط $\mathrm{d}_p f$ غامر معناه $rang(J_f)_p = 1$ و هذا معناه أيضا أن $\mathrm{grad} f_p \neq 0_{\mathbb{R}^3}$
مع

$$\mathrm{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

مثال 4.1.3. لنبيّن أن

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1\}$$

هي سطح منتظم مع a، b و c أعداد حقيقية موجبة تماما.
لتكن

$$\begin{array}{rcl} f : U \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2} \end{array}$$

- f هي دالة من الصنف $\mathcal{C}^\infty$.
- $\forall p = (x, y, z) \in f^{-1}(\{1\})$ $\qquad \mathrm{grad} f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{a^2}, \frac{2z}{a^2}\right) \neq 0_{\mathbb{R}^3},$
مع

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1\}$$

تعريف 21.1.3. التمثيل الوسيطي لمونج
باختيار مناسب لمحاور الإحداثيات x_1، x_2 و x_3 تستطيع بعض السطوح أخذ تمثيل وسيطي خاص.
نسمي كل تمثيل وسيطي من الصنف $\mathcal{C}^m$ شكله

$$x(u, v) = f(u, v)\ \mathrm{e}_1 + v\ \mathrm{e}_2 + u\ \mathrm{e}_3$$

أو

$$x(u, v) = u\ \mathrm{e}_1 + f(u, v)\ \mathrm{e}_2 + v\ \mathrm{e}_3$$

أو

$$x(u,v) = u\ \mathrm{e}_1 + v\ \mathrm{e}_2 + f(u,v)\ \mathrm{e}_3$$

تمثيل مونج أو الإحداثية المحلية لمونج حيث f دالة معرّفة على جوار مفتوح U من المستوي (uv).

مبرهنة 11.1.3. إذا قبِل السطح S تمثيلا وسيطيا من الصنف $\mathcal{C}^m$، فإنّه عند كل نقطة p من S يوجد تمثيلا وسيطيا لمونج يشمل النقطة p.

البرهان 9.1.3. بما أنّ السطح S يقبل تمثيلا وسيطيا $x(u,v)$ من الصنف $\mathcal{C}^m$، نضع $p = x(u_0,v_0)$ و نعلم أن رتبة المصفوفة اليعقوبية هي 2 مع

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$$

عند النقطة $p = x(u_0,v_0)$. لنعتبر التطبيق

$$\Phi : (u,v) \longmapsto \big(x_1(u,v), x_2(u,v)\big)$$

من الواضح أنّ هذا التطبيق من الصنف $\mathcal{C}^m$ و مصفوفته اليعقوبية غير معدومة بجوار النقطة p. حسب مبرهنة العكس المحلي، يوجد جوار W للنقطة (u_0,v_0) و جوار W^* للنقطة $\big(x_1(u_0,v_0), x_2(u_0,v_0)\big) = (x_0,y_0)$ بحيث يكون التطبيق Φ تشاكل طوبولوجي (مستمر وتقابلي و عكسيه موجود و مستمر) من الصنف $\mathcal{C}^m$ من W نحو W^*. و بما أنّ $\Phi(u,v) = (x_1,x_2)$ فإنّ $\Phi^{-1}(x_1,x_2) = (u,v)$ و التطبيق المركّب لـ W^* على السطح S يصبح

$$\begin{aligned} x &= x_1\big(x_1(u,v),x_2(u,v)\big)\mathrm{e}_1 + x_2\big(x_1(u,v),x_2(u,v)\big)\mathrm{e}_2 + x_3\big(x_1(u,v),x_2(u,v)\big)\mathrm{e}_3 \\ &= x_1\mathrm{e}_1 + x_2\mathrm{e}_2 + x_3\big(u(x_1,x_2),v(x_1,x_2)\big)\mathrm{e}_3, \end{aligned}$$

و هو بالفعل تمثيل مونج الوسيطي في W^* و الذي صورته W تشمل النقطة p.

2.1.3 المستوي المماس و الشعاع الناظم

ليكن $x(u,v)$ تمثيلا وسيطيا لسطح منتظم S في منظومة إحداثيات محلية من الصنف $\mathcal{C}^m$. و ليكن $\gamma : t \longmapsto \big(u(t),v(t)\big)$ منحنى منتظم من الصنف $\mathcal{C}^m$ في المستوي (uv). نرمز لصورة هذا المنحنى على السطح S بالرمز $y(t) = x\big(u(t),v(t)\big)$.

من الواضح أن $\frac{dy}{dt} \neq 0$ لأنه إذا كان عكس ذلك فإن $\frac{dy}{dt} = x_u\frac{du}{dt} + x_v\frac{dv}{dt} = 0$ و بما أن $x_u \wedge x_v \neq 0$ فإن الشعاعين x_u و x_v مستقلان خطيا فينتج $\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$ عند النقطة t و هذا يناقض كون المنحنى γ منتظم و بالتالي $y(t)$ هو منحنى منتظم.

تعريف 22.1.3. الشعاع المماس

ليكن T شعاعا غير معدوم، نقول عن الشعاع T أنه مماس للسطح S في النقطة $p \in S$، إذا وُجد منحنى منتظم $y(t)$ يشمل النقطة $p = y(t_0)$ بحيث $T = \frac{dy}{dt}$ في النقطة t_0.

تعريف 23.1.3. المستوي المماس

المستوي الذي يشمل نقطة $p \in S$ و يوازي الشعاعين x_u و x_v يسمى المستوي المماس للسطح S في النقطة p.

إذا رمزنا لنقطة التماس بالرمز $x_0 = x(u_0, v_0)$ فإن معادلة المستوي المماس تعطى بالشكل التالي

$$y = x_0 + hx_u + kx_v, \qquad -\infty < h, k < +\infty.$$

و بعبارة أخرى، إذا اعتبرنا السطح S تمثيلا بيانيا للدالة $f = f(u, v)$ القابلة للمفاضلة عند النقطة $x_0 = x(u_0, v_0)$ فإن النشر المحدود يعطي العلاقة التالية

$$z = f(u_0, v_0) + f_u(u_0, v_0)(u - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v - v_0).$$

و هي معادلة المستوي المماس المطلوبة.

مثال 4.1.3. سنبحث في هذا المثال عن المستوي المماس بطرقتين. نعتبر الدالة التالية

$$f(u, v) = u^2 - v^2, \qquad p(1, 2).$$

◄ باستعمال النشر للدالة f عند النقطة $p(1, 2)$:

$$\begin{aligned} z &= f(1,2) + f_u(1,2)(u-1) + f_v(1,2)(v-2) \\ &= -3 + 2(u-1) - 4(v-2) \\ &= 2u + 4v + 3. \end{aligned}$$

◄ بمعرفة الشعاع $x_u \wedge x_v$ العمودي على المستوي المماس في النقطة $p(1, 2)$:
باعتبار التمثيل الوسيطي التالي

$$x(u, v) = (u, v, u^2 - v^2),$$

ينتج

$$x_u(1,2) = (1, 0, 2), \qquad x_v(1,2) = (0, 1, -4), \qquad x_u(1,2) \wedge x_v(1,2) = (-2, 4, 1)$$

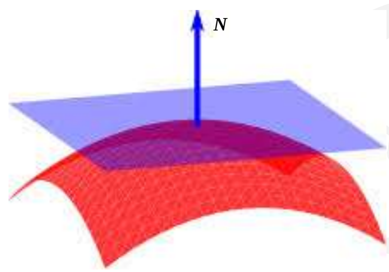
هذا الأخير، يمكن اعتباره شعاعا ناظما للمستوي المماس و بالتالي معادلة المماس هي

$$-2(u-1) + 4(v-2) + 1(z+3) = 0 \Leftrightarrow z = 2u - 4v + 3.$$

تعريف 24.1.3. الشعاع الناظم
ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المماس للسطح S في النقطة p و الشعاعان x_u و x_v المعرفين بالإحداثية المحلية التي تشمل النقطة p بحيث تشكل الثلاثية $(x_u, x_v, x_u \wedge x_v)$ معلما مباشرا، إذن الشعاع

$$\boldsymbol{N} = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$$

يسمى شعاع الوحدة الناظم.



مثال 4.1.3. نعتبر السطح المكافئ الزائدي

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad z = xy\}$$

عند النقطة $p = (1, 2, 2)$ تكون:
◄ معادلة المستوي المماس هي $\quad 2x + y - z - 2 = 0$
لأنه باعتبار $x = x(u, v, uv)$ تمثيلا وسيطيا فعند النقطة $p = (1, 2, 2)$ لدينا

$$x_0 = (1, 2, 2), \quad x_u(1, 0, 2), \quad x_v(0, 1, 1)$$

و بما ان معادلة المستوي المماس تعطى بالشكل $Y = x_0 + hx_u + kx_v$ مع h و k وسيطان حقيقيان و $Y = (x, y, z)$ فإن

$$(x, y, z) = (1, 2, 2) + (1, 0, 2)h + (0, 1, 1)k \Leftrightarrow x = 1 + h, \quad y = 2 + k, \quad z = 2 + 2h + 2k$$

و بتعويض h و k في المعادلة الثالثة تحصل على المعادلة المطلوبة.
◄ الشعاع العمودي على المستوي المماس في النقطة p هو $V = (2, 1, -1)$.
لاحظ أن مركباته هي المعاملات في معادلة المستوي المماس و بالتالي شعاع الوحدة الناظم هو

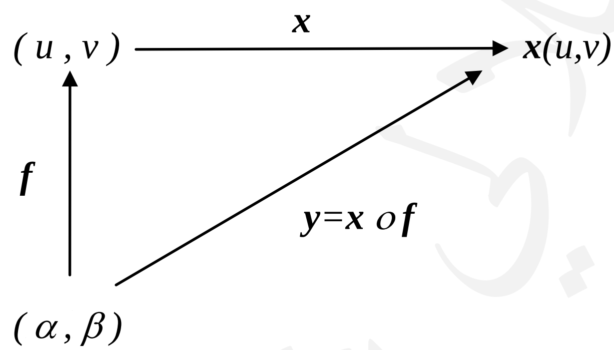
$$\boldsymbol{N} = \frac{V}{|V|} = \frac{(2, 1, -1)}{\sqrt{6}}.$$

3.1.3 السطح الموجّه

ليكن $x(u,v)$ تمثيل وسيطي لسطح منتظم S من $\mathbb{R}^3$ و لتكن

$$f(\alpha,\beta)=\big(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)\big)$$

تغيير وسيطي ملائم.



إذن

$$y(\alpha,\beta)=x\big(u(\alpha,\beta),v(\alpha,\beta)\big)$$

هو تمثيل وسيطي للسطح S. زيادة على ذلك، لدينا

$$\begin{cases} y_\alpha = u_\alpha x_u + v_\alpha x_v \\ y_\beta = u_\beta x_u + v_\beta x_v \end{cases}$$

و منه

$$\begin{aligned} y_\alpha \wedge y_\beta &= (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha)\, x_u \wedge x_v \\ &= det(J_f)\, x_u \wedge x_v \end{aligned}$$

فينتج

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_y &= \frac{y_\alpha \wedge y_\beta}{|y_\alpha \wedge y_\beta|} \\ &= \frac{det(J_f)}{|det(J_f)|} \times \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} \\ &= \pm \mathbf{N}_x, \end{aligned}$$

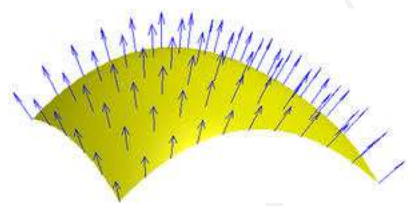
و عليه، نلاحظ أن الشعاعين $\mathbf{N}_x$ و $\mathbf{N}_y$ يكون لهما نفس الإتجاه إذا كان $det(J_f)>0$ في النقطة p. هذا يبيّن أن شعاعي الوحدة الناظمين $\mathbf{N}_x$ و $\mathbf{N}_y$ المتعلّقين بإحداثيين محليين متداخلين في جزء يحوي النقطة

p يختلفان فقط في الإشارة. في المقابل، الخط المار من النقطة p و العمودي على المستوي المماس و المسمى **الخط العمودي** لا يتعلق باختيار الإحداثيات المحلية. هذا الخط يعطى بالمعادلة التالية

$$y = x_0 + k\mathbf{N}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

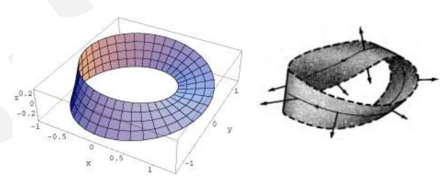
تعريف 25.1.3. نقول عن سطح منتظم S أنه موجّه إذا وُجدت عائلة من الإحداثيات المحلية بحيث من أجل كل تمثيلين وسيطيين $x(u,v)$ و $y(\alpha,\beta)$ خريطتاهما المحليتين متداخلتين في جزء يحوي النقطة p تكون إشارة $det(J_f)$ موجبة تماما من أجل كل نقطة من هذا الجزء.

ملاحظة 8.1.3. خلاصة هامة
على سطح منتظم نضمن وجود شعاع الوحدة الناظم عند كل نقطة من هذا السطح أما كونه موجّها يعني أن شعاع الوحدة الناظم يستطيع التغير باستمرار دون تغيير إتجاهه.



مثال 4.1.3. (شريط موبيوس)
هو أفضل مثال يقدم عن سطح غير موجّه. يعطى التمثيل الوسيطي لشريط موبيوس كمايلي

$$x(t,\theta) = (1 + t\sin\frac{\theta}{2})\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + (1 + t\sin\frac{\theta}{2})\sin\theta\ \mathrm{e}_2 + t\cos\frac{\theta}{2}\ \mathrm{e}_3.$$



2.3 الصيغة الأساسية الأولى

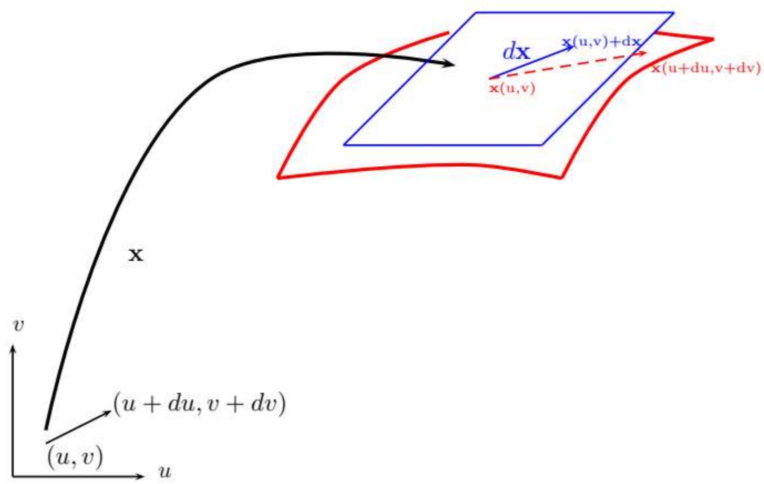
1.2.3 الصيغة الأساسية الأولى

في الباب الأول، رأينا أن المنحنى في $\mathbb{R}^3$ يتعلق ذاتيا و بكيفية وحيدة بكمّيتين إثنتين، **التقوّس و الفتل**. بدورها السطوح في $\mathbb{R}^3$ تتعلق ذاتيا بكيفية وحيدة بكميتين إثنتين غير متغيرتين محليا، إنهما الصيغتان الأساسيتان

الأولى و الثانية.
ليكن $x(u,v)$ تمثيلا وسيطيا (إحداثيات محلية) لسطح S من الصنف $\mathcal{C}^m$ مع $m \geq 1$.
نسمي **تفاضل** x، و نرمز له بـ $\mathrm{d}x$ التطبيق التقابلي الذي يرفق الشعاع (du,dv) من المستوي (uv) بالشعاع

$$\mathrm{d}x = x_u du + x_v dv,$$

من المستوي المماس.
في الشكل التوضيحي التالي، نلاحظ أن صورة الشعاع (du,dv) ليست هي الشعاع $\mathrm{d}x$ من المستوي المماس، و إنما هي الشعاع الذي يصل النقطة $x(u,v)$ من السطح S بالنقطة $x(u+du,v+dv)$ من نفس السطح.
لنحسب حاليا الكمية التالية



شكل 1.3: الشكل التوضيحي

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}x = (x_u du + x_v dv)\cdot(x_u du + x_v dv)\\ &= (x_u\cdot x_u)du^2 + 2(x_u\cdot x_v)dudv + (x_v\cdot x_v)dv^2\\ &= \mathbf{E}\,du^2 + 2\mathbf{F}\,dudv + \mathbf{G}\,dv^2\end{aligned}$$

مع

$$\mathbf{E} = x_u\cdot x_u,\qquad \mathbf{F} = x_u\cdot x_v,\qquad \mathbf{G} = x_v\cdot x_v. \tag{1.3}$$

الصيغة التربيعية

$$\mathbf{I}(du,dv) = \mathbf{E}\,du^2 + 2\mathbf{F}\,dudv + \mathbf{G}\,dv^2$$

تسمى الصيغة الأساسية الأولى للسطح $x(u,v)$ و الكميات **E** ، **F** و **G** تسمى معاملات الصيغة الأساسية الأولى.

ملاحظة 9.2.3. لا تتعلق الصيغة الأساسية الأولى بالإحداثيات المحلية. أي، لا تتأثر بتغيير وسيطي ملائم. فإذا اعتبرنا $x(u,v)$ و $\tilde{x}(p,q)$ هما تمثيلين وسيطيين متداخلين لنفس السطح S، فعند كل نقطة من نقط التداخل لدينا

$$p = p(u,v), \qquad q = q(u,v), \qquad x(u,v) = \tilde{x}\big(p(u,v), q(u,v)\big),$$

فينتج

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{I}}(dp,dq) &= |\mathrm{d}\tilde{x}|^2 = |\tilde{x}_p dp + \tilde{x}_q dq|^2 \\ &= |\tilde{x}_p(p_u du + p_v dv) + \tilde{x}_q(q_u du + q_v dv)|^2 \\ &= |(\tilde{x}_p p_u + \tilde{x}_q q_u)du + (\tilde{x}_p p_v + \tilde{x}_q q_v)dv|^2 \\ &= |x_u du + x_v dv|^2 = |\mathrm{d}x|^2 \\ &= \boldsymbol{I}(du,dv).\end{aligned}$$

في المقابل، معاملات الصيغة الأساسية الأولى تتأثر بكل تغيير وسيطي ملائم. أي

$$\big(\boldsymbol{E}(u,v), \boldsymbol{F}(u,v), \boldsymbol{G}(u,v)\big) \neq \big(\tilde{\boldsymbol{E}}(p,q), \tilde{\boldsymbol{F}}(p,q), \tilde{\boldsymbol{G}}(p,q)\big)$$

و ذلك لأن

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(u,v) &= |x_u|^2 = (\tilde{x}_p p_u + \tilde{x}_q q_u)\cdot(\tilde{x}_p p_u + \tilde{x}_q q_u) \\ &= |\tilde{x}_p|^2 p_u^2 + 2(\tilde{x}_p \cdot \tilde{x}_q)p_u p_q + |\tilde{x}_q|^2 q_u^2 \\ &= \tilde{\boldsymbol{E}}(p,q)p_u^2 + 2\tilde{\boldsymbol{F}}(p,q)p_u q_u + \tilde{\boldsymbol{G}}(p,q)q_u^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(u,v) &= x_u \cdot x_v = (\tilde{x}_p p_u + \tilde{x}_q q_u)\cdot(\tilde{x}_p p_v + \tilde{x}_q q_v) \\ &= \tilde{\boldsymbol{E}}(p,q)p_u p_v + \tilde{\boldsymbol{F}}(p,q)(p_u q_v + p_v q_u) + \tilde{\boldsymbol{G}}(p,q)q_u q_v,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(u,v) &= |x_v|^2 = (\tilde{x}_p p_v + \tilde{x}_q q_v)\cdot(\tilde{x}_p p_v + \tilde{x}_q q_v) \\ &= \tilde{\boldsymbol{E}}(p,q)p_v^2 + 2\tilde{\boldsymbol{F}}(p,q)p_v q_v + \tilde{\boldsymbol{G}}(p,q)q_v^2.\end{aligned}$$

مبرهنة 12.2.3. الصيغة الأساسية الأولى $\boldsymbol{I}(du,dv)$ موجبة تحديدا.

البرهان 10.2.3. يمكننا التعبير عن الصيغة الأساسية الأولى $\boldsymbol{I}(du,dv)$ بمصفوفة مربّعة 2×2 :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}(du,dv) &= (du,dv)\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}(u,v) & \boldsymbol{F}(u,v)\\ \boldsymbol{F}(u,v) & \boldsymbol{G}(u,v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix} \\ &= (du,dv)\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}du + \boldsymbol{F}dv\\ \boldsymbol{F}du + \boldsymbol{G}dv\end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{E}\,du^2 + 2\boldsymbol{F}\,dudv + \boldsymbol{G}\,dv^2.\end{aligned}$$

و عليه، فالصيغة التربيعية $\boldsymbol{I}(du,dv)$ معرّفة بالمصفوفة المتناظرة

$$M := \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}(u,v) & \boldsymbol{F}(u,v) \\ \boldsymbol{F}(u,v) & \mathbf{G}(u,v) \end{pmatrix}$$

و حتى تكون الصيغة موجبة تحديدا يلزم و يكفي أن يكون

$$\boldsymbol{E} > 0, \qquad \boldsymbol{E}\mathbf{G} - \boldsymbol{F}^2 > 0.$$

من الواضح أن

$$\boldsymbol{E} = |x_u|^2 > 0,$$

و لدينا

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}\mathbf{G} - \boldsymbol{F}^2 &= (x_u \cdot x_u)(x_v \cdot x_v) - (x_u \cdot x_v)^2 \\ &= |x_u|^2.|x_v|^2 - |x_u|^2.|x_v|^2 \cos^2\theta, \qquad \theta = < x_u, x_v >, \\ &= |x_u|^2.|x_v|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |x_u|^2.|x_v|^2 \sin^2\theta > 0 \\ &= |x_u \wedge x_v|^2 > 0. \end{aligned}$$

مثال 4.2.3. نعتبر السطح المعرّف بـ

$$x(u,v) = (u+v)\mathrm{e}_1 + (u-v)\mathrm{e}_2 + uv\mathrm{e}_3.$$

لدينا

$$x_u = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + v\mathrm{e}_3, \qquad x_v = \mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2 + u\mathrm{e}_3.$$

و بالتالي

$$\boldsymbol{E} = x_u \cdot x_u = 2 + v^2, \qquad \boldsymbol{F} = x_u \cdot x_v = uv, \qquad \mathbf{G} = x_v \cdot x_v = 2 + u^2.$$

و منه، الصيغة الأساسية الأولى

$$\boldsymbol{I}(du,dv) = (2+v^2)\,du^2 + 2uv\,dudv + (2+u^2)\,dv^2.$$

لنجري تغييرا وسيطيا و ليكن $p = u+v$ و $q = u-v$. هذا التغيير الوسيطي هو ملائم باعتبار

$$\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

التمثيل الوسيطي الجديد يعطى بالشكل

$$\tilde{x}(p,q) = p\mathrm{e}_1 + q\mathrm{e}_2 + \frac{1}{4}(p^2 - q^2)\mathrm{e}_3.$$

فينتج

$$\tilde{x}_p = \mathrm{e}_1 + \frac{p}{2}\mathrm{e}_3, \qquad \tilde{x}_q = \mathrm{e}_2 - \frac{q}{2}\mathrm{e}_3,$$

و بالتالي،

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = 1 + \frac{p^2}{4}, \quad \tilde{\boldsymbol{F}} = -\frac{pq}{4}, \quad \tilde{\boldsymbol{G}} = 1 + \frac{q^2}{4}.$$

و عليه، عند النقطتين $(u,v) = (1,1)$ و $(p,q) = (2,0)$ يكون

$$x(1,1) = 2\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3 = \tilde{x}(2,0)$$

و عند هذه النقطة من السطح يكون

$$\boldsymbol{E} = 3 \neq \tilde{\boldsymbol{E}} = 2, \quad \boldsymbol{F} = 1 \neq \tilde{\boldsymbol{F}} = 0, \quad \boldsymbol{G} = 3 \neq \tilde{\boldsymbol{G}} = 1.$$

و منه، معاملات الصيغة الأساسية الأولى تتغيّر بتغيّر التمثيل الوسيطي.

2.2.3 طول قوس على سطح

نعتبر $x(u,v)$ تمثيلا وسيطيا للسطح S و ليكن $x(t) = x\big(u(t), v(t)\big)$ قوس من هذا السطح مع $t \in [a,b]$. من خلال الفصل الأول، نعلم أن طول القوس يعطى بالعلاقة

$$L = \int_a^b |x'(t)| dt$$

مع $x'(t) = u'x_u + v'x_v$ ، و $u' = \frac{du}{dt}$ و بالتالي

$$\begin{aligned} |x'(t)| &= |u'x_u + v'x_v| \\ &= \sqrt{|u'x_u + v'x_v|^2} \\ &= \sqrt{(u'x_u + v'x_v)\cdot(u'x_u + v'x_v)} \\ &= \sqrt{u'^2\,\mathbf{E} + 2u'v'\,\mathbf{F} + v'^2\,\mathbf{G}} \\ &= \sqrt{\mathbf{I}(u',v')}, \end{aligned}$$

و منه

$$L = \int_a^b \sqrt{\mathbf{I}(u',v')}\; dt$$

مثال 4.2.3. على كرة الوحدة ذات التمثيل الوسيطي

$$x(\theta,\phi)=(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi),$$

نعتبر المنحنى المعطى كمايلي

$$x(t)=x\big(\theta(t),\phi(t)\big),\qquad \theta(t)=\ln\big(cotg(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2})\big),\qquad \phi(t)=\frac{\pi}{2}-t,\qquad t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

بحساب بسيط نجد

$$\boldsymbol{E}=\sin^2\phi,\qquad \boldsymbol{F}=0,\qquad \mathbf{G}=1,$$

مع

$$\theta'=\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}-t)},\qquad \phi'=\frac{d\phi}{dt}=-1,$$

و منه

$$\boldsymbol{I}(\theta',\phi')=\frac{\sin^2\phi}{\sin^2(\frac{\pi}{2}-t)}+1=2,$$

و بالتالي

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\boldsymbol{I}(\theta',\phi')}\,dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

3.2.3 قياس الزاوية المحصورة بين x_u و x_v

لنحسب $\cos(\widehat{x_u,x_v})$

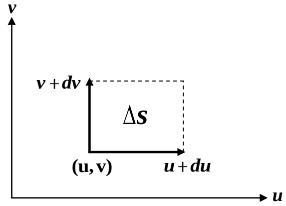
$$\cos(\widehat{x_u,x_v})=\frac{x_u\cdot x_v}{|x_u||x_v|}=\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{\mathbf{EG}}}$$

نتيجة 1.2.3. يكون الشعاعان x_u و x_v متعامدين إذا و فقط إذا كان $\boldsymbol{F}=0$.

مثال 4.2.3. في المثال السابق يمكن التحقق من أن الشعاعين x_ϕ و x_θ متعامدان باعتبار أننا وجدنا $\boldsymbol{F}=0$.

4.2.3 حساب مساحة سطح منتظم

في الشكل التوضيحي (3.1صفحة 64) نعتبر $\triangle s=dudv$ مع $du>0$ و $dv>0$ مساحة جزء صغير من المستوي (uv) المولّد بالشعاعين du و dv عند النقطة (u,v).



ليكن $\triangle S$ صورة $\triangle s$ بالتطبيق x.

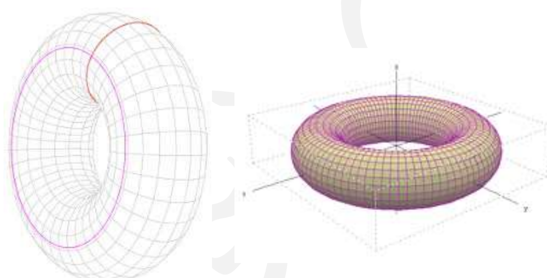
$$\begin{aligned}\triangle S &= |\triangle x_1 \wedge \triangle x_2| \\ &= |x_u du \wedge x_v dv| \\ &= |x_u \wedge x_v| du dv \\ &= \sqrt{\mathbf{EG}-\mathbf{F}^2} du dv\end{aligned}$$

إذا كان W^* هو صورة الحيز W الذي نحسب مساحته، فإن المساحة تعطى بالعلاقة التالية

$$A = \int\int_W \sqrt{\mathbf{EG}-\mathbf{F}^2} du dv.$$

ملاحظة 10.2.3. إذا كان السطح موجّها فإن قيمة A لا تتأثر بتغيير وسيطي ملائم.

مثال 4.2.3. الطارة (طوق النجاة) هو سطح دوراني في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ ينتج بدوران دائرة (C) حول خط مستقيم. (أنظر الشكل)



في البداية، نفرض أن الدائرة (C) تقع على المستوي (x_1x_3) و مركزها على المحور (x_1) على بُعد b من المبدأ و نصف قطرها a مع $b > a$. بتدوير الشكل بزاوية قدرها θ حول المحور (x_3) يصبح مركز الدائرة في النقطة $u = b\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + b\sin\theta\ \mathrm{e}_2$ أما شعاع نصف القطر فيصبح

$$r = a\sin\phi\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + a\sin\phi\sin\theta\ \mathrm{e}_2 + a\cos\phi\ \mathrm{e}_3.$$

و عليه، فأي نقطة كيفية $x = u + r$ من الطارة تعيّن بالإحداثيين $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ كمايلي

$$x = (b + a\sin\phi)\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + (b + a\sin\phi)\sin\theta\ \mathrm{e}_2 + a\cos\phi\ \mathrm{e}_3.$$

و هو تمثيل وسيطي للطارة. بالملاحظة، $x(\theta, \phi)$ من الصنف C^∞ و

$$x_\theta = -(b + a\sin\phi)\sin\theta\ \mathrm{e}_1 + (b + a\sin\phi)\cos\theta\ \mathrm{e}_2$$

$$x_\phi = a\cos\phi\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + a\cos\phi\sin\theta\ \mathrm{e}_2 - a\sin\phi\ \mathrm{e}_3.$$

و منه

$$\boldsymbol{E} = x_\theta\cdot x_\theta = (b+a\sin\phi)^2, \qquad \boldsymbol{F} = x_\theta\cdot x_\phi = 0, \qquad \mathbf{G} = x_\phi\cdot x_\phi = a^2.$$

و لحساب مساحة الطابة لدينا

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\boldsymbol{EG}-\boldsymbol{F}^2}d\theta d\phi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b+a\sin\phi)d\theta d\phi\\
&= a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\pi}(b+a\sin\phi)d\phi\\
&= 2a\pi\int_0^{2\pi}(b+a\sin\phi)d\phi\\
&= 2a\pi\left[b\phi - a\cos\phi\right]_0^{2\pi}\\
&= 4ab\pi^2.
\end{aligned}$$

3.3 الصيغة الأساسية الثانية

1.3.3 الصيغة الأساسية الثانية

نعتبر $x(u,v)$ تمثيلا وسيطيا للسطح S من الصنف $\mathcal{C}^m$ مع $m \geqslant 2$. عند كل نقطة (u,v) من السطح يمكن إرفاق خريطة محلية و شعاع وحدة ناظم

$$\mathcal{N} = \frac{x_u\wedge x_v}{|x_u\wedge x_v|}$$

و هو عبارة عن دالة ذات متغيرين u و v على الأقل من الصنف $\mathcal{C}^1$. نرمز بالرمز $\mathrm{d}\mathcal{N} = \mathcal{N}_u du + \mathcal{N}_v dv$ لتفاضل $\mathcal{N}$. بما أنّ

$$0 \equiv \mathrm{d}(1) = \mathrm{d}(\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}) = 2\mathrm{d}\mathcal{N}\cdot\mathcal{N},$$

نستنتج أن الشعاع $\mathcal{N}$ عمودي على $\mathrm{d}\mathcal{N}$ في النقطة $x(u,v)$ و عند هذه النقطة يكون الشعاع $\mathrm{d}\mathcal{N}$ على المستوي المماس. لنحسب الكمية التالية

$$\begin{aligned}
\mathbf{II}(du,dv) &= -\mathrm{d}x\cdot\mathrm{d}\mathcal{N}\\
&= -(x_u du + x_v dv)\cdot(\mathcal{N}_u du+\mathcal{N}_v dv)\\
&= -x_u\cdot\mathcal{N}_u\,du^2-(x_u\cdot\mathcal{N}_v+x_v\cdot\mathcal{N}_u)\,dudv-x_v\cdot\mathcal{N}_v\,dv^2\\
&= \mathbf{L}\,du^2+2\mathbf{M}\,dudv+\mathbf{N}\,dv^2,
\end{aligned}$$

مع

$$\mathbf{L}=-x_u\cdot\mathcal{N}_u,\qquad \mathbf{M}=-\frac{1}{2}(x_u\cdot\mathcal{N}_v+x_v\cdot\mathcal{N}_u),\qquad \mathbf{N}=-x_v\cdot\mathcal{N}_v.$$

المقدار $\mathbf{II}(du,dv)$ يسمى الصيغة الأساسية الثانية المرفقة بـ $x(u,v)$. تعتبر هذه الصيغة أيضا صيغة تربيعية حيث المعاملات $\mathbf{L}$، $\mathbf{M}$ و $\mathbf{N}$ تسمى معاملات الصيغة الأساسية الثانية كما يمكننا إثبات أن هذه الصيغة لا تتأثر بتغيير وسيطي ملائم تماما كالصيغة الأساسية الأولى. لو فرضنا أنّ $x^*(p,q)$ هو تمثيل وسيطي آخر حيث

$$x(u,v)=x^*\big(p(u,v),q(u,v)\big),$$

فبحساب بسيط نجد

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}=p_u^2\mathbf{L}^*+2p_up_u\mathbf{M}^*+q_u^2\mathbf{N}^*\\
&\mathbf{M}=p_uq_v\mathbf{L}^*+(p_uq_v+p_vq_u)\mathbf{M}^*+q_uq_v\mathbf{N}^*\\
&\mathbf{N}=p_v^2\mathbf{L}^*+2p_vq_v\mathbf{M}^*+q_v^2\mathbf{N}^*.
\end{aligned}$$

و بالتالي سينتج

$$\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2=\left(\frac{\partial(p,q)}{\partial(u,v)}\right)^2(\mathbf{L}^*\mathbf{N}^*-\mathbf{M}^{*^2})=(det(J_f))^2\,(\mathbf{L}^*\mathbf{N}^*-\mathbf{M}^{*^2})$$

و بما أن x_u و x_v يعامدان الشعاع الناظم $\mathcal{N}$ عند كل نقطة (u,v)، فإنّ

$$\begin{aligned}
0&=(x_u\cdot\mathcal{N})_u=x_{uu}\cdot\mathcal{N}+x_u\cdot\mathcal{N}_u\\
0&=(x_u\cdot\mathcal{N})_v=x_{uv}\cdot\mathcal{N}+x_u\cdot\mathcal{N}_v\\
0&=(x_v\cdot\mathcal{N})_u=x_{vu}\cdot\mathcal{N}+x_v\cdot\mathcal{N}_u\\
0&=(x_v\cdot\mathcal{N})_v=x_{vv}\cdot\mathcal{N}+x_v\cdot\mathcal{N}_v
\end{aligned}$$

فينتج

$$\mathbf{L}=x_{uu}\cdot\mathcal{N},\qquad \mathbf{M}=x_{uv}\cdot\mathcal{N},\qquad \mathbf{N}=x_{vv}\cdot\mathcal{N},$$

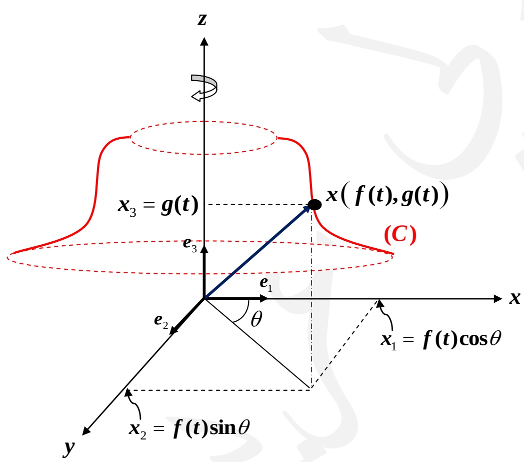
و بالتالي

$$\mathbf{II}(du,dv)=\mathbf{L}\,du^2+2\mathbf{M}\,dudv+\mathbf{N}\,dv^2=\mathrm{d}^2x\cdot\mathcal{N},$$

مع

$$\mathrm{d}^2x=x_{uu}du^2+2x_{uv}dudv+v_{vv}dv^2. \tag{3.2}$$

مثال 4.3.3. (السطح الدوراني)
السطح الدوراني يتولد من دوران خط (C) (مستقيم أو منحني) حول خط مستقيم ثابت (D)، في هذه الحالة نطلق على الخط المتحرك (C) اسم راسم السطح وعلى (D) محور الدوران. يجب الأخذ بعين الاعتبار أن معظم أنواع السطوح الدورانية تنتج في حالة انتماء الخطوط (C) و (D) إلى نفس المستوى.
المنحني الذي يتم الحصول عليه كنتيجة لتقاطع السطح الدوراني بسطح عمودي على محور الدوران، يسمى منحني موازي و المنحني الذي يتم الحصول عليه كنتيجة لتقاطع السطح الدوراني بسطح يمر بمحور الدوران، يسمى منحنى الطول.
سنحسب عبارة الصيغة الأساسية الأولى و عبارة الصيغة الأساسية الثانية.



عبارة الصيغة الأساسية الأولى :
من الشكل أعلاه، لدينا كوضعية إنطلاق، المنحنى المنتظم (C) من المستوي (x_1x_3) المعطى بـ

$$x_1 = f(t), \qquad x_3 = g(t), \qquad f > 0.$$

و ليكن (E_1, E_2, E_3) الأساس الناتج عن الأساس $(\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3)$ بعد دوران زاويته θ و عليه، شعاع الوضعية لنقطة ما من المنحنى (C) يعطى بالعلاقة

$$x = f(t)E_1 + g(t)E_3$$

لكن

$$E_1 = \cos\theta\ \mathrm{e}_1 + \sin\theta\ \mathrm{e}_2, \qquad E_3 = \mathrm{e}_3$$

و منه

$$x(t,\theta) = f(t)\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + f(t)\sin\theta\ \mathrm{e}_2 + g(t)\mathrm{e}_3.$$

نحسب المشتقات الجزئية التالية

$$x_t = \frac{\partial x}{\partial t} = f'(t)\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + f'(t)\sin\theta\ \mathrm{e}_2 + g'(t)\mathrm{e}_3,$$

$$x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -f(t)\sin\theta\ \mathrm{e}_1 + f(t)\cos\theta\ \mathrm{e}_2,$$

و بالتالي

$$\boldsymbol{E} = x_t \cdot x_t = f'^2(t) + g'^2(t), \qquad \boldsymbol{F} = x_t \cdot x_\theta = 0, \qquad \boldsymbol{G} = x_\theta \cdot x_\theta = f^2(t),$$

و عليه،

$$\boldsymbol{I}(dt, d\theta) = \big(f'^2(t) + g'^2(t)\big)dt^2 + f^2(t)d\theta^2.$$

عبارة الصيغة الأساسية الثانية :
أولا، نحسب مركبات شعاع الوحدة الناظم $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{N} = \frac{x_t \wedge x_\theta}{|x_t \wedge x_\theta|} = \frac{-1}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}\big(g'(t)\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + g'(t)\sin\theta\ \mathrm{e}_2 - f'(t)\ \mathrm{e}_3\big).$$

ثم معاملات الصيغة الأساسية الثانية:

$$\boldsymbol{L} = \mathcal{N} \cdot x_{tt} = \frac{-1}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}\big(f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)\big)$$

$$\boldsymbol{M} = \mathcal{N} \cdot x_{t\theta} = 0, \qquad \boldsymbol{N} = \mathcal{N} \cdot x_{\theta\theta} = \frac{f(t)g'(t)}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}$$

مع

$$x_{tt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad x_{t\theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \theta}, \qquad x_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}.$$

و بالتالي

$$\boldsymbol{II}(dt, d\theta) = \frac{-1}{\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}}\Big(\big(f''(t)g'(t) - f'(t)g''(t)\big)dt^2 - f(t)g'(t)d\theta^2\Big).$$

ملاحظة 11.3.3. يمكننا التعبير عن الصيغة الأساسية الثانية $\boldsymbol{II}(du, dv)$ بمصفوفة مربّعة 2×2 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{II}(du, dv) &= (du, dv)\begin{pmatrix} \boldsymbol{L}(u,v) & \boldsymbol{M}(u,v) \\ \boldsymbol{M}(u,v) & \boldsymbol{N}(u,v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= (du, dv)\begin{pmatrix} \boldsymbol{L}du + \boldsymbol{M}dv \\ \boldsymbol{M}du + \boldsymbol{N}dv \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{L}\ du^2 + 2\boldsymbol{M}\ dudv + \boldsymbol{N}\ dv^2. \end{aligned}$$

و عليه، فالصيغة التربيعية $\boldsymbol{II}(du, dv)$ معرّفة بالمصفوفة المتناظرة

$$M := \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}(u,v) & \boldsymbol{M}(u,v) \\ \boldsymbol{M}(u,v) & \boldsymbol{N}(u,v) \end{pmatrix}$$

2.3.3 تقوّس سطح منتظم

تعريف 26.3.3. نعتبر $x(u,v)$ تمثيلا وسيطيا لسطح منتظم S في $\mathbb{R}^3$. و ليكن (C) منحنى على هذا السطح تمثيله الوسيطي $x(t)=\big(u(t),v(t)\big)$.

نسمي شعاع التقوّس في النقطة $p\in(C)$ و نرمز له بالرمز $\mathbb{K}$ الشعاع

$$\mathbb{K}=\dot{\boldsymbol{T}}=\frac{\boldsymbol{T}'}{\|x'\|}$$

حيث $\boldsymbol{T}$ شعاع المماس للمنحنى (C) في النقطة $p\in S$ و المعرّف بـ

$$\boldsymbol{T}=\frac{x'}{\|x'\|}=\frac{u'x_u+v'x_v}{\|x'\|}.$$

و نسمي شعاع التقوّس الناظمي في النقطة $p\in S$، الشعاع

$$\boldsymbol{K}_n=(\mathbb{K}\cdot\mathcal{N})\mathcal{N}$$

حيث $\mathcal{N}$ هو شعاع الوحدة الناظمي في النقطة $p\in S$. أما قيمة التقوّس الناظمي فيعطى بالعلاقة

$$\rho_n=\mathbb{K}\cdot\mathcal{N}.$$

نعلم أنّ الشعاعين $\mathbf{T}$ و $\mathcal{N}$ متعامدان باعتبار

$$\mathbf{T}\cdot\mathcal{N}=\frac{u'}{\|x'\|}x_u\cdot\mathcal{N}+\frac{v'}{\|x'\|}x_v\cdot\mathcal{N}=0,$$

فينتج

$$0=\frac{d}{dt}(\mathbf{T}\cdot\mathcal{N})=\mathbf{T}'\cdot\mathcal{N}+\mathbf{T}\cdot\mathcal{N}',$$

و منه

$$\begin{aligned}\rho_n &= \mathbb{K}\cdot\mathcal{N}=\frac{\mathbf{T}'}{\|x'\|}\cdot\mathcal{N}\\ &= -\frac{1}{\|x'\|}\mathbf{T}\cdot\mathcal{N}'\\ &= -\frac{1}{\|x'\|^2}x'\cdot\mathcal{N}'\end{aligned}$$

و مادام $\mathcal{N} = \mathcal{N}\big(u(t), v(t)\big)$ فإن

$$\begin{aligned} -x' \cdot \mathcal{N}' &= -(u'x_u + v'x_v) \cdot (u'\mathcal{N}_u + v'\mathcal{N}_v) \\ &= -u'^2 x_u \cdot \mathcal{N}_u - u'v'x_u \cdot \mathcal{N}_v - u'v'x_v \cdot \mathcal{N}_u - v'^2 x_v \cdot \mathcal{N}_v \\ &= Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2 \\ &= \mathbf{II}(u', v'). \end{aligned}$$

بالمثل، لدينا

$$\begin{aligned} \|x'\|^2 &= x' \cdot x' \\ &= (u'x_u + v'x_v)^2 \\ &= x_u \cdot x_u u'^2 + 2x_u \cdot x_v u'v' + x_v \cdot x_v v'^2 \\ &= \mathbf{I}(u', v'), \end{aligned}$$

و بالتالي، نستنتج أنّ

$$\rho_n = \frac{\mathbf{II}(u', v')}{\mathbf{I}(u', v')}.$$

مثال 4.3.3. يعطى التمثيل الوسيطي للكرة $\mathbb{S}^2$ التي نصف قطرها R بالشكل

$$x(\theta, \phi) = R\big(\cos\theta \sin\phi \; \mathrm{e}_1 + \sin\theta \sin\phi \; \mathrm{e}_2 + \cos\phi \mathrm{e}_3\big), \quad (\theta, \phi) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[$$

لدينا

$$\begin{aligned} x_\theta &= R\big(-\sin\theta \sin\phi \; \mathrm{e}_1 + \cos\theta \sin\phi) \; \mathrm{e}_2\big) \\ x_\phi &= R\big(\cos\theta \cos\phi \; \mathrm{e}_1 + \sin\theta \cos\phi \; \mathrm{e}_2 - \sin\phi \; \mathrm{e}_3\big) \\ x_{\theta\theta} &= -R\big(\cos\theta \sin\phi \; \mathrm{e}_1 + \sin\theta \sin\phi) \; \mathrm{e}_2\big) \\ x_{\phi\phi} &= -R\big(\cos\theta \sin\phi \; \mathrm{e}_1 + \sin\theta \sin\phi \; \mathrm{e}_2 + \cos\phi \; \mathrm{e}_3\big) \\ x_{\theta\phi} &= -R\big(\sin\theta \cos\phi \; \mathrm{e}_1 - \cos\theta \cos\phi) \; \mathrm{e}_2\big) \\ \mathcal{N} &= -\cos\theta \cos\phi \; \mathrm{e}_1 - \sin\theta \sin\phi \; \mathrm{e}_2 - \cos\phi \; \mathrm{e}_3. \end{aligned}$$

و عليه، معاملات الصيغة الأساسية الأولى هي

$$\boldsymbol{E} = x_\theta \cdot x_\theta = R^2 \sin^2\phi, \qquad \boldsymbol{F} = x_\theta \cdot x_\phi = 0, \qquad \boldsymbol{G} = x_\phi \cdot x_\phi = R^2.$$

و معاملات الصيغة الأساسية الثانية هي

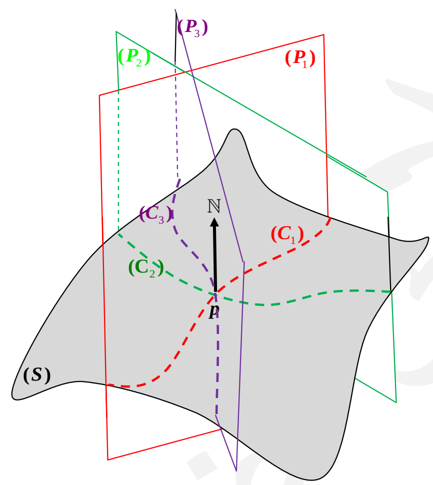
$$\boldsymbol{L} = x_{\theta\theta} \cdot \mathcal{N} = R\sin^2\phi, \qquad \boldsymbol{M} = x_{\theta\phi} \cdot \mathcal{N} = 0, \qquad \boldsymbol{N} = x_{\phi\phi} \cdot \mathcal{N} = R.$$

و بالتالي

$$\rho_n = \frac{\boldsymbol{II}(d\theta, d\phi)}{\boldsymbol{I}(d\theta, d\phi)} = \frac{R\sin^2\phi \; d\theta^2 + Rd\phi^2}{R^2 \sin^2\phi \; d\theta^2 + R^2 d\phi^2} = \frac{1}{R}.$$

3.3.3 تقوّس غوص و التقوّس المتوسط

نعتبر $x(u,v)$ تمثيلا وسيطيا لسطح منتظم S في $\mathbb{R}^3$ و p نقطة منه. و ليكن $\mathcal{N}$ شعاع الوحدة الناظمي في النقطة p. يوجد عدد غير منته من المستويات (P_i) التي توازي $\mathcal{N}$ و تقطع السطح S في منحنيات (C_i) تشمل النقطة p. (أنظر الشكل)



نعتبر
ρ_1 التقوّس الناظمي للمنحنى (C_1) في النقطة p،
و ρ_2 التقوّس الناظمي للمنحنى (C_2) في النقطة p،
... و ρ_i التقوّس الناظمي للمنحنى (C_i) في النقطة p،
نضع

$$\mathbf{K}_1 = inf(\rho_i) \qquad \text{و} \qquad \mathbf{K}_2 = sup(\rho_i).$$

تعريف 27.3.3. نسمي المقدارين $\boldsymbol{K}_1$ و $\boldsymbol{K}_2$ **التقوّسين الأساسيين**، كما نسمي المقدار

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1.\boldsymbol{K}_2$$

تقوّس غوص أو التقوّس التّام أما المقدار

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2}{2}$$

فيسمى **التقوّس المتوسط.**

أمثلة 0.3.3. سطح الكرة $\mathbb{S}^2(R)$

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{R^2}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{2R}.$$

سطح الأسطوانة الدائرية القائمة $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1(r)$

$$\boldsymbol{K}=0 \qquad \boldsymbol{H}=\frac{1}{2r}.$$

سطح مكافئ زائدي $z=xy$

$$\boldsymbol{E}_1=1+y^2,\quad \boldsymbol{F}=xy,\quad \boldsymbol{G}=1+x^2,\quad \boldsymbol{L}=\boldsymbol{N}=0,\quad \boldsymbol{M}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}.$$

$$\boldsymbol{K}=\frac{-1}{(x^2+y^2+1)^2} \qquad \boldsymbol{H}=\frac{-xy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}.$$

سطح مخروط إهليليجي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

$$\boldsymbol{K}=0 \qquad \boldsymbol{H}=-\frac{x^2+y^2+z^2}{2a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

سطح حلزوني دائري $X(u,v)=(v\cos u, v\sin u, \lambda u),\quad \lambda>0$

$$\boldsymbol{K}=\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+v^2)^2} \qquad \boldsymbol{H}=\pm\frac{\lambda}{\lambda^2+v^2}.$$

سطح الكاتينويد $X(u,v)=(\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u)$

$$\boldsymbol{K}=\frac{1}{\cosh^4 u} \qquad \boldsymbol{H}=\pm\frac{1}{\cosh^2 u}.$$

ملاحظة 12.3.3. $\boldsymbol{K}_1$ و $\boldsymbol{K}_2$ هما حلي المعادلة

$$det(\boldsymbol{II}-\boldsymbol{KI})=0$$

حيث

$$\boldsymbol{II}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{M}\\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{N}\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G}\end{pmatrix}.$$

و منه

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{II}-\boldsymbol{KI}) &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{KE} & \boldsymbol{M}-\boldsymbol{KF}\\ \boldsymbol{M}-\boldsymbol{KF} & \boldsymbol{N}-\boldsymbol{KG}\end{bmatrix}\\ &= (\boldsymbol{L}-\boldsymbol{KE})(\boldsymbol{N}-\boldsymbol{KG})-(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{KF})^2\\ &= \big(\boldsymbol{EG}-\boldsymbol{F}^2\big)\boldsymbol{K}^2+\big(-\boldsymbol{EN}-\boldsymbol{LG}+2\boldsymbol{FM}\big)\boldsymbol{K}+\boldsymbol{LN}-\boldsymbol{M}^2, \end{aligned}$$

و عليه
$$det(\boldsymbol{II}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{I})=0\Leftrightarrow \boldsymbol{K}^2-\frac{\boldsymbol{EN}+\boldsymbol{LG}-2\boldsymbol{FM}}{\boldsymbol{EG}-\boldsymbol{F}^2}\boldsymbol{K}+\frac{\boldsymbol{LN}-\boldsymbol{M}^2}{\boldsymbol{EG}-\boldsymbol{F}^2}=0,$$
و بالتالي، تقوّس غوص $\boldsymbol{K}$ هو
$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1.\boldsymbol{K}_2=\frac{\boldsymbol{LN}-\boldsymbol{M}^2}{\boldsymbol{EG}-\boldsymbol{F}^2},$$
و التقوّس المتوسط $\boldsymbol{H}$ هو
$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2}{2}=\frac{\boldsymbol{EN}+\boldsymbol{LG}-2\boldsymbol{FM}}{2(\boldsymbol{EG}-\boldsymbol{F}^2)}.$$

نعتبر p نقطة كيفية من السطح المنتظم S من الصنف $\mathcal{C}^m$ حيث $m\geq 2$ و q نقطة أخرى من السطح S بجور p حيث $x=x(u,v)$ خريطة محلية تشمل النقطتين p و q معا. ليكن $d=\overrightarrow{pq}\cdot\mathcal{N}$ مسقط الشعاع $\overrightarrow{pq}$ على شعاع الوحدة الناظمي $\mathcal{N}$. من السهل أن نلاحظ أن d يكون موجبا إذا كانت النقطة q تقع فوق المستوي المماس و يكون سالبا في الحالة الأخرى و $|d|$ هي المسافة العمودية بين النقطة q و المستوي المماس في النقطة p.

نفرض أن $p=x(u,v)$ و $q=x(u+du,v+dv)$، حسب منشور تايلور-يونغ لدينا

$$\begin{aligned} x(u+du,v+dv) &= x(u,v)+(x_u,x_v)\begin{pmatrix} du\\ dv\end{pmatrix}\\ &+ \frac{1}{2}(du \quad dv)\begin{pmatrix} x_{uu} & x_{uv}\\ x_{vu} & x_{vv}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} du\\ dv\end{pmatrix}+o(du^2,dv^2)\end{aligned}$$

مع $o(r)$ شعاع بحيث $0 \longrightarrow \frac{|o(r)|}{r}$ عندما $r \longrightarrow 0$. بما أنّ $dx=x_udu+x_vdv$ و باستعمال العلاقة (3.2) أي
$$d^2x=x_{uu}du^2+2x_{uv}dudv+x_{vv}dv^2$$
منشور تايلور-يونغ يمكن كتابته بالشكل

$$x(u+du,v+dv)-x(u,v)=dx+\frac{1}{2}d^2x+o(du^2,dv^2).$$

و بالتالي

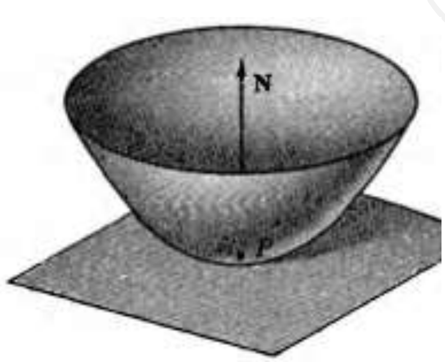
$$\begin{aligned} d &= \overrightarrow{pq}\cdot\mathcal{N} = \big(x(u+du,v+dv)-x(u,v)\big)\cdot\mathcal{N} \\ &= \big(dx+\frac{1}{2}d^2x+o(du^2,dv^2)\big)\cdot\mathcal{N} \\ &= \underbrace{dx\cdot\mathcal{N}}_{=0}+\frac{1}{2}\underbrace{d^2x\cdot\mathcal{N}}_{=\mathbf{II}}+o(du^2,dv^2)\cdot\mathcal{N} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{II}+o(du^2,dv^2)\cdot\mathcal{N} \\ &= \delta+o(du^2,dv^2)\cdot\mathcal{N}. \end{aligned}$$

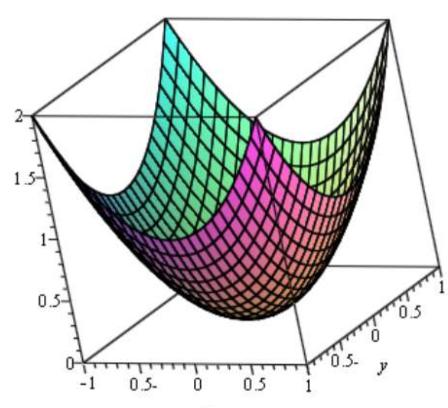
المساواة $dx\cdot\mathcal{N}=0$ تنتج كون dx يقع على المستوي المماس. إذا كانت النقطة q قريبة قرب كافي من النقطة p بحيث يؤول المقدار $o(du^2,dv^2)$ الى الصفر فإنّ الدالة التربيعية

$$\delta=\frac{1}{2}\mathbf{II}(du,dv)=\frac{1}{2}\mathbf{L}du^2+2\mathbf{M}dudv+\mathbf{N}dv^2$$

تعرِّف مجسما مكافئا يسمى **المكافئ اللاصق** عند النقطة p. هذه العبارة الجبرية من الدرجة الثانية ذات المتغيرات $d,\ du,\ dv$ تصف سطح مخروطي ملاصق للسطح S بجوار النقطة p.
وجود المجسم اللاصق و وحدانيته عند p يسمح لنا باجراء تصنيف نقاط السطح. هذا التصنيف يعتمد على مميز الصيغة الأساسية الثانية $\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2$. يمكننا استنتاج أربع حالات:

◄ **النقطة الناقصية** : نقول عن النقطة p أنها ناقصية إذا كان $\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2>0$ و في منطقة الجوار المباشر للنقطة الناقصية تكون إشارة δ ثابتة و يكون السطح في جهة واحدة من المستوي المماس عند p.





مثال 4.3.3. لتكن

$$x(u,v)=u\ \mathrm{e}_1+v\ \mathrm{e}_2+(u^2+v^2)\ \mathrm{e}_3$$

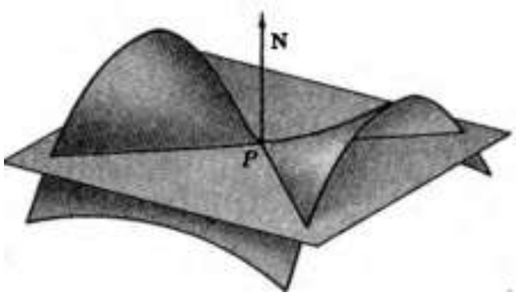
فينتج

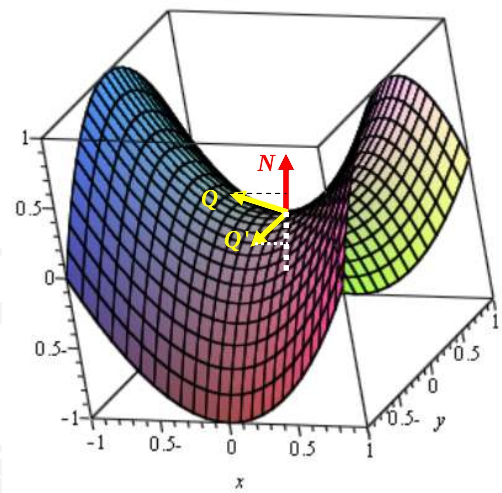
$$\boldsymbol{L} = 2, \qquad \boldsymbol{M} = 0, \qquad \boldsymbol{N} = 2.$$

و بالتالي

$$\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{M}^2 = 4 > 0,$$

◄ **النقطة الزائدية** : نقول عن النقطة p أنها زائدية إذا كان $\mathbf{LN} - \mathbf{M}^2 < 0$ و في منطقة الجوار المباشر للنقطة الزائدية يوجد خطين مستقيمين مختلفين في المستوي المماس يتقاطعان في p و يقسمان المستوي الى أربعة أجزاء في كل جزء تحافظ δ على إشارة ثابتة و على هذين المستقيمين تكون $\delta = 0$ و يكون السطح عندئذ على جانبي المستوي المماس عند p.





مسقطا النقطتين Q و Q' على N يمكن أن يكونا من إشارتين مختلفتين

مثال 4.3.3. لتكن

$$x(u,v) = u\ \mathrm{e}_1 + v\ \mathrm{e}_2 + (u^2 - v^2)\ \mathrm{e}_3$$

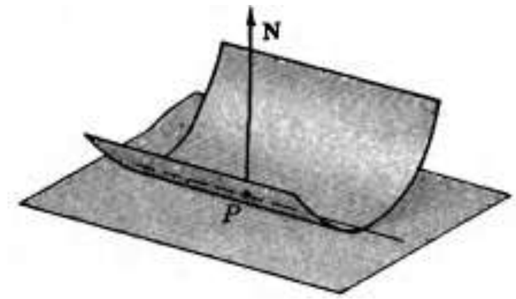
فينتج

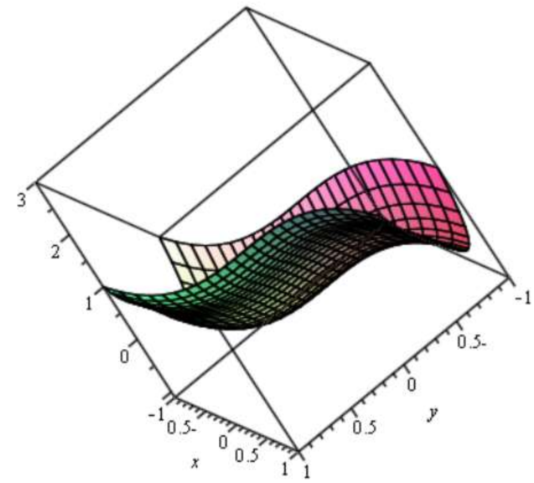
$$\boldsymbol{L} = 2, \qquad \boldsymbol{M} = 0, \qquad \boldsymbol{N} = -2.$$

و بالتالي

$$\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{M}^2 = -4 < 0,$$

◄ **النقطة المكافئة** : نقول عن النقطة p أنها مكافئة إذا كان المجسم اللاصق عند هذه النقطة مجسم مكافئ اسطواني أي إذا كان $\mathbf{LN} - \mathbf{M}^2 = 0$ و $\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}^2 + \mathbf{N}^2 \neq 0$ و في منطقة الجوار المباشر للنقطة المكافئة يوجد منحنٍ مستوي واحد في المستوي المماس عند النقطة p بحيث $\delta = 0$.





مثال 4.3.3. رأينا في المثال (4.2.3) معلومات هامة عن الطارة نُذكِّر هنا ببعضها

$$x = (b + a\sin\phi)\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + (b + a\sin\phi)\sin\theta\ \mathrm{e}_2 + a\cos\phi\ \mathrm{e}_3.$$

$$x_\theta = -(b + a\sin\phi)\sin\theta\ \mathrm{e}_1 + (b + a\sin\phi)cos\theta\ \mathrm{e}_2$$

$$x_\phi = a\cos\phi\cos\theta\ \mathrm{e}_1 + a\cos\phi\sin\theta\ \mathrm{e}_2 - a\sin\phi\ \mathrm{e}_3.$$

$$\boldsymbol{E} = x_\theta \cdot x_\theta = (b + a\sin\phi)^2, \qquad \boldsymbol{F} = x_\theta \cdot x_\phi = 0, \qquad \boldsymbol{G} = x_\phi \cdot x_\phi = a^2.$$

هنا، لدينا

$$x_{\theta\theta} = -(b + a\sin\phi)\cos\theta\ \mathrm{e}_1 - (b + a\sin\phi)\sin\theta\ \mathrm{e}_2$$

$$x_{\theta\phi} = -a\cos\phi\sin\theta\ \mathrm{e}_1 + a\cos\phi\cos\theta\ \mathrm{e}_2$$

$$x_{\phi\phi} = -a\sin\phi\cos\theta\ \mathrm{e}_1 - a\sin\phi\sin\theta\ \mathrm{e}_2 - a\cos\phi\ \mathrm{e}_3.$$

$$\mathcal{N} = -\sin\phi\cos\theta\ \mathrm{e}_1 - \sin\phi\sin\theta\ \mathrm{e}_2 - \cos\phi\ \mathrm{e}_3.$$

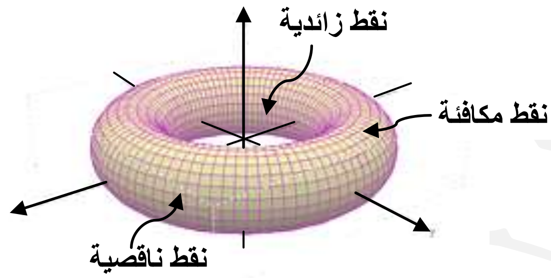
فينتج

$$\boldsymbol{L} = x_{\theta\theta} \cdot \mathcal{N} = (b + a\sin\phi)\sin\phi, \qquad \boldsymbol{M} = x_{\theta\phi} \cdot \mathcal{N} = 0, \qquad \boldsymbol{N} = x_{\phi\phi} \cdot \mathcal{N} = a.$$

و بالتالي

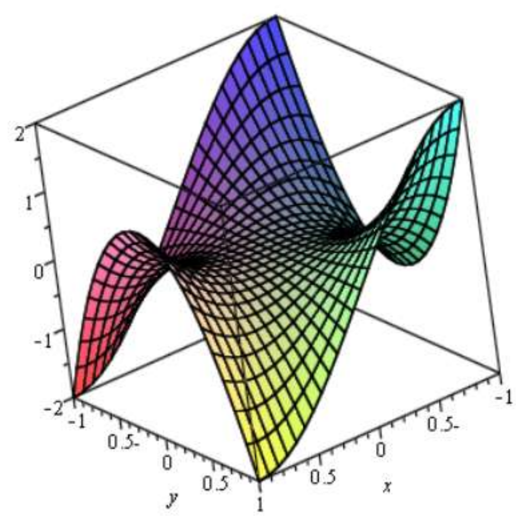
$$\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{M}^2 = a(b + a\sin\phi)\sin\phi,$$

لاحظ أن معاملات الصيغة الأساسية الثانية تتعلق فقط بقيمة ϕ. فهي ثابتة من أجل $\phi = \phi_0$ (خط عرض). و بما أنّ $0 < a < b$ و $a(b + a\sin\phi) > 0$ فإن إشارة المقدار $\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{M}^2$ تتعلق بإشارة $\sin\phi$. و عليه، يكون $\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{M}^2 > 0$ إذا كان $0 < \phi < \pi$ و يكون $\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{M}^2 = 0$ إذا كان $\phi = 0$ أو $\phi = \pi$ و يكون $\boldsymbol{LN} - \boldsymbol{M}^2 > 0$ إذا كان $\pi < \phi < 2\pi$ و بالتالي على الطارة يوجد ثلاث أنواع من النقط نوضّحها في الشكل التالي



◄ **النقطة المستوية** : نقول عن النقطة p أنها مستوية إذا كان المجسم اللاصق عند هذه النقطة هو المستوي المماس أي إذا كان $\mathbf{LN}-\mathbf{M}^2=0$ و $\mathbf{L}^2+\mathbf{M}^2+\mathbf{N}^2=0$ و في هذه الحالة إذا كان $\mathbf{L}=\mathbf{M}=\mathbf{N}=0$ فإن الصيغة الأساسية الثانية **II** تنعدم كليا.

مثال 4.3.3. إليك الشكل التالي



يعطى التمثيل الوسيطي لهذا السطح كمايلي

$$x(u,v)=u\ \mathrm{e}_1+v\ \mathrm{e}_2+u(u^2-3v^2)\ \mathrm{e}_3$$

شعاع الوحدة الناظمي هو

$$\mathcal{N}=\frac{3(v^2-u^2)\mathrm{e}_1+6uv\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)^2}}$$

و معاملات الصيغة الأساسية الثانية هي

$$\boldsymbol{L}=\frac{6u}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)^2}},\qquad \boldsymbol{M}=\frac{-6v}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)^2}},\qquad \boldsymbol{N}=\frac{-6u}{\sqrt{1+9(u^2+v^2)^2}}.$$

و بالتالي نلاحظ أن $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}=0$ من أجل $p(0,0,0)$. أي النقطة p هي نقطة مستوية.

تعريف 28.3.3. ليكن S سطح منتظم من $\mathbb{R}^3$ تقوّسه المتوسط $\boldsymbol{H}$ و تقوّسه الغوصي هو $\boldsymbol{K}$.
◂ إذا كان $\boldsymbol{H}=0$ نقول عن S أنه سطح **مستصغر.**
◂ إذا كان $\boldsymbol{K}=0$ نقول عن S أنه سطح **قابل للبسط.**

السطوح القابلة للبسط هي سطوح يمكن تحويلها لسطح مستوٍ دون تمديد أو تمزيق. مثلا المخروط و الإسطوانة يمكن الحصول عليهما بتدوير ورقة مستوية.

مثال 4.3.3. نعتبر السطح

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ z=f(x,y)\},\qquad f:\mathcal{C}^\infty(U\subset\mathbb{R}^2)\longrightarrow\mathbb{R}.$$

يمكنك إجراء الحساب اللازم لإثبات أن

$$\boldsymbol{K}(x,y)=\frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2},$$

$$\boldsymbol{H}(x,y)=\frac{f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)}{3(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}}.$$

و عليه، تكون S سطحا مستصغرا إذا كان

$$f_{xx}(1+f_y^2)-2f_xf_yf_{xy}+f_{yy}(1+f_x^2)=0$$

و تعطى الحالتين الملموستين

$$f(x,y)=ax+by+c,\qquad f(x,y)=arctan\frac{y}{x}.$$

و تكون S سطحا قابلا للبسط إذا كان

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$$

و تعطى الحالتين الملموستين

$$f(x,y)=ax+by+c,\qquad f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

تمرين 5. أعد دراسة المثال السابق من أجل سطح دوراني S.

4.3 المنحنيات الجيوديسية

توجد على سطح ما منحنيات تعطي أقصر مسافة بين نقطتين عليه، في حالة السطح المستوي تكون هذه المنحنيات هي قطع مستقيمة و هذا هو الشائع في الهندسة الإقليدية عموما ولكن على سطح تقوّسه غير معدوم يصبح الأمر مختلفا و عندئذ نقول أن أقصر مسافة بين نقطتين هي خط جيوديسي أي هو منحنى له أقصر طول بين كل المنحنيات التي تصل بين النقطتين على السطح.

1.4.3 المنحنيات على السطوح

نعتبر (C) منحنى ذي تمثيل وسيطي طبيعي s يقع على سطح منتظم (S) تمثيله الوسيطي $X(u,v)$. نعلم أن شعاع الوحدة المماس يعطى بالعلاقة

$$\mathbf{T} = \dot{X} = \frac{dX}{ds} = X_u\frac{du}{ds} + X_v\frac{dv}{ds}$$

في الحقيقة $\mathbf{T}$ هو مماس لكل من المنحنى و السطح في آن واحد و في نفس النقطة p على عكس شعاع الوحدة الناظمي $\mathcal{N}$ الذي ليس من الضروري أن يكون عموديا على المستوي المماس للمنحنى في النقطة p. وعليه، لدراسة تغيّر التقوّس عندما يتغير المنحنى حول نقطة ما منه لا يمكننا الإعتماد على معلم فريني $(\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B})$ باعتبار الشعاعين $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ يتأثران بتغير المنحنى.
في هذه الوضعية، من المناسب انشاء معلم مصاحب للمنحنى و مرتبط مع شعاع الوحدة الناظمي $\mathcal{N}$ على السطح S عند النقطة p.

تعريف 29.4.3. نسمي الثلاثية $(\boldsymbol{T},\boldsymbol{n},\mathcal{N})$ **معلم داربو** و هو معلم معرّف على امتداد منحنٍ يقع على سطح منتظم حيث $\boldsymbol{n}$ هو شعاع وحدة عمودي على المنحنى و يقع في المستوي المماس معرّف بالعلاقة

$$\boldsymbol{n} = \mathcal{N} \wedge \boldsymbol{T}$$

و يسمى **الشعاع الجيوديسي العمودي**.

بنفس الطريقة المتّبعة في استنتاج جملة المعادلات التفاضلية سيري-فريني المرتبطة بمعلم فريني (أنظر الفصل الأول)، يمكننا الحصول على الجملة التالية

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = \rho_g(s)\mathbf{n} + \rho_n(s)\mathcal{N} \\ \dot{\mathbf{n}} = -\rho_g(s)\mathbf{T} + \tau_g(s)\mathcal{N} \\ \dot{\mathcal{N}} = -\tau_g(s)\mathbf{n} - \rho_n(s)\mathcal{N} \end{cases}$$

حيث الدالة ρ_g تسمى **التقوّس الجيوديسي** و الدالة τ_g تسمى **الفتل الجيوديسي** للمنحني (S) الواقع على السطح (S) أما ρ_n فهو التقوّس الناظمي المعرّف سابقا.
فيما يلي، سنبرز أهمية التقوّس الجيوديسي ρ_g.

تعريف 30.4.3. نعتبر (S) سطح منتظم تمثيله الوسيطي $X(u,v)$ و ليكن (C) منحنى يقع على السطح S معرّف بالدوال التالية $u=u(t)$ و $v=v(t)$.
يعرّف التقوّس الجيوديسي ρ_g بالجُداء الثلاثي التالي

$$\begin{aligned}\rho_g &= [\boldsymbol{T}(s),\kappa(s),\mathcal{N}(s)]\\ &= [\frac{dX}{ds},\frac{d^2X}{ds^2},\mathcal{N}(s)]\\ &= \frac{[X'(t),X''(t),\mathcal{N}(t)]}{|X'(t)|^3}.\end{aligned}$$

مثال 5.4.3. لنحسب التقوّس الجيوديسي لمنحنى الحلزون الدائري $u=v=t$ الواقع على الإسطوانة الدائرية القائمة ذات التمثيل الوسيطي

$$X(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$$

بالتعويض ينتج

$$X(t)=(\cos t,\sin t,t)$$

و هو التمثيل الوسيطي منحنى الحلزون الدائري الواقع على الإسطوانة الدائرية القائمة التي نصف قطرها 1. لدينا

$$X'(t)=(-\sin t,\cos t,1),\qquad |X'(t)|=\sqrt{2}$$

$$X''(t)=(-\cos t,-\sin t,0)$$

معاملات الصيغة الأساسية الأولى هي

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{G}=1,\quad \boldsymbol{F}=0$$

و شعاع الوحدة الناظمي هو $\mathcal{N}=(\cos u,\sin u,0)$ و على امتداد المنحنى الحلزوني يكون

$$\mathcal{N}=(\cos t,\sin t,0)$$

و بالتالي التقوّس الجيوديسي

$$\rho_g=[X'(t),X''(t),\mathcal{N}]=\begin{bmatrix}-\sin t & \cos t & 1\\ -\cos t & -\sin t & 0\\ \cos t & \sin t & 0\end{bmatrix}=0.$$

تمرين 6. من أجل

$$(S):\ X(u,v)=(2u+v,u-v,u+2v),\qquad (C):\ X\big(u(t)=t,v(t)=t\big)$$

بيّن أن

$$\rho_g=\frac{18}{\sqrt{3}(24v^2+12v+6)^{3/2}}.$$

تعريف 31.4.3. نقول عن المنحني (C) الواقع على السطح S أنه خط جيوديسي إذا كان تقوّسه الجيوديسي معدوما عند جميع نقاطه.

مبرهنة 13.4.3. إذا تماسا سطحان على امتداد منحنى و كان هذا المنحنى طا جيوديسيا على أحدهما فإنه يكون جيوديسيا على الآخر.

2.4.3 معاملات كريستوفل

ليكن $X(u,v)$ تمثيلا و سيطيا لسطح منتظم S من $\mathbb{R}^3$ و ليكن $\mathcal{N}$ شعاع الوحدة الناظمي. إذن، الثلاثية $(X_u,X_v,\mathcal{N})$ تُشكّل أساسا في لفضاء $\mathbb{R}^3$ يسمى **معلم غوص-فينغارت.**

كما في نظرية المنحنيات حيث أوجدنا صيغ لمعادلات تغيّر كل من شعاع المماس **T** و الشعاع العمودي الأساسي **N** الشعاع العمودي الثانوي **B** على المنحنى عند أي نقطة عليه، نحاول في هذه الفقرة إيجاد صيغ مناسبة لتغيّر الشعاعين X_u، X_v و الشعاع الناظمي $\mathcal{N}$ على السطح S.

بداية ننبّه أننا سنستعمل الترميز التالي:

$$u=x^1,\qquad v=x^2,\qquad X_u=X_1,\qquad X_v=X_2,$$

$$X_{uu}=X_{11},\qquad X_{uv}=X_{vu}=X_{12}=X_{21},\qquad X_{vv}=X_{22},$$

وكذلك

$$\mathbf{I}_{11}=\mathbf{E},\quad \mathbf{I}_{12}=\mathbf{I}_{21}=\mathbf{F},\quad \mathbf{I}_{22}=\mathbf{G}$$

مع **I** هي الصيغة الأساسية الأولى. و عليه، الشعاع X_{ij} نقصد به

$$X_{ij}=\frac{d^2X}{dx^idx^j}=\frac{d^2X}{dx^jdx^i}=X_{ji},\qquad i,j\in\{1,2\}$$

و نكتبه بمزج خطي لعناصر الأساس $(X_1,X_2,\mathcal{N})$ كمايلي

$$X_{ij}=\sum_{k=1}^{2}a_kX_k+b\mathcal{N}$$

بما أنّ

$$X_k \cdot X_l = \delta_{kl}, \qquad X_k \cdot \mathcal{N} = 0, \qquad \mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = 1$$

ينتج $a_k = X_{ij} \cdot X_k$. يُرمز للمعامل a_k بالرمز Γ_{ij}^k و الذي يشمل الأدلة الثلاثة i، j و k.
من جهة أخرى نعلم أن

$$b = X_{ij} \cdot \mathcal{N} = \mathbf{II}_{ij}$$

مع $\mathbf{II}$ هي الصيغة الأساسية الثانية، أي

$$X_{11} \cdot \mathcal{N} = \mathbf{L} = \mathbf{II}_{11}, \quad X_{12} \cdot \mathcal{N} = \mathbf{M} = \mathbf{II}_{12}, \quad X_{22} \cdot \mathcal{N} = \mathbf{G} = \mathbf{II}_{22}$$

و بالتالي، نستطيع كتابة المزج الخطي على النحو التالي

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k X_k + \mathbf{II}_{ij}\mathcal{N} \tag{3.3}$$

كما رأينا سابقا، $\mathbf{II}_{ij}$ هي الكميات الأساسية الثانية على السطح و هي المسؤولة عن تحديد شكل السطح أي تقوّسه و هي مسقط المشتقة X_{ij} في إتجاه $\mathcal{N}$ نسمّيها المركّبة العمودية و هي تعني مدى ارتباط الشعاع X_{ij} مع بالشعاع $\mathcal{N}$ ، بينما الكميات Γ_{ij}^k تعرف على أنها مسقط المشتقة X_{ij} على شعاع الوحدة $\mathbf{T}_k$ في اتجاه شعاع المماس X_k في المستوي المماس نسميها المركّبة المماسية و هي تعني مدى ارتباط الشعاع X_{ij} مع المستوي المماس.
باستعمال الترميز التالي

$$\mathbf{I}_{11} = X_1 \cdot X_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{I}_{12} = \mathbf{I}_{21} = X_1 \cdot X_2 = \mathbf{F}, \quad \mathbf{I}_{22} = X_2 \cdot X_2 = \mathbf{G}$$

لدينا

$$\mathbf{I}_{ij} = X_i \cdot X_j$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ x^k نحصل على

$$\frac{\partial \mathbf{I}_{ij}}{\partial x^k} = X_{ik} \cdot X_j + X_i \cdot X_{jk}$$

باستعمال العلاقة (3.3) نحصل على

$$\frac{\partial \mathbf{I}_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^l \mathbf{I}_{lj} + \Gamma_{jk}^l \mathbf{I}_{il} \tag{3.4}$$

مع ملاحظة أننا تخلينا عن استعمال رمز المجموع $\sum$ مكتفين بتوظيف اصطلاح إنشتاين حيث كلما تكرّر دليل في عبارة فثمّة مجموع حوله. بتدوير الثلاثية (i, j, k) ينتج

$$\frac{\partial \mathbf{I}_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ji}^l \mathbf{I}_{lk} + \Gamma_{ki}^l \mathbf{I}_{jl} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{I}_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma^l_{kj}\mathbf{I}_{li} + \Gamma^l_{ij}\mathbf{I}_{kl} \tag{3.6}$$

بجمع المعادلتين (3.5) و (3.6) ثم طرح المعادلة (3.4) نجد

$$2\mathbf{I}_{kl}\Gamma^l_{ji} = \frac{\partial \mathbf{I}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{I}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{I}_{ij}}{\partial x^k} \tag{3.7}$$

بضرب طرفي المعادلة (3.7) في $\mathbf{I}^{mk}$ و هو معكوس $\mathbf{I}_{kl}$ نحصل على

$$2\mathbf{I}^{mk}\mathbf{I}_{kl}\Gamma^l_{ji} = \mathbf{I}^{mk}\Big(\frac{\partial \mathbf{I}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{I}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{I}_{ij}}{\partial x^k}\Big) \;\Leftrightarrow\; 2\delta^m_l\Gamma^l_{ji} = \mathbf{I}^{mk}\Big(\frac{\partial \mathbf{I}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{I}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{I}_{ij}}{\partial x^k}\Big)$$

هذا المقدار ليس له قيمة إلا في حالة $m = l$ إذن

$$\Gamma^l_{ji} = \frac{1}{2}\mathbf{I}^{lk}\Big(\frac{\partial \mathbf{I}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathbf{I}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathbf{I}_{ij}}{\partial x^k}\Big) \tag{3.8}$$

ملاحظة 13.4.3. من $X_{ij} = X_{ji}$ نجد أن $\Gamma^l_{ij} = \Gamma^l_{ji}$.

تعريف 32.4.3. الدوال

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\boldsymbol{I}^{kl}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{I}_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial \boldsymbol{I}_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial \boldsymbol{I}_{ij}}{\partial x^l}\Big)$$

تسمى معاملات كريستوفل.

من المعادلة (3.3) نستطيع استخراج ثلاثة حالات ممكنة وهي

$$\begin{cases} X_{11} = \Gamma^1_{11}X_1 + \Gamma^2_{11}X_2 + \mathbf{II}_{11}\mathcal{N} \\ X_{12} = \Gamma^1_{12}X_1 + \Gamma^2_{12}X_2 + \mathbf{II}_{12}\mathcal{N} \\ X_{22} = \Gamma^1_{22}X_u + \Gamma^2_{22}X_v + \mathbf{II}_{13}\mathcal{N} \end{cases}$$

و التي تسمى **معادلات غوص.**

مثال 6.4.3. سنبحث في هذا المثال عن المعادلات الأساسية لغوص على سطح أسطوانة عادية و هي أسطوانة أُنشِئت انطلاقا من منحنٍ مستوٍ $y = f(x),\ z = 0$ و بالتالي تمثيلها الوسيطي يعطى بالشكل

$$X(x^1, x^2) = \big(x^1, f(x^1), x^2\big)$$

حيث $x^1, x^2 \in \mathbb{R}$ هما وسيطا التمثيل و f دالة قابلة للتفاضل كما نريد (دالة منتظمة).
و عليه، المشتقات الجزئية هي

$$X_1 = (1, f', 0), \qquad X_2 = (0, 0, 1)$$

$$X_{11} = (0, f'', 0), \qquad X_{12} = X_{22} = (0,0,0)$$

و الصيغة الأساسية الأولى هي

$$\boldsymbol{I} = (1 + f'^2)(dx^1)^2 + (dx^2)^2,$$

أي

$$\boldsymbol{I}_{11} = 1 + f'^2, \quad \boldsymbol{I}_{12} = 0, \quad \boldsymbol{I}_{22} = 1, \qquad \boldsymbol{I}^{11} = \frac{1}{1+f'^2}, \quad \boldsymbol{I}^{12} = 0, \quad \boldsymbol{I}^{22} = 1.$$

شعاع الوحدة الناظمي هو

$$\mathcal{N} = \frac{X_1 \wedge X_2}{|X_1 \wedge X_2|} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(f', -1, 0)$$

ومنه، الصيغة الأساسية الثانية هي

$$\boldsymbol{II} = \frac{-f''}{\sqrt{1+f'^2}}(dx^1)^2,$$

أي

$$\boldsymbol{II}_{11} = \frac{-f''}{\sqrt{1+f'^2}}(dx^1)^2, \qquad \boldsymbol{II}_{12} = \boldsymbol{II}_{22} = 0$$

صيغ الإرتباط، تُحسب باستعمال التعريف

$$\Gamma^k_{ji} = \frac{1}{2}\boldsymbol{I}^{kl}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{I}_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial \boldsymbol{I}_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial \boldsymbol{I}_{ij}}{\partial x^l}\Big) \tag{3.9}$$

و عليه

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{I}^{11}(\frac{\partial \boldsymbol{I}_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \boldsymbol{I}_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial \boldsymbol{I}_{11}}{\partial x^1}) + \boldsymbol{I}^{12}(\frac{\partial \boldsymbol{I}_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \boldsymbol{I}_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial \boldsymbol{I}_{11}}{\partial x^2})\Big)\\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{I}^{11}\frac{\partial \boldsymbol{I}_{11}}{\partial x^1} \qquad \Big(\boldsymbol{I}_{12} = \boldsymbol{I}^{12} = 0, \quad \Big)\\
&= \frac{f'f''}{1+f'^2}
\end{aligned}$$

بالمثل نجد

$$\Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0.$$

و باستعمال صيغ المعادلات الأساسية نحصل على

$$\begin{aligned} X_{11} &= \Gamma^1_{11} X_1 + \Gamma^2_{11} X_2 + \boldsymbol{I\!I}_{11}\mathcal{N} \\ &= \frac{f'f''}{1+f'^2} X_1 - \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}\mathcal{N} \\ &= \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}\Big(\frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} X_1 - \mathcal{N}\Big) \end{aligned}$$

3.4.3 تفسير هندسي لمعادلات غوص

عرفنا أنّ معادلات غوص تعطى بالعلاقة التالية

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} X_k + \mathbf{II}_{ij}\mathcal{N}$$

نضع

$$\nabla_j X_i = X_{ij} - \sum_{k=1}^{2} \Gamma^k_{ij} X_k = \mathbf{II}_{ij}\mathcal{N}$$

إذن، $\nabla_j X_i$ هي المسقط العمودي للشعاع X_{ij} على المستوي المماس و تساوي $\mathbf{II}_{ij}\mathcal{N}$. حيث المؤثر ∇_j يعني المشتقة الموافقة للتغيّر في إتجاه X_j و تُعرّف لأي شعاع V_k مُوافق للتغيّر على النحو التالي

$$\nabla_j V_i = V_{i,j} - \Gamma^l_{ij} V_k = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ik} V_k.$$

4.4.3 المنحنيات الجيوديسية

الآن سنحاول إستخراج المعادلات التفاضلية التي تحدّد الخط الجيوديسي على سطح.

من التعريف أعلاه، المنحنى الجيوديسي يتحدّد من خلال إنعدام التقوّس الجيوديسي $(\rho_g = 0)$ و هذا يكافئ حل جملة المعادلتين التفاضليتين

$$\big(\ddot{x}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\big)\dot{x}^2 = 0, \qquad \big(\ddot{x}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\big)\dot{x}^1 = 0$$

و حيث أن $\dot{x}^1 \neq 0$ و $\dot{x}^2 \neq 0$ فإنّ

$$\ddot{x}^1 + \Gamma^1_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \qquad \ddot{x}^2 + \Gamma^2_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

باستعمال الترميز المعتاد أي $x^1 = u$ و $x^2 = v$ تصبح المعادلتين تكافئان

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

و عليه نكون قد توصلنا الى مايلي:

تعريف 33.4.3. ليكن S سطح منتظم تمثيله الوسيطي $X(u,v)$ و نعتبر (C) منحنى ذي تمثيل وسيطي طبيعي $X\big(u(s), v(s)\big)$ يقع على السطح S. تحدّد الخطوط الجيوديسية على سطح منتظم من خلال حل جملة المعادلات التفاضلية التالية

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0$$

و ذلك من أجل كل $k \in \{1,2\}$.

مثال 6.4.3. الخطوط الجيوديسية في السطح المستوي هي الخطوط المستقيمة.

5.4.3 حساب الجيوديسيات

نقدّم الآن طريقة للحصول على الخطوط الجيوديسية و فيها نُوظّف معاملات الصيغة الأساسية الأولى مباشرة و ليست معاملات كريستوفل.
علِمنا سابقا أنّ الخط الجيوديسي هو أقصر مسار من بين جميع المسارات التي تربط بين نقطتين على سطح و بذلك يظهر مفهوم القيم الحدّية لدالة طول القوس. أي، المطلوب حساب أقصر منحنى بين سائر المنحنيات التي تُعرّف من خلال التكامل التالي (أنظر 2.2.3، صفحة 67)

$$L = \int ds = \int \sqrt{\mathbf{I}(u', v')}\, dt = \int \sqrt{\mathbf{I}_{ij} dx^1 dx^2}$$

و الذي يمكن كتابته على أحد الشكلين التاليين

$$L = \int \sqrt{\mathbf{I}_{11} + 2\mathbf{I}_{12} dx^2 + \mathbf{I}_{22}(dx^2)^2}\, dx^1 \tag{3.10}$$

$$L = \int \sqrt{\mathbf{I}_{11}(dx^1)^2 + 2\mathbf{I}_{12} dx^1 + \mathbf{I}_{22}}\, dx^2 \tag{3.11}$$

في العبارة الأولى (3.10)، L هي دالة ذات المتغيرين x^2 و dx^2 لأننا نكامل بالنسبة لـ x^1. أما العبارة الثانية (3.11)، فهي دالة ذات متغيرين x^1 و dx^1 لأننا نكامل بالنسبة لـ x^2.
و قصد إيجاد النقاط الشاذة نستعمال معادلة **أولار-لاغرانج** التفاضلية

$$\frac{\partial L}{\partial x^2} - \frac{d}{dx^1}\frac{\partial L}{\partial dx^2} \tag{3.12}$$

من (3.10) ينتج

$$\frac{\partial L}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{I}_{11} + 2\mathbf{I}_{12}dx^2 + \mathbf{I}_{22}(dx^2)^2}}\Big(\frac{\partial \mathbf{I}_{11}}{\partial x^2} + \frac{2\partial \mathbf{I}_{12}}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial \mathbf{I}_{22}}{\partial x^2}(dx^2)^2\Big),$$

$$\frac{\partial L}{\partial dx^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{I}_{11} + 2\mathbf{I}_{12}dx^2 + \mathbf{I}_{22}(dx^2)^2}}\Big(2\mathbf{I}_{12} + 2\mathbf{I}_{22}dx^2\Big),$$

بالتعويض في (3.12) مع إعادة استعمال الرموز الأصلية

$$u = x^1, \qquad u' = dx^1, \qquad v = x^2, \qquad v' = dx^2$$

قصد تبسيط المعادلات نحصل على

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{I}_{11} + 2\mathbf{I}_{12}v' + \mathbf{I}_{22}v'^2}}\left(\frac{\partial \mathbf{I}_{11}}{\partial v} + 2\frac{\partial \mathbf{I}_{12}}{\partial v}v' + \frac{\partial \mathbf{I}_{22}}{\partial v}v'^2\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{\mathbf{I}_{12} + \mathbf{I}_{22}v'}{\sqrt{\mathbf{I}_{11} + 2\mathbf{I}_{12}v' + \mathbf{I}_{22}v'^2}}\right) = 0 \tag{3.13}$$

حل هذه المعادلة التفاضلية صعب جدا قد نظطر الى استعمال الحساب العددي أو برمجية كالمابل أو ماتيماتيكا مثلا و لكن هنا سنتطرق لحل بعض الحالات الخاصة:
◄ حالة : $\mathbf{I}_{ij} = \mathbf{I}_{ij}(u)$
في هذه الحالة المعادلة (3.13) تصبح على الشكل

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\mathbf{I}_{12} + \mathbf{I}_{22}v'}{\sqrt{\mathbf{I}_{11} + 2\mathbf{I}_{12}v' + \mathbf{I}_{22}v'^2}}\right) = 0$$

و بالتاكامل بالنسبة الى u نجد

$$\frac{\mathbf{I}_{12} + \mathbf{I}_{22}v'}{\sqrt{\mathbf{I}_{11} + 2\mathbf{I}_{12}v' + \mathbf{I}_{22}v'^2}} = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

بتربيع الطرفين و تبسيط المعادلة نحصل على

$$\mathbf{I}_{22}(\mathbf{I}_{22} - c^2)v'^2 + 2\mathbf{I}_{12}(\mathbf{I}_{22} - c^2)v' + \mathbf{I}_{12}^2 - c^2\mathbf{I}_{11})v'^2 = 0$$

إذن

$$v' = \frac{1}{2\mathbf{I}_{22}(\mathbf{I}_{22} - c^2)}\big(2\mathbf{I}_{12}(c^2 - (\mathbf{I}_{22}) \pm \sqrt{D}\big)$$

مع

$$D = 4\mathbf{I}_{12}^2(\mathbf{I}_{22} - c^2)^2 - 4\mathbf{I}_{22}(\mathbf{I}_{22} - c^2)(\mathbf{I}_{12}^2 - c^2\mathbf{I}_{11})$$

و بالتكامل مرّة أخرى نجد $v = v(u)$ و هي معادلة منحنى على السطح.

◄ حالة $\mathbf{I}_{ii} = \mathbf{I}_{ii}(u)$ مع $\mathbf{I}_{12} = 0$:

في هذه الحالة المعادلة (3.13) تصبح على الشكل

$$v' = \pm\frac{\sqrt{4\mathbf{I}_{22}(\mathbf{I}_{22} - c^2)\mathbf{I}_{11}c^2}}{2\mathbf{I}_{22}(\mathbf{I}_{22} - c^2)} \tag{3.14}$$

$$= \pm c\sqrt{\frac{\mathbf{I}_{11}}{\mathbf{I}_{22}(\mathbf{I}_{22} - c^2)}} \tag{3.15}$$

و بالتالي

$$v = \pm c\int\sqrt{\frac{\mathbf{I}_{11}}{\mathbf{I}_{22}(\mathbf{I}_{22} - c^2)}}\,du$$

◄ حالة $\mathbf{I}_{ii} = \mathbf{I}_{ii}(v)$ مع $\mathbf{I}_{12} = 0$:

بنفس الطريقة نجد

$$u = \pm c\int\sqrt{\frac{\mathbf{I}_{22}}{\mathbf{I}_{11}(\mathbf{I}_{11} - c^2)}}\,dv$$

مثال 6.4.3. لنبحث عن الخطوط الجيوديسية على السطح الدوراني

$$X(u, v) = \big(u,\ f(u)\cos v,\ f(u)\sin v\big), \qquad f > 0$$

حيث محور الدوران منطبق على المحور $(x'x)$ و منحنى الشكل $y = f(x)$ واقع في المستوي (xy).
يمكن للطالب أن يجتهد في التحقق من أن الصيغة الأساسية الأولى للسطح الدوراني هي

$$\boldsymbol{I}(du, dv) = \Big(1 + f'^2(u)\Big)du^2 + f^2(u)dv^2.$$

اعتمادا على الحالة الخاصة الثانية أعلاه، نحصل على

$$v = c\int\frac{\sqrt{1 + f'^2(u)}}{f(u)\sqrt{f^2(u) - c^2}}\,du$$

مع $f^2(u) > c^2$.

مثال 6.4.3. الخطوط الجيوديسية على سطح الإسطوانة الدائرية القائمة.
باعتبار سطح الإسطوانة الدائرية القائمة هو سطح دوراني ناتج عن دوران الخط المستقيم $y=b$ حول محور الفواصل. وحيث أن $y=f(u)=b$ فباستخدام المثال السابق مع $f'=0$ نحصل على

$$v=c\int\frac{du}{b\sqrt{b^2-c^2}}\qquad b^2>c^2$$

أي

$$v=\frac{c}{b\sqrt{b^2-c^2}}\int du\Rightarrow u=\frac{c}{b\sqrt{b^2-c^2}}u+k\qquad k\in\mathbb{R}$$

هذه العلاقة هي علاقة خطية بين وسيطي التمثيل و بالتالي فإن الخطوط الجيوديسية على سطح الأسطوانة الدائرية القائمة هي حلزون دائري.

مثال 6.4.3. الخطوط الجيوديسية على سطح الكرة.
لتكن $\mathbb{S}^2$ كرة نصف قطرها r و مركزها مبدأ الإحداثيات. و نعتبر التمثيل الوسيطي الكروي التالي

$$X(u,v)=r\big(\cos\theta\sin\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\phi\big)$$

من المثال (4.3.3) لدينا معاملات الصيغة الأساسية الأولى هي

$$\boldsymbol{I}_{11}=r^2\sin^2\theta,\qquad \boldsymbol{I}_{12}=\boldsymbol{I}_{21}=0,\qquad \boldsymbol{I}_{22}=r^2.$$

حسب الحالة الخاصة الثالثة (أنظر أعلاه)، ينتج

$$\begin{aligned}\theta &= c\int\sqrt{\frac{\boldsymbol{I}_{22}}{\boldsymbol{I}_{11}(\boldsymbol{I}_{11}-c^2)}}\,d\phi\\ &= c\int\frac{1}{\sqrt{\sin^2\phi\big(r^2\sin^2\phi-c^2\big)}}d\phi\\ &= \int\frac{1}{\sin\phi\sqrt{a^2\sin^2\phi-1}}d\phi\qquad a=\frac{r}{c}\end{aligned}$$

و باستعمال تكامل بالتعويض (يمكن استخدام برمجية ما) نجد

$$\theta=-\tan^{-1}\left(\frac{\cos\phi}{\sqrt{c^2-1}}\right)+k,\qquad k\in\mathbb{R}$$

باستعمال الدساتير المثلثية يمكن تحويل العلاقة الى الشكل التالي

$$\theta = -\sin^{-1}\Big(\frac{\cot\phi}{\sqrt{c^2-1}}\Big) + k$$

إذن

$$\cot\phi = \sqrt{c^2-1}\,\sin(k-\theta)$$

و بما أنّ $\cot\phi = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$ فإن

$$\cos\phi = \sqrt{c^2-1}\big(\sin k\sin\phi\cos\theta - \cos k\sin\phi\sin\theta\big)$$

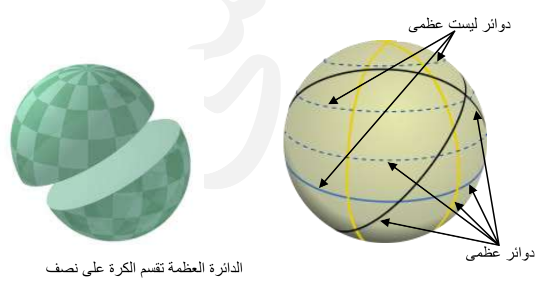
باستخدام هذه المعادلة و العلاقة بين الإحداثيات الكروية و الإحداثيات الديكارتية نحصل على

$$\frac{z}{r} = \Big(\sqrt{c^2-1}\,\sin k\Big)\frac{x}{r} - \Big(\sqrt{c^2-1}\,\cos k\Big)\frac{y}{r}$$

أي

$$x\cos k - y\cos k - \frac{z}{\sqrt{c^2-1}} = 0$$

و هي معادلة ديكارتية لمستوٍ يمرّ بمركز الكرة أي هذا المستوي يقطع الكرة في دائرة عظمى (مركزها هو نفسه مركز الكرة). و عليه، الخطوط الجيوديسية على سطح كرة هي الدوائر العظمى على هذه الكرة.



يمكننا الإشارة هنا الى طول الخط الجيوديسي من دائرة عظمى على اعتبار هو طول قوس من دائرة عظمى يصل بين نقطتين p_1 و p_2 أي هو طول قوس قيسه α حيث

$$\cos\alpha = \frac{V_1\cdot V_2}{\|V_1\|\|V_2\|}$$

حيث V_1 و V_2 هما شعاعا الموضع للنقطتين p_1 و p_2 على سطح الكرة يعرّفان بالشكل

$$V_i = r\big(\cos\theta_i\sin\phi_i,\ \sin\theta_i\sin\phi_i,\ \cos\phi_i\big),\qquad i=1,2$$

و بما أن $\|V_1\| = \|V_2\| = r$ فإن

$$\cos\alpha = \sin\phi_1 \sin\phi_2\big(\sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2\big) + \cos\phi_1 \cos\phi_2$$

أي

$$\cos\alpha = \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos\phi_1 \cos\phi_2 = \gamma$$

نعلم أنّ طول القوس هو $l = r\alpha$ و بالتعويض $\alpha = \cos^{-1}\gamma$ نحصل على

$$l = r\cos^{-1}\big(\sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos\phi_1 \cos\phi_2\big)$$

و للحصول على محيط الدائرة العظمى يكفي أن تنطبق النقطين p_1 و p_2 أي $\phi_1 = \phi_2$ و $\theta_1 = \theta_2$ فينتج

$$l = r\cos^{-1}\big(\cos 0\big) = r\cos^{-1} 1 = 2\pi r.$$

5.3 تمارين محلولة

التمرين 1 : نعتبر S السطح من $\mathbb{R}^3$ المعرّف بالمعادلة التالية

$$2(2z^2 + y^2) + x = 0.$$

°1) هل السطح منتظم؟
°2) إعط تمثيلا وسيطيا للسطح S.
°3) أوجد أساسا للفضاء المماس للسطح S عند النقطة $A(-6, 1, -1)$.
°4) أوجد شعاعا ناظما للسطح عند النقطة A.
°5) هل ينتمي الشعاع $V(27, -29, -1)$ للمستوي المماس للسطح في النقطة A. برّر إجابتك.

الحل:

°1) يمكننا التعبير عن السطح S بالدالة الضمنية

$$f : (y, z) \mapsto -2(2z^2 + y^2),$$

و هي دالة من الصنف $\mathcal{C}^\infty$. إذن، السطح منتظم.

°2) التمثيل الوسيطي للسطح S هو:

$$X(u, v) = \big(-2(2z^2 + y^2);\ u;\ v\big).$$

°3) النقطة $A(-6, 1, -1)$ يُتحصّل عليها من أجل $(u, v) = (1, -1)$ و عليه، لدينا

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (-4u; 1; 0) = (-4, 1, 0), \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = (-8v; 0; 1) = (8, 0, 1).$$

و هذين الشعاعين يشكلان أساسا للمستوي المماس للسطح في النقطة A.

4°) نعتبر N شعاعا ناظما للسطح S عند النقطة A و φ الدالة $\varphi(x,y,z)=2(2z^2+y^2)+x$. إذن

$$N=\text{grad}\varphi_{|A}=(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z})_{|A}=(1;4y;8z)_{|A}=(1,4,-8).$$

5°) بما أن

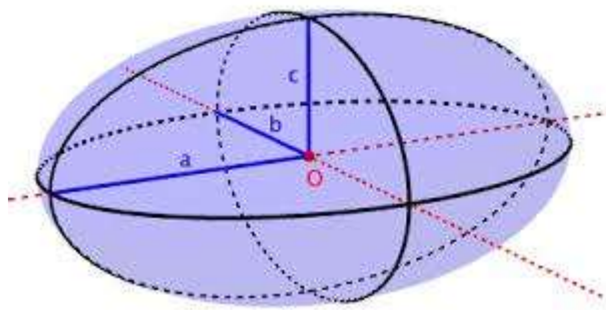
$$<V,N>=-81\neq 0,$$

الشعاع V لا ينتمي للمستوي المماس للسطح في النقطة A.

ملاحظة: يستحسن التفكير بطرق أخرى للحل..

التمرين 2 : أحسب مساحة السطح الناقص (الإهليلجي) ذي المعادلة

$$x^2+y^2+5z^2=1.$$



السطح الناقص أو الإهليلجي

الحل: نعطي أولا تمثيلا و سيطيا للسطح و ذلك باستعمال الإحداثيات الكروية

$$X(\theta,\phi)=\big(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,1/\sqrt{5}\cos\phi\big),$$

مع $\theta\in[0;2\pi]$ و $\phi\in[0;\pi]$. المستوي المماس مولّد بالشعاعين

$$\frac{\partial X}{\partial\theta}=\big(-\sin\theta\sin\phi,\cos\theta\sin\phi,0\big),\quad \frac{\partial X}{\partial\phi}=\big(-\cos\theta\cos\phi,\sin\theta\cos\phi,-1/\sqrt{5}\sin\phi\big).$$

في هذا الأساس، مصفوفة الصيغة الأساسية الاولى هي

$$\begin{pmatrix}\sin^2\phi & 0\\ 0 & \cos^2\phi+\frac{1}{5}\sin^2\phi\end{pmatrix}.$$

و بالتالي، مساحة هذا السطح تكون

$$\begin{aligned} A &= \int_{\phi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2}\pi\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\phi\sqrt{1+4\cos^2\phi}\;d\phi d\theta \\ &= 2\pi\int_{\phi=0}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\phi\sqrt{1+4\cos^2\phi}\;d\phi \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\int_{t=-1}^{1}\sqrt{1+4t^2\phi}\;dt \\ &= \pi\left(2+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

التمرين 3 : برهن أنّ كل نقط السطح الدوراني

$$x = f(t)\cos\theta\mathbf{e}_1 + f(t)\sin\theta\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3, \qquad f(t)>0$$

هي نقط مكافئة إذا و فقط إذا كان السطح هو اسطوانة دائرية قائمة $f=a$، أو مخروط $f=at+b$ مع a و b ثابتين و a غير معدوم .

الحل: بحساب بسيط نجد

$$\mathbf{L} = \frac{-f}{\sqrt{1+f'^2}}, \qquad \mathbf{M}=0, \qquad \mathbf{N}=\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}.$$

و عليه

$$\mathbf{LN}-\mathbf{M} = \frac{-ff''}{1+f'^2}.$$

بما أن $f>0$ فإن $\mathbf{LN}-\mathbf{M}=0$ إذا و فقط إذا كان $f''=0$.
أي $f=a\neq 0$ أو $f=at+b$ مع $a\neq 0$.

التمرين 4 : شريط موبيوس

نعتبر السطح S المعرّف بـ

$$X:]-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}[\times]0;2\pi[\to\mathbb{R}^3$$

حيث:

$$X(u,v) = \left(\left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)\cos v\;,\;\left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)\sin v\;,\;u\cos\frac{v}{2}\right)$$

1) برهن أن X هو تمثيل وسيطي منتظم
2) إعط شعاع الوحدة الناظم $\mathbf{N}_v$ لـ X عند النقطة $(0,v)$.
3) أوجد نهاية $\mathbf{N}_v$ لما $v \longrightarrow 0^+$ ثم $v \longrightarrow 2\pi^-$. ماذا تستنتج؟

الحل:

1) لدينا

$$X_u = \left(-\sin\frac{v}{2}\cos v\ ,\ -\sin\frac{v}{2}\sin v\ ,\ \cos\frac{v}{2}\right)$$

$$X_v = \left(-\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\cos v - \left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)\sin v\ ,\ -\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2}\sin v + \left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)\cos v\ ,\ -\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\right)$$

و منه

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} - \left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)\cos v\cos\frac{v}{2}\mathrm{e}_1 \\ &- \frac{u}{2}\cos v + \left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)\sin v\cos\frac{v}{2}\mathrm{e}_2 \\ &- \left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)\sin\frac{v}{2}\mathrm{e}_3, \end{aligned}$$

فينتج

$$|X_u \wedge X_v|^2 = \frac{u^2}{4} + \left(1-u\sin\frac{v}{2}\right)^2 \neq 0.$$

و بالتالي X هو تمثيل وسيطي منتظم

2) لدينا

$$N_{(0,v)} = \frac{X_u\wedge X_v}{|X_u\wedge X_v|} = -\cos v\cos\frac{v}{2}\mathrm{e}_1 + \sin v\cos\frac{v}{2}\mathrm{e}_2 - \sin\frac{v}{2}\mathrm{e}_3.$$

3) حساب النهايات

$$\lim_{v\to 0^+} N_{(0,v)} = -\mathrm{e}_1, \qquad \lim_{v\to 2\pi^-} N_{(0,v)} = +\mathrm{e}_1,$$

على سطح موجّه، يستطيع الشعاع الناظم أن يتغير باستمرار دون تغيير إتجاهه. هنا، الوضعية مخالفة، إنه المثال الشهير لسطح غير موجّه، إنه شريط موبيوس.

التمرين 5 : 1°) أوجد الشعاع الناظم $\mathcal{N}$ للسطح S المعرّف بالتمثيل الوسيطي

$$X(r,\theta) = \left(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta\ ,\ \cosh r\right).$$

حيث $\theta \in [0\ ,\ 2\pi]$ و $r \in [0\ ,\ 1]$ مع $\cosh r = \frac{e^r+e^{-r}}{2}$.

2°) هل هذا السطح موجّه؟ لماذا؟.

الحل:

1°)

$$X(r,\theta)=\big(r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta\ ,\ \cosh r\big)\qquad \text{حيث}\ \ \theta\in[0\ ,\ 2\pi]\quad \text{و}\quad r\in[0\ ,\ 1]$$

لدينا

$$X_r=\big(\cos\theta\ ,\ \sin\theta\ ,\ \sinh r\big),\qquad X_\theta=\big(-r\sin\theta\ ,\ r\cos\theta\ ,\ 0\big),$$

فينتج

$$X_r\wedge X_\theta=r\big(-\sinh r\cos\theta\ ,\ \sinh r\sin\theta\ ,\ 1\big),$$

و كذلك

$$\|X_r\wedge X_\theta\|=r\cosh r,$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}\mathcal{N}=\frac{X_r\wedge X_\theta}{\|X_r\wedge X_\theta\|}&=\Big(-\frac{\sinh r}{\cosh r}\cos\theta\ ,\ -\frac{\sinh r}{\cosh r}\sin\theta\ ,\ -\frac{1}{\cosh r}\Big)\\&=\big(-\tanh r\cos\theta\ ,\ -\tanh r\sin\theta\ ,\ \operatorname{sech} r\big)\end{aligned}$$

2°) بما أن $\mathcal{N}$ هو دالة شعاعية مستمرة من أجل كل قيم r و θ فإن وجوده دوما مضمون و مادام هذه الدالة هي دورية و دورها 2π فإن $\mathcal{N}$ لا يغير إتجاهه أبدا و عليه فالسطح منتظم.

التمرين 6 :

برهن أنّه عند كل نقطة p من سطح منتظم تمثيله الوسيطي $X(u,v)$ يكون

$$\mathcal{N}_u\wedge\mathcal{N}_v=\mathbf{K}\ X_u\wedge X_v.$$

حيث $\mathcal{N}$ هو الشعاع الناظم في النقطة p و $\mathbf{K}$ هو تقوّس غوص.

الحل:

لدينا $\mathcal{N}$ هو شعاع الوحدة الناظم للسطح المنتظم. و عليه،

$$\begin{aligned}\mathcal{N}\cdot\mathcal{N}=1\ &\Rightarrow\ \mathcal{N}_u\cdot\mathcal{N}=0\\&\Rightarrow\ \mathcal{N}_u\perp\mathcal{N},\end{aligned}$$

بالمثل نجد، $\mathcal{N}\perp\mathcal{N}_v$ أي أن الشعاعين $\mathcal{N}_u$ و $\mathcal{N}_v$ هما شعاعان من المستوي المماس في النقطة p أو بالأحرى هما مولدا المستوي المماس في النقطة p. و منه، نضع

$$\mathcal{N}_u=aX_u+bX_v,\qquad \mathcal{N}_v=cX_u+dX_v,$$

مع a، b، c و d قيم حقيقية. لاحظ أن

$$\mathcal{N}_u \wedge \mathcal{N}_v = (aX_u + bX_v) \wedge (cX_u + dX_v) = (ad - bc)X_u \wedge X_v.$$

نعلم أن

$$\begin{aligned} X_u \cdot \mathcal{N}_u &= aX_u \cdot X_u + bX_u \cdot X_v = a\mathbf{E} + b\mathbf{F} = -\mathbf{L}, \\ X_v \cdot \mathcal{N}_u &= a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = -\mathbf{M}, \\ X_u \cdot \mathcal{N}_v &= c\mathbf{E} + d\mathbf{F} = -\mathbf{M}, \\ X_v \cdot \mathcal{N}_v &= c\mathbf{F} + d\mathbf{G} = -\mathbf{N}, \end{aligned}$$

حيث $\mathbf{E}$، $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ هي معاملات الصيغة الأساسية الأولى و $\mathbf{M}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{L}$ هي معاملات الصيغة الأساسية الثانية . يمكن كتابة المعادلات الأربع السابقة كمايلي

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{L} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & -\mathbf{N} \end{pmatrix}$$

و بالتالي

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} det \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -\mathbf{L} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & -\mathbf{N} \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab - bc = \frac{\mathbf{LN} - \mathbf{M}^2}{\mathbf{EG} - \mathbf{F}^2} = \mathbf{K}.$$

و هو المطلوب.

المصادر

[1] ن. ح. ع. السلمي، كتاب الهندسة التفاضلية، مكتبة الرشد، (2008).

[2] ع. م. عوين و ط. ص. الشريف، الموترات و تطبيقاتها، منشورات ELGA (2001) .

[3] M. P. do Carmo, Differential geometry Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, (1976)

[4] M. M. Lipsshult, Differential geometry, Schaum's series (1969).

[5] J. Oprea, Differential geometry and its applications, The Mathematical association of America (2007).