الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

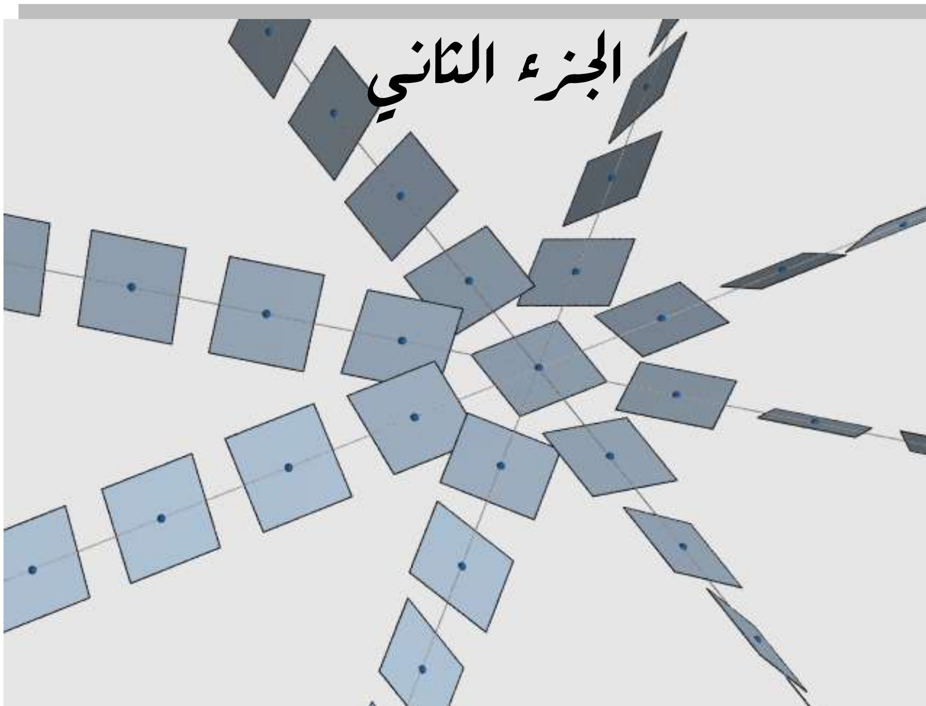
جامعة مصطفى اسطمبولي - معسكر-

كلية العلوم الدقيقة

قسم الرياضيات

البنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد

الجزء الثاني



لطلبة السنة الثانية ماستر تخصّص هندسة تفاضلية وتطبيقاتها

الدكتور بالجيلالي عنريسي

السنة الجامعية 2022 - 2023

إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله و الصلاة و السلام على رسول الله- صلى الله عليه و سلم- و بعد...

فإلى روحي والديّ الكريمين -رحمهما الله- اللذان غرسا في نفسي بذور الفضائل مُذ كنت صبيا...

إلى زوجتي المصون و أبنائي البررة- حفظهم الله- ماحافظوا على الصلاة بعد موتي و مادمت حيا...

إلى أساتذتي الذين علّموني أنه لا إيمان مع اليأس و لا فشل مع التوكّل على الله و السعي سعيا...

إلى إخواني و أحبابي الذين امتزجت روحي بأرواحهم فمازالت تحثّني كي أكون مخلصا تقيا...

إلى طلبتي الأعزّاء الذين أرى في عيونهم عزما و إصرارا على بلوغ الثّريا...

الى كل هؤلاء أهدي هذا العمل.

كلمة لابد منها

مِن نافلة القول أنَّ قضيَّة تعريب العلوم لا تَعدو أنْ تكون مُشكِلة مع ذاتنا التي تتأرْجَح بين تَبعيَّة نفسيَّة للآخَر، وشُعور بالدُّونيَّة تجاه لغتنا العربيَّة المُفتَرى عليها بالعجز عن استيعاب علوم العصر، فحالة الاستِلاب التي يَعيشها تعليم العلوم في الجامِعات أوجدتْ نوعًا مِن الانفِصام بين واقع العلوم والتقدُّم العِلميّ ومَخزون الأمَّة الحَضاريِّ، فلا عُلومُنا استفادتْ مِن علوم الآخَرين لِتُسهِم في الحضارة الإنسانية، ولا هي استنَدتْ إلى ماضيها فأعلَتْ ما بَناه السلف.

إنّ تقديم العلوم للطالب بلغته الأم التي يتواصل بها يوميا، أيسر استيعابا و أجدى نفعا من التعلّم بلغة لا يستعملها إلا وقت دراسته، ثم ينصرف عنها إلى لغة أخرى في كل شؤون حياته. فينشأ عن ذلك ازدواجية و انفصام بين لغتين، واحدة للتواصل في جوانب الحياة، و حتى للتحدث و الشرح للطلاب الجامعيين، و أخرى للمصطلحات العلمية و تعريف المفاهيم فقط. فمن ذا الذي يزعم أن أساتذتنا الجامعيين يحاضرون بلغة فرنسية تامة لو خاصة في التخصصات العلمية، و أنهم يستطيعون ذلك لو أرادوا باستثناء قلة قليلة منهم، و من قال إن طلابنا يستطيعون المتابعة و يحسنون الاستيعاب، لو كانت محاضراتهم كاملة بالفرنسية أو حتى بالانجليزية كما يوهموننا. إنهم لا يطيقون ذلك و لا يقدرون عليه، رغم أن مناهجهم و كتبهم العلمية كلها بالفرنسية و الانجليزية، لكن يظل المجتمع و المحيط كله العامل القاهر، الذي يفرض لغته على الجميع فرضا. فما يتواصل به الطلبة الجامعيون في الكليات العلمية و أساتذتهم في الواقع الفعلي ليس اللغة الفرنسية و لا اللغة العربية، بل هو خليط هجين من اللغتين، يُغَلّب المحاضر العربية في الشرح و التواصل، و يلجأ للفرنسية عند الكتابة على السبورة، بما يناسب أن يطلق عليه اللغة (العرنسية). و يكون نتيجة ذلك أن هذا الطالب لن يكون فرنسي الثقافة و لا عربيها، بل مزيج بين هذه و تلك، مما يؤدي إلى ضعف اتصال خرّيج الجامعة بمجتمعه المحيط به، و المفترض أن يتعامل معه، لأن هذا المجتمع يراه غريبا عنه، و لا يُلم باللغة التي يتحدث بها، إن أراد إيصال فكرته أو شرح حالة معينة، لأن رموزها و مصطلحاتها باللغة الأجنبية التي درسها، و التي لا يتقنها أحد سوى زملائه العاملين في نفس الميدان (و هذا ما نشاهده يوميا خاصة على شاشات التلفزيون).

حسبنا أن نورد هنا مقطعا من مقال نشر في جريدة الشروق اليومي الجزائرية للدكتور أبو بكر خالد سعد

الله أستاذ جامعي قسم الرياضيات / المدرسة العليا للأساتذة- القبة في عددها 6820 ليوم الأربعاء 16 جوان 2021 م الموافق لـ 6 ذو القعدة 1442 هـ فقرة معبّرة بعنوان **لغة المنطق ومنطق اللغة** جاء فيها:

" رد فينمان Feynman (1918-1988) فيزيائي ورياضياتي أمريكي كان يتمتع بشهرة لا نظير لها لدى جمهور العلماء، وقد نال جائزة نوبل في الفيزياء عام 1965، كتب هذا العالم في مذكراته أنه كان له شرف إدخال اللغة البرازيلية (البرتغالية تقريبا) إلى أكاديمية العلوم البرازيلية! حدث ذلك عندما استضافته هذه الأكاديمية ليلقي فيها محاضرة فراح يعدّها باللغة البرازيلية- وهو لم يدرس هذه اللغة قطّ- مستعينا قبل زيارته بمعارفه البرازيليين في الولايات المتحدة،

وعندما وصل إلى هذه الأكاديمية لاحظ أن الجميع يلقون كلماتهم ومحاضراتهم بالإنكليزية، وهم من البرازيليين، وعندما أتى دور فينامان فاجأ الحضور بخاطبهم بالبرازيلية، ويضيف فينمان أن الأكاديمي الذي جاء بعده من المحاضرين البرازيليين قال : بما أن هذا الأمريكي ألقى محاضرته بلغتنا فسألقي محاضرتي بلغتي! ويختم فينمان روايته بالملاحظة الوجيهة : يقع على عاتق المحاضر والأستاذ تحمّل مثل هذه الصعاب اللغوية لتوصيل فكرته إلى الحضور وليس العكس،"

وفي النهاية، ألم يأنِ أن يَخرُج مِن بين ظَهرانينا رجلٌ رشيد يُحاكي قول شاعر إيطاليا الكبير "بيترارك" في القرن الرابع عشر الميلادي: "ماذا؟ لقد استطاع "شيشرون" أن يكون خطيباً بعد "ديموستن"، واستَطاع "فيرجيل" أن يكون شاعِرًا بعد "هوميروس"، وبعد العرب لا يُسمَح لأحد بالكتابة، لقد جارَينا اليونان غالبًا وتجاوزْناهم أحيانًا، وبذلك جارينا وتجاوزْنا غالبيَّة الأمم، وتقولون: إننا لا نستطيع الوصول إلى شأو العرب، يا للجُنون ويا للخَبال، بل يا لعَبقريَّة إيطاليا الغافية أو المُنطفِئة".

المحتويات

مقدمة

الهندسة الريمانية وتسمى أيضاً الهندسة الإهليلجية، وهي واحدة من الهندسات اللاإقليدية التي ترفض تماماً صحّة فرضية إقليدس الخامسة وتعدل فرضيته الثانية، ببساطة فرضية إقليدس الخامسة هي: من خلال نقطة لا تنتمي لمستقيم ما، يوجد مستقيم وحيد يشمل هذه النقطة و يوازي هذا المستقيم. هندسة ريمان ترفض هذه المسلمة و تؤكد على أن كل المستقيمات تتقاطع و السر يكمن في **التقوّس** إذ في الفضاء الإقليدي التقوّس معدوم أما في هندسة ريمان فالتقوّس موجب لذا نقول أن مجموع زوايا مثلث في الهندسة الإقليدية هو 180 درجة أما في هندسة ريمان فهو أكبر من 180 درجة. لعلك تقول أن هندسة اقليدس هي حالة خاصة، فعلا فضاء اقليدس ماهو إلا فضاء ريمان تقوّسه معدوما. و دعني هنا أنبهك بأهمية فضاء ريمان، حسبك أن تعلم أن الكون الذي نعيش فيه الحياة الدنيا هو فضاء ريماني رباعي الأبعاد و محدّب (تقوّسه موجب). هذه الحقيقة ظهرت بفضل النظرية النسبية لأنشتاين سنة (1915) و التي جمعت بين الزمان و المكان و المادة. و قد أيّدت كل الدراسات بعدئذ صحّة هذه النظرية و عزّزتها كل تكنولوجيات غزو الفضاء التي بدأت قبل خمسة عقود.

ظهرت أول الأعمال المنشورة حول الهندسة الريمانية حوالي عام (1830) ، لم تكن هذه المنشورات معروفة لعالم الرياضيات الألماني برنارد ريمان الذي قام في عام (1866) بتوسيع المفاهيم من بُعدين إلى ثلاثة أبعاد أو أكثر، وظهر عالم رياضيات ألماني آخر فيليكس كلاين، أعطى دفعة اخرى لأفكار ريمان.

تزويد فضاء ريماني بِبنُية ما يؤدي حتماً إلى إيجاد كائن رياضياتي جديد، أكثر تنظيماً و تحكماً، إذن لنعتبر M منوّعة تفاضلية مزوّدة بموتّر متري ريماني g، عندما نعرّف بنية هندسية جديدة على M متلائمة مع الموتّر المتري g، نكون بذلك قد أنشأنا منوّعة ريمانية جديدة، هذه الأخيرة قد ترشدنا الى فرع جديد في الهندسة الريمانية تماماً كهندسة التماسك (simplectique)، هندسة كالير، هندسة ساساكي ...

نظرية منوّعة ريمان زوجية البُعد المزوّدة ببنية كالير هي واحدة من الفروع الهامة في الهندسة التفاضلية، لقد بدأت كحقل مستقل للدراسة في القرن التاسع عشر من خلال دراسة في فضاء الإسقاط المركّب و في الستينيات والسبعينيات من القرن الماضي ظهرت البنى التلامسية تقريبًا كنظير للبنى المركّبة تقريباً.

من هنا، يعتبر إنشاء البنى على المنوّعات و دراسة خواصها أمراً هاماً جداً في الهندسة التفاضلية، لذلك جاء هذا

الكّتاب في جزءه الثاني ليتناول دراسة مفصّلة عن البنى المترية التلامسية تقريباً على المنوّعات الريمانية ثلاثية الأبعاد مع كثير من الأمثلة الملموسة التي تساعد في توضيح الجانب النظري.

من الوهلة الأولى، عملنا على أن يكون محتوى هذا الكّتاب سهلا للفهم و الاستيعاب كالجزء الأول الذي تناولنا فيه الهندسة الريمانية. هذا الجزء هو دراسة مستفيضة عن البُنى المترية التلامسية تقريبا المعرّفة على المنوّعة الريمانية. فهو يتماشى مع برنامج الماستر تخصص هندسة تفاضلية و تطبيقاتها (جامعة معسكر- الجزائر). يكون للطالب وسيلة لاستيعاب المفاهيم المتعلقة بهذا الموضوع و من جهة أخرى يكون وسيلة تساعد الأستاذ المدرّس لهذا المقياس في تحضير دروسه كما يمكن لأي دارس أو باحث من الوطن العربي أو خارجه يُتقن اللغة العربية أن يجد فيه ما يؤهله للبحث في هذا الميدان. استعرضنا ذلك من خلال أربعة أبواب مفصلة كالآتي:

الباب الأول : يعتبر ملخصا هاما لكثير من مفاهيم المنوّعات المترية التلامسية تقريبا و المنوّعات التلامسية المعرّفة على المنوّعات الريمانية ذات البُعد الفردي، ندرس أهم الخواص مع براهين مفصّلة و أمثلة متنوّعة. إذ سنذكّر فيه بمختلف الأدوات الهندسية التي سنحتاجها فيما هو آت.

الباب الثاني : يحوي هذا الباب دراسة مفصّلة عن البُنى المترية التلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد مع استعراض لأصنافها الخمسة حسب تصنيف تشينيا-غونزليز. نشير أنه من بين الأصناف الخمسة، يوجد صنفين غير ناظميين لم يحظيا باهتمام من قبل الباحثين في هذا الميدان، في هذا الفصل أدرجنا دراسة مستفيظة عن هاذين الصنفين مدعمين بأبحاث أصلية نُشرت لنا مؤخرا في مجلات دولية محكّمة ثم أدرجنا تعميما يشمل أربعة أصناف من البُنى المترية التلامسية تقريبا مع دراسة مفصّلة و أمثلة ملموسة.

الباب الثالث : في هذا الباب، نقدّم مجموعة من التحويلات القديمة و الحديثة بما في ذلك الأصلية للتنقل بين أصناف البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد على نفس المنوّعة الريمانية معتمدين على التعميم المُدرج في الباب السابق مع تعزيز هذه الدراسة بأمثلة مفصّلة.

الباب الرابع: في هذا الباب الأخير، تناولنا دراسة هامة عن كيفية إنشاء بُنية مترية تلامسية تقريبا انطلاقا من بُنية مركّبة تقريبا و العكس مستعينين بمفاهيم جُداء منوّعة ريمانية بالمحور الحقيقي او ما يعرف بالمخروط على المنوّعة الريمانية (أنظر الجزء الاول).

المفاهيم القبلية المطلوبة لدى قارئ هذا الكّتاب، تقتصر على الإلمام الجيد بالهندسة الريمانية و الجبر الخطي بالإضافة إلى بعض المفاهيم حول الطبولوجيا العامة والمعادلات التفاضلية الجزئية.

في الجزء الثالث -بحول الله- سنقدم مجموعة من الميادين الهندسية التي سنُطبق فيها البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد مسلّطين الضوء على أهمية و دور هذه البُنى التي تجمع بين الهندسة و الجبر في فروع

رياضياتية أخرى نذكر منها مثلا المنحنيات أو التطبيقات التوافقية في الفضاءات ثلاثية الأبعاد المزوّدة ببُنية مترية تلامسية تقريبا، جبور لِي أو علم الفلك و البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد ...

في نهاية الكتاب هنالك جدول لمعظم المصطلحات الواردة باللغات الثلاثة عربية، فرنسية و إنجليزية ثمّ قائمة بالمراجع التي استخدمت مباشرة في هذا الكتاب لها صلة بعملنا.

ندعوا الله تعالى أن نكون قد وُفقنا في جمع و دراسة و تقديم هذا العمل بالكيفية التي تُيسّر على القارئ الاستفادة منه و خاصة طلبة الرياضيات تخصص هندسة تفاضلية الذين يأملون و يحنون الى عودة اللغة العربية لمكانتها الطبيعية. و نكون سعداء بكل من ينبهنا لكل خطأ أو نسيان قد يصادفه، عبر العنوان :

gherici.beldjilali@univ-mascara.dz أو beldjilali29@gmail.com

الفصل 1

المنوّعات المترية التلامسية تقريبا

يمكن إرجاع جذور هندسة التلامس إلى عام 1872 ، عندما أدرج العالم سوفيس ليي (Sophus Lie) مفهوم التحويل التلامسي (Beriihrungs transformation) كأداة هندسية لدراسة أنظمة المعادلات التفاضلية. الموضوع متعدد الجوانب و مترابط مع مجالات أخرى للرياضيات البحتة ، وله دور مهم في الميادين التطبيقية مثل الميكانيكا و البصريات و الديناميكا الحرارية و نظرية التحكم. ومع ذلك ، هندسة التلامس لم تنل نصيبها من الإهتمام كأختها هندسة التماسك.

طوبولوجيا التلامس هي مفهوم حديث النشأة، بدأت طرق طوبولوجية تلعب دورًا مهمًا في هندسة التلامس منذ أوائل السبعينيات تقريبًا ، لكن نتائجها ظلت معزولة حتى منتصف الثمانينيات. منذ ذلك الحين ، شهدت هندسة التلامس ثلاثية الأبعاد والطوبولوجيا وقتًا من النشاط الهائل والمثمر، وتم اتخاذ بعض الخطوات المهمة نحو فهم طوبولوجيا التلامس من أجل الأبعاد الكبيرة.

و حتى نأخذ نظرة بسيطة ذات دلالة عن ما سبق ذكره، لا بأس أن نشرح هنا فكرة التحويل التلامسي من خلال مثال كلاسيكي في الهندسة المستوية:

ليكن γ منحنى من $\mathbb{R}^2$ معرّف بـ

$$x \mapsto \big(x, z(x)\big),$$

حيث z دالة ذات المتغير x قابلة للتفاضل (على الأقل من الصنف $\mathcal{C}^1$). و ليكن γ_1 منحنى موازي لـ γ على مسافة بينهما $k \in \mathbb{R}^+$ (بالطبع هناك منحنيان يحققان هذا الشرط). هذا يعني أن γ_1 يعطى كمايلي

$$x_1 \mapsto \big(x_1, z_1(x_1)\big),$$

مع

$$(x_1 - x)^2 + (z_1 - z)^2 = k^2,$$
$$< \gamma_1(x_1) - \gamma(x), \gamma'(x) >= 0,$$
$$\gamma_1'(x_1) = \gamma'(x).$$

المعادلتان الأخيرتان يمكن كتابتهما بالشكل

$$p_1 = p \quad \text{و} \quad x_1 - x + (z_1 - z)p = 0$$

و منه ينتج

$$z_1 = z \pm \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{و} \quad x_1 = x \pm \frac{kp}{\sqrt{1+p^2}}$$

هذا يؤدي إلى

$$dz_1 = dz \pm \frac{kp}{(1+p^2)^{3/2}} \quad \text{و} \quad dx_1 = dx \pm \frac{k}{(1+p^2)^{3/2}}dp$$

و بالتالي

$$dz_1 - p_1 dx_1 = dz - pdx.$$

وهكذا نكون قد عرّفنا تطبيقا من $\gamma \mapsto \gamma_1$ والذي يُطلق عليه أيضًا إسم التمدّد (dilatation)، كحالة خاصة للتحويل التلامسي. وفقًا لمبدأ هيوغن (Huygen)، تظهر المنحنيات المتوازية في نظرية انتشار الموجة (في الوسائط المتجانسة). يعطي هذا أول مؤشر لماذا تشكّل هندسة التلامس الأساس الطبيعي للبصريات الهندسية.

في هذا الفصل سنقدم مجموعة هامة و أساسية من التعاريف و الخواص المتعلقة بهذه البنى مركّزين على ثلاثية الأبعاد منها. من أجل تفاصيل أكثر عن الموضوع، يرجى الرجوع الى المصادرالتالية : [20]، [15]، [29]، [38]، [41]، [25]، [31]، [16]، [17].

ملاحظة في كثير من الأحيان، يُستعمل اصطلاح أينشتاين أي إذا تكرّر دليل مرتين في حدٍ من حدود عبارة ما فيُقصد به المجموع على هذا الدليل. مثلا

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad \text{و} \qquad a_i e_i = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

1.1 البُنية التلامسية تقريباً

تعريف 1.1.1.

لتكن لدينا M منوّعة تفاضلية ذات بُعد فردي $2n+1$. نُسمي كل ثلاثية (φ, ξ, η) بنية تلامسية تقريباً على M، حيث:

- φ هو موتّر من النوع $(1,1)$
- ξ حقل شعاعي مميّز شامل، أو حقل ريب (*Reeb*)
- η شكل تفاضلي أحادي على M

إذا تحقق من أجل كل $X \in \mathfrak{X}(M)$ الشرطان التاليان:

$$\eta(\xi) = 1 \tag{1}$$

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \tag{2}$$

ملاحظة 1.1.1. نقول عن كل منوّعة تفاضلية M بعُدُها $2n+1$ مزوّدة ببنُية تلامسية تقريباً أنها منوّعة تلامسية تقريباً، ونرمز لها بالرمز (M, φ, ξ, η).

مثال 1.1.1.

ليكن $\mathbb{R}^5$ الفضاء الإقليدي ذي الإحداثيات الكارتيزية $\{x_i\}_{1\leq i\leq 5}$ و $\xi = \frac{\partial}{\partial x_5}$ حقل شعاعي على $\mathbb{R}^5$. نعتبر η الشكل التفاضلي الأحادي المعرّف على $\mathbb{R}^5$ بـ $\eta = -f\ dx_1 - h\ dx_3 + dx_5$ حيث $f, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^5)$، إذن لدينا

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= (-f\ dx_1 - h\ dx_3 + dx_5)\left(\frac{\partial}{\partial x_5}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

ينبغي على الطالب أن يدرك أن

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

ليكن φ موترا من النوع $(1,1)$ معرّف بمصفوفته المرفقة التالية

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & -h & 0 \end{pmatrix},$$

يمكن بسهولة التحقق من أنه من أجل كل $i \in \{1, .., 5\}$،

$$\varphi^2 \frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_5}.$$

مثلا:

$$\begin{aligned}\varphi^2 \frac{\partial}{\partial x_1} &= \varphi\left(\varphi \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\\ &= \varphi \frac{\partial}{\partial x_2}\\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1} - f\frac{\partial}{\partial x_5}.\end{aligned}$$

من جهة أخرى،

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial x_1}+\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\xi &= -\tfrac{\partial}{\partial x_1}+(-f\ dx_1-h\ dx_3+dx_5)\left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}\right)\tfrac{\partial}{\partial x_5}\\ &= -\tfrac{\partial}{\partial x_1}-f\tfrac{\partial}{\partial x_5}.\end{aligned}$$

و نفس الشيء بالنسبة للحالات الأربعة المتبقية. هذا يُثبت أن (φ,ξ,η) هي بنُية تلامسية تقريبا.

مبرهنة 1.1.1.
من أجل كل منوّعة تلامسية تقريباً (M,φ,ξ,η)، الخواص التالية محقّقة:

$$\begin{array}{ll}(1) & \varphi\xi=0\\ (2) & \eta\circ\varphi=0\\ (3) & rang\varphi=2n.\end{array}$$

البرهان 1.1.1. من اجل كل حقل شعاعي X على M لدينا

$$\varphi^2X=-X+\eta(X)\xi, \tag{3}$$

في (3) نعوّض X بـ ξ، نجد

$$\begin{aligned}\varphi^2\xi &= \varphi(\varphi\xi)\\ &= -\xi+\eta(\xi)\xi\\ &= 0. \end{aligned}\tag{4}$$

هذا معناه، إما $\varphi\xi=0$ أو $\varphi\xi\neq 0$. نفرض أنّ $\varphi\xi\neq 0$، من (4) ينتج

$$\begin{aligned}0 &= \varphi^3\xi=\varphi^2(\varphi\xi)\\ &= -\varphi\xi+\eta(\varphi\xi)\xi,\end{aligned}$$

أي

$$\eta(\varphi\xi)\xi=\varphi\xi\neq 0.$$

بتركيب φ نجد

$$\eta(\varphi\xi)\varphi\xi=\varphi^2\xi=0,$$

و هذا تناقض، ممّا يعني أن $\varphi\xi=0$.

نأخذ الآن $\varphi\xi=0$ و عندئذ يكون

$$\begin{aligned}\varphi^3X &= \varphi(\varphi^2X)\\ &= \varphi(-X+\eta(X)\xi)\\ &= -\varphi X,\end{aligned}$$

و من جهة أخرى، لدينا

$$\begin{aligned}\varphi^3X &= \varphi^2(\varphi X)\\ &= -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi \Leftrightarrow \eta(\varphi X)\xi = \varphi^3X + \varphi X = 0.\end{aligned}$$

أخيرا، بما أن $\varphi\xi = 0$ و $\xi \neq 0$ فإن

$$rang(\varphi) < 2n+1.$$

لنفرض وجود $\bar{\xi}$ بحيث $\varphi\bar{\xi} = 0$ و نعوّض X بـ $\bar{\xi}$ في العلاقة $\varphi^2X = -X + \eta(X)\xi$ ينتج

$$0 = \varphi^2\bar{\xi} = -\bar{\xi} + \eta(\bar{\xi})\xi \Longrightarrow \bar{\xi} = \eta(\bar{\xi})\xi$$

و هذا معناه أن $\bar{\xi}$ مرتبط مع ξ و منه $rang\varphi = 2n$.

تعريف 1.1.2. رُتبة بنُية تلامسية تقريبا

لتكن (φ, η, ξ) بنية تلامسية تقريبا. نقول عن η أنها من الرُتبة :

- $r = 2n$ إذا كان $(\mathrm{d}\eta)^n \neq 0$ و $\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n = 0$.
- $r = 2n+1$ إذا كان $(\mathrm{d}\eta)^{n+1} = 0$ و $\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^n \neq 0$.

و نقول عندئذ أن r هو رُتبة البنُية (φ, η, ξ).

1.1.1 البنُية المترية التلامسية تقريباً

مبرهنة 1.1.2.

كل منوّعة تلامسية تقريباً (M, φ, ξ, η) تقبل مترك ريماني g بحيث:

$$g(X, \xi) = \eta(X), \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M), \tag{5}$$

حيث $\mathfrak{X}(M)$ يرمز لمجموعة الحقول الشعاعية على M.

البرهان 1.1.2. لتكن (M, φ, ξ, η) منوّعة تلامسية تقريبا. من أجل كل $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ نضع

$$g(X, Y) = h\big(\varphi^2X, \varphi^2Y\big) + \eta(X)\eta(Y)$$

حيث h هو مترك ريماني على M. نعوّض Y بـ ξ نتحصّل على

$$\begin{aligned}g(X, \xi) &= h\big(\varphi^2X, \varphi^2Y\big) + \eta(X)\eta(\xi)\\ &= h\big(\varphi^2X, 0\big) + \eta(X)\\ &= \eta(X).\end{aligned}$$

قضية 1.1.1.
كل منوّعة تلامسية تقريباً (M,φ,ξ,η) تقبل مترك ريماني g بحيث:

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),\qquad \forall X,Y\in\mathfrak{X}(M) \tag{6}$$

في هذه الحالة، نقول أنَّ المترك الريماني g متوافق مع البُنية التلاكسية تقريبا والرُباعية (φ,ξ,η,g) نُسميها حينئذ **بنُية مترية تلامسية تقريباً**.

البرهان 1.1.3. ليكن h تطبيقا معرّفا على $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ كمايلي

$$h(X,Y)=h'\big(\varphi^2X,\varphi^2Y\big)+\eta(X)\eta(Y)$$

حيث h' هو مترك ريماني على M. إذن، لدينا

$$\begin{aligned} h(\xi,X) &= h'\big(\varphi^2\xi,\varphi^2X\big)+\eta(\xi)\eta(X)\\ &= \eta(X). \end{aligned}$$

نعرّف الموتّر g بـ

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}\Big(h(X,Y)+h\big(\varphi X,\varphi Y\big)+\eta(X)\eta(Y)\Big).$$

و منه g هو مترك ريماني حيث

$$\begin{aligned} g(\varphi X,\varphi Y) &= \frac{1}{2}\Big(h(\varphi X,\varphi Y)+h\big(-X+\eta(X)\xi,-Y+\eta(Y)\xi\big)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\big(h(\varphi X,\varphi Y)+h(X,Y)-2\eta(X)\eta(Y)+\eta(X)\eta(Y)\big)\\ &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

نتيجة 1.1.1. من أجل كل بنُية مترية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η,g) لدينا

$$g(X,\varphi Y)=-g(\varphi X,Y),$$

مع $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$

البرهان 1.1.4. لدينا

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y),$$

بتعويض X بـ φX ينتج

$$\begin{aligned} g(\varphi^2X,\varphi Y)=g(\varphi X,Y) &\Leftrightarrow g(-X,\varphi Y)+\eta(X)g(\xi,\varphi Y)=g(\varphi X,Y)\\ &\Leftrightarrow -g(X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(\varphi Y)=g(\varphi X,Y)\\ &\Leftrightarrow g(X,\varphi Y)=-g(\varphi X,Y). \end{aligned}$$

تعريف 1.1.3.
نسمي كل منوعّة تلامسية تقريباً (M, φ, ξ, η) مزوّدة بمترك ريماني g متوافق مع البنية (φ, ξ, η)، منوعّة مترية تلامسية تقريباً، ونرمز لها بالرمز $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$.

تعريف 1.1.4.
لكل منوّعة مترية تلامسية تقريباً $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ شكلاً تفاضلياً ثُنائياً أساسياً ϕ يعطى بالعلاقة التالية :

$$\phi(X, Y) = g(X, \varphi Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

خواص 1.1.1. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا و ϕ الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي لها. إذن من أجل كل حلين شعاعيين X و Y على M لدينا:

- $\phi(X, \xi) = 0$،
- $\phi(X, Y) = -\phi(Y, X)$،
- $\phi(\varphi X, \varphi Y) = \phi(Y, X)$.

البرهان 1.1.5. البرهان بسيط يتم باستعمال التعريف و النتيجة أعلاه (يترك للطالب).

1.1.2 البُنية التلامسية تقريباً الناظمية

نعلم أنّ البُنية المترية التلامسية تقريبا هي نظير البنية المركبة تقريبا باعتبار الولى تعرّف على المنوّعات ذالت اليعد الفرديو الثانية على المنوّعات ذات البُعد الزوجي. و عليه، إذا كانت خاصية قابلية المكاملة تميز بها البُنية المركبة فما هي الخاصية المكافئة لها و التي تميّز بها البُنى المترية التلامسية تقريبا. هذا ما سوف متطرق له في هذه الفقرة.

الفكرة هنا تكمن في وسيلة الانتقال من البعد الفردي $2n+1$ الى البُعد الزوجي $2n+2$.

تعريف 1.1.5.
لتكن (M, φ, ξ, η) منوّعة تلامسية تقريباً و $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ المنوّعة الجدُاء حيث $(X, f\frac{d}{dt})$ حقل أشعة على $M \times \mathbb{R}$ و X حقل أشعة على M، f دالة على $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ و t منظومة إحداثيات على $\mathbb{R}$.
نعرّف على $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ بنية مركّبة تقريباً J طبيعية كمايلي:

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right(= \left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right).$$

يمكننا بسهولة التحقق من أن $J^2 = -I$، و ذلك كمايلي

$$\begin{aligned}
J^2\left(X, f\frac{d}{dt}\right) &= J\left(J\left(X, f\frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= J\left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \varphi(f\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) - \eta(f\xi))\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, -f\eta(\xi)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -f\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

نعلم أن

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \Leftrightarrow -X = \varphi^2 X - \eta(X)\xi$$

إذن

$$\begin{aligned}
J^2\left(X, f\frac{d}{dt}\right) &= \left(-X, -f\frac{d}{dt}\right) \\
&= -\left(X, f\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}$$

و منه

$$J^2 = -I$$

و هذا يعني أن $(M^{2n+1} \times \mathbb{R}, J)$ هي منوّعة مركّبة تقريباً.

توطئة 1.1.1. طبعا في مقياس البُنى المركبة، تعرّف الطالب على أن كل موتّر J من النوع $(1,1)$ يقُال عنه بنُية مركّبة تقريبا على منوّعة تفاضلية إذا تحقق الشرط $J^2 = -I$.

ملاحظة 1.1.2. من أجل تبسيط الحساب يمكن أن نكتب J كمايلي

$$\begin{cases} JX = \varphi X + \eta(X)\partial_t \\ J\partial t = -\xi, \end{cases}$$

من أجل كل حقل شعاعي X من M و $\partial_t = \frac{d}{dt}$.
و ذلك لوجدود تطبيق تماثلي (*isomorphisme*) بين $M \oplus \mathbb{R}$ و $M \otimes \mathbb{R}$ أي لدينا

$$\tilde{X} = (X, f\partial_t) = (X, 0) + (0, f\partial_t) \cong X + f\partial_t.$$

مبرهنة 1.1.3. [*41*] مبرهنة نيولاندر- نيرنبارج (*Théorème de Newlander-Nirenberg*)
البنية المركّبة تقريباً J قابلة للمكاملة (*intégrable*) إذا و فقط إذا كان موتّر الفتل نيجن هيز (*Tenseur de Nijenhuis*) $N_J = 0$ حيث من أجل كل $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(T\tilde{M})$

$$\frac{1}{2}N(\tilde{X}, \tilde{Y}) = J^2[\tilde{X}, \tilde{Y}] + [J\tilde{X}, J\tilde{Y}] - J[\tilde{X}, J\tilde{Y}] - J[J\tilde{X}, \tilde{Y}]. \qquad (7)$$

تعريف 1.1.6. ([*15*], صفحة *80*)
نقول عن البنية المترية التلامسية تقريباً (φ, ξ, η, g) أنها ناظمية (*normale*) إذا كانت البنية المركّبة تقريباً J قابلة للمكاملة.

سنقدّم فيمايلي شرط الناظمية باستعمال عناصر البنية المترية التلامسية تقريبا دون إدراج البنية المركبة. تحضيرا لذلك لابأس أن نبدأ بضبط بعض الموتّرات التي سنحتاجها لاحقا.

توطئة 1.1.2. لتكن (φ, ξ, η, g) منوّعة مترية التلامسية تقريباً، نضع

(*1*) $2\mathrm{d}\eta(X,Y) = X\big(\eta(Y)\big) - Y\big(\eta(X)\big) - \eta([X,Y])\xi,$

(*2*) $N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y],$

(*3*) $N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2\mathrm{d}\eta(X,Y)\xi,$

(*4*) $N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)X$
$\qquad = \varphi X\big(\eta(Y)\big) - \eta([\varphi X, Y]) - \varphi Y\big(\eta(X)\big) - \eta([\varphi Y, X]),$

(*5*) $N^{(3)}(X) = (\mathcal{L}_\xi \varphi)X = [\xi, \varphi X] - \varphi[\xi, X],$

(*6*) $N^{(4)}(X) = (\mathcal{L}_\xi \eta)X = \xi\big(\eta(X)\big) - \eta([\xi, X]).$

الآن، و باستعمال الدستور (7) و باعتبار $\tilde{\nabla}$ و ∇ هما وصلتي لوفي-سيفيتا المرفقتين بـالموتّرين (المترك) $\tilde{g} = g + dt^2$ و g على الترتيب. يكفي أن نحسب المركبتين $N_J(X,Y)$ و $N_J(X, \frac{d}{dt})$ من أجل كل

X و Y من M.
لدينا

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N_J(X,Y) &= J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[X,JY]-J[JX,Y]\\ &= -[X,Y]+[\varphi X+\eta(X)\partial_t,\varphi Y+\eta(Y)\partial_t]-J[X,\varphi Y+\eta(Y)\partial_t]\\ &- J[\varphi X+\eta(X)\partial_t,Y], \qquad (8)\end{aligned}$$

سنحسب الحدود الثلاثة الأخيرة باعتبار أقواس لِي تمتع بخاصية الخطية مع الأخذ بعين الإعتبار أنه من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M لدينا $\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y$ و $\tilde{\nabla}_X\frac{d}{dt}=\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}}X=\tilde{\nabla}_{\frac{d}{dt}}\frac{d}{dt}=0$.
إذن،

$$\begin{aligned}[\varphi X+\eta(X)\partial_t,\varphi Y+\eta(Y)\partial_t] &= [\varphi X,\varphi Y]+[\varphi X,\eta(Y)\partial_t]+[\eta(X)\partial_t,\varphi Y]\\ &+ [\eta(X)\partial_t,\eta(Y)\partial_t]\\ &= [\varphi X,\varphi Y]+\nabla_{\varphi X}\eta(Y)\partial_t-\eta(Y)\nabla_{\partial_t}\varphi X\\ &+ \eta(X)\nabla_{\partial_t}\varphi Y-\nabla_{\varphi Y}\eta(X)\partial_t+\eta(X)\nabla_{\partial_t}\eta(Y)\partial_t\\ &- \eta(Y)\nabla_{\partial_t}\eta(X)\partial_t\\ &= [\varphi X,\varphi Y]+\Big(\varphi X\big(\eta(Y)\big)-\varphi Y\big(\eta(X)\big)\Big)\partial_t. \qquad (9)\end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد

$$\begin{aligned}J[X,\varphi Y+\eta(Y)\partial_t] &= J[X,\varphi Y]+J[X,\eta(Y)\partial_t]\\ &= \varphi[X,\varphi Y]+\eta([X,\varphi Y])\partial_t+J\left(X\big(\eta(Y)\big)\partial_t\right)\\ &= \varphi[X,\varphi Y]-X\big(\eta(Y)\big)\xi. \qquad (10)\end{aligned}$$

من هذا الأخير، نستنتج (بالتبديل بين X و Y و توظيف خاصية ضد التناظر لأقواس لِي)

$$J[\varphi X+\eta(X)\partial t,Y] = \varphi[\varphi X,Y]++\eta([Y,\varphi X])\partial_t+Y\big(\eta(X)\big)\xi, \qquad (11)$$

بتعويض (9)-(11) في المعادلة (8) ينتج

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}N_J\big((X,0),(Y,0)\big) &\cong \frac{1}{2}N_J(X,Y)\\ &= -[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]\\ &+ \Big(X\big(\eta(Y)\big)-Y\big(\eta(X)\big)\Big)\xi\\ &+ \Big(\varphi X\big(\eta(Y)\big)-\eta([\varphi X,Y])-\varphi Y\big(\eta(X)\big)+\eta([\varphi Y,X])\Big)\partial_t\\ &= N^{(1)}(X,Y)+N^{(2)}(X,Y)\partial_t. \qquad (12)\end{aligned}$$

نحسب الآن المركبة الثانية

$$\begin{aligned} N_J\big((X,0),(0,\partial t)\big) &\cong \frac{1}{2}N_J(X,\partial t) \\ &= -[X,\partial_t]+[JX,J\partial_t]-J[X,J\partial_t]-J[JX,\partial_t] \\ &= -[\varphi X+\eta(X)\partial_t,\xi]+J[X,\xi]-J[\varphi X+\eta(X)\partial_t,\partial_t] \\ &= [\xi,\varphi X,]-\varphi[\xi,X]+\Big(\xi\big(\eta(X)\big)-\eta([\xi,X])\Big)\partial_t \\ &= N^{(3)}(X)+N^{(4)}(X)\partial_t. \end{aligned}$$

الخلاصة: لدينا

$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{1}{2}N_J(X,Y) &= N^{(1)}(X,Y)+N^{(2)}(X,Y)\partial_t \\ \tfrac{1}{2}N_J(X,\partial t) &= N^{(3)}(X)+N^{(4)}(X)\partial_t. \end{aligned} \right.$$

نتيجة 1.1.2. تكون البنية التلامسية تقريباً ناظمية إذا كان

$$N^{(1)}=N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0.$$

مبرهنة 1.1.4.
لتكن (M,φ,ξ,η) منوّعة تلامسية تقريباً، إذا كان $N^{(1)}=0$ فإن

$$N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0.$$

البرهان 1.1.6. نفرض أن $N^{(1)}\left(X,Y\right)=0$ من أجل كل حقلين شعاعيين $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.
نضع $Y=\xi$ ينتج

$$N^{(1)}\left(X,\xi\right)=N_\varphi\left(X,\xi\right)+2\mathrm{d}\eta\left(X,\xi\right)\xi=0.$$

و منه لدينا

$$\eta\big(N_\varphi(X,\xi)\big))+2\mathrm{d}\eta\left(X,\xi\right)=0.$$

باستعمال عبارة N_φ يمكن بسهولة التحقق من أن $\eta\big(N_\varphi\left(X,\xi\right)\big)=0$ فنستنتج أن

$$\mathrm{d}\eta\left(X,\xi\right)=0,$$

و بالتالي

$$\begin{aligned} N^{(4)}\left(X\right) &= \left(\mathcal{L}_\xi\eta\right)X \\ &= \xi\eta(X)-\eta\left([\xi,X]\right) \\ &= -\left(X\eta(\xi)-\xi\eta(X)-\eta\left([X,\xi]\right)\right) \\ &= -2\mathrm{d}\eta(X,\xi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

و كذلك لدينا

$$\begin{aligned} 0 &= N^{(1)}(\varphi X, \xi) \\ &= [\xi, \varphi X] - \varphi[\varphi^2 X, \xi] \\ &= [\xi, \varphi X] - \varphi[\xi, X] \\ &= N^{(3)}(X). \end{aligned}$$

و أخيرا

$$\begin{aligned} 0 &= \eta\left(N^{(1)}(\varphi X, Y)\right) \\ &= \eta\big(\varphi^2[\varphi X, Y] + [\varphi^2 X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi^2 X, Y]\big) \\ &+ 2\mathrm{d}\eta(\varphi X, Y) \\ &= \eta\big([-X, \varphi Y] + [\eta(X)\xi, \varphi Y]\big) + 2\mathrm{d}\eta(\varphi X, Y) \\ &= -\eta\big([X, \varphi Y]\big) - \varphi Y \eta(X) + \varphi X \eta(Y) - \eta\big([\varphi X, Y]\big) \\ &= N^{(2)}(X, Y) \end{aligned}$$

مع ملاحظة أن

$$N^{(4)}(\varphi X) = 0 = \eta([\varphi X, \xi]).$$

و بناء على ماسبق، يمكننا تقديم القضية التالية

قضية 1.1.2. نقول عن بنية مترية تلامسية تقريبا أنها ناظمية إذا و فقط إذا كان

$$N^{(1)} = N_\varphi + 2\mathrm{d}\eta \otimes \xi = 0.$$

تمرين 1. نعتبر عائلة البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد و المعرّفة كمايلي

$$g = \begin{pmatrix} \rho(x,y,z)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau(x,y,z)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(x,y,z)^2 \end{pmatrix},$$

و أيضا

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\tau} \\ 0 & \frac{\tau}{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta = (\rho, 0, 0).$$

حيث ρ τ و σ دوال قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ لا تنعدم أبدا.
- ماهي الشروط على الدوال ρ ، τ و σ حتى تكون البنية ناظمية؟.

مثال 1.1.2.
لتكن الكرة $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ مع $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$، ونعتبر التمثيل الوسيطي التالي:

$$X = \begin{cases} x &= cos\alpha \ \ cos\beta \ \ cos\gamma \\ y &= cos\alpha \ \ cos\beta \ \ sin\gamma \\ z &= cos\alpha \ \ sin\beta \\ t &= sin\alpha \end{cases}$$

و باستعمال الجُداء السلّمي

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle,$$

نجد المصفوفة المرفقة بالموتّر المتري الريماني g

$$(g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\alpha\cos^2\beta \end{pmatrix}.$$

نستطيع تعيين الشكل التفاضلي الأحادي η كمايلي [15]:

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathrm{dy^i} - \mathrm{y^i dx^i} \Leftrightarrow \eta = \mathrm{xdy - ydx + zdt - tdz}.$$

و مع التمثيل الوسيطي أعلاه، لدينا

$$\eta = \big(\sin\beta, -\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta, \cos^2\alpha\cos^2\beta\big).$$

لاحظ أنّ

$$\eta \wedge \mathrm{d}\eta = -2\cos^2\alpha\cos\beta \mathrm{d}\alpha \wedge \mathrm{d}\beta \wedge \mathrm{d}\gamma \neq 0$$

و هذا يعني أنّ المنوّعة هي تلامسية.
لنحسب الآن حقل الأشعة ξ، نضع

$$\xi = \xi_1\partial_\alpha + \xi_2\partial_\beta + \xi_3\partial_\gamma$$

و نعلم أنّ $g(X,\xi) = \eta(X)$ إذن

$$\xi = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\tan\alpha\cos\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

و يمكننا بسهولة ملاحظة أنّ $\eta(\xi)=1$.
لحساب الموتّر φ، لدينا

$$\begin{cases} g(X,\varphi Y) &= \mathrm{d}\eta(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \\ 2\mathrm{d}\eta(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y]) \end{cases}$$

أي أنّ

$$g(X,\varphi Y)=\frac{1}{2}\big(X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\big)$$

محلّياً، ينتج من المعادلة السابقة

$$\varphi_j^k=\frac{1}{2}g^{ki}\Big(\partial_i\big(\eta(\partial_j)\big)-\partial_j\big(\eta(\partial_i)\big)\Big).$$

و منه، المصفوفة المرفقة بـ φ تعطى كمايلي:

$$(\varphi_{ij})_{1\le i,j\le 3}=\begin{pmatrix} 0 & -\cos^2\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta \\ \cos\beta & 0 & -\cos\beta\sin\beta \\ \tan\alpha & \tan\beta & 0 \end{pmatrix},$$

و يمكن التحقق من أنّ:

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi.$$

إذن، (S^3,φ,ξ,η,g) هي منوّعة مترية تلامسية و يمكن التحقق من أنّ

$$\eta\circ\varphi=0,\qquad \varphi\xi=0,\qquad g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y).$$

ننتقل الآن لإثبات أن الثلاثية (φ,ξ,η) هي ناظمية

$$N(X,Y)=N_\varphi(X,Y)+2\mathrm{d}\eta(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\xi,$$

العبارة المحليّة لـ $N(X,Y)$ تعطى كمايلي :

$$N_{kj}^i=\varphi_k^h(\partial_h\varphi_j^i-\partial_j\varphi_h^i)-\varphi_j^h(\partial_h\varphi_k^i-\partial_k\varphi_h^i)+\eta_k(\partial_j\xi^i)-\eta_j(\partial_k\xi^i)$$

و بحساب مباشر يمكننا التحقق من أنّ $N_{kj}^i=0$ من أجل كل $i,j,k\in\{1,2,3\}$.

قضية 1.1.3.
من أجل كل بنية مترية تلامسية تقريباً (φ,ξ,η,g)، المشتقة الموافقة للتباين للموتّر φ تعطى بـالعلاقة

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3\mathrm{d}\Omega(X,\varphi Y,\varphi Z)-3\mathrm{d}\Omega(X,Y,Z)+g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big) \\ &+ N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2\mathrm{d}\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2\mathrm{d}\eta(\varphi Z,X)\eta(Y). \end{aligned}$$

البرهان 1.1.7. نذكّر أن وصلة لوفي-سيفيتا ∇ المرافقة للمترك الريماني g تعطى بالعلاقة

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y)\\ &\quad + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)\end{aligned}$$

و مؤثر التفاضل الخارجي d للشكل الأساسي ϕ هو

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\big(X\phi(Y,Z) + Y\phi(Z,X) + Z\phi(X,Y)\\ &\quad -\phi([X,Y],Z) - \phi([Z,X],Y) - \phi([Y,Z],X)\big).\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 2g(\nabla_X\varphi Y,Z) + 2g(\nabla_X Y,\varphi Z)\\ &= Xg(\varphi Y,Z) + \varphi Yg(X,Z) - Zg(X,\varphi Y)\\ &\quad + g([X,\varphi Y],Z) + g([Z,X],\varphi Y) - g([\varphi Y,Z],X)\\ &\quad + Xg(Y,\varphi Z) + Yg(X,\varphi Z) - \varphi Zg(X,Y)\\ &\quad + g([X,Y],\varphi Z) + g([\varphi Z,X],Y) - g([Y,\varphi Z],X).\end{aligned}$$

علما أن

$$\begin{aligned}2\mathrm{d}\eta(\varphi Y,X) &= \varphi Y\big(\eta(X)\big) - X\big(\eta(\varphi Y)\big) - \eta\big([\varphi Y,X]\big)\\ N^{(1)}(Y,Z) &= N_\varphi(Y,Z) + 2\mathrm{d}\eta(Y,Z)\,\xi\\ &= \varphi^2[Y,Z] + [\varphi Y,\varphi Z] - \varphi([Y,\varphi Z]) - \varphi([\varphi Y,Z]) + 2\mathrm{d}\eta(Y,Z)\,\xi\\ N^{(2)}(Y,Z) &= (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)\,Z - (\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta)\,y\\ &= -\eta([Y,\varphi Z]) + \varphi Y\eta(Z) - Z\eta(\varphi Y) - \eta([\varphi Y,Z]) - \varphi Z\eta(Y),\end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3\mathrm{d}\phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) + g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\ &\quad + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) + 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z,X)\eta(Y).\end{aligned}$$

1.2 البنية التلامسية

نشأت التحويلات التلامسية في نظرية الميكانيكا التحليلية التي طوّرها هاملتون وجاكوبي ولاجرانج وليجوندر في القرن التاسع عشر. و أول دراسة منهجية تمّ تقديمها بواسطة سوفيس لي عام 1896 تحت الاسم الألماني (Berührungs transformation).

و أحدث ثورة في طوبولوجيا التلامس ثلاثي الأبعاد هي نظرية الكتب المفتوحة (livres ouverts) لجيرو عام 2001. توضح هذه النظرية أن البنى التلامسية ثلاثية الأبعاد هي كائنات طوبولوجية بحتة وتربط البنى التلامسية عالية الأبعاد بهندسة أصناف وينشتاين.

يتطلب وجود بنية تلامسية على منوّعة تفاضلية ثلاثية الأبعاد أن تكون المنوّعة قابلة للتوجيه. في هذه الفقرة، سنقتصر على الجانب الجبري لهذا المفهوم مع تبسيط في الطرح يتماشى و مستوى طلبة الماستر.

تعريف 1.2.7.

نقول عن المنوّعة التفاضلية M ذات البُعد الفردي $2n+1$ أنها تلامسية (*variété de contact*) إذا وُجد شكل تفاضلي أحادي شامل η على M بحيث :

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{\mathrm{n}} \neq 0$$

بمعنى

$$\eta \wedge \underbrace{\mathrm{d}\eta \wedge \mathrm{d}\eta \wedge \cdots \mathrm{d}\eta}_{n} \neq 0$$

نُسمي η شكل تلامسي أو بنُية تلامسية والثنائية (M, η) منوّعة تلامسية.

لاحظ أن الشكل التفاضلي $\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{\mathrm{n}}$ ما هو إلا عنصر الحجم أو الشكل التفاضلي للحجم أي

$$\eta \wedge (\mathrm{d}\eta)^{\mathrm{n}} = \mathrm{f}_{\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \ldots \mathrm{i}_{2\mathrm{n}+1}} \mathrm{dx}_1 \wedge \mathrm{dx}_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{dx}_{2\mathrm{n}+1},$$

و هذا ما يفرض على المنوّعة أن تكون موجّهة.

أمثلة 1.2.1.

1) في المنوّعات أحادية البُعد، تكون الأشكال التفاضلية تلامسية إذا كانت هي بالضبط عناصر الحجم.

2) في $\mathbb{R}^3$ نعتبر الشكل التفاضلي التالي $\eta = dz - f dx$ مع f دالة قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$. لدينا

$$\mathrm{d}\eta = f_2 dx \wedge dy + f_3 dx \wedge dz,$$

مع $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ و $f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$. و بالتالي

$$\eta \wedge \mathrm{d}\eta = f_2 dx \wedge dy \wedge dz.$$

و عليه، تكون η شكلا تلامسيا إذا و فقط إذا كان $f_2 \neq 0$.

2) **الشكل التلامسي النموذجي على** $\mathbb{R}^{2n+1}$:

على الفضاء $\mathbb{R}^{2n+1}$ المزوّد بمنظومة احداثيات اعتيادية $(x, y, z) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n, z)$ الشكلان التفاضليان التاليان هما شكلان تلامسيان

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i \, dx^i, \qquad \alpha = dz + \sum_{i=1}^{n} x_i \, dy^i - y_i \, dx^i. \tag{13}$$

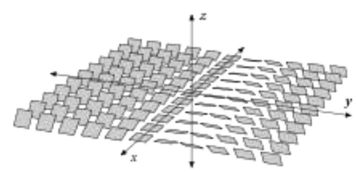
المبرهنة التالية تُعْرَف بمبرهنة داربو و هي تفسّر كون كل الأشكال التفاضلية محليا هي متماثلة.

مبرهنة 1.2.5.
من أجل كل نقطة من المنوّعة التلامسية (M, η) يوجد منظومة إحداثيات محلية $(x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n, z)$ بحيث تكون

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i \, dx^i.$$

هو الشكل التفاضلي النموذجي على $\mathbb{R}^{2n+1}$ (أنظر 13)

البنية التلامسية الإعتيادية في $\mathbb{R}^3$



لكل نقطة من $\mathbb{R}^3$، مستوي مرفق بها بواسطة البنية التلامسية،
في هذه الحالة مثل نواة الشكل التفاضلي $dz - ydx$.
يبدو أن هذه المستويات تلتف على طول المحور y .

و جود الشكل التلامسي η يستلزم وجود فضائين جزئيين $\mathcal{D} = \{X \in M \; / \; \eta(X) = 0\}$ ذو البُعد $2n$ و متممه أحادي البُعد $\mathcal{D}^{\perp} = \{X \in M \; / \; \eta(X) \neq 0\}$. هذا الأخير، يُعرِّف حقلا شعاعيا هاما نرمز له بالرمز اليوناني ξ "كْسِ" حيث

$$\eta(\xi) = 1 \qquad \text{و} \qquad \mathrm{d}\eta(\xi, X) = 0$$

يسمى ξ، الحقل الشعاعي لِرِيبْ (champ de Reeb) أو الحقل الشعاعي المُمَيِّز باعتباره يميّز لنا بين البُنى التلامسية.

مثال 1.2.3.
في هذا المثال سنحدّد الحقل الشعاعي ξ للشكل التفاضلي المعرّف أعلاه في $\mathbb{R}^3$ كمايلي $\eta = dz - fdx$ مع f دالة قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$.
نعلم أنّ η هو شكل تلامسي إذا و فقط إذا كان $f_2 \neq 0$.
و كذلك نعلم أن الشكل العام لـ ξ هو

$$\xi = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z},$$

مع a، b و c دوال على $\mathbb{R}^3$ مطلوبة. لإيجادها نوظّف الشرطين أعلاه كمايلي

$$\begin{cases} \eta(\xi) = 1 \\ \mathrm{d}\eta(\xi, \frac{\partial}{\partial x}) = 0 \\ \mathrm{d}\eta(\xi, \frac{\partial}{\partial y}) = 0 \\ \mathrm{d}\eta(\xi, \frac{\partial}{\partial z}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (dz - f dx)\Big(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\Big) = 1 \\ (f_2 dx \wedge dy + f_3 dx \wedge dz)(\xi, \frac{\partial}{\partial x}) = 0 \\ (f_2 dx \wedge dy + f_3 dx \wedge dz)(\xi, \frac{\partial}{\partial y}) = 0 \\ (f_2 dx \wedge dy + f_3 dx \wedge dz)(\xi, \frac{\partial}{\partial z}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c - af = 1 \\ bf_2 + cf_3 = 0 \\ af_2 = 0 \\ af_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{f_3}{f_2} \\ c = 1 \end{cases}$$

و بالتالي ينتج

$$\xi = \frac{f_3}{f_2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

قضية 1.2.4.
لتكن M^{2n+1} منوّعة تلامسية مزودة بشكل تلامسي η. إذن، توجد بنية مترية تلامسية تقريباً (φ, ξ, η, g)، بحيث الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي ϕ مُعرَّف كما يلي:

$$\phi = \mathrm{d}\eta$$

بمعنى من أجل كل $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} g(X, \varphi Y) &= \phi(X, Y) \\ &= \mathrm{d}\eta(X, Y) := \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\} \end{aligned}$$

تُسمى هذه البنية، البنية المترية التلامسية.

البرهان 1.2.8. لتكن (M, η) منوّعة تلامسية. نضع

$$W = \mathrm{d}\eta_{\mathcal{D}}$$

حيث W شكل تفاضلي على $\mathcal{D}$ و $\mathcal{D} = \{X \in TM \ / \ \eta(X) = 0\}$.
إذن، يوجد تشاكل تقابلي J متلائم مع W بحيث

$J^2 = -I$ و $W(JX, JY) = W(X, Y)$ مع $W(X, JY) > 0$.

نعُرّف متري ريماني $g_{\mathcal{D}}$ على $\mathcal{D}$ كمايلي

$$g_{\mathcal{D}}(X,Y)=W(X,JY),$$

لدينا إذن

$$g_{\mathcal{D}}(JX,JY)=g_{\mathcal{D}}(X,Y),$$

من جهة أخرى، يوجد حقل شعاعي ξ بحيث

$$\eta(\xi)=1.$$

نمُدّد J الى التشاكل التقابلي φ على TM بحيث

$$\begin{cases} \varphi_{\mathcal{D}} &= J \\ \varphi\xi &= 0 \end{cases}$$

ونستطيع الآن تعريف مترك ريماني g على M بـ

$$g=g_{\mathcal{D}}+\eta\otimes\eta,$$

فيكون

$$g(X,\varphi Y)=\mathrm{d}\eta(X,Y).$$

فنتحصّل بذلك على بنية مترية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η,g) على M، و في هذه الحالة، تكون هذه المنوّعة مترية تلامسية.

1.2.1 البنية ك-تلامسية

تعريف 1.2.8.
لتكن (M,g) منوّعة ريمانية و ξ حقل شعاعي على M. نقول عن ξ أنه لكيلينغ (نسبة للعالم *Wilhelm Killing*) إذا كان يحافظ على المترك الريماني أي إذا كان

$$\mathcal{L}_\xi g=0.$$

تذكير: من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M، يكون

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g(X,Y) &= \xi\big(g(X,Y)\big)-g\big(\mathcal{L}_\xi X,Y\big)-g\big(X,\mathcal{L}_\xi Y\big)\\ &= g(\nabla_\xi X,Y)+g(X,\nabla_\xi Y)-g\big([\xi,X],Y\big)-g\big(X,[\xi,Y]\big)\\ &= g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi).\end{aligned}$$

قضية 1.2.5. إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) منوّعة تلامسية فإن $N^{(2)}=N^{(4)}=0$.
و يكون ξ حقلا شعاعيا لكيلينغ إذا و فقط إذا كان $N^{(3)}=0$.

البرهان 1.2.9. بما أن (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة تلامسية، لدينا من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M

$$\mathrm{d}\eta(X,Y)=\phi(X,Y)=g(X,\varphi Y),$$

ينتج

$$\mathrm{d}\eta(\varphi X,\varphi Y)=\mathrm{d}\eta(X,Y),$$

ومنه

$$\mathrm{d}\eta(\varphi X,Y)=-\mathrm{d}\eta(X,\varphi Y),$$

و بالتالي

$$\mathrm{d}\eta(\varphi X,Y)+\mathrm{d}\eta(X,\varphi Y)=0\Leftrightarrow N^{(2)}=0.$$

من جهة أخرى، نعلم أن

$$N^{(4)}(X)=(\mathcal{L}_\xi\eta)X=\mathrm{d}\eta(\varphi X,\xi)=\phi(X,\xi)=0.$$

ختاما، سنبرهن: $\quad \mathcal{L}_\xi\varphi=0\Leftrightarrow\mathcal{L}_\xi g=0$.
من جهة، بحساب مباشر طويل نوعا ما لكنه غير صعب (يمكن اعتباره تمرينا)، لدينا

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi\mathrm{d}\eta)(X,Y) &= \xi\big(\mathrm{d}\eta(X,Y)\big)-\mathrm{d}\eta([\xi,X],Y)-\mathrm{d}\eta(X,[\xi,Y])\\ &= -(\mathcal{L}_\xi\eta)[X,Y]\\ &= -N^{(4)}([X,Y])=0,\end{aligned}$$

من جهة أخرى (تمرين آخر)، لدينا

$$(\mathcal{L}_\xi\mathrm{d}\eta)(X,Y) = (\mathcal{L}_\xi g)(X,\varphi Y)+g\big(X,N^{(3)}(Y)\big),$$

و بالتالي

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X,\varphi Y)=-g\big(X,N^{(3)}(Y)\big).$$

تعريف 1.2.9.
لتكن (M,φ,ξ,η,g)، منوّعة مترية تلامسية. نقول عن M أنها منوّعة ك-تلامسية إذا كان ξ حقلا شعاعيا لكيلينغ.

من القضية اعلاه، يمكن استنتاج مايلي

نتيجة 1.2.3.
تكون المنوّعة المترية التلامسية (M,φ,ξ,η,g) ك-تلامسية إذا وفقط إذا كان $N^{(3)}=0$.

قضية 1.2.6.
لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية. تكون M ك-تلامسية إذا و فقط إذا كان

$$\forall X\in\mathfrak{X}(M)\qquad \nabla_X\xi=-\varphi X.$$

البرهان 1.2.10. نفرض أن (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ك-تلامسية. لدينا

$$(2\mathrm{d}\eta)(X,Y)=2g(X,\varphi Y)=g(\nabla_X\xi,Y)-g(\nabla_Y\xi,X),$$

و كذلك

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y)=0=g(\nabla_X\xi,Y)+g(\nabla_Y\xi,X),$$

بالطرح نجد

$$g(\nabla_X\xi,Y)=g(X,\varphi Y)\Leftrightarrow\nabla_X\xi=-\varphi X.$$

عكسيا، نفرض أن $\nabla_X\xi=-\varphi X$ فينتج ببساطة $\mathcal{L}_\xi g=0$ و $\mathrm{d}\eta=\phi$.

1.3 بعض أصناف البنى المترية التلامسية تقريبا

في سنة 1990 قدم العالمان د. تشينيا و ج. غونزلاز [21] تصنيفا للبنى المترية التلامسية تقريبا اعتمادا على دراسة الشكل التفاضلي الأساسي ϕ. فحدّدا بذلك إثني عشر صنفا (أنظر الجدول في صفحة 44). للإثراء، سنتناول هنا باختصار بعض الاصناف الشهيرة و نخص بالذكر منوّعة ساساكي، منوّعة كانموتسو، منوّعة ثنائية التماسك و المنوّعة ماوراء-ساساكي التي تعمّم الثلاثة السابقة.

منوّعة ساساكي

شيجيو ساساكي عالم ياباني وُلد في 18 نوفمبر 1912 بمحافظة ياماغاتا (اليابان) و توفي في 14 أغسطس 1987 بمدينة طوكيو. كان عالمًا رياضياً مختصا بالهندسة التفاضلية. هو من أدرج مفهوم منوّعة ساساكي. تقاعد من معهد الرياضيات بجامعة توهوكو في أبريل 1976.

تعريف 1.3.10. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا و ϕ الشكل التفاضلي الأساسي لها. نقول عن هذه المنوّعة أنها من منوّعة ساساكي إذا و فقط إذا كان $\phi=\mathrm{d}\eta$ و كانت الثلاثية (φ,ξ,η) ناظمية.

ملاحظة 1.3.3. إذا لم تكن ناظمية نقول عنها أنها تلامسية.

تعريف 1.3.11. نقول عن المنوّعة الريمانية (M, g) أنها منوّعة ساساكي إذا كان الموتّر المتري للمخروط $(C(S) = \mathbb{R}^+ \times S, g = dr^2 + r^2 g)$ كاليريا.

مبرهنة 1.3.6. ([17]، صفحة 86) لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا بُعدها $(2n+1)$ و ∇ وصلة لوفي-سيفيتا الموافقة للمترك g. نقول عن المنوّعة M أنها منوّعة ساساكي إذا و فقط إذا كان

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y) X,$$

و ذلك من أجل كل حقلي أشعة $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

قضية 1.3.7. موتّر التقوّس R و موتّر ريتشي S لمنوّعة ساساكي يحققان الخواص التالية:
من أجل كل $X, Y, Z \in \mathfrak{X}M$

(1) $R(\xi, X)\xi = -X$

(2) $R(X, \xi)X = -\xi$

(3) $R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$

(4) $g\big(R(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W\big) = g\big(R(X, Y)Z, W\big)$

(5) $S(\varphi X, \varphi Y) = S(X, Y)$

للبرهان أنظر ([15], صفحة 93).

أمثلة 1.3.2.

(1) كرة الوِحدة S^{2n+1} مزوّدة بالبُنية النموذجية (φ, ξ, η, g) هي منوّعة ساساكي.

(2) قدّم بلير مثالا هاما عن بُنية ساساكي على $\mathbb{R}^{2n+1}$ كمايلي:

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi 2 \left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2}(dz - y^i dx).$$

منوّعة كانموتسو

تعريف 1.3.12. لتكن (M,φ,ξ,η) منوّعة مترية تلامسية تقريبا و ϕ الشكل التفاضلي الأساسي لها. نقول عن المنوّعة M أنها من صنف كانموتسو إذا كانت η مغلقة (يعني $\mathrm{d}\eta=0$) و $\mathrm{d}\phi=2\eta\wedge\phi$ و كانت الثلاثية (φ,ξ,η) ناظمية.

ملاحظة 1.3.4. إذا لم تكن ناظمية نقول عنها أنها منوّعة كانموتسو تقريبا.

مبرهنة 1.3.7. [25] لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريبا بُعدها $(2n+1)$ و ∇ وصلة لوفي-سيفيتا الموافقة للمترك g. نقول عن المنوّعة M أنها من صنف كانموتسو إذا و فقط إذا كان من أجل كل $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$،

$$(\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X.$$

مبرهنة 1.3.8. [25] لتكن (M,φ,ξ,η) منوّعة كانموتسو. من أجل كل نقطة $p\in M$، يوجد جوار مفتوح U فيه تكون M هي جُداء إلتفافي $\mathbb{I}\times_f N$ مع $f(t)=ce^t$ هي دالة معرفة على المجال $\mathbb{I}=(-\varepsilon,\varepsilon)$ و N هي منوّعة كالير.

مثال 1.3.4. (الفضاء الزائدي)
لتكن (x,y,z) الإحداثيات الديكارتية على $\mathbb{R}^3$ نضع

$$\eta=dz,\quad \xi=\frac{\partial}{\partial z},\quad \Phi=-2e^{2z}dx\wedge dy,\quad g=e^{2z}(dx^2+dy^2)+dz^2.$$

يمكننا بسهولة ملاحظة أن $\mathrm{d}\eta=0$ و كذلك $\mathrm{d}\phi=-4e^{2z}dz\wedge dx\wedge dy=2dz\wedge\phi=2\eta\wedge\phi.$ يتبقى شرط الناظمية و يكفي حساب $N^{(1)}(\partial_x,\partial_y)$، $N^{(1)}(\partial_x,\partial_z)$ و $N^{(1)}(\partial_y,\partial_z)$.

حتما سيحتار الطالب في ايجاد الموتّر φ. لابأس، لدينا $\phi_{ij}=g(\partial_i,\varphi\partial_j)$ و كذلك $\varphi\partial_j=\sum_{k=1}^3\varphi_k^j\partial_k$ و عليه

$$\phi_{ij}=g(\partial_i,\varphi_k^j\partial_k)=\varphi_k^jg(\partial_i,\partial_k)=\varphi_k^je^{2z}\delta_{ik}=e^{2z}\varphi_i^j,$$

لاحظ أن المترك المعطى مصفوفته المرفقة هي قُطرية.
بما أن $\phi12=-\phi21=-e^{2z}$ و $\phi13=-\phi23=0$ نتحصّل على

$$\varphi=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}N^{(1)}(\partial_x,\partial_y) &= \varphi^2[\partial_x,\partial_y]+[\varphi\partial_x,\varphi\partial_y]-\varphi[\varphi\partial_x,\partial_y]-\varphi[\partial_x,\varphi\partial_y]+2\mathrm{d}\eta(\partial_x,\partial_y)\xi\\ &= -[\partial_y,\partial_x]-\varphi[\partial_y,\partial_y]+\varphi[\partial_x,-\partial_x]\\ &= 0. \qquad\qquad ([\partial_i,\partial_j]=0).\end{aligned}$$

بالمثل

$$N^{(1)}(\partial_x,\partial_z)=N^{(1)}(\partial_y,\partial_z)=0,$$

و بالتالي $(\mathbb{R}^3,\varphi,\eta,\xi,g)$ هي منوّعة كانموتسو.

منوّعة ثنائية التماسك

تعريف 1.3.13. لتكن (M,φ,ξ,η) منوّعة مترية تلامسية تقريبا و ϕ شكلها التفاضلي الأساسي. نقول عن المنوّعة M أنها ثنائية التماسك إذا كانت ϕ و η مغلقتين (أي $\mathrm{d}\phi=0$, $\mathrm{d}\eta=0$) و كانت الثلاثية (φ,ξ,η) ناظمية.

مبرهنة 1.3.9. [31]
لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريبا بُعدها $(2n+1)$ و ∇ وصلة لوفي-سيفيتا الموافقة للمترك g. نقول عن هذه المنوّعة أنها ثنائية التماسك إذا و فقط إذا كان من أجل كل $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$،

$$(\nabla_X\varphi)Y=0.$$

قضية 1.3.8. لتكن (M,φ,ξ,η,g)منوّعة ثنائية التماسك. من أجل كل $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ لدينا

$$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=0.$$

البرهان 1.3.11. لدينا

$$\begin{aligned}(\nabla_X\phi)(Y,Z) &= X\phi(Y,Z)-\phi(\nabla_XY,Z)-\phi(Y,\nabla_XZ)\\ &= Xg(Y,\varphi Z)-g(\nabla_XY,\varphi Z)-g(Y,\varphi\nabla_XZ)\\ &= g(\nabla_XY,\varphi Z)+g(Y,\nabla_X\varphi Z)-g(\nabla_XY,\varphi Z)-g(Y,\varphi\nabla_XZ)\\ &= g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

و منه

$$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=0.$$

مثال 1.3.5.
و هذه بنية ثنائية التماسك بسيطة على $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$\eta = dz, \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \phi = dx \wedge dy.$$

(نترك التأكد للطالب).

منوّعة ماوراء-ساساكي

تعتبر هذه المنوّعة تعميمٌ للمنوّعات الثلاثة السابقة. سنقدمها بشكل مختصر هنا على أن نفصّل فيها في الفصل القادم.

تعريف 1.3.14. [32]، [27] لتكن (M, φ, ξ, η) منوّعة مترية تلامسية تقريبا و ϕ الشكل التفاضلي الأساسي. نقول عن المنوّعة M أنها من صنف ماوراء-ساساكي إذا و فقط إذا كانت البنية ناظمية و كان

$$\mathrm{d}\eta = \alpha\phi, \quad \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta \wedge \phi,$$

حيث $\alpha = \frac{1}{2n}\delta\phi(\xi)$ و $\beta = \frac{1}{2n}\mathrm{div}\xi$ هي دوال قابلة للتفاضل على M و $\delta\phi$ هو تباعد ϕ (*la divergence*) المعرّف بـ

$$\delta\phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\phi)(\varphi e_i, X)\Big) - (\nabla_\xi \varphi)(\xi, X),$$

مع $\{e_1, ..., e_n, \varphi e_1, ..., \varphi e_n, \xi\}$ هو φ-أساس محلي لمفتوح كيفي من M،(أنظر [22] صفحة 209).

مبرهنة 1.3.10.
لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا بعدها $(2n+1)$ و ∇ وصلة لوفي-سيفيتا الموافقة للمترك g. نقول عن M أنها من صنف ماوراء-ساساكي إذا و فقط إذا كان من أجل كل $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X\varphi)Y = \alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big)$$

و نقول أيضا أن المنوّعة هي ماوراء-ساساكي من النوع (α, β).

لاحظ مايلي

- من أجل $\alpha = 1$ و $\beta = 0$.المنوّعة هي من الصنف ساساكي

- من أجل $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ و $\beta = 0$ المنوّعة هي من الصنف α-ساساكي.
- من أجل $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ المنوّعة هي من الصنف كانموتسو.
- من أجل $\alpha = 0$ و $\beta \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ المنوّعة هي من الصنف β- كانموتسو.
- من أجل $\alpha = \beta = 0$المنوّعة هي من الصنف ثنائية التماسك.

قضية 1.3.9. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة من صنف ماوراء-ساساكي.
من أجل كل $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ لدينا

$$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi X + \beta(X - \eta(X)\xi),$$

$$(\nabla_X \eta)Y = -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta\big(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\big),$$

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \alpha\big(g(X, Z)\eta(Y) - g(X, Y)\eta(Z)\big) - \beta\big(g(X, \varphi Z)\eta(Y) - g(X, \varphi Y)\eta(Z)\big).$$

ملاحظة 1.3.5. من القضية 1.3.9 نتحصّل على

$$(\nabla_X \Phi)(Y, \xi) = -\alpha, \qquad (\nabla_X \eta)X = -\beta.$$

و من أجل كل X عمودي على ξ و $g(X, X) = 1$ لدينا

$$\delta\phi(\xi) = 2n\alpha, \qquad \delta\eta = -2n\beta.$$

مثال 1.3.6. لتكن (x, y, z) الإحداثيات الديكارتية للفضاء $\mathbb{R}^3$ نضع

$$\xi = \frac{\partial}{\partial_z}, \qquad \eta = dz - ydx$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} e^z + y^2 & 0 & -y \\ 0 & e^z & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

باستعمال العلاقة

$$\delta\phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n} \Big((\nabla_{e_i}\phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\phi)(\varphi e_i, X)\Big) - (\nabla_\xi \varphi)(\xi, X),$$

و

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{2n} \Big((\nabla_{e_i}\eta)e_i + (\nabla_{\varphi e_i}\eta)\varphi e_i\Big),$$

نجد $\delta\eta = -1$, $\delta\phi(\xi) = -e^{-z}$ و بالتالي $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع $(-\frac{1}{2}e^{-z}, \frac{1}{2})$. و لاحظ جيدا أن

$$\xi(\alpha) = \frac{\partial}{\partial_z}(-\frac{1}{2}e^{-z}) = \frac{1}{2}e^{-z} = -2(-\frac{1}{2}e^{-z})(\frac{1}{2}) = -2\alpha\beta.$$

الفصل 2

المنوّعات المترية التلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد

هذا الكتّاب مُعِدّ خصيصا للبنى المترية التلامسية تقريبا و على وجه الخصوص ثلاثية الأبعاد منها. هذا البُعد الخاص جدا و المهم له مواصفات و خصائص تحتم على كل طالب أن يتحكم فيها قبل الإبحار في الأبعاد الأكبر ذلك لاعتبارات كثيرة منها انه الفضاء الذي نحيا فيه و نمارس فيه كل نشاطاتنا كما أننا نستطيع رؤية كل محتوياته بالعين المجرّدة أو بوسيلة ما، فمثلا عندما نقول الكرة S^2 فأنت تعرفها و تراها و تستطيع استخراج خواصها الهندسية ببساطة عكس الأبعاد الأكبر.

و الفضاء ثلاثي الأبعاد هو الفضاء الذي تُطبّق و تُجسّد فيه نتائج الرياضيات بلغة الفيزياء أو الميكانيكا أو علم الفلك أو أي علم تطبيقي آخر.

من خصائص البُعد الثالث الرياضياتية نذكر هنا أنه يوجد تقابل بين الأشكال التفاضلية الثنائية مع حقول الأشعة أي من أجل كل شكل تفاضلي ثنائي يوجد حقل شعاعي وحيد يقابله و العكس صحيح. و لشرح ذلك، يكفي أن تعلم أنّ كل شكل تفاضلي ثنائي ω من المنوّعة الريمانية (M^3, g) يحوّل بمؤثر هودج الى شكل تفاضلي أحادي $*\omega$ هو شكل ثنوي لحقل شعاعي V لوجود المترك الريماني g أي من أجل كل حقل شعاعي X من M لدينا $*\omega(X) = g(X, V)$. و هنا نترك الطالب يفكّر في العلاقة بين الحقل الشعاعي المميّز ξ و الشكل الثنائي الأساسي ϕ لبُنية مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد!.

في هذا الفصل سنتطرق بالتفصيل للبنى المترية التلامسية ثلاثية الأبعاد مع شرح للأصناف الخمسة حسب تصنيف تشينيا-غونزليز و تقديم أمثلة ملموسة للشرح و التوضيح و نختم الفصل بادراج تعميم يشمل أربعة أصناف.

و قبل أن نُبْحِر في البُعد الثلاثي، سنبدأ أولا بتفصيل النتائج المتميّزة والمُتحصّل عليها من قبل أولشاك في بحثه [29] و الخاصّة بالمنوّعات المترية التلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد.

2.1 تعاريف و خواص

قضية 2.1.10.
من أجل كل منوّعة مترية تلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد (M,φ,ξ,η,g)، القضايا التالية محققة من أجل كل $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$

$$\begin{array}{ll}(-1-) & (\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi\nabla_X\xi,Y)\xi-\eta(Y)\varphi\nabla_X\xi.\\ (-2-) & \mathrm{d}\phi=(\mathrm{div}\xi)\eta\wedge\phi.\\ (-3-) & \mathrm{d}\eta=\eta\wedge(\nabla_\xi\eta)+\dfrac{1}{2}\big(tr(\varphi\nabla\xi)\big)\phi.\end{array}$$

حيث ∇ هي وصلة لوفي-سيفيتا مرفقة بالموتّر المتري g و div هو مؤثر التباعد (*Divergence*) المُعرف بالعلاقة

$$\mathrm{div}\xi=trace\{X\to\nabla_X\xi\}=\sum_{i=1}^{3}g(\nabla_{e_i}\xi,e_i)$$

و

$$tr(\varphi\nabla\xi)=trace\{X\to\varphi\nabla_X\xi\}=\sum_{i=1}^{3}g(\varphi\nabla_{e_i}\xi,e_i).$$

مع $\{e_i\}$ أساس متعامد و متجانس.

البرهان 2.1.12.

(-1-) نعلم أنّ $\eta\wedge\phi$ هي شكل تفاضلي ثلاثي فهي مرتبطة بعنصر الحجم في البُعد الثلاثي. هذا معناه أن

$$\eta\wedge\phi=fv_g,$$

حيث v_g هو عنصر الحجم يعطى بالعلاقة

$$v_g=\sqrt{det(g_{ij})}dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.$$

بوجود الـ$\varphi-$ أساس $\{\xi,e_1,e_2=\varphi e_1\}$ نستطيع تعريف الأساس الثنوي المرافق التالي $\{\eta,\theta^1,\theta^2\}$.
لدينا إذن

$$v_g=\eta\wedge\theta^1\wedge\theta^2,$$

و كذلك

$$\left\{\begin{array}{l}\phi(\xi,e)=0,\\ \phi(\xi,\varphi e)=0,\\ \phi(e,\varphi e)=-1,\end{array}\right.\quad\Rightarrow\phi=-2\,\theta^1\wedge\theta^2.$$

و بالتالي نتحصّل على

$$\begin{aligned}(\eta\wedge\phi)(\xi,e,\varphi e)=fv_g(\xi,e,\varphi e) &\Leftrightarrow -1=f(\eta\wedge\theta^1\wedge\theta^2)(\xi,e,\varphi e)\\ &\Leftrightarrow -1=f.\end{aligned}$$

من جهة أخرى، و من أجل أساس متعامد و متجانس $(e_i)_{1\leq i\leq 3}$ حيث $\left(\nabla_{e_i}e_j\right)_p=0$ مع $p\in M$ لدينا من أجل كل $i\in\{1,2,3\}$

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{e_i}v_g\right)(e_1,e_2,e_3) &= e_i\big(v_g(e_1,e_2,e_3)\big)-v_g\big(\nabla_{e_i}e_1,e_2,e_3\big)\\ &\quad -v_g\big(e_1,\nabla_{e_i}e_2,e_3\big)-v_g\big(e_1,e_2,\nabla_{e_i}e_3\big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

هذا يعني أن عنصر الحجم موازٍ للوصلة ∇ أي $\nabla v_g=0$ و منه نستنتج أنّ

$$\nabla(\eta\wedge\phi)=0.$$

من أجل كل $X,Y,Z,W\in\mathfrak{X}(M)$ لدينا

$$\begin{aligned}\big(\nabla_X(\eta\wedge\phi)\big)(Y,Z,W) &= X\big((\eta\wedge\phi)(Y,Z,W)\big)-(\eta\wedge\phi)(\nabla_XY,Z,W)\\ &- (\eta\wedge\phi)(Y,\nabla_XZ,W)-(\eta\wedge\phi)(Y,Z,\nabla_XW).\end{aligned}$$

علماً أنه من أجل كل X، Y و Z حقول أشعة من M

$$3(\eta\wedge\phi)(X,Y,Z)=\eta(X)\phi(Y,Z)+\eta(Y)\phi(Z,X)+\eta(Z)\phi(X,Y).$$

وباستخدام الخريطة الناظمية (*la carte normale*) أي $(\nabla_{\partial_i}\partial j=0)$، نجد أنَّ :

$$\begin{aligned}0 &= (\nabla_X(\eta\wedge\phi))(Y,Z,W)\\ &= X((\eta\wedge\phi))(Y,Z,W))\\ &= X(\frac{1}{3}\{\eta(Y)\phi(Z,W)+\eta(Z)\phi(W,Y)+\eta(W)\phi(Y,Z)\})\\ &= \frac{1}{3}\big\{X\big(\eta(Y)\phi(Z,W)\big)+X\big(\eta(Z)\phi(W,Y)\big)+X\big(\eta(W)\phi(Y,Z)\big)\big\}\\ &= \frac{1}{3}\big\{(\nabla_X\eta)(Y)\phi(Z,W)+\eta(Y)(\nabla_X\phi)(Z,W)+(\nabla_X\eta)(Z)\phi(W,Y)\\ &+ \eta(Z)(\nabla_X\phi)(W,Y)+(\nabla_X\eta)(W)\phi(Y,Z)+\eta(W)(\nabla_X\phi)(Y,Z)\big\},\end{aligned}$$

هذا يكافؤ

$$\begin{aligned}&(\nabla_X\eta)(Y)\phi(Z,W)+\eta(Y)(\nabla_X\phi)(Z,W)+(\nabla_X\eta)(Z)\phi(W,Y)\\ &+\eta(Z)(\nabla_X\phi)(W,Y)+(\nabla_X\eta)(W)\phi(Y,Z)+\eta(W)(\nabla_X\phi)(Y,Z)=0.\end{aligned}$$

لنفرض أنَّ $W=\xi$ وعلماً أنَّ $\phi(X,\xi)=0$، عندها نحصل على المعادلة التالية

$$\begin{aligned}\eta(Y)(\nabla_X\phi)(Z,\xi) &+ \eta(Z)(\nabla_X\phi)(\xi,Y)\\ &+ (\nabla_X\eta)(\xi)\phi(Y,Z)+(\nabla_X\phi)(Y,Z)=0, \qquad (1)\end{aligned}$$

وبما أنَّ

$$\begin{aligned}(\nabla_X\phi)(Y,\xi) &= X\big(\phi(Y,\xi)\big)-\phi(\nabla_XY,\xi)-\phi(Y,\nabla_X\xi)\\ &= -\phi(Y,\nabla_X\xi)\\ &= -g(Y,\varphi\nabla_X\xi).\end{aligned}$$

باستخدام الخريطة الناظمية دائماً و مع العلم أنَّ $\eta(\nabla_X\xi)=0$، تصبح المعادلة (1) على الشكل التالي :

$$-\eta(Y)g(Z,\varphi\nabla_X\xi)+\eta(Z)g(Y,\varphi\nabla_X\xi)+g(Y,(\nabla_X\varphi)Z)=0$$

ومنه

$$\begin{aligned}g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big) &= g(Y,\xi)g\big(Z,\varphi\nabla_X\xi\big)-\eta(Z)g\big(Y,\varphi\nabla_X\xi\big)\\ &= g\big(Y,g(Z,\varphi\nabla_X\xi)\xi\big)-g\big(Y,\eta(Z)\varphi\nabla_X\xi\big)\\ &= g\Big(Y,g\big(Z,\varphi\nabla_X\xi\big)\xi-\eta(Z)\varphi\nabla_X\xi\Big),\end{aligned}$$

بما أنَّ g معرف إيجاباً فهو غير منحل (*non dégénérée*) ينتج

$$(\nabla_X\varphi)Z=g\big(Z,\varphi\nabla_X\xi\big)\xi-\eta(Z)\varphi\nabla_X\xi$$

(-2-) بما أن الشكلين التفاضليين $\mathrm{d}\phi$ و $\eta\wedge\phi$ من الرتبة الثالثة و من نفس الفضاء ثلاثي الأبعاد فهما حتما مرتبطين بالعلاقة $\mathrm{d}\phi=\sigma\eta\wedge\phi$ حيث σ هي دالة على المنوعة M.
من أجل الأساس المتعامد و المتجانس $\{e_0=\xi,e_1,e_2=\varphi e_1\}$ و الذي يسمى $\varphi-$ أساس، لدينا

$$\begin{aligned}3(\eta\wedge\phi)(e_0,e_1,e_2) &= \eta(e_0)\phi(e_1,e_2)+\eta(e_1)\phi(e_2,e_0)+\eta(e_2)\phi(e_0,e_1)\\ &= \phi(e_1,e_2)\\ &= -1.\end{aligned}$$

من جهةٍ أخرى لدينا

$$\begin{aligned}3(d\phi)(e_0,e_1,e_2) &= e_0\phi(e_1,e_2)+e_1\phi(e_2,e_0)+e_2\phi(e_0,e_1)-\phi([e_0,e_1],e_2)\\ &- \phi([e_1,e_2],e_0)-\phi([e_2,e_0],e_1)\end{aligned}$$

مع العلم أنَّ $\phi(X, e_0) = 0$، نجد أنَّ

$$\begin{aligned}
3(\mathrm{d}\phi)(e_0, e_1, e_2) &= e_0\phi(e_1, e_2) - \phi([e_0, e_1], e_2) - \phi([e_2, e_0], e_1) \\
&= e_0\phi(e_1, e_2) - \phi(\nabla_{e_0}e_1, e_2) + \phi(\nabla_{e_1}e_0, e_2) \\
&- \phi(\nabla_{e_2}e_0, e_1) + \phi(\nabla_{e_0}e_2, e_1) \\
&= \phi(\nabla_{e_0}e_1, e_2) + \phi(e_1, \nabla_{e_0}e_2) - \phi(\nabla_{e_0}e_1, e_2) \\
&+ \phi(\nabla_{e_1}e_0, e_2) - \phi(\nabla_{e_2}e_0, e_1) + \phi(\nabla_{e_0}e_2, e_1) \\
&= \phi(\nabla_{e_1}e_0, e_2) - \phi(\nabla_{e_2}e_0, e_1) \\
&= g(\nabla_{e_1}e_0, \varphi e_2) - g(\nabla_{e_2}e_0, \varphi e_1) \\
&= g(\nabla_{e_1}e_0, \varphi^2 e_1) - g(\nabla_{e_2}e_0, e_2) \\
&= -g(\nabla_{e_1}e_0, e_1) + \eta(e_1)g(\nabla_{e_1}e_0, e_0) - g(\nabla_{e_2}e_0, e_2) \\
&= -[g(\nabla_{e_1}e_0, e_1) + g(\nabla_{e_2}e_0, e_2)] \\
&= -\mathbf{div}(e_0) \\
&= -\mathbf{div}(\xi).
\end{aligned}$$

إذن،

$$\mathrm{d}\phi(e_0, e_1, e_2) = -\mathbf{div}(\xi) = \sigma\eta \wedge \phi(e_0, e_1, e_2) = -\sigma,$$

أي

$$\sigma = \mathbf{div}(\xi).$$

(-3-) بوجود الـ $\varphi-$ أساس $\{\xi, e_1, e_2 = \varphi e_1\}$ نستطيع تعريف الأساس الثنوي التالي $\{\eta, \theta^1, \theta^2\}$.
لدينا إذن

$$\phi(e_1, e_2) = -1, \qquad \phi(e_1, \xi) = \phi(e_2, \xi) = 0,$$

ومنه

$$\phi = -2\theta^1 \wedge \theta^2.$$

من جهة أخرى، لدينا $\{\eta \wedge \theta^1, \eta \wedge \theta^2, \theta^1 \wedge \theta^2\}$ هو أساس لفضاء الأشكال التفاضلية الثنائية.
و باعتبار $\mathrm{d}\eta$ شكلا تفاضليا ثنائيا، يمكننا كتابة مايلي

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\eta &= a\ \eta \wedge \theta^1 + b\ \eta \wedge \theta^2 + c\ \theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= \eta \wedge (a\theta^1 + b\theta^2) - \frac{c}{2}(-2\theta^1 \wedge \theta^2), \qquad a, b, c \in \mathcal{C}^\infty(M).
\end{aligned}$$

إذن، نستطيع أنَّ نكتب $\mathrm{d}\eta$ بالشكل التالي :

$$\mathrm{d}\eta = \eta \wedge \omega + \tau\phi,$$

بحيث τ هي دالة على M و ω شكل تفاضلي أُحادي يعامد η، أي $\omega(\xi) = 0$.
لدينا من أجل كل $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(\xi, X) &= 2(\eta \wedge \omega + \tau\phi)(\xi, X) \\ &= (\eta \wedge \omega)(\xi, X) + 2\tau\phi(\xi, X) \\ &= \eta(\xi)\omega(X) - \eta(X)\omega(\xi) \\ &= \omega(X). \end{aligned} \tag{2}$$

ولدينا أيضاً

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(\xi, X) &= \xi\eta(X) - X\eta(\xi) - \eta([\xi, X]) \\ &= (\nabla_\xi \eta)(X), \end{aligned} \tag{3}$$

وبالتالي من (2) و (3) ينتج

$$\omega(X) = (\nabla_\xi \eta)(X) \Longleftrightarrow \omega = \nabla_\xi \eta.$$

من جهةٍ أخرى،

$$\begin{aligned} (\eta \wedge \omega + \tau\phi)(e_2, e_1) &= (\eta \wedge \omega)(e_2, e_1) + \tau\phi(e_2, e_1) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\eta(e_2)\omega(e_1) - \eta(e_1)\omega(e_2)\Big) + \tau g(e_2, \varphi e_1) \\ &= \tau g(e_2, \varphi e_1) \\ &= \tau g(e_2, e_2) \\ &= \tau. \end{aligned} \tag{4}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} 2(\mathrm{d}\eta)(e_2, e_1) &= e_2\eta(e_1) - e_1\eta(e_2) - \eta([e_2, e_1]) \\ &= -\eta([e_2, e_1]) \\ &= -\eta(\nabla_{e_2} e_1) + \eta(\nabla_{e_1} e_2) \\ &= -g(\nabla_{e_2} e_1, \xi) + g(\nabla_{e_1} e_2, \xi) \\ &= -e_2 g(e_1, \xi) + g(e_1, \nabla_{e_2}\xi) + e_1 g(e_2, \xi) - g(e_2, \nabla_{e_1}\xi) \\ &= g(e_1, \nabla_{e_2}\xi) - g(e_2, \nabla_{e_1}\xi) \\ &= g(\varphi e_1, \varphi\nabla_{e_2}\xi) - g(\varphi e_2, \varphi\nabla_{e_1}, \xi) \\ &= g(e_2, \varphi\nabla_{e_2}\xi) + g(e_1, \varphi\nabla_{e_1}\xi) \\ &= tr(X \to \varphi\nabla_X \xi). \end{aligned} \tag{5}$$

وبالتالي من (4) و (5) نحصّل على

$$\tau = \frac{1}{2}(tr(\varphi\nabla\xi))$$

إذن

$$\mathrm{d}\eta = \eta \wedge \omega + \frac{1}{2}(tr(\varphi\nabla\xi))\phi.$$

قضية 2.1.11.
من أجل كل منوّعة مترية تلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$، القضايا التالية متكافئة :

(1) البنية (φ, ξ, η) ناظمية.

(2) $\nabla_{\varphi X}\xi = \varphi\nabla_X\xi.$

(3) $\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X - \alpha\varphi X.$

من أجل كل $X \in \mathfrak{X}(M)$، بحيث

$$2\beta = \mathbf{div}\xi \qquad 2\alpha = tr(\varphi\nabla\xi)$$

للبرهنة على تكافؤ هذه القضايا الثلاث، ينبغي أولا إثبات القضية التالية

قضية 2.1.12. تكون البُنية المترية التلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد ناظمية إذا و فقط إذا كان

$$\varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - (\nabla_X\eta)(Y)\xi = 0,$$

من أجل كل $X \in \mathfrak{X}(M)$.

البرهان 2.1.13. نعلم أنّ

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X,Y) &= \varphi(\nabla_Y\varphi)X - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X - (\nabla_Y\eta)(X)\xi \\ &\quad - \big(\varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - (\nabla_X\eta)(Y)\xi\big). \end{aligned} \tag{6}$$

بفرض أن $N^{(1)} = 0$ و بوضع

$$\begin{aligned} T(X,Y,Z) &= g\big(\varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - (\nabla_X\eta)(Y)\xi, Z\big) \\ &= -g\big((\nabla_X\varphi)Y, \varphi Z\big) - g\big((\nabla_{\varphi X}\varphi)Y, Z\big) - (\nabla_X\eta)(Y)\eta(Z). \end{aligned}$$

بسهولة يمكننا ملاحظة أن

$$T(X,Y,Z) = T(Y,X,Z). \tag{7}$$

من جهة أخرى، بتوظيف العلاقات

$$\nabla_X(\varphi Y) = (\nabla_X\varphi)Y + \varphi\nabla_X Y \quad \text{و} \quad g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y)$$

نتحصّل على

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) &= g\big(\nabla_X\varphi Y, Z\big) - g\big(\varphi\nabla_X Y, Z\big) \\ &= -Xg\big(Y, \varphi Z\big) - g\big(\varphi Y, \nabla_X Z\big) + g\big(\nabla_X Y, \varphi Z\big) \\ &= -g\big(Y, (\nabla_X\varphi)Z\big). \end{aligned}$$

و عليه، يمكننا القيام بالخطوات التالية

$$\begin{aligned} T(X,Y,Z) &= -g\big((\nabla_X\varphi)Y, \varphi Z\big) - g\big((\nabla_{\varphi X}\varphi)Y, Z\big) - (\nabla_X\eta)(Y)\eta(Z) \\ &= g\big(Y, (\nabla_X\varphi)(\varphi Z)\big) + g\big(Y, (\nabla_{\varphi X}\varphi)Z\big) - (\nabla_X\eta)(Y)\eta(Z) \\ &= g\big(Y, \nabla_X\varphi^2 Z\big) - g\big(Y, \varphi\nabla_X\varphi Z\big) + g\big(Y, (\nabla_{\varphi X}\varphi)Z\big) - (\nabla_X\eta)(Y)\eta(Z) \\ &= -g\big(Y, \nabla_X Z\big) + (\nabla_X\eta)(Z)\eta(Y) + \eta(\nabla_X Z)\eta(Y) + \eta(Z)g\big(Y, \nabla_X\xi\big) \\ &\quad + g\big(\varphi Y, (\nabla_X\varphi)Z\big) + g\big(Y, \nabla_X Z\big) - \eta(Y)\eta\big(\nabla_X Z\big) \\ &\quad + g\big(Y, (\nabla_{\varphi X}\varphi)Z\big) - (\nabla_X\eta)(Y)\eta(Z) \\ &= (\nabla_X\eta)(Z)\eta(Y) + \eta(Z)g\big(Y, \nabla_X\xi\big) + g\big(\varphi Y, (\nabla_X\varphi)Z\big) \\ &\quad + g\big(Y, (\nabla_{\varphi X}\varphi)Z\big) - (\nabla_X\eta)(Y)\eta(Z) \\ &= g\big((\nabla_X\varphi)Z, \varphi Y\big) + g\big(\nabla_{\varphi X}\varphi)Z, Y\big) + (\nabla_X\eta)(Z)\eta(Y) \\ &= -T(X,Z,Y). \end{aligned}$$

من العلاقتين الهامتين المحصّل عليهما

$$T(X,Y,Z) = T(Y,X,Z) = -T(X,Z,Y),$$

ينتج

$$\begin{aligned} T(X,Y,Z) &= T(Y,X,Z) = -T(Y,Z,X) = -T(Z,Y,X) \\ &= T(Z,X,Y) = T(X,Z,Y) \\ &= -T(X,Y,Z), \end{aligned}$$

و بالتالي نستنتج

$$T(X,Y,Z) = 0.$$

و الآن نعود للبرهنة على القضية 2.1.11.

البرهان 2.1.14. حسب القضية أعلاه 2.1.12، تكون البنية المترية التلامسية (φ,ξ,η) ناظمية إذا و فقط إذا كان

$$\varphi(\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y-(\nabla_X\eta)(Y)\xi=0, \tag{8}$$

من أجل كل حقلي أشعة $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$

(1) $(1\Longleftrightarrow 2)$

(a) : $(2\Longrightarrow 1)$ لنفرض أنَّ البنية (φ,ξ,η) ناظمية، ونستبدل في العلاقة (8) كل Y بِـ ξ

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(\nabla_X\varphi)\xi-(\nabla_{\varphi X}\varphi)\xi-(\nabla_X\eta)(\xi)\xi\\
&= \varphi(\nabla_X\varphi)\xi-\varphi X(\varphi\xi)+\varphi(\nabla_{\varphi X}\xi)\\
&= \varphi(\nabla_X\varphi)\xi+\varphi(\nabla_{\varphi X}\xi)\\
&= \varphi^2(\nabla_X\varphi)\xi+\varphi^2(\nabla_{\varphi X}\xi)\\
&= -(\nabla_X\varphi)\xi+\eta\big((\nabla_X\varphi)\xi\big)\xi-(\nabla_{\varphi X}\xi)+\eta(\nabla_{\varphi X}\xi)\xi\\
&= -(\nabla_X\varphi)\xi+\eta\big(X(\varphi\xi)-\varphi(\nabla_X\xi)\big)-\nabla_{\varphi X}\xi\\
&= -(\nabla_X\varphi)\xi-\nabla_{\varphi X}\xi\\
&= -X(\varphi\xi)+\varphi(\nabla_X\xi)-\nabla_{\varphi X}\xi\\
&= \varphi(\nabla_X\xi)-\nabla_{\varphi X}\xi.
\end{aligned}$$

(b) : $(1\Rightarrow 2)$ لنفرض الآن أنَّ $\varphi\nabla_X\xi=\nabla_{\varphi X}\xi$، ونستبدل X بـ ξ نجد

$$\begin{aligned}
\varphi\nabla_\xi\xi=\nabla_{\varphi\xi}\xi &\Leftrightarrow \varphi\nabla_\xi\xi=0\\
&\Leftrightarrow \nabla_\xi\xi=0,
\end{aligned}$$

ثم باستعمال العلاقة (1) من القضية 2.1.10 نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y &= g(\varphi\nabla_{\varphi X}\xi,Y)\xi-\eta(Y)\varphi\nabla_{\varphi X}\xi\\
&= g(\varphi^2\nabla_X\xi,Y)\xi-\eta(Y)\varphi^2\nabla_X\xi\\
&= -(\nabla_X\nabla)(Y)\xi+\eta(Y)\nabla_X\xi,
\end{aligned}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}
\varphi(\nabla_X\varphi)Y &= -\eta(Y)\varphi^2\nabla_X\xi\\
&= \eta(Y)\nabla_X\xi,
\end{aligned}$$

بطرح المساوتين أعلاه نجد

$$\varphi(\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y-(\nabla_X\eta)(Y)\xi=0.$$

و عليه، البنية ناظمية.

(2) $(2 \Longleftrightarrow 3)$

(a) : $(2 \Rightarrow 3)$ لنفرض أنَّ

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M), \qquad \nabla_X \xi = -\alpha\varphi^2 X - \beta\varphi X.$$

من جهة

$$\begin{aligned}\nabla_{\varphi X}\xi &= -\alpha\varphi^3 X - \beta\varphi^2 X\\ &= \alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X.\end{aligned}$$

و من جهةٍ أخرى

$$\begin{aligned}\varphi\nabla_X\xi &= -\alpha\varphi^3 X - \beta\varphi^2 X\\ &= \alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X.\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M), \qquad \nabla_{\varphi X}\xi = \varphi\nabla_X\xi.$$

(b) : $(3 \Rightarrow 2)$ لنفرض أنَّ $\nabla_{\varphi X}\xi = \varphi\nabla_X\xi$، سنقوم باستخدام $\{e_0 = \xi, e_1, e_2 = \varphi e_1\}$ مع العلم أن $\eta(e_1) = \eta(e_2) = 0$ وكذلك $\nabla_\xi\xi = 0$ كما بينّا سابقاً. وعليه

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1}\xi &= -\alpha\varphi^2 e_1 - \beta\varphi e_1\\ &= -\alpha\big(-e_1 + \eta(e_1)\xi\big) - \beta\varphi e_1\\ &= \alpha e_1 - \beta e_2,\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}\nabla_{e_2}\xi &= -\alpha\varphi^2 e_2 - \beta\varphi e_2\\ &= -\alpha\big(-e_2 + \eta(e_2)\xi\big) - \beta\varphi e_2\\ &= \alpha e_2 + \beta e_1.\end{aligned}$$

و لدينا

$$\begin{aligned}g(\nabla_{e_1}\xi, e_1) &= g(\alpha e_1 - \beta e_2, e_1)\\ &= \alpha g(e_1, e_1) - \beta g(e_2, e_1)\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(\nabla_{e_2}\xi, e_2) &= g(\alpha e_2 + \beta e_1, e_2)\\ &= \alpha g(e_2, e_2) + \beta(e_1, e_2)\\ &= \alpha,\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\alpha = \frac{1}{2}\Big(g(\nabla_{e_1}\xi, e_1) + g(\nabla_{e_2}\xi, e_2)\Big) \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}\mathrm{div}\xi.$$

وبنفس الطريقة

$$g(\varphi\nabla_{e_1}\xi, e_1) = \beta g(\varphi\nabla_{e_2}\xi, e_2).$$

إذن

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{2}\Big(g(\varphi\nabla_{e_1}\xi, e_1) + g(\varphi\nabla_{e_2}\xi, e_2)\Big)\\ &= \frac{1}{2}trace\{X \to \varphi\nabla_X\xi\}.\end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على العبارة التالية :

$$\nabla_X\xi = \frac{1}{2}(\mathrm{div}\xi)\varphi^2 X - \frac{1}{2}(tr(\varphi\nabla_X\xi))\varphi X.$$

2.2 تصنيف تشينيا و غونزلاز للبنى المترية التلامسية تقريباً

في سنة 1990 قدم العالمان د. تشينيا و ج. غونزلاز [21] تصنيفا للبنى المترية التلامسية تقريبا بناء على دراسة ارتكزت على الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي ϕ. فحدّدا بذلك إثني عشر صنفا، نوردها في الجدول التالي

التسمية	الخاصية
C_1	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = 0, \qquad \nabla\eta = 0$
C_2	$\mathrm{d}\phi = \nabla\eta = 0$
C_3	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) - (\nabla_{\varphi X}\phi)(\varphi Y,Z) = 0, \qquad \delta\phi = 0$
C_4	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = -\frac{1}{2(n-1)}\Big(g(\varphi X,\varphi Y)\delta\phi(Z) - g(\varphi X,\varphi Z)\delta\phi(Y) -\phi(X,Y)\delta\phi(\varphi Z) + \phi(X,Z)\delta\phi(\varphi Y)\Big),$ $\delta\phi(\xi) = 0$
C_5	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = \frac{1}{2n}\Big(\phi(X,Z)\eta(Y) - \phi(X,Y)\eta(Z)\Big)\delta\eta$
C_6	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = \frac{1}{2n}\Big(g(X,Z)\eta(Y) - g(X,Y)\eta(Z)\Big)\delta\phi(\xi)$
C_7	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = \eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X + \eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z, \qquad \delta\phi = 0$
C_8	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = -\eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X + \eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z, \quad \delta\eta = 0$
C_9	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = \eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X - \eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z$
C_{10}	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = -\eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X - \eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z$
C_{11}	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = -\eta(X)(\nabla_\xi\phi)(\varphi Y,\varphi Z)$
C_{12}	$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = \eta(X)\eta(Z)(\nabla_\xi\eta)\varphi Y - \eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi\eta)\varphi Z$

حيث

$$\delta\phi(X) = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\phi)(\varphi e_i, X) - (\nabla_{\xi}\phi)(\xi, X).$$

و من بين أشهر البنى نذكر بنية ساساكي التي تنتمي للصنف C_6 و بنية كانموتسو التي تنتمي للصنف C_5. بالنسبة لبنية ثنائية التماسك نُذكِّر هنا بالمبرهنة التالية و التي توضّح أهمية هذه البنية

مبرهنة 2.2.11. [21] الجدول السابق يعرّف الأصناف الإثني عشر للبنى المترية التلامسية تقريبا ذات البُعد $2n+1 \geq 7$. إذا كانت البنى خماسية الأبعاد (أي $n = 2$) فإن $C_1 = C_3 = |C|$ أما إذا كانت ثلاثية الأبعاد (أي $n = 1$) فإن $C_i = |C|$ من أجل $i \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11\}$ حيث $|C|$ يرمز لصنف البنى ثنائية التماسك.

و بناء على هذه المبرهنة نستنتج أنه في البعد الثلاثي يوجد خمسة أصناف أساسية من البنى المترية التلامسية تقريبا، ثلاثة منها ناظمية و هي $|C|$ ، C_5 و C_6 أما الصنفان C_9 و C_{12} فلا يمكن أبدا أن يكونا ناظميين و سيأتي التفصيل في ذلك لاحقا (أنظر الفصل الموالي).

نشير أنه يوجد أعمال تتعلّق ببُنى مترية تلامسية تقريبا تحمل أسماء أخرى نَذكر مثلا بُنية ساساكي المزدوجة (Structure Nearly-Sasakienne) و بُنية شبه الساساكي (Structure Quasi-Sasakienne).

و الحقيقة أن هاتين البنيتين و غيرهما عبارة عن إتحاد صنفين أو أكثر، فمثلا بُنى شبه الساساكي هي من الصنف $|C| \oplus C_6$.

في سنة 1985، قدّم ج. أوبينا [32] ، دراسة عن الصنف $C_5 \oplus C_6$ ، جمع فيه الأصناف الثلاثة الأولى $|C|$ ، C_5 و C_6 . سنبدأ بتقديم دراسة تفصيلية عن هذا الصنف باعتباره يجمع البنى الناظمية الثلاثة معا. فإذا أراد القارئ صنفا بعينه فما عليه سوى بتطبيق الشرط المناسب و المتمثل في انعدام أحد الوسيطين كما سنوضح فيما هو آت طبعا كل ذلك مع تقديم أمثلة ملموسة. بعد ذلك، سنخصّص بابين لدراسة و تفصيل الصنفين C_9 و C_{12}.

2.3 منوّعات ماوراء-ساساكي

2.3.1 تمهيد

بداية، لا بد أن نقول كلمة حول المصطلح العلمي بنية **ماوراء-ساساكي** (Structure Trans-Sasakienne).

لقد فكّرنا كثيراً قبل تعريب المصطلح العلمي (Trans-Sasakienne) إلى "**ماوراء-ساساكي**" بل راسلنا مختصين في الميدان للمساعدة.

نقتضب هنا إجابة الأستاذ فالح السلمي من جامعة الملك عبد العزيز السعودية التي كانت على النحو التالي:
"كما تعلمون، هناك ضعف كبير في ترجمة المصطلحات العلمية الى اللغة العربية للأسف الشديد ولدينا محاولات تقبل الصواب والتعديل. نحن درسنا هذه المواضيع سابقاً وترجمنا مصطلح (Trans) الى كلمة **الناقل** فمثلاَ: (Trans-Sasakienne manifold) ترجمناه الى **عديد طيات ساساكي الناقل** أتمنى أن أكون قد وفقت في الإجابة على التساؤل."
و لم تفوتنا الفرصة للاتصال بالأستاذ ج. أوبينا (J. Oubi$\tilde{n}$a) أول من أدرج هذا المفهوم و صاحب هذه التسمية "Trans-Sasaki" مستفسرين عن السر في البادئة "Trans" فأجاب كمايلي:

" **Trans** is a Latin prefix, and one of its meanings is '**beyond**'.
So, I used this term to introduce this type of manifolds, which generalize Sasakian, Kenmotsu and cosymplectic structures "

و بناءً على هذا البحث و التقصي، ارتأينا ترجمة البادئة Trans الى مصطلح "ماوراء" فنقول بنية ماوراء-ساساكي من الصنف (α,β) للدلالة على بنية موسّعة تشمل كل من:
بنية ساساكي $(\alpha=1,\beta=0)$، بنية كانموتسو$(\alpha=0,\beta=1)$، بنية ثنائية التماسك $(\alpha=0,\beta=0)$ و بنية ماوراء-ساساكي البحتة $(\alpha\neq 0,\beta\neq 0)$.

توطئة 2.3.3. من المعلوم أن البُنى المركّبة قد دُرست و صُنّفت قبل البُنى المترية التلامسية تقريبا بعشرات السنين، و قد وُظّف الجُداء للربط بينهما. إذا اعتبرنا (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريبا ذات البُعد $2n+1$، فإن المنوّعة الجُداء $N=M\times\mathbb{R}$ تقبل بنية هارميسية تقريبا طبيعية (J,G) (أنظر الفقرة 1.1.2). حسب تصنيف غراي و هيرفيلا ([23])، يوجد ستة عشر صنفا من البنى الهاميسية تقريبا (N^{2n},J,G). الصنف W_4 هو الصنف المسمى البنى الهارميسية و المعرّف بالعلاقة

$$\begin{aligned}\nabla_X\Omega)(Y,Z)=\frac{-1}{2(2n-1)}\Big(&g(X,Y)\delta\Omega(Z)-g(X,Z)\delta\Omega(Y)\\ &-g(X,JY)\delta\Omega(JZ)+g(X,JZ)\delta\Omega(JY)\Big),\end{aligned}$$

حيث Ω هو الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي (شكل كالير) مع $\delta\Omega$ تعرّف بـ

$$\delta\Omega(X)=-\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\Omega)(e_i,X)+(\nabla_{Je_i}\Omega)(Je_i,X)\Big),$$

و $\{e_1,...,e_n,Je_1,...,Je_n\}$ أساس متعامد و متجانس (J-أساس) لجزء مفتوح من M. هذا الصنف من البنى الهارمسية يقابله صنف البنى ماوراء-ساساكي.

2.3.2 تعاريف و خواص

تعريف 2.3.15.
لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريباً، و ϕ الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي.
نقول أنّ M هي منوّعة ماوراء-ساساكي (*Variété Trans-Sasakienne*) إذا و فقط إذا كانت الثلاثية (φ, ξ, η) ناظمية، و

$$\mathrm{d}\eta = \alpha\phi, \qquad \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta \wedge \phi.$$

بحيث $\alpha = \frac{1}{2n}\delta\phi(\xi)$ و $\beta = \frac{1}{2n}div\xi$ دالتان تفاضليتان على M، و $\delta\phi$ موافق التفاضل لـ ϕ (*Codifférntielle*) مُعرَّف كما يلي :

$$\delta\phi(X) := -\sum_{i=1}^{2n}\big((\nabla_{e_i}\phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\phi)(\varphi e_i, X)\big) - (\nabla_\xi\phi)(\xi, X),$$

من أجل كل $X \in \mathfrak{X}(M)$، مع $\{e_1, \cdots e_n, \varphi e_1, \cdots \varphi e_n, \xi\}$ $\varphi-$ أساس على M.

مبرهنة 2.3.12. [16]
لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريباً. نقول أنّ M منوّعة ماوراء-ساساكي إذا و فقط إذا كانت من أجل كل $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X\varphi)Y = \alpha\big(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big)$$

بحيث α و β دالتان تفاضليتان على M. و باعتبار α و β دالتان مميّزتان للبنية فإننا نسمي (φ, ξ, η, g)، بنية ماوراء-ساساكي من النوع (α, β).

وبشكل خاص،

- إذا كانت $(\alpha\ ,\ \beta) = (1, 0)$ تصبح لدينا بنية ساساكي.
- إذا كانت $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\},\ \beta = 0$ تصبح لدينا بنية $\alpha-$ساساكي.
- إذا كانت $(\alpha\ ,\ \beta) = (0, 1)$ تصبح لدينا بنية كينموتسو.
- إذا كانت $\alpha = 1,\ \beta \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ تصبح لدينا بنية $\beta-$ كينموتسو.
- إذا كانت $(\alpha\ ,\ \beta) = (0, 0)$ نقول أنّها بنية ثنائية التماسك .

ملاحظة 2.3.6. هنا نعني ببنية ثنائية التماسك (*cosymplectique*) التي عرّفها بلير (أنظر [15] ، صفحة 95) لأنه يوجد مفهوم آخر لها عند ليبرمان (أنظر [26])

باعتبار البنى الشهيرة الثلاثة (بنية الساساكي، بنية الكانموتسو و بنية ثنائية التماسك) هي أنواع تنضوي تحت صنف البنى ماوراء-ساساكي، فإننا سنركز على دراسة البنية الأم نقصد، بنية ماوراء-ساساكي، و من ثم نستخلص نتائج و خواص البنى الثلاثة و ذلك بتعويض قيمتي α و β المناسبتين. فيما يلي مثال بحت (صِرْف) عن بنية ماوراء-ساساكي تختلف عن الأنواع الثلاثة المذكورة.

مثال 2.3.7. [15]
لتكن (x, y, z) الإحداثيات الديكارتية للفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^3$، بفرض أنَّ

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^z + y^2 & 0 & -y \\ 0 & e^z & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad , \qquad \eta = \frac{1}{2}(dz - ydx).$$

إذن، $(\mathbb{R}^3, \varphi, \eta, \xi, g)$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع $(-\frac{1}{2}e^{-z}, \frac{1}{2})$.

هذا المثال الملموس يفرض علينا إدراج ما توصّل إليه ج. ماريرو [27] في دراسة محلية لصنف البنى ماوراء-ساساكي خَلُص الى مايلي:

قضية 2.3.13.
إذا كان بُعدُ بنية ماوراء-ساساكي أكبر من 3 فإنها حتما إما $\alpha-$ساساكي أو $\beta-$ كانموتسو أو ثنائية التماسك.

و هذا معناه أنّ البُعد الثلاثي هو البُعد الوحيد الذي يمكن أن تكون فيه α و β دالتين و غير معدومتين معا.

مبرهنة 2.3.13.
كل منوّعة مترية تلامسية تقريباً ناظمية ثلاثية الأبعاد $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع (α, β) حيث $2\alpha = tr(\varphi\nabla\xi)$ و $2\beta = \mathrm{div}\xi$.

البرهان 2.3.15.
نفرض أن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة مترية تلامسية تقريباً ناظمية ثلاثية الأبعاد. من القضية (2.1.10)، لدينا من أجل كل $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi\nabla_X\xi, \tag{9}$$

و من القضية (2.1.11)، لدينا

$$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2X - \alpha\varphi X, \tag{10}$$

بتعويض (10) في (9) نجد :

$$(\nabla_X\varphi)Y = \alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big),$$

و هو المطلوب.

المبرهنة الأخيرة تدفعنا لتقديم تعريف بسيط لبنية ماوراء-ساساكي ثلاثية الأبعاد، و هو كالآتي

تعريف 2.3.16.
لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد. نقول أنّ M هي منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع (α,β) إذا و فقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X, \tag{11}$$

حيث $2\alpha = tr(\varphi\nabla\xi)$ و $2\beta = \mathrm{div}\xi$.

نتيجة 2.3.4. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع (α,β) لدينا

$$\xi(\alpha) + 2\alpha\beta = 0. \tag{12}$$

البرهان 2.3.16. لدينا

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \mathrm{d}\eta = \alpha\phi \\ \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta\wedge\phi, \end{cases} \quad &\Rightarrow \begin{cases} 0 = \mathrm{d}^2\eta = \mathrm{d}\alpha\wedge\phi + \alpha\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta\wedge\phi, \end{cases} \\
&\Rightarrow (\mathrm{d}\alpha + 2\alpha\beta\eta)\wedge\phi = 0 \\
&\Rightarrow \mathrm{d}\alpha + 2\alpha\beta\eta = 0 \\
&\Rightarrow (\mathrm{d}\alpha + 2\alpha\beta\eta)(\xi) = 0 \\
&\Rightarrow \xi(\alpha) + 2\alpha\beta = 0.
\end{aligned}$$

مثال 2.3.8.
نرمز للاحداثيات الكارتيزية لفضاء الإقليدي $\mathbb{E}^3$ ذي البعد 3 بـ (x,y,z) و نُعرّف موتّر متري ريماني g كمايلي

$$g = \begin{pmatrix} \rho(x,y,z)^2 + \tau(x,y,z)^2 & 0 & -\tau(x,y,z) \\ 0 & \rho(x,y,z)^2 & 0 \\ -\tau(x,y,z) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

حيث ρ و τ دالتان معرفتان على $\mathbb{E}^3$ مع ρ لا تتعدم أبدا.

و نعرّف أيضا بنية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η) على $\mathbb{E}^3$ بـ:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(x,y,z) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \big(-\tau(x,y,z), 0, 1\big).$$

لنستخرج الشكل التفاضلي الأساسي ϕ حيث

$$\phi = \sum_{i,j=1}^{3} \phi_{ij}\ dx^i \wedge dx^j.$$

$$\begin{aligned} \phi_{12} = \phi(\partial x, \partial y) &= g(\partial x, \varphi\partial y) \\ &= g\big(\partial x, -\partial x - \tau\partial z\big) \\ &= -g_{11} - \tau g_{13} \\ &= -\rho^2, \end{aligned}$$

بنفس الكيفية نجد $\phi_{13} = \phi_{23} = 0$، و بتوظيف خاصية ضد التناظر ينتج

$$\phi = -2\rho^2\ dx \wedge dy.$$

و بالتالي لدينا

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta = \tau_2\ dx \wedge dy + \tau_3\ dx \wedge dz \\ \mathrm{d}\phi = -4\rho_3\rho\ dx \wedge dy \wedge dz, \end{cases}$$

مع $\rho_i = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}$ و $\tau_i = \frac{\partial\tau}{\partial x_i}$. بلمسات حسابية بسيطة، يمكن أن نكتب

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta = \frac{-\tau_2}{2\rho^2}\ \phi + \tau_3\ dx \wedge dz \\ \mathrm{d}\phi = \frac{2\rho_3}{\rho}\eta \wedge \phi, \end{cases} \tag{13}$$

من جهة أخرى، مركبات الموتّر $N^{(1)}$ تكتب محليا كمايلي

$$N^i_{kj} = \varphi^h_k(\partial_h\varphi^i_j - \partial_j\varphi^i_h) - \varphi^h_j(\partial_h\varphi^i_k - \partial_k\varphi^i_h) + \eta_k(\partial_j\xi^i) - \eta_j(\partial_k\xi^i).$$

و باستعمال الخواص، يكفي حساب $N^{(1)}(\partial x, \partial y)$، $N^{(1)}(\partial x, \partial z)$ و $N^{(1)}(\partial y, \partial z)$. إذن

$$\begin{aligned} N^{(1)}(\partial x, \partial y) &= \varphi^2[\partial x, \partial y] + [\varphi\partial x, \varphi\partial y] - \varphi[\varphi\partial x, \partial y] - \varphi[\partial x, \varphi\partial y] + 2\mathrm{d}\eta(\partial x, \partial y)\xi \\ &= [\partial y, -\partial x - \tau\partial z] - \varphi[\partial y, \partial y] - \varphi[\partial x, -\partial x - \tau\partial z] + \tau_2\xi \\ &= -[\partial y, \tau\partial z] + \varphi[\partial x, \tau\partial z] + \tau_2\partial z \\ &= -\tau_2\partial z + \tau_1\varphi\partial z + \tau_2\partial z \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{(1)}(\partial x, \partial z) &= -\varphi[\varphi\partial x, \partial z] + 2\mathrm{d}\eta(\partial x, \partial z)\xi \\ &= -\varphi[\partial y, \partial z] - \xi\big(\eta(\partial x)\big)\xi \\ &= -\tau_3\ \partial z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^{(1)}(\partial y, \partial z) &= -\varphi[\varphi\partial y, \partial z] + 2\mathrm{d}\eta(\partial y, \partial z)\xi \\ &= \varphi[\partial x + \tau\partial z, \partial z] - \xi\big(\eta(\partial y)\big)\xi \\ &= -\tau_3\varphi\partial z \\ &= 0, \end{aligned}$$

و أخيرا، نعلن أنه إذا كان $\tau_3 = 0$ فإن $(\mathbb{E}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي ثلاثية الأبعاد مع $\alpha = \frac{-\tau_2}{2\rho^2}$ و $\beta = \frac{\rho_3}{\rho}$.

و للتأكد من الشرط المكافئ و نقصد

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X,$$

نعطي مركبات وصلة لوفي-سيفيتا بالنسبة للأساس

$$\left\{ e_1 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial z}\right),\ e_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y},\ e_3 = \xi \right\}$$

على النحو التالي

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{e_1}e_1 = -\frac{\rho_2}{\rho^2}e_2 - \frac{\rho_3}{\rho}\xi, & \nabla_{e_1}e_2 = \frac{\rho_2}{\rho^2}e_1 - \frac{\tau_2}{2\rho^2}\xi, & \nabla_{e_1}\xi = \frac{\rho_3}{\rho}e_1 + \frac{\tau_2}{2\rho^2}e_2, \\ \nabla_{e_2}e_1 = \frac{\rho_1+\tau\rho_3}{\rho^2}e_2 + \frac{\rho_2}{2\rho^2}\xi, & \nabla_{e_2}e_2 = -\frac{\rho_1+\tau\rho_3}{\rho^2}e_1 - \frac{\rho_3}{\rho}\xi, & \nabla_{e_2}\xi = -\frac{\tau_2}{2\rho^2}e_1 + \frac{\rho_3}{\rho}e_2, \\ \nabla_\xi e_1 = \frac{\tau_2}{2\rho^2}e_2, & \nabla_\xi e_2 = -\frac{\tau_2}{2\rho^2}e_1, & \nabla_\xi\xi = 0. \end{array}$$

فيما يلي نقدّم برنامج بسيط باستعمال المابل للتحقق من بُنية ما وراء-ساساكي في المثال أعلاه.

```
> restart;
  with(LinearAlgebra) :
  δ(i, j) := { 0   i ≠ j
             { 1   i = j  :
  d(i) := Vector(n, (j) → δ(i, j)) :
  g(X, Y) := Multiply(Transpose(X) G, Y) :
> n := 3;
```

$$G := \begin{bmatrix} \rho(x_1, x_2, x_3)^2 + \tau(x_1, x_2, x_3)^2 & 0 & -\tau(x_1, x_2, x_3) \\ 0 & \rho(x_1, x_2, x_3)^2 & 0 \\ -\tau(x_1, x_2, x_3) & 0 & 1 \end{bmatrix}; M := G^{-1} :$$

$$\varphi := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(x_1, x_2, x_3) & 0 \end{bmatrix}; \eta := \begin{bmatrix} -\tau(x_1, x_2, x_3) & 0 & 1 \end{bmatrix}; \xi := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

```
> #η(ξ) = 1
  simplify(η ξ)
> #φ²∂_i = -∂_i + η(∂_i)ξ
  V(i) := φ².d(i) + d(i) - g(d(i), ξ)ξ : for i to n do   print(simplify(V(i)), i)  od;
> #g(φX,φY)=g(X,Y)-η(X)η(Y)
  Compat(i, j) := g(φ.d(i), φ.d(j)) - g(d(i), d(j)) + g(d(i), ξ)g(d(j), ξ) :
   for i to n do   for j to n do   print(simplify(Compat(i, j)), i, j)  od  od;
> # Christoffel
  Cf(i, j, k) := simplify( 1/2 · add(M[k, l] ( diff(G[j, l], x[i]) + diff(G[i, l], x[j])
       - diff(G[i, j], x[l])), l = 1 ..n) ) :
> #Trans-Sasaki: T(X,Y)=α (g(X, Y)ξ - η(Y)X) + β ( g(φX, Y)ξ - η(Y)φX)
  T(i, j) := simplify(α(x1, x2, x3) · (g(d(i), d(j)) ·ξ - g(d(j), ξ) ·d(i)) + β(x1, x2, x3)
       ·(g(φ d(i), d(j)) ·ξ - g(d(j), ξ) ·φ.d(i))) :
> #(∇_X φ)Y = ∇_X φY - φ∇_X Y
  Nablaφ(i, j) := simplify(add(diff(φ[m, j], x[i]).d(m), m = 1 ..n) + add(add(φ[a, j]·Cf(i,
       a, m), a = 1 ..n).d(m), m = 1 ..n) - add(add(φ[m, k]·Cf(i, j, k), k = 1 ..n).d(m), m = 1
       ..n)) :
> for i to n do   for j to n do
   print( simplify(Nablaφ(i, j) - T(i, j)), i, j)    od  od;
```

2.3.3 التقوّسات على منوّعة ماوراء-ساساكي

العلاقة المهمّة (11) تمكننا من معرفة بعض الخصائص حول تقوّس ريمان و تقوس ريتشي و التقوّس السلّمي. نعطيها في المبرهنة التالية

مبرهنة 2.3.14. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$، لدينا

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (\alpha^2-\beta^2)\big(\eta(Y)X-\eta(X)Y\big)-X(\alpha)\varphi Y-X(\beta)\varphi^2 Y\\ &+ 2\alpha\beta\big(\eta(Y)\varphi X-\eta(X)\varphi Y\big)+Y(\alpha)\varphi X+Y(\beta)\varphi^2 X, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \eta\big(R(X,Y)Z\big) &= (\alpha^2-\beta^2)\big(g(Y,Z)(X)-g(X,Z)(Y)\big)\\ &- 2\alpha\beta\big(g(X,Z)(Y)-g(Y,Z)(X)\big)\\ &- Y(\alpha)g(\varphi X,Z)-X(\beta)\big(g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z)\big)\\ &+ X(\alpha)g(\varphi Y,Z)+Y(\beta)\big(g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)\big), \end{aligned} \tag{15}$$

$$S(X,\xi)=\big(2n(\alpha^2-\beta^2)-\xi(\beta)\big)\eta(X)-\varphi X(\alpha)-(2n-1)X(\beta). \tag{16}$$

البرهان 2.3.17. نعلم أنه من أجل كل X، Y و Z حقول أشعة على M

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z.$$

بتوظيف الخريطة الناظمية ثم تعويض Z بـ ξ ينتج

$$R(X,Y)\xi=\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_Y\nabla_X\xi. \tag{17}$$

وباستعمال (11) و العلاقة

$$(\nabla_X\eta)Y=g(\nabla_X\xi,Y)=\alpha g(X,\varphi Y)+\beta g(\varphi X,\varphi Y),$$

يكون

$$\begin{aligned} \nabla_X\nabla_Y\xi &= \nabla_X\big(-\alpha\varphi Y-\beta\varphi^2 Y\big)\\ &= -X(\alpha)\varphi Y-\alpha(\nabla_X\varphi)Y-X(\beta)\varphi^2 Y-\beta(\nabla_X\eta)(Y)\xi-\beta\eta(Y)\nabla_X\xi\\ &= X(\alpha)\varphi Y-\alpha\Big(\alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)\Big)\\ &- X(\beta)\varphi^2 Y-\beta\big(\alpha g(X,\varphi Y)+\beta g(\varphi X,\varphi Y)\big)\xi+\beta\eta(Y)\big(\alpha\varphi X+\beta\varphi^2 X\big)\\ &= (\alpha^2-\beta^2)\eta(Y)X-X(\alpha)\varphi Y-X(\beta)\varphi^2 Y+2\alpha\beta\eta(Y)\varphi X,\\ &- (\alpha^2+\beta^2)g(X,Y)\xi+2\beta^2\eta(X)\eta(Y)\xi, \end{aligned}$$

و منه نستنتج

$$\begin{aligned}\nabla_Y\nabla_X\xi &= (\alpha^2-\beta^2)\eta(X)Y - Y(\alpha)\varphi X - Y(\beta)\varphi^2 X + 2\alpha\beta\eta(X)\varphi Y,\\ &- (\alpha^2+\beta^2)g(X,Y)\xi + 2\beta^2\eta(X)\eta(Y)\xi,\end{aligned}$$

وبالتعويض في العلاقة (17) نجد العلاقة (61). لإثبات العلاقة الثانية، يكفي أن تلاحظ أن

$$\begin{aligned}\eta\big(R(X,Y)Z\big) &= g\big(R(X,Y)Z,\xi\big)\\ &= -g\big(R(X,Y)\xi,Z\big)\end{aligned}$$

ثم استعمال العلاقة (61). من أجل الخاصية الثالثة المتعلقة بتقوّس ريتشي لدينا

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i,X)Y,e_i),$$

مع $\{e_i\}_{1\leq i\leq 2n+1}$ هو أساس متعامد و متجانس على M. وبتعويض Y بـ ξ ينتج

$$S(X,\xi)=\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i,X)\xi,e_i),$$

و منه

$$\begin{aligned}S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g\Big((\alpha^2-\beta^2)\big(\eta(X)e_i-\eta(e_i)X\big) - e_i(\alpha)\varphi X - e_i(\beta)\varphi^2 X\\ &\quad +2\alpha\beta\big(\eta(X)\varphi e_i - \eta(e_i)\varphi X\big) + X(\alpha)\varphi e_i + X(\beta)\varphi^2 e_i, e_i\Big)\end{aligned}$$

مع العلم أن

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i,e_i)=2n+1,\ \sum_{i=1}^{2n+1} g(\varphi e_i,e_i)=0,\ \sum_{i=1}^{2n+1}\eta(e_i)e_i=\xi,\ \sum_{i=1}^{2n+1} e_i(\alpha)e_i=\mathrm{grad}\alpha,$$

ينتج المطلوب.

نعود فنقول أن البُعد الثالث مميّز، هنا سنقدّم تقوس ريمان و تقوس ريتشي في الحالة العامة و ذلك استناد على إحدى خواص هذا البُعد. من بين الموتّرات الهامة في الهندسة الريمانية، موتّر وايل (Weyl) و يسمى

أيضا التقوّس الملائم. يُعرّف من أجل كل منوّعة ريمانية بُعدها $n > 2$ بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z &= R(X,Y)Z \\ &- \frac{1}{n-2}\Big(g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\Big) \\ &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)}\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big), \end{aligned} \tag{18}$$

حيث r هو التقوّس السلّمي و Q هو مؤثر ريتشي الذي يعطى بالعلاقة

$$S(X,Y) = g(QX,Y) = g(X,QY).$$

الأهم في الأمر أنه في البُعد الثالث $n = 3$ يكون التقوّس الملائم C معدوما [18]، فتنتج العلاقة الهامّة التالية

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &- \frac{r}{2}\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big). \end{aligned} \tag{19}$$

و بالتالي يمكن استخراج المبرهنة التالية

مبرهنة 2.3.15. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع (α,β) لدينا

$$\begin{aligned} QX &= \Big(\frac{r}{2} + \xi(\beta) - (\alpha^2-\beta^2)\Big)X - \Big(\frac{r}{2} + \xi(\beta) - 3(\alpha^2-\beta^2)\Big)\eta(X)\xi \\ &+ \eta(X)\big(\varphi(\mathrm{grad}\alpha) - \mathrm{grad}\beta\big) - \big(X(\beta) + \varphi X(\alpha)\big)\xi. \end{aligned} \tag{20}$$

البرهان 2.3.18. بداية لدينا من العلاقة (62)

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= g(Q\xi,X) \\ &= \big(2n(\alpha^2-\beta^2) - \xi(\beta)\big)g(\xi,X) + g(\varphi\mathrm{grad}\alpha, X) - (2n-1)g(\mathrm{grad}\beta, X), \end{aligned}$$

و منه

$$Q\xi = \big(2n(\alpha^2-\beta^2) - \xi(\beta)\big)\xi + \varphi\mathrm{grad}\alpha - (2n-1)\mathrm{grad}\beta, \tag{21}$$

في العلاقة (19) نعوّض Z بـ ξ ثمّ مقارنة الناتج بالعلاقة (61) ينتج

$$\begin{aligned} &\eta(Y)\Big(\big(QX - \frac{r}{2} + \xi(\beta) - (\alpha^2-\beta^2)\big)X - 2\alpha\beta\varphi X + X(\beta)\xi\Big) - Y(\alpha)\varphi X - \varphi Y(\alpha)X \\ &= \eta(X)\Big(QY - \frac{r}{2} + \xi(\beta) - (\alpha^2-\beta^2)\big)Y - 2\alpha\beta\varphi Y + Y(\beta)\xi\Big) - X(\alpha)\varphi Y - \varphi X(\alpha)Y. \end{aligned}$$

في هذه العبارة الأخيرة نعوّض Y بـ ξ و نستعمل العلاقة (21) و النتيجة (2.3.4) نجد المطلوب.

و يمكننا بسهولة استنتاج موتّر ريتشي كمايلي

نتيجة 2.3.5. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع (α,β) لدينا

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= g(QX,Y)\\ &= \Big(\frac{r}{2}+\xi(\beta)-(\alpha^2-\beta^2)\Big)g(X,Y)\\ &- \Big(\frac{r}{2}+\xi(\beta)-3(\alpha^2-\beta^2)\Big)\eta(X)\eta(Y)\\ &- \eta(X)\big(\varphi Y(\alpha)+Y(\beta)\big)-\big(X(\beta)+\varphi X(\alpha)\big)\eta(Y). \end{aligned} \tag{22}$$

و الآن، بتعويض العبارة (22) في العلاقة (19) نجد

نتيجة 2.3.6. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع (α,β) لدينا

$$\begin{aligned} R(X,Y)Y &= \Big(\frac{r}{2}+2\xi(\beta)-2(\alpha^2-\beta^2)\Big)\big(g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\big)\\ &- g(Y,Z)\Big(\big(\frac{r}{2}+\xi(\beta)-3(\alpha^2-\beta^2)\big)\eta(X)\xi\\ &- \eta(X)\big(\varphi\mathrm{grad}\alpha-\mathrm{grad}\beta\big)+\big(X(\beta)+\varphi X(\alpha)\big)\xi\Big)\\ &+ g(X,Z)\Big(\big(\frac{r}{2}+\xi(\beta)-3(\alpha^2-\beta^2)\big)\eta(Y)\xi\\ &- \eta(Y)\big(\varphi\mathrm{grad}\alpha-\mathrm{grad}\beta\big)+\big(Y(\beta)+\varphi Y(\alpha)\big)\xi\Big)\\ &- \Big(\big(Z(\beta)+\varphi Z(\alpha)\big)\eta(Y)+\big(Y(\beta)+\varphi Y(\alpha)\big)\eta(Z)\\ &+ \big(\frac{r}{2}+\xi(\beta)-3(\alpha^2-\beta^2)\big)\eta(Y)\eta(Z)\Big)X \end{aligned} \tag{23}$$

2.3.4 بنية ماوراء-ساساكي ذات التقوّس φ-مقطعي الثابت

في الباب الثاني، عرّفنا التقوّس المقطعي لمنوّعة ريمانية بُعدها $n\geq 2$ عند النقطة x من M و المستوي P من T_xM كمايلي

$$K_x(P)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}.$$

حيث $\{X,Y\}$ يشكّل أساسا للمستوي P. و في حالة كَوْن $\{X,Y\}$ أساسا متعامدا و متجانسا للمستوي فإن العبارة تصبح

$$K_x(P)=g(R(X,Y)Y,X).$$

كما أوضحنا أن عبارة $K_x(P)$ لا تتعلق بأساس P. بالإظافة الى ذلك، إذا كان التقوّس المقطعي دوما ثابتا (يعني من أجل كل نقطة من المنوّعة و كل مستوي من الفضاء المماس) نقول عندئذ أن المنوّعة ذات تقوّس ثابت و نكتب $K_x(P) = c$.

تعريف 2.3.17.
لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ منوّعة تلامسية تقريباً تقوّسها المقطعي هو

$$K_x(P) = g(R(X,Y)Y, X).$$

مع $\{X, Y\}$ أساسا متعامدا و متجانسا للمستوي P. إذا كان المستوي P صامدا بالنسبة للموتّر φ (أي $\varphi P = P$) يسمى عندئذ $K_x(P)$ تقوّسا φ-مقطعيا .

بالإظافة الى ذلك، إذا كان المستوي P صامدا بالنسبة للموتّر φ فإنه من أجل كل حقل شعاعي وحدة منه عمودي على ξ يكون $\{X, \varphi X\}$ أساسا متعامدا و متجانسا للمستوي P و تصبح عندئذ عبارة التقوّس φ-مقطعي كمايلي

$$K_x(P) = g(R(X, \varphi X)\varphi X, X).$$

ملاحظة 2.3.7.
1) التقوّس φ-مقطعي لا يتعلّق بالأساس.
2) إذا كان $K_x(P) = c$ من أجل كل نقطة من المنوّعة و كل مستوي صامد بالنسبة لـ φ من الفضاء المماس نقول حينها أن المنوّعة ذات تقوّس φ-مقطعي ثابت يساوي c.

تعريف 2.3.18.
نسمي كل منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع (α, β) ذات تقوّس φ-مقطعي فضاء أشكال ماوراء-ساساكي (*espace de formes Trans-Sasakienne*).

مبرهنة 2.3.16. من أجل منوّعة ماوراء-ساساكي $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ من النوع (α, β) ذات تقوّس φ-مقطعي ثابت c يكون من أجل كل X، Y و Z حقول أشعة من M

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{\alpha(c+3)+\beta(c-3)}{4}\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big) \\ &+ \frac{\alpha(c-1)+\beta(c+1)}{4}\Big(\eta(Z)\big(\eta(X)Y - \eta(Y)X\big) \\ &+ \big(g(X,Z)\eta(Y) - g(Y,Z)\eta(X)\big)\xi \\ &+ g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2g(X, \varphi Y)\varphi Z\Big). \end{aligned} \tag{24}$$

البرهان 2.3.19. للبرهان يمكن اتباع نفس الطريقة المتبعة في [15] صفحة 137 من أجل فضاء الأشكال الساساكي أو في [25] من أجل فضاء الأشكال لكانموتس. (يمكن للطالب الإستئناس بالبرهان الخاص بالمبرهنة 2.4.25).

ملاحظة 2.3.8. يكتب موتّر التقوّس الريماني R لفضاء أشكال ماوراء-ساساكي أيضا بالشكل التالي

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= (\alpha-\beta)(X\wedge Y)Z \\ &+ \frac{\alpha(c-1)+\beta(c+1)}{4}\big(\varphi^2X\wedge\varphi^2Y+\varphi X\wedge\varphi Y+2g(X,\varphi Y)\varphi\big)Z, \end{aligned}$$

حيث من أجل كل X و Y حقلين شعاعيين من M يعُرّف الموتّر $X\wedge Y$ بـ

$$(X\wedge Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y.$$

قضية 2.3.14. من أجل كل فضاء أشكال ماوراء-ساساكي يعطى تقوّس ريتشي و التقوّس السلّمي بالعلاقتين التاليتين

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= 2n(\alpha-\beta)g(X,Y) \\ &+\frac{n+1}{2}\big(c(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\big)g(\varphi X,\varphi Y). \end{aligned} \tag{25}$$

$$r = n\big((n+1)(\alpha+\beta)c+(3n+1)(\alpha-\beta)\big). \tag{26}$$

البرهان 2.3.20. نعتبر $\{e_i,\xi\}_{1\le i\le 2n}$ أساس متعامد و متجانس على فضاء أشكال ماوراء-ساساكي من النوع (α,β). باعتبار موتّر ريتشي S هو أثر (*trace*) موتّر التقوّس R و بتوظيف اصطلاح اينشتاين (عند تكرار دليل ما فهناك مجموع) فإن

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= g\Big((\alpha-\beta)(X\wedge e_i)e_i \\ &+ \frac{\alpha(c-1)+\beta(c+1)}{4}\big(\varphi^2X\wedge\varphi^2e_i+\varphi X\wedge\varphi e_i+2g(X,\varphi e_i)\varphi\big)e_i\ ,\ Y\Big) \end{aligned}$$

لدينا

$$\begin{aligned} (X\wedge e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{3}\big(g(e_i,e_i)X-g(X,e_i)e_i\big) \\ &= (2n+1)X-X \\ &= 2nX, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi X\wedge\varphi e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{3}\big(g(\varphi e_i,e_i)\varphi X-g(\varphi X,e_i)\varphi e_i\big) \\ &= g(X,\varphi e_i)\varphi e_i \\ &= X-\eta(X)\xi, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi^2X\wedge\varphi^2e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{3}\big(-(\varphi^2X\wedge e_i)e_i+\eta(e_i)(\varphi^2X\wedge\xi)e_i\big)\\
&= -g(e_i,e_i)\varphi^2X+g(\varphi^2X,e_i)e_i+(\varphi^2X\wedge\xi)\xi\\
&= (1-2n)\varphi^2X,
\end{aligned}
$$

و منه

$$
\begin{aligned}
S(X,Y) &= 2n(\alpha-\beta)g(X,Y)\\
&+ \frac{n+1}{2}\big(\alpha(c-1)+\beta(c+1)\big)g(\varphi X,\varphi Y),
\end{aligned}
$$

و هي نفسها العبارة المطلوبة.
بالنسبة للتقوّس السلّمي، نعلم أنه يساوي أثر ريتشي، إذن

$$
\begin{aligned}
r=\sum_{i=1}^{3}S(e_i,e_i) &= 2n(\alpha-\beta)g(e_i,e_i)+\frac{n+1}{2}\big(c(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\big)g(\varphi e_i,\varphi e_i)\\
&= 2n(2n+1)(\alpha-\beta)+n(n+1)\big(c(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\big)\\
&= n\big((n+1)(\alpha+\beta)c+(3n+1)(\alpha-\beta)\big).
\end{aligned}
$$

الآن، بالنسبة لفضاء الأشكال ماوراء-ساساكي من النوع (α,β) ثلاثي الأبعاد $(n=1)$ ، نستخلص الدساتير التالية

$$
S(X,Y) = 2(\alpha-\beta)g(X,Y)+\big(c(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\big)g(\varphi X,\varphi Y), \quad (27)
$$

$$
r = 2\big(c(\alpha+\beta)+2(\alpha-\beta)\big). \quad (28)
$$

ختاما لهذا الباب، نشير أن المنوّعات المترية التلامسية تقريبا الأساسية الناظمية و المتمثلة في منوّعة ساساكي، منوّعة كانموتسو و المنوّعة ثنائية التماسك يمكن استخلاص خواصها و ذلك من أجل $(\alpha,\beta)=(1,0)$، $(\alpha,\beta)=(0,1)$ و $(\alpha,\beta)=(0,0)$ على الترتيب.
فيما يلي نقدم أمثلة عن هذه المنوّعات الأساسية (يمكن للطالب أن يعتبرها تمارين للتدرّب على اثبات الخواص):

أمثلة 2.3.3. (بنية ساساكي)

(1) كرة الوحدة S^{2n+1} مزوّدة بالبنية النموذجية (φ, ξ, η, g) هي منوّعة ساساكية . بتوظيف التحويل

$$\eta' = a\eta, \qquad \xi' = \frac{1}{a}\xi, \qquad \varphi' = \varphi, \qquad g' = ag + a(a-1)\eta\otimes\eta, \qquad a \in \mathbb{R}^+.$$

نحصل على منوّعة ساساكية أخرى $(S_a^{2n+1}, \varphi', \xi', \eta', g')$ ([15]، صفحة 99).

(2) العالم بلير (*Blair*) أنشئ مثالاً هاماً و مشهوراً لبُنية ساساكي على R^3، بحيث :

$$g \;=\; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2}(\mathrm{dz} - \mathrm{ydx}).$$

مثال 2.3.9. (بنية كنموتسو)
لتكن (x, y, z) الإحداثيات الديكارتية $\mathbb{R}^3$ ، نضع

$$\eta = dz, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \phi = -2e^{2z}dx\wedge dy, \quad g = e^{2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2.$$

إذن، $(\mathbb{R}^3, \varphi, \eta, \xi, g)$ هي منوّعة كنموتسو، و تسمى الفضاء الزائدي.

مثال 2.3.10. (بنية ثنائية التماسك)
البنية البسيطة ثنائية التماسك المعرّفة على $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ بـ :

$$\eta = dz, \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \phi = 2dx \wedge dy.$$

و بالعودة الى المثال العام (3.4.25) يمكننا إثبات أن المنوّعة $(\mathbb{E}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة

(1) ساساكي إذا كان $\tau_2 = -2\rho^2$ و $\tau_3 = 0$,

(2) كانموتسو إذا كان $\rho_3 = \rho$، $\tau_2 = 0$ و $\tau_3 = 0$,

(3) ثنائية التماسك إذا كان $\rho_3 = 0$، $\tau_2 = 0$ و $\tau_3 = 0$.

2.4 المنوّعات ذاتُ الرُّكْن

في هذا الفصل نقدم دراسة مستفيضة عن الصنف C_{12} مركزين على بنية منه سمّيناها البُنْية ذاتُ الرُّكْن (Corner manifold, Variété de coin) لأمر سنوظحّه فيما هو آت. باعتبار أن هذا الصنف لم ينل حظه من الدراسة و الاهتمام لحد الآن باسثناء البحث الذي نُشر لنا مؤخرا [19] و الأبحاث التي ستنشر قريبا على الرغم من وجوده في تصنيف تشينيا-غونزليز منذ سنة 1990، قررنا أن نخصّص فصلا كاملا نضمّنه كل التعاريف و الخصائص المتعلقة بصنف C_{12} مع أمثلة ملموسة.
في هذه الفقرة، سنركّز على تقديم هذا الصنف بطريقة تنسجم مع برنامج الماستر تخصص هندسة تفاضلية و تطبيقاتها. نبيّن أنه صنف من أصناف البُنى المترية التلامسية تقريبا الأساسية و نقدّمه بطريقتين مختلفتين، الأولى اعتمادا على تحويل محلي ملائم لبنية ثنائية التماسك و في الثانية نستعمل التعريف المعطى في تصنيف تشينيا-غونزليز. نسلط الضوء على الخصائص الهندسية لهذا الصنف من البُنى مع تقديم أمثلة ملموسة مفصّلة في البُعدين الثالث و الخامس

2.4.1 بنية ثنائية التماسك محولة محليا

نعتبر (φ, ξ, η, g) بنية مترية تلامسية تقريبا معرّفة على منوّعة ريمانية (M, g). من أجل كل جوار مفتوح U_t مزوّد بدوال $\sigma_t : U_t \to \mathbb{R}$ قابلة للتفاضل نعرّف تحويلا محليا ملائما كمايلي:

$$g_t = e^{-2\sigma} g, \qquad \eta_t = e^{-\sigma}\eta, \qquad \xi_t = e^{\sigma}\xi, \qquad \varphi_t = \varphi,$$

حيث $\sigma = \sigma_t$ دالة قابلة للتفاضل على M. بداية، لدينا القضية التالية:

قضية 2.4.15. البنية الجديدة $(\varphi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ هي بنية مترية تلامسية تقريبا.

البرهان 2.4.21. حتى تكون $(\varphi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ بنية مترية تلامسية تقريبا يكفي أن تحقق الشروط (2) و (6):
اولا:

$$\eta_t(\xi_t) = e^{\sigma}\eta(e^{-\sigma}\xi) = \eta(\xi) = 1.$$

ثانيا:

$$\begin{aligned} -I + \eta_t \otimes \xi_t &= -I + e^{\sigma}\eta \otimes e^{-\sigma}\xi \\ &= -I + \eta \otimes \xi \\ &= \varphi^2 \\ &= \varphi_t^2 \end{aligned}$$

ثالثا:

$$\begin{aligned} g_t(\varphi_t X, \varphi_t Y) &= g_t(\varphi X, \varphi Y) \\ &= e^{-2\sigma} g(\varphi X, \varphi Y) \\ &= e^{-2\sigma}(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) \\ &= e^{-2\sigma} g(X,Y) - e^{-\sigma}\eta(X) e^{-\sigma}\eta(Y) \\ &= g_t(X,Y) - \eta_t(X)\eta_t(Y) \end{aligned}$$

إذن، $(\varphi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ هي بنية مترية تلامسية تقريبا.

تعريف 2.4.19. [30] لتكن (φ, ξ, η, g) بنية مترية تلامسية تقريبا. نقول عن البنية (φ, ξ, η, g) أنها بنية ثنائية التماسك تقريبا محوّلة محليا إذا كانت البنية الناتجة عنها بتحويل محلي ملائم $(\varphi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ هي بنية ثنائية التماسك تقريبا.
بالإضافة الى ذلك، إذا كانت $(\varphi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ بنية ثنائية التماسك نقول عن (φ, ξ, η, g) أنها بنية ثنائية التماسك محوّلة محليا .

من خلال هذا التعريف، يمكننا حساب مايلي

$$\begin{aligned} \phi_t(X,Y) &= g_t(X, \varphi_t Y) \\ &= e^{-2\sigma} g(X, \varphi Y) \\ &= e^{-2\sigma} \phi(X,Y). \end{aligned}$$

لدينا إذن

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t = e^{-\sigma}\eta \\ \phi_t = e^{-2\sigma}\phi \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}\eta_t = -e^{-\sigma}\mathrm{d}\sigma \wedge \eta + e^{-\sigma}\mathrm{d}\eta \\ \mathrm{d}\phi_t = -2e^{-2\sigma}\mathrm{d}\sigma \wedge \phi + e^{-2\sigma}\mathrm{d}\phi \end{array} \right.$$

و بالتالي، إذا كانت البنية $(\varphi_t, \xi_t, \eta_t, g_t)$ ثنائية التماسك أي $\mathrm{d}\phi_t = \mathrm{d}\eta_t = 0,$ ينتج

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\sigma \wedge \eta \\ \mathrm{d}\phi = 2\mathrm{d}\sigma \wedge \phi \end{array} \right.$$

و على هذا الأساس، قدّم إ. فيزمان [40] مبرهنة تميّز هذا الصنف من البنى المترية التلامسية تقريبا نقدمها كمايلي:

مبرهنة 2.4.17. [40] نقول عن المنوّعة المترية التلامسية تقريبا $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ أنها ثنائية التماسك محوّلة محليا إذا و فقط إذا وُجد شكل ثنوي أحادي مغلق ω على M بحيث

$$\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta, \qquad \mathrm{d}\phi = 2\omega \wedge \phi. \tag{29}$$

و من جهته، قدّم زبينيو أولشاك [30] مبرهنة أخرى تتعلق بموتر البنية φ و هي على النحو التالي:

مبرهنة 2.4.18. [30] نقول عن المنوّعة المترية التلامسية تقريبا (M,φ,ξ,η,g) أنها ثنائية التماسك محوّلة محليا إذا و فقط إذا وُجد شكل ثنوي أحادي مغلق ω على M بحيث

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi X,Y)\psi - \omega(Y)\varphi X + g(X,Y)\varphi\psi + \omega(\varphi Y)X, \qquad (30)$$

مع $\omega(X)=g(\psi,X)$ من أجل كل حقل شعاعي X على M.

البرهان 2.4.22. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة ثنائية التماسك محوّلة محليا. و نعتبر ∇ و ∇^t وصلتي لوفي-سيفيتا المرفقتين بـ g و $g_t=e^{-2\sigma}g$ على الترتيب مع σ دالة قابلة للتفاضل على M. باستعمال دستور كوزيل يمكن استخراج العلاقة التالية (أنظر صفحة 121)

$$\nabla^t_XY = \nabla_XY - X(\sigma)Y - Y(\sigma)X + g(X,Y)\mathrm{grad}\sigma,$$

و باستعمال هذه العلاقة، نحصل على

$$\begin{aligned}
(\nabla^t_X\varphi_t)Y &= \nabla^t_X(\varphi_tY) - \varphi_t\nabla^t_XY\\
&= \nabla^t_X(\varphi Y) - \varphi\nabla^t_XY\\
&= \nabla_X\varphi Y - \varphi Y(\sigma)X + g(X,\varphi Y)\mathrm{grad}\sigma\\
&- \varphi\nabla_XY + Y(\sigma)\varphi X - g(X,Y)\varphi\mathrm{grad}\sigma\\
&= (\nabla_X\varphi)Y - \mathrm{d}\sigma(\varphi Y)X - g(\varphi X,Y)\mathrm{grad}\sigma\\
&+ \mathrm{d}\sigma(Y)\varphi X - g(X,Y)\varphi\mathrm{grad}\sigma\\
&= (\nabla_X\varphi)Y - g(\varphi X,Y)\psi + \omega(Y)\varphi X - g(X,Y)\varphi\psi - \omega(\varphi Y)X,
\end{aligned}$$

حيث $\omega=\mathrm{d}\sigma$ و $\psi=\mathrm{grad}\sigma$.
و باعتبار المنوّعة (M,φ,ξ,η,g) هي منوعة ثنائية التماسك محوّلة محليا فهذا معناه أن المنوّعة $(M,\varphi_t,\xi_t,\eta_t,g_t)$ هي منوّعة ثنائية التماسك أي لدينا $(\nabla^t_X\varphi_t)Y=0$ و بالتالي ينتج المطلوب.

نلاحظ أن كلمة "تقريبا" حُذفت في المبرهنتين 2.6.37 و 2.6.38 مما يفيد حسب ماهو معلوم أن البنية هي ناظمية و لكن الأمر ليس كذلك. هذا ما سنبيّنه في القضية التالية:

قضية 2.4.16. البنية ثنائية التماسك تقريبا المحوّلة محليا لا تكون ناظمية إلا إذا كان الحقلان الشعاعيان ξ و ψ مرتبطين خطيا و تحديدا إذا كان $\psi=\omega(\xi)\xi$.

البرهان 2.4.23. حتى تكون البنية ثنائية التماسك تقريبا المحوّلة محليا (φ,ξ,η,g) ناظمية يجب أن يتحقق الشرط التالي

$$N_\varphi(X,Y) + 2\mathrm{d}\eta(\mathrm{X},\mathrm{Y})\xi = 0,$$

مع
$$N_\varphi(X,Y)=\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y].$$
بوضع $Y=\xi$ في الشرط ينتج

$$\varphi^2[X,\xi]-\varphi[\varphi X,\xi]+2\mathrm{d}\eta(\mathrm{X},\xi)\xi=0,$$

و بتركيب η نحصل على
$$\mathrm{d}\eta(X,\xi)=0.$$
باعتبار ∇ هي وصلة لوفي-سيفيتا فإن

$$\begin{aligned} g(\nabla_X\xi,\xi) &= Xg(\xi,\xi)-g(\xi,\nabla_X\xi)\\ &= -g(\xi,\nabla_X\xi)\\ &= 0, \end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mathrm{d}\eta(X,\xi)\\ &= g(\nabla_X\xi,\xi)-g(\nabla_\xi\xi,X)\\ &= g(\nabla_\xi\xi,X)\\ &\Leftrightarrow \nabla_\xi\xi=0. \end{aligned}$$

لكن، من جهة أخرى لدينا

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(X,\xi)=(\omega\wedge\eta)(X,\xi) &\Leftrightarrow g(\nabla_\xi\xi,X)=\omega(X)\eta(\xi)-\omega(\xi)\eta(X)\\ &\Leftrightarrow g(\nabla_\xi\xi,X)=g(\psi-\omega(\xi)\xi,X)\\ &\Leftrightarrow \nabla_\xi\xi=\psi-\omega(\xi)\xi, \end{aligned}$$

و ممّا سبق، يتضح أن البنية تكون ناظمية فقط من أجل $\psi=\omega(\xi)\xi$ و عندئذ تكون β- كانموتسو لأن

$$\omega=\omega(\xi)\eta,\qquad \mathrm{d}\eta=0,\qquad \mathrm{d}\phi=2\omega(\xi)\eta\wedge\phi.$$

لهذا السبب، سنهتم فيما هو آت بالبنية المترية التلامسية القابلة للمكاملة $N_\varphi=0$ و ليست الناظمية $\mathrm{d}\eta\neq 0\Leftrightarrow N^{(1)}\neq 0$ و ذلك تفاديا لصنف الكانموتسو. لنبدأ مع هذه القضية الهامة:

قضية 2.4.17. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة ثنائية التماسك تقريبا محوّلة محليا. يكون الحقلان الشعاعيان ξ و ψ متعامدين إذا وفقط إذا كان الشكل التفاضلي الأساسي ϕ مغلقا (أي $\mathrm{d}\phi=0$).

البرهان 2.4.24. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة ثنائية التماسك تقريبا محوّلة محليا. نفرض أن $\mathrm{d}\phi=0$، من أجل كل X,Y و Z حقول أشعة على M لدينا

$$\begin{aligned}3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z)=0 &\Leftrightarrow 6(\omega\wedge\phi)(X,Y,Z)=0\\ &\Leftrightarrow (\omega(X)\phi(Y,Z)+\omega(Y)\phi(Z,X)+\omega(Z)\phi(X,Y))=0,\end{aligned}$$

بوضع $Z=\xi$ ينتج

$$\begin{aligned}\omega(\xi)\phi(X,Y)=0 &\Rightarrow \omega(\xi)=0\\ &\Rightarrow g(\psi,\xi)=0\\ &\Rightarrow \psi\perp\xi.\end{aligned}$$

عكسيا، سنبرهن صحّة الاستلزام التالي

$$\mathrm{d}\phi\neq 0\Rightarrow\omega(\xi)\neq 0,$$

و الذي يمثل العكس النقيض للاستلزام

$$\omega(\xi)=0\Rightarrow\mathrm{d}\phi=0.$$

نفرض أن $\mathrm{d}\phi\neq 0$. نعلم أن

$$\begin{aligned}3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) &= X(\phi(Y,Z))+Y(\phi(Z,X))+Z(\phi(X,Y))\\ &- \phi([X,Y],Z)-\phi([Y,Z],X)-\phi([Z,X],Y),\end{aligned}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}X(\phi(Y,Z)) &= X(g(Y,\varphi Z))\\ &= g(\nabla_XY,\varphi Z)+g(Y,(\nabla_X\varphi)Z)+g(Y,\varphi\nabla_XZ),\end{aligned}$$

و بالتالي، نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) &= g(\nabla_XY,\varphi Z)+g(Y,(\nabla_X\varphi)Z)+g(Y,\varphi\nabla_XZ)\\ &+ g(\nabla_YZ,\varphi X)+g(Z,(\nabla_Y\varphi)X)+g(Z,\varphi\nabla_YX)\\ &+ g(\nabla_ZX,\varphi Y)+g(X,(\nabla_Z\varphi)y)+g(X,\varphi\nabla_ZY)\\ &- g(\nabla_XY,\varphi Z)+g(\nabla_YX,\varphi Z)-g(\nabla_YZ,\varphi X)\\ &+ g(\nabla_ZY,\varphi X)-g(\nabla_ZX,\varphi Y)+g(\nabla_XZ,\varphi Y)\\ &= g(Y,(\nabla_X\varphi)Z)+g(Z,(\nabla_Y\varphi)X)+g(X,(\nabla_Z\varphi)Y),\end{aligned}$$

ومن أجل كل X عمودي على ξ نحصل على

$$3\mathrm{d}\phi(X,\xi,\psi) = g(\xi,(\nabla_X\varphi)\psi) + g(\psi,(\nabla_\xi\varphi)X) + g(X,(\nabla_\psi\varphi)\xi). \tag{31}$$

بإستعمال المبرهنة 2.6.38 من أجل $Y=\psi$ نحصل على

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)\psi &= g(\varphi X,\psi)\psi - \omega(\psi)\varphi X + g(X,\psi)\varphi\psi + \omega(\varphi\psi)X\\ &= \omega(\varphi X)\psi - \omega(\psi)\varphi X,\end{aligned}$$

و من أجل $X=\xi$ ينتج

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi\varphi)X &= g(\varphi\xi,x)\psi - \omega(X)\varphi\xi + g(\xi,X)\varphi\psi + \omega(\varphi X)\xi\\ &= \omega(\varphi X)\xi,\end{aligned}$$

ثم من أجل $X=\psi$ نتحصل على

$$\begin{aligned}(\nabla_\psi\varphi)\xi &= g(\varphi\psi,\xi)\psi - \omega(\xi)\varphi\psi + g(\psi,\xi)\varphi\psi + \omega(\varphi\xi)\psi\\ &= -\omega(\xi)\varphi\psi + \omega(\xi)\varphi\psi = 0,\end{aligned}$$

الآن، بالتعويض في (31) نجد

$$\begin{aligned}3\mathrm{d}\phi(X,\xi,\psi) &= g\big(\xi,\omega(\varphi X)\psi - \omega(\psi)\varphi X\big) + g\big(\psi,\omega(\varphi X)\xi\big)\\ &= \omega(\varphi X)g(\xi,\psi) - \omega(\psi)g(\xi,\varphi X) + \omega(\varphi X)g(\psi,\xi)\\ &= 2\omega(\varphi X)g(\psi,\xi).\end{aligned}$$

لدينا من الفرضية

$$\mathrm{d}\phi(X,\xi,\psi) \neq 0,$$

و هذا يستلزم أن

$$\omega(\varphi X)g(\psi,\xi) \neq 0,$$

وهذا معناه

$$g(\varphi X,\psi)\eta(\psi) \neq 0$$

أي

$$g\big(X,\eta(\psi)\varphi\psi\big) \neq 0. \tag{32}$$

مع ملا حظة أن الحقل الشعاعي $\varphi\psi$ عمودي على كل من ξ وψ، فمن أجل $X = \varphi\psi$ من المساواة (32) ينتج

$$\begin{aligned} g(\varphi\psi, \eta(\psi)\varphi\psi) \neq 0 \;&\Rightarrow\; \eta(\psi)g(\varphi\psi, \varphi\psi) \neq 0 \\ &\Rightarrow\; \eta(\psi) \mid \varphi\psi \mid^2 \neq 0 \end{aligned}$$

وهذا يكافئ
$$\eta(\psi) \neq 0, \qquad \text{و} \qquad \mid \varphi\psi \mid^2 \neq 0,$$
أي
$$\eta(\psi) \neq 0 \Rightarrow \psi \not\perp \xi.$$
و بهذا نكون قد أثبتنا أنه إذا كان $\mathrm{d}\phi \neq 0$ فإن الحقلين الشعاعيين ψ و ξ غير متعامدين، أي برهنا صحة الاستلزام التالي
$$\psi \perp \xi \Rightarrow \mathrm{d}\phi = 0.$$

وهكذا نكون قد برهنا التكافؤ التالي
$$\mathrm{d}\phi = 0 \Leftrightarrow \psi \perp \xi.$$

2.4.2 المنوّعة ذات الركن

نلاحظ أنه من المبرهنة 2.6.37 لدينا $\mathrm{d}\phi = 2\omega \wedge \phi$ و هذا ما يؤكد أنه في بنية ثنائية التماسك تقريبا محوّلة محليا ليس بالضرورة أن يكون الحقلان الشعاعيان ψ و ξ متعامدين. لكن، في حالة تعامدهما سيظهر حقل شعاعي ثالث عمودي على كل منهما و هو $\varphi\psi$. هذه الحقول الشعاعية الثلاثة المتعامدة مثنى مثنى و كأنها تشكل ركنا لهذه المنوّعة (عند كل نقطة من المنوّعة يوجد ثلاثة أشعة متعامدة مثنى مثنى). فيما تبقى من هذا الفصل، سنهتم بدراسة منوّعة أعم من المنوّعة ثنائية التماسك محوّلة محليا و التي يكون فيها الحقلان الشعاعيان ψ و ξ متعامدين من جهة و الشكل التفاضلي ω ليس بالضرورة مغلقا، و التي سنسميها **المنوّعة ذات الركن** و التي بالضرورة يكون بُعدُها فرديا و أكبر أو يساوي 3.

تعريف 2.4.20. نقول عن بنية مترية تلامسية تقريبا (φ, ξ, η, g) أنها بنية ذات الركن تقريبا إذا وُجد شكل تفاضلي أحادي ω عمودي على η حيث :

$$\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta, \qquad \mathrm{d}\phi = 0. \tag{33}$$

وإذا كان $N_\varphi = 0$ نقول عن البنية عندئذ أنها بنية ذات الركن و نرمز لها بالرمز $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$

ملاحظة 2.4.9. يمكننا تغيير الشرط الأول في التعريف و الذي هو $\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta$ ليصبح على الشكل $\mathrm{d}\eta = \eta \wedge \omega$ و يترتّب على ذلك تغيير في الإشارة في بعض العلاقات فقط. فضلنا استعمال التعريف على النحو المعطى لاعتبارات قادمة.

توطئة 2.4.4. من أجل كل منوّعة ذات الركن تقريبا $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ لدينا

$$\psi = -\nabla_\xi \xi.$$

البرهان 2.4.25. من أجل كل X من $\mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(X,\xi) &= X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X,\xi]) \\ &= -\xi g(X,\xi) - g(X,\nabla_\xi \xi) - g(\nabla_X \xi, \xi) + g(\nabla_\xi X, \xi) \\ &= -g(X,\nabla_\xi \xi), \end{aligned} \tag{34}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(X,\xi) &= 2(\omega \wedge \eta)(X,\xi) \\ &= \omega(X)\eta(\xi) - \omega(\xi)\eta(X) \\ &= \omega(X) \\ &= g(X,\psi), \end{aligned} \tag{35}$$

و بالتالي من المساوتين (34) و (35) ينتج

$$\psi = -\nabla_\xi \xi$$

مبرهنة 2.4.19. المنوّعة المترية التلامسية تقريبا $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, , g)$ هي منوّعة ذات الركن إذا وفقط إذا كان

$$(\nabla_X \varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big), \tag{36}$$

حيث ω شكل ثنوي أحادي عمودي على η.

البرهان 2.4.26. نفرض أن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, , g)$ هي منوّعة ذات الركن، فهي إذن منوّعة مترية تلامسية تقريبا و بالتالي يمكننا استعمال نتيجة ديفيد بلير ([15]، صفحة 82)

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X \varphi)Y, Z\big) &= 3\mathrm{d}\phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) \\ &+ g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) \\ &+ 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{37}$$

وأيضا من ([15]، صفحة 81) لدينا

$$\begin{aligned} N^{(2)}(Y,Z) &= \big(\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta\big)(Z) - \big(\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta\big)(Y) \\ &= \varphi Y\big(\eta(Z)\big) - \eta\big([\varphi Y, Z]\big) - \varphi Z\big(\eta(Y)\big) + \eta\big([\varphi Z, Y]\big) \\ &= 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y, Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z, Y), \end{aligned} \tag{38}$$

حيث $\mathcal{L}_X$ يرمز لمشتقة لِي بالنسبة للحقل الشعاعي X. و مادام البنية ذات الركن هي بنية قابلة للمكاملة فإن $N_\varphi = 0$

$$\begin{aligned} N^{(1)}(Y,Z) &= 2\mathrm{d}\eta(Y,Z)\xi \\ &= 2(\omega\wedge\eta)(Y,Z)\xi \\ &= (\omega(Y)\eta(Z)-\omega(Y)\eta(Z))\xi. \end{aligned} \tag{39}$$

بتعويض (38) و (39) في (147) مع أخذ بعين الإعتبار $\mathrm{d}\phi = 0$ نجد

$$(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big).$$

لنبرهن الآن العكس. نفرض أن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,,g)$ هي منوّعة المترية التلامسية تقريبا تحقق

$$(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big), \tag{40}$$

حيث ω شكل ثنوي أحادي عمودي على η.
في المساواة (40) نضع $Y=\xi$ فينتج

$$-\varphi\nabla_X\xi = \eta(X)\varphi\psi,$$

بتركيب φ نجد

$$\begin{aligned} \nabla_X\xi &= \eta(X)\varphi^2\psi \\ &= -\eta(X)\psi. \end{aligned} \tag{41}$$

و بالتالي

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\big(g(\nabla_X\xi,Y)-g(\nabla_Y\xi,X)\big) \\ &= (\omega\wedge\eta)(X,Y). \end{aligned}$$

كما نعلم أن

$$3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) = g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big)+g\big(Z,(\nabla_Y\varphi)X\big)+g\big(X,(\nabla_Z\varphi)Y\big),$$

و باستعمال الفرضية (40)، نتحصّل على

$$\mathrm{d}\phi = 0.$$

و للبرهان على أن (φ,ξ,η,g) هي بنية قابلة للمكاملة، لدينا

$$N_\varphi(X,Y) = (\varphi\nabla_Y\varphi - \nabla_{\varphi Y}\varphi)X - (\varphi\nabla_X\varphi - \nabla_{\varphi X}\varphi)Y,$$

و باستعمال الفرضية (40)، ينتج

$$(\varphi\nabla_X\varphi - \nabla_{\varphi X}\varphi)Y = -\eta(X)\eta(Y)\psi,$$

و عليه،

$$N_\varphi(X,Y) = 0.$$

و بهذا نكون قد برهنا أن $(\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ هي بنية ذات الركن.

من خلال المبرهنة أعلاه، يمكن ان نلاحظ أنّه من أجل أي حقلين شعاعيين X و Y لدينا

$$g\big((\nabla_X\varphi)Y,\psi\big) = 0,$$

و منه النتيجة التالية

نتيجة 2.4.7. في منوّعة ذات الركن، دوما يكون الشعاعان $(\nabla_X\varphi)Y$ و ψ متعامدين مهما كان الحقلان الشعاعيان X و Y.

علاقة أخرى جميلة جدا يمكن تمييز بها منوّعة الرُكن، نقدمها هنا على النحو التالي

مبرهنة 2.4.20. المنوّعة المترية التلامسية تقريبا $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,,g)$ هي منوّعة ذات الرُّكن إذا وفقط إذا كان

$$(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y = 0. \tag{42}$$

البرهان 2.4.27. سنبرهن أن العلاقة

$$(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big)$$

تكافئ العلاقة

$$(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y = 0.$$

نفرض أن $(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big)$. فقط بتعويض X بـ φX نتحصّل مباشرة على $(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y = 0$.
عكسيا، لنفرض أن

$$(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y = 0. \tag{43}$$

و نعوّض X بـ φX نجد

$$(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)(\nabla_\xi\varphi)Y. \tag{44}$$

كذلك، في (43) نعوّض Y بـ ξ ثم بتطبيق φ و من ثَمَّ نعوّض X بـ φX، نتحصّل على

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\varphi X}\varphi)\xi \\ &= \varphi\nabla_{\varphi X}\xi \\ &= \nabla_{\varphi X}\xi \\ &= \nabla_{\varphi^2 X}\xi \\ &= -\nabla_X\xi + \eta(X)\nabla_\xi\xi, \end{aligned}$$

و عليه

$$\nabla_X\xi = -\eta(X)\psi, \qquad \psi = -\nabla_\xi\xi. \tag{45}$$

من جهة أخرى، بمعرفة أن $\mathrm{d}\phi = 0$ ينتج

$$g\big(X,(\nabla_Z\varphi)Y\big) + g\big(Z,(\nabla_Y\varphi)X\big) + g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big) = 0,$$

نضع $\xi = Z$، نجد

$$\begin{aligned} 0 &= g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big) + g\big(\xi,(\nabla_Y\varphi)X\big) + g\big(Y,(\nabla_X\varphi)\xi\big) \\ &= g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big) + g\big(\xi,\nabla_Y\varphi X\big) - g\big(Y,\varphi\nabla_X\xi\big) \\ &= g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big) - g\big(\nabla_Y\xi,\varphi X\big) + g\big(\varphi Y,\nabla_X\xi\big), \end{aligned}$$

الآن، باستعمال (45)، نتحصّل على

$$\begin{aligned} 0 &= g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big) + \eta(Y)g\big(\psi,\varphi X\big) - \eta(X)g\big(\varphi Y,\psi\big) \\ &= g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big) - g\big(\eta(Y)\varphi\psi, X\big) - g\big(\omega(\varphi Y)\xi, X\big), \end{aligned}$$

حيث $\omega(X) = g(X,\psi)$ و هذا يستلزم

$$(\nabla_\xi\varphi)Y = \eta(Y)\varphi\psi + \omega(\varphi Y)\xi,$$

بتعويض هذه العلاقة في (44)، ينتج

$$(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big).$$

و هو المطلوب.

سنقدم فيما يلي مثالين عن المنوّعة ذات الركن، أحدهما ثلاثي الأبعاد و الآخر خماسي الأبعاد و ذلك لتبيان أن هذا الصنف من المنوّعات غير خال أي بالفعل يوجد أمثلة ملموسة.

مثال 2.4.11. [21] نعتبر G زمرة لي المكوّنة من المصفوفات الحقيقية ذات الشكل :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-z} & 0 & x \\ 0 & \mathrm{e}^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

المزودة بالمترك الريماني اللامتغيّر على اليسار

$$g = \mathrm{e}^{2z}dx^2 + \mathrm{e}^{-2z}dy^2 + \lambda^2 dz^2, \qquad \lambda > 0.$$

يعطى

$$\varphi\frac{\partial}{\partial x} = 0, \qquad \varphi\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \varphi\frac{\partial}{\partial z} = -\lambda\mathrm{e}^{z}\frac{\partial}{\partial y},$$

و

$$\xi = \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \eta = \mathrm{e}^{z}dx.$$

بداية لاحظ أن $\mathrm{d}\eta = \mathrm{e}^{z}dz \wedge dx = \omega \wedge \eta$ مع $\omega = dz$ و منه $\psi = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\lambda}e_2$.
كما يمكن ملاحظة أن

$$\mathrm{d}\eta(\xi, e_2) = (\omega \wedge \eta)(\xi, e_2) = -\frac{1}{2}\omega(e_2) = -\frac{1}{2\lambda} \neq 0$$

و هذا يعني أن $N^{(1)} \neq 0$
لتبيان أن المنوّعة $(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ذات الركن، نستعمل الأساس المتعامد و المتجانس

$$\xi = \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad e_1 = \mathrm{e}^{z}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad e_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}.$$

أقواس لي غير المعدومة هي

$$[\xi, e_2] = \frac{1}{\lambda}\xi, \qquad [e_1, e_2] = \frac{-1}{\lambda}e_1.$$

باستعمال دستور كوزيل

$$2g\big(\nabla_{e_i}e_j, e_k\big) = -g\big(e_i, [e_j, e_k]\big) + g\big(e_j, [e_k, e_i]\big) + g\big(e_k, [e_i, e_j]\big). \tag{46}$$

المركبات غير المعدومة لوصلة لوفي-سيفيتا هي:

$$\nabla_\xi \xi = \frac{-1}{\lambda}e_2, \qquad \nabla_\xi e_2 = \frac{1}{\lambda}\xi, \qquad \nabla_{e_1}e_1 = \frac{1}{\lambda}e_2, \qquad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{-1}{\lambda}e_1.$$

و أخيرا، يمكن أن نتحقق بسهولة أنه من أجل كل $i \in \{1,2,3\}$ لدينا

$$\nabla_{e_i}\xi = -\eta(e_i)\psi = -\frac{1}{\lambda}\eta(e_i)e_2,$$

و بالتالي (G,φ,ξ,η,g) هي منوّعة الرُكْنِ.

هذا مثال جميل جدا، إذ من أجل $\xi = e_1$ أثبتنا أن البُنية هي ذات الرُكن و كذلك الأمر لو أخذنا $\xi = e_2$ لكن لو اخترنا $\xi = e_3$ سنتحصّل على صنف آخر (أنظر فقرة منوّعات الصنف التاسع).

يمكننا تعميم المثال السابق لتوضيح أن الشكل التفاضلي ω ليس بالضرورة مغلقا:

مثال 2.4.12. نعتبر عائلة المنوّعات المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد ذات الوسطاء الثلاثة و المعطاة كمايلي

$$g = \begin{pmatrix} \rho(x,y,z)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau(x,y,z)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma(x,y,z)^2 \end{pmatrix},$$

حيث ρ τ و σ دوال قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ لا تنعدم أبدا.
و أيضا الثلاثية و أيضا (φ,ξ,η) على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{\tau} \\ 0 & \frac{\tau}{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \big(\rho, 0, 0\big).$$

لاحظ أن $\mathrm{d}\eta = \rho_2 dy \wedge dx + \rho_3 dz \wedge dx = \omega \wedge \eta$ مع $\omega = \frac{\rho_2}{\rho}dy + \frac{\rho_3}{\rho}dz,$ حيث الدليل في الدوال يخبر عن المشتقة الجزئية أي $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$. و لا حظ أيضا أن ω ليست بالضرورة شكلا مغلقا. وبالتالي الحقل الشعاعي المرافق لـ ω هو

$$\psi = \frac{\rho_2}{\tau\rho}e_2 + \frac{\rho_3}{\sigma\rho}e_3.$$

حيث الأساس المتعامد و المتجانس $\{\xi, e_1, e_2\}$ المستعمل هو

$$\xi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad e_1 = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad e_2 = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}.$$

باستعمال دستور كوزيل، مركبات وصلة لوفي-سيفيتا غير المعدومة هي

$$\begin{array}{ccc} \nabla_\xi\xi = -\frac{\rho_2}{\tau\rho}e_1 - \frac{\rho_3}{\rho\sigma}e_2, & \nabla_\xi e_1 = \frac{\rho_2}{\tau\rho}\xi, & \nabla_\xi e_2 = \frac{\rho_3}{\rho\sigma}\xi, \\ \nabla_{e_1}\xi = \frac{\tau_1}{\tau\rho}e_1, & \nabla_{e_1}e_1 = -\frac{\tau_1}{\tau\rho}\xi - \frac{\tau_3}{\tau\sigma}e_2, & \nabla_{e_1}e_2 = \frac{\tau_3}{\tau\sigma}e_1, \\ \nabla_{e_2}\xi = \frac{\sigma_1}{\rho\sigma}e_2, & \nabla_{e_2}e_1 = \frac{\sigma_2}{\tau\sigma}e_2, & \nabla_{e_2}e_2 = -\frac{\sigma_1}{\rho\sigma}\xi - \frac{\sigma_2}{\tau\sigma}e_1. \end{array}$$

كي تكون المنوّعة هي منوّعة رُكْنٍ يجب أن يتحقق الشرط

$$\nabla_{e_i}\xi = -\eta(e_i)\psi = -\eta(e_i)\big(\frac{\rho_2}{\tau\rho}e_1 + \frac{\rho_3}{\sigma\rho}e_2\big),$$

من أجل $i \in \{0,1,2\}$ مع $e_0 = \xi$، أي

$$\nabla_\xi\xi = -\frac{\rho_2}{\tau\rho}e_1 - \frac{\rho_3}{\rho\sigma}e_2, \qquad \nabla_{e_1}\xi = \nabla_{e_2}\xi = 0.$$

من مركبات وصلة لوفي-سيفيتا نستنتج أنه يجب أن يكون

$$\tau_1 = \sigma_1 = 0.$$

مثال 2.4.13. ليكن $\mathbb{R}^5$ فضاء إقليديا مزوّدا بالإحداثيات الديكارتية $\{x_i, z\}_{1\leq i\leq 4}$ و نعتبر $\{e_i\}_{1\leq i\leq 5}$ حقول الأشعة المستقله خطيا عند كل نقطة من $\mathbb{R}^5$ و المعطاة كمايلي

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad e_5 = \xi = \frac{\partial}{\partial z}$$

وليكن g المترك الريماني في $\mathbb{R}^5$ معرف بـ:

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

حيث

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

و لإيجاد المصفوفة المرفقة بـ g، نعتبر θ^i الشكل الثنوي المرفق بالحقل الشعاعي e_i. نضع

$$\theta^i = a_i dx_1 + b_i dx_2 + c_i dx_3 + r_i dx_4 + s_i dz, \qquad a_i, b_i, c_i, r_i, s_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^5).$$

و مادام $\theta^i(e_j) = \delta_{ij}$ فإن

$$\begin{cases} \theta^1(e_1) &=& 1 \\ \theta^1(e_2) &=& 0 \\ \theta^1(e_3) &=& 0 \\ \theta^1(e_4) &=& 0 \\ \theta^1(e_5) &=& 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + zs_1 &=& 1 \\ b_1 &=& 0 \\ c_1 + zs_1 &=& 0 \\ r_1 &=& 0 \\ s_1 &=& 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 &=& 1 \\ b_1 &=& 0 \\ c_1 &=& 0 \\ r_1 &=& 0 \\ s_1 &=& 0 \end{cases} \Rightarrow \theta^1 = dx_1.$$

بنفس الكيفية نجد

$$\theta^2 = dx_2, \qquad \theta^3 = dx_3, \qquad \theta^4 = dx_4, \qquad \theta^5 = dz - zdx_1 - zdx_3.$$

علما أن

$$g = \sum_{i=1}^{5} \theta^i \otimes \theta^i$$

ينتج

$$\begin{aligned} g &= dx_1 \otimes dx_1 + dx_2 \otimes dx_2 + dx_3 \otimes dx_3 + dx_4 \otimes dx_4 \\ &+ (dz - zdx_1 - zdx_3) \otimes (dz - zdx_1 - zdx_3) \\ &= (1+z^2)dx_1^2 + dx_2^2 + (1+z^2)dx_3^2 + dx_4^2 + dz^2 \\ &+ 2z^2 dx_1 \otimes dx_3 - 2zdx_1 \otimes dz - 2zdx_3 \otimes dz. \end{aligned}$$

أي

$$g = \begin{pmatrix} 1+z^2 & 0 & z^2 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z^2 & 0 & 1+z^2 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & -z & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

للبحث عن موتّر البنية φ لدينا

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi e_1 &= e_2 \\ \varphi e_2 &= -e_1 \\ \varphi e_3 &= e_4 \\ \varphi e_4 &= -e_3 \\ \varphi e_5 &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi(\frac{\partial}{\partial x_1} + z\frac{\partial}{\partial z}) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \varphi(\frac{\partial}{\partial x_2}) &= -\frac{\partial}{\partial x_1} - z\frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi(\frac{\partial}{\partial x_3} + z\frac{\partial}{\partial z}) &= \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \varphi(\frac{\partial}{\partial x_4}) &= -\frac{\partial}{\partial x_3} - z\frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi(\frac{\partial}{\partial z}) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \varphi\frac{\partial}{\partial x_2} &= -\frac{\partial}{\partial x_1} - z\frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi\frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \varphi\frac{\partial}{\partial x_4} &= -\frac{\partial}{\partial x_3} - z\frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi\frac{\partial}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

و عليه

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & -z & 0 \end{pmatrix}.$$

و بالتالي، من أجل $\eta = dz - zdx_1 - zdx_3$ و $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ تكون الرباعية (φ, ξ, η, g) هي بنية مترية تلامسية تقريبا.

نبحث الآن عن الشكل التفاضلي ω: لدينا:

$$\eta = \theta^5 = dz - zdx_1 - zdx_3$$

إذن

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta &= -dz \wedge dx_1 - dz \wedge dx_3 \\ &= (dx_1 + dx_3) \wedge dz \\ &= (dx_1 + dx_3) \wedge (dz - zdx_1 - zdx_3), \end{aligned}$$

ومنه يتّضح أن

$$\omega = dx_1 + dx_3.$$

مع ملاحظة أنّ $\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta$ مع $\mathrm{d}\omega = 0$ و كذلك

$$\omega = \theta^1 + \theta^3 \quad \Leftrightarrow \quad \psi = e_1 + e_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} + 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$

ولدينا أيضا

$$g(\psi, \xi) = g(e_1 + e_3, e_5) = 0,$$

و هذا معناه $\xi \perp \psi$.

لنحسب ϕ و نبيّن أنّه شكل تفاضلي مغلق. نعلم أن

$$\phi = \sum_{i,j=1}^{5} \phi(e_i, e_j)\theta^i \wedge \theta^j,$$

و منه

$$\left\{ \begin{aligned} \phi(e_1, e_2) &= g(e_1, \varphi e_2) = g(e_1, -e_1) = -1 \\ \phi(e_3, e_4) &= g(e_3, \varphi e_4) = g(e_3, -e_3) = -1 \\ \phi(e_1, e_3) &= \phi(e_1, e_4) = \phi(e_1, e_5) = 0 \\ \phi(e_2, e_3) &= \phi(e_2, e_4) = \phi(e_2, e_5) = 0 \\ \phi(e_3, e_5) &= \phi(e_4, e_5) = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \phi = -2\theta^1 \wedge \theta^2 - 2\theta^3 \wedge \theta^4.$$

و مادام

$$\mathrm{d}\theta^1 = \mathrm{d}\theta^2 = \mathrm{d}\theta^3 = \mathrm{d}\theta^4 = 0,$$

فإن

$$\mathrm{d}\phi = 0.$$

من أجل التحقق من شرط قابلية المكاملة $N_\varphi = 0$ لدينا

$$\begin{aligned} N_\varphi(e_1, e_2) &= \varphi^2[e_1, e_2] + [\varphi e_1, \varphi e_2] - \varphi[e_1, \varphi e_2] - \varphi[\varphi e_1, e_2] \\ &= \varphi^2[e_1, e_2] + [e_2, -e_1] - \varphi[e_1, -e_1] - \varphi[e_2, e_2] \\ &= \varphi^2[e_1, e_2] - [e_2, e_1] \end{aligned}$$

و بما أن

$$[e_1, e_2] = 0 \Rightarrow N_\varphi(e_1, e_2) = 0.$$

بنفس الطريقة نحقق من باقي الحالات أي من أجل كل i و j من $\{1, 2, 3\}$ يكون :

$$N_\varphi(e_i, e_j) = 0$$

وختاما، نعلن أن المنوّعة $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي منوّعة ذات الرُّكْن خماسية الأبعاد.

بعد الأمثلة المباشرة المعطاة أعلاه، نريد أن نؤكّد أن هذا الصنف من البنى لا يقتصر وجوده على البُعدين الثالث و الخامس فقط، لذلك نقدّم فيما يلي طريقة لانشاء منّوعة ذات الرُّكْن بالنسبة لأي بُعدٍ فرديٍ انطلاقا من منوّعة كالير و ذلك باستعمال جُداء المنوّعات الريمانية المعرّف من قبل بشوب-أونيل [14].
لتكن(N_1, g_1) و (N_2, g_2) منوّعتان ريمانيتان و ρ دالة قابلة للتفاضل على N_1. و نعتبر المنوّعة الجُداء $N_1 \times N_2$ مع المستقطين $\pi_1 : N_1 \times N_2 \to N_1$ و $\pi_2 : N_1 \times N_2 \to N_2$. الجُداء الإلتفافي $M = N_1 \times_\rho N_2$ هو المنوّعة $N_1 \times N_2$ المزوّدة بالمترك الريماني g حيث

$$g = \pi_1^* g_1 + \mathrm{e}^{2\rho} \pi_2^* g_2.$$

لابأس أن نذكّر هنا ببعض المعلومات حول المنوّعات الهارميسية تقريبا.
منوّعة مركّبة تقريبا مزوّدة بمترك هارميسي تسمى منوّعة هارميسية تقريبا أي من أجل كل منوّعة هارميسية تقريبا (N, J, h) لدينا

$$J^2 = -I, \qquad h(JX, JY) = h(X, Y), \tag{47}$$

من أجل كل X وY حقلي أشعة على N.

نقول عن بُنية مركّبة تقريبا J أنها قابلة للمكاملة و بالتالي المنوّعة تصبح مركّبة إذا وفقط إذا انعدم الموتّر N_J المعرّف بـ

$$\frac{1}{2}N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y]. \tag{48}$$

من أجل كل منوّعة هارميسية تقريبا (N,J,h) نعرّف شكلا تفاضليا ثنائيا أساسيا Ω يسمى شكل كالير كمايلي :

$$\Omega(X,Y) = h(X,JY). \tag{49}$$

تصبح المنوّعة الهارميسية تقريبا (N,J,h) منوّعة كالير إذا وفقط إذا كان $\mathrm{d}\Omega = 0$ و $N_J = 0$. هذان الشرطان معا يكافئان الشرط التالي

$$\nabla J = 0. \tag{50}$$

تعريف 2.4.21. نقول عن منوّعة هارميسية (N,J,h) أنها منوّعة كالير محوّلة محليا إذا وُجد شكل تفاضلي تام θ (يسمى شكل لِي) حيث

$$\mathrm{d}\Omega = \theta \wedge \Omega.$$

و الآن الى أول إنشاء:

مبرهنة 2.4.21. لتكن (N,J,h) منوّعة كالير و ρ دالة لا تنعدم أبدا على المجال المفتوح $L \subset \mathbb{R}$. إذن، المنوّعة الجدُاء $M = N \times_\rho L$ تتمتع ببنية ذات الرُّكْن.

البرهان 2.4.28. في ظل الشروط المعطاة، نعرّف مترك ريماني g، حقلا شعاعيا ξ، شكلا تفاضليا أحاديا η و موتّرا φ من الصنف $(1,1)$على M كمايلي:

$$g = h + \mathrm{e}^{2\rho}dt^2, \quad \xi = \mathrm{e}^{-\rho}\partial_t, \quad \eta = \mathrm{e}^{\rho}dt, \quad \varphi X = JX, \quad \varphi\partial_t = 0,$$

من أجل كل حقل شعاعي X على N و ∂_t يرمز للحقل الشعاعي الوحدة الوحيد على L.
بحسابات مباشرة نسطيع التتحقق من خواص بنية مترية تلامسية تقريبا، أي (φ,ξ,η,g) هي بنية المترية التلامسية تقريبا
زيادة على ذلك، لدينا $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\rho \wedge \eta$ و هذا يستلزم $\omega = \mathrm{d}\rho$.
أيضا، الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي ϕ للبنية (φ,ξ,η,g) نستخرجه من العلاقة

$$\phi\big((X\ ,a\partial t),(Y,b\partial t)\big) = g\big((X,\partial t),\varphi(Y,\partial t)\big),$$

فيكون

$$\phi = \Omega,$$

و مادام (N, J, h) هي منوّعة كالير أي لدينا $\mathrm{d}\Omega = 0$ و $N_J = 0$ و منه نستنتج أن $\mathrm{d}\phi = 0$.
من أجل شرط قابلية المكاملة، لدينا

$$N_\varphi\big((X\ ,a\partial t),\big(Y, b\partial t)\big) = N_J(X,Y) = 0.$$

و عليه، $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي عائلة ذات وسيط من المنوّعات ذات الرُّكْن.

فكرة أخرى نبيّن من خلالها كيفية الحصول على منوّعة ذات الركن انطلاقا من منوّعة β- كانموتسو و التي هي تعميم لبنية كانموتسو الشهيرة $(\beta = 1)$ و كذلك بنية ثنائية التماسك $(\beta = 0)$.
مع العلم أنّ بنية β- كانموتسو هي بنية مترية تلامسية تقريبا $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ تحقق الشروط

$$\mathrm{d}\eta = N^{(1)} = 0, \qquad \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta \wedge \phi, \tag{51}$$

حيث β دالة ملساء على M. فإنه و بإجراء تغيير على النحو التالي

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\xi} = \mathrm{e}^{-\rho-\tau}\xi, \quad \tilde{\eta} = \mathrm{e}^{\rho+\tau}\eta, \quad \tilde{g} = \mathrm{e}^{2\rho}g + \mathrm{e}^{2\rho}(\mathrm{e}^{2\tau} - 1)\eta \otimes \eta, \tag{52}$$

حيث ρ و τ هما دالتان قابلتان للتفاضل على M تكون $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ هي كذلك بنية مترية تلامسية تقريبا [6] (يمكن للطالب أن يتحقق من ذلك و هو تمرين له).
إذا رمزنا بـ $\tilde{\phi}$ للشكل التفاضلي الثنائي الأساسي المرفق بـ $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$، ينتج

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{d}(\rho + \tau) \wedge \tilde{\eta} + \mathrm{e}^{\rho+\tau}\mathrm{d}\eta, \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = 2\mathrm{d}\rho \wedge \tilde{\phi} + \mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{d}\phi. \end{cases} \tag{53}$$

و بالتالي، نستطيع الحصول على

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{d}(\rho + \tau) \wedge \tilde{\eta}, \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = 2(\mathrm{d}\rho + \beta\eta) \wedge \tilde{\phi}. \end{cases} \tag{54}$$

و عليه، اعتمادا على (114) و العلاقة

$$\tilde{N}^{(1)} = N_{\tilde{\varphi}} + 2\mathrm{d}\tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi} = N_\varphi + 2\mathrm{d}\eta \otimes \xi = N^{(1)}$$

نتحصل على المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.4.22. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريبا.

1. إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ثنائية التماسك (أي $\beta=0$) و ρ دالة ثابتة فإن المنوّعة $(M,\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\psi},\tilde{\eta},\tilde{\omega},\tilde{g})$ المعرّفة بـ (112) هي منوّعة ذات الركن مع $\tilde{\omega}=\mathrm{d}\tau$ و $\tilde{\psi}=\mathrm{grad}\tau$.

2. إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة β- كانموتسو مع $\eta=-\frac{1}{\beta}\mathrm{d}\rho$ فإن $(M,\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\psi},\tilde{\eta},\tilde{\omega},\tilde{g})$ هي نوعة ذات الركن مع $\tilde{\omega}=\mathrm{d}\tau$ و $\tilde{\psi}=\mathrm{grad}\tau$.

2.4.3 المنوّعة ذات الأركان

لتكن $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الرُّكْن تقريبا. من أجل كل دالة σ قابلة للتفاضل على M، نضع

$$\tilde{\varphi}=\varphi,\quad \tilde{\xi}=\mathrm{e}^{-\sigma}\xi,\quad \tilde{\eta}=\mathrm{e}^{\sigma}\eta,\quad \tilde{g}=\mathrm{e}^{2\sigma}g. \tag{55}$$

فتكون الخماسية $(M,\varphi,\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ هي أيضا منوّعة ذات الرُّكْن تقريبا.
أولا، لاحظ أن

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{\eta} &= \mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{d}\sigma\wedge\eta+\mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{d}\eta\\ &= (\theta+\omega)\wedge\tilde{\eta},\end{aligned}$$

حيث $\theta=\mathrm{d}\sigma$.
ثانيا، باعتبار $\tilde{\phi}$ هي الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي للبنية التلامسية تقريبا $(\varphi,\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$، فإن $\tilde{\phi}=\mathrm{e}^{2\sigma}\phi$ و هذا يستلزم

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{\phi} &= 2\mathrm{e}^{2\sigma}\mathrm{d}\sigma\wedge\phi\\ &= 2\theta\wedge\tilde{\phi},\end{aligned}$$

إعتمادا على ما سبق، لدينا الآتي:

تعريف 2.4.22. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الرُّكْن تقريبا. نقول عن M أنها منوّعة ذات الرُّكْنين تقريبا إذا وُجِد شكل تفاضلي أحادي θ بحيث

$$\mathrm{d}\eta=(\omega+\theta)\wedge\eta \qquad \text{و} \qquad \mathrm{d}\phi=2\theta\wedge\phi$$

بالإظافة الى ذلك، إذا كان $N_\varphi=0$ نقول عن M أنها منوّعة ذات الرُّكْنين.

كحالة خاصة، إذا كان $\theta = 0$ فإننا نتحصّل على منوّعة ذات رُكن واحد.
الآن، لنفرض أن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي منوّعة ذات الرُّكن تقريبا. باستعمال التحويل المعرّف أعلاه (55) مرتين متتابعتين بتوظيف الدالتين σ ثمّ μ، نتحصّل

$$\overline{\phi} = \mathrm{e}^{2(\sigma+\mu)}\phi \qquad \text{و} \qquad \overline{\eta} = \mathrm{e}^{\sigma+\mu}\eta$$

و هذا يستلزم

$$\mathrm{d}\overline{\eta} = (\omega + \theta_1 + \theta_2) \wedge \overline{\eta} \qquad \text{و} \qquad \mathrm{d}\overline{\phi} = 2(\theta_1 + \theta_2) \wedge \overline{\phi}$$

حيث $\theta_1 = \mathrm{d}\sigma$ و $\theta_2 = \mathrm{d}\mu$.
بمواصلة استخدام التحويل $(n-1)$ مرّة بالضبط، نستطيع تعريف منوّعة ذات n رُكن نقدّمها في التعريف التالي

تعريف 2.4.23. لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوّعة ذات الرُّكن تقريبا. نقول عن M أنها منوّعة ذات p ركن تقريبا أومنوّعة ذات الأركان تقريبا من الرتبة p إذا وُجِد p شكلا تفاضليا أحاديا مغلقا θ_i بحيث

$$\mathrm{d}\phi = 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i \wedge \phi \qquad \text{و} \qquad \mathrm{d}\eta = \left(\omega + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\right) \wedge \eta$$

حيث $0 \leq p \leq n-1$. بالإظافة الى ذلك، إذا كان $N_\varphi = 0$ نقول عن M أنها منوّعة ذات p ركن أومنوّعة ذات الأركان من الرتبة p و نرمز لها بالرمز $(M, \varphi, \theta_p, \omega, \eta, g)$.

ملاحظة هامة:
نعتبر $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة من الصنف C_{12} (أنظر تصنيف تشينيا-غونزليز في الصفحة 33) أي هي منوّعة مترية تلامسية تقريبا تحقق الشرط

$$(\nabla_X\phi)(Y,Z) = \eta(X)\eta(Z)(\nabla_\xi\eta)\varphi Y - \eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi\eta)\varphi Z, \tag{56}$$

من أجل X، Y و Z حقول شعاعية على M. لدينا

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\phi)(Y,Z) &= X\phi(Y,Z) - \phi(\nabla_XY,Z) - \phi(Y,\nabla_XZ)\\
&= Xg(Y,\varphi Z) - g(\nabla_XY,\varphi Z) - g(Y,\varphi\nabla_XZ)\\
&= -Xg(\varphi Y,Z) - g(\nabla_XY,\varphi Z) + Xg(\varphi Y,\nabla_Z) - g(\nabla_X\varphi Y,Z)\\
&= -g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big),
\end{aligned}\tag{57}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi\eta)\varphi Y &= \xi\eta(\varphi Y)-\eta(\nabla_\xi\varphi Y)\\ &= -g(\xi,\nabla_\xi\varphi Y)\\ &= -\xi g(\xi,\varphi Y)+g(\nabla_\xi\xi,\varphi Y)\\ &= g(\nabla_\xi\xi,\varphi Y). \end{aligned} \tag{58}$$

بتعويض (57) و (107) في (56) نجد

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= -\eta(X)\eta(Z)g(\nabla_\xi\xi,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi,\varphi Z)\\ &= \eta(X)g\big(-g(\nabla_\xi\xi,\varphi Y)\xi-\eta(Y)\varphi\nabla_\xi\xi,Z\big),\end{aligned}$$

فينتج

$$(\nabla_X\varphi)Y=\eta(X)\big(-g(\nabla_\xi\xi,\varphi Y)\xi-\eta(Y)\varphi\nabla_\xi\xi\big).$$

نضع $\omega=-\nabla_\xi\eta$ الشكل التفاضلي الثنوي للحقل الشعاعي $\psi=-\nabla_\xi\xi$ نتحصل على

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)Y &= \eta(X)\big(g(\psi,\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\psi\big)\\ &= \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\psi\big),\end{aligned}$$

و عليه، نعلن أن كل منوّعة ذات الركن هي من الصنف C_{12} حسب تصنيف تشينيا-غونزليز للبنى المترية التلامسية تقريبا و العكس صحيح.

سنناقش الآن مبرهنة تتعلق بالشروط الكافية و اللازمة لقابلية المكاملة لبنية ذات الركن تقريبا.

مبرهنة 2.4.23. لتكن $(\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ بنية ذات الرُكن تقريبا. من أجل كل X و Y حقلي أشعة على M لدينا

$$N_\varphi=0\Leftrightarrow\big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y-\varphi\big(\nabla_X\varphi\big)Y=g(\nabla_X\xi,Y)\xi+\eta(X)\big(\omega(Y)\xi-\eta(Y)\psi\big).$$

البرهان 2.4.29. نعلم أن

$$N_\varphi(X,Y)=(\varphi\nabla_Y\varphi-\nabla_{\varphi Y}\varphi)X-(\varphi\nabla_X\varphi-\nabla_{\varphi X}\varphi)Y.$$

نفرض أن $N_\varphi=0$ ثم نضع

$$\begin{aligned}T(X,Y,Z) &= g\big(\varphi(\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y,Z\big)\\ &= -g\big((\nabla_X\varphi)Y,\varphi Z\big)-g\big((\nabla_{\varphi X}\varphi)Y,Z\big).\end{aligned}$$

يمكن بسهولة الحصول على

$$T(X,Y,Z)=T(Y,X,Z). \tag{59}$$

من جهة أخرى و باستعمال العلاقة

$$\nabla_X(\varphi Y)=(\nabla_X\varphi)Y+\varphi\nabla_X Y, \qquad g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y),$$

نتحصل على

$$\begin{aligned}
T(X,Y,Z) &= -g\big((\nabla_X\varphi)Y,\varphi Z\big)-g\big((\nabla_{\varphi X}\varphi)Y,Z\big)\\
&= g\big(Y,(\nabla_X\varphi)\varphi Z\big)+g\big(Y,(\nabla_{\varphi X}\varphi)Z\big)\\
&= g\big(Y,\nabla_X\varphi^2 Z\big)-g\big(Y,\varphi\nabla_X\varphi Z\big)+g\big(Y,\nabla_{\varphi X}\varphi Z\big)-g\big(Y,\varphi\nabla_{\varphi X}Z\big)\\
&= (\nabla_X\eta)(Z)\eta(Y)+\eta(Z)g(Y,\nabla_X\xi)+g\big(\varphi Y,(\nabla_X\varphi)Z\big)+g\big(Y,(\nabla_{\varphi X}\varphi)Z\big)\\
&= -T(X,Z,Y)+g(\nabla_X\xi,Y)\eta(Z)+g(\nabla_X\xi,Z)\eta(Y) \qquad (60)
\end{aligned}$$

الآن، باستعمال (59) و (60) كمايلي

$$\begin{aligned}
T(X,Y,Z) &= T(Y,X,Z)\\
&= -T(Y,Z,X)+g(\nabla_Y\xi,X)\eta(Z)+g(\nabla_Y\xi,Z)\eta(X)\\
&= T(Z,X,Y)-g(\nabla_Z\xi,X)\eta(Y)-g(\nabla_Z\xi,Y)\eta(X)\\
&\qquad +g(\nabla_Y\xi,X)\eta(Z)+g(\nabla_Y\xi,Z)\eta(X)\\
&= -T(X,Y,Z)+g(\nabla_X\xi,Y)\eta(Z)+g(\nabla_X\xi,Z)\eta(Y)\\
&\qquad -g(\nabla_Z\xi,X)\eta(Y)-g(\nabla_Z\xi,Y)\eta(X)\\
&\qquad +g(\nabla_Y\xi,X)\eta(Z)+g(\nabla_Y\xi,Z)\eta(X),
\end{aligned}$$

هذا ما يعطي

$$\begin{aligned}
2T(X,Y,Z)= &\ \big(g(\nabla_X\xi,Y)+g(\nabla_Y\xi,X)\big)\eta(Z)\\
&+2\mathrm{d}\eta(X,Z)\eta(Y)+2\mathrm{d}\eta(Y,Z)\eta(X).
\end{aligned}$$

و بما أن البُنية هي ذات الركن تقريبا بمكننا استعمال العلاقة

$$\begin{aligned}
2\mathrm{d}\eta(X,Y) &= g(\nabla_X\xi,Y)-g(\nabla_Y\xi,X)\\
&= \omega(X)\eta(Y)-\eta(X)\omega(Y),
\end{aligned}$$

و بالتالي نتحصّل على

$$T(X,Y,Z)=g(\nabla_X\xi,Y)\eta(Z)+\eta(X)\big(\omega(Y)\eta(Z)-\eta(Y)\omega(Z)\big),$$

البرهان على العكس بسيط و مباشر.

2.4.4 التقوّسات على منوّعة ذات الرُّكْن

في هذه الفقرة، نقدم مبرهنة حول تقوّس ريمان R و تقوّس ريتشي S للمنوّعة ذات الركن. كما نطرح لأول مرّة فكرة فضاء الأشكال ذي الرُّكْن و نقصد بذلك منوّعة ذات الركن التي تقوّسها φ-مقطعي يكون ثابتا.

مبرهنة 2.4.24. لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوّعة ذات الركن . لدينا

$$R(X,Y)\xi = -2\mathrm{d}\eta(X,Y)\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi, \tag{61}$$

$$S(X,\xi) = -\eta(X)\mathrm{div}\psi. \tag{62}$$

البرهان 2.4.30. نعلم أنه من أجل كل Y، X و Z حقول أشعة على M

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

وبتعويض Z بـ ξ ينتج

$$R(X,Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi. \tag{63}$$

ولدينا:

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_X\nabla_Y\xi &=& \nabla_X\big(-\eta(Y)\psi\big)\\
&=& -\big((\nabla_X\eta)(Y)\psi + \eta(\nabla_X Y)\psi + \eta(Y)\nabla_X\psi\big)\\
\nabla_Y\nabla_X\xi &=& -\big((\nabla_Y\eta)(X)\psi + \eta(\nabla_Y X)\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi\big)\\
\nabla_{[X,Y]}\xi &=& \nabla_{\nabla_X Y}\xi - \nabla_{\nabla_Y X}\xi\\
&=& -\eta(\nabla_X Y)\psi + \eta(\nabla_Y X)\psi,
\end{array}$$

وبالتعويض في العلاقة (63) نجد

$$\begin{array}{rcl}
R(X,Y)\xi &=& -\big((\nabla_X\eta)Y - (\nabla_Y\eta)X\big)\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi\\
&=& -2\mathrm{d}\eta(X,Y)\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi\\
&=& -2(\omega\wedge\eta)(X,Y)\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi\\
&=& -\omega(X)\eta(Y)\psi + \omega(Y)\eta(X)\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi,
\end{array}$$

إذن،

$$R(X,Y)\xi = -2\mathrm{d}\eta(X,Y)\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi,$$

والتي تكافئ

$$R(X,Y)\xi = -\omega(X)\eta(Y)\psi + \omega(Y)\eta(X)\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi.$$

لإثبات العلاقة الثانية المتعلقة بتقوّس ريتشي لدينا

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i,X)Y,e_i),$$

مع $\{e_i\}_{1\leq i\leq 2n+1}$ هو أساس متعامد و متجانس على M. وبتعويض Y بـ ξ ينتج

$$S(X,\xi)=\sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i,X)\xi,e_i),$$

و منه

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(-2\mathrm{d}\eta(e_i,X)\psi-\eta(X)\nabla_{e_i}\psi+\eta(e_i)\nabla_X\psi,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1}\Big(-2\mathrm{d}\eta(e_i,X)g(\psi,e_i)-\eta(X)g(\nabla_{e_i}\psi,e_i) \\ &\qquad +\eta(e_i)g(\nabla_X\psi,e_i)\Big). \end{aligned} \tag{64}$$

لدينا

$$\begin{aligned} -2\mathrm{d}\eta(e_i,X)g(\psi,e_i) &= -2\mathrm{d}\eta\big(g(\psi,e_i)e_i,X\big) \\ &= -2\mathrm{d}\eta(\psi,X) \\ &= -\omega\wedge\eta(\psi,X) \\ &= -\big(\omega(\psi)\eta(X)-\omega(X)\eta(\psi)\big) \\ &= -\omega(\psi)\eta(X), \end{aligned}$$

كما نعلم أن

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(\nabla_{e_i}\psi,e_i)=\mathrm{div}\psi,$$

ولدينا أيضا

$$\begin{aligned} \eta(e_i)g(\nabla_X\psi,e_i) &= g\big(\nabla_X\psi,g(\xi,e_i)e_i\big) \\ &= g(\nabla_X\psi,\xi) \\ &= Xg(\psi,\xi)-g(\psi,\nabla_X\xi) \\ &= -g\big(\psi,-\eta(X)\psi\big) \\ &= \eta(X)\omega(\psi), \end{aligned}$$

بتعويض كل هذه النتائج في (64) نجد

$$S(X,\xi) = -\omega(\psi)\eta(X) - \eta(X)\mathrm{div}\psi + \eta(X)\omega(\psi)$$

إذن،

$$S(X,\xi) = -\eta(X)\mathrm{div}\psi.$$

قضية 2.4.18. لتكن $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الرّكن بعدها $2n+1$. لدينا العلاقات التالية:

$$\begin{aligned} R(X,Y)\varphi Z &= \varphi R(X,Y)Z + 2(\omega\wedge\eta)(X,Y)\big(\omega(\varphi Z)\xi + \eta(Z)\varphi\psi\big) \\ &+ \eta(Y)g(\nabla_X\varphi\psi,Z)\xi - \eta(X)g(\nabla_Y\varphi\psi,Z)\xi, \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} R(\varphi X,Y)Z &= -R(X,\varphi Y)Z - 2(\eta\wedge\omega\circ\varphi)(X,Y)\big(\omega(Z)\xi - \eta(Z)\psi\big) \\ &+ \eta(Y)g(\nabla_{\varphi X}\psi,Z)\xi - \eta(Y)\eta(Z)\nabla_{\varphi X}\psi, \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} R(\varphi X,\varphi Y)Z &= R(X,Y)Z - 2(\omega\wedge\eta)(X,Y)\big(\omega(Z)\xi - \eta(Z)\psi\big) \\ &- \eta(Y)g(\nabla_X\psi,Z)\xi + \eta(Y)\eta(Z)\nabla_X\psi, \end{aligned} \tag{67}$$

البرهان 2.4.31. تستخلص العلاقة (65) من تعريف تقوّس ريمان

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

و العلاقة (36). لاثبات صحّة العلاقة (66)، نستعمل العلاقة

$$g\big(R(\varphi X,Y)Z,W\big) = -g\big(R(Z,W)\varphi X,Y\big).$$

و بتوظيف العلاقة (65) نستطيع ايجاد المطلوب مباشرة. العلاقة الأخيرة تستخلص من (65) وكذلك

$$g\big(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W\big) = -g\big(\varphi R(Z,W)\varphi X,Y\big),$$

مع الأخذ بعين الاعتبار العلاقة (61).

كما كان الأمر بالنسبة للمنوّعة ماوراء-ساساكي، سنقدم هنا مفهوم المنوّعة ذات الركن و التي تقوّسها φ-مقطعي ثابت.

مبرهنة 2.4.25. [13] لتكن $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الرُّكْن. الشرط الكافي و اللازم كي تكون M منوّعة ذات تقوّس φ-مقطعي ثابت c هو

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{c}{4}\big((\varphi^2X\wedge\varphi^2Y) + (\varphi X\wedge\varphi Y) + 2g(X,\varphi Y)\varphi\big)Z \\ &+\big(2\mathrm{d}\eta(X,Y)(\xi\wedge\psi) - \eta(X)(\xi\wedge\nabla_Y\psi) + \eta(Y)(\xi\wedge\nabla_X\psi)\big)Z. \end{aligned} \tag{68}$$

البرهان 2.4.32. نفرض أنH هو التقوّس φ-مقطعي لمنوّعة الركن. من أجل كل حقل شعاعي X عمودي على ξ لدينا

$$H = K(X, \varphi X) = \frac{g\big(R(X, \varphi X)\varphi X, X\big)}{g(X, X)^2}. \tag{69}$$

و هذا يكافئ

$$-Hg(X, X)^2 = g\big(R(X, \varphi X)X, \varphi X\big). \tag{70}$$

بداية، نعتبر $\mathcal{D} := \{X \in \mathfrak{X}(M)/\eta(X) = 0\}$ مجموعة حقول الأشعة من M العمودية على ξ. و بالتالي كل حقل شعاعي X على M يكتب بكيفية وحيدة على النحو التالي

$$X = \overline{X} + \eta(X)\xi, \tag{71}$$

حيث $\overline{X} \in \mathcal{D}$. و عليه، من أجل كل $\overline{X}$، $\overline{Y}$ و $\overline{Z}$ حقول أشعة من $\mathcal{D}$ المعادلات (65)-(67) تصبح من الشكل

$$R(\overline{X}, \overline{Y})\varphi\overline{Z} = \varphi R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}, \tag{72}$$

$$R(\varphi\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} = -R(\overline{X}, \varphi\overline{Y})\overline{Z}, \tag{73}$$

$$R(\varphi\overline{X}, \varphi\overline{Y})\overline{Z} = R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z}. \tag{74}$$

من (72) نحصل على

$$g\big(R(\overline{X}, \varphi\overline{Y})\overline{X}, \varphi\overline{Y}\big) = g\big(R(\overline{X}, \varphi\overline{Y})\overline{Y}, \varphi\overline{X}\big), \tag{75}$$

و

$$g\big(R(\overline{X}, \varphi\overline{X})\overline{Y}, \varphi\overline{X}\big) = g\big(R(\overline{X}, \varphi\overline{X})\overline{X}, \varphi\overline{Y}\big). \tag{76}$$

بتعويض $\overline{X} + \overline{Y}$ في (70)، ينتج

$$\begin{aligned} &- H\big(2g(\overline{X}, \overline{Y})^2 + 2g(\overline{X}, \overline{X})g(\overline{X}, \overline{Y}) + 2g(\overline{X}, \overline{Y})g(\overline{Y}, \overline{Y}) + g(\overline{X}, \overline{X})g(\overline{Y}, \overline{Y})\big) \\ &= \frac{1}{2}g\big(R(\overline{X} + \overline{Y}, \varphi\overline{X} + \varphi\overline{Y})(\overline{X} + \overline{Y}), \varphi\overline{X} + \varphi\overline{Y}\big) \\ &\quad + \frac{1}{2}H\big(g(\overline{X}, \overline{X})^2 + g(\overline{Y}, \overline{Y})^2\big), \end{aligned}$$

بالاستفادة من (72)، (76) و متطابقة بيونتشي نتحصّل على

$$\begin{aligned}
- & H\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+2g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{X},\overline{Y})+2g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Y},\overline{Y})+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big)\\
= & g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{X}\big)\\
& +g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{Y}\big)\\
& +g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)\\
= & 2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+2g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)-g\big(R(\varphi\overline{Y},\overline{X})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)\\
& -g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\varphi\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big),
\end{aligned}$$

باستعمال (74) و (75) نجد

$$\begin{aligned}
- & H\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+2g(\overline{X},\overline{X})g(X,\overline{Y})+2g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Y},\overline{Y})+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big)\\
= & 2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+2g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)\\
& +g\big(R(\varphi\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)\\
= & 2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+2g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+3g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)\\
& +g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big).
\end{aligned} \tag{77}$$

و بتعويض $\overline{Y}$ بـ $-\overline{Y}$ في (77) و جمع المعادلة الناتجة مع (77) ينتج

$$\begin{aligned}
3g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big) & + g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)\\
& = -H\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big).
\end{aligned} \tag{78}$$

مرّة أخرى، بتعويض $\overline{Y}$ بـ $\varphi\overline{Y}$ في (78) و توظيف (74) مع (76) نتحصّل على

$$\begin{aligned}
& -H\big(2g(\overline{X},\varphi\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\varphi\overline{Y},\varphi\overline{Y})\big)\\
= & -3g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\varphi\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)\\
= & \ 3g\big(R(\varphi\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)\\
= & \ 3g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+2g(\overline{X},\overline{Y})^2.
\end{aligned}$$

و بالاستفادة من (78) ينتج

$$\begin{aligned}
& -H\big(2g(\overline{X},\varphi\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\varphi\overline{Y},\varphi\overline{Y})\big)\\
& = 3g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)-\frac{1}{3}g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)\\
& -\frac{H}{3}\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big).
\end{aligned}$$

بعد التبسيط، نتحصّل على

$$4g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)=H\big(g(\overline{X},\overline{Y})^2-3g(\overline{X},\varphi\overline{Y})^2-g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big).\qquad(79)$$

و الآن لنحسب

$$g\big(R(\overline{X}+\overline{Z},\overline{Y}+\overline{W})(\overline{X}+\overline{Z}),\overline{Y}+\overline{W}\big).$$

و ذلك باستعمال (79) و (65)-(67)، ينتج

$$\begin{aligned}&4g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\big)+4g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Y},\overline{Z}\big)\\=\;&H\big(g(\overline{X},\overline{Z})g(\overline{Y},\overline{W})+g(\overline{X},\overline{W})g(\overline{Y},\overline{Z})-3g(\overline{X},\varphi\overline{Z})g(\overline{Y},\varphi\overline{W})\\&-3g(\overline{X},\varphi\overline{W})g(\overline{Y},\varphi\overline{Z})-2g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Z},\overline{W})\big),\end{aligned}\qquad(80)$$

في المعادلة (80)، نبدّل بين $\overline{Y}$ و $\overline{Z}$ ثمّ نطرح المعادلة الناتجة من (80)، نجد

$$\begin{aligned}&g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\big)-g\big(R(\overline{X},\overline{Z})\overline{Y},\overline{W}\big)+2g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big)\\=\;&\frac{3H}{4}\big(g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Z},\overline{W})-g(\overline{X},\overline{Z})g(\overline{Y},\overline{W})+g(\overline{X},\varphi\overline{Z})g(\overline{Y},\varphi\overline{W})\\&-g(\overline{X},\varphi\overline{Y})g(\overline{Z},\varphi\overline{W})-2g(\overline{X},\varphi\overline{W})g(\overline{Z},\varphi\overline{Y})\big),\end{aligned}$$

بتوظيف متطابقة بيونتشي ينتج

$$g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\big)-g\big(R(\overline{X},\overline{Z})\overline{Y},\overline{W}\big)+2g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big)=3g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big),$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big)\;=\;&\frac{H}{4}\big(g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Z},\overline{W})-g(\overline{X},\overline{Z})g(\overline{Y},\overline{W})\\&+g(\overline{X},\varphi\overline{Z})g(\overline{Y},\varphi\overline{W})-g(\overline{X},\varphi\overline{Y})g(\overline{Z},\varphi\overline{W})\\&-2g(\overline{X},\varphi\overline{W})g(\overline{Z},\varphi\overline{Y})\big),\end{aligned}\qquad(81)$$

و أخيرا، نتحصّل على

$$\begin{aligned}R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}\;=\;&\frac{H}{4}\big(g(\overline{Y},\overline{Z})\overline{X}-g(\overline{X},\overline{Z})\overline{Y}+g(\varphi\overline{Y},\overline{Z})\varphi\overline{X}-g(\varphi\overline{X},\overline{Z})\varphi\overline{Y}\\&+2g(\overline{X},\varphi\overline{Y})\varphi\overline{Z}\big),\end{aligned}\qquad(82)$$

طبعا $\overline{X}$، $\overline{Y}$ و $\overline{Z}$ هي حقول أشعة عمودية على ξ. و بالتالي من أجل كل X، Y و Z حقول أشعة على

M و باستعمال (71) و (65)-(67)، نجد العبارة:

$$\begin{aligned} R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z} &= R(X,Y)Z - \big(\omega(X)\eta(Y)-\omega(Y)\eta(Y)\big)\eta(Z)\psi \\ &\quad +\big(\omega(X)\eta(Y)-\omega(Y)\eta(Y)\big)\omega(Z)\xi \\ &\quad -\eta(Y)\big(\eta(Z)\nabla_X\psi - g(\nabla_X\psi,Z)\xi\big) \\ &\quad +\eta(X)\big(\eta(Z)\nabla_Y\psi - g(\nabla_Y\psi,Z)\xi\big) \\ &= R(X,Y)Z - 2\mathrm{d}\eta(X,Y)(\xi\wedge\psi)Z \\ &\quad +\eta(X)(\xi\wedge\nabla_Y\psi)Z - \eta(Y)(\xi\wedge\nabla_X\psi)Z, \end{aligned}$$

أخيرا، بالتعويض في (82) نتحصّل على المطلوب و بهذا ينتهي البرهان.

قضية 2.4.19. من أجل كل منوّعة ذات الرُّكْن تقوّسها φ-المقطعي ثابت c يعطى مؤتر ريتشي S و التقوّس السلمي r كمايلي

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= -\frac{c}{2}(n+1)g(X,Y) + \big(\mathrm{div}\psi + \omega(\psi) + \frac{c}{2}(n+1)\big)\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad + \omega(X)\omega(Y) + g(\nabla_X\psi,Y), \end{aligned} \tag{83}$$

$$r = -nc(n+1) + 2\big(\mathrm{div}\psi + \omega(\psi)\big). \tag{84}$$

البرهان 2.4.33. البرهان مباشر يكفة استعمال الدستورين

$$S(X,Y) = \textstyle\sum_{i=1}^{2n+1} g\big(R(e_i,X)Y,e_i\big) \qquad \text{و} \qquad r = \sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i,e_i).$$

2.4.5 المنوّعة ذات الرُّكن ثلاثية الأبعاد

سنهتم هنا بالمنوّعات ذات الركن ثلاثية الأبعاد. إضافة الى ما تمّ معرفته من قبل بشأن منوّعة الركن، سنضيف هنا بعض الخواص و المعلومات المتعلقة بالبُعد الثلاثي مع أمثلة توضيحية ملموسة.
أول ما يتبادر الى الذهن في حالة بنية ذات الركن ثلاثية الأبعاد، وجود ثلاثة حقول شعاعية شاملة معلومة هي ξ، ψ و $\varphi\psi$ هذا ما يجعل المنوّعة ذات ركن واحد فقط (موجود دوما عند كل نقطة من المنوّعة). و عليه، سنسمّي البنية ذات الركن ثلاثية الأبعاد بـ"**بُنْيَةُ الرُكْنِ**" هذا من جهة، ومن جهة أخرى هي قابلة للتوازي (Parallélisable) وهذا يكافئ أنَّ الليف المماسي لها TM اعتيادي أي $TM = M \times \mathbb{R}^3$ بالإضافة الى ذلك، إذا كان ψ حقل وحدة فإن هذه الحقول الثلاثة تشكل أساسا متعامدا و متجانسا للمنوّعة عند كل نقطة منها. لكن و باعتبار $\psi = -\nabla_\xi \xi$ فليس بالضرورة أن يكون حقل شعاعي وحدة، هذا ما سوف نتناوله بالدراسة هنا. سنبدأ مع هذا التعريف الذي يحدّد نوع المنوّعة المطلوبة للدراسة

تعريف 2.4.24. مُنَوّعَةُ الرُكْنِ هي منوّعةٌ ذاتَ ركنٍ ثلاثية الأبعاد $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ بحيث يكون

$$V = \frac{\psi}{|\psi|} = \mathrm{e}^{-\rho}\psi \quad \text{حيث} \quad |\psi| = \sqrt{g(\psi,\psi)} = \mathrm{e}^{\rho} \quad \text{و} \quad \rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

و عندئذ نقول عن φ-أساس $\{V, \varphi V, \xi\}$ أساسا رئيسيا.

انطلاقا من هذا التعريف، لدينا القضية التالية

قضية 2.4.20. من أجل كل مُنَوّعَة رُكْنٍ، لدينا

(أ) $N_\varphi = 0$

(ب) $\nabla_{\varphi X}\xi = \varphi\nabla_X \xi + \eta(X)\varphi\psi$

(ج) $\nabla_X \xi = -\eta(X)\psi.$

البرهان 2.4.34. من (36) و المبرهنة (2.4.23) نلاحظ أنه في البُعد الثلاثي الشرط (أ) يكافئ الشرط (ب). و كذلك واضح أن (ج) يستلزم (ب). عكسيا، نعتبر $\{\xi, e, \varphi e\}$ φ-أساسا، من (ب) نحصل على

$$\nabla_\xi \xi = -\psi, \qquad \nabla_{\varphi e}\xi = \varphi\nabla_e \xi.$$

بالإظافة الى ذلك، لدينا

$$\begin{aligned}
\nabla_e \xi &= g(\nabla_e \xi, e)e + g(\nabla_e \xi, \varphi e)\varphi e \\
&= g(\nabla_e \xi, e)e - g(\varphi\nabla_e \xi, e)\varphi e \\
&= (\mathrm{div}\xi)e - tr_g(\varphi\nabla\xi)\varphi e \\
&= 0,
\end{aligned}$$

بالرجوع الى العلاقة $\mathrm{div}\xi = tr_g(\varphi\nabla\xi) = 0$ (أنظر (2.1.10))، ينتج $\nabla_{\varphi e}\xi = 0$.

مبرهنة 2.4.26. لتكن $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثي الأبعاد. نقول عن M أنها مُنَوّعَة رُكْنٍ إذا و فقط إذا تحقق مايلي

$$\nabla_X\xi = -\eta(X)\psi, \tag{85}$$

حيث $\psi = -\nabla_\xi\xi$.

البرهان 2.4.35. نفرض أن $\nabla_X\xi = -\eta(X)\psi$ من أجل كل حقل شعاعي X على M. من (2.1.10)، لدينا

$$(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big),$$

مع $\omega(X) = g(\psi, X)$.

عكسيا، نفرض أن $(M^3, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي مُنَوّعَة رُكْنٍ، هذا يكافئ

$$(\nabla_X\varphi)Y \;=\; \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big).$$

بوضع $Y = \xi$ ينتج

$$-\varphi\nabla_X\xi = \eta(X)\varphi\psi,$$

و منه

$$\begin{aligned}\nabla_X\xi &= \eta(X)\varphi^2\psi\\ &= -\eta(X)\psi.\end{aligned}$$

كما رأينا سابقا، هناك علاقة جميلة تميّز بها هذه المنوّعة. نقدمها كمايلي

مبرهنة 2.4.27. لتكن $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثي الأبعاد. نقول عن M أنها مُنَوّعَة رُكْنٍ إذا و فقط إذا تحقق مايلي

$$\nabla_{\varphi X}\xi = 0. \tag{86}$$

البرهان 2.4.36. يكفي أن نبرهن أن العلاقتين $\nabla_{\varphi X}\xi = 0$ و $\nabla_X\xi = -\eta(X)\psi$ هما متكافئتين مع $\psi = -\nabla_\xi\xi$.

نفرض أن $\nabla_X\xi = -\eta(X)\psi$، ينتج مباشرة $\nabla_{\varphi X}\xi = 0$.

عكسيا، لنفرض أن $\nabla_{\varphi X}\xi = 0$. نعوّض X بـ φX ثم نستعمل العلاقة $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$، نتحصّل على $\nabla_X\xi = \eta(X)\nabla_\xi\xi$. و هو المطلوب.

مبرهنة 2.4.28. لتكن $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثي الأبعاد. نقول عن M أنها مُنَوّعَة رُكْنٍ إذا و فقط إذا تحقق مايلي

$$\nabla_{\varphi X}\xi = 0. \tag{87}$$

البرهان 2.4.37. لإثبات صحّة هذه المبرهنة، يكفي إثبات صحّة التكافؤ التالي

$$\nabla_{\varphi X}\xi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_X \xi = -\eta(X)\psi,$$

مع $\psi = -\nabla_\xi \xi$.
نفرض أن $\nabla_X\xi = -\eta(X)\psi$، بتعويض X بـ φX ينتج مباشرة $\nabla_{\varphi X}\xi = 0$.
عكسيا، لنفرض أن $\nabla_{\varphi X}\xi = 0$. بتعويض X بـ φX مع استعمال العلاقة $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$ نتحصّل على

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\varphi^2 X}\xi \\ &= -\nabla_X \xi + \eta(X)\nabla_\xi \xi, \end{aligned}$$

بوضع $\psi = -\nabla_\xi \xi$ ينتج $\nabla_X\xi = -\eta(X)\psi$ و هو المطلوب.

المبرهنة الموالية تبيّن أن منوّعة الرُكن متحكم فيها كليا و ذلك من خلال معرفة كل مركبات وصلة لوفي-سيفيتا. من أجل ذلك، نضع $V = \mathrm{e}^{-\rho}\psi$ حيث $\mathrm{e}^\rho = |\psi|$ فينتج مباشر أساس متعامد و متجانس $\xi, V, \varphi V$. باستعمال هذا الأساس نحصل على

مبرهنة 2.4.29. من أجل كل منوّعة رُكنٍ ثلاثية الأبعاد، لدينا:

$$\begin{array}{lll}
(1) & \nabla_X\xi = -\mathrm{e}^\rho \eta(X)V, & \\
(2) & \nabla_\xi V = \mathrm{e}^\rho \xi + \sigma\varphi V, & \sigma = g(\nabla_\xi V, \varphi V) \\
(3) & \nabla_V V = \varphi V(\rho)\varphi V, & \\
(4) & \nabla_{\varphi V} V = \big(\mathrm{div} V - \mathrm{e}^\rho\big)\varphi V, & \\
(5) & \nabla_\xi \varphi V = -\sigma V, & \\
(6) & \nabla_V \varphi V = -\varphi V(\rho) V, & \\
(7) & \nabla_{\varphi V}\varphi V = \big(\mathrm{e}^\rho - \mathrm{div} V\big) V. &
\end{array}$$

البرهان 2.4.38. (1) نعلم أن

$$(\nabla_X \varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big). \tag{88}$$

بتعويض $Y = \xi$ نجد :

$$\begin{aligned}(\nabla_X \varphi)\xi &= \eta(X)\big(\omega(\varphi\xi)\xi + \eta(\xi)\varphi\psi\big)\\ &= \eta(X)\varphi\psi\\ &\Leftrightarrow -\varphi\nabla_X\xi = \eta(X)\varphi\psi\\ &\Leftrightarrow \varphi^2\nabla_X\xi = \eta(X)\varphi^2\psi\\ &\Leftrightarrow \nabla_X\xi = -\eta(X)\psi.\\ &\Leftrightarrow \nabla_X\xi = -\mathrm{e}^{\rho}\eta(X)V\end{aligned}$$

(2) من أجل كل حقل شعاعي Y على M لدينا

$$\begin{aligned}\nabla_\xi V &= g(\nabla_\xi V, \xi)\xi + g(\nabla_\xi V, V)V + g(\nabla_\xi V, \varphi V)\varphi V\\ &= -g(V, \nabla_\xi\xi)\xi + g(\nabla_\xi V, \varphi V)\varphi V\\ &= \mathrm{e}^{\rho}\xi + \sigma\varphi V,\end{aligned}$$

حيث $\sigma = g(\nabla_\xi V, \varphi V)$.

(3): نعلم أن $\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta$ و هذا يستلزم $\mathrm{d}\omega \wedge \eta = 0$. إذن،

$$\begin{aligned}0 &= (\mathrm{d}\omega \wedge \eta)(X, \psi, \xi)\\ &= \mathrm{d}\omega(X, \psi) + \eta(X)\mathrm{d}\omega(\psi, \xi)\\ &= g(\nabla_X\psi, \psi) - g(\nabla_\psi\psi, X) + \eta(X)\big(g(\nabla_\psi\psi, \xi) - g(\nabla_\xi\psi, \psi)\big)\\ &= \mathrm{e}^{2\rho}X(\rho) - g(\nabla_\psi\psi, X) + \eta(X)\big(g(\psi, \nabla_\psi\xi) - \mathrm{e}^{2\rho}\xi(\rho)\big).\end{aligned}$$

و بالتالي

$$g(\nabla_\psi\psi, X) = \mathrm{e}^{2\rho}X(\rho) - \mathrm{e}^{2\rho}\xi(\rho)\eta(X),$$

أي أن $\nabla_\psi\psi = \mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{grad}\rho - \mathrm{e}^{2\rho}\xi(\rho)\xi$

فينتج $\nabla_V V = \mathrm{grad}\rho - \xi(\rho)\xi - V(\rho)V,$

بما أن

$$\mathrm{grad}\rho = \xi(\rho)\xi + V(\rho)V + \varphi V(\rho)\varphi V,$$

فإن

$$\nabla_V V = \varphi V(\rho)\varphi V.$$

(4): لدينا

$$\begin{aligned}\nabla_{\varphi V} V &= g(\nabla_{\varphi V} V, \xi)\xi + g(\nabla_{\varphi V} V, V)V + g(\nabla_{\varphi V} V, \varphi V)\varphi V\\ &= g(\nabla_{\varphi V} V, \varphi V)\varphi V.\end{aligned}$$

مع العلم أن

$$\begin{aligned}\mathrm{div}V &= g(\nabla_\xi V,\xi)+g(\nabla_V V,V)+g(\nabla_{\varphi V}V,\varphi V)\\ &= \mathrm{e}^\rho + g(\nabla_{\varphi V}V,\varphi V),\end{aligned}$$

و منه $g(\nabla_{\varphi V}V,\varphi V)=\mathrm{div}V-\mathrm{e}^\rho$
و بالتالي ينتج

$$\nabla_{\varphi V}V=\big(\mathrm{div}V-\mathrm{e}^\rho\big)\varphi V.$$

من أجل الثلاثة المتبقية، يكفي استعمال العلاقتين
$\nabla_X\varphi Y=(\nabla_X\varphi)Y+\varphi\nabla_X Y$ و $\nabla_X\xi=-\mathrm{e}^\rho\eta(X)V$.

مثال 2.4.14. نرمز للإحداثيات الديكارتية للفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3$ بالرمز (x,y,z) و نعرّف موتّر ريماني g كمايلي

$$g=\mathrm{e}^{2f}\begin{pmatrix}\rho^2+\tau^2 & 0 & -\tau\\ 0 & \rho^2 & 0\\ -\tau & 0 & 1\end{pmatrix},$$

حيث $f=f(y)$، $\tau=\tau(x)$ و $\rho=\rho(x,y)$ هي دوال قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ مع $f'=\frac{\partial f}{\partial y}$. كما نعرّف بنية مترية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η) على $\mathbb{R}^3$ بـ

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix},\quad \xi=\mathrm{e}^{-f}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \eta=\mathrm{e}^f(-\tau,0,1).$$

الشكل التفاضلي الأحادي η و الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي ϕ يعطيان كمايلي

$$\eta=\mathrm{e}^f(dz-\tau dx) \qquad \text{و} \qquad \phi=-2\rho^2\mathrm{e}^{2f}dx\wedge dy$$

و منه

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\eta &= f'\mathrm{e}^f\Big(\tau dx\wedge dy+dy\wedge dz\Big),\\ \mathrm{d}\phi &= 0.\end{aligned}$$

بحسابات طويلة لكنها بسيطة، المركبات غير المعدومة لـ $N^{(1)\,i}_{kj}$ تعطى بـ

$$N^{(1)\,3}_{12}=\tau f',\quad N^{(1)\,3}_{23}=f'.$$

لكن، $\forall i,j,k\in\{1,2,3\}$

$$(N_\varphi)^i_{kj}=0,$$

و هذا ما يستلزم أن البنية (φ,ξ,η,g) قابلة للتكامل.
و حتى تكون هذه البنية غير ناظمية و هذا ما نريد كي نواصل إنشاء بنية الركن، يكفي أخذ $f'\neq 0$ لضمان أن البنية هي قابلة للمكاملة لكنها غير ناظمية.
من أجل إيجاد الشكل التفاضلي الأحادي المغلق ω، نضع $\omega=adx+bdy+cdz$ حيث a ، b و c هي دوال قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$، و باستعمال العلاقة $\mathrm{d}\eta=\omega\wedge\eta$ مع $\omega(\xi)=0$، نحصل على:

$$\omega=f'\,dy, \tag{89}$$

لاحظ أن $\mathrm{d}\omega=0$ و هذه حالة خاصة كما شرحنا سابقا.
مع العلم أن ω هو الشكل الثنوي المرافق للحقل الشعاعي ψ أي $\omega(X)=g(X,\psi)$، مباشرة ينتج

$$\psi=\frac{f'}{\rho^2}\mathrm{e}^{-2f}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{90}$$

و بهذا نكون قد بيّنّا أن $(\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ هي بنية رُكن على $\mathbb{R}^3$.
الآن لدينا الحقول الشعاعية التالية

$$\Big\{V=\frac{\mathrm{e}^{-f}}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial z}\Big),\quad \varphi V=\frac{\mathrm{e}^{-f}}{\rho}\frac{\partial}{\partial y},\quad e_3=\xi=\mathrm{e}^{-f}\frac{\partial}{\partial z}\Big\}$$

تشكل أساسا متعامدا ومتجانسا عند كل نقطة من هذه المنوّعة. لإثبات صحّة العلاقة (36)، نعطي المركبات غير المعدومة لوصلة لوفي-سيفيتا المرفقة بالمترك g على النحو التالي

$$\nabla_V V=-\frac{(f'\rho+\rho_2)}{\rho^2\mathrm{e}^f}\varphi V,\quad \nabla_V\varphi V=\frac{(f'\rho+\rho_2)}{\rho^2\mathrm{e}^f}V,$$

$$\nabla_{\varphi V}V=\frac{\rho_1}{\rho^2\mathrm{e}^f}\varphi V,\quad \nabla_{\varphi V}\varphi V=-\frac{\rho_1}{\rho^2\mathrm{e}^f}V,$$

$$\nabla_\xi V=\frac{f'}{\rho\ \mathrm{e}^f}\xi,\quad \nabla_\xi\varphi V=-\frac{f'}{\rho\ \mathrm{e}^f}\varphi V.$$

و يمكننا التأكد بسهولة من أجل كل $i,j\in\{1,2,3\}$ أن:

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i}\varphi)e_j &= \nabla_{e_i}\varphi e_j-\varphi\nabla_{e_i}e_j\\ &= \eta(e_i)\big(\omega(\varphi e_j)\xi+\eta(e_j)\varphi\psi\big).\end{aligned}$$

مُنَوَّعَةُ الرُّكْنِ ثلاثية الأبعاد تتمّع بعلاقات هامة تربط بين الأشكال التفاضلية الأحادية المشكلة للأساس الثنوي. نذكر منها:

قضية 2.4.21. لتكن $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ مُنَوَّعَةُ رُكْنٍ ثلاثية الأبعاد أساسها $\{\xi, V, \varphi V\}$ حيث $V = \mathrm{e}^{-\rho}\psi$ و $\{\eta, \theta^1 = V^\flat = \mathrm{e}^{-\rho}\omega, \theta^2 = -\mathrm{e}^{-\rho}\omega \circ \varphi\}$ الأساس الثنوي الموافق للمترك g. لدينا

$$\begin{array}{ll} (1) & \phi = 2\theta^2 \wedge \theta^1. \\ (2) & \mathrm{d}\theta^1 = \sigma\eta \wedge \theta^2 + \varphi V(\rho)\theta^1 \wedge \theta^2. \\ (3) & \mathrm{d}\theta^2 = -\sigma\eta \wedge \theta^1 - (\mathrm{e}^\rho - \mathrm{div}V)\theta^1 \wedge \theta^2. \end{array} \tag{91}$$

البرهان 2.4.39. (1): نعلم أنّه من أجل كل حقل شعاعي X على منوّعة ريمانية (M^n, g)، لدينا

$$X = \sum_{i=1}^{n} g(X, e_i)e_i,$$

مع $\{e_i\}_{1\leq in}$ أساس متعامد و متجانس عند كل نقطة من M. و عليه، من أجل كل حقل شعاعي Y على M لدينا

$$\begin{array}{rcl} \varphi Y &=& \sum_{i=1}^{3} g(\varphi Y, e_i)e_i \\ &=& g(\varphi Y, \xi)\xi + g(\varphi Y, V)V + g(\varphi Y, \varphi V)\varphi V \\ &=& -\theta^2(Y)V + \theta^1(Y)\varphi V. \end{array}$$

و بالتالي

$$\begin{array}{rcl} \phi(X, Y) &=& g(X, \varphi Y) \\ &=& -\theta^2(Y)\theta^1(X) + \theta^1(Y)\theta^2(X) \\ &=& 2(\theta^2 \wedge \theta^1)(X, Y). \end{array}$$

و هو المطلوب.
(2): باعتبار $\{\eta, \theta^1, \theta^2\}$ هي أساس للأشكال التفاضلية الأحادية فإن $\{\eta \wedge \theta^1, \eta \wedge \theta^2, \theta^1 \wedge \theta^2\}$ هو أساس للأشكال التفاضلية الثنائية على M.
و عليه يمكن كتابة

$$\mathrm{d}\theta^1 = a\eta \wedge \theta^1 + b\eta \wedge \theta^2 + c\theta^1 \wedge \theta^2,$$

حيث a, b, c هي دوال ملساء على M. باستعمال المبرهنة 2.4.29، نحصّل على

$$\begin{aligned} a &= 2\mathrm{d}\theta^1(\xi, V) \\ &= g(\nabla_\xi V, V) - g(\nabla_V V, \xi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

و

$$b = 2\mathrm{d}\theta^1(\xi, \varphi V) = \sigma, \qquad c = 2\mathrm{d}\theta^1(V, \varphi V) = \varphi V(\rho).$$

و منه

$$\mathrm{d}\theta^1 = \sigma\eta \wedge \theta^2 + \varphi V(\rho)\theta^1 \wedge \theta^2. \tag{92}$$

(3 بنفس التقنيات المستعملة نجد العلاقة الثالثة التي نتركها للطالب.

2.4.6 التقوّسات على منوّعةِ الرُّكْن ثلاثية الأبعاد

في هذه الفقرة نقدّم تقوّس ريمان و تقوّس ريتشي لمنوّعةُ الرُّكْن (ثلاثية الأبعاد). بداية نذكّر بالنتائج المحصّل عليها في المبرهنة (2.4.24) و الخاصّة بتقوّسات منوّعة ذات الرّكن بعُدها $2n+1$.

$$R(X, Y)\xi = -2\mathrm{d}\eta(X, Y)\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi, \tag{93}$$

$$R(X, \xi)Y = \omega(X)\big(\omega(Y)\xi - \eta(Y)\psi\big) + g(\nabla_X\psi, Y)\xi - \eta(Y)\nabla_X, \tag{94}$$

$$S(X, \xi) = -\eta(X)\mathrm{div}\psi. \tag{95}$$

لاحظ أنه باستعمال (93)، ينتج

$$R(\xi, \psi)\xi = -\omega(\psi)\psi - \nabla_\psi\psi.$$

و منه

$$g(R(\xi, \psi)\psi, \xi) = -\omega(\psi)^2 - g(\nabla_\psi\psi, \psi).$$

و بالتالي، القضية التالية

قضية 2.4.22. من أجل كل منوّعة رُكن، التقوّس المقطعي بالنسبة لأي مستوٍ مولّد بـ $\{\xi, \psi\}$ يساوي $-\omega(\psi)^2 - g(\nabla_\psi\psi, \psi)$ و إذا كان $|\psi| = 1$ التقوّس المقطعي يساوي (-1).

سبق و أن بينّا أنه في البُعد الثالث، تقوّس ريمان يعطى بالعلاقة التالية [18]

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY + S(Y,Z)X - S(X,Z)Y \\ &- \frac{r}{2}\big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\big). \end{aligned} \tag{96}$$

حيث r يرمز للتقوّس السلّمي. المبرهنة التالية تشمل عبارة مؤثّر ريتشي بالنسبة لمنوّعة الركن:

مبرهنة 2.4.30. من أجل كل منوّعة الرّكن، يعطى مؤثّر ريتشي بالعبارة التالية

$$QX = (\mathrm{div}\psi)X + (\mathrm{e}^{\rho} - 2\ \mathrm{div}\psi)\eta(X)\xi - \omega(X)\psi - \nabla_X\psi - \frac{r}{2}\varphi^2 X, \tag{97}$$

حيث Q هو مؤثّر ريتشي يعرّف بـ

$$S(X,Y) = g(QX,Y). \tag{98}$$

البرهان 2.4.40. لتكن $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ مُنَوّعَةُ رُكْنٍ، من (95) و (96) لدينا

$$R(X,\xi)\xi = QX + (\mathrm{div}\psi)\xi - 2\ (\mathrm{div}\psi)\eta(X)\xi + \frac{r}{2}\varphi^2 X, \tag{99}$$

و من العلاقة (93) نجد

$$R(X,\xi)\xi = -\omega(X)\psi - \nabla_X\psi + \mathrm{e}^{2\rho}\eta(X)\xi. \tag{100}$$

بالمقارنة بين (99) و (100) نحصّل على المطلوب.

نتيجة 2.4.8. على منوّعة الرُّكْن يعطى تقوّس ريتشي و تقوّس ريمان كمايلي

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \big(\frac{r}{2} + \mathrm{div}\psi\big)g(X,Y) + \big(\mathrm{e}^{2\rho} - 2\ \mathrm{div}\psi - \frac{r}{2}\big)\eta(X)\eta(Y) \\ &- \omega(X)\omega(Y) - g(\nabla_X\psi, Y), \end{aligned} \tag{101}$$

و

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \big(\mathrm{e}^{2\rho} - 2\mathrm{div}\psi - \frac{r}{2}\big)\eta(Z)\big(\eta(Y)X - \eta(X)Y\big) \\ &- g(Y,Z)\Big(\omega(X)\psi + \nabla_X\psi - \big(2\ \mathrm{div}\psi + \frac{r}{2}\big)X\Big) \\ &+ g(X,Z)\Big(\omega(Y)\psi + \nabla_Y\psi - \big(2\ \mathrm{div}\psi + \frac{r}{2}\big)Y\Big) \\ &+ \big(\mathrm{e}^{2\rho} - 2\ \mathrm{div}\psi - \frac{r}{2}\big)\Big(g(Y,Z)\eta(X) - g(X,Z)\eta(Y)\Big)\xi \\ &- \omega(Z)\big(\omega(Y)X - \omega(X)Y\big) + g(\nabla_X\psi, Z)Y - g(\nabla_Y\psi, Z)X. \end{aligned} \tag{102}$$

البرهان 2.4.41. العلاقة (101) تنتج من (97) و (98). باستعمال (97) و (101) في (96) نتحصّل على (102).

2.4.7 منوّعة رُكْنِ الوِحْدَة

و ختاما لهذه الدراسة المتعلّقة بالمنوّعة ذات الركن، لابأس أن نختمها بالحالة الخاصة المتمثلة في منوّعة ركن الوحدة.

تعريف 2.4.25. مُنَوّعَةُ رُكْنِ الوِحْدَة هي منوّعة ذات ركن ثلاثية الأبعاد $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ بحيث يكون ψ حقلا شعاعيا واحديا أي $\rho = 0 \Leftrightarrow 1 = \omega(\psi) = |\psi|$.

انطلاقا من هذا التعريف، نستنتج أن المجموعة $\{\xi, \psi, \varphi\psi\}$ تشكل أساسا متعامدا متجانسا شاملا و بالتالي لدينا النتائج التالية

نتيجة 2.4.9. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ مُنَوّعَة رُكْنِ وِحدة ثلاثية الأبعاد. من المبرهنة 2.4.29 ينتج

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \nabla_X\xi = -\eta(X)\psi, \\
(2) & \nabla_\xi V = \xi + \sigma\varphi\psi, \qquad\qquad \sigma = g(\nabla_\xi\psi, \varphi\psi) \\
(3) & \nabla_\psi\psi = 0, \\
(4) & \nabla_{\varphi\psi}\psi = \big(\mathrm{div}V - 1\big)\varphi\psi, \\
(5) & \nabla_\xi\varphi\psi = -\sigma\psi, \\
(6) & \nabla_V\varphi\psi = 0, \\
(7) & \nabla_{\varphi\psi}\varphi\psi = \big(1 - \mathrm{div}\psi\big)\psi.
\end{array}
$$

نتيجة 2.4.10. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ مُنَوّعَة رُكْنِ وِحدة ثلاثية الأبعاد. من القضية 2.4.21 ينتج

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \phi = 2\omega\circ\varphi\wedge\omega. \\
(2) & \mathrm{d}\omega = \sigma\eta\wedge\omega\circ\varphi. \\
(3) & \mathrm{d}\omega\circ\varphi = -\sigma\eta\wedge\omega - (1 - \mathrm{div}\psi)\omega^1\wedge\omega\circ\varphi.
\end{array}
\tag{103}
$$

مركّبات كل من تقوّس ريمان و تقوّس ريتشي و كذلك التقوّس السلّمي لمُنَوّعَةُ رُكْنِ الوِحْدَة تعطى كمايلي

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
R(\xi,\psi)\xi & = & \psi \\
R(\xi,\varphi\psi)\xi & = & (-1 + \mathrm{div}\psi)\varphi\psi \\
R(\psi,\varphi\psi)\xi & = & 0 \\
R(\psi,\varphi\psi)\psi & = & \big(\psi(\mathrm{div}\psi) + (1 - \mathrm{div}\psi)^2\big)\varphi\psi.
\end{array}
\right.
$$

$$\begin{cases} S(\xi,\xi) & = -\mathrm{div}\psi \\ S(\psi,\psi) & = -1+\mathrm{div}\psi-\psi(\mathrm{div}\psi)-(-1+\mathrm{div}\psi)^2 \\ S(\varphi\psi,\varphi\psi) & = 1-\mathrm{div}\psi-\psi(\mathrm{div}\psi)-(-1+\mathrm{div}\psi)^2 \\ S(\xi,\psi)\psi & = S(\xi,\varphi\psi)=S(\psi,\varphi\psi)=0. \end{cases}$$

$$r=-2\big(\mathrm{div}\psi+\psi(\mathrm{div}\psi)+(-1+\mathrm{div}\psi)^2\big).$$

2.4.8 منوّعة الرُّكْن المعمّمة

في ختام هذا الفصل، نقدم دراسة حديثة هي الآن تحت النشر للمنوّعة ذات الركن المعمّمة. لنبدأ مع هذا التعريف

تعريف 2.4.26. لتكن M منوّعة تفاضلية ذات البُعد $(2n+1)$. نقول عن البُنية المترية التلامسية (φ,ξ,η,g) المعرّفة على M أنها بُنية ركن معمّمة إذا تحققت الشروط التالية:

$$d\eta=\eta\wedge\omega,\qquad d\phi=2\beta\eta\wedge\phi,\qquad N_\varphi=0, \tag{104}$$

حيث $\nabla_\xi\eta=\left(\nabla_\xi\xi\right)^\flat=\omega$، $\beta=\frac{1}{2n}\mathrm{div}\xi$ و δ مؤثر التفاضل التام للمترك g.

تجدر الإشارة هنا الى أنّه بانعدام الحقل الشعاعي $\nabla_\xi\xi$ و الذي شكله الثنوي المرفق هو $\nabla_\xi\eta$ يعني أن البُنية قد تكون ناظمية أي من الصنف C_5. في المقابل بُنية من الصنف $C_5\oplus C_{12}$ لا تكون أبدا ناظمية مادام $\nabla_\xi\xi\neq 0$ و هذا ما نفرضه محقق دوما هنا.

من جهة أخرى، و بالرجوع لتعريف بُنية الركن و تحديدا الصنف C_{12} يتضح أنّ فعلا التعريف أعلاه يشير الى بُنية معمّمة لبُنية الركن و هذا ما سوف يتّضح فيما هو آت. لنبدأ مع هذه المبرهنة

مبرهنة 2.4.31. من أجل كل منوّعة ركن معمّمة (M,φ,ξ,η,g) لدينا

$$(\nabla_X\varphi)Y=\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)-\eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\psi\big), \tag{105}$$

حيث $\psi=\nabla_\xi\xi$.

البرهان 2.4.42. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريبا. باستعمال نتيجة علاقة بلير)أنظر [15] صفحة 82) ينتج

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3d\phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\phi(X,Y,Z) \\ &+ g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)+N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) \\ &+ 2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y), \end{aligned} \tag{106}$$

و كذلك من ([15], صفحة 81) لدينا

$$\begin{aligned} N^{(2)}(Y,Z) &= \big(\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta\big)(Z) - \big(\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta\big)(Y) \\ &= \varphi Y\big(\eta(Z)\big) - \eta\big([\varphi Y, Z]\big) - \varphi Z\big(\eta(Y)\big) + \eta\big([\varphi Z, Y]\big) \\ &= 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y, Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z, Y), \end{aligned} \tag{107}$$

حيث $\mathcal{L}$ يرمز لمشتقة لِي.
بما أنّ البُنية قابلة للمكاملة $N_\varphi = 0$ نستنتج

$$N^{(1)} = 2\mathrm{d}\eta \otimes \xi. \tag{108}$$

وباستعمال شروط التعريف (104)، نحصّل على

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(X,Y) &= 2(\eta \wedge \omega)(X,Y) \\ &= \eta(X)\omega(Y) - \eta(Y)\omega(X), \end{aligned} \tag{109}$$

و أيضا

$$\begin{aligned} 3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) &= 6\beta\eta \wedge \phi(X,Y,Z) \\ &= 2\beta\eta(X)g(Y,\varphi Z) + 2\beta\eta(Y)g(Z,\varphi X) \\ &\quad +2\beta\eta(Z)g(X,\varphi Y), \end{aligned} \tag{110}$$

بتعويض العلاقات من (107) إلى (110) في (106) نحصّل على المطلوب.
عكسيا، نفرض أنّ

$$\begin{aligned} (\nabla_X\varphi)Y &= \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big) \\ &\quad -\eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big), \end{aligned}$$

بوضع $Y = \xi$ ينتج

$$-\varphi\nabla_X\xi = -\beta\varphi X - \eta(X)\varphi\psi,$$

و عليه،

$$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi. \tag{111}$$

و بالتالي،

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\big(g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_Y\xi, X)\big) \\ &= (\eta \wedge \omega)(X,Y). \end{aligned}$$

علما أنّ

$$3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) \;=\; g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big)+g\big(Z,(\nabla_Y\varphi)X\big)+g\big(X,(\nabla_Z\varphi)Y\big),$$

فبتوظيف الفرضية ينتج

$$\mathrm{d}\phi = 2\beta\eta\wedge\phi.$$

لتبيان أنّ (φ,ξ,η,g) هي قابلة للمكاملة، نعلم أنّ

$$N_\varphi(X,Y)=(\varphi\nabla_Y\varphi-\nabla_{\varphi Y}\varphi)X-(\varphi\nabla_X\varphi-\nabla_{\varphi X}\varphi)Y,$$

باستعمال الفرضية نجد

$$N_\varphi(X,Y)=0.$$

و بهذا ينتهي البرهان.

سننشئ أمثلة ملموسة لإثبات وجود هذا النوع من المنوّعات المترية التلامسية. و نبدأ مع إنشاء أمثلة معتمدين على التحويل الملائم.

لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد. نضع

$$\tilde\varphi=\varphi,\quad \tilde\xi=\mathrm{e}^{-\rho}\xi,\quad \tilde\eta=\mathrm{e}^{\rho}\eta,\quad \tilde g=\mathrm{e}^{2\rho}g, \tag{112}$$

حيث ρ دالة قابلة للتفاضل على M. ببساطة يمكننا التحقق من أنّ $(M,\tilde\varphi,\tilde\xi,\tilde\eta,\tilde g)$ هي أيضا منوّعة مترية تلامسية تقريبا. إذا رمزنا بـ $\tilde\phi$ للشكل التفاضلي الثنائي الأساسي للبُنية الجديدة $(\tilde\varphi,\tilde\xi,\tilde\eta,\tilde g)$ ينتج

$$\left\{\begin{array}{l}\tilde\eta=\mathrm{e}^{\rho}\eta\\ \tilde\phi=\mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{d}\phi\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\tilde\eta=\mathrm{d}\rho\wedge\tilde\eta+\mathrm{e}^{\rho}\mathrm{d}\eta\\ \mathrm{d}\tilde\phi=2\mathrm{d}\rho\wedge\tilde\phi+\mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{d}\phi\end{array}\right.$$

سبق و ان برهنا أن

$$\mathrm{d}\rho\wedge\tilde\phi=\xi(\rho)\tilde\eta\wedge\tilde\phi,$$

و بالتالي، لدينا

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\tilde\eta=\mathrm{d}\rho\wedge\tilde\eta+\mathrm{e}^{\rho}\mathrm{d}\eta\\ \mathrm{d}\tilde\phi=2\xi(\rho)\tilde\eta\wedge\tilde\phi+\mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{d}\phi\end{array}\right. \tag{113}$$

نذكّر أن البُنية المترية التلامسية تقريبا (M,φ,ξ,η,g) نقول عنها أنها β- كانموتسو معناه

$$\mathrm{d}\phi=2\beta\eta\wedge\phi \qquad \text{و} \qquad \mathrm{d}\eta=N^{(1)}=0$$

و منه

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{d}\rho \wedge \tilde{\eta}, \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = 2\big(\xi(\rho) + \beta\big)\tilde{\eta} \wedge \tilde{\phi}. \end{cases} \tag{114}$$

;و منه، نتحصّل على القضية التالية:

قضية 2.4.23. إذا كانت $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة β- كانموتسو فإن $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ هي منوّعة ركن معممّة حيث $\tilde{\omega} = \mathrm{d}\rho$ و $\tilde{\beta} = \xi(\rho) + \beta$.

العلاقة (111) تقدم لنا معلومات هامة عن بعض خواص تقوّس ريمان و تقوّس ريتشي. نرمز بـ R لتقوّس ريمان و بـ S لتقوّس ريتشي، باستعمال تعريفيهما المعطيان سابقا نتحصّل على:

قضية 2.4.24. من أجل كل منوّعة ركن معممّة لدينا

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= -\beta^2\big(\eta(Y)X - \eta(X)Y\big) - X(\beta)\varphi^2 Y + Y(\beta)\varphi^2 X - 2\beta \mathrm{d}\eta(X,Y)\xi \\ &\quad +2\mathrm{d}\eta(X,Y)\psi + \eta(Y)\nabla_X\psi - \eta(X)\nabla_Y\psi, \end{aligned} \tag{115}$$

$$S(X,\xi) = -\big(2\beta^2 + \xi(\beta) - \mathrm{div}\psi\big)\eta(X) - X(\beta). \tag{116}$$

البرهان 2.4.43. البرهان يُترك للطالب. (يمكن استنتجه من خلال تقوّس كل من منوّعة β- كانموتسو و منوّعة الركن).

بُنية الرُكن المعمّمة ثلاثية الأبعاد

في البُعد الثلاثي حيث اهتمامنا منصب، لدينا أولا المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.4.32. نقول عن منوعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد (φ, ξ, η, g) على M أنها بنُية رُكن معمّمة إذا وفقط إذا كان

$$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi. \tag{117}$$

حيث $\nabla_\xi\eta = \big(\nabla_\xi\xi\big)^\flat = \omega$ و $2\beta = \mathrm{div}\xi$.

البرهان 2.4.44. نفرض أن $\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi$. من العلاقة الأُولى لأولشاك (أنظر 2.1.10)، لدينا

$$(\nabla_X\varphi)Y = \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big) - \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big). \tag{118}$$

حسب المبرهنة 2.4.31، المنوّعة هي منوّعة رُكن معمّمة.

عكسيا نفرض أنّ $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة رُكن معمّمة . في العلاقة (105)، نستبدل Y بـ ξ ينتج

$$(\nabla_X\varphi)\xi = \alpha\varphi^2 X - \beta\varphi X - \eta(X)\varphi\psi,$$

علما أنّ $(\nabla_X\varphi)\xi = -\varphi\nabla_X\xi$، فإن

$$\begin{aligned}\nabla_X\xi &= -\beta\varphi^2 X - \eta(X)\varphi^2\psi \\ &= -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi + \eta(X)\eta(\psi)\xi.\end{aligned}$$

من جهة أخرى، لدينا

$$\begin{aligned}\eta(\psi) &= g(\xi, \psi) \\ &= g(\xi, \nabla_\xi\xi) \\ &= 0.\end{aligned}$$

و بالتالي

$$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi.$$

و هو المطلوب.

القضية التالية تقدم خاصّية مميّزة أخرى لمنوّعة الركن المعمّمة

قضية 2.4.25. نقول عن منوعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد (φ, ξ, η, g) على M أنها بنُية رُكن معمّمة إذا وفقط إذا كان

$$\nabla_{\varphi X}\xi = \beta\varphi X. \tag{119}$$

البرهان 2.4.45. للبرهنة، يكفي إثبات أن العلاقتين (119) و (117) هما متكافئتان.

نفرض أنّ $\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi$ مع $\psi = \nabla_\xi\xi$، $\nabla_{\varphi X}\xi = \beta\varphi X$.

عكسيا، نفرض أنّ $\nabla_{\varphi X}\xi = \beta\varphi X$ و باستبدال X بـ φX واستعمال العلاقة $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$، نجد

$$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi.$$

و بهذا ينتهي البرهان

ملاحظة 2.4.10. الحقل الشعاعي ψ ليس بالضرورة واحديا . من أجل ذلك، نضع $V = \mathrm{e}^{-\rho}\psi$ حيث $\mathrm{e}^{\rho} = |\psi|$، نتحصّل مباشرة على أساس متعامد و متجانس $\{\xi, V, \varphi V\}$. سنسميه الأساس الرئيسي.

بما أن عناصر الأساس الرئيسي هي حقول أشعة شاملة إذن نقول عن المنوّعة أنها موازية و هذا يعني أنّ ليَفّها اعتيادي متشاكل مع $M \times \mathbb{R}^3$.

قضية 2.4.26. إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ركن معمّمة فإن:

1) $\phi=\frac{2}{\omega(\psi)}\omega\wedge\omega\circ\varphi$

2) $tr_g\big(\varphi\nabla\psi\big)=0$

3) $\mathrm{d}\omega=\eta\wedge\big(\nabla_\xi\omega+\beta\omega\big)$

البرهان 2.4.46. 1) باستعمال الأساس الرئيسي $\{\xi,V,\varphi V\}$ لدينا

$$\begin{aligned}\varphi Y &= g(\varphi Y,\xi)\xi+g(\varphi Y,V)V+g(\varphi Y,\varphi V)\varphi V\\ &= \mathrm{e}^{-2\rho}\omega(\varphi Y)\psi+\mathrm{e}^{-2\rho}\omega(Y)\varphi\psi.\end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned}\phi(X,Y) &= g(X,\varphi Y)\\ &= \mathrm{e}^{-2\rho}\big(\omega(\varphi Y)\omega(X)-\omega(Y)\omega(\varphi X)\big)\\ &= 2\mathrm{e}^{-2\rho}\big(\omega\wedge(\omega\circ\varphi)\big)(X,Y).\end{aligned}$$

2) لدينا

$$\mathrm{d}\eta=\eta\wedge\omega. \tag{120}$$

بإدراج مؤثر الإشتقاق الخارجي d في العلاقة (120) و استعمال (104)، نحصّل على

$$\eta\wedge\mathrm{d}\omega=0. \tag{121}$$

و لدينا

$$\begin{aligned}0 &= (\eta\wedge\mathrm{d}\omega)(\xi,V,\varphi V)\\ &= \mathrm{d}\omega(V,\varphi V)\\ &= \frac{1}{2}\big(g(\nabla_V\psi,\varphi V)-g(\nabla_{\varphi V}\psi,V)\big)\\ &= -\frac{1}{2}\big(g(\varphi\nabla_V\psi,V)+g(\varphi\nabla_{\varphi V}\psi,\varphi V)\big)\\ &= -\frac{1}{2}tr_g\big(\varphi\nabla\psi\big).\end{aligned}$$

إذن، $tr_g\big(\varphi\nabla\psi\big)=0$.

3) من (121)، ينتج

$$(\eta\wedge\mathrm{d}\omega)(\xi,X,Y)=0,$$

$$\mathrm{d}\omega(X,Y) = -\eta(X)\mathrm{d}\omega(Y,\xi) + \eta(Y)\mathrm{d}\omega(X,\xi). \tag{122}$$

و منه نتحصّل على مرة أخرى بتوظيف (117)، ينتج

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(X,\xi) &= \frac{1}{2}\big((\nabla_X\omega)\xi - (\nabla_\xi\omega)X\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(g(\nabla_X\psi,\xi) - (\nabla_\xi\omega)X\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(-g(\psi,\nabla_X\xi) - (\nabla_\xi\omega)X\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(-g(\psi,-\beta\varphi^2X + \eta(X)\nabla_\xi\xi) - (\nabla_\xi\omega)X\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(\beta g(\psi,\varphi^2X) - \eta(X)\ g(\psi,nabla_\xi\xi) - (\nabla_\xi\omega)X\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(-\beta g(\psi,X) - \eta(X)|\psi|^2 - (\nabla_\xi\omega)X\big)\\
&= -\frac{1}{2}\big(\beta\omega(X) + |\psi|^2\eta(X) + (\nabla_\xi\omega)X\big).
\end{aligned}$$

و الآن، بالتعويض في العلاقة السابقة (122)، نتحصّل على العلاقة الثالثة.

بتوظيف الأساس الرئيسي، يمكننا استنتاج ما يلي:

مبرهنة 2.4.33. من أجل كل منوّعة ركنٍ معمّمة، لدينا

1) $\nabla_\xi\xi = \psi, \quad \nabla_\psi\xi = -\beta\psi, \quad \nabla_{\varphi\psi}\xi = \beta\varphi\psi.$

2) $\nabla_\xi\psi = -\omega(\psi)\xi + \xi(\rho)\psi + \frac{\kappa}{\omega(\psi)}\varphi\psi, \qquad \big(\kappa = g(\nabla_\xi\psi,\varphi\psi)\big).$

3) $\nabla_\xi\varphi\psi = -\frac{\kappa}{\omega(\psi)}\psi + \xi(\rho)\varphi\psi.$

4) $\nabla_{\varphi\psi}\psi = \varphi\psi(\rho)\psi + \big(\lambda + \omega(\psi) - \psi(\rho)\big)\varphi\psi.$

5) $\nabla_{\varphi\psi}\varphi\psi = -\beta\omega(\psi)\xi - \big(\lambda + \omega(\psi) - \psi(\rho)\big)\psi + \varphi\psi(\rho)\varphi\psi.$

6) $\nabla_\psi\psi = -\beta\omega(\psi)\xi + \psi(\rho)\psi + \big(\varphi\psi(\rho) - \mu\big)\varphi\psi.$

7) $\nabla_\psi\varphi\psi = -\big(\varphi\psi(\rho) - \mu\big)\psi + \psi(\rho)\varphi\psi.$

البرهان 2.4.47. 1) المركبات الثلاثة الأولى تستخرج من العلاقة (117).
2) بما أن $\{\xi, V, \varphi V\}$ هو أساس متعامد و متجانس فإن

$$\nabla_\xi\psi = g(\nabla_\xi\psi, \xi)\xi + g(\nabla_\xi\psi, V)\varphi V, +g(\nabla_\xi\psi, \varphi V)\varphi V,$$

باستعمال (117) ينتج

$$g(\nabla_\xi\psi, \xi) = -\omega(\psi),$$

و

$$g(\nabla_\xi\psi, V) = g(\nabla_\xi \mathrm{e}^\rho V, V) = \mathrm{e}^\rho\xi(\rho),$$

أيضا

$$g(\nabla_\xi\psi, \varphi V) = g(\nabla_\xi\psi, \mathrm{e}^{-\rho}\varphi\psi) = \mathrm{e}^{-\rho}\kappa.$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد

$$\nabla_\xi\psi = -\omega(\psi)\xi + \xi(\rho)\psi + \frac{\kappa}{\omega(\psi)}\varphi\psi.$$

3)

$$\begin{aligned} \nabla_\xi\varphi\psi &= (\nabla_\xi\varphi)\psi + \varphi\nabla_\xi\psi \\ &= \varphi\nabla_\xi\psi \\ &= -\frac{\kappa}{\omega(\psi)}\psi + \xi(\rho)\varphi\psi. \end{aligned}$$

4) في الأساس الرئيسي $\{\xi, V, \varphi V\}$ لدينا

$$\nabla_{\varphi V}V = g(\nabla_{\varphi V}V, \xi)\xi + g(\nabla_{\varphi V}V, \varphi V)\varphi V,$$

باستعمال (117)، ينتج

$$g(\nabla_{\varphi V}V, \xi) = -g(V, \nabla_{\varphi V}\xi) = 0.$$

من أجل $g(\nabla_{\varphi V}V, \varphi V)$ لدينا

$$\begin{aligned} \lambda = \mathrm{div}\psi &= g(\nabla_\xi\psi, \xi) + g(\nabla_V\psi, V) + g(\nabla_{\varphi V}\psi, \varphi V) \\ &= -\omega(\psi) + \psi(\rho) + \mathrm{e}^\rho g(\nabla_{\varphi V}V, \varphi V) \end{aligned}$$

إذن

$$g(\nabla_{\varphi V}V, \varphi V) = \mathrm{e}^{-\rho}\big(\lambda + \omega(\psi) - \psi(\rho)\big).$$

بالتعويض في العلاقة أعلاه نجد

$$\nabla_{\varphi V}V = \mathrm{e}^{-2\rho}\big(\lambda + \omega(\psi) - \psi(\rho)\big)\varphi\psi,$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}\nabla_{\varphi\psi}\psi &= \mathrm{e}^{2\rho}\nabla_{\varphi V}V + \varphi\psi(\rho)\psi \\ &= -\varphi\psi(\rho)\psi + \big(\lambda + \omega(\psi) - \mathrm{e}^{-\rho}\psi(\rho)\big)\varphi\psi.\end{aligned}$$

5) علما أن

$$\nabla_{\varphi\psi}\varphi\psi = (\nabla_{\varphi\psi}\varphi)\psi + \varphi\nabla_{\varphi\psi}\psi,$$

من العلاقة

$$(\nabla_X\varphi)Y = \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big),$$

نتحصّل على $(\nabla_{\varphi\psi}\varphi)\psi = -\beta\omega(\psi)\xi.$ و منه

$$\nabla_{\varphi\psi}\varphi\psi = -\beta\omega(\psi)\xi - \big(\lambda + \omega(\psi) - \psi(\rho)\big)\psi + \varphi\psi(\rho)\varphi\psi.$$

6) لدينا

$$\nabla_V V = g(\nabla_V V, \xi)\xi + g(\nabla_V V, \varphi V)\varphi V,$$

باستعمال (117)، ينتج

$$g(\nabla_V V, \xi) = -g(V, \nabla_V\xi) = -\beta.$$

من أجل $g(\nabla_V V, \varphi V)$ لدينا

$$\begin{aligned}\mu = tr(\varphi\nabla\psi) &= g(\varphi\nabla_V\psi, V) + g(\varphi\nabla_{\varphi V}\psi, \varphi V) \\ &= -g(\nabla_V\psi, \varphi V) + g(\nabla_{\varphi V}\psi, V) \\ &= -\mathrm{e}^{\rho}g(\nabla_V V, \varphi V) + \varphi\psi(\rho),\end{aligned}$$

و هذا يعطي

$$g(\nabla_V V, \varphi V) = \mathrm{e}^{-\rho}\big(\varphi\psi(\rho) - \mu\big),$$

إذن

$$\nabla_V V = -\beta\xi + \mathrm{e}^{-\rho}\big(\varphi\psi(\rho) - \mu\big)\varphi V,$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}\nabla_\psi\psi &= \psi(\rho)\psi + \mathrm{e}^{2\rho}\nabla_V V \\ &= -\beta\omega(\psi)\xi + \psi(\rho)\psi + \big(\varphi\psi(\rho) - \mu\big)\varphi\psi.\end{aligned}$$

7) لنحسبW

$$\begin{aligned}\nabla_\psi\varphi\psi &= (\nabla_\psi\varphi)\psi + \varphi\nabla_\psi\psi \\ &= -\big(\varphi\psi(\rho) - \mu\big)\psi + \psi(\rho)\varphi\psi.\end{aligned}$$

بهذا ينتهي البرهان

ملاحظة 2.4.11. من خلال المبرهنة 2.4.33، يتّضح أن منوّعة الركن المعمّمة متحكم فيها كليا.

عائلة أمثلة

نرمز للإحداثيات الديكارتية في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد $\mathbb{R}^3$ بـ (x, y, z) و نعرّف موتّر متري g كما يلي

$$g = \mathrm{e}^{2f} \begin{pmatrix} \rho^2 + \tau^2 & 0 & -\tau \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ -\tau & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

حيث $f = f(x, y)$، $\tau = \tau(x, y)$ و $\rho \neq 0$ هي دوال ملساء على $\mathbb{R}^3$.
كذلك، نعرف بُنية مترية تلامسية تقريبا على $\mathbb{R}^3$ على النحو التالي: (φ, ξ, η)

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \mathrm{e}^{-f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \mathrm{e}^{f}(-\tau, 0, 1).$$

الشكل الأساسي الأول η و الشكل الأساسي الثنائي ϕ لهما الشكل التالي

$$\eta = \mathrm{e}^{f}(dz - \tau dx) \qquad and \qquad \phi = -2\rho^2 \mathrm{e}^{2f} dx \wedge dy,$$

و منه

$$\mathrm{d}\eta = -\eta \wedge \mathrm{d}f - \frac{\tau_2}{2\rho^2} \mathrm{e}^{-f} \phi,$$

$$\mathrm{d}\phi = 2\Big(f_3 + \frac{\rho_3}{\rho}\Big) \mathrm{e}^{-f} \eta \wedge \phi.$$

حيث $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$، $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ و $\tau_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$. بحسابات مباشرة، المركبات غير المعدومة للموتّر $N^{(1)\,i}_{kj}$ تعطى بالشكل

$$N^{(1)\,3}_{12} = -\tau f_2, \quad N^{(1)\,3}_{13} = -f_1, \quad N^{(1)\,3}_{23} = f_2,$$

لكن، $\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}$

$$(N_\varphi)^i_{kj} = 0,$$

و هذا يستلزم أن البُنية المترية التلامسية تقريبا (φ, ξ, η, g) هي قابلة للمكاملة.
و بالتالي لضمان كونها غير ناظمية، يكفي أخذ $f_1 \neq 0$ أو $f_2 \neq 0$.
و بالتالي من أجل $\tau_2 = 0$ تكون (φ, ξ, η, g) عائلة بُنى ركن معمّمة ذات ثلاثة وسطاء مع

$$\omega = -\mathrm{d}f \quad \text{و} \quad \beta = \Big(f_3 + \tfrac{\rho_3}{\rho}\Big)\mathrm{e}^{-f}$$

الآن، باستعمال الأساس المتعامد و المتجانس

$$\left\{e_1 = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial z}\right),\ e_2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y},\ e_3 = \xi\right\}$$

المركبات $\nabla_{e_i} e_j$ تعطى على النحو التالي:

$$\nabla_{e_1} e_1 = -\mathrm{e}^{-f}\Big(\frac{\rho_2 + \rho f_2}{\rho^2}e_2 + \frac{\rho_3}{\rho}\xi\Big), \quad \nabla_{e_2} e_1 = \mathrm{e}^{-f}\Big(\frac{\rho_1 + \tau\rho_3 + \rho f_1}{\rho^2}e_2 + \frac{\rho_2}{2\rho^2}\xi\Big),$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = \frac{\rho_2 + \rho f_2}{\rho^2}\mathrm{e}^{-f}e_1, \quad \nabla_{e_2} e_2 = -\mathrm{e}^{-f}\Big(\frac{\rho_1 + \tau\rho_3 + \rho f_1}{\rho^2}e_1 + \frac{\rho_3}{\rho}\xi\Big),$$

$$\nabla_{\xi} e_1 = \frac{f_1}{\rho}\mathrm{e}^{-f}\xi, \quad \nabla_{\xi} e_2 = \mathrm{e}^{-f}\Big(-\frac{\tau_2}{2\rho^2}e_1 + \frac{f_2}{\rho}\xi\Big),$$

$$\nabla_{e_1}\xi = \frac{\rho_3}{\rho}\mathrm{e}^{-f}e_1, \quad \nabla_{e_2}\xi = \frac{\rho_3}{\rho}\mathrm{e}^{-f}e_2,$$

$$\nabla_{\xi}\xi = -\mathrm{e}^{-f}\Big(\frac{f_1}{\rho}e_1 + \frac{f_2}{\rho}e_2\Big).$$

بإمكاننا و بسهولة التحقق من أنّه من أجل $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\nabla_{e_i}\xi \ = \ -\beta\varphi^2 e_i + \eta(e_i)\psi,$$

حيث $\psi = \nabla_{\xi}\xi = -\mathrm{e}^{-f}\left(\frac{f_1}{\rho}e_1 + \frac{f_2}{\rho}e_2\right)$.
للتحقق نعطي:

$$\lambda = -\frac{\mathrm{e}^{-2f}}{\rho^2}(f_1^2 + f_{11} + f_2^2 + f_{22}), \quad \kappa = \frac{\mathrm{e}^{-(f+2\rho)}}{\rho^2}(\tau_2 + \rho_3\rho^2\mathrm{e}^{-f}).$$

ختاما، نؤكد أن هذه النتائج جديدة و يمكن اعتمادها من أجل أبحاث أخرى مستقبلا.

2.5 منوّعات الصنف التاسع ثلاثية الأبعاد

منوّعات الصنف التاسع Variété de classe C_9 هو صنف من الأصناف الإثني عشر في تصنيف تشينيا و غونزليز [21] للمنوّعات المترية التلامسية تقريبا. هذا الصنف من المنوّعات لا توجد عنه أي معلومات باستثناء ما ورد في [21]. و باعتبار هذا الصنف أحد الأصناف الخمسة الأساسية للمنوّعات المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد، فإننا نخصّص له حيزا مهما نقدّم فيه عملا أصليا، نبيّن فيه أهم النتائج التي توصّلنا إليها و الخواص التي تميّز هذا الصنف مع أمثلة ملموسة. و نَعِدُ بإدراج كل ما سيعرف عنه مستقبلا بحول الله في الطبعات القادمة.

2.5.1 تعاريف و خواص

تعريف 2.5.27. نسمي منوّعة من الصنف C_9 ثلاثية الأبعاد (أنظر تصنيف تشينيا-غونزليز) كل منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثُلاثية الأبعاد (M,φ,ξ,η,g) تحقق الشرط التالي

$$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=\eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X-\eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z, \tag{123}$$

و ذلك من أجل X، Y و Z حقول شعاعية على M.

لدينا

$$\begin{aligned}(\nabla_X\phi)(Y,Z) &= X\phi(Y,Z)-\phi(\nabla_XY,Z)-\phi(Y,\nabla_XZ)\\ &= Xg(Y,\varphi Z)-g(\nabla_XY,\varphi Z)-g(Y,\varphi\nabla_XZ)\\ &= -Xg(\varphi Y,Z)-g(\nabla_XY,\varphi Z)+Xg(\varphi Y,\nabla_Z)-g(\nabla_X\varphi Y,Z)\\ &= -g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big),\end{aligned} \tag{124}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}(\nabla_{\varphi X}\eta)Z &= \varphi X\eta(Z)-\eta(\nabla_{\varphi X}Z)\\ &= \varphi Xg(\xi,Z)-g(\nabla_{\varphi X}Z,\xi)\\ &= g(\nabla_{\varphi X}\xi,Z).\end{aligned} \tag{125}$$

بتعويض (124) و (125) في (123) نجد

$$\begin{aligned}g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= -g(\nabla_Y\xi,\varphi X)g(\xi,Z)+\eta(Y)g(\nabla_{\varphi X}\xi,Z)\\ &= g\Big(-\eta(X)g(\nabla_Y\xi,\varphi X)\xi+\eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi,Z\Big),\end{aligned}$$

فينتج

$$(\nabla_X\varphi)Y = -g(\nabla_Y\xi, \varphi X)\xi + \eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi. \tag{126}$$

من جهة أخرى، و من القضية (2.1.10) وحسب أولشاك، كل منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد تحقق

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi\nabla_X\xi. \tag{127}$$

$$\mathrm{d}\phi = (\mathrm{div}\xi)\eta \wedge \phi. \tag{128}$$

$$\mathrm{d}\eta = \eta \wedge (\nabla_\xi\eta) + \frac{1}{2}\big(tr(\varphi\nabla\xi)\big)\phi. \tag{129}$$

بالمقارنة بين (126) و (127) نجد

$$g(\nabla_Y\xi, \varphi X)\xi - \eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi = -g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\xi + \eta(Y)\varphi\nabla_X\xi. \tag{130}$$

بتعويض X و Y بـ ξ في (130) نجد $\varphi\nabla_\xi\xi = 0$ و هذا يستلزم $\nabla_\xi\xi = 0$. بتوظيف هذه النتيجة مع تعويض Y فقط بـ ξ في (130) ينتج

$$-\nabla_{\varphi X}\xi = \varphi\nabla_X\xi. \tag{131}$$

و حسب القضية (2.1.11) لن تكون هذه البنية ناظمية أبدا.

لنحسب الآن $\mathrm{d}\phi$ و $\mathrm{d}\eta$. نعتبر $\{e, \varphi e, \xi\}$ φ-أساس للمنوّعة، باستعمال (131) لدينا

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\xi &= \sum_{i=1}^{3} g(\nabla_{e_i}\xi, e_i)\\
&= g(\nabla_e\xi, e) + g(\nabla_{\varphi e}\xi, \varphi e) + g(\nabla_\xi\xi, \xi)\\
&= g(\nabla_e\xi, e) - g(\varphi\nabla_e\xi, \varphi e)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

و حسب (128)، ينتج $\mathrm{d}\phi = 0$. بالنسبة لـ $\mathrm{d}\eta$، نركب η في العلاقة (130) نجد

$$\begin{aligned}
0 &= g(\nabla_Y\xi, \varphi X) + g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\\
&= g(\nabla_Y\xi, \varphi X) - g(\nabla_{\varphi X}\xi, Y)\\
&= -2\mathrm{d}\eta(\varphi X, Y),
\end{aligned}$$

و كذلك، باعتبار $\nabla_\xi \xi = 0$ لدينا

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(\xi, Y) &= g(\nabla_\xi \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, \xi) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ومنه $\mathrm{d}\eta = 0$.

عكسيا، بتعويض $\nabla_X \xi = \varphi \nabla_{\varphi X} \xi$ في العلاقة (127)، ينتج

$$(\nabla_X \varphi) Y = -g(\nabla_{\varphi X} \xi, Y)\xi + \eta(Y) \nabla_{\varphi X} \xi. \tag{132}$$

من جهة أخرى، من الفرضية $\nabla_X \xi = \varphi \nabla_{\varphi X} \xi$ لدينا $\nabla_\xi \xi = 0$ و هذا يعطي $\nabla_\xi \eta = 0$. و عليه باستعمال (129) نجد $\mathrm{d}\eta = 0$ لأن

$$\begin{aligned} 2\alpha &= tr_g(\varphi \nabla \xi) \\ &= g(\varphi \nabla_e \xi, e) + g(\varphi \nabla_{\varphi e} \xi, \varphi e) \\ &= -g(\nabla_{\varphi e} \xi, e) + g(\nabla_{\varphi e} \xi, e) \\ &= 0, \end{aligned}$$

مع $\{\xi, e, \varphi e\}$ هو φ-أساس، إذن

$$g(\nabla_Y \xi, \varphi X) = g(\nabla_{\varphi X} \xi, Y).$$

و بالتالي لدينا المبرهنة التالية

مبرهنة 2.5.34. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد. نقول عنها أنها من الصنف C_9 إذا و فقط إذا تحقق مايلي

$$\nabla_X \xi = \varphi \nabla_{\varphi X} \xi,$$

من أجل كل X و Y حقلي أشعة معرفين على M.

ملاحظة 2.5.12. في حقيقة الأمر، بنُية الصنف التاسع ماهي إلا بنُية ثنائية التماسك تقريبا غير ناظمية و غير قابلة للمكاملة.

يمكننا تقديم في ختام هذه الفقرة خاصية لهذا الصنف التاسع. لدينا العلاقة التالية

$$\begin{aligned} 3\mathrm{d}\phi(X, Y, Z) &= X\big(\phi(Y, Z)\big) + Y\big(\phi(Z, X)\big) + Z\big(\phi(X, Y)\big) \\ &- \phi\big([X, Y], Z\big) - \phi\big([Y, Z], X\big) - \phi\big([Z, X], Y\big), \end{aligned}$$

مع العلم أنّ

$$X\big(\phi(Y,Z)\big) = X\big(g(Y,\varphi Z)\big) = g(\nabla_X Y,\varphi Z) + g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big) + g\big(Y,\varphi\nabla_X Z\big),$$

و

$$\nabla_X(\varphi Z) = (\nabla_X\varphi)Z + \varphi(\nabla_X Z),$$

فينتج

$$\begin{aligned}
3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) &= g(\nabla_X Y,\varphi Z) + \phi\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big) + g\big(Y,\varphi\nabla_X Z\big)\\
&+ g(\nabla_Y Z,\varphi X) + \phi\big(Z,(\nabla_Y\varphi)X\big) + g\big(Z,\varphi\nabla_Y X\big)\\
&+ g(\nabla_Z X,\varphi Y) + \phi\big(X,(\nabla_Z\varphi)Y\big) + g\big(X,\varphi\nabla_Z Y\big)\\
&- g(\nabla_X Y,\varphi Z) + g(\nabla_Y X,\varphi Z) - g(\nabla_Y Z,\varphi X)\\
&+ g(\nabla_Z Y,\varphi X) - g(\nabla_Z X,\varphi Y) + g(\nabla_X Z,\varphi Y)\\
&= g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big) + g\big(Z,(\nabla_Y\varphi)X\big) + g\big(X,(\nabla_Z\varphi)Y\big)
\end{aligned}$$

باعتبار في الصنف التاسع لدينا $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\phi = 0$، نضع $Z = \xi$ في المعادلة أعلاه، و بتوظيف التعريف أعلاه، ينتج

$$\begin{aligned}
0 &= g\big(Y,(\nabla_X\varphi)\xi\big) + g\big(\xi,(\nabla_Y\varphi)X\big) + g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big)\\
&= -g\big(Y,\varphi\nabla_X\xi\big) + g\big(\xi,\nabla_Y\varphi X\big) + g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big)\\
&= g\big(Y,\nabla_{\varphi X}\xi\big) - g\big(\nabla_Y\xi,\varphi X\big) + g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big)\\
&= 2\mathrm{d}\eta(\varphi X,Y) + g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big)\\
&= g\big(X,(\nabla_\xi\varphi)Y\big).
\end{aligned}$$

و منه الخاصية التالية

قضية 2.5.27. من أجل كل بنُية من الصنف التاسع لدينا

$$\nabla_\xi\varphi = 0.$$

2.5.2 أمثلة

مثال 2.5.15. [21] نعتبر G زمرة لِي المكوّنة من المصفوفات الحقيقية ذات الشكل :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-z} & 0 & x\\ 0 & \mathrm{e}^{z} & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

المزودة بالمترك الريماني اللامتغيّر على اليسار

$$g = \mathrm{e}^{2z}dx^2 + \mathrm{e}^{-2z}dy^2 + \lambda^2 dz^2, \qquad \lambda > 0.$$

يعطى

$$\varphi\frac{\partial}{\partial x} = \mathrm{e}^{2z}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \varphi\frac{\partial}{\partial y} = -\mathrm{e}^{-2z}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \varphi\frac{\partial}{\partial z} = 0,$$

و

$$\xi = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \eta = \lambda dz.$$

لتبيان أن المنوّعة $(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي من الصنف C_9 نستعمل الأساس المتعامد و المتجانس

$$e_1 = \mathrm{e}^{-z}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad e_2 = \mathrm{e}^{z}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \xi = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial z}.$$

أقواس لِي غير المعدومة هي

$$[e_1, \xi] = \frac{1}{\lambda}e_1, \qquad [e_2, \xi] = \frac{-1}{\lambda}e_2.$$

باستعمال دستور كوزيل

$$2g\big(\nabla_{e_i}e_j, e_k\big) = -g\big(e_i, [e_j, e_k]\big) + g\big(e_j, [e_k, e_i]\big) + g\big(e_k, [e_i, e_j]\big). \qquad (133)$$

المركبات غير المعدومة لوصلة لوفي-سيفيتا هي:

$$\nabla_{e_1}e_1 = \frac{-1}{\lambda}\xi, \qquad \nabla_{e_1}\xi = \frac{1}{\lambda}e_1, \qquad \nabla_{e_2}e_2 = \frac{1}{\lambda}\xi, \qquad \nabla_{e_2}\xi = \frac{-1}{\lambda}e_2.$$

و أخيرا، يمكن أن نتحقق أنه من أجل كل $i \in \{1, 2, 3\}$ لدينا

$$\mathrm{d}\eta(e_i, e_j) = 0 \quad \text{و} \quad \nabla_{e_i}\xi = \varphi\nabla_{\varphi e_i}\xi$$

من جهة أخرى، بحساب بسيط مركّبات الموتّر $N^{(1)}$ غير المعدومة هي:

$$N^{(1)}(e_2, \xi) = -2\mathrm{e}^{-z}e_2 \quad \text{و} \quad N^{(1)}(e_1, \xi) = 2\mathrm{e}^{z}e_1$$

أي البنية غير ناظمية (و غير قابلة للمكاملة باعتبار $\mathrm{d}\eta = 0$) و بالتالي $(G, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة من الصنف C_9.

فيما يلي، نقدّم تعميما مهما للمثال السابق بالكيفية التالية:

مثال 2.5.16. نعتبر عائلة المنوّعات المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد ذات الوسطاء الثلاثة و المعطاة كمايلي

$$g=\begin{pmatrix}\rho(x,y,z)^2 & 0 & 0\\ 0 & \tau(x,y,z)^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma(x,y,z)^2\end{pmatrix},$$

حيث ρ τ و σ دوال قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}^3$ لا تنعدم أبدا.
بالإظافة الى البنية التلامسية تقريبا التالية (φ,ξ,η) على $\mathbb{R}^3$ بـ:

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \xi=\frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \eta=\big(0,0,\sigma\big).$$

بدايةً، مُركبات الموتّر $N^{(1)}$ غير المعدومة هي

$$N^2_{23}=-N^1_{13}=\frac{\tau_3\rho-\tau\rho_3}{\tau\rho},\qquad N^3_{13}=-\frac{\sigma_1}{\sigma},\qquad N^3_{23}=-\frac{\sigma_2}{\sigma}.$$

ليكن الأساس المتعامد و المتجانس $\{e_1,e_2,e_3=\xi\}$ المعطى كمايلي

$$e_1=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x},\qquad e_2=\frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial y},\qquad \xi=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}.$$

باستعمال دستور كوزيل، مركبات وصلة لوفي-سيفيتا غير المعدومة هي

$$\begin{array}{ccc}\nabla_{e_1}e_1=-\frac{\rho_2}{\tau\rho}e_2-\frac{\tau\rho_3}{\rho\sigma}e_3, & \nabla_{e_1}e_2=\frac{\rho_2}{\tau\rho}e_1, & \nabla_{e_1}e_3=\frac{\rho_3}{\rho\sigma}e_1,\\ \nabla_{e_2}e_1=\frac{\tau_1}{\tau\rho}e_2, & \nabla_{e_2}e_2=-\frac{\tau_1}{\tau\rho}e_1-\frac{\tau_3}{\tau\sigma}e_3, & \nabla_{e_2}e_3=\frac{\tau_3}{\tau\sigma}e_2,\\ \nabla_{e_3}e_1=\frac{\sigma_1}{\rho\sigma}e_3, & \nabla_{e_3}e_2=\frac{\sigma_2}{\tau\sigma}e_3, & \nabla_{e_3}e_3=-\frac{\sigma_1}{\rho\sigma}e_1-\frac{\sigma_2}{\tau\sigma}e_2.\end{array}$$

نحسب الآن $\nabla_X\xi-\varphi\nabla_{\varphi e_i}\xi$ من أجل $i\in\{1,2,3\}$ فنجد

$$\nabla_{e_1}\xi-\varphi\nabla_{\varphi e_1}\xi=\frac{\tau_3\rho+\tau\rho_3}{\sigma\tau^2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\nabla_{e_2}\xi-\varphi\nabla_{\varphi e_2}\xi=-\frac{\tau_3\rho+\tau\rho_3}{\sigma\rho^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

و

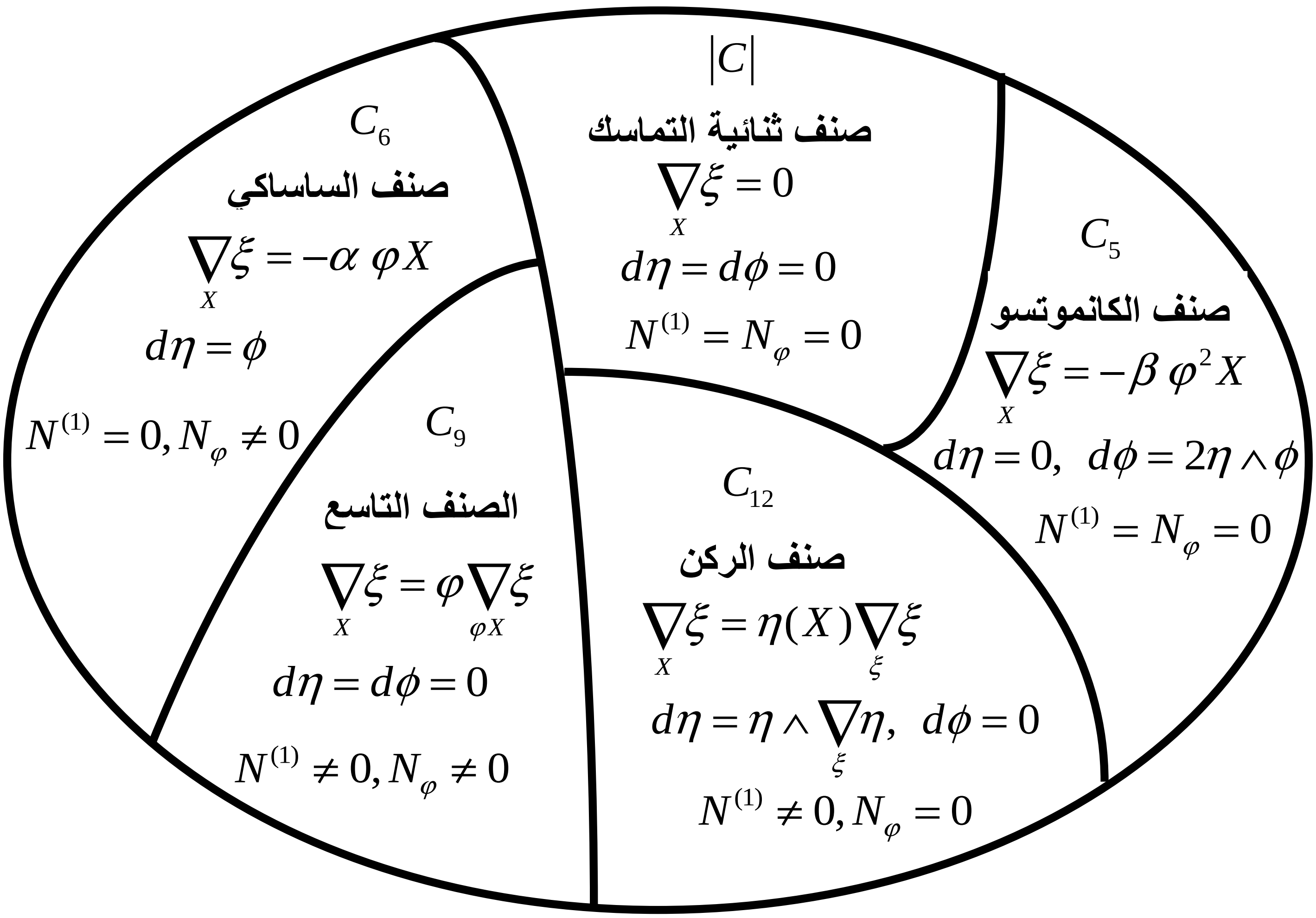
$$\nabla_\xi \xi = \frac{1}{\tau\rho}\begin{pmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

و عليه، تكون هذه المنوّعة من الصنف C_9 إذا وفقط إذا كان

$$\left\{\begin{array}{l} N^{(1)} \neq 0 \\ \nabla_{e_i}\xi - \varphi\nabla_{\varphi e_i}\xi = 0 \qquad (i=\overline{1,2}) \\ \nabla_\xi \xi = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tau_3\rho - \tau\rho_3 \neq 0 \\ \tau_3\rho + \tau\rho_3 = 0 \\ \sigma_1 = \sigma_2 = 0, \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\tau_3}{\tau} = -\frac{\rho_3}{\rho} = f(x,y,z) \\ \tau_3 \neq 0, \quad \rho_3 \neq 0 \\ \sigma = \sigma(z), \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tau = \alpha(x,y)\mathrm{e}^{\int f dz} \\ \rho = \beta(x,y)\mathrm{e}^{-\int f dz} \\ \sigma = \sigma(z). \end{array}\right.$$



مخطط (1) : تعاريف البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد

2.6 المنوّعات ماوراء-ساساكي المعمّمة

في هذه الفقرة سنقدّم دراسة مفصّلة عن صنف جديد من المنوّعات المترية التلامسية تقريبا و هو تعميم للمنوّعات المترية التلامسية الأساسية (ثنائية التماسك، الساساكية، الكانموتسو و منوّعة الركن). بعبارة أخرى، هو تعميم لبُنى ماوراء -ساساكي و منوّعات الركن المعمّمة. بناء على ترميز تشينيا غونزاليز سنرمز له بـ $C_5 \oplus C_6 \oplus C_{12}$ و نقترح كإسم لها "**المنوّعات ماوراء-ساساكي المعمّمة**" (Trans-Sasaki généralisée).

بما أنّ هذا الصنف هو تعميم للمنوّعات الآنفة الذّكر فهو يشملها و يشمل منوّعات مترية تلامسية تقريبا أخرى لا هي ماوراء-ساساكي و لا هي منوعات الرّكن، فهو صنف جديد سنهتم بدراسته هنا و نبيّن خصائصه مع تقديم أمثلة ملموسة بطريقة مبسّطة تكون في متناول طلبة الماستركل ذلك في البُعد الثالث.

و يبقى أن نشير أنّه أثناء كتابة هذه الفقرة تمّ نشر أول بحث حول هذا النوع من المنوّعات (أنظر [36]) .

2.6.1 بنية ماوراء-ساساكي المعمّمة

لقد سبق و أن قدّمنا مفهوم التحويل المماثل للبنى المترية التلامسية باعتباره مفهوم أُدرج في المرجع [35] ثم في المرجع [40]. فمن أجل بُنية مترية تلامسية تقريبا (φ, ξ, η, g) و دالة ملساء σ على M، البُنية

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\xi} = \mathrm{e}^{\sigma}\xi, \qquad \overline{\eta} = \mathrm{e}^{-\sigma}\eta, \qquad \overline{g} = \mathrm{e}^{-2\sigma}g, \tag{134}$$

هي أيضا بُنية مترية تلامسية تقريبا. لكن هذه الفكرة ليست صحيحة من أجل بُنية ماوراء-ساساكي أي التحويل المماثل لبُنية ماوراء-ساساكي ليست بالضرورة بُنية ماوراء-ساساكي. من أجل ذلك نُدرج المفهوم التالي:

تعريف 2.6.28. نقول عن المنوّعة $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ أنها منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β) إذا كانت المنوّعة الناتجة بالتحويل المماثل $(M, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$.

نقصد بهذا التعريف المنوّعات المترية التلامسية تقريبا التي تتحوّل الى منوّعات ماواء-ساساكي بمجرد توظيف تحويل مماثل.

سنعتبر دوما X و Y حقلين شعاعيين على M. باستعمال دستور كوزيل، لدينا

$$\begin{aligned}
2\overline{g}\big(\overline{\nabla}_X Y, Z\big) &= X\big(\overline{g}(Y,Z)\big) + Y\big(\overline{g}(Z,X)\big) - Z\big(\overline{g}(X,Y)\big)\\
&\quad + \overline{g}(Z,[X,Y]) + \overline{g}(Y,[Z,X]) - \overline{g}(X,[Y,Z])\\
&= X\big(\mathrm{e}^{-2\sigma} g(Y,Z)\big) + Y\big(\mathrm{e}^{-2\sigma} g(Z,X)\big) - Z\big(\mathrm{e}^{-2\sigma} g(X,Y)\big)\\
&\quad + \mathrm{e}^{-2\sigma} g(Z,[X,Y]) + \mathrm{e}^{-2\sigma} g(Y,[Z,X]) - \mathrm{e}^{-2\sigma} g(X,[Y,Z])\\
&= 2\mathrm{e}^{-2\sigma} g\big(\nabla_X Y, Z\big) - 2\mathrm{e}^{-2\sigma} X(\sigma) g(Y,Z) - 2\mathrm{e}^{-2\sigma} Y(\sigma) g(Z,X)\\
&\quad + 2\mathrm{e}^{-2\sigma} Z(\sigma) g(X,Y)\\
&= 2\overline{g}\big(\nabla_X Y, Z\big) - 2X(\sigma)\overline{g}(Y,Z) - 2Y(\sigma)\overline{g}(X,Z) + 2\mathrm{e}^{-2\sigma} Z(\sigma) g(X,Y),
\end{aligned}$$

لدينا إذن

$$\overline{g}\big(\overline{\nabla}_X Y, Z\big) = \overline{g}\big(\nabla_X Y - X(\sigma)Y - Y(\sigma)X, Z\big) + \mathrm{e}^{-2\sigma} Z(\sigma) g(X,Y), \quad (135)$$

و نعلم أن

$$\begin{aligned}
Z(\sigma) &= g(\mathrm{grad}\sigma, Z)\\
&= \mathrm{e}^{2\sigma}\overline{g}(\mathrm{grad}\sigma, Z),
\end{aligned} \quad (136)$$

بتعوض (136) في (135) نتحصّل على

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - X(\sigma)Y - Y(\sigma)X + g(X,Y)\mathrm{grad}\sigma. \quad (137)$$

لتهذيب الترميز، نعلم أن $X(\sigma) = \mathrm{d}\sigma(X)$ و عليه، بوضع $\omega = \mathrm{d}\sigma$ نتحصّل على

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \omega(X)Y - \omega(Y)X + g(X,Y)\psi, \quad (138)$$

حيث ψ حقل شعاعي يعرّف بـ $g(\psi, X) = \omega(X)$.
من خلال التعريف، ψ هو حقل شعاعي شامل على M و عليه $\psi = \mathrm{grad}\sigma$.
بالنظر للعلاقة (138)، الكميتين $(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi})Y$ و $(\nabla_X\varphi)Y$ مرتبطتين بالعلاقة التالية

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi})Y &= (\overline{\nabla}_X\varphi)Y\\
&= \overline{\nabla}_X\varphi Y - \varphi\overline{\nabla}_X Y\\
&= (\nabla_X\varphi)Y - \omega(\varphi Y)X + \omega(Y)\varphi X + g(X,\varphi Y)\psi - g(X,Y)\varphi\psi,
\end{aligned}$$

و بما أن المنوّعة $(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$، أي لدينا العلاقة

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\overline{\varphi})Y &= \overline{\alpha}\big(\overline{g}(X,Y)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)X\big) + \overline{\beta}\big(\overline{g}(\overline{\varphi}X,Y)\overline{\xi} - \overline{\eta}(Y)\overline{\varphi}X\big)\\
&= \mathrm{e}^{-\sigma}\overline{\alpha}\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \mathrm{e}^{-\sigma}\overline{\beta}\big(g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big),
\end{aligned}$$

بوضع $\alpha = \mathrm{e}^{-\sigma}\overline{\alpha}$ و $\beta = \mathrm{e}^{-\sigma}\overline{\beta}$ تنتج المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.6.35. المنوّعة المترية التلامسية تقريبا (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β) إذا و فقط إذا وُجد شكل تفاضلي أحادي تام (*exacte*) ω على M حيث

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)Y &= \alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)\\ &+ \omega(\varphi Y)X-\omega(Y)\varphi X-g(X,\varphi Y)\psi+g(X,Y)\varphi\psi. \end{aligned} \tag{139}$$

نتيجة 2.6.11. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β) لدينا

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X-\big(\beta+\omega(\xi)\big)\varphi^2X+\eta(X)\varphi^2\psi. \tag{140}$$

البرهان 2.6.48. باستعمال (139) مع $Y=\xi$ ينتج

$$(\nabla_X\varphi)\xi = \alpha\big(\eta(X)\xi-X\big)-\beta\varphi X-\omega(\xi)\varphi X+\eta(X)\varphi\psi,$$

و بما أن

$$(\nabla_X\varphi)\xi=\nabla_X\varphi\xi-\varphi\nabla_X\xi=-\varphi\nabla_X\xi,$$

بتركيب φ نتحصّل على

$$-\varphi^2\nabla_X\xi = \alpha\varphi^3X-\big(\beta+\omega(\xi)\big)\varphi^2X+\eta(X)\varphi^2\psi,$$

و بتوظيف العلاقات $\varphi^3=-\varphi$ و $\eta(\nabla_X\xi)=0$ ينتج المطلوب.

قضية 2.6.28. لا تكون المنوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β) ناظمية إلّا إذا كان الحقلان الشعاعيان ψ و ξ مرتبطين خطيا، وتحديدا إذا كان $\psi=\omega(\xi)\xi$.

البرهان 2.6.49. المنوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β) ناظمية معناه

$$N^{(1)}(X,Y)=N_\varphi(X,Y)+2\mathrm{d}\eta(\mathrm{X},\mathrm{Y})\xi=0.$$

نضع $Y=\xi$ ثمّ بتطبيق η في الطرفين ينتج $\mathrm{d}\eta(X,\xi)=0$، و بالتالي $\nabla_\xi\xi=0$ حيث ∇ ترمز لوصلة لوفي-سيفيتا.
لكن، في نفس الوقت من (145) لدينا

$$\mathrm{d}\eta(X,\xi)=(\omega\wedge\eta+\alpha\phi)(X,\xi),$$

و هذا ما يستلزم

$$\nabla_\xi\xi=-\psi+\omega(\xi)\xi,$$

و بالتالي هذا تناقض إلاّ إذا كان $\psi=\omega(\xi)\xi$.

هنا، من حقنا أن نتساءل في حالة $\psi \neq \omega(\xi)\xi$، ماذا يساوي $N^{(1)}$ كما يحق لنا التساؤل عن قابلية المكاملة (أي عن N_φ) لبُنية ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β).

حسب التعريف، (φ, ξ, η, g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β) إذا و فقط إذا كانت المنوّعة $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ الناتجة عن التحويل المماثل

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \qquad \tilde{\xi} = \mathrm{e}^{\sigma}\xi, \qquad \tilde{\eta} = \mathrm{e}^{-\sigma}\eta, \qquad \tilde{g} = \mathrm{e}^{-2\sigma}g,$$

مع σ هي دالة قابلة للتفاضل على M هي منوّعة ماوراء-ساساكي من النوع $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. لدينا إذن

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{(1)} &= 0 \\ &= N_{\tilde{\varphi}} + 2\mathrm{d}\tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi} \\ &= N_\varphi + 2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\sigma}\eta) \otimes \mathrm{e}^{\sigma}\xi \\ &= N_\varphi - 2(\mathrm{d}\sigma \wedge \eta) \otimes \xi + 2\mathrm{d}\eta \otimes \xi \\ &= N^{(1)} - 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi, \end{aligned} \tag{141}$$

و بما أن $\mathrm{d}\tilde{\eta} = \tilde{\alpha}\tilde{\phi}$، يمكن أيضا أن نكتب

$$\begin{aligned} \tilde{N}^{(1)} &= 0 \\ &= N_{\tilde{\varphi}} + 2\tilde{\alpha}\tilde{\phi} \otimes \tilde{\xi} \\ &= N_\varphi + 2\alpha\phi \otimes \xi, \end{aligned} \tag{142}$$

ممّا يدفعنا لتقديم القضية التالية

قضية 2.6.29. إذا كانت (φ, ξ, η, g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β) فإنّ:

$$N^{(1)} = 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi, \tag{143}$$

$$N_\varphi = -2\alpha\phi \otimes \xi. \tag{144}$$

المبرهنة التالية تمكّن من تمييز المنوّعات ماوراء-ساساكي المحوّلة محليا من النوع (α, β)، نقدمها كمايلي

مبرهنة 2.6.36. نقول عن المنوّعة المترية التلامسية تقريبا $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ أنها منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β) إذا و فقط إذا وُجد شكل تفاضلي أحادي تام ω على M حيث

$$\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta + \alpha\phi, \quad \mathrm{d}\phi = 2(\omega + \beta\eta) \wedge \phi, \quad N^{(1)} = 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi. \tag{145}$$

البرهان 2.6.50. نفرض أن (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β). علما أنه من أجل كل حقلي أشعة X و Y على M لدينا

$$2\mathrm{d}\eta(X,Y)=g(\nabla_X\xi,Y)-g(\nabla_Y\xi,X),$$

و باستعمال (140)، مع ω شكل تفاضلي أحادي تام (فهو مغلق) نتحصّل على

$$\begin{aligned}2\mathrm{d}\eta(X,Y) &= g\Big(-\alpha\varphi X-\big(\beta+\omega(\xi)\big)\varphi^2X+\eta(X)\varphi^2\psi,Y\Big)\\ &\quad -g\Big(-\alpha\varphi Y-\big(\beta+\omega(\xi)\big)\varphi^2Y+\eta(Y)\varphi^2\psi,X\Big)\\ &= 2\alpha g(X,\varphi Y)+\eta(Y)\omega(X)-\eta(X)\omega(Y)\\ &= 2(\omega\wedge\eta+\alpha\phi)(X,Y).\end{aligned}$$

من أجل العلاقة الثانية، نستعمل المشتقة الخارجية للشكل التفاضلي الأساسي ϕ المعطاة بـ

$$3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) = g\big(Y,(\nabla_X\varphi)Z\big)+g\big(Z,(\nabla_Y\varphi)X\big)+g\big(X,(\nabla_Z\varphi)Y\big),$$

و بإدراج العلاقة (139) أي

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)Y &= \alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)\\ &+\ \omega(\varphi Y)X-\omega(Y)\varphi X-g(X,\varphi Y)\psi+g(X,Y)\varphi\psi.\end{aligned}$$

مع حساب طويل نوعا ما لكنه بسيط، نتحصّل مباشرة على مانريد.

من جهة أخرى، بما أنّ (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β) فإنه يوجود تحويل مماثل يحوّل هذه المنوّعة الى منوّعة ماوراء الساساكي العادية $(M,\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ ، أي يوجد دالة f حيث

$$\mathrm{d}\tilde{\eta}=\tilde{\alpha}\tilde{\phi}\text{،}\quad \mathrm{d}\tilde{\phi}=2\tilde{\beta}\tilde{\eta}\wedge\tilde{\phi}\quad \text{و}\quad \tilde{N}^{(1)}=0$$

مع $\tilde{\eta}=\mathrm{e}^f\eta$، $\tilde{\phi}=\mathrm{e}^{2f}\phi$ و $\tilde{\alpha}$ ، $\tilde{\beta}$ هما دالتان على M. إذن، بما أن $\tilde{N}^{(1)}=0$ من (143) ينتج

$$N^{(1)}=2(\omega\wedge\eta)\otimes\xi.$$

عكسيا، سنفرض أنّ (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة مترية تلامسية تقريبا تحقّق

$$\mathrm{d}\eta=\omega\wedge\eta+\alpha\phi,\quad \mathrm{d}\phi=2(\omega+\beta\eta)\wedge\phi,\quad N^{(1)}=2(\omega\wedge\eta)\otimes\xi. \tag{146}$$

مع α و β هما دالتان على M و ω شكل تفاضلي أحادي تام أي يوجد σ دالة قابلة للتفاضل على M حيث $\omega=\mathrm{d}\sigma$.

باستعمال نتيجة ديفيد بلير ([15]، صفحة 82)

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) &= 3\mathrm{d}\phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3\mathrm{d}\phi(X, Y, Z) \\ &+ g\big(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X\big) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &+ 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \qquad (147) \end{aligned}$$

وأيضا من ([15]، صفحة 81) لدينا

$$\begin{aligned} N^{(2)}(Y, Z) &= \big(\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta\big)(Z) - \big(\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta\big)(Y) \\ &= \varphi Y\big(\eta(Z)\big) - \eta\big([\varphi Y, Z]\big) - \varphi Z\big(\eta(Y)\big) + \eta\big([\varphi Z, Y]\big) \\ &= 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y, Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z, Y), \qquad (148) \end{aligned}$$

حيث $\mathcal{L}_X$ يرمز لمشتقة لي بالنسبة للحقل الشعاعي X.

و لدينا أيضا من أجل كل X، Y و Z حقول أشعة على M

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(X, Y) &= 2(\omega \wedge \eta + \alpha\phi)(X, Y) \\ &= 2\omega \wedge \eta(X, Y) + 2\alpha\phi(X, Y) \\ &= \omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(X) + 2\alpha g(X, \varphi Y), \qquad (149) \end{aligned}$$

و كذلك

$$\begin{aligned} 3\mathrm{d}\phi(X, Y, Z) &= 3\big(2(\omega + \beta\eta) \wedge \phi\big)(X, Y, Z) \\ &= 2(\omega + \beta\eta)(X)\phi(Y, Z) + 2(\omega + \beta\eta)(Y)\phi(Z, X) \\ &\quad +2(\omega + \beta\eta)(Z)\phi(X, Y) \\ &= 2\big(\omega(X) + \beta\eta(X)\big)g(Y, \varphi Z) + 2\big(\omega(Y) + \beta\eta(Y)\big)g(Z, \varphi X) \\ &\quad 2 + \big(\omega(Z) + \beta\eta(Z)\big)g(X, \varphi Y), \qquad (150) \end{aligned}$$

بتعويض (148)، (149) و (150) في (147) مع أخذ بعين الإعتبار

$$N^{(1)} = 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi \Rightarrow g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) = 0,$$

نجد

$$\begin{aligned} (\nabla_X\varphi)Y &= \alpha\big(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big) \\ &+ \omega(\varphi Y)X - \omega(Y)\varphi X - g(X, \varphi Y)\psi + g(X, Y)\varphi\psi. \end{aligned}$$

و منه $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β). وبهذا ينتهي البرهان.

فيما يلي، و حتى نثبت وجود مثل هذه المنوّعات، نقدّم هنا طريقة لإنشاء منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β) انطلاقا من منوّعة هارميسية تقريبا و التي هي منوّعة مركبة تقريبا تتمّع بمترك ريماني متلائم مع البنية المركبة تقريبا (يفضل الرجوع لمقياس البُنى المركبة أو على الأقل الاطلاع على التذكير في الصفحة 77).

سنعتبر في ما هو آت (N, J, h) منوّعة كالير محوّلة محليا مع $\mathrm{d}\Omega = 2\mathrm{d}\rho \wedge \Omega$، حيث ρ دالة لا تنعدم أبدا على N و نعرّف على المنوّعة الجُداء $M = N \times \mathbb{R}$، الموتّرات الهندسية التالية:

$$g = \mathrm{e}^{2\tau}h + \mathrm{e}^{2\rho}dt^2, \quad \xi = \mathrm{e}^{-\rho}\partial t, \quad \eta = \mathrm{e}^{\rho}dt, \quad \varphi X = JX, \quad \varphi\partial t = 0, \quad (151)$$

حيث τ هي دالة على $\mathbb{R}$. بحسابات مباشرة، يمكننا التحقّق من أنّ

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

أي (φ, ξ, η, g) هي بُنية مترية تلامسية تقريبا.
بالإظافة الى ذلك، لدينا $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\rho \wedge \eta$ و هذا يستلزم $\omega = \mathrm{d}\rho$.

كذلك، الشكل التفاضلي الأساسي ϕ للبنية (φ, ξ, η, g) هو

$$\begin{aligned}
\phi\big((X\ , a\partial t), \big(Y, b\partial t)\big) &= g\big((X, a\partial t), \varphi(Y, b\partial t)\big) \\
&= g\big((X, a\partial t), (JY, b0)\big) \\
&= \mathrm{e}^{2\tau}h(X, JY) \\
&= \mathrm{e}^{2\tau}\Omega(X, Y),
\end{aligned}$$

فيكون

$$\phi = \mathrm{e}^{2\tau}\Omega. \quad (152)$$

و بما أن (N, J, h) هي منوّعة كالير محوّلة محليا مع $\mathrm{d}\Omega = 2\mathrm{d}\rho \wedge \Omega$ و $N_J(X, Y) = 0$ هذا ما يعطي

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi &= 2\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\tau \wedge \Omega + \mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\Omega \\
&= 2\mathrm{d}\tau \wedge \phi + 2\mathrm{e}^{2\tau}\mathrm{d}\rho \wedge \Omega \\
&= 2\tau'\mathrm{e}^{-\rho}\eta \wedge \phi + 2\mathrm{d}\rho \wedge \phi \\
&= 2(\mathrm{d}\rho + \tau'\mathrm{e}^{-\rho}\eta) \wedge \phi,
\end{aligned}$$

حيث $\tau' = \frac{\partial \tau}{\partial t}$. من خلال عبارة φ، يمكننا اثبات أن

$$N_\varphi(X, Y) = N_J(X, Y), \qquad N_\varphi(X, a\partial t) = 0,$$

و معناه

$$N_\varphi\big((X, a\partial t), (Y, b\partial t)\big) = N_J(X, Y) = 0.$$

و أخيرا، بتجميع لكل هذه المعطيات، يمكننا تقديم المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.6.37. لتكن (N, J, h) منوّعة كالير محوّلة محليا. المنوّعة الجُداء $M = N\times\mathbb{R}$ المزوّدة بالبُنية المترية التلامسية تقريبا المعرّفة أعلاه هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $(0, \tau' \mathrm{e}^{-\rho})$ مع $\omega = \mathrm{d}\rho$.

من أجل الإنشاء الثاني، نفرض أن (N, J, h) منوّعة كالير تامّة أي شكلها الأساسي Ω هو شكل تفاضلي تام بمعنى ($\Omega = \mathrm{d}\theta$). و لتكن $M = \mathbb{R}\times N$ منوّعة الجُداء الناتجة بضرب المنوّعة N مع المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$ و المزوّدة بالمترك الريماني

$$g = \mathrm{e}^{2\rho}h + \eta\otimes\eta \qquad \text{مع} \qquad \eta = \mathrm{e}^{\rho}(dr + \theta)$$

حيث r هو الاحداثي القياسي بالنسبة للأساس ∂r على $\mathbb{R}$ و ρ دالة لا تنعدم أبدا على N. من أجل كل $X, Y \in \Gamma(TN)$، لدينا

$$\begin{cases} g(X, Y) = \mathrm{e}^{2\rho}\big(h(X, Y) + \theta(X)\theta(Y)\big), \\ g(X, \partial r) = \mathrm{e}^{2\rho}\theta(X), \\ g(\partial r, \partial r) = \mathrm{e}^{2\rho}. \end{cases}$$

قضية 2.6.30. نضع

$$\xi = \mathrm{e}^{-\rho}\partial r, \quad \varphi\partial r = 0, \quad \varphi X = JX - \mathrm{e}^{\rho}\theta(JX)\xi, \quad \forall X \in \Gamma(TN). \qquad (153)$$

إذن (φ, ξ, η, g) تعرّف بنُية مترية تلامسية تقريبا على M.

البرهان 2.6.51. لدينا $\eta = \mathrm{e}^{\rho}(dr + \theta)$ و $\xi = \mathrm{e}^{-\rho}\partial r$، و عليه $\eta(\xi) = 1$.
باعتبار $\varphi\partial r = 0$، ينتج $\varphi^2\partial r = 0$ و من جهة أخرى، $-\partial r + \eta(\partial r)\partial r = 0$.
و كذلك لدينا من أجل كل $X \in \Gamma(TN)$

$$\begin{aligned} \varphi^2 X &= \varphi\big(JX - \mathrm{e}^{\rho}\theta(JX)\xi\big) \\ &= \varphi(JX) \\ &= J^2X - \mathrm{e}^{\rho}\theta(J^2X)\xi \\ &= -X + \mathrm{e}^{\rho}\theta(X)\xi \\ &= -X + \eta(X)\xi. \end{aligned}$$

و من أجل كل $X, Y \in \Gamma(TN)$، لدينا

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= g\big(JX - \mathrm{e}^{\rho}\theta(JX)\xi, JY - \mathrm{e}^{\rho}\theta(JY)\xi\big) \\ &= g(JX, JY) - \mathrm{e}^{\rho}\theta(JY)g(JX, \xi) - \mathrm{e}^{\rho}\theta(JX)g(\xi, JY) \\ &\quad + \mathrm{e}^{2\rho}\theta(JX)\theta(JY)g(\xi, \xi), \end{aligned}$$

من خلال عبارة المترك الريماني g المعطاة أعلاه، نحصّل على

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= \mathrm{e}^{2\rho}h(JX, JY) + \mathrm{e}^{2\rho}\theta(JX)\theta(JY) - \mathrm{e}^{2\rho}\theta(JX)\theta(JY) \\ &\quad - \mathrm{e}^{2\rho}\theta(JX)\theta(JY) + \mathrm{e}^{2\rho}\theta(JX)\theta(JY) \\ &= \mathrm{e}^{2\rho}h(JX, JY), \end{aligned}$$

و بما أن $h(JX, JY) = h(X, Y)$ و $g(X, Y) = \mathrm{e}^{2\rho}h(X, Y) + \mathrm{e}^{2\rho}\theta(X)\theta(Y)$، نستنتج أن

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= g(X, Y) - \mathrm{e}^{2\rho}\theta(X)\theta(Y) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

و مادام $\varphi\xi = 0$، $g(X, \xi) = \mathrm{e}^{\rho}\theta(X) = \eta(X)$ و $g(\xi, \xi) = \eta(\xi) = 1$، ينتج

$$g(\varphi X, \varphi\xi) = g(X, \xi) - \eta(X)\eta(\xi) = 0,$$

$$g(\varphi\xi, \varphi\xi) = g(\xi, \xi) - \eta(\xi)\eta(\xi) = 0.$$

الشكل التفاضلي الأساسي ϕ للبنية (φ, ξ, η, g) هو

$$\begin{aligned} \phi\big((a\partial r, X), (b\partial r, Y)\big) &= g\big((a\mathrm{e}^{\rho}\xi, X), \varphi(b\mathrm{e}^{\rho}\xi, Y)\big) \\ &= g\big((a\mathrm{e}^{\rho}\xi, X), (-\mathrm{e}^{\rho}\theta(JY)\xi, JY)\big) \\ &= -a\mathrm{e}^{2\rho}g(\xi, \xi)\theta(JY) + a\mathrm{e}^{\rho}g(\xi, JY) \\ &\quad - \mathrm{e}^{\rho}\theta(JY)g(X, \xi) + g(X, JY) \\ &= -a\mathrm{e}^{2\rho}\theta(JY) + a\mathrm{e}^{2\rho}\theta(JY) - \mathrm{e}^{2\rho}\theta(JY)\theta(X) \\ &\quad + \mathrm{e}^{2\rho}h(X, JY) + \mathrm{e}^{2\rho}\theta(X)\theta(JY) \\ &= \mathrm{e}^{2\rho}\Omega(X, Y). \end{aligned}$$

و بالتالي، لدينا

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \mathrm{e}^{\rho}(dr + \theta) \\ \phi = \mathrm{e}^{2\rho}\Omega \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}\eta = \mathrm{e}^{\rho}\mathrm{d}\rho \wedge (dr + \theta) + \mathrm{e}^{\rho}\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\phi = 2\mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{d}\rho \wedge \Omega + \mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{d}\Omega, \end{array} \right.$$

و بما أن $\Omega = \mathrm{d}\theta$ و $\phi = \mathrm{e}^{2\rho}\Omega$ فينتج

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\rho \wedge \eta + \mathrm{e}^{-\rho}\phi \\ \mathrm{d}\phi = 2\mathrm{d}\rho \wedge \phi. \end{cases}$$

و هذا يؤكد المبرهنة التالية

مبرهنة 2.6.38. إذا كانت (N, J, h) هي منوّعة كاليرية ذات شكل أساسي تام (أي $\Omega = \mathrm{d}\theta$) فإن المنوّعة $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ المعرّفة أعلاه هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $(\mathrm{e}^{-\rho}, 0)$ مع $\omega = \mathrm{d}\rho$.

العلاقة بين بُنية ماوراء-ساساكي و البُنى α-ساساكي، β- كانموتسو تمت دراستها من قبل ماريرو (أنظر القضية 2.3.13). ما خَلُص إليه ماريرو في حالة بُنى ماوراء-ساساكي يبقى ساري المفعول على بُنى ماوراء-ساساكي المحوّلة محليا أي في البُعد الأكبر تماما من 3 ستنعدم α أو β بمعنى آخر في البُعد الثلاثي فقط يمكن أن تظهر α و β معا (لا ينعدمان معا). لإثبات هذا الأمر نقدّم فيما يلي مثالا ملموسا على النحو التالي:

مثال 2.6.17. لتكن (x, y, z) الإحداثيات الديكارتية للفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^3$. نُعرّف على $\mathbb{R}^3$ مترك ريماني g كمايلي

$$g = \mathrm{e}^{2f} \begin{pmatrix} \rho^2 + \tau^2 & 0 & -\tau \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ -\tau & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

حيث f، ρ وτ هي دوال لا تنعدم أبدا على $\mathbb{R}^3$.

و كذلك نعرّف بنُية مترية تلامسية تقريبا (φ, ξ, η) على $\mathbb{R}^3$ كمايلي

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \mathrm{e}^{-f} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \mathrm{e}^{f}(-\tau, 0, 1).$$

الشكل الأساسي الأحادي η و الشكل الأساسي الثنائي ϕ لهما الشكل التالي

$$\phi = -2\rho^2\mathrm{e}^{2f} dx \wedge dy \qquad \text{و} \qquad \eta = \mathrm{e}^{f}(dz - \tau dx)$$

و عليه

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta = (\mathrm{d}f + \tau_3 dx) \wedge \eta - \frac{\tau_2}{2\rho^2}\mathrm{e}^{-f}\phi \\ \mathrm{d}\phi = 2\Big(\frac{\rho_3}{\rho} + f_3\Big) dz \wedge \phi, \end{cases}$$

حيث $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$، $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ و $\tau_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$.

بتوظيف (145)، (φ, ξ, η, g) هي بنُية ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β) إذا و فقط إذا كان

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{\tau_2}{2\rho^2}\mathrm{e}^{-f} \\ \omega + \beta\eta = \Big(\frac{\rho_3}{\rho} + f_3\Big)dz \\ \omega = \mathrm{d}f + \tau_3 dx. \end{cases} \tag{154}$$

من المعادلتين الثانية و الثالثة من الجملة (154)، ينتج

$$(f_1 + \tau_3 - \beta\tau\mathrm{e}^f)dx + f_2 dy + (f_3 + \beta\mathrm{e}^f)dz = \Big(\frac{\rho_3}{\rho} + f_3\Big)dz, \tag{155}$$

و هذا ما يعطي

$$\begin{cases} f_1 + \tau_3 = \frac{\rho_3}{\rho}\tau \\ f_2 = 0 \\ \beta = \frac{\rho_3}{\rho}\mathrm{e}^{-f}. \end{cases} \tag{156}$$

الشرط $\mathrm{d}\omega = 0$ يستلزم $\tau_{32} = \tau_{33} = 0$ و بالتالي المعادلة الثالثة في الجملة (154) تصبح

$$\omega = (f_1 + \tau_3)dx + f_3 dz. \tag{157}$$

و عليه، يمكن ملاحظة أن (φ, ξ, η, g) هي بنُية ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $\Big(-\frac{\tau_2}{2\rho^2}\mathrm{e}^{-f}\ ,\ \frac{\rho_3}{\rho}\mathrm{e}^{-f}\Big)$ مع $\omega = (f_1 + \tau_3)dx + f_3 dz$ إذا و فقط إذا كان $f_1 + \tau_3 = \frac{\rho_3}{\rho}\tau$ و $f_2 = \tau_{32} = \tau_{33} = 0$.

و نستغّل هنا هذا المثال العام ذي الثلاثة وسطاء لتقديم حالات متنوّعة ملموسة لبنُية ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β) على $\mathbb{R}^3$. **مثلا:**

(1) إذا كان $f = 0$، $\rho = 1$ و $\tau = z$ فإن $\omega = dx$، $\alpha = 0$ و $\beta = 0$.

(2) إذا كان $f = 0$، $\rho = \mathrm{e}^z$ و $\tau = z$ فإن $\omega = dx$، $\alpha = 0$ و $\beta = 1$.

(3) إذا كان $f = x$، $\rho = 1$ و $\tau = -2y\mathrm{e}^x$ فإن $\omega = dx$، $\alpha = 1$ و $\beta = 0$.

(4) إذا كان $f = x$، $\rho = \mathrm{e}^z$ و $\tau = -2y\mathrm{e}^x$ فإن $\omega = dx$، $\alpha = \mathrm{e}^{-2z}$ و $\beta = \mathrm{e}^{-x}$.

(5) إذا كان $f = 0$، $\rho = \mathrm{e}^z$ و $\tau = xz - 2y$ فإن $\omega = xdx$، $\alpha = \mathrm{e}^{-2z}$ و $\beta = 1$.

و الآن، بملاحظة أن المنوّعات ماوراء-ساساكي محوّلة محليا متعلّقة بثلاثة وسطاء α، β و ψ فإننا سنقترح هنا تسمية مناسبة لهذا النوع من المنوّعات، نسميها "**منوّعات ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع** (α, β, γ)" حيث $\gamma = \omega(\psi)$ كما يمكننا استعمال التسمية المختصرة "**منوّعات ماوراء-ساساكي المعمّمة من النوع** (α, β, γ)".

و يبدوا واضحا أن منوّعات ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $(0, 0, 0)$ هي منوّعات ثنائية التماسك، منوّعات ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $(1, 0, 0)$ هي منوّعات ساساكي و منوّعات ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $(0, 1, 0)$ هي منوّعات كانموتسو بالإظافة الى ذلك، منوّعات ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $(0, 0, 1)$ هي منوعات ركن الوحدة (أي $|\psi| = 1$).

2.6.2 منوّعات ماوراء-ساساكي المعمّمة ثلاثية الأبعاد

باعتبار أن هذا الكتاب يهتم بالبُعد الثالث فقط، سنركّز في كل ماهو آت على منوّعات ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α, β, γ) ثلاثية الأبعاد.

و كما رأينا في منوّعات الرّكن، الحقل الشعاعي الشامل ψ ليس بالضرورة واحديا (أي $\gamma = 1$)، و عليه مبدئيا إذا كان $|\psi|^2 = \gamma \neq 0$ المجموعة $\{\xi, \frac{\psi}{|\psi|}, \frac{\varphi\psi}{|\psi|}\}$ تشكل أساسا متعامدا و متجانسا شاملا نسميه الأساس الاعتيادي.

اعتمادا على (145) و القضية الهامّة لأولشاك 2.1.10، يمكننا تقديم المبرهنة التالية:

مبرهنة 2.6.39. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة ثلاثية الأبعاد لدينا

$$
\begin{aligned}
(1): \quad (\nabla_X\varphi)Y \;&=\; \alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big)\\
&\quad + \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big),
\end{aligned}
$$

$$(2): \quad \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta \wedge \phi,$$

$$(3): \quad \mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta + \alpha\phi,$$

حيث $2\alpha = tr(\varphi\nabla\xi)$ و $2\beta = \mathrm{div}\xi$.

البرهان 2.6.52. نعتبر$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة ثلاثية الأبعاد.

بالمقارنة بين القضية 2.1.10 و (145) نستنتج أنّ $\omega = -\nabla_\xi\eta$ و هذا يستلزم $\psi = -\nabla_\xi\xi$، هذا يؤكد أنّ الحقلين الشعاعيين ξ و ψ هما متعامدين لأن

$$g(\xi, \psi) = -g(\xi, \nabla_\xi\xi) = 0,$$

و هذا معناه $\eta(\psi) = \omega(\xi) = 0$.

إذن، من العلاقة (140) نستنتج أن

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X - \eta(X)\psi. \tag{158}$$

(1) : لإثبات صحّة العلاقة الأولى، نعوّض $\nabla_X\xi$ في العلاقة الأولى من القضية 2.1.10.
(2) : بتوظيف الأساس المتعامد $\{\xi, \psi, \varphi\psi\}$، من أجل كل حقل شعاعي X على M لدينا

$$\varphi X = g(\varphi X, \xi)\xi + g(\varphi X, \psi)\psi + g(\varphi X, \varphi\psi)\varphi\psi.$$

أي

$$\varphi X = \omega(\varphi X)\psi + \omega(X)\varphi\psi. \tag{159}$$

و بالتالي ينتج

$$\begin{aligned} \phi(X,Y) &= g(X,\varphi Y) \\ &= \omega(\varphi Y)\omega(X) - \omega(Y)\omega(\varphi X) \\ &= 2\big(\omega\wedge(\omega\circ\varphi)\big)(X,Y). \end{aligned}$$

و عليه

$$\phi = 2\,\omega\wedge(\omega\circ\varphi), \tag{160}$$

و هذا يستلزم $\omega\wedge\phi = 0$ و من (145) نستنتج $\mathrm{d}\phi = 2\beta\eta\wedge\phi$.

لإثبات صحة العلاقة الأخيرة يكفي استعمال العلاقة الشهيرة

$$2\mathrm{d}\eta(X,Y) = g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_Y\xi, X)$$

مع عبارة $\nabla_X\xi$ المعطاة في (158).

مبرهنة 2.6.40. لتكن $(M^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد. نقول عن M أنها منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة من النوع (α, β, γ) إذا و فقط إذا كان

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X - \eta(X)\psi. \tag{161}$$

حيث $\psi = -\nabla_\xi\xi$.

البرهان 2.6.53. نفرض أن $\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X - \eta(X)\psi$، من أجل كل حقل شعاعي X على M. من العلاقة الأولى في القضية 2.1.10، لدينا

$$\begin{aligned} (\nabla_X\varphi)Y &= \alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big) \\ &\quad + \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big), \end{aligned} \tag{162}$$

مع $\omega(X)=g(\psi,X)$.
و بما أنّ $\{\xi,\psi,\varphi\psi\}$ هي أساس متعامد، ينتج

$$X=\eta(X)\xi+\omega(X)\psi-\omega(\varphi X)\varphi\psi \quad \text{و} \quad \varphi X=\omega(\varphi X)\psi+\omega(X)\varphi\psi.$$

و عليه

$$\begin{aligned}
&\omega(\varphi Y)X-\omega(Y)\varphi X-g(X,\varphi Y)\psi+g(X,Y)\varphi\psi\\
=\;&\omega(\varphi Y)\big(\eta(X)\xi+\omega(X)\psi-\omega(\varphi X)\varphi\psi\big)-\omega(Y)\big(\omega(\varphi X)\psi+\omega(X)\varphi\psi\big)\\
&+g\big(\omega(\varphi X)\psi+\omega(X)\varphi\psi,Y\big)\psi+g(\eta(X)\xi+\omega(X)\psi-\omega(\varphi X)\varphi\psi,Y)\varphi\psi\\
=\;&\eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\psi\big),
\end{aligned}$$

بالتعويض في (162) مع التبسيط نتحصّل على

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\varphi)Y \;=\;& \alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)\\
&+\omega(\varphi Y)X-\omega(Y)\varphi X-g(X,\varphi Y)\psi+g(X,Y)\varphi\psi,
\end{aligned}$$

و اعتمادا على المبرهنة 2.6.35 المنوّعة هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β,γ) .
عكسيا، نفرض أنّ (M^3,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع (α,β,γ)، إذن من المبرهنة 2.6.39 ينتج

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\varphi)Y \;=\;& \alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)\\
&+\eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\psi\big),
\end{aligned}$$

بتعويض $Y=\xi$ نجد

$$-\varphi\nabla_X\xi=\alpha\varphi^2X-\beta\eta(Y)\varphi X+\eta(X)\varphi^2\psi,$$

و عليه

$$\begin{aligned}
\nabla_X\xi \;&=\; \alpha\varphi^3X-\beta\varphi^2X+\eta(X)\varphi^2\psi\\
&=\; -\alpha\varphi X-\beta\varphi^2X-\eta(X)\psi.
\end{aligned}$$

و بهذا ينتهي البرهان.

المبرهنة التالية تبيّن أن منوّعات ماوراء-ساساكي المعمّمة ثلاثية الأبعاد متحكّم بها كليا.

مبرهنة 2.6.41. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة ثلاثية الأبعاد، مركبات وصلة لوفي-سيفيتا تعطى كمايلي:

(1 $\nabla_\xi\xi = -\psi, \qquad \nabla_\psi\xi = \beta\psi - \alpha\varphi\psi, \qquad \nabla_{\varphi\psi}\xi = \alpha\psi + \beta\varphi\psi,$

(2 $\nabla_\psi\psi = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\gamma, \qquad \nabla_\xi\psi = \gamma\xi - \beta\psi - \alpha\varphi\psi,$
$$\nabla_{\varphi\psi}\psi = -\alpha\gamma\xi + \tfrac{1}{2}\varphi\psi(\gamma)\psi + \big(\gamma\big(\mathrm{div}\psi - \gamma\big) - \tfrac{1}{2}\psi(\gamma)\big)\,\varphi\psi,$$

(3 $\nabla_\psi\varphi\psi = \alpha\gamma\xi + \frac{1}{2}\varphi\mathrm{grad}\gamma, \qquad \nabla_\xi\varphi\psi = \alpha\psi - \beta\varphi\psi,$
$$\nabla_{\varphi\psi}\varphi\psi = -\beta\gamma\xi - \big(\gamma\big(\mathrm{div}\psi - \gamma\big) - \tfrac{1}{2}\psi(\gamma)\big)\,\psi + \tfrac{1}{2}\varphi\psi(\gamma)\varphi\psi.$$

البرهان 2.6.54. لتكن $(M^3,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة ثلاثية الأبعاد و X, Y حقلي أشعة كيفيين على M.

المركّبات الثلاثة الأولى تنتج مباشرة من (161).

من أجل المركّبة الأولى من (2)، لدينا

$$\begin{aligned} g(\nabla_\xi\psi, X) &= g(\nabla_X\psi,\xi) \qquad\qquad (\mathrm{d}\omega = 0) \\ &= -g(\nabla_X\xi,\psi), \end{aligned}$$

باستعمال (161)، نحصل على $\nabla_\xi\psi = \gamma\xi - \alpha\varphi\psi - \beta\psi$.

من أجل المركّبة الثانية، لدينا

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\omega(\psi, X) = 0 \Leftrightarrow g(\nabla_\psi\psi, X) &= g(\nabla_X\psi,\psi) \\ &= X(\gamma) - g(\psi,\nabla_X\psi) \\ &= \frac{1}{2}g\left(\mathrm{grad}\gamma, X\right), \end{aligned}$$

هذا ما يعطي $\nabla_\psi\psi = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\gamma$.

لإثبات صحّة المركّبة الثالثة في (2)، نحتاج حساب $\mathrm{div}\psi$. و عليه، نعتبر الأساس المتعامد و المتجانس $\{\xi, \frac{\psi}{|\psi|}, \frac{\varphi\psi}{|\psi|}\}$، حيث $|\psi|^2 = \gamma$. إذن

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\psi &= g(\nabla_\xi\psi,\xi) + \frac{1}{\gamma}g(\nabla_\psi\psi,\psi) + \frac{1}{\gamma}g(\nabla_{\varphi\psi}\psi,\varphi\psi) \\ &= \frac{1}{\gamma}\left(\gamma^2 + \frac{1}{2}\psi(\gamma) + g(\nabla_{\varphi\psi}\psi,\varphi\psi)\right), \end{aligned}$$

ما يستلزم

$$g(\nabla_{\varphi\psi}\psi,\varphi\psi) = \gamma\mathrm{div}\psi - \gamma^2 - \frac{1}{2}\psi(\gamma). \qquad (163)$$

نعلم أنّ

$$\nabla_{\varphi\psi}\psi = g(\nabla_{\varphi\psi}\psi, \xi)\xi + \frac{1}{\gamma}g(\nabla_{\varphi\psi}\psi, \psi)\psi + \frac{1}{\gamma}g(\nabla_{\varphi\psi}\psi, \varphi\psi)\varphi\psi \tag{164}$$

لنحسب

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\varphi\psi}\psi, \xi) &= -g(\nabla_{\varphi\psi}\xi, \psi) \\ &= -\alpha\gamma, \end{aligned} \tag{165}$$

و

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\varphi\psi}\psi, \psi) &= \varphi\psi(\gamma) - g(\nabla_{\varphi\psi}\psi, \psi) \\ &= \frac{1}{2}\varphi\psi(\gamma), \end{aligned} \tag{166}$$

الآن، بتعويض (163)، (165) و (166) في (164) نتحصّل على

$$\nabla_{\varphi\psi}\psi = -\alpha\gamma\xi + \frac{1}{2}\varphi\psi(\gamma)\psi + \left(\gamma\big(\mathrm{div}\psi - \gamma\big) - \frac{1}{2}\psi(\gamma)\right)\varphi\psi.$$

من أجل باقي المركّبات يكفي استعمال العلاقة

$$\nabla_X\varphi Y = (\nabla_X\varphi)Y + \varphi\nabla_X Y.$$

هناك حالة خاصة هامة لا بأس أن نلتفت إليها هنا و نقصد الحالة التي يكون فيها ψ حقلا شعاعيا واحديا أي $\gamma = 1$، فمن خلال المبرهنة 2.6.41، يمكن الحصول على النتيجة التالية

نتيجة 2.6.12. من أجل كل منوّعة ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $(\alpha, \beta, 1)$، لدينا

$$\nabla_\xi\xi = -\psi, \qquad \nabla_\psi\xi = \beta\psi - \alpha\varphi\psi, \qquad \nabla_{\varphi\psi}\xi = \alpha\psi + \beta\varphi\psi,$$

$$\begin{aligned} &\nabla_\xi\psi = \xi - \beta\psi - \alpha\varphi\psi, \qquad \nabla_\psi\psi = 0 \qquad \nabla_{\varphi\psi}\psi = (\mathrm{div}\psi - 1)\,\varphi\psi, \\ &\nabla_\xi\varphi\psi = \alpha\psi - \beta\varphi\psi, \qquad \nabla_\psi\varphi\psi = 0, \qquad \nabla_{\varphi\psi}\varphi\psi = (1 - \mathrm{div}\psi)\,\psi. \end{aligned}$$

مثال 2.6.18. اعتمادا على المثال أعلاه 2.6.17، مع الأخذ بعين الإعتبار الشرط $\omega(\xi) = 0$، تكون (φ, ξ, η, g) هي بنُية ماوراء-ساساكي محوّلة محليا من النوع $\left(-\frac{\tau_2}{2\rho^2}\mathrm{e}^{-f}\ ,\ \frac{\rho_3}{\rho}\mathrm{e}^{-f}\ ,\ 1\right)$ مع

$$\psi = \tfrac{\tau\rho_3}{\rho^3}\mathrm{e}^{-2f}(\partial x + \tau\partial z) \quad \text{و} \quad \omega = (f_1 + \tau_3)dx$$

إذا كان

$$f_1 + \tau_3 = \frac{\rho_3}{\rho}\tau \quad \text{و} \quad f_2 = f_3 = \tau_{32} = \tau_{33} = 0.$$

و للتحقّق من المبرهنتين 2.6.40 و 2.6.41 نعطي الأساس المتعامد و المتجانس التالي

$$e_1 = \frac{e^{-f}}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial z}\Big), \qquad e_2 = \frac{e^{-f}}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}, \qquad e_3 = \xi = e^{-f}\frac{\partial}{\partial z}.$$

و بالتالي مركّبات وصلة لوفي-سيفيتا المرفقة بالمترك g تعطى كمايلي:

$$\nabla_{e_1}e_1 = -\frac{e^{-f}}{\rho^2}\big(\rho_2 e_2 + \rho\rho_3 e_3\big), \quad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{e^{-f}}{2\rho^2}\big(2\rho_2 e_1 - \tau_2 e_3\big),$$

$$\nabla_{e_1}e_3 = \frac{e^{-f}}{2\rho^2}\big(2\rho_3\rho e_1 + \tau_2 e_2\big), \quad \nabla_{e_2}e_1 = \frac{e^{-f}}{2\rho^2}\big(2(f_1\rho + \rho_1 + \tau\rho_3)e_2 + \tau_2 e_3\big),$$

$$\nabla_{e_2}e_2 = -\frac{e^{-f}}{\rho^2}\big((f_1\rho + \rho_1 + \tau\rho_3)e_2 + \rho_3\rho e_3\big), \quad \nabla_{e_2}e_3 = \frac{e^{-f}}{2\rho^2}\big(-\tau_2 e_1 + 2\rho_3\rho e_2\big),$$

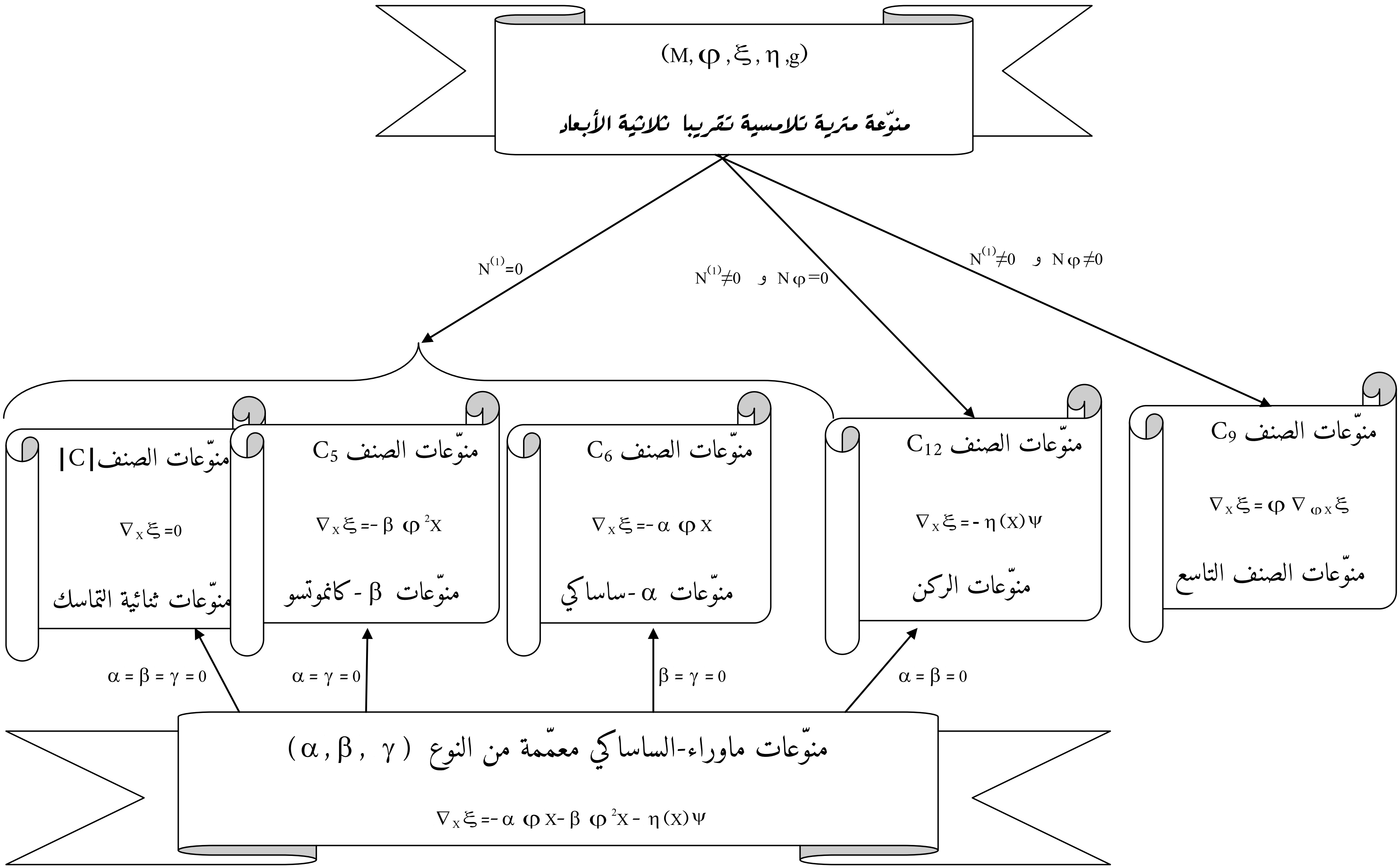
$$\nabla_{e_3}e_1 = \frac{e^{-f}}{2\rho^2}\big(\tau_2 e_2 + 2\rho_3\tau e_3\big), \quad \nabla_{e_3}e_2 = -\frac{\tau_2 e^{-f}}{2\rho^2}e_1, \quad \nabla_{e_3}e_3 = -\frac{\tau\rho_3 e^{-f}}{\rho^2}e_1.$$

و الآن، يمكننا بسهولة التحقّق من أنّه من أجل كل $i \in \{1,2,3\}$ لدينا

$$\nabla_{e_i}\xi = -\alpha\varphi e_i - \beta\varphi^2 e_i - \eta(e_i)\psi,$$

حيث

$$\beta = \frac{\rho_3}{\rho}\mathrm{e}^{-f}, \qquad \alpha = -\frac{\tau_2}{2\rho^2}\mathrm{e}^{-f}, \quad \text{و} \quad \psi = \frac{\tau\rho_3 e^{-f}}{\rho^2}e_1.$$



مخطط (2) يُلخّص المنوّعات المترية التلامسية تقريبا ثلاثية

يبدو للوهلة الأولى من خلال المخطط أعلاه، أنّ كل منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد تنتمي الى أحد الصنفين، صنف منوّعات ماوراء-ساساكي معمّمة من النوع (α,β,γ) أو الصنف C_9. سننشئ الآن مثالا جديدا هاما نكشف به صدق هذا التخمين من خطإه.

مثال 2.6.19.
نعتبر في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد $\mathbb{E}^3$ الأساس المتعامد و المتجانس الشامل التالي

$$\Big\{e_1=\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ e_2=\frac{1}{\tau}\Big(\frac{\partial}{\partial y}+\rho\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ e_3=\frac{\partial}{\partial z}\Big\}$$

حيث ρ و τ هما دالتان قابلتان للتفاضل على $\mathbb{E}^3$ موجبتان تماما. و منه يُعطى الموتّر المتري الريماني g كمايلي

$$g=\begin{pmatrix}\rho^2+\tau^2 & \tau\rho & -\tau\\ \tau\rho & \rho^2+\tau^2 & -\rho\\ -\tau & -\rho & 1\end{pmatrix}.$$

نعرّف بنُية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η) متلائمة مع الموتّر المتري g كمايلي

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & -\frac{\tau}{\rho} & 0\\ \frac{\rho}{\tau} & 0 & 0\\ \frac{\rho^2}{\tau} & -\frac{\tau^2}{\rho} & 0\end{pmatrix},\qquad \xi=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \eta=\big(-\tau,-\rho,1\big).$$

بداية، لدراسة ناظمية هذه البنُية، نعطي مركّبات الموتّر $N^{(1)}$ غير المعدومة على النحو التالي:

$$N_{12}^3=3(\tau_3\rho-\tau\rho_3)=3\rho N_{12}^2=3\tau N_{12}^1=-3\tau\rho N_{13}^1,$$
$$N_{13}^3=\frac{1}{\rho}(\tau\rho_3-2\tau_3\rho),\qquad N_{23}^3=\frac{1}{\tau}(\tau_3\rho-2\tau\rho_3).$$

لنستخرج الشكل التفاضلي الأساسي ϕ حيث

$$\phi=\sum_{i,j=1}^{3}\phi_{ij}\,dx^i\wedge dx^j.$$

$$\begin{aligned}\phi_{12}=\phi(\partial x,\partial y) &= g(\partial x,\varphi\partial y)\\ &= g\Big(\partial x,-\frac{\tau}{\rho}\partial x-\frac{\tau^2}{\rho}\partial z\Big)\\ &= -\frac{\tau}{\rho}\big(g_{11}-\tau g_{13}\big)\\ &= -\tau\rho,\end{aligned}$$

بنفس الكيفية نجد $\phi_{13} = \phi_{23} = 0$، و بتوظيف خاصية ضد التناظر ينتج

$$\phi = -2\tau\rho \, dx \wedge dy.$$

و بالتالي يمكننا كتابة

$$\begin{cases} \eta = -\tau \, dx - \rho \, dy + dz \\ \phi = -2\tau\rho \, dx \wedge dy, \end{cases}$$

فينتج

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta = (\tau_2 - \rho_1) \, dx \wedge dy + \tau_3 \, dx \wedge dz + \rho_3 \, dy \wedge dz \\ \mathrm{d}\phi = -2(\rho_3\tau + \tau_3\rho) \, dx \wedge dy \wedge dz, \end{cases}$$

مع $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ و $\tau_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$. بلمسات حسابية بسيطة، نستطيع تحويل الجملة السابقة الى الشكل التالي

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta = (\tau_3 dx + \rho_3 dy) \wedge \eta + \frac{\rho_1 - \tau_2 + \rho_3\tau - \tau_3\rho}{2\tau\rho} \, \phi \\ \mathrm{d}\phi = \frac{\rho_3\tau + \tau_3\rho}{\tau\rho} \eta \wedge \phi, \end{cases} \tag{167}$$

و يتضح بعد ذلك أنّ

$$\alpha = \frac{\rho_1 - \tau_2 + \rho_3\tau - \tau_3\rho}{2\tau\rho}, \quad \beta = \frac{\rho_3\tau + \tau_3\rho}{2\tau\rho}, \quad \omega = \tau_3 dx + \rho_3 dy.$$

و لكن هذا لا يعني أنّ المنوّعة هي ماوراء-ساساكي معمّمة. لإثبات ذلك ينبغي حساب $\nabla_{e_i}\xi$ ثم التحقّق من العلاقة

$$\nabla_{e_i}\xi = -\alpha\varphi e_i - \beta\varphi^2 e_i - \eta(e_i)\psi.$$

بما أن ω هو الشكل الثنوي للحقل الشعاعي ψ أي هو الشكل التفاضلي المرافق لـ ψ بالنسبة للمترك g فإن

$$\psi = \sum_{i=1}^{3} g(\psi, e_i) e_i = \sum_{i=1}^{3} \omega(e_i) e_i = \frac{\tau_3}{\rho} e_1 + \frac{\rho_3}{\tau} e_2.$$

نعطي الآن، مركبات وصلة لوفي-سيفيتا الموافقة للمترك الريماني g على النحو التالي

$$\begin{array}{ll} \nabla_{e_1} e_1 = -\frac{\rho_2 + \rho_3\rho}{\tau\rho} e_2 - \frac{\rho_3}{\rho}\xi, & \nabla_{e_1} e_2 = \frac{\rho_2 + \rho_3\rho}{\tau\rho} e_1 + \frac{\rho_1 - \tau_2 + \tau\rho_3 - \tau_3\rho}{2\tau\rho}\xi, \\ \nabla_{e_1}\xi = \frac{\rho_3}{\rho} e_1 - \frac{\rho_1 - \tau_2 + \tau\rho_3 - \tau_3\rho}{2\tau\rho} e_2, & \nabla_{e_2} e_1 = \frac{\tau_1 + \tau\tau_3}{\tau\rho} e_2 - \frac{\rho_1 - \tau_2 + \tau\rho_3 - \tau_3\rho}{2\tau\rho}\xi, \\ \nabla_{e_2} e_2 = -\frac{\tau_1 + \tau\tau_3}{\tau\rho} e_1 - \frac{\tau_3}{\tau}\xi, & \nabla_{e_2}\xi = \frac{\rho_1 - \tau_2 + \tau\rho_3 - \tau_3\rho}{2\tau\rho} e_1 + \frac{\tau_3}{\tau} e_2, \\ \nabla_{\xi} e_1 = -\frac{\rho_1 - \tau_2 + \tau\rho_3 - \tau_3\rho}{2\tau\rho} e_2 + \frac{\tau_3}{\rho}\xi, & \nabla_{\xi} e_2 = \frac{\rho_1 - \tau_2 + \tau\rho_3 - \tau_3\rho}{2\tau\rho} e_1 + \frac{\rho_3}{\tau}\xi, \\ \nabla_{\xi}\xi = -\frac{\tau_3}{\rho} e_1 - \frac{\rho_3}{\tau} e_2. & \end{array}$$

من جهة أخرى، لدينا

$$\begin{cases} -\alpha\varphi e_1 - \beta\varphi^2 e_1 - \eta(e_1)\psi = -\frac{\rho_1-\tau_2+\rho_3\tau-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2 + \frac{\rho_3\tau+\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1 \\ -\alpha\varphi e_2 - \beta\varphi^2 e_2 - \eta(e_2)\psi = \frac{\rho_1-\tau_2+\rho_3\tau-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1 + \frac{\rho_3\tau+\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2 \\ -\alpha\varphi\xi - \beta\varphi^2\xi - \eta(\xi)\psi = -\frac{\tau_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_3}{\tau}e_2 \end{cases}$$

و بالتالي، تكون هذه المنوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة إذا و فقط إذا كان

$$\begin{cases} \frac{\rho_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2 = -\frac{\rho_1-\tau_2+\rho_3\tau-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2 + \frac{\rho_3\tau+\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1, \\ \frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1 + \frac{\tau_3}{\tau}e_2 = \frac{\rho_1-\tau_2+\rho_3\tau-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1 + \frac{\rho_3\tau+\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2, \\ -\frac{\tau_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_3}{\tau}e_2 = -\frac{\tau_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_3}{\tau}e_2, \end{cases}$$

معناه

$$\begin{cases} \frac{\rho_3}{\rho} = \frac{\rho_3\tau+\tau_3\rho}{2\tau\rho} \\ \frac{\tau_3}{\tau} = \frac{\rho_3\tau+\tau_3\rho}{2\tau\rho}, \end{cases}$$

و هذا يكافئ

$$\frac{\tau_3}{\tau} = \frac{\rho_3}{\rho} \Leftrightarrow \tau = k(x,y)\rho,$$

مع k دالة موجبة تماما على $\mathbb{E}^3$ و $\frac{\partial k}{\partial z} = 0$. و نعلن الآن، أنّ المنوّعة هي من صنف ماوراء-ساساكي معمّمة مع

$$\alpha = \frac{\rho_1 - \tau_2}{2\tau\rho}, \quad \beta = \frac{\rho_3}{\rho}, \quad \omega = \tau_3 dx + \rho_3 dy.$$

في المقابل، حتى تكون هذه البُنية من الصنف التاسع يكفي و يلزم أن يتحقق مايلي

$$\nabla_{e_i}\xi = \varphi\nabla_{\varphi e_i}\xi \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{e_1}\xi = \varphi\nabla_{e_2}\xi \\ \nabla_{e_2}\xi = -\varphi\nabla_{e_1}\xi \\ \nabla_\xi\xi = 0 \end{cases}$$

بتوظيف المعطيات أعلاه نجد

$$\begin{cases} \frac{\rho_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2 = \varphi\left(\frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1 + \frac{\tau_3}{\tau}e_2\right) \\ \frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1 + \frac{\tau_3}{\tau}e_2 = -\varphi\left(\frac{\rho_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2\right) \\ -\frac{\tau_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_3}{\tau}e_2 = 0, \end{cases}$$

و عليه ينتج

$$\begin{cases} \frac{\rho_3}{\rho} = -\frac{\tau_3}{\tau} \\ \frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho} = 0 \\ -\frac{\tau_3}{\rho} = \frac{\rho_3}{\tau} = 0 \end{cases}$$

أي

$$\rho_1 = \tau_2 \quad \text{و} \quad \rho_3 = \tau_3 = 0$$

لكن من أجل هذه النتائج يكون $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\phi = N_\varphi = N^{(1)} = 0$ و بالتالي في هذه الحالة، البُنية هي ثنائية التماسك و ليست من الصنف التاسع. و هذا معناه أنّ هذه البُنية لا تكون من الصنف التاسع أبدا.

تساؤل مشروع:

في المثال أعلاه، لا تكون البُنية المعطاة من الصنف التاسع أبدا و تكون بُنية ماوراء-ساساكي المعمّمة من أجل $\tau = k(x,y)\rho$ مع k دالة موجبة تماما على $\mathbb{E}^3$ و $\frac{\partial k}{\partial z} = 0$.

و السؤال هنا، ماذا لو لم يتحقق هذا الشرط (مثلا من أجل $\rho = z$ و $\tau = 1$) ما طبيعة البُنية المترية التلامسية تقريبا الناتجة؟.

دعونا نتأمل هذه الحالة، نقصد من أجل $\rho = z$ و $\tau = 1$. بالاعتماد على نتائج الحالة العامة لدينا

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2z}, \quad \omega = dy \quad (\psi = e_2),$$

من جهة أخرى

$$\begin{cases} \nabla_{e_1}\xi = \frac{1}{z}e_1 - \frac{1}{2z}e_2 \\ \nabla_{e_2}\xi = \frac{1}{2z}e_1 \\ \nabla_\xi \xi = -e_2 \end{cases}$$

و كذلك

$$\begin{cases} -\alpha\varphi e_1 - \beta\varphi^2 e_1 - \eta(e_1)\psi = \frac{1}{2z}e_1 - \frac{1}{2z}e_2 \\ -\alpha\varphi e_2 - \beta\varphi^2 e_2 - \eta(e_2)\psi = \frac{1}{2z}e_1 + \frac{1}{2z}e_2 \\ -\alpha\varphi\xi - \beta\varphi^2\xi - \eta(\xi)\psi = -e_2 \end{cases}$$

و بالتالي

$$\nabla_{e_i}\xi = -\alpha\varphi e_i - \beta\varphi^2 e_i - \eta(e_i)\psi \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 0,$$

و هذا تناقض و يعني أن هذه البُنية ليست ماوراء-ساساكي المعمّمة فعلا. كذلك، $\nabla_\xi\xi = -e_2 \neq 0$ يعني أنّ هذه البنية ليست من الصنف التاسع. و عليه، بهذا المثال المضاد نحكم على أنّ التخمين السابق خاطئ.

سيحتار القارئ في الأمر، مع وجود α، β و γ كيف نفسّر أن هذه البُنية ليست ماوراء-ساساكي المعمّمة؟ و الجواب يكمن في المبرهنة المميّزة (أنظر المبرهنة 2.6.36 صفحة 123) أي حتما الشرط

$$N^{(1)} = 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi$$

غير محقق. لنتأكد من ذلك، لدينا

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(e_1,\xi) &= \varphi^2[e_1,\xi]+[\varphi e_1,\varphi\xi]-\varphi[\varphi e_1,\xi]-\varphi[e_1,\varphi\xi]+2\mathrm{d}\eta(e_1,\xi)\xi\\
&= -[e_1,\xi]+\eta([e_1,\xi])\xi-\varphi[e_2,\xi]-\eta([e_1,\xi])\xi\\
&= -\nabla_{e_1}\xi+\nabla_\xi e_1-\varphi\nabla_{e_2}\xi+\varphi\nabla_\xi e_2\\
&= -(\frac{\rho_3}{\rho}e_1-\frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2)\\
&\quad -\frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_2+\frac{\tau_3}{\rho}\xi\\
&\quad -\varphi(\frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1+\frac{\tau_3}{\tau}e_2)\\
&\quad +\varphi(\frac{\rho_1-\tau_2+\tau\rho_3-\tau_3\rho}{2\tau\rho}e_1+\frac{\rho_3}{\tau}\xi)\\
&= \Big(-\frac{\rho_3}{\rho}+\frac{\tau_3}{\tau}\Big)e_1+\frac{\tau_3}{\rho}\xi\\
&= -\frac{1}{z}e_1.
\end{aligned}$$

من جهة أخرى،

$$\begin{aligned}
2(\omega\wedge\eta)(e_1,\xi)\xi &= \omega(e_1)\eta(\xi)\xi-\omega(\xi)\eta(e_1)\xi\\
&= \omega(e_1)\xi\\
&= \frac{1}{\rho}dy\Big(\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial z}\Big)\xi=0,
\end{aligned}$$

بالتالي فعلا الشرط غير محقّق. يمكننا تفسير هذه الوضعية بعدم وجود تحويل مماثل يحوّل هذه البُنية الى بُنية ماوراء الساساكي.

2.7 البُنى المترية التلامسية ثلاثية الأبعاد بنظرة جديدة

مؤخرا، فتح الله علينا منفذا آخر الى هذه البُنى المترية التلامسية ثلاثية الأبعاد من خلال عبارة جامعة مانعة. فهي عبارة بسيطة تجمع مختلف البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد و ذلك من خلال الحقل الشعاعي المميّز ξ. سنقدم هنا دراسة مفصلة عن هذا الأمر حتى يتسنى للطلبة رؤية هذه البُنى من زاوية أخرى.

بداية، دعونا نقدم دستورا أساسيا للبُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد من خلال المشتقة اللامتغيّرة لموتّر البُنية φ.

مبرهنة 2.7.42. من أجل كل بنُية مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد (φ, ξ, η, g) معرّفة على منوّعة تفاضلية M، المشتقة اللامتغيّرة للموتّر φ تعطى كمايلي

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)Y &= 2\alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + 2\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big)\\ &\quad -\eta(X)\big((\nabla_\xi\eta)(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\nabla_\xi\xi\big)\\ &\quad -g(\nabla_{\varphi X}\xi, Y)\xi + \eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi. \end{aligned} \tag{168}$$

البرهان 2.7.55. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ بنُية مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد. سنوظّف علاقتي بلير ([15], صفحة 81)،

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) &= 3\mathrm{d}\phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z)\\ &\quad + g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)\\ &\quad + 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z,X)\eta(Y)\end{aligned} \tag{169}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}N^{(2)}(Y,Z) &= \big(\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta\big)(Z) - \big(\mathcal{L}_{\varphi Z}\eta\big)(Y)\\ &= \varphi Y\big(\eta(Z)\big) - \eta\big([\varphi Y,Z]\big) - \varphi Z\big(\eta(Y)\big) + \eta\big([\varphi Z,Y]\big)\\ &= 2\mathrm{d}\eta(\varphi Y,Z) - 2\mathrm{d}\eta(\varphi Z,Y),\end{aligned} \tag{170}$$

حيث $\mathcal{L}$ يرمز لمشتقة لي. ثم لدينا العلاقة الخاصة بالموتّر N_φ،

$$N_\varphi(Y,Z) = (\varphi\nabla_Z\varphi - \nabla_{\varphi Z}\varphi)Y - (\varphi\nabla_Y\varphi - \nabla_{\varphi Y}\varphi)Z,$$

بإدراج علاقة أولشاك

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi\nabla_X\xi, \tag{171}$$

نتحصّل على

$$N_\varphi(Y,Z) = -2\mathrm{d}\eta(\varphi Y,\varphi Z)\xi + \eta(Y)\big(\nabla_Z\xi + \varphi\nabla_{\varphi Z}\xi\big) - \eta(Z)\big(\nabla_Y\xi + \varphi\nabla_{\varphi Y}\xi\big). \tag{172}$$

و أيضا، باستعمال علاقتي أولشاك الأخريتين

$$\mathrm{d}\phi = 2\beta\eta\wedge\phi, \qquad \mathrm{d}\eta = \eta\wedge(\nabla_\xi\eta) + \alpha\phi, \tag{173}$$

يمكننا ايجاد

$$\begin{aligned}3\mathrm{d}\phi(X,Y,Z) &= 6\beta(\eta\wedge\phi)(X,Y,Z)\\ &= 2\beta\eta(X)g(Y,\varphi Z)+2\beta\eta(Y)g(Z,\varphi X)+2\beta\eta(Z)g(X,\varphi Y),\end{aligned} \tag{174}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}2\mathrm{d}\eta(X,Y) &= 2(\eta\wedge\nabla_\xi\eta+\alpha\phi)(X,Y)\\ &= \eta(X)g(\nabla_\xi\xi,Y)-\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi,X)+2\alpha g(X,\varphi Y).\end{aligned} \tag{175}$$

و الآن، يبدوا أن تكملة البرهان مباشرة، يكفي أن نعوّض المعادلات من (170) الى (175) في العلاقة (169) مع تركيزٍ و صبرٍ في الحساب، نجد العبارة

$$\begin{aligned}2(\nabla_X\varphi)Y &= 2\alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+2\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)\\ &\quad -\eta(X)\big((\nabla_\xi\eta)(\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\nabla_\xi\xi\big)\\ &\quad +g\big(\varphi(\nabla_X\xi+\varphi\nabla_{\varphi X}\xi),Y\big)\xi-\eta(Y)\varphi(\nabla_X\xi+\varphi\nabla_{\varphi X}\xi).\end{aligned} \tag{176}$$

الخطوة الأخيرة تكمن في طرح (171) من (176)، نتحصّل على العبارة المطلوبة.

فيما يلي، سندرج عبارة جميلة و بسيطة نميّز من خلالها بين البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد.

مبرهنة 2.7.43. الخاصّية المُمَيِّزة للبُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد (φ,ξ,η,g) تعطى بالعلاقة التالية

$$\nabla_X\xi=-2\alpha\varphi X-2\beta\varphi^2X+\eta(X)\nabla_\xi\xi+\varphi\nabla_{\varphi X}\xi. \tag{177}$$

البرهان 2.7.56. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد. بوضع $Y=\xi$ في (168)، نتحصّل على

$$-\varphi\nabla_X\xi=2\alpha\varphi^2X-2\beta\varphi X-\eta(X)\varphi\nabla_\xi\xi+\nabla_{\varphi X}\xi,$$

و منه

$$\nabla_X\xi=-2\alpha\varphi X-2\beta\varphi^2X+\eta(X)\nabla_\xi\xi+\varphi\nabla_{\varphi X}\xi. \tag{178}$$

عكسياً، بتعويض (177) في علاقة أولشاك الشهيرة

$$(\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi\nabla_X\xi,Y)\xi-\eta(Y)\varphi\nabla_X\xi, \tag{179}$$

نجد مباشرة العلاقة (168). و بهذا ينتهي البرهان.

من خلال هذه المبرهنة، يمكننا استنباط خواص و علاقات جديدة للبُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد. مثلا، نعلم أن أولشاك استطاع تمييز البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد الناظمية بالعلاقة

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X,$$

سنقدم في المقابل شرطا مماثلا للبنى القابلة للمكاملة.

مبرهنة 2.7.44. نقول عن البُنية المترية التلامسية تقريبا (φ, ξ, η, g) أنها قابلة للمكاملة أي $N_\varphi = 0$، إذا و فقط إذا كان

$$\begin{aligned}\varphi\big(\nabla_X\varphi\big)Y - \big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y &= g\big(\nabla_X\xi - \eta(X)\nabla_\xi\xi + \alpha\varphi X, Y\big)\xi \\ &\quad + \eta(X)\eta(Y)\nabla_\xi\xi - \alpha\big(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y\big).\end{aligned} \tag{180}$$

البرهان 2.7.57. نعلم أنّ

$$N_\varphi(X,Y) = (\varphi\nabla_Y\varphi - \nabla_{\varphi Y}\varphi)X - (\varphi\nabla_X\varphi - \nabla_{\varphi X}\varphi)Y.$$

نفرض أنّ $N_\varphi = 0$ و نضع

$$\begin{aligned}T(X,Y,Z) &= g\big(\varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y, Z\big) \\ &= g\big((\nabla_X\varphi)Y, \varphi Z\big) - g\big((\nabla_{\varphi X}\varphi)Y, Z\big).\end{aligned}$$

بتوظيف الفرضية، يمكننا ملاحظة أنّ

$$T(X,Y,Z) = T(Y,X,Z). \tag{181}$$

من جهة أخرى، باستعمال العلاقة

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \quad \text{و} \quad \nabla_X(\varphi Y) = (\nabla_X\varphi)Y + \varphi\nabla_X Y$$

يمكننا الحصول على

$$g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) = -g\big(Y, (\nabla_X\varphi)Z\big),$$

و بحساب بسيط نجد

$$T(X,Y,Z) = -T(X,Z,Y) + g(\nabla_X\xi, Y)\eta(Z) + g(\nabla_X\xi, Z)\eta(Y). \tag{182}$$

الآن، باستعمال العلاقتين (181) و (182) كما يلي

$$\begin{aligned}T(X,Y,Z) &= T(Y,X,Z)\\ &= -T(Y,Z,X) + g(\nabla_Y\xi,X)\eta(Z) - +g(\nabla_Y\xi,Z)\eta(X)\\ &= T(Z,X,Y) - g(\nabla_Z\xi,X)\eta(Y) - g(\nabla_Z\xi,Y)\eta(X)\\ &\qquad + g(\nabla_Y\xi,X)\eta(Z) + g(\nabla_Y\xi,Z)\eta(X)\\ &= -T(X,Y,Z) + g(\nabla_X\xi,Y)\eta(Z) + g(\nabla_X\xi,Z)\eta(Y)\\ &\qquad - g(\nabla_Z\xi,X)\eta(Y) - g(\nabla_Z\xi,Y)\eta(X)\\ &\qquad + g(\nabla_Y\xi,X)\eta(Z) + g(\nabla_Y\xi,Z)\eta(X),\end{aligned}$$

و هذا يستلزم

$$\begin{aligned}2T(X,Y,Z) =&\big(g(\nabla_X\xi,Y) + g(\nabla_Y\xi,X)\big)\eta(Z)\\ &+ 2\mathrm{d}\eta(X,Z)\eta(Y) + 2\mathrm{d}\eta(Y,Z)\eta(X).\end{aligned}$$

علما أنّ $2\mathrm{d}\eta(X,Y) = g(\nabla_X\xi,Y) - g(\nabla_Y\xi,X)$، العلاقة أعلاه تصبح

$$\begin{aligned}2T(X,Y,Z) =&\big(2g(\nabla_X\xi,Y) - 2\mathrm{d}\eta(X,Y)\big)\eta(Z)\\ &+ 2\mathrm{d}\eta(X,Z)\eta(Y) + 2\mathrm{d}\eta(Y,Z)\eta(X).\end{aligned}$$

باستعمال علاقة أولشاك (171)، نحصّل على

$$\begin{aligned}T(X,Y,Z) =&\big(g(\nabla_X\xi,Y) + \eta(X)g(\nabla_\xi\xi,Y) - \alpha\phi(X,Y)\big)\eta(Z)\\ &+ \eta(X)\eta(Y)g(\nabla_\xi\xi,Z) + \alpha\phi(X,Z)\eta(Y) + \alpha\phi(Y,Z)\eta(X).\end{aligned}$$

و هذا يعطي

$$\begin{aligned}\varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y =&g\big(\nabla_X\xi - \eta(X)\nabla_\xi\xi + \alpha\varphi X, Y\big)\xi\\ &+ \eta(X)\eta(Y)\nabla_\xi\xi - \alpha\big(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y\big).\end{aligned}$$

و الآن الى شرط قابلية المكاملة بصورته المبسّطة:

قضية 2.7.31. نقول عن البُنية المترية التلامسية تقريبا (φ,ξ,η,g) أنها قابلة للمكاملة أي $N_\varphi = 0$، إذا و فقط إذا كان

$$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2X + \eta(X)\nabla_\xi\xi. \qquad (183)$$

البرهان 2.7.58. باستعمال علاقة أولشاك

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi\nabla_X\xi,$$

نتحصّل على

$$\varphi\big(\nabla_X\varphi\big)Y - \big(\nabla_{\varphi X}\varphi\big)Y = g\big(\nabla_{\varphi X}\xi, \varphi Y\big)\xi + \eta(Y)\big(\nabla_X\xi + \varphi\nabla_{\varphi X}\xi\big), \qquad (184)$$

بمقارنة العلاقة (184) مع العلاقة (180)، نستنتج

$$\begin{aligned}\eta(Y)\big(\nabla_X\xi + \varphi\nabla_{\varphi X}\xi\big) =& g\big(\nabla_X\xi + \varphi\nabla_{\varphi X}\xi - \eta(X)\nabla_\xi\xi + \alpha\varphi X, Y\big)\xi \\ &+ \eta(X)\eta(Y)\nabla_\xi\xi - \alpha\eta(Y)\varphi X - \alpha\eta(X)\varphi Y. \qquad (185)\end{aligned}$$

من أجل $Y = \xi$، ينتج

$$\nabla_X\xi + \varphi\nabla_{\varphi X}\xi = -\alpha\varphi X + \eta(X)\nabla_\xi\xi,$$

و من أجل $X = \xi$، نجد $\alpha = 0$. اعتمادا على ما سبق و باستعمال (177) نتحصّل على

$$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\nabla_\xi\xi.$$

ملاحظة 2.7.13. حسب أولشاك [29]، تكون البُنية المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد ناظمية إذا و فقط إذا كان

$$\nabla_X\xi + \varphi\nabla_{\varphi X}\xi = 0.$$

في هذه الحالة، من (183) نستنتج أن $\nabla_\xi\xi = 0$ و هذا يستلزم $d\eta = 0$ و هذا يعني أنّ $N^{(1)} = N_\varphi = 0$ أي البُنية هنا هي ناظمية و قابلة للمكاملة في آن واحد.

بناء على هذه المعطيات، نقدم هنا تصنيفا للبُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد اعتمادا على الموتّرين $N^{(1)}$ و N_φ في الجدول التالي:

الشرط	يكافئ
$N^{(1)} = N_\varphi = 0$	$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X$
$N^{(1)} = 0$ و $N_\varphi \neq 0$	$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X, \qquad (\alpha \neq 0)$
$N^{(1)} \neq 0$ و $N_\varphi = 0$	$\nabla_X\xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\nabla_\xi\xi, \qquad (\nabla_\xi\xi \neq 0)$
$N^{(1)} \neq 0$ و $N_\varphi \neq 0$	$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X + \varphi\nabla_{\varphi X}\xi$

الفصل 3

جسور بين البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد

في هذا الفصل سنهتم بدراسة التحويلات الهندسية في مجموعة البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد (بُنية ماوراء-الساساكي و بُنية الرُكن). و نقصد بذلك تحويل و تغيير في عناصر البُنية (المترك الريماني أو موتّر البُنية) من أجل بناء و إنشاء جسور للتنقل بين أصناف البُنى المترية التلامسية تقريبا و المُعرّفة على نفس المنوّعة الريمانية.

هذا يجبينا مباشرة عن التساؤل حول وحدانية البُنية على منوّعة ريمانية، إذ لا يوجد أي مانع من تزويد منوّعة ريمانية بأكثر من بُنية مترية تلامسية تقريبا من صنف واحد أو من أصناف مختلفة.

هنا، سنشرح الأعمال الهامّة في هذا الاتجاه و نُدرج ما توصّلنا إليه موظّفين خلاصة الفصلين السابقين كل ذلك مع التأكيد في كل مرحلة بأمثلة ملموسة.

3.1 التحويل المماثل

في الرياضيات ، وبشكل أكثر دقة في الهندسة والتحليل المركّب ، يعتبر التحويل المماثل (المطابق) تطبيقا تقابليا يحافظ محلياً على الزوايا ، أي بجوار كل نقطة و لا يحافظ بالضرورة على الأطوال.

على سطح ريماني، نقول عن المترك g أنّه مماثل إذا كان يُكتب بالنسبة لكل خريطة محلية على الشكل $g = f(dx^2 + dy^2)$ مع f دالة موجبة و قابلة للتفاضل.

أُدرج هذا المفهوم في ميدان البُنى المترية التلامسية تقريبا سنة 1982 من قبل أ. شرف الدين و س. حسين [35] و من بعدهما فايزمان [40] من أجل توليد بنية مترية تلامسية تقريبا انطلاقا من بنية مترية تلامسية تقريبا معلومة.

نعتبر $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا، نضع

$$\tilde{g} = \mathrm{e}^{2f} g, \qquad \tilde{\eta} = \mathrm{e}^{f}\eta, \qquad \tilde{\xi} = \mathrm{e}^{-f}\xi, \qquad \tilde{\varphi} = \varphi, \tag{1}$$

حيث f دالة قابلة للتفاضل على M. يمكننا بسهولة ملاحظة أنّ

$$\tilde{\eta}(\tilde{\xi}) = 1, \qquad \tilde{\varphi}^2 = -I + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi}, \qquad \tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) = \tilde{g}(X,Y) - \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y),$$

أي $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ هي منوّعة مترية تلامسية تقريبا أيضا.

نريد أن نوظّف هذا التحويل للتنقّل -إن أمكن- بين الأصناف الخمسة للبُنى المترية التلامسية تقريبا على منوّعة ريمانية ثلاثية الأبعاد. لأجل ذلك سنحسب المميِّز و نقصد $\nabla\xi$ باعتبار أنه الوسيلة المثلى للتعرّف على صنف البنية المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد (أنظر المخطط في الصفحة رقم 138).

بداية، لاحظ أنّه من أجل $f \in \mathbb{R}$ لا يتغيّر صنف البُنية الناتجة. لذلك، سنعتبر f دالة غير ثابتة على M سنعتبر دوما X و Y حقلين شعاعيين على M. باستعمال دستور كوزيل، لدينا

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_X Y, Z\big) &= X\big(\tilde{g}(Y,Z)\big) + Y\big(\tilde{g}(Z,X)\big) - Z\big(\tilde{g}(X,Y)\big) \\
&\quad + \tilde{g}(Z,[X,Y]) + \tilde{g}(Y,[Z,X]) - \tilde{g}(X,[Y,Z]) \\
&= X\big(\mathrm{e}^{2f} g(Y,Z)\big) + Y\big(\mathrm{e}^{2f} g(Z,X)\big) - Z\big(\mathrm{e}^{2f} g(X,Y)\big) \\
&\quad + \mathrm{e}^{2f} g(Z,[X,Y]) + \mathrm{e}^{2f} g(Y,[Z,X]) - \mathrm{e}^{2f} g(X,[Y,Z]) \\
&= 2\mathrm{e}^{2f} g\big(\nabla_X Y, Z\big) + 2\mathrm{e}^{2f} X(f) g(Y,Z) + 2\mathrm{e}^{2f} Y(f) g(Z,X) \\
&\quad - 2\mathrm{e}^{2f} Z(f) g(X,Y) \\
&= 2\tilde{g}\big(\nabla_X Y, Z\big) + 2X(f)\tilde{g}(Y,Z) + 2Y(f)\tilde{g}(X,Z) \\
&\quad - 2\mathrm{e}^{2f} Z(f) g(X,Y),
\end{aligned}$$

لدينا إذن

$$\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_X Y, Z\big) = \tilde{g}\big(\nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X, Z\big) - \mathrm{e}^{2f} Z(f) g(X,Y), \tag{2}$$

و نعلم أن

$$\begin{aligned}
Z(f) &= g(\mathrm{grad} f, Z) \\
&= \mathrm{e}^{-2f}\tilde{g}(\mathrm{grad} f, Z),
\end{aligned} \tag{3}$$

بتعوض (3) في (2) نتحصّل على

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X,Y)\mathrm{grad} f. \tag{4}$$

لنحسب الآن $\tilde{\nabla}\tilde{\xi}$، بتعويض Y بـ $\tilde{\xi} = \mathrm{e}^{-f}\xi$ في (4) نجد

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X \tilde{\xi} &= \nabla_X \tilde{\xi} + X(f)\tilde{\xi} + \tilde{\xi}(f)X - \mathrm{e}^{-f}\eta(X)\mathrm{grad} f \\
&= \mathrm{e}^{-f}\big(\nabla_X \xi + \xi(f)X - \eta(X)\mathrm{grad} f\big).
\end{aligned} \tag{5}$$

نفرض أن (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة من النوع (α,β,γ) و هذا معناه أنه لدينا

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X - \eta(X)\psi. \tag{6}$$

بتعويض (6) في (5) نجد

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi} \;=\; \mathrm{e}^{-f}\Big(-\alpha\varphi X - \big(\beta+\xi(f)\big)\varphi^2 X - \eta(X)\big(\psi + \mathrm{grad} f - \xi(f)\xi\big)\Big)$$

أي

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi} \;=\; -\mathrm{e}^{-f}\Big(\alpha\tilde{\varphi}X + \big(\beta+\xi(f)\big)\tilde{\varphi}^2 X + \mathrm{e}^{-f}\tilde{\eta}(X)\big(\psi + \mathrm{grad} f - \xi(f)\xi\big)\Big) \tag{7}$$

بوضع

$$\tilde{\psi} = \mathrm{e}^{-2f}\big(\psi + \mathrm{grad} f - \xi(f)\xi\big),$$

يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma} &= \tilde{g}(\tilde{\psi},\tilde{\psi})\\
&= \mathrm{e}^{-4f} g\big(\psi + \mathrm{grad} f - \xi(f)\xi \;,\; \psi + \mathrm{grad} f - \xi(f)\xi\big)\\
&= \mathrm{e}^{-4f}\left(\gamma + 2\psi(f) - \xi(f)^2 + |\mathrm{grad} f|^2\right),
\end{aligned}$$

بناء على العلاقة (7)، لدينا مايلي

مبرهنة 3.1.45.

إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ما وراء-ساساكي معمّمة من النوع (α,β,γ) فإن المنوّعة $(M,\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ الناتجة بالتحويل المماثل (1) هي منوّعة ما وراء-ساساكي معمّمة من النوع

$$\Big(\tilde{\alpha} = \alpha\mathrm{e}^{-f},\; \tilde{\beta} = \mathrm{e}^{-f}\big(\beta + \xi(f)\big),\; \tilde{\gamma} = \mathrm{e}^{-4f}\left(\gamma + 2\psi(f) - \xi(f)^2 + |\mathrm{grad} f|^2\right)\Big).$$

نختم هذه الفقرة بمثال نؤكّد من خلاله صحّة المبرهنة، و سنستفيد من معطيات المثال 2.6.19 (أنظر صفحة 138).

مثال 3.1.20.
لقد بينّا أن الفضاء الإقليدي $\mathbb{E}^3$ المزوّد بالموتّر المتري الريماني

$$g = \begin{pmatrix} \rho^2+\tau^2 & \tau\rho & -\tau\\ \tau\rho & \rho^2+\tau^2 & -\rho\\ -\tau & -\rho & 1\end{pmatrix},$$

حيث ρ و τ دالتان معرفتان على $\mathbb{E}^3$ و لا تنعدمان أبدا، و البنية التلامسية تقريبا

$$\varphi=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\tau}{\rho} & 0\\ \frac{\rho}{\tau} & 0 & 0\\ \frac{\rho^2}{\tau} & -\frac{\tau^2}{\rho} & 0\end{pmatrix},\qquad \xi=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \eta=\big(-\tau,-\rho,1\big).$$

يشكّل منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة من النوع

$$\alpha=\frac{\rho_1-\tau_2}{2\tau\rho},\quad \beta=\frac{\rho_3}{\rho},\quad \omega=\tau_3dx+\rho_3dy.$$

بشرط $\frac{\rho_3}{\rho}=\frac{\tau_3}{\tau}$. و من أجل الأساس

$$\Big\{e_1=\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ e_2=\frac{1}{\tau}\Big(\frac{\partial}{\partial y}+\rho\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ e_3=\xi=\frac{\partial}{\partial z}\Big\}$$

ينتج

$$\psi=\frac{\tau_3}{\rho}e_1+\frac{\rho_3}{\tau}e_2.$$

و مركبات وصلة لوفي-سيفيتا التي تهمنا هي على النحو التالي

$$\begin{array}{r}\nabla_{e_1}\xi=\frac{\rho_3}{\rho}e_1-\frac{\rho_1-\tau_2}{2\tau\rho}e_2,\\ \nabla_{e_2}\xi=\frac{\rho_1-\tau_2}{2\tau\rho}e_1+\frac{\tau_3}{\tau}e_2,\\ \nabla_{\xi}\xi=-\frac{\tau_3}{\rho}e_1-\frac{\rho_3}{\tau}e_2.\end{array}$$

باستعمال التحويل المماثل $\tilde g=\mathrm{e}^{2f}g$ مع الشرط $\frac{\rho_3}{\rho}=\frac{\tau_3}{\tau}$ و الأساس $\{\tilde e_i=\mathrm{e}^{-f}e_i\}_{1\leqslant i\leqslant 3}$ يكون

$$\begin{array}{rcl}\tilde\nabla_{\tilde e_1}\tilde\xi &=& \tilde\nabla_{\mathrm{e}^{-f}e_1}\mathrm{e}^{-f}\xi\\ &=& -\mathrm{e}^{-2f}e_1(f)\xi+\mathrm{e}^{-2f}\tilde\nabla_{e_1}\xi\\ &=& -\mathrm{e}^{-2f}e_1(f)\xi+\mathrm{e}^{-2f}\big(\nabla_{e_1}\xi+e_1(f)\xi+\xi(f)e_1\big)\\ &=& \mathrm{e}^{-2f}\big(\nabla_{e_1}\xi+\xi(f)e_1\big)\\ &=& \mathrm{e}^{-2f}\Big(\dfrac{\rho_3+f_3\rho}{\rho}e_1-\dfrac{\rho_1-\tau_2}{2\tau\rho}e_2\Big),\end{array}$$

بالمثل نجد

$$\tilde\nabla_{\tilde e_2}\tilde\xi=\mathrm{e}^{-2f}\Big(\frac{\rho_1-\tau_2}{2\tau\rho}e_1+\frac{\tau_3+f_3\tau}{\rho}e_2\Big),$$

و أيضا

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi} &= \tilde{\nabla}_{\mathrm{e}^{-f}\xi}\mathrm{e}^{-f}\xi\\
&= -\mathrm{e}^{-2f}\xi(f)\xi + \mathrm{e}^{-2f}\tilde{\nabla}_{\xi}\xi\\
&= -\mathrm{e}^{-2f}\xi(f)\xi + \mathrm{e}^{-2f}\big(\nabla_{\xi}\xi + 2\xi(f)\xi - \mathrm{grad}f\big)\\
&= \mathrm{e}^{-2f}\big(\nabla_{\xi}\xi - e_1(f)e_1 - e_2(f)e_2\big)\\
&= -\mathrm{e}^{-2f}\Big(\frac{\tau_3 + f_1 + \tau f_3}{\rho}e_1 + \frac{\rho_3 + f_2 + \rho f_3}{\tau}e_2\Big)
\end{aligned}$$

من جهة أخرى، بحساب

$$T(\tilde{e}_i) = -\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_i - \tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_i - \tilde{\eta}(\tilde{e}_i)\tilde{\psi}$$

من أجل $i \in \{1,2,3\}$ و

$$\tilde{\alpha} = \alpha\mathrm{e}^{-f} = \frac{\rho_1 - \tau_2}{2\tau\rho}\mathrm{e}^{-f},$$

$$\tilde{\beta} = \mathrm{e}^{-f}\big(\beta + \xi(f)\big) = \frac{\rho_3 + \rho f_3}{\rho}\mathrm{e}^{-f},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= \mathrm{e}^{-2f}\big(\psi + \mathrm{grad}f - \xi(f)\xi\big)\\
&= \Big(\frac{\tau_3}{\rho}e_1 + \frac{\rho_3}{\tau}e_2 + e_1(f)e_1 + e_2(f)e_2\Big)\mathrm{e}^{-2f}\\
&= \Big(\frac{\tau_3 + f_1 + \tau f_3}{\rho}e_1 + \frac{\rho_3 + f_2 + \rho f_3}{\tau}e_2\Big)\mathrm{e}^{-2f}.
\end{aligned}$$

و بالتالي يصبح

$$\begin{aligned}
T(\tilde{e}_i) &= -\frac{\rho_1 - \tau_2}{2\tau\rho}\mathrm{e}^{-2f}\varphi e_i - \frac{\rho_3 + \rho f_3}{\rho}\mathrm{e}^{-2f}\varphi^2 e_i\\
&\quad -\eta(e_i)\Big(\frac{\tau_3 + f_1 + \tau f_3}{\rho}e_1 + \frac{\rho_3 + f_2 + \rho f_3}{\tau}e_2\Big)\mathrm{e}^{-f}.
\end{aligned}$$

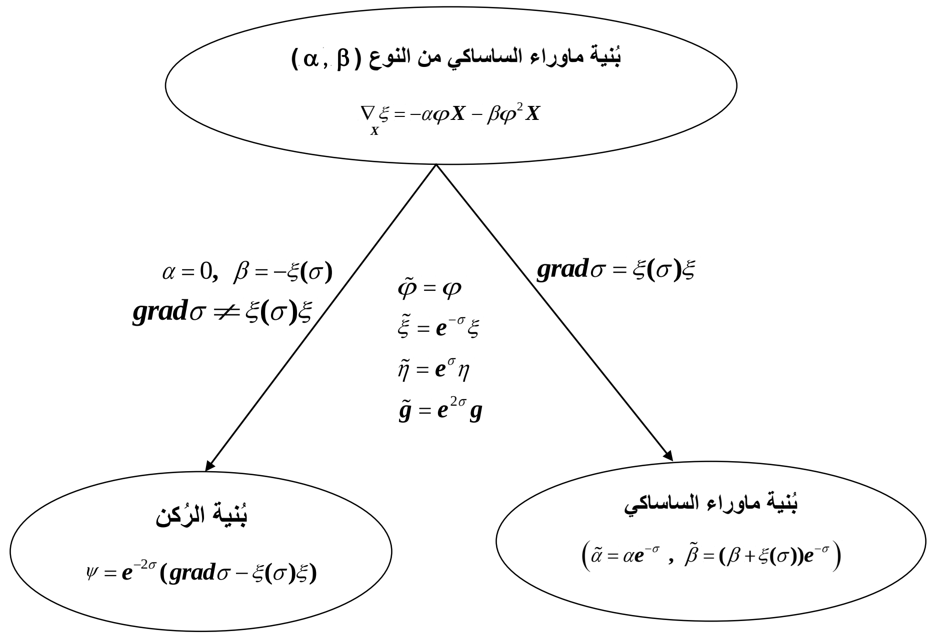
و عليه، ينتج

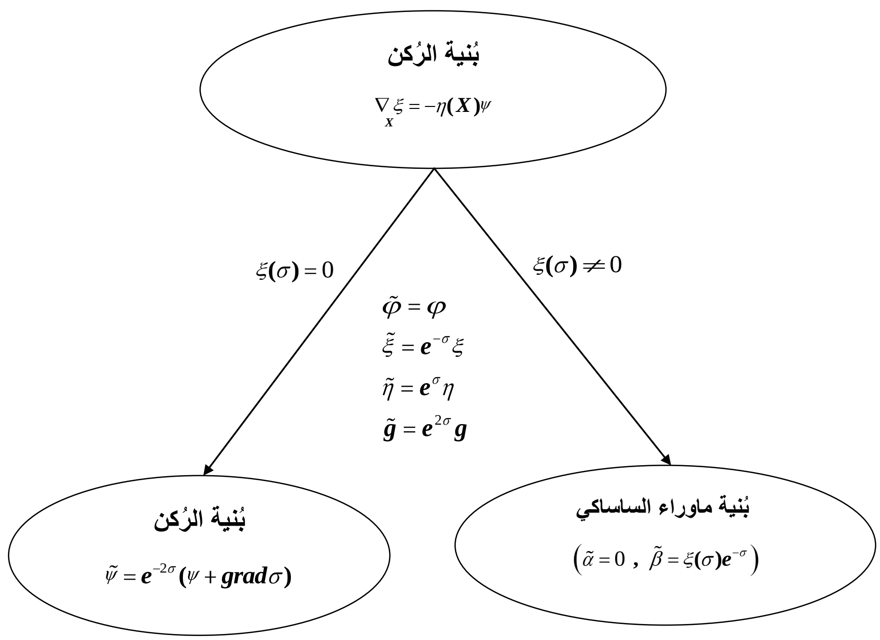
$$\begin{aligned}
T(\tilde{e}_1) &= -\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_1 - \tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_1\\
&= \mathrm{e}^{-2f}\Big(\frac{\rho_3 + \rho f_3}{\rho}e_1 - \frac{\rho_1 - \tau_2}{2\tau\rho}e_2\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\tilde{e}_2) &= -\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_2 - \tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_1 \\ &= \mathrm{e}^{-2f}\Big(\frac{\rho_1 - \tau_2}{2\tau\rho}e_1 + \frac{\tau_3 + f_3\tau}{\rho}e_2\Big), \end{aligned}$$

$$T(\tilde{\xi}) = -\Big(\frac{\tau_3 + f_1 + \tau f_3}{\rho}e_1 + \frac{\rho_3 + f_2 + \rho f_3}{\tau}e_2\Big)\mathrm{e}^{-2f}$$

و بهذا يتحقّق المطلوب.


بُنية ماوراء الساساكي من النوع (α , β)
$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X$
$\alpha = 0,\ \beta = -\xi(\sigma)$
$grad\sigma \neq \xi(\sigma)\xi$
$grad\sigma = \xi(\sigma)\xi$
$\tilde{\varphi} = \varphi$
$\tilde{\xi} = e^{-\sigma}\xi$
$\tilde{\eta} = e^{\sigma}\eta$
$\tilde{g} = e^{2\sigma}g$
بُنية الرُكن
$\psi = e^{-2\sigma}(grad\sigma - \xi(\sigma)\xi)$
بُنية ماوراء الساساكي
$\left(\tilde{\alpha} = \alpha e^{-\sigma}\ ,\ \tilde{\beta} = (\beta + \xi(\sigma))e^{-\sigma}\right)$


بُنية الرُكن
$\nabla_X \xi = -\eta(X)\psi$
$\xi(\sigma) = 0$
$\xi(\sigma) \neq 0$
$\tilde{\varphi} = \varphi$
$\tilde{\xi} = e^{-\sigma}\xi$
$\tilde{\eta} = e^{\sigma}\eta$
$\tilde{g} = e^{2\sigma}g$
بُنية الرُكن
$\tilde{\psi} = e^{-2\sigma}(\psi + grad\sigma)$
بُنية ماوراء الساساكي
$\left(\tilde{\alpha} = 0\ ,\ \tilde{\beta} = \xi(\sigma)e^{-\sigma}\right)$

3.2 التحويل $2n$-تحاكي

مفهوم التحويل $2n$-تحاكي أو $\mathcal{D}$-تحاكي على منوّعة مترية تلامسية تقريبا $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ أُدرج من قبل شيكيتشي طانو سنة 1972 حيث $\mathcal{D}$ هو الفضاء الجزئي المعرّف بـ

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathfrak{X}(M) \ / \ \eta(X) = 0\}.$$

من أجل كل بنية مترية تلامسية (φ, ξ, η, g) و عدد حقيقي موجب تماما a البُنية $(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ حيث

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = a\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \overline{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta,$$

هي بنية مترية تلامسية أيضا.
هذه الفكرة يمكننا تعميمها كمايلي، نعتبر التحويل التالي

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \qquad \tilde{\eta} = h\eta, \qquad \tilde{\xi} = \frac{1}{h}\xi, \qquad \tilde{g} = f^2 g + k^2 \eta \otimes \eta,$$

مع f، k و h دوال ملساء موجبة تماما و قابلة للتفاضل على M. بالملاحظة، نكتشف أن الشرطين التاليين محققين

$$\tilde{\eta}(\tilde{\xi}) = 1, \qquad \tilde{\varphi}^2 = -I + \tilde{\eta} \otimes \tilde{\xi},$$

و من أجل شرط الملائمة، لدينا

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) &= \tilde{g}(\varphi X, \varphi Y) \\
&= f^2 g(\varphi X, \varphi Y) \\
&= f^2 g(X, Y) - f^2 \eta(X)\eta(Y),
\end{aligned}$$

من جهة أخرى

$$\tilde{g}(X, Y) - \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y) = f^2 g(X, Y) + (k^2 - h^2)\eta(X)\eta(Y),$$

و بالتالي، حتى تكون $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ بُنية مترية تلامسية تقريبا يكفي و يلزم أن يكون

$$h^2 = f^2 + k^2.$$

نضع $k^2 = h^2 - f^2$ نتحصّل على التحويل الآتي

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \qquad \tilde{\eta} = h\eta, \qquad \tilde{\xi} = \frac{1}{h}\xi, \qquad \tilde{g} = f^2 g + (h^2 - f^2)\eta \otimes \eta. \tag{8}$$

نسمي هذا التحويل، $\mathcal{D}$-تحاكي المعمّم و لتوضيح علاقة التحاكي بهذا التحويل لدينا

$$\tilde{g}(\xi,\xi)=f^2g(\xi,\xi)+(h^2-f^2)\eta(\xi)\eta(\xi)=h^2,$$

و من أجل كل $X\in\mathcal{D}$

$$\tilde{g}(X,X)=f^2g(X,X)+(h^2-f^2)\eta(X)\eta(X)=f^2g(X,X),$$

و هذا معناه أنّ طول صورة كل حقل شعاعي على M بهذا التحويل هو طول الحقل الشعاعي مضروب في النسبة f^2 باستثناء ξ. لهذا نقول عندئذ أنّ هذا التحويل ماهو إلاّ تحاكٍ نسبته f^2 في الفضاء الجزئي $\mathcal{D}$.

ملاحظة 3.2.14. سُمّي هذا التحويل $\mathcal{D}$-تحاكي المعمّم باعتباره يُعمّم كل الحالات الخاصة التي تمّت دراستها لحد الآن.

◄ من أجل $h^2=f^2$ نتحصّل على التحويل المماثل (أنظر الفقرة السابقة).
◄ من أجل $h^2=f^4$ و $f^2=a\in\mathbb{R}$ مع f ثابتة نتحصّل على التحويل $\mathcal{D}$-تحاكي أي الحالة الموافقة لتحويل طانو [39] .
◄ من أجل $h^2=1$ نتحصّل على $\tilde{g}=f^2g+(1-f^2)\eta\otimes\eta$ و هو التحويل الذي درسه ماريرو [27].
◄ من أجل $h^2=f^4$ نتحصّل على $\tilde{g}=f^2g+f^2(f^2-1)\eta\otimes\eta$ و هو التحويل الذي درسه بلير [17].

لقد تناول ب. أليغر و أ. كرياتزو [5] هذا التحويل من أجل دراسة المنوّعات ماوراء-ساساكي ذات التقوّس φ-مقطعي الثابت، و في البحث [6] تطرقنا لهذا التحويل لكن بعبارة مشابهة قصد انشاء منوّعة كالير انطلاقا من منوّعة ساساكي.

هنا سنستعمله من أجل التنقل بين البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد و ذلك بمناقشة المميّز $\tilde{\nabla}\tilde{\xi}$.
لأجل ذلك سنبحث عن العلاقة بين وصلتي لوفي-سيفيتا الموافقتين لـ g و $\tilde{g}$.
باستعمال دستور كوزيل، مع حساب بسيط لكنه طويل نوع ما، نجد

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}\big(\tilde{\nabla}_XY,Z\big) &= X\big(\tilde{g}(Y,Z)\big)+Y\big(\tilde{g}(Z,X)\big)-Z\big(\tilde{g}(X,Y)\big)\\
&\quad+\tilde{g}(Z,[X,Y])+\tilde{g}(Y,[Z,X])-\tilde{g}(X,[Y,Z])\\
&= 2\tilde{g}(\nabla_XY,Z)+(h^2-f^2)\Big(\big(g(\nabla_X\xi,Y)+g(\nabla_Y\xi,X)\big)\eta(Z)\\
&\quad+2\mathrm{d}\eta(X,Z)\eta(Y)+2\mathrm{d}\eta(Y,Z)\eta(X)\Big)\\
&\quad+2fX(f)g(Y,Z)+2fY(f)g(X,Z)-2fZ(f)g(X,Y)\\
&\quad+2\big(hX(h)-fX(f)\big)\eta(Y)\eta(Z)+2\big(hY(h)-fY(f)\big)\eta(X)\eta(Z)\\
&\quad-2\big(hZ(h)-fZ(f)\big)\eta(X)\eta(Y), \qquad (9)
\end{aligned}$$

لنحضّر العبارات التالية

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ \eta(Z) &= g(\xi, Z) \\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}(\xi, Z) - \frac{h^2 - f^2}{f^2}\eta(Z) \Leftrightarrow \eta(Z) = \frac{1}{h^2}\tilde{g}(\xi, Z), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ g(X, Z) &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}(X, Z) - \frac{h^2 - f^2}{f^2}\eta(X)\eta(Z) \\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}(X, Z) - \frac{h^2 - f^2}{f^2 h^2}\eta(X)\tilde{g}(\xi, Z) \\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}\left(X - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(X)\xi, Z\right), \end{aligned} \tag{11}$$

علما أنّ $\mathrm{d}\eta$ هي شكل تفاضلي ثنائي من خواصه أنّه ضد تناظري أي $\mathrm{d}\eta(X, Z) = -\mathrm{d}\eta(Z, X)$ فإنّه يوجد موتّر من النوع $(1, 1)$ نرمز له بالرمز F حيث

$$\mathrm{d}\eta(X, Z) = g(FX, Z) = -g(X, FZ),$$

و عليه، من (11) ينتج

$$\blacktriangleright\ \mathrm{d}\eta(X, Z) = g(FX, Z) = \frac{1}{f^2}\tilde{g}\left(FX - \frac{h^2 - f^2}{f^2 h^2}\eta(FX)\xi, Z\right), \tag{12}$$

مع F هو موتّر ضد تناظري من النوع $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ Z(f) &= g(\mathrm{grad} f, Z) \\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}(\mathrm{grad} f, Z) - \frac{h^2 - f^2}{f^2}\xi(f)\eta(Z) \\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}(\mathrm{grad} f, Z) - \frac{h^2 - f^2}{f^2 h^2}\xi(f)\tilde{g}(\xi, Z), \\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}\left(\mathrm{grad} f - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\xi(f)\xi, Z\right), \end{aligned} \tag{13}$$

و الآن، بتعويض (10)-(13) في (9) ثمّ تبسيط الناتج و ترتيبه نتحصّل على

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + (h^2 - f^2)\Big[\frac{1}{2h^2}\big(g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X)\big)\xi \\
&\qquad + \frac{1}{f^2}\eta(Y)\Big(FX - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(FX)\xi\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{f^2}\eta(X)\Big(FY - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(FY)\xi\Big)\Big] \\
&\quad + X(\ln f)\big(Y - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(Y)\xi\big) + Y(\ln f)\big(X - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(X)\xi\big) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2}\Big(X(h^2 - f^2)\eta(Y) + Y(h^2 - f^2)\eta(X)\Big)\xi \\
&\quad - \frac{1}{2f^2}\eta(X)\eta(Y)\Big(\mathrm{grad} h^2 - \mathrm{grad} f^2 - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\big(\xi(h^2) - \xi(f^2)\big)\xi\Big) \\
&\quad - g(X, Y)\big(\mathrm{grad}(\ln f) - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\xi(\ln f)\xi\big). \qquad (14)
\end{aligned}$$

بعد حصولنا على هذه العلاقة التي تربط بين وصلتي لوفي-سيفيتا، نحسب المميّز

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X \tilde{\xi} &= \tilde{\nabla}_X \frac{1}{h}\xi \\
&= -\frac{X(h)}{h^2}\xi + \frac{1}{h}\tilde{\nabla}_X \xi \\
&= -\frac{X(h)}{h^2}\xi + \frac{1}{h}\Big[\nabla_X\xi + (h^2 - f^2)\Big[\frac{1}{2h^2}g(\nabla_\xi\xi, X)\xi \\
&\qquad + \frac{1}{f^2}\Big(FX - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(FX)\xi\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{f^2}\eta(X)\Big(F\xi - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(F\xi)\xi\Big)\Big] \\
&\quad + \frac{f^2}{h^2}X(\ln f)\xi + \xi(\ln f)\big(X - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\eta(X)\xi\big) \\
&\quad + \frac{1}{2h^2}\Big(X(h^2 - f^2) + \xi(h^2 - f^2)\eta(X)\Big)\xi \\
&\quad - \frac{1}{2f^2}\eta(X)\Big(\mathrm{grad} h^2 - \mathrm{grad} f^2 - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\xi(h^2 - f^2)\xi\Big) \\
&\quad - \eta(X)\big(\mathrm{grad}(\ln f) - \frac{h^2 - f^2}{h^2}\xi(\ln f)\xi\big)\Big], \qquad (15)
\end{aligned}$$

نُبسّط ونرتّب هذه العبارة فينتج

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi} &= \frac{1}{h}\Big[\nabla_X\xi + \xi(\ln f)X \\ &\quad +(h^2-f^2)\Big[\frac{1}{2h^2}g(\nabla_\xi\xi, X)\xi + \frac{1}{f^2}\Big(FX - \frac{h^2-f^2}{h^2}\eta(FX)\xi\Big)\Big] \\ &\quad +\frac{1}{f^2}\eta(X)\Big[(h^2-f^2)\Big(F\xi - \frac{h^2-f^2}{h^2}\eta(F\xi)\xi\Big) \\ &\qquad +\frac{1}{2}\xi(h^2-f^2)\xi - \frac{1}{2}\mathrm{grad}h^2\Big]\Big], \end{aligned} \tag{16}$$

والآن، لنفرض أنّ (φ, ξ, η, g) هي منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة أي لدينا

$$\nabla_\xi\xi = -\psi \quad \text{و} \quad \nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2X - \eta(X)\psi$$

وكذلك

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}\eta(X,Y) &= 2g(FX,Y) \\ &= 2(\omega\wedge\eta + \alpha\phi)(X,Y) \\ &= \omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(X) + 2\alpha g(X,\varphi Y) \\ &= g(\omega(X)\xi - \eta(X)\psi - 2\alpha\varphi X, Y) \\ &\Leftrightarrow\ FX = \frac{1}{2}\big(\omega(X)\xi - \eta(X)\psi - 2\alpha\varphi X\big), \end{aligned}$$

و يكون

$$F\xi = -\frac{1}{2}\psi, \qquad \eta(FX) = \frac{1}{2}\omega(X), \qquad \eta(F\xi) = 0.$$

بتعويض هذه المعطيات في العلاقة (16) نتحصّل على

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi} &= \frac{1}{h}\Big[-\alpha\frac{h^2}{f^2}\varphi X - (\beta + \xi(\ln f)\varphi^2X \\ &\quad -\frac{h^2}{f^2}\eta(X)\big(\psi + \mathrm{grad}(\ln h) - \xi(\ln h)\xi\big) + \frac{h^2-f^2}{2h^2}\omega(X)\xi\Big],\end{aligned}$$

أي

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X\tilde{\xi} &= \frac{1}{h}\Big[-\alpha\frac{h^2}{f^2}\tilde{\varphi} X - (\beta + \xi(\ln f)\tilde{\varphi}^2X \\ &\quad -\frac{h}{f^2}\tilde{\eta}(X)\big(\psi + \mathrm{grad}(\ln h) - \xi(\ln h)\xi\big) + \frac{h^2-f^2}{2h^2}\omega(X)\xi\Big],\end{aligned}$$

من الوهلة الأولى يتّضح أنه من أجل $h^2 = f^2$ يصبح هذا التحويل مماثلا و تصبح العلاقة أعلاه هي نفسها العلاقة (7) المحصّل عليها في الفقرة السابقة. بتفادي هذه الحالة أي من أجل $h^2 \neq f^2$ نلاحظ أنه حتى تكون البُنية الناتجة هي بُنية ما وراء-ساساكي معمّمة يجب أن يتحقق الشرط $\omega = 0$ (أي $\psi = 0$)، عندئذ بوضع

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{f^2}\big(\mathrm{grad}(\ln h) - \xi(\ln h)\xi\big),$$

يمكننا أن نكتب

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma} &= \tilde{g}(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) \\
&= \frac{1}{f^4}\Big(f^2 g\big(\mathrm{grad}(\ln h) - \xi(\ln h)\xi\ ,\ \mathrm{grad}(\ln h) - \xi(\ln h)\xi\big) \\
&\qquad +(h^2 - f^2)\eta\big(\mathrm{grad}(\ln h) - \xi(\ln h)\xi\big)^2\Big) \\
&= \frac{1}{f^2}\Big(|\mathrm{grad}(\ln h)|^2 + \xi(\ln h)^2\Big)
\end{aligned}$$

و منه تنتج المبرهنة التالية

مبرهنة 3.2.46.

إذا كانت $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ما وراء-ساساكي معمّمة من النوع $(\alpha, \beta, 0)$ فإن المنوّعة $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ الناتجة بالتحويل $\mathcal{D}$-تحاكي المعمّم هي منوّعة ما وراء-ساساكي معمّمة من النوع

$$\Big(\tilde{\alpha} = \frac{\alpha h}{f^2},\ \tilde{\beta} = \frac{1}{h}\big(\beta + \xi(\ln f)\big),\ \tilde{\gamma} = \frac{1}{f^2}\big(|\mathrm{grad}(\ln h)|^2 + \xi(\ln h)^2\big)\Big).$$

لنتناول هنا مثالا نؤكّد من خلاله هذه المبرهنة. و لا بأس أن نستفيد من معطيات المثال 3.4.25.

مثال 3.2.21.

لقد بينّا سابقا أن الفضاء الإقليدي $\mathbb{E}^3$ المزوّد بالموتّر المتري الريماني

$$g = \begin{pmatrix} \rho(x,y,z)^2 + \tau(x,y,z)^2 & 0 & -\tau(x,y,z) \\ 0 & \rho(x,y,z)^2 & 0 \\ -\tau(x,y,z) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

حيث ρ و τ دالتان معرفتان على $\mathbb{E}^3$ مع ρ لا تنعدم أبدا، و البنية التلامسية تقريبا

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau(x,y,z) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \big(-\tau(x,y,z), 0, 1\big).$$

يشكّل منوّعة ماوراء-ساساكي المعمّمة من النوع $(0\ ,\ \frac{\rho_3}{\rho}\ ,\ \frac{-\tau_2}{2\rho^2})$ بشرط $\tau_3=0$. و من أجل الأساس

$$\left\{e_1=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial z}\right),\ e_2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y},\ e_3=\xi\right\}$$

مركبات وصلة لوفي-سيفيتا هي على النحو التالي

$$\begin{array}{ccc}\nabla_{e_1}e_1=-\frac{\rho_2}{\rho^2}e_2-\frac{\rho_3}{\rho}\xi, & \nabla_{e_1}e_2=\frac{\rho_2}{\rho^2}e_1-\frac{\tau_2}{2\rho^2}\xi, & \nabla_{e_1}\xi=\frac{\rho_3}{\rho}e_1+\frac{\tau_2}{2\rho^2}e_2,\\ \nabla_{e_2}e_1=\frac{\rho_1+\tau\rho_3}{\rho^2}e_2+\frac{\rho_2}{2\rho^2}\xi, & \nabla_{e_2}e_2=-\frac{\rho_1+\tau\rho_3}{\rho^2}e_1-\frac{\rho_3}{\rho}\xi, & \nabla_{e_2}\xi=-\frac{\tau_2}{2\rho^2}e_1+\frac{\rho_3}{\rho}e_2,\\ \nabla_{\xi}e_1=\frac{\tau_2}{2\rho^2}e_2, & \nabla_{\xi}e_2=-\frac{\tau_2}{2\rho^2}e_1, & \nabla_{\xi}\xi=0.\end{array}$$

باستعمال التحويل $\mathcal{D}$-تحاكي المعمّم يكون

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\partial_x,\partial_x) &= f^2g(\partial_x,\partial_x)+(h^2-f^2)\eta(\partial_x)\eta(\partial_y x)\\ &= f^2(\rho^2+\tau^2)+(h^2-f^2)(-\tau)(-\tau)\\ &= \rho^2f^2+\tau^2h^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\partial_x,\partial_y) &= f^2g(\partial_x,\partial_y)+(h^2-f^2)\eta(\partial_x)\eta(\partial_y)\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\partial_x,\partial_z) &= f^2g(\partial_x,\partial_z)+(h^2-f^2)\eta(\partial_x)\eta(\partial_z)\\ &= f^2(-\tau)+(h^2-f^2)(-\tau)(1)\\ &= -h^2\tau,\end{aligned}$$

بنفس الطريقة، نتحصّل على جميع مركّبات المصفوفة المرفقة بالمترك $\tilde{g}$ و هي على الشكل

$$g=\begin{pmatrix}\rho^2f^2+\tau^2h^2 & 0 & -h^2\tau\\ 0 & \rho^2f^2 & 0\\ -h^2\tau & 0 & h^2\end{pmatrix}.$$

و نعلم أيضا أنّ

$$\tilde{\varphi}=\varphi,\qquad \tilde{\xi}=\frac{1}{h}\xi,\qquad \tilde{\eta}=h\eta.$$

الأساس المتعامد و المتجانس الموافق للمترك الجديد $\tilde{g}$ هو

$$\left\{\tilde{e_1}=\frac{1}{f}e_1,\ \tilde{e_2}=\frac{1}{f}e_2,\ \tilde{e_3}=\frac{1}{h}e_3=\frac{1}{h}\xi\right\}.$$

باستعمال دستور كوزيل، ينتج

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_1}\tilde{\xi} = \frac{\rho f_3 + \rho_3 f}{\rho h f}\tilde{e}_1 + \frac{\tau_2 h}{2\rho^2 f^2}\tilde{e}_2,$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_2}\tilde{\xi} = -\frac{\tau_2 h}{2\rho^2 f^2}\tilde{e}_1 + \frac{\rho f_3 + \rho_3 f}{\rho h f}\tilde{e}_2,$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\xi}}\tilde{\xi} = -\frac{\tau h_3 + h_1}{\rho h f}\tilde{e}_1 - \frac{h_2}{\rho h f}\tilde{e}_2.$$

من جهة أخرى، بحساب

$$T(\tilde{e}_i) = -\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_i - \tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_i - \tilde{\eta}(\tilde{e}_i)\tilde{\psi}$$

من أجل $i \in \{1,2,3\}$ ينتج

$$\begin{aligned} T(\tilde{e}_1) &= -\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_1 - \tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_1 \\ &= -\frac{\alpha h}{f^2}\tilde{e}_2 + \frac{1}{h}\big(\beta + \xi(\ln f)\tilde{e}_1 \\ &= \frac{\tau_2}{2\rho^2}\frac{h}{f^2}\tilde{e}_2 + \frac{1}{h}\big(\frac{\rho_3}{\rho} + \xi(\ln f)\tilde{e}_1 \\ &= \frac{\rho_3 f + \rho f_3}{\rho h f}\tilde{e}_1 + \frac{\tau_2 h}{2\rho^2 f^2}\tilde{e}_2, \end{aligned}$$

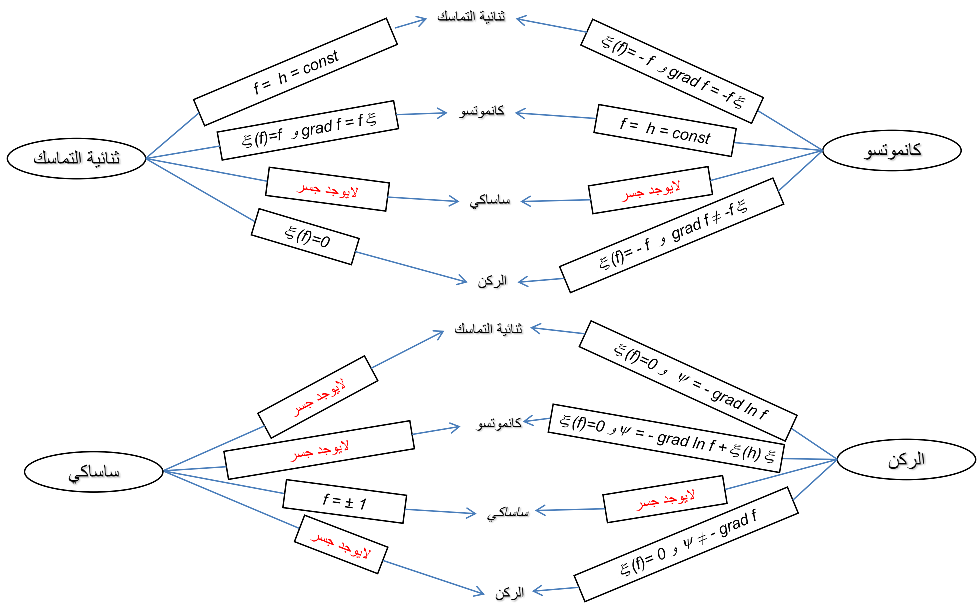
$$\begin{aligned} T(\tilde{e}_2) &= -\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_2 - \tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_2 \\ &= \frac{\alpha h}{f^2}\tilde{e}_1 + \frac{1}{h}\big(\beta + \xi(\ln f)\tilde{e}_2 \\ &= -\frac{\tau_2 h}{2\rho^2 f^2}\tilde{e}_1 + \frac{\rho f_3 + \rho_3 f}{\rho h f}\tilde{e}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\tilde{\xi}) &= -\tilde{\psi} \\ &= -\frac{1}{f^2}\big(\mathrm{grad}(\ln h) - \xi(\ln h)\xi\big) \\ &= -\frac{1}{f^2}\big(e_1(\ln h)e_1 + e_2(\ln h)e_2\big) \\ &= -\frac{1}{\rho f}\Big[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial z}\right)(\ln h)\tilde{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y}(\ln h)\tilde{e}_2\Big] \\ &= -\frac{h_1 + \tau h_3}{\rho h f}\tilde{e}_1 - \frac{h_2}{\rho h f}\tilde{e}_2, \end{aligned}$$

و بهذا يتحقّق المطلوب.

مخطط الجسور بين البُنى الأساسية (ثنائية التماسك، كانموتسو، ساساكي و الرُكن) ثلاثية الأبعاد

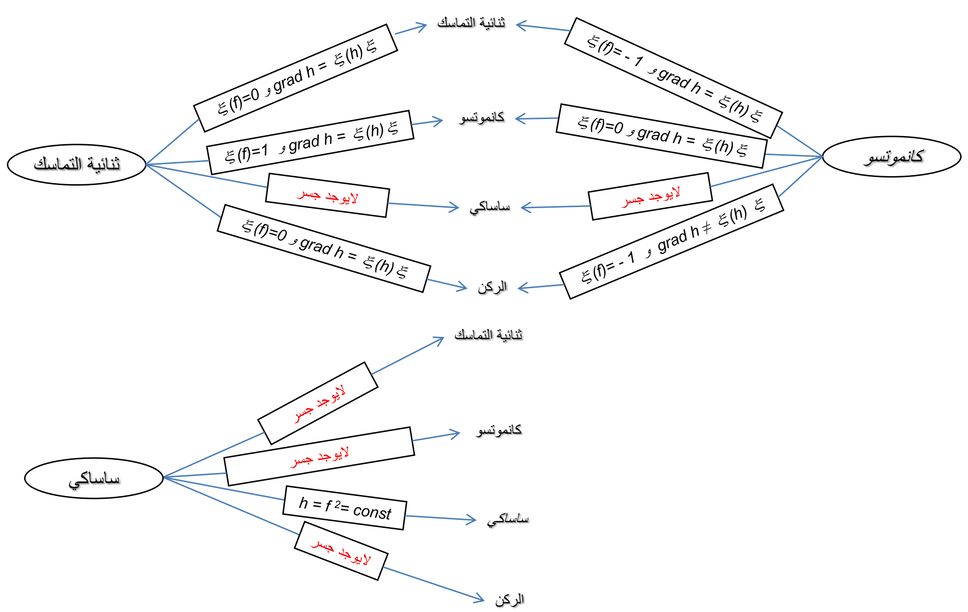
باستعمال التحويل 2n-تحاكي مع $h = \pm f$



ملاحظة: لا يوجد جسور انتقال بين بُنية ساساكي و البنى الأخرى

مخطط الجسور بين البُنى الأساسية (ثنائية التماسك، كانموتسو، ساساكي و الرُكن) ثلاثية الأبعاد

باستعمال التحويل 2n-تحاكي مع $h \neq \pm f \Rightarrow \gamma = 0$



ملاحظة: لا يوجد جسور انتقال بين بُنية ساساكي و البنى الأخرى

3.3 التحويل المزدوج

هذا التحويل هو أحد النتائج التي فتحها الله علينا و قد نُشرت مؤخرا في مجلّة دولية محكّمة [11]. أطلقنا على هذا التحويل إسم التحويل المزدوج باعتباره يمس المترك الريماني g و موتّر البنية φ في آن واحد عكس التحويلات السابقة و التي كان التغيير على مستوى المترك الريماني فقط.

هنا، سنقدم هذا التحويل بطريقة مختلفة نوعا ما عن الطريقة المتّبعة في البحث المشار إليه لسببين، الأول حتى يكون في متناول طلبة الماستر و الثاني حتى تكون النتائج أكثر تعميما و تتناسب مع الدراسة المقدمة حول أصناف البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد.

تعريف 3.3.29. [11]
لتكن (φ,ξ,η,g) بنُية مترية تلامسية تقريبا على M^{2n+1}. من أجل كل حقلي أشعة X و Y على M، نعرّف التحويل المزدوج للبنُية (φ,ξ,η,g) كمايلي

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}X = \varphi X + \theta(\varphi X)\xi, \\ \tilde{\xi} = \xi, \\ \tilde{\eta} = \eta - \theta, \\ \tilde{g}(X,Y) = fg(X,Y) - f\eta(X)\eta(Y) + \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y), \end{cases} \tag{17}$$

حيث θ شكل تفاضلي أحادي و f دالة موجبة على M.

قضية 3.3.32. تكون $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ بنُيةً متريةً تلامسيةً تقريباً إذا و فقط إذا كان θ و η متعامدين أي $\theta(\xi)=0$.

البرهان 3.3.59. لنتحقق من الشروط الثلاثة للبنية المترية التلامسية. يبدوا واضحا أن

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\tilde{\xi}) &= (\eta - \theta)\xi \\ &= \eta(\xi) - \theta(\xi) \\ &= 1 - \theta(\xi) \end{aligned}$$

و كذلك، لدينا

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^2 X &= \tilde{\varphi}\big(\varphi X + \theta(\varphi X)\xi\big) \\ &= \tilde{\varphi}\varphi X + \theta(\varphi X)\tilde{\varphi}\xi \\ &= \varphi^2 X + \theta(\varphi^2 X)\xi \\ &= -X + \eta(X)\xi - \theta(X)\xi + \theta(\xi)\eta(X)\xi \\ &= -X + \tilde{\eta}(X)\tilde{\xi} + \theta(\xi)\eta(X)\xi, \end{aligned}$$

أخيرا، بالنسبة لشرط الملائمة لدينا

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y) &= \tilde{g}\big(\varphi X+\theta(\varphi X)\xi,\varphi Y+\theta(\varphi Y)\xi\big)\\ &= \tilde{g}(\varphi X,\varphi Y)+\theta(\varphi Y)\tilde{g}(\varphi X,\xi)+\theta(\varphi X)\tilde{g}(\xi,\varphi Y)\\ &\quad +\theta(\varphi X)\theta(\varphi Y)\tilde{g}(\xi,\xi)\\ &= fg(\varphi X,\varphi Y)+\theta(\varphi X)\theta(\varphi Y)\theta(\xi)^2\\ &= fg(X,Y)-f\eta(X)\eta(Y)+\theta(\varphi X)\theta(\varphi Y)\theta(\xi)^2\\ &= \tilde{g}(X,Y)-\tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y)+\theta(\varphi X)\theta(\varphi Y)\theta(\xi)^2.\end{aligned}$$

و عليه، تكون $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ بُنية مترية تلامسية تقريبا إذا و فقط إذا كان $\theta(\xi)=0$.

ملاحظة 3.3.15. مادام $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ هي بُنية مترية تلامسية تقريبا فإنه يمكن كتابة المترك الريماني $\tilde{g}$ بطريقة مختصرة و جميلة هي

$$\tilde{g}(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y)=fg(\varphi X,\varphi Y).$$

ملاحظة 3.3.16. من أجل $\theta=0$ نستنتج الحالة الخاصة التي درسها ماريرو في [27].

قضية 3.3.33. إذا كانت (φ,ξ,η,g) بُنية مترية تلامسية تقريبا أساسها $\{e_1,e_2,e_3=\xi\}$ فإنّ أساس البُنية المترية التلامسية تقريباً $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ الناتجة بتحويل مزدوج يُعطى بالشكل

$$\left\{\tilde{e}_1=\frac{1}{\sqrt{f}}\big(e_1+\theta(e_1)\xi\big)\ ,\ \tilde{e}_2=\frac{1}{\sqrt{f}}\big(e_2+\theta(e_2)\xi\big)\ ,\ \tilde{e}_3=\xi\right\} \tag{18}$$

البرهان 3.3.60. أولا، لدينا

$$\tilde{g}(\tilde{e}_3,\tilde{e}_3)=\tilde{g}(\xi,\xi)=1,$$

من أجل كل $i,j\in\{1,2\}$، لدينا أيضا

$$\tilde{g}(e_i,\xi)=-\theta(e_i)$$

و منه

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{e}_i,\tilde{e}_j) &= \frac{1}{f}\tilde{g}\Big(e_i+\theta(e_i)\xi,e_j+\theta(e_j)\xi\Big)\\ &= \frac{1}{f}\Big(\tilde{g}(e_i,e_j)+\theta(e_j)\tilde{g}(e_i,\xi)+\theta(e_i)\tilde{g}(\xi,e_j)+\theta(e_i)\theta(e_j)\tilde{g}(\xi,\xi)\Big)\\ &= \delta_{ij}.\end{aligned}$$

و كذلك

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{e}_i,\xi) &= \frac{1}{\sqrt{f}}\tilde{g}\Big(e_i+\theta(e_i)\xi,\xi\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{f}}\big(\tilde{g}(e_i,\xi)+\theta(e_i)\tilde{g}(\xi,\xi)\big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{f}}\big(-\theta(e_i)+\theta(e_i)\big)=0.\end{aligned}$$

و بهذا ينتهي البرهان.

لنبحث عن العلاقة بين $\tilde{N}^{(1)}$ و $N^{(1)}$ من أجل التحويل المزدوج مع العلم أنّ $\theta(\xi)=0$ و

$$\tilde{N}^{(1)}(X,Y)=[\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}](X,Y)+2\mathrm{d}\tilde{\eta}(X,Y)\xi,$$

حيث

$$[\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}](X,Y)=\tilde{\varphi}^2[X,Y]+[\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y]-\tilde{\varphi}[\tilde{\varphi}X,Y]-\tilde{\varphi}[X,\tilde{\varphi}Y].$$

بحسابات طويلة لكنها غير صعبة و باستعمال العلاقة الأولى في الجملة (17) نحصل على

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{(1)}(X,Y) &= N^{(1)}(X,Y)+\theta(N^{(1)}(X,Y))\xi\\ &+ \theta(\varphi X)\Big(N^{(3)}(Y)+\theta\big(N^{(3)}(Y)\big)\xi\Big)-\theta(\varphi Y)\Big(N^{(3)}(X)+\theta\big(N^{(3)}(X)\big)\xi\Big)\\ &+ 2\mathrm{d}\theta\big(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y\big)\xi-2\mathrm{d}\theta(X,Y)\xi \qquad (19)\end{aligned}$$

مع $N^{(3)}$ هو موتّر على M معرّف بـ

$$N^{(3)}(X)=\big(\mathcal{L}_\xi\varphi\big)(X)=\varphi[X,\xi]-[\varphi X,\xi],$$

حيث $\mathcal{L}_\xi$ يرمز لمشتقة لِي على طول الحقل الشعاعي ξ.

قضية 3.3.34. لتكن (φ,ξ,η,g) بنُية مترية تلامسية تقريبا ناظمية على M. تكون البُنية المترية التلامسية تقريبا $(\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ ناظمية إذا و فقط إذا كان

$$\mathrm{d}\theta=\sigma\phi,$$

حيث و σ دالة قابلة للتفاضل على M.

البرهان 3.3.61. أولا، بما أن (φ,ξ,η,g) هي بنُية مترية تلامسية تقريبا ناظمية على M، إذن لدينا

$$N^{(1)}(X,Y)=0\Rightarrow N^{(1)}(\varphi X,\xi)=[\xi,\varphi X]-\varphi[\xi,X]=N^{(3)}(X)=0.$$

و بالتالي من (19)، ينتج

$$\tilde{N}^{(1)}(X,Y) = 2\mathrm{d}\theta\big(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y\big)\xi - 2\mathrm{d}\theta(X,Y)\xi. \tag{20}$$

يبدوا واضحا أنّه من أجل $\mathrm{d}\theta = \sigma\phi$ يكون

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{(1)}(X,Y) &= 2\sigma\phi\big(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y\big)\xi - 2\sigma\phi(X,Y)\xi \\ &= 2\sigma\phi\big(\varphi X + \theta(\varphi X)\xi, \varphi Y + \theta(\varphi Y)\xi\big)\xi - 2\sigma\phi(X,Y)\xi = 0 \\ &= 2\sigma\Big(\phi\big(\varphi X,\varphi Y\big) - \phi(X,Y)\Big)\xi = 0.\end{aligned}$$

عكسيا، نفرض أن $\tilde{N}^{(1)} = 0$ من (20) ينتج

$$\mathrm{d}\theta\big(\tilde{\varphi}X,\tilde{\varphi}Y\big) = \mathrm{d}\theta(X,Y).$$

و من أجل $Y = \xi$ نتحصّل على

$$\mathrm{d}\theta(X,\xi) = 0. \tag{21}$$

ما دمنا في البُعد الثلاثي، نعتبر $\{e_0 = \xi, e_1, e_2\}$ أساسا متعامدا و متجانسا و $\{\theta^0 = \eta, \theta^1, \theta^2\}$ الأساس الثنوي المرافق على M. يمكن بسهولة تبيان أنّ

$$\phi = 2\theta^2 \wedge \theta^1,$$

من جهة أخرى، و بما أنّ الشكل التفاضلي الأحادي θ عمودي على η فإن الشكل التفاضلي الثنائي $\mathrm{d}\theta$ يكتب بالشكل

$$\mathrm{d}\theta = a\,\theta^1 \wedge \eta + b\,\theta^2 \wedge \eta + c\,\theta^1 \wedge \theta^2,$$

مع a، b و c هي دوال قابلة للتفاضل على M. بتوظيف (21) ينتج

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta(X,\xi) = 0 &= \big(a\,\theta^1 \wedge \eta + b\,\theta^2 \wedge \eta + c\,\theta^1 \wedge \theta^2\big)(X,\xi) \\ &= a\theta^1(X) + b\theta^2(X) = 0,\end{aligned}$$

أي

$$a\theta^1 + b\theta^2 = 0.$$

و لدينا

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta &= a\,\theta^1 \wedge \eta + b\,\theta^2 \wedge \eta + c\,\theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= (a\,\theta^1 + b\,\theta^2) \wedge \eta + c\,\theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= c\,\theta^1 \wedge \theta^2 \\ &= -\frac{c}{2}\phi.\end{aligned}$$

بنفس المنطق يمكن تعميم القضية السابقة الى مايلي

قضية 3.3.35. إذا كان

$$N^{(1)} = 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi$$

فإنّ

$$\tilde{N}^{(1)} = 2(\omega \wedge \tilde{\eta}) \otimes \xi,$$

إذا و فقط إذا كان

$$\mathrm{d}\theta - \omega \wedge \theta = \lambda\phi.$$

البرهان 3.3.62.

أولا، بما أن (φ, ξ, η, g) هي بنُية مترية تلامسية تقريبا على M تحقق $N^{(1)} = 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi$ هذا يستلزم

$$N^{(1)}(\varphi X, \xi) = N^{(3)}(X) = \omega(\varphi X)\xi.$$

و منه إذا كان

$$N^{(1)} = 2(\omega \wedge \eta) \otimes \xi = 2(\omega \wedge \tilde{\eta}) \otimes \xi + 2(\omega \wedge \theta) \otimes \xi,$$

فإنه من (19)، ينتج

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{(1)}(X,Y) &= 2(\omega \wedge \tilde{\eta})(X,Y)\xi + 2\big(\mathrm{d}\theta - \omega \wedge \theta\big)(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y)\xi \\ &\quad -2\big(\mathrm{d}\theta - \omega \wedge \theta\big)(X,Y)\xi. \end{aligned} \tag{22}$$

يبدوا واضحا أنّه من أجل $\mathrm{d}\theta - \omega \wedge \theta = \lambda\phi$ يكون

$$\tilde{N}^{(1)} = 2(\omega \wedge \tilde{\eta}) \otimes \xi.$$

عكسيا، نفرض أن $\tilde{N}^{(1)} = 2\omega \wedge \tilde{\eta}$ من (22) ينتج

$$\big(\mathrm{d}\theta - (\omega \wedge \theta)\big)(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) = \big(\mathrm{d}\theta - (\omega \wedge \theta)\big)(X,Y).$$

من أجل $Y = \xi$ نتحصّل على

$$\mathrm{d}\theta(X, \xi) = 0. \tag{23}$$

في برهان القضية السابقة بينّا أن

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{c}{2}\phi,$$

و بالتالي يكفي أن نثبت أن $\omega \wedge \theta = \mu\phi$ مع μ دالة قابلة للتفاضل على M.

نعلم أن الشكلين التفاضليين ω و θ هما عموديان على η فهما يكتبان على الشكل

$$\omega = a\,\theta^1 + b\,\theta^2, \qquad \theta = p\theta^1 + q\theta^2,$$

مع a، b، p و q هي دوال قابلة للتفاضل على M. و عليه

$$\begin{aligned}\omega\wedge\theta &= (a\,\theta^1 + b\,\theta^2)\wedge(p\,\theta^1 + q\,\theta^2)\\ &= a\,\theta^1\wedge q\,\theta^2 + b\,\theta^2\wedge p\,\theta^1\\ &= (bp-aq)\theta^2\wedge\theta^1\\ &= \frac{bp-aq}{2}\phi,\end{aligned}$$

و بالتالي، يكفي أخذ $\lambda = \frac{bp-aq-c}{2}$.

من جهة أخرى، و باستعمال دستور كوزيل، يمكننا الحصول على مايلي:

قضية 3.3.36. لتكن∇ و $\tilde\nabla$ وصلتي لوفي-سيفيتا المرفقتين بـ g و $\tilde g$ على الترتيب. من أجل كل X، Y و Z حقول أشعة على M، لدينا العلاقات التالية:

$$\begin{aligned}\tilde g(\tilde\nabla_X Y, Z) = \tilde g(\nabla_X Y, Z) &+ \frac{1}{2}\Big(X(f)g(Y,Z) + Y(f)g(X,Z) - Z(f)g(X,Y)\\ &- X(f)\eta(Y)\eta(Z) - Y(f)\eta(X)\eta(Z) + Z(f)\eta(X)\eta(Y)\Big)\\ &- f\Big(\frac{1}{2}\big((\nabla_X\eta)Y + (\nabla_Y\eta)X\big)\eta(Z) + \mathrm{d}\eta(X,Z)\eta(Y) + \mathrm{d}\eta(Y,Z)\eta(X)\Big)\\ &+ \frac{1}{2}\big((\nabla_X\tilde\eta)Y + (\nabla_Y\tilde\eta)X\big)\tilde\eta(Z) + \mathrm{d}\tilde\eta(X,Z)\tilde\eta(Y) + \mathrm{d}\tilde\eta(Y,Z)\tilde\eta(X).\end{aligned}$$

البرهان 3.3.63. من أجل البرهان يكفي اتباع الخطوات الواردة في الصفحة 156.

لتطبيق التحويل المزدوج على البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد و إنشاء جسور التنقل بينها يكفي حساب عبارة $\tilde\nabla_X\tilde\xi$. نترك هذا العمل بهذه الكيفية للطالب و عليه أن يثبت أنّ

$$\tilde\nabla_X\tilde\xi \;=\; \frac{1}{f}\Big(-(\alpha-\lambda)\tilde\varphi X - \big(\beta f + \frac{1}{2}\xi(f)\big)\tilde\varphi^2 X + \tilde\eta(X)\tilde\varphi^2\psi\Big) \qquad (24)$$

و نقترح نحن هنا طريقة أخرى في إنشاء جسور التنقل للإثراء و التنويع. هذه الطريقة تعتمد على الشكلين التفاضليين الأساسيين الأول و الثاني. لدينا (φ,ξ,η,g) هي بُنية ما وراء-ساساكي معمّمة ثلاثية الأبعاد من النوع (α, β, γ) لدينا إذن

$$\mathrm{d}\eta = \omega\wedge\eta + \alpha\phi, \quad \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta\wedge\phi, \quad N^{(1)} = 2(\omega\wedge\eta)\otimes\xi.$$

أولا، لنستخرج الشكل التفاضلي الأساسي الثاني $\tilde{\phi}$ للبُنبة الناتجة $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$. لدينا

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}(X,Y) &= \tilde{g}(X, \tilde{\varphi}Y) \\
&= \tilde{g}\big(X, \varphi Y + \theta(\varphi Y)\xi\big) \\
&= \tilde{g}(X, \varphi Y) + \theta(\varphi Y)\tilde{g}(X, \xi) \\
&= f g(X, \varphi Y) \\
&= f\phi(X,Y),
\end{aligned}$$

و بالتالي لدينا

$$\tilde{\phi} = f\phi \tag{25}$$

و منه

$$\begin{cases} \tilde{\eta} = \eta - \theta \\ \tilde{\phi} = f\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{d}\eta - \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = \mathrm{d}f \wedge \phi + f\mathrm{d}\phi \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \omega \wedge \eta + \alpha\phi - \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = \mathrm{d}(\ln f) \wedge \tilde{\phi} + 2f\beta\eta \wedge \phi \end{cases}$$

بتوظيف القضية 3.3.35 و نقصد العلاقة $\mathrm{d}\theta = \omega \wedge \theta + \lambda\phi$ نجد

$$\begin{cases} \tilde{\eta} = \eta - \theta \\ \tilde{\phi} = f\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \omega \wedge \eta + \alpha\phi - \omega \wedge \theta - \lambda\phi \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = \mathrm{d}(\ln f) \wedge \tilde{\phi} + 2f\beta\eta \wedge \phi \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \omega \wedge \tilde{\eta} + (\alpha - \lambda)\phi \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = 2\big(\frac{1}{2}\mathrm{d}(\ln f) + \beta\tilde{\eta}\big) \wedge \tilde{\phi} + 2\beta\theta \wedge \tilde{\phi} \end{cases} \tag{26}$$

من أجل تبسيط أكثر، نحتاج القضية التالية

قضية 3.3.37. من أجل كل مُنوّعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$، لدينا

$$\mathrm{d}(\ln f) \wedge \phi = \xi(\ln f)\eta \wedge \phi, \qquad \theta \wedge \phi = 0. \tag{27}$$

البرهان 3.3.64. ليكن $\{e_0 = \xi, e_1, e_2\}$ أساسا متعامدا و متجانسا و $\{\theta^0 = \eta, \theta^1, \theta^2\}$ الأساس الثنوي المرافق على M. إذن

$$\phi = 2\theta^2 \wedge \theta^1,$$

و

$$\mathrm{d}(\ln f) = \xi(\ln f)\eta + \theta^1(\ln f)\theta^1 + \theta^2(\ln f)\theta^2.$$

و منه

$$\mathrm{d}(\ln f)\wedge\phi=\xi(\ln f)\eta\wedge\phi.$$

بالنسبة للعلاقة الثانية، نعلم أنّ الشكل التفاضلي θ عمودي على η هذا معناه

$$\theta=a\,\theta^1+b\,\theta^2,\quad a,b\in\mathcal{C}^\infty(M)$$

و بالتالي

$$\theta\wedge\phi=0.$$

نعود الآن للجملة (26)، بتوظيف القضية 3.3.37، نتحصّل على

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\eta=\omega\wedge\eta+\alpha\phi\\ \mathrm{d}\phi=2\beta\eta\wedge\phi\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\tilde\eta=\omega\wedge\tilde\eta+\frac{1}{f}(\alpha-\lambda)\tilde\phi\\ \mathrm{d}\tilde\phi=2\big(\beta+\frac{1}{2}\xi(\ln f)\big)\tilde\eta\wedge\tilde\phi.\end{array}\right.\tag{28}$$

بالإظافة الى ذلك، باستعمال دستور كوزيل

$$\begin{array}{rcl}2\tilde g\big(\tilde\nabla_XY,Z\big)&=&X\big(\tilde g(Y,Z)\big)+Y\big(\tilde g(Z,X)\big)-Z\big(\tilde g(X,Y)\big)\\ &&+\tilde g(Z,[X,Y])+\tilde g(Y,[Z,X])-\tilde g(X,[Y,Z]),\end{array}$$

من أجل $X=Y=\xi$ ينتج

$$\begin{array}{rcl}\tilde g\big(\tilde\nabla_\xi\xi,Z\big)&=&\xi\big(\tilde\eta(Z)\big)+\tilde\eta\big([Z,\xi]\big)\\ &=&\xi\big(\eta(Z)\big)-\xi\big(\theta(Z)\big)+\eta\big([Z,\xi]\big)-\theta\big([Z,\xi]\big)\\ &=&g(\nabla_\xi\xi,Z)-\xi\big(\theta(Z)\big)-\theta\big([Z,\xi]\big)\\ &=&-g(\psi,Z)+2\mathrm{d}\theta(Z,\xi),\end{array}$$

ما دام منوّعة الانطلاق و المنوّعة الناتجة هما ما وراء-ساساكي معمّمة، فمن القضية 3.3.35، لدينا $\mathrm{d}\theta(Z,\xi)=0$. و منه

$$\begin{array}{rcl}\tilde g\big(\tilde\psi,Z\big)&=&g(\psi,Z)=\dfrac{1}{f}\tilde g(\psi,Z)-\tilde\eta(\psi)\tilde\eta(Z)\\ &=&\dfrac{1}{f}\tilde g\big(\psi+\theta(\psi)\xi,Z\big)=\tilde g\Big(-\dfrac{1}{f}\tilde\varphi^2\psi,Z\Big)\end{array}$$

فينتج

$$\tilde\psi=-\frac{1}{f}\tilde\varphi^2\psi.$$

و بالتالي

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \tilde{g}\big(\tilde{\psi},\tilde{\psi}\big) = \frac{1}{f^2}\tilde{g}(\tilde{\varphi}^2\psi,\tilde{\varphi}^2\psi)\frac{1}{f^2}\tilde{g}(\tilde{\varphi}\psi,\tilde{\varphi}\psi)\\ &= \frac{1}{f^2}\tilde{g}(\psi,\psi)-\tilde{\eta}(\psi)\tilde{\eta}(\psi) = \frac{1}{f}g(\psi,\psi)\\ &= \frac{1}{f}\gamma.\end{aligned}$$

من جانب آخر، و قبل أن نَصيغ المبرهنة الناتجة، من الأهمية بمكان الإشارة الى الحالة الخاصة و الهامة و نقصد لما يكون $\theta=\omega$ باعتبار أنهما يعامدان معا η. يترتب على ذلك مايلي

$$\mathrm{d}\theta-\omega\wedge\theta=\mathrm{d}\omega-\omega\wedge\omega=0\ \Leftrightarrow\ \lambda=0,$$

و بالتالي الجملة (28) تصبح بالشكل

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\eta=\omega\wedge\eta+\alpha\phi\\ \mathrm{d}\phi=2\beta\eta\wedge\phi\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}\mathrm{d}\tilde{\eta}=\omega\wedge\eta+\frac{\alpha}{f}\tilde{\phi}\\ \mathrm{d}\tilde{\phi}=2\big(\beta+\frac{1}{2}\xi(\ln f)\big)\tilde{\eta}\wedge\tilde{\phi}.\end{array}\right.\tag{29}$$

بناء على ما تقدم، نستنتج المبرهنة التالية

مبرهنة 3.3.47.

إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ما وراء-ساساكي معمّمة من النوع (α,β,γ) فإن المنوّعة $(M,\tilde{\varphi},\tilde{\xi},\tilde{\eta},\tilde{g})$ الناتجة بالتحويل المزدوج هي منوّعة ما وراء-ساساكي معمّمة من النوع

$$\Big(\tilde{\alpha}=\frac{\alpha-\lambda}{f},\ \tilde{\beta}=\beta+\frac{1}{2}\xi(\ln f),\ \tilde{\gamma}=\frac{1}{f}\gamma\Big).$$

مثال 3.3.22.

سنعتمد على المثال 2.6.19 (أنظر صفحة 138). لقد بينّا أنّ الفضاء الإقليدي $\mathbb{E}^3$ المزوّد بـ

$$g=\left(\begin{array}{ccc}\rho^2+\tau^2 & \tau\rho & -\tau\\ \tau\rho & \rho^2+\tau^2 & -\rho\\ -\tau & -\rho & 1\end{array}\right),$$

حيث ρ و τ دالتان معرفتان على $\mathbb{E}^3$ و

$$\varphi=\left(\begin{array}{ccc}0 & -\frac{\tau}{\rho} & 0\\ \frac{\rho}{\tau} & 0 & 0\\ \frac{\rho^2}{\tau} & -\frac{\tau^2}{\rho} & 0\end{array}\right),\qquad \xi=\left(\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right),\qquad \eta=\big(-\tau,-\rho,1\big).$$

هي منوّعة ماوراء-ساساكي معمّمة مع

$$\alpha = \frac{\rho_1 - \tau_2}{2\tau\rho}, \quad \beta = \frac{\rho_3}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\rho_3(k^4+1)}{\rho^2 k^2}.$$

بشرط $\tau = k(x,y)\rho$ مع k دالة موجبة تماما.

لضبط صيغة التحويل المزدوج ينبغي أولا تحديد الشكل التفاضلي الأحادي θ، و ذلك بالانتباه لأمرين اثنين، الأول أنّ θ هي شكل تفاضلي عمودي على η و الثاني $\mathrm{d}\theta(X,\xi) = 0$ و هذا معناه

$$\begin{cases} \theta = \sigma dx + \mu dy \\ \mathrm{d}\theta = (\mu_1 - \sigma_2) dx \wedge dy \\ \sigma_3 = \mu_3 = 0. \end{cases}$$

بتطبيق التحويل المزدوج

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} X = \varphi X + \theta(\varphi X)\xi, \\ \tilde{\xi} = \xi, \\ \tilde{\eta} = \eta - \theta, \\ \tilde{g}(X,Y) = f g(X,Y) - f\eta(X)\eta(Y) + \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y), \end{cases}$$

نحصّل على البنُية المترية التلامسية التالية

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} f\rho^2 + (k\rho+\sigma)^2 & (k\rho+\sigma)(\rho+\mu) & -k\rho-\sigma \\ (k\rho+\sigma)(\rho+\mu) & fk^2\rho^2 + (\rho+\mu)^2 & -\rho-\mu \\ -k\rho-\sigma & -\rho-\mu & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ \frac{\rho+\mu}{k} & -k(\sigma - k\rho) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta} = \big(-(k\rho+\sigma), -\rho-\mu, 1 \big).$$

بما أن الأساس المتعامد و المتجانس بالنسبة للمترك الريماني g هو

$$\Big\{ e_1 = \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ e_2 = \frac{1}{\tau}\Big(\frac{\partial}{\partial y} + \rho\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ e_3 = \frac{\partial}{\partial z} \Big\}$$

فإن الأساس المتعامد و المتجانس بالنسبة للمترك الريماني $\tilde{g}$ هو (أنظر القضية 3.3.33 صفحة 165)

$$\Big\{ \tilde{e}_1 = \frac{1}{\rho\sqrt{f}}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + (k\rho+\sigma)\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ \tilde{e}_2 = \frac{1}{k\rho\sqrt{f}}\Big(\frac{\partial}{\partial y} + (\rho+\mu)\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ \tilde{e}_3 = \frac{\partial}{\partial z} \Big\}$$

نعطي الآن، مركبات وصلة لوفي-سيفيتا الأساسية الموافقة للمترك الريماني g على النحو التالي

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{e}_1}\xi &= \frac{1}{2f\rho}\big(f_3\rho+2f\rho_3\big)\tilde{e}_1\\ &-\frac{1}{2f\rho^2k}\big(\rho_1+\mu_1-k\rho_3\mu+\rho_3\sigma-k_2\rho-k\rho_2-\sigma_2\big)\tilde{e}_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{e}_2}\xi &= \frac{1}{2f\rho^2k}\big(\rho_1+\mu_1-k\rho_3\mu+\rho_3\sigma-k_2\rho-k\rho_2-\sigma_2\big)\tilde{e}_1\\ &+\frac{1}{2f\rho}\big(f_3\rho+2f\rho_3\big)\tilde{e}_2,\end{aligned}$$

$$\nabla_\xi\xi=-\frac{k\rho_3}{\rho\sqrt{f}}\tilde{e}_1-\frac{\rho_3}{k\rho\sqrt{f}}\tilde{e}_2.$$

من جهة أخرى، لنحسب

$$T(\tilde{e}_i)=-\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_i-\tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_i-\tilde{\eta}(\tilde{e}_i)\tilde{\psi}$$

فينتج

$$\begin{cases}T(\tilde{e}_1)=-\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_1-\tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_1=-\tilde{\alpha}\tilde{e}_2+\tilde{\beta}\tilde{e}_1\\ T(\tilde{e}_2)=-\tilde{\alpha}\tilde{\varphi}\tilde{e}_2-\tilde{\beta}\tilde{\varphi}^2\tilde{e}_2=\tilde{\alpha}\tilde{e}_1+\tilde{\beta}\tilde{e}_2\\ T(\xi)=-\tilde{\psi},\end{cases}$$

تكون المنوّعة الناتجة بالتحويل المزدوج ما وراء-ساساكي معمّمة من النوع $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$ إذا و فقط إذا كان

$$\nabla_{\tilde{e}_i}\xi=T(\tilde{e}_i)$$

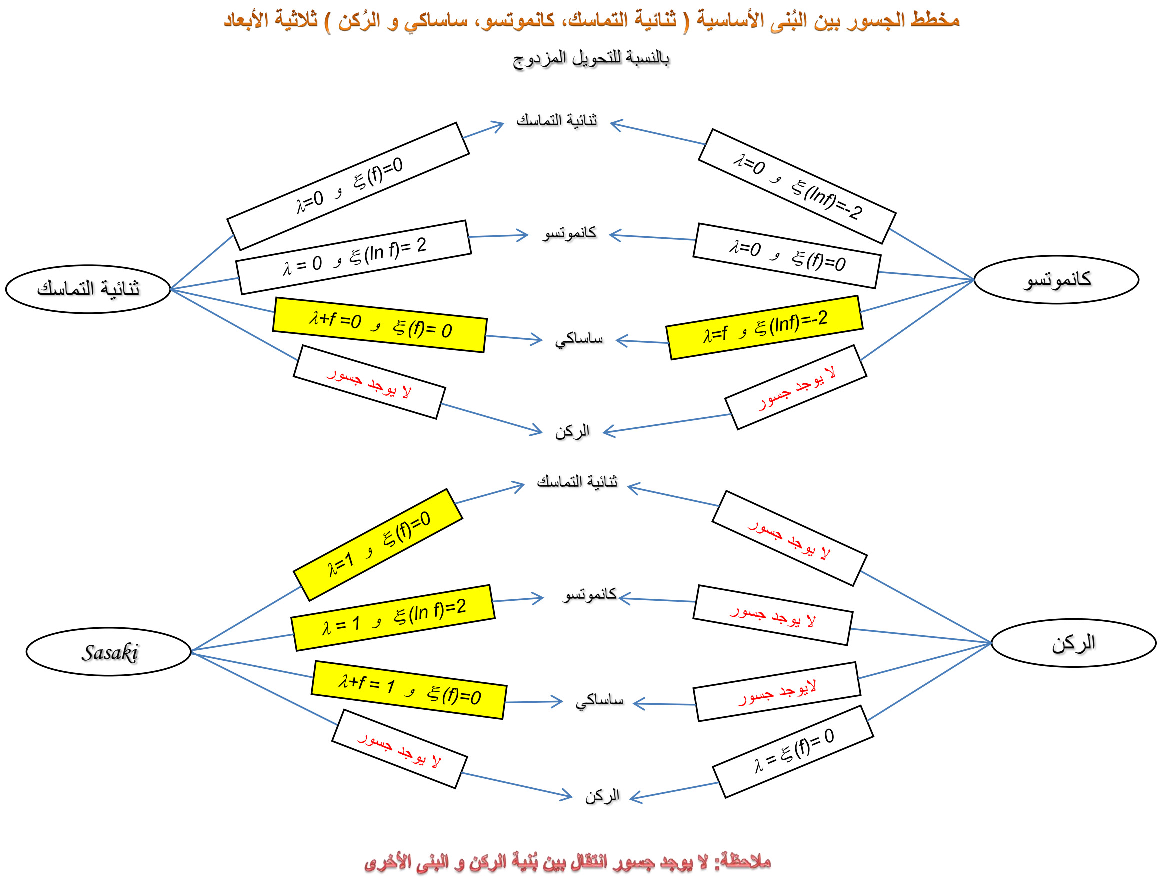
و ينتج عن هذا

$$\begin{cases}\tilde{\alpha}=\frac{1}{2f\rho}\big(f_3\rho+2f\rho_3\big)\\ \tilde{\beta}=\frac{1}{2f\rho^2k}\big(\rho_1+\mu_1-k\rho_3\mu+\rho_3\sigma-k_2\rho-k\rho_2-\sigma_2\big)\\ \tilde{\psi}=\frac{k\rho_3}{\rho\sqrt{f}}\tilde{e}_1+\frac{\rho_3}{k\rho\sqrt{f}}\tilde{e}_2,\end{cases}$$

و يمكننا الآن التحقق من أن

$$\tilde{\alpha}=\frac{\alpha-\lambda}{f},\qquad \tilde{\beta}=\beta+\frac{1}{2}\xi(\ln f),\qquad \tilde{\gamma}=\frac{1}{f}\gamma.$$

و في ختام هذه الفقرة ، نقدّم مخططا يلخّص الجسور الممكنة بين البُنى الأساسية الأربعة، ثنائية التماسك، كانموتسو، ساساكي و الرُكن.



لتأكيد الملاحظة المتعلقة بوجود جسور انتقال بين صنف الساساكي و صنف الكانموتسو، نعطي المثالين التاليين:

مثال 3.3.23. (من الكانموتسو الى الساساكي)
نعتبر البُنية المترية التلامسية تقريبا التالية

$$g = \begin{pmatrix} x^2+\mathrm{e}^{2z} & 0 & -x \\ 0 & \mathrm{e}^{2z} & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \eta = (-x, 0, 1).$$

و يمكن أن نحقق أن (φ, ξ, η, g) هي بنُية كانموتسو.
نأخذ الآن، $\lambda = -f = -\mathrm{e}^{-2z}$ ينتج $\mathrm{d}\theta = 2dx \wedge dy$ و هذا يستلزم

$$\theta = adx + bdy \quad \text{مع} \quad b_1 - a_2 = 2 \quad \text{و} \quad a_3 = b_3 = 0,$$

حيث $a_i = \frac{\partial a}{\partial x_i}$ و $b_i = \frac{\partial b}{\partial x_i}$.
لاحظ أنه يوجد عدد غير منته من قيم θ. نواص مع الحل الخاص $\theta = 2xdy$. فنتحصّل

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & 2x^2 & -x \\ 2x^2 & 1+4x^2 & -2x \\ -x & -2x & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2x & -x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\xi} = \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta} = \eta = (-x, -2x, 1).$$

و أخيرا، يمكن التحقق من أن $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ هي بنُية ساساكي.

مثال 3.3.24. (من الساساكي الى الكانموتسو)
الآن من أجل البُنية المترية التلامسية تقريبا

$$g = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1+4y^2\mathrm{e}^{2x} & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 0 \\ 2y & 0 & \mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2y\mathrm{e}^{2x} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = (2y\mathrm{e}^{2x}, 0, 1).$$

يمكننا التحقق من أنّ (φ, ξ, η, g) هي بنية ساساكي.
لنأخذ $\lambda = 1$ و $f = \mathrm{e}^{2z}$، ينتج $\mathrm{d}\theta = -2\mathrm{e}^{2x}dx \wedge dy$. و بالتالي يوجد خيارات عديدة لـ θ. لنأخذ $\theta = 2y\mathrm{e}^{2x}dx,$ فينتج

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2(x+z)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2(x+z)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\eta} = dz.$$

و أخيرا، يمكننا التحقّق من أنّ $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ هي بنُية كانموتسو.

3.4 التحويل بالأساس

من خلال اسم هذا التحويل، يبدوا أنّ لأساس المنوّعة الريمانية (M, g) ثلاثية الأبعاد $\{e_0, e_1, e_2\}$ أهمية كبيرة و دور محوري في تعريف التحويل. لذا، من الضروري وجود الأساس عند كل نقطة من المنوّعة، هذا يدفعنا لاعتبار حقول أشعة الأساس شاملة (إجمالية) أي لا ينعدم أي منها عند أي نقطة من المنوّعة (طبعا نقصد الأساس المتعامد و المتجانس). سنعتبر $\{\theta^0, \theta^1, \theta^2\}$ هو الأساس الثنوي المرافق. نضع $\xi = e_0$ و $\eta = \theta^0$ و لتعريف موتّر البُنية φ لدينا في الحالة العامة

$$\varphi e_i = \sum_j \varphi_i^j e_j.$$

لكننا هنا سنتناول حالة خاصة مثيرة للإهتمام. نضع

$$\varphi = e_2 \wedge e_1 = \theta^1 \otimes e_2 - \theta^2 \otimes e_1. \tag{30}$$

من أجل المترك الريماني g نضع

$$g = \sum_{i=0}^{2} \theta^i \otimes \theta^i. \tag{31}$$

هذا البناء يقودنا للمبرهنة التالية

مبرهنة 3.4.48. المنوّعة $(M, \varphi, e_0, \theta^0, g)$ المعرّفة أعلاه هي منوّعة مترية تلامسية تقريبا.

البرهان 3.4.65. بسهولة نلاحظ تحقق الشرط الأول، أي

$$\eta(\xi) = \theta^0(e_0) = 1.$$

و بالتالي، كي تكون المنوّعة $(M, \varphi, e_0, \theta^0, g)$ مترية تلامسية تقريبا يكفي التحقق من الشرطين

$$\varphi^2 X = -X + \theta^0(X) e_0 \qquad \text{و} \qquad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \theta^0(X)\theta^0(Y)$$

باستعمال العلاقة (30) لدينا

$$\varphi e_1 = e_2 \qquad \text{و} \qquad \varphi e_2 = -e_1$$

لإثبات الشرط الأول، لدينا من أجل كل حقل شعاعي X على M

$$\begin{aligned}
\varphi^2 X &= \varphi\big(\theta^1(X)e_2 - \theta^2(X)e_1\big)\\
&= \theta^1(X)\varphi e_2 - \theta^2(X)\varphi e_1\\
&= -\theta^1(X)e_1 - \theta^2(X)e_2\\
&= -X + \theta^0(X)e_0\\
&= -X + \eta(X)\xi,
\end{aligned}$$

لأن

$$\begin{aligned}
X &= \sum_{i=0}^{2} g(X, e_i)e_i\\
&= \theta^0(X)e_0 + \theta^1(X)e_1 + \theta^2(X)e_2.
\end{aligned}$$

لإثبات الشرط الثاني، من أجل كل حقلي أشعة X و Y على M لدينا

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi Y) &= g\big(\theta^1(X)e_2 - \theta^2(X)e_1, \theta^1(Y)e_2 - \theta^2(Y)e_1\big)\\
&= \theta^1(X)\theta^1(Y) + \theta^2(X)\theta^2(Y)\\
&= g\Big(X\ ,\ \theta^1(Y)e_1 + \theta^2(Y)e_2\Big)\\
&= g\big(X, Y - \theta^0(Y)e_0\big)\\
&= g(X,Y) - \theta^0(X)\theta_0(Y)\\
&= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),
\end{aligned}$$

و بهذا ينتهي البرهان.

سنهتم في هذه الفقرة بأربعة بنى أساسية، البنى الناظمية الثلاثة (ثنائية التماسك، كانموتسو و الساساكي) مجتمعة في بُنية ماوراء-الساساكي و كذلك البُنية ذات الركن (و تحديدا بنية رُكن الوَحدة ذات الشكل التفاضلي المغلق).

الفكرة هنا تكمن في أنه يمكن للحقل الشعاعي المميز ξ أن يكون أي عنصر من الأساس $\{e_0, e_1, e_2\}$. و بالتالي ستتولّد لدينا ثلاث بنى مترية تلامسية تقريبا. سنبيّن أنه بمعرفة صنف إحداها يمكن استنتاج صنفي الأخريتين. بداية، نعرّف البنى المترية التلامسية تقريبا الثلاثة كمايلي:

◄ **البُنية الصفرية أو الإبتدائية** $(\varphi_0 = \varepsilon e_2 \wedge e_1, \xi_0 = e_0, \eta_0 = \theta^0, g)$ مع $\varepsilon = \pm 1$. ينتج

$$\varphi_0 e_0 = 0, \qquad \varphi_0 e_1 = \varepsilon e_2, \qquad \varphi_0 e_2 = -\varepsilon e_1.$$

◄ **البُنية الأولى** $(\varphi_1 = \varepsilon e_0 \wedge e_2, \xi_1 = e_1, \eta_1 = \theta^1, g)$ و ينتج

$$\varphi_1 e_0 = -\varepsilon e_2, \qquad \varphi_1 e_1 = 0, \qquad \varphi_1 e_2 = \varepsilon e_0.$$

◄ **البُنية الثانية** $(\varphi_2 = \varepsilon e_1 \wedge e_0, \xi_2 = e_2, \eta_2 = \theta^2, g)$ و ينتج

$$\varphi_2 e_0 = \varepsilon e_1, \qquad \varphi_2 e_1 = -\varepsilon e_0, \qquad \varphi_2 e_2 = 0.$$

نحتاج للدوال القابلة للتفاضل التالية:

$$2\alpha_i = tr_g(\varphi_i \nabla \xi_i), \qquad 2\beta_i = \mathbf{div}\xi_i, \qquad \gamma_{ij} = 2\mathrm{d}\eta_i(e_i, e_j)$$

مع $i, j \in \{0, 1, 2\}$، و هي دوال معلومة يمكن حسابها باعتبار الأساس معلوم.

أولا: سنفرض أن البُنية الصفرية $(\varphi_0, \xi_0, \eta_0, g)$ هي بُنية ماوراء-الساساكي. أي لدينا

$$\nabla_{e_i} \xi_0 = -\alpha_0 \varphi_0 e_i - \beta_0 \varphi_0^2 e_i. \tag{32}$$

و منه مركبات وصلة لوفي-سيفيتا تعطى في القضية التالية

قضية 3.4.38.

$$\begin{array}{lll}
\nabla_{e_0} e_0 = 0 & \nabla_{e_1} e_0 = -\varepsilon\alpha_0 e_2 + \beta_0 e_1 & \nabla_{e_2} e_0 = \varepsilon\alpha_0 e_1 + \beta_0 e_2 \\
\nabla_{e_0} e_1 = \varepsilon(2\alpha_1 - \alpha_0) e_2 & \nabla_{e_1} e_1 = -\beta_0 e_0 - 2\beta_2 e_2 & \nabla_{e_2} e_1 = -\varepsilon\alpha_0 e_0 + 2\beta_1 e_2 \\
\nabla_{e_0} e_2 = -\varepsilon(2\alpha_1 - \alpha_0) e_1 & \nabla_{e_1} e_2 = \varepsilon\alpha_0 e_0 + 2\beta_2 e_1 & \nabla_{e_2} e_2 = -\beta_0 e_0 - 2\beta_1 e_1.
\end{array}$$

البرهان 3.4.66. المركبات الثلاثة الأولى تُستنتج من العلاقة (32). بالنسبة لـ $\nabla_{e_0} e_1$ لدينا

$$\nabla_{e_0} e_1 = g(\nabla_{e_0} e_1, e_0) e_0 + g(\nabla_{e_0} e_1, e_1) e_1 + g(\nabla_{e_0} e_1, e_2) e_2,$$

لاحظ أن

$$g(\nabla_{e_0} e_1, e_0) = -g(e_1, \nabla_{e_0} e_0) = 0,$$

و كذلك

$$g(\nabla_{e_0} e_1, e_1) = -g(e_1, \nabla_{e_0} e_1) \Rightarrow g(\nabla_{e_0} e_1, e_1) = 0.$$

بالنسبة لـ $g(\nabla_{e_0} e_1, e_2)$، لدينا

$$\begin{aligned}
2\alpha_1 &= tr_g(\varphi_1 \nabla \xi_1) \\
&= g(\varphi_1 \nabla_{e_0} e_1, e_0) + g(\varphi_1 \nabla_{e_1} e_1, e_1) + g(\varphi_1 \nabla_{e_2} e_1, e_2) \\
&= -g(\nabla_{e_0} e_1, \varphi_1 e_0) - g(\nabla_{e_1} e_1, \varphi_1 e_1) - g(\nabla_{e_2} e_1, \varphi_1 e_2) \\
&= -g(\nabla_{e_0} e_1, -\varepsilon e_2) - g(\nabla_{e_2} e_1, \varepsilon e_0), \qquad (\varphi_1 e_1 = 0) \\
&= \varepsilon g(\nabla_{e_0} e_1, e_2) + \varepsilon g(e_1, \nabla_{e_2} e_0) \\
&= \varepsilon g(\nabla_{e_0} e_1, e_2) + \varepsilon g(e_1, \varepsilon\alpha_0 e_1 + \beta_0 e_2) \\
&= \varepsilon g(\nabla_{e_0} e_1, e_2) + \alpha_0, \qquad (\varepsilon^2 = 1)
\end{aligned}$$

أي
$$g(\nabla_{e_0}e_1, e_2) = \varepsilon(2\alpha_1 - \alpha_0).$$
الآن بالتعويض نجد
$$\nabla_{e_0}e_1 = \varepsilon(2\alpha_1 - \alpha_0)e_2.$$
بنفس التقنية، لنحسب $\nabla_{e_1}e_1$. نعلم أن
$$\nabla_{e_1}e_1 = g(\nabla_{e_1}e_1, e_0)e_0 + g(\nabla_{e_1}e_1, e_1)e_1 + g(\nabla_{e_1}e_1, e_2)e_2,$$
لاحظ أن
$$\begin{aligned} g(\nabla_{e_1}e_1, e_0) &= -g(e_1, \nabla_{e_1}e_0) \\ &= g(e_1, -\varepsilon\alpha_0 e_2 + \beta_0 e_1) = \beta_0, \end{aligned}$$
و كذلك $g(\nabla_{e_1}e_1, e_1) = 0$ بالنسبة لـ $g(\nabla_{e_1}e_1, e_2)$ لدينا
$$\begin{aligned} 2\beta_2 &= \mathrm{div}\xi_2 \\ &= g(\nabla_{e_0}e_2, e_0) + g(\nabla_{e_1}e_2, e_1) + g(\nabla_{e_2}e_2, e_2) \\ &= -g(e_2, \nabla_{e_0}e_0) + g(\nabla_{e_1}e_2, e_1) \\ &= -g(e_2, \nabla_{e_1}e_1), \end{aligned}$$
و بالتعويض نجد
$$\nabla_{e_1}e_1 = -\beta_0 e_0 - 2\beta_2 e_2.$$
باقي المركبات تُترك للطالب يتدرّب عليها.

ملاحظة 3.4.17. لا حظ أنّه إذا كانت البُنية الصفرية من صنف ماوراء الساكي يكون $\alpha_1 = \alpha_2$ ذلك لأن
$$g(\nabla_{e_0}e_1, e_2) = \varepsilon(2\alpha_1 - \alpha_0) \quad \text{و} \quad g(\nabla_{e_0}e_2, e_1) = \varepsilon(\alpha_0 - 2\alpha_2).$$

◄ تكون البُنية الأولى $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1, g)$ من صنف ماوراء الساساكي من النوع (α_1, β_1) إذا و فقط إذا تحقق الشرط
$$\nabla_{e_i}\xi_1 = -\alpha_1\varphi_1 e_i - \beta_1\varphi_1^2 e_i. \tag{33}$$
أي
$$\nabla_{e_0}e_1 = \beta_1 e_0 + \varepsilon\alpha_1 e_2, \qquad \nabla_{e_1}e_1 = 0, \qquad \nabla_{e_2}e_1 = -\varepsilon\alpha_1 e_0 + \beta_1 e_2.$$
بالمطابقة مع المركبات المقابلة في القضية 3.4.38 نجد

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \qquad \text{و} \qquad \alpha_1 = \alpha_0$$

و عندئذ، من القضية 3.4.38 ينتج

نتيجة 3.4.13.

$$\begin{array}{lll}\nabla_{e_0}e_0 = 0 & \nabla_{e_1}e_0 = -\varepsilon\alpha_0 e_2 & \nabla_{e_2}e_0 = \varepsilon\alpha_0 e_1\\ \nabla_{e_0}e_1 = \varepsilon\alpha_0 e_2 & \nabla_{e_1}e_1 = 0 & \nabla_{e_2}e_1 = -\varepsilon\alpha_0 e_0\\ \nabla_{e_0}e_2 = -\varepsilon\alpha_0 e_1 & \nabla_{e_1}e_2 = \varepsilon\alpha_0 e_0 & \nabla_{e_2}e_2 = 0\end{array}$$

و يمكن بسهولة اثبات أن البُنية الثانية $(\varphi_2, \xi_2, \eta_1, g)$ هي من صنف ماوراء الساساكي من النوع $(\alpha_0, 0)$ أيضا.

◄ تكون البُنية الأولى $(\varphi_1, \xi_1, \eta_1, g)$ من صنف ذات الرُكن إذا و فقط إذا تحقق الشرط

$$\nabla_{e_i}\xi_1 = \eta_1(e_i)\nabla_{e_1}e_1. \tag{34}$$

أي

$$\psi_1 = -\nabla_{e_1}e_1 \qquad \text{و} \qquad \nabla_{e_0}e_1 = 0, \qquad \nabla_{e_2}e_1 = 0$$

بالمطابقة مع المركبات المقابلة في القضية 3.4.38 نجد

$$\psi_1 = \beta_0 e_0 + 2\beta_2 e_2 \qquad \text{و} \qquad \alpha_0 = \alpha_1 = \beta_1 = 0$$

و عندئذ، من القضية 3.4.38 ينتج

نتيجة 3.4.14.

$$\begin{array}{lll}\nabla_{e_0}e_0 = 0 & \nabla_{e_1}e_0 = \beta_0 e_1 & \nabla_{e_2}e_0 = \beta_0 e_2\\ \nabla_{e_0}e_1 = 0 & \nabla_{e_1}e_1 = -\beta_0 e_0 - 2\beta_2 e_2 & \nabla_{e_2}e_1 = 0\\ \nabla_{e_0}e_2 = 0 & \nabla_{e_1}e_2 = 2\beta_2 e_1 & \nabla_{e_2}e_2 = -\beta_0 e_0.\end{array}$$

و يمكن بسهولة اثبات أن البُنية الثانية $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2, g)$ هي من صنف ذات الرُكن من أجل $\beta_2 = 0$.
بتجميع ماسبق نتحصّل على المبرهنة التالية

مبرهنة 3.4.49. باعتماد المعطيات أعلاه لدينا مايلي:

◄ إذا كانت البُنية الصفرية هي بنُية ماوراء-الساساكي من النوع $(\alpha_0, 0)$ فإنّ البُنيتين الأولى و الثانية تكونان من صنف ماوراء-الساساكي من النوع $(\alpha_0, 0)$.

◄ إذا كانت البُنية الصفرية هي بنُية ماوراء-الساساكي من النوع $(0, \beta_0)$ فإنّ البُنيتين الأولى و الثانية تكونان من صنف ذات الرُكن مع $\psi_1 = \psi_2 = \beta_0 e_0$.

مثال 3.4.25.
نرمز للاحداثيات الكارتيزية لفضاء الإقليدي $\mathbb{E}^3$ ذي البعد 3 بـ (x,y,z) و نُعطي الأساس الشامل على النحو التالي

$$\left\{e_0=\frac{\partial}{\partial x},\ e_1=\frac{1}{\rho}\Big(\tau\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\Big),\ e_2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\right\}$$

حيث ρ و τ دالتان معرفتان على $\mathbb{E}^3$ مع ρ لا تنعدم أبدا. يكون الأساس الثنوي المرافق كمايلي

$$\left\{\theta^0=dx-\tau dy,\ \theta^1=\rho dy,\ \theta^2=\rho dz\right\}.$$

باعتبار الموتّر المتري g يعُرف بـ

$$g=\sum_{i=0}^{2}\theta^i\otimes\theta^i,$$

ينتج

$$g=\begin{pmatrix}1 & -\tau(x,y,z) & 0\\ -\tau(x,y,z) & \rho(x,y,z)^2+\tau(x,y,z)^2 & 0\\ 0 & 0 & \rho(x,y,z)^2\end{pmatrix}.$$

نأخذ $\xi_0=e_0$ ، $\eta_0=\theta^0$ و $\varphi_0=e_2\wedge e_1$ أي

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & 0 & -\tau\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

نكون بذلك قد عرّفنا البنية المترية التلامسية تقريبا (الصفرية) $(\varphi_0,\xi_0,\eta_0,g)$ على $\mathbb{E}^3$.
لنستخرج الشكل التفاضلي الأساسي ϕ_0 حيث

$$\phi_0=\sum_{i,j=1}^{3}\phi_{0_{ij}}\ dx^i\wedge dx^j.$$

$$\begin{aligned}\phi_{0_{23}}=\phi_0(\partial y,\partial z) &= g(\partial y,\varphi_0\partial z)\\ &= g\big(\partial y,-\tau\partial x-\partial y\big)\\ &= -\tau g_{21}-g_{22}\\ &= -\rho^2,\end{aligned}$$

بنفس الكيفية نجد $\phi_{0_{12}} = \phi_{0_{13}} = 0$، و بتوظيف خاصية ضد التناظر ينتج

$$\phi_0 = -2\rho^2 \, dy \wedge dz.$$

و بالتالي لدينا

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta_0 = -\tau_1 \, dx \wedge dy + \tau_3 \, dy \wedge dz \\ \mathrm{d}\phi_0 = -4\rho_1\rho \, dx \wedge dy \wedge dz, \end{cases}$$

مع $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ و $\tau_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$. بلمسات حسابية بسيطة، يمكن أن نجد

$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta_0 = \frac{-\tau_3}{2\rho^2} \, \phi_0 - \tau_1 \, dx \wedge dy \\ \mathrm{d}\phi_0 = 2\frac{\rho_1}{\rho}\eta_0 \wedge \phi_0, \end{cases} \tag{35}$$

من جهة أخرى، مركبات الموتّر $N^{(1)}$ غير المعدومة هي

$$N^{(1)}(\partial x, \partial y) = \tau_1.$$

و أخيرا، نعلن أنه إذا كان $\tau_1 = 0$ فإن $(\varphi_0, \xi_0, \eta_0, g)$ هي بُنية ماوراء-الساساكي مع

$$\beta_0 = \frac{\rho_1}{\rho} \quad \text{و} \quad \alpha_0 = \frac{-\tau_3}{2\rho^2}$$

و في هذه الحالة، مركبات وصلة لوفي-سيفيتا بالنسبة للأساس الشامل المعطى هي على النحو التالي

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{e_0}e_0 = 0, & \nabla_{e_0}e_1 = \frac{\tau_3}{2\rho^2}e_2, & \nabla_{e_0}e_2 = -\frac{\tau_3}{2\rho^2}e_1, \\ \nabla_{e_1}e_0 = \frac{\rho_1}{\rho}e_1 + \frac{\tau_3}{2\rho^2}e_2, & \nabla_{e_1}e_1 = -\frac{\rho_1}{\rho}e_0 - \frac{\rho_3}{\rho^2}e_2, & \nabla_{e_1}e_2 = -\frac{\tau_3}{2\rho^2}e_0 + \frac{\rho_3}{\rho^2}e_1, \\ \nabla_{e_2}e_0 = -\frac{\tau_3}{2\rho^2}e_1 + \frac{\rho_1}{\rho}e_2, & \nabla_{e_2}e_1 = \frac{\tau_3}{2\rho^2}e_0 + \frac{\tau\rho_1+\rho_2}{\rho^2}e_2, & \nabla_{e_2}e_2 = -\frac{\rho_1}{\rho}e_0 - \frac{\tau\rho_1+\rho_2}{\rho^2}e_1. \end{array}$$

في ظل هذه المعطيات، نترك الطالب يناقش صنف البنيتين الأولى و الثانية استنادا على المبرهنة أعلاه.

ثانيا: سنفرض أن البُنية الصفرية $(\varphi_0, \xi_0, \eta_0, g)$ هي بُنية ذات الرُكن. أي لدينا

$$\nabla_{e_i}\xi_0 = \eta_0(e_i)\nabla_{e_0}e_0. \tag{36}$$

من أجل حساب $\nabla_{e_0}e_0$ لدينا

$$\begin{aligned} \nabla_{e_0}e_0 &= g(\nabla_{e_0}e_0, e_0)e_0 + g(\nabla_{e_0}e_0, e_1)e_1 + g(\nabla_{e_0}e_0, e_2)e_2 \\ &= 2\mathrm{d}\eta_0(e_0, e_1)e_1 + 2\mathrm{d}\eta_0(e_0, e_2)e_2 \\ &= \gamma_{01}e_1 + \gamma_{02}e_2. \end{aligned}$$

و منه مركبات وصلة لوفي-سيفيتا تعطى في القضية التالية

قضية 3.4.39.

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_0}e_0=\gamma_{01}e_1+\gamma_{02}e_2 & \nabla_{e_1}e_0=0 & \nabla_{e_2}e_0=0 \\ \nabla_{e_0}e_1=-\gamma_{01}e_0+2\varepsilon\alpha_1e_2 & \nabla_{e_1}e_1=\gamma_{12}e_2 & \nabla_{e_2}e_1=-\gamma_{21}e_2 \\ \nabla_{e_0}e_2=-\gamma_{02}e_0-2\varepsilon\alpha_2e_1 & \nabla_{e_1}e_2=-\gamma_{12}e_1 & \nabla_{e_2}e_2=\gamma_{21}e_1 \end{array}$$

البرهان 3.4.67. البرهان هنا مباشر و بسيط يكفي استعمال الأساس و العلاقة (36) و التقنيات المتّبعة في البرهان (3.4.66).

◄ تكون البُنية الأولى $(\varphi_1,\xi_1,\eta_1,g)$ من صنف ماوراء الساساكي من النوع (α_1,β_1) إذا و فقط إذا تحقق الشرط

$$\nabla_{e_i}\xi_1=-\alpha_1\varphi_1e_i-\beta_1\varphi_1^2e_i. \tag{37}$$

أي

$$\nabla_{e_0}e_1=\beta_1e_0+\varepsilon\alpha_1e_2,\qquad \nabla_{e_1}e_1=0,\qquad \nabla_{e_2}e_1=-\varepsilon\alpha_1e_0+\beta_1e_2.$$

بالمطابقة مع المركبات المقابلة في القضية 3.4.39 نجد

$$\beta_1=-\gamma_{012}=-\gamma_{02}\qquad \text{و}\qquad \alpha_1=\gamma_{12}=0$$

و عندئذ، من القضية 3.4.39 ينتج

نتيجة 3.4.15.

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_0}e_0=\gamma_{01}e_1+\gamma_{02}e_2 & \nabla_{e_1}e_0=0 & \nabla_{e_2}e_0=0 \\ \nabla_{e_0}e_1=-\gamma_{01}e_0 & \nabla_{e_1}e_1=0 & \nabla_{e_2}e_1=-\gamma_{21}e_2 \\ \nabla_{e_0}e_2=-\gamma_{02}e_0-2\varepsilon\alpha_2e_1 & \nabla_{e_1}e_2=0 & \nabla_{e_2}e_2=\gamma_{21}e_1 \end{array}$$

و يمكن بسهولة ملاحظة أن البُنية الثانية $(\varphi_2,\xi_2,\eta_1,g)$ تكون من صنف ذات الركن إذا كان

$$\gamma_{21}\neq 0\qquad \text{مع}\qquad \alpha_2=\gamma_{02}=0$$

أو تكون من صنف ماوراء الساساكي من النوع $(0,0)$ إذا كان

$$\gamma_{21}=\gamma_{02}=0.$$

◄ تكون البُنية الأولى $(\varphi_1,\xi_1,\eta_1,g)$ من صنف ذات الرُكن إذا و فقط إذا تحقق الشرط

$$\nabla_{e_i}\xi_1=\eta_1(e_i)\nabla_{e_1}e_1. \tag{38}$$

أي

$$\psi_1 = -\nabla_{e_1} e_1 \qquad \text{و} \qquad \nabla_{e_0} e_1 = 0, \qquad \nabla_{e_2} e_1 = 0$$

بالمطابقة مع المركبات المقابلة في القضية 3.4.39 نجد

$$\alpha_1 = \gamma_{01} = \gamma_{21} = 0$$

و عندئذ، من القضية 3.4.39 ينتج

نتيجة 3.4.16.

$$\begin{array}{lll} \nabla_{e_0} e_0 = \gamma_{02} e_2 & \nabla_{e_1} e_0 = 0 & \nabla_{e_2} e_0 = 0 \\ \nabla_{e_0} e_1 = 0 & \nabla_{e_1} e_1 = \gamma_{12} e_2 & \nabla_{e_2} e_1 = 0 \\ \nabla_{e_0} e_2 = -\gamma_{02} e_0 - 2\varepsilon\alpha_2 e_1 & \nabla_{e_1} e_2 = -\gamma_{12} e_1 & \nabla_{e_2} e_2 = 0 \end{array}$$

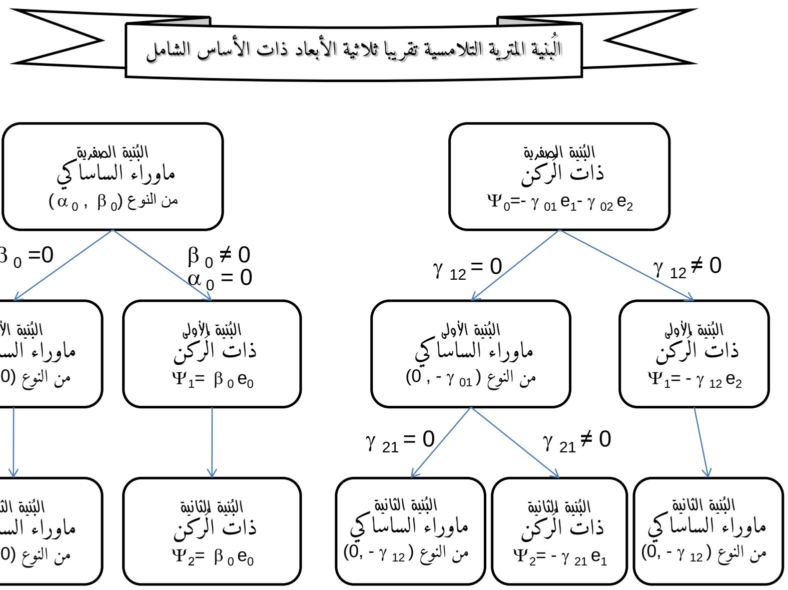
واضح جدا أن البُنية الثانية $(\varphi_2, \xi_2, \eta_2, g)$ لن تكون أبدا ذات الركُن (مع شكل تفاضلي مغلق) باعتبار $\nabla_{e_2} e_2 = 0$. و لكن يمكنها أن تكون من صنف ماوراء-الساساكي من نوع $(0, -\gamma_{12})$.
بتجميع ماسبق نتحصّل على المبرهنة التالية

مبرهنة 3.4.50. باعتماد المعطيات أعلاه لدينا مايلي:
إذا كانت البُنية الصفرية هي بنُية ذات الركن مع $\psi_0 = -\gamma_{01} e_1 - \gamma_{02} e_2$ فإنّ:
◄ البنُية الأولى تكون من صنف ماوراء-الساساكي من النوع $(0, -\gamma_{01})$ بشرط

$$\gamma_{01} = \gamma_{21} \qquad \text{و} \qquad \gamma_{12} = 0$$

و الثانية تكون إما ذات الركن حيث $\psi_2 = -\gamma_{21} e_1$ بشرط $\alpha_2 = \gamma_{02} = 0$ أو تكون من صنف ماوراء-الساساكي من النوع $(0, 0)$ إذا كان $\gamma_{21} = 0$.
◄ تكون البنُية الأولى ذات الركن بشكل تفاضلي مغلق حيث $\psi_1 = -\gamma_{12} e_2$ بشرط $\gamma_{12} \neq 0$ و الثانية تكون من صنف ماوراء-الساساكي من النوع $(0, -\gamma_{12})$ إذا كان $\gamma_{21} = 0$.

لقد بيّنا في باب المنوّعات ذات الركُن ثلاثية الأبعاد أنّ مُنوّعة رُكن الوِحدة (مع شكل تفاضلي مغلق) متحكّم فيها كليا، و من خلالها نضمن وجود أساس شامل $\{\xi, \psi, \varphi\psi\}$. و كتطبيق عملي مهم، نشجّع الطالب على الرجوع للبحث [19] و العمل على تأكيد النتائج الواردة فيه.



ملاحظة 3.4.18. الدارس لهذا الباب و المتأمل فيه يكتشف أنه قد تمّ بناء جسور بين مختلف أصناف البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد باستثناء الجسر الواصل بين صنف C_6 (بنُية الساساكي) و الصنف C_{12} (بنية الرُكن) تبقى مسألة مفتوحة للبحث و التنقيب و الدراسة.

الفصل 4

مَخْرُوط كَالِر و مَخْرُوط ساساكي

إذا كان الفصل السابق يشرح طرق و تقنيات الإنتقال بين البُنى المترية التلامسية تقريبا فإن هذا الفصل سنخصصه للتعرّف على بعض التقنيات للإنتقال من بنية مترية تلامسية تقريبا الى بمنية هارميسية تقريبا. نقصد ربط بُنى معرّفة على منوّعات ذات بعد فردي ببُنى معرّفة على منوّعات ذات بُعد زوجي و العكس. طبعا، سنستعمل جُداء المنوّعات، لذى يرجى الرجوع الى الجزء الأول للاطلاع على التعاريف و الخواص المتعلقة بالمنوّعات الريمانية الجُداء. و أهم ما ينبغي للطالب استيعابه في هذا الخصوص مايلي:

4.1 مفاهيم أساسية

قضية 4.1.40. لتكن (M_1, g_1) و (M_2, g_2) منوّعتين ريمانيتين بُعداهما n_1 و n_2 على الترتيب و f هي دالة موجبة تماما على M_1. نعتبر المنوّعة الجُداء $M_1 \times M_2$ مع الإسقاطين الاعتياديين π_1 و π_2، إذن

$$\tilde{g} = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2\,,$$

هي مترك ريماني على $M_1 \times M_2$.

الثنائية $(M_1 \times_f M_2, \tilde{g})$ تسمى **المنوّعة الريمانية للجُداء الإلتفافي** و f تسمى **دالة التشويه** للجُدء الإلتفافي.

ملاحظة 4.1.19. المصفوفة المرفقة بـ $\tilde{g}$ هي

$$\begin{pmatrix} (g_{1_{ij}}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & f^2(g_{2_{ab}}) \end{pmatrix}$$

أي

$$(\tilde{g})_{\alpha\beta} = \begin{cases} g_{1_{\alpha\beta}}, & \alpha, \beta \in \{1, ..., m\}; \\ f^2 g_{2_{\alpha\beta}}, & \alpha, \beta \in \{m+1, ..., m+n\}; \\ 0, & \text{ح.أخرى} \end{cases}$$

قضية 4.1.41. لتكن (M_1, g_1)، (M_2, g_2) منوّعتين ريمانيتين و $(M_1 \times_f M_2, \tilde{g})$ المنوّعة الريمانية للجُداء الالتفافي. إذا كان $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$، فإن

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla^1_{X_1} Y_1, 0),\\
&(2)\quad \tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0, X_2) = \tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(X_1, 0) = X_1(\ln f)(0, X_2),\\
&(3)\quad \tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0, \nabla^2_{X_2} Y_2) - \frac{1}{2} g_2(X_2, Y_2)(\mathrm{grad} f^2, 0).
\end{aligned}
$$

ملاحظة 4.1.20. باعتبار وجود تشاكل تقابلي بين $T_p(M_1 \times M_2)$ و المجموع المباشر $T_pM_1 \oplus T_pM_2$ فإن

$$(X_1, X_2) = (X_1, 0) + (0, X_2) \cong X_1 + X_2.$$

ملاحظة 4.1.21. يمكن تزويد المنوّعة الجُداء بمترك ريماني آخر أكثر تعميما كأن نُعرّف دالة التشويه على المنوّعة الجداء أو يكون الإلتفاف مزدوجا أي

$$\tilde{g} = f_2^2 g_1 + f_1^2 g_2.$$

و هناك تشويهات عديدة أخرى للاطلاع عليها نوجّه القارئ الى الفصل الأخير من الجزء الاول من هذا الكتاب أو الى [7].

تعريف 4.1.30. لتكن (M, g) منوّعة ريمانية ذات البُعد n.
المنوّعة الريمانية للجُداء الإلتفافي $\left(\tilde{M} = \mathbb{R}^+ \times_f M, \tilde{g} = dt^2 + f^2 g\right)$ تسمى مخروطا على (M, g) حيث f دالة مع معرّفة على $\mathbb{R}^+$.

قضية 4.1.42. نعتبر $\left(\tilde{M} = \mathbb{R}^+ \times_f M, \tilde{g} = dt^2 + f^2 g\right)$ مخروطا على المنوّعة (M, g). و صلة لوفي سيفيتا $\tilde{\nabla}$ المرافقة للمترك الريماني $\tilde{g}$ تعرّف من أجل كل $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ كمايلي:

$$\tilde{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0, \qquad \tilde{\nabla}_{\partial_t} X = \tilde{\nabla}_X \partial_t = \frac{f'}{f} X, \qquad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - f f' g(X, Y) \partial_t.$$

مع $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ و $f' = \frac{\partial f}{\partial t}$.

البرهان 4.1.68. باستعمال القضية 4.1.41 لدينا

$$\tilde{\nabla}_{(\partial_t,0)}(\partial_t, 0) = \nabla^{\mathbb{R}}_{\partial_t} \partial_t = 0,$$

لأن $\mathbb{R}$ هي فضاء بلا تقوّس أي معاملات كريستوفل معدومة. بالنسبة للمركبة الثانية، لدينا

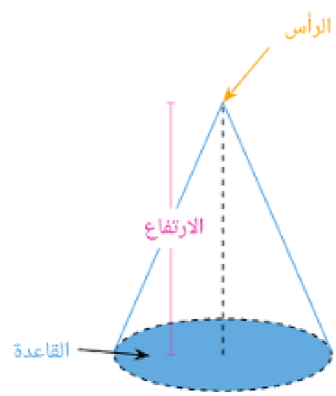
$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{(\partial_t,0)}(0,X) &= \tilde{\nabla}_{(0,X)}(\partial_t,) \\ &= \partial_t(\ln f)(0,X) \\ &= \frac{f'}{f}X.\end{aligned}$$

و بالنسبة للمركبة الثالثة، لدينا

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{(0,X)}(0,Y) &= (0,\nabla_X Y) - \frac{1}{2}g(X,Y)(\mathrm{grad} f^2,0) \\ &= \nabla_X Y - ff'g(X,Y)\partial_t.\end{aligned}$$

4.2 مَخْرُوط كَالِير

من المصطلح "مخروط" يتبادر الى الذهن المجسّم ثلاثي الأبعاد الذي ينتج من توصيل جميع نقاط منحنى مغلق بنقطة لا تنتمي إليه (أنظر الشكل)



و لكن في الحقيقة المقصود غير ذلك، إننا نقصد منوّعة كالير الناتجة عن جُداء منوّعة ساساكي بالمحور الحقيقي و الذي نتصوره كمخروط قاعدته منوّعة ساساكي و محوره هو $\mathbb{R}$. هذا المفهوم الهندسي قديم، مؤخرا تمّ انشاء مخروط ساساكي أي مخروط قاعدته منوّعة كالير و محوره هو $\mathbb{R}$ (أنظر [12]). و هناك أفكار شبيهة سنثري بها الموضوع في آخر هذا الفصل.

من أجل فهم هذه الأفكار، نحتاج لضبط بعض المفاهيم الهندسية على غرار جُداء منوعة ريمانية و البُنية الهارميسية تقريبا على هذا الجُداء في حالة تزويد منوعة القاعدة ببُنية مترية تلامسية تقريبا أو البُنية المترية التلامسية تقريبا على الجُداء في حالة كون منوّعة القاعدة مزوّدة ببُنية هارميسة تقريبا. الإتجاه الأول تمّ

ادراجه دون تعمّق في الجزء الأول أثناء دراسة ناظمية بُنية مترية تلامسية تقريبا، لا بأس هنا أن نعطي فسحة للطالب و نستعرض هذه المفاهيم بكيفية أخرى أعمق و أشمل كي يُستوعب الأمر برُمّته.

4.2.1 مخروط كالير

سنعتبر $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريباً ثلاثية الأبعاد (يمكننا التعامل مع الأبعاد الأكبر لكن باعتبار هذا الجزء من الكتاب هو امتداد للجزء الأول فإننا سنبقى مع البُعد الثلاثي للمنوّعات المترية التلامسية تقريبا). نُعرّف على الفضاء المماس للمنوّعة الجُداء $\mathbb{R} \times_f M$ التطبيق $\tilde{J}$ كمايلي:

$$\tilde{J}(a\frac{\partial}{\partial t}, X) = \Big(f\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi X - \frac{a}{f}\xi\Big), \tag{1}$$

مع $f \neq 0$ دوما و X حقل شعاعي على M.

البُنية $(\tilde{g}, \tilde{J})$ هي بُنية هارميسية تقريبا. و لإثبات ذلك يلزم و يكفي التحقق من

$$\tilde{g}(\tilde{J}\tilde{X}, \tilde{J}\tilde{Y}) = \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{Y}), \qquad \text{و} \qquad \tilde{J}^2\tilde{X} = -\tilde{X}$$

مع $\tilde{X} = (a\partial t, X)$ و $\tilde{Y} = (a\partial t, Y)$ حقلي أشعة على $\mathbb{R} \times M$ و هذا سهل على طالب الماستر.

الهدف من هذه الفقرة هو مناقشة نوع المخروط في حالة ما إذا كانت قاعدته إحدى البُني المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد التي تمّ تفصيلها في الجزء الأول و نقصد بنية ساساكي، كانموسو، ثنائية التماسك، الرُكن.

و للإستفادة أكثر سنتناول هذه الدراسة بكيفيتين مختلفتين، بالاستعمال الشكلين التفاضليين الأساسيين الأول و الثاني ثم باستعمال العلاقة المميّزة.

أولا، الشكل الأساسي الثاني $\tilde{\Omega}$ للبُنية $(\tilde{J}, \tilde{g})$ هو

$$\tilde{\Omega}\Big((a\frac{\partial}{\partial t}, X), (b\frac{\partial}{\partial t}, Y)\Big) = \tilde{g}\Big((a\frac{\partial}{\partial t}, X), \tilde{J}(b\frac{\partial}{\partial t}, Y)\Big),$$

بتوظيف العبارة (1)، ينتج

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}\Big((a\frac{\partial}{\partial t}, X), (b\frac{\partial}{\partial t}, Y)\Big) &= \tilde{g}\Big((a\frac{\partial}{\partial t}, X), \Big(f\eta(Y)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \varphi Y - \frac{b}{f}\xi\Big)\Big)\\
&= af\eta(Y)\tilde{g}\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\Big) + \tilde{g}(X, \varphi Y) - \frac{b}{f}\tilde{g}(X, \xi)\\
&= af\eta(Y) - bf\eta(X) + f^2 g(X, \varphi Y)\\
&= f(2dt \wedge \eta + f\Phi)\Big((a\frac{\partial}{\partial t}, X), (b\frac{\partial}{\partial t}, Y)\Big),
\end{aligned}$$

حيث Φ الشكل الأساسي الثاني للبُنية المترية التلامسية تقريبا على M. و منه

$$\tilde{\Omega} = f(2\mathrm{d}t \wedge \eta + f\Phi), \tag{2}$$

بالمفاضلة، ينتج

$$d\tilde{\Omega} = f(-2\ \mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\eta + 2f'\mathrm{d}t \wedge \Phi + f\mathrm{d}\Phi). \tag{3}$$

من أجل الحالات الشهيرة لدينا
(1°): إذا كانت (φ, ξ, η, g) بُنية مترية تلامسية أي $\mathrm{d}\eta = \Phi$ فإن

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = 2f(f' - 1)\mathrm{d}t \wedge \Phi.$$

(2°): إذا كانت (φ, ξ, η, g) بُنية ثنائية التماسك تقريبا أي $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\Phi = 0$ فإن

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = 2ff'\mathrm{d}t \wedge \Phi.$$

(3°): إذا كانت (φ, ξ, η, g) بُنية كانموتسو تقريبا أي $\mathrm{d}\eta = 2\eta \wedge \Phi$ و $\mathrm{d}\Phi = 0$ $(\tilde{J}, \tilde{g})$ فإن

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = 2f(f'\mathrm{d}t + f\eta) \wedge \Phi.$$

(4°): إذا كانت (φ, ξ, η, g) بُنية الرُكن تقريبا أي $\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta$ و $\mathrm{d}\Phi = 0$ فإن

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = 2f\mathrm{d}t \wedge (f'\Phi - \omega \wedge \eta).$$

من السهل ملاحظة أن الشكل الأساسي $\tilde{\Omega}$ يكون مغلقا إذا و فقط إذا كان:
- في حالة التلامس، $f(t) = t$.
- في حالة ثنائية التماسك تقريبا، f ثابتة.
- في حالة الكانموتسو تقريبا، يستحيل هذا الأمر لأنه سيؤدي الى إنعدام الدالة f.
- وفي حالة بُنية الرُكن تقريبا، $\omega \wedge \eta = f'\Phi$ مع f ثابتة.

طبعا، إذا كانت $\tilde{\Omega}$ شكلا مغلقا تكون البُنية $(\tilde{J}, \tilde{g})$ كاليرية تقريبا. و حتى تكون كاليرية يكفي تحقق شرط قابلية المكاملة.

من جهة أخرى، تمّ إثبات أنه تكون البُنية $(\tilde{J}, \tilde{g})$ قابلة للمكاملة إذا و فقط إذا كانت البُنية (φ, ξ, η, g) ناظمية. و عليه، يستحيل أن تكون بُنية القاعدة هي بنية الرُكن (سنقدم في نهاية هذا الباب دراسة حديثة لمخرط كالير قاعدته منوّعة الرُكن).

نرمز بـ $N_{\tilde{J}}$ لموتّر تجنهيز للبُنية المركبة تقريبا $\tilde{J}$. و بالتالي، من العلاقة (1) لدينا

$$N_{\tilde{J}}\big((0,X),(0,Y)\big) = \Big(fN^{(2)}(X,Y)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ N^{(1)}(X,Y)\Big),$$

$$N_{\tilde{J}}\Big((\frac{\partial}{\partial t},0),(0,X)\Big) = \Big(N^{(4)}(X)\frac{\partial}{\partial t}\ ,\frac{1}{f}N^{(3)}(X)\Big).$$

من أجل كل حقول الأشعة X و Y على M. لنرمز بـ $N^{(1)}$، $N^{(2)}$، $N^{(3)}$ و $N^{(4)}$ لموتّرات على M معطاة على الترتيب كمايلي

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2\mathrm{d}\eta(X,Y)\xi,$$

$$N^{(2)}(X) = \big(L_{\varphi X}\big)(Y) - \big(L_{\varphi_Y}\big)(X),$$
$$N^{(3)}(X) = -\big(L_\xi\varphi\big)(X),$$
$$N^{(4)}(X) = \big(L_\xi\eta\big)(X),$$

حيث

$$N_\varphi = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y].$$

قضية 4.2.43. [15] من أجل كل بنُية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η)، إنعدام الموتّر $N^{(1)}$ يستلزم إنعدام كل من $N^{(2)}$، $N^{(3)}$ و $N^{(4)}$.

بناء على هذه القضية، كل بنُية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η) هي ناظمية إذا و فقط إذا كان $N^{(1)} = 0$ عند كل نقطة من M.

و الآن، يمكننا تلخيص كل ما سبق في المبرهنة التالية

مبرهنة 4.2.51. تكون منوّعة الجدُاء الإلتفافي $(\mathbb{R}\times_f M,\tilde{J},\tilde{g})$ هي منوّعة كالير إذا و فقط إذا تحقق احدى الخيارين التاليين:
- ◄ إذا كانت منوّعة القاعدة (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ساساكي و $f(t)=t$.
- ◄ إذا كانت منوّعة القاعدة (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ثنائية التماسك و f دالة ثابتة.

البرهان 4.2.69. من أجل اللزومية، أنظر ما ورد قبل المبرهنة مباشرة. من أجل الكفاية، لدينا
- ◄ نلاحظ أنه من أجل $f=t$ المعادلة (3) تعطي

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega}\Big((\frac{\partial}{\partial t},0),(0,X),(0,Y)\Big) = 2f\big(\Phi - \mathrm{d}\eta\big)(X,Y). \tag{4}$$

إذا كان $\mathrm{d}\tilde{\Omega}=0$، فمن المعادلة (4) ينتج $\Phi = \mathrm{d}\eta$ و بالتالي نتحصّل على بنُية تلامسية.

و عليه، إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ساساكي فإن $(\mathbb{R}\times_f M,\tilde{J},\tilde{g})$ هي منوّعة كالير.
◄ إذا كان $\mathrm{d}\tilde{\Omega}=0$ و f ثابتة، فمن المعادلة (3) ينتج

$$-2\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\eta+f\mathrm{d}\Phi=0, \tag{5}$$

و منه

$$\begin{aligned} 0 &= (-2\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\eta+f\mathrm{d}\Phi)\Big((\frac{\partial}{\partial t},0),(0,X),(0,Y)\Big)\\ &= \mathrm{d}\eta(X,Y)\end{aligned}$$

و بالتعويض في (5) نجد $\mathrm{d}\Phi=0$ و بالتالي نتحصّل على بُنية ثنائية التماسك.
و عليه، إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ساساكي فإن $(\mathbb{R}\times_f M,\tilde{J},\tilde{g})$ هي منوّعة كالير.

ملاحظة 4.2.22. الشائع عن مصطلح مخروط كالير أنه يطلق على الحالة الأولى أي عن مُنوّعة كالير الناتجة عن جُداء منوّعة ساساكي مع المحور الحقيقي. لكن في الحقيقة ليس شرطا أن تكون بنُية القاعدة هي بنُية ساساكي.

كما وعدنا من قبل، سنعيد إثبات المبرهنة أعلاه لكن بتفكير آخر، سنستعمل وصلة لوفي-سيفيتا و نعطي بذلك تنوعا و نظرة أخرى للطالب في استيعاب هذه المفاهيم. و لنبدأ باستذكار بعض النتائج الهامة المتعلقة بالبُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد و التي أثبتت سابقا في هذا الكتاب.
البُنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد الأساسية يمكن تمييزها من خلال العبارة الهامة التالية:

$$\nabla_X\xi=-\alpha\varphi X-\beta\varphi^2X-\eta(X)\psi, \tag{6}$$

حيث ∇ هي وصلة لوفي-سيفيتا مع $\psi=-\nabla_\xi\xi$، $2\alpha=tr_g(\varphi\nabla\xi)$ و $2\beta=div\xi$. أي أنه
- من أجل $\alpha=\beta=0$ و $\psi\equiv 0$ نتحصّل على البُنية ثنائية التماسك.
- من أجل $\alpha=1$، $\beta=0$ و $\psi\equiv 0$ نتحصّل على بنُية ساساكي.
- من أجل $\alpha=0$، $\beta=1$ و $\psi\equiv 0$ نتحصّل على بنُية كانموتسو.
- من أجل $\alpha=\beta=0$ و $\psi\neq 0$ نتحصّل على بنُية الركن.
كما توجد عبارة أخرى تميّز هذه الحالات من أجل أي بُعد فردي للمنوّعة هي

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)Y &= \alpha\big(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X\big)+\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)\\ &\quad -\eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\psi\big),\end{aligned} \tag{7}$$

حيث $g(X,\psi)=\omega(X)$. كي تكون المنوّعة $(\mathbb{R}\times_f M,\tilde{J},\tilde{g})$ هي منوّعة كالير يكفي و يلزم أن يتحقق

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{J})\tilde{Y}=0,$$

و هذا يكافئ

$$(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{J})\partial_t=(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{J})X=(\tilde{\nabla}_X\tilde{J})\partial_t=(\tilde{\nabla}_X\tilde{J})Y=0,$$

مع العلم أن

$$\tilde{J}\partial_t=-\frac{1}{f}\xi,\qquad \tilde{J}X=\varphi X+f\eta(X)\partial_t.$$

بالنسبة للمركبة الأولى و بتوظيف القضية 4.1.42 ، لدينا

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{J})\partial_t &= \tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{J}\partial_t-\tilde{J}\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_t\\ &= -\tilde{\nabla}_{\partial_t}\frac{1}{f}\xi\\ &= \frac{f'}{f^2}\xi-\frac{1}{f}\tilde{\nabla}_{\partial_t}\xi=0.\end{aligned}$$

بالنسبة للمركبة الثانية، لدينا

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{J})X &= \tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{J}X-\tilde{J}\tilde{\nabla}_{\partial_t}X\\ &= \tilde{\nabla}_{\partial_t}\big(\varphi X+f\eta(Y)\partial_t\big)-\tilde{J}\Big(\frac{f'}{f}X\Big)\\ &= \frac{f'}{f}\varphi X+f'\eta(Y)\partial_t-\frac{f'}{f}\big(\varphi X+f\eta(Y)\partial_t\big)=0\end{aligned}$$

بالنسبة للمركبة الثالثة، لدينا

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X\tilde{J})\partial_t &= \tilde{\nabla}_X\tilde{J}\partial_t-\tilde{J}\tilde{\nabla}_X\partial_t\\ &= \tilde{\nabla}_{\partial_t}\big(\varphi X+f\eta(Y)\partial_t\big)-\tilde{J}\Big(\frac{f'}{f}X\Big)\\ &= -\frac{1}{f}\tilde{\nabla}_X\xi-\frac{f'}{f}\tilde{J}X\\ &= -\frac{1}{f}\big(\nabla_X\xi-ff'\eta(X)\partial_t\big)\xi-\frac{f'}{f}\big(\varphi X+f\eta(Y)\partial_t\big)\\ &= -\frac{1}{f}\big(\nabla_X\xi+f'\varphi X\big),\end{aligned}$$

باستعمال العلاقة (6) ينتج

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{J})\partial_t = -\frac{1}{f}\big((f'-\alpha)\varphi X - \beta\varphi^2 X - \eta(X)\psi\big).$$

بالنسبة للمركبة الأخيرة، لدينا

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \tilde{J})Y &= \tilde{\nabla}_X \tilde{J}Y - \tilde{J}\tilde{\nabla}_X Y \\
&= \tilde{\nabla}_X\big(\varphi Y + f\eta(Y)\partial_t\big) - \tilde{J}\big(\nabla_X Y - ff'g(X,Y)\partial_t\big) \\
&= \big(\nabla_X \varphi Y - ff'g(X,Y)\partial_t\big) + f\big((\nabla_X \eta)Y + \eta(\nabla_X Y)\big)\partial_t \\
&\quad + f\eta(Y)\big(\frac{f'}{f}X\big) - \big(\varphi\nabla_X Y + f\eta(\nabla_X Y)\partial_t\big) + ff'g(X,Y)\Big(-\frac{1}{f}\xi\Big) \\
&= (\nabla_X\varphi)Y - f'\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + f\big(g(\nabla_X\xi, Y) + f'g(\varphi X, Y)\big)\partial_t.
\end{aligned}$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \eta)Y &= X\eta(Y) - \eta(\nabla_X, Y) \\
&= Xg(\xi, Y) - g(\xi, \nabla_X Y) \\
&= g(\nabla_X \xi, Y).
\end{aligned}$$

و باستعمال العلاقة (7)، نجد

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X \tilde{J})Y = (\alpha - f')\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big) \\
- \eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi\big) + fg\big((f'-\alpha)\varphi X - \beta\varphi^2 X - \eta(X)\psi), Y\big).
\end{aligned}$$

تكون $(\mathbb{R}\times_f M, \tilde{J}, \tilde{g})$ هي منوّعة كالير إذا و فقط إذا تحقق مايلي

$$\begin{cases} f' = \alpha \\ \beta = 0 \\ \psi \equiv 0, \end{cases}$$

و يبدوا واضحا أنه من أجل بُنية الساساكي ينتج $f' = \alpha = 1$ و من أجل بُنية ثنائية التماسك ينتج $f' = \alpha = 0$ و هذا ما يؤكد نتائج المبرهنة أعلاه.

4.2.2 مخروط ساساكي

و الآن، ماذا يحصل لو فكرنا في العكس؟ نعم، نقصد انشاء مخروط ساساكي الذي قاعدته هي منّوعة كالير. لقد قدمنا مؤخرا إجابة جزئية عن هذا التساؤل في بحث رفقة الأستاذين أ. محمد شريف و ق. زقة (أنظر

[12]). و من أجل اثراء الموضوع، سنقدم هذه الدراسة هنا باختصار و من أجل البُعد الثلاثي دوما و على الطالب أن يفصّل في الموضوع خاصة و في البحث المشار إليه كانت الدراسة على البعد الفردي الكيفي.

بداية، من المعلوم أن كل منوّعة ريمانية موجّهة ثنائية البُعد هي منوّعة كالير. سنعتبر (N, J, h) منوّعة هارمسية تقريبا ثنائية البُعد ذات شكل أساسي تام (أي $\Omega = \mathrm{d}\theta$)، أي $\Omega = d\theta$ حيث $\theta \in \Gamma(T^*N)$، و لتكن $M = \mathbb{R} \times N$ المنوّعة الجُداء المزوّدة بالمترك الريماني $g = h + \eta \otimes \eta$ مع $\eta = dr + \theta$، بحيث r يمثل منظومة الإحداثيات المرافقة للأساس ∂_r على $\mathbb{R}$. من أجل كل $X, Y \in \Gamma(TN)$، لدينا:

$$g(X,Y) = h(X,Y) + \theta(X)\theta(Y), \quad g(X, \partial_r) = \theta(X), \quad g(\partial_r, \partial_r) = 1.$$

قضية 4.2.44. نضع

$$\xi = \partial_r, \quad \varphi\partial_r = 0, \quad \varphi X = JX - \theta(JX)\xi, \quad \forall X \in \Gamma(TN). \tag{8}$$

و عليه، (φ, ξ, η, g) تشكل بنُية مترية تلامسية تقريبا على M.

البرهان 4.2.70. لدينا $\eta = dr + \theta$ و $\xi = \partial_r$، إذن $\eta(\xi) = 1$. و بما أن $\varphi\partial_r = 0$، ينتج $\varphi^2\partial_r = 0$، من جهة أخرى $-\partial_r + \eta(\partial_r)\partial_r = 0$. *Let* $X \in \Gamma(TN)$، لنحسب

$$\begin{aligned}
\varphi^2 X &= \varphi(JX - \theta(JX)\xi) \\
&= \varphi(JX) - \theta(JX)\varphi\xi \\
&= J^2X - \theta(J^2X)\xi \\
&= -X + \theta(X)\xi \\
&= -X + \eta(X)\xi.
\end{aligned}$$

نعتبر $X, Y \in \Gamma(TN)$، إذن

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi Y) &= g(JX - \theta(JX)\xi, JY - \theta(JY)\xi) \\
&= g(JX, JY) - \theta(JY)g(JX, \xi) - \theta(JX)g(\xi, JY) \\
&\quad +\theta(JX)\theta(JY)g(\xi, \xi),
\end{aligned}$$

من خلال عبارة g مع $\eta = dr + \theta$ نتحصّل على

$$\begin{aligned}
g(\varphi X, \varphi Y) &= h(JX, JY) + \theta(JX)\theta(JY) - \theta(JX)\theta(JY) \\
&\quad -\theta(JX)\theta(JY) + \theta(JX)\theta(JY) \\
&= h(JX, JY),
\end{aligned}$$

بما أن $h(JX,JY)=h(X,Y)$ و $g(X,Y)=h(X,Y)+\theta(X)\theta(Y)$ نستنتج أن

$$\begin{aligned} g(\varphi X,\varphi Y) &= g(X,Y)-\theta(X)\theta(Y) \\ &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

و بما أن $\varphi\xi=0$، $g(X,\xi)=\theta(X)=\eta(X)$، $\eta(\xi)=1$ و $g(\xi,\xi)=1$, *we get*

$$g(\varphi X,\varphi\xi)=g(X,\xi)-\eta(X)\eta(\xi)=0,$$

$$g(\varphi\xi,\varphi\xi)=g(\xi,\xi)-\eta(\xi)\eta(\xi)=0.$$

الآن نرمز بـ ∇^N و ∇^M لوصلتي لوفي-سيفيتا الموافقتين لـ h على N و لـ g على M على الترتيب. باستعمال دستور كوتزيل، ينتج

قضية 4.2.45. من أجل كل $X,Y,Z\in\Gamma(TN)$، لدينا:

$$\begin{aligned}
&(1)\quad g(\nabla^M_\xi\xi,\xi)=g(\nabla^M_\xi\xi,X)=0,\\
&(2)\quad g(\nabla^M_\xi X,\xi)=g(\nabla^M_X\xi,\xi)=0,\\
&(3)\quad g(\nabla^M_\xi X,Y)=g(\nabla^M_X\xi,Y)=h(X,JY),\\
&(4)\quad g(\nabla^M_X Y,\xi)=\frac{1}{2}\big[X\theta(Y)+Y\theta(X)+\theta([X,Y])\big],\\
&(5)\quad g(\nabla^M_X Y,Z)=h(\nabla^N_X Y,Z)+\frac{1}{2}\big[X(\theta(Y))+Y(\theta(X))+\theta([X,Y])\big]\theta(Z)\\
&\qquad\qquad +h(X,JZ)\theta(Y)+h(Y,JZ)\theta(X).
\end{aligned}$$

البرهان 4.2.71. يترك البرهان للطالب.

قضية 4.2.46. من أجل أساس متعامد و متجانس $\{e_1,...,e_{2n}\}$ على الفضاء المماس T_xN عند كل نقطة $x\in N$ يكون

$$\{\xi,e_1-\theta(e_1)\xi,...,e_{2n}-\theta(e_{2n})\xi\}$$

أساسا متعامدا و متجانسا على $T_{(r,x)}M$ حيث $r\in\mathbb{R}$.

برهان. من أجل كل $i,j\in\{1,...,2n\}$، لدينا:

$$\begin{aligned}
g(e_i-\theta(e_i)\xi,e_j-\theta(e_j)\xi) &= g(e_i,e_j)-\theta(e_j)g(e_i,\xi)-\theta(e_i)g(\xi,e_j)\\
&\quad +\theta(e_i)\theta(e_j)g(\xi,\xi)\\
&= h(e_i,e_j)+\theta(e_i)\theta(e_j)-\theta(e_i)\theta(e_j)-\theta(e_i)\theta(e_j)\\
&\quad +\theta(e_i)\theta(e_j)\\
&= h(e_i,e_j)=\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

لنحسب

$$\begin{aligned} g(e_i-\theta(e_i)\xi,\xi) &= g(e_i,\xi)-\theta(e_i)g(\xi,\xi) \\ &= \theta(e_i)-\theta(e_i)=0, \end{aligned}$$

مع $g(\xi,\xi)=1$. □

و عليه، من أجل كل $v\in T_{(r,x)}M$ توجد ثوابت $a,b_1,...,b_{2n}$ بحيث

$$v=a\xi+\sum_{i=1}^{2n}b_i\big(e_i-\theta(e_i)\xi\big). \tag{9}$$

لاحظ أن $a=g(v,\xi)$ و $b_i=g\big(v,e_i-\theta(e_i)\xi\big)$ من أجل $i=1,..,2n$. من خلال القضيتين 4.2.45 و 4.2.46 نتحصّل على مايلي:

قضية 4.2.47. من أجل كل $X,Y\in\Gamma(TN)$، لدينا:

(1) : $\nabla^M_\xi\xi=0,$

(2) : $\nabla^M_\xi X=\nabla^M_X\xi=-\varphi X,$

(3) : $\nabla^M_XY=\nabla^N_XY-\theta(Y)\varphi X-\theta(X)\varphi Y+\frac{1}{2}\big[(\nabla^N_X\theta)Y+(\nabla^N_Y\theta)X\big]\xi.$

البرهان 4.2.72. نعتبر $\{e_1,...,e_{2n}\}$ أساسا متعامد و متجانسا على N. من القضية 4.2.45، لدينا:

1)

$$g(\nabla^M_\xi\xi,\xi)=0,$$

$$g(\nabla^M_\xi\xi,e_i-\theta(e_i)\xi)=g(\nabla^M_\xi\xi,e_i)-\theta(e_i)g(\nabla^M_\xi\xi,\xi)=0.$$

2)

$$g(\nabla^M_\xi X,\xi)=0,$$

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_\xi X,e_i-\theta(e_i)\xi) &= g(\nabla^M_\xi X,e_i)-\theta(e_i)g(\nabla^M_\xi X,\xi) \\ &= h(X,Je_i)=-h(JX,e_i), \end{aligned}$$

و عليه

$$\begin{aligned} \nabla^M_\xi X &= -h(JX,e_i)e_i+h(JX,e_i)\theta(e_i)\xi \\ &= -JX+\theta(JX)\xi=-\varphi X, \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نجد $\nabla^M_X\xi = -\varphi X$.
3) لنحسب

$$g(\nabla^M_X Y,\xi) = \; = \; \frac{1}{2}\big[X\theta(Y) + Y\theta(X) + \theta([X,Y])\big],$$

$$\begin{aligned} g(\nabla^M_X Y, e_i - \theta(e_i)\xi) &= g(\nabla^M_X Y, e_i) - \theta(e_i) g(\nabla^M_X Y,\xi) \\ &= h(\nabla^N_X Y, e_i) + \frac{1}{2}\big[X(\theta(Y)) + Y(\theta(X)) + \theta([X,Y])\big]\theta(e_i) \\ &\quad + h(X, Je_i)\theta(Y) + h(Y, Je_i)\theta(X) \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta(e_i)\big[X\theta(Y) + Y\theta(X) + \theta([X,Y])\big] \\ &= h(\nabla^N_X Y, e_i) - h(JX, e_i)\theta(Y) - h(JY, e_i)\theta(X), \end{aligned}$$

نستنتج أن

$$\begin{aligned} \nabla^M_X Y &= \frac{1}{2}\big[X\theta(Y) + Y\theta(X) + \theta([X,Y])\big]\xi \\ &\quad + h(\nabla^N_X Y, e_i)e_i - h(\nabla^N_X Y, e_i)\theta(e_i)\xi \\ &\quad - h(JX, e_i)\theta(Y)e_i + h(JX, e_i)\theta(Y)\theta(e_i)\xi \\ &\quad - h(JY, e_i)\theta(X)e_i - h(JY, e_i)\theta(X)\theta(e_i)\xi \\ &= \frac{1}{2}\big[X\theta(Y) + Y\theta(X) + \theta([X,Y])\big]\xi \\ &\quad + \nabla^N_X Y - \theta(\nabla^N_X Y)\xi \\ &\quad - \theta(Y)JX + \theta(Y)\theta(JX)\xi \\ &\quad - \theta(X)JY - \theta(X)\theta(JY)\xi, \end{aligned}$$

لاحظ أن

$$-\theta(Y)JX + \theta(Y)\theta(JX)\xi = -\theta(Y)\varphi X, \quad -\theta(X)JY - \theta(X)\theta(JY)\xi = -\theta(X)\varphi Y,$$

$$\frac{1}{2}\big[X\theta(Y) + Y\theta(X) + \theta([X,Y])\big]\xi - \theta(\nabla^N_X Y)\xi = \frac{1}{2}\big[(\nabla^N_X\theta)Y + (\nabla^N_Y\theta)X\big]\xi.$$

بناء على ما سبق يمكن تقديم المبرهنة التالية:

مبرهنة 4.2.52. (M,φ,ξ,η,g) هي منوّعة ساساكي إذا و فقط إذا كانت (N,J,h) هي منوّعة كالير ذات شكل أساسي تام.

البرهان 4.2.73. كون المنوّعة (M,φ,ξ,η,g) هي من النوع ساساكي هذا معناه

$$\begin{aligned}(\nabla^M_\xi\varphi)\xi &= g(\xi,\xi)\xi-\eta(\xi)\xi && (10)\\ (\nabla^M_\xi\varphi)X &= g(\xi,X)\xi-\eta(X)\xi && (11)\\ (\nabla^M_X\varphi)\xi &= g(X,\xi)\xi-\eta(\xi)X && (12)\\ (\nabla^M_X\varphi)Y &= g(X,Y)\xi-\eta(Y)X, && (13)\end{aligned}$$

من أجل كل $X,Y\in\Gamma(TN)$. من السهل إثبات أن العلاقات (10)، (11) و (12) صحيحة و بالتالي لدينا

$$(\nabla^M_\xi\varphi)\xi=\nabla^M_\xi\varphi\xi-\varphi(\nabla^M_\xi\xi)=g(\xi,\xi)\xi-\eta(\xi)\xi=0,$$

$$\begin{aligned}(\nabla^M_\xi\varphi)X &= \nabla^M_\xi\varphi X-\varphi(\nabla^M_\xi X)\\ &= \nabla^M_\xi JX-\nabla^M_\xi(\theta(JX)\xi)+\varphi^2(X)\\ &= -\varphi(JX)-\theta(JX)\nabla^M_\xi\xi-X+\theta(X)\xi\\ &= -(J^2X-\theta(J^2X)\xi)-X+\theta(X)\xi\\ &= X+\theta(X)\xi-X+\theta(X)\xi=0,\end{aligned}$$

و منه $(\nabla^M_\xi\varphi)X=g(\xi,X)\xi-\eta(X)\xi=0$. لنحسب

$$\begin{aligned}(\nabla^M_X\varphi)\xi &= \nabla^M_X\varphi\xi-\varphi(\nabla^M_X\xi)\\ &= \varphi^2X=-X+\theta(X)\xi,\end{aligned}$$

و منه $(\nabla^M_X\varphi)\xi=g(X,\xi)\xi-\eta(\xi)X=-X+\theta(X)\xi$. من أجل العلاقة (13)، لدينا

$$(\nabla^M_X\varphi)Y=\nabla^M_X\varphi Y-\varphi(\nabla^M_XY), \qquad (14)$$

الحد الأول في العبارة (14)،، يعطى بـ

$$\begin{aligned}\nabla^M_X\varphi Y&=\nabla^M_X(JY-\theta(JY)\xi)\\ &=\nabla^M_XJY-X(\theta(JY))\xi-\theta(JY)\nabla^M_X\xi,\end{aligned}$$

باستعمال القضية 4.2.45، ينتج

$$\begin{aligned}\nabla^M_X\varphi Y &= \nabla^N_XJY-\theta(JY)\varphi X-\theta(X)\varphi JY+\frac{1}{2}\big[(\nabla^N_X\theta)JY+(\nabla^N_{JY}\theta)X\big]\xi\\ &\quad -X(\theta(JY))\xi+\theta(JY)\varphi X\\ &= \nabla^N_XJY+\theta(X)Y-\theta(X)\theta(Y)\xi-\frac{1}{2}X(\theta(JY))\xi-\frac{1}{2}\theta(\nabla^N_XJY)\xi\\ &\quad +\frac{1}{2}(JY)(\theta(X))\xi-\frac{1}{2}\theta(\nabla^N_{JY}X)\xi, && (15)\end{aligned}$$

الحد الثاني في (14)، يعطى بـ

$$\begin{aligned} -\varphi(\nabla^M_X Y) &= -\varphi(\nabla^N_X Y) + \theta(Y)\varphi^2 X + \theta(X)\varphi^2 Y \\ &= -J\nabla^N_X Y + \theta(J\nabla^N_X Y)\xi - \theta(Y)X + 2\theta(X)\theta(Y)\xi - \theta(X)Y, \end{aligned} \tag{16}$$

بتعويض (15) و (16) في (14) نتحصّل على

$$\begin{aligned} (\nabla^M_X\varphi)Y &= (\nabla^N_X J)Y + \frac{1}{2}\big[(JY)(\theta(X)) - X(\theta(JY)) - \theta([JY,X])\big]\xi \\ &\quad -\theta(\nabla^N_X JY)\xi - \theta(Y)X + \theta(X)\theta(Y)\xi + \theta(J\nabla^N_X Y)\xi \\ &= (\nabla^N_X J)Y + d\theta(JY,X)\xi - \theta((\nabla^N_X J)Y)\xi - \theta(Y)X + \theta(X)\theta(Y)\xi \\ &= (\nabla^N_X J)Y + h(X,Y)\xi - \eta((\nabla^N_X J)Y)\xi - \eta(Y)X + \eta(X)\eta(Y)\xi \\ &= (\nabla^N_X J)Y - \eta((\nabla^N_X J)Y)\xi + g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \end{aligned}$$

و هذا يعني

$$(\nabla^M_X\varphi)Y = -\varphi^2(\nabla^N_X J)Y + g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \tag{17}$$

المبرهنة 4.2.52 تتحقق من خلال العلاقة (17).

مثال 4.2.26. من أجل هذا المثال نستعمل جُداء منوّعة كالير $(\mathbb{R}^2, J, h)$ بالمحور الحقيقي $\mathbb{R}$ مع $h = dx^2 + dy^2$ و $J\partial_x = \partial_y$، $J\partial_y = -\partial_x$. الشكل الأساسي لـ $(\mathbb{R}^2, J, h)$ يعطى بالعبارة $\Omega = -2dx \wedge dy$. نضع $\theta = -2xdy$، ينتج $\Omega = d\theta$. باستعمال (8) مع $g = h + \eta \otimes \eta$ و $\eta = dr + \theta$، ينتج

$$\xi = \partial_r, \quad \eta = dr - 2xdy$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1+4x^2 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

و يمكننا التحقق بسهولة من أن $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ساساكي.

كذلك، و كما هو معلوم منذ سنة 1975، تمّ إنشاء منوّعة كانموتسو (مخروط كانموتسو) باستعمال جُداء منوّعة كالير مع مجال مفتوح من المحور الحقيقي. إليك دون برهان المبرهنة التالية

مبرهنة 4.2.53. [25] لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة كانموتسو. إذن، من أجل كل نقطة $p \in M$، يوجد جوار مفتوح U لـ p يعرّف بالجُداء إلتفافي $V \times_f (-\varepsilon, \varepsilon)$ حيث $f(t) = ce^t$ على المجال $(-\varepsilon, \varepsilon)$ و V هي منوّعة كالير.

نختم هذا الفصل بالدراسة الأصلية و التي هي حاليا تحت النشر لكيفية إنشاء منوّعة الرُكن انطلاقا من منوّعة كالير (مخروط الركن).

مبرهنة 4.2.54. لتكن (N, J, h) منوّعة كالير و ρ دالة قابلة للمفاضلة غير معدومة على N. المنوّعة الجدُاء $M = N \times_\rho L$ مزوّدة بالبِنُية المترية التلامسية تقريبا

$$\varphi\partial_t = 0, \quad \text{و} \quad g = h + \mathrm{e}^{2\rho}dt^2, \quad \xi = \mathrm{e}^{-\rho}\partial_t, \quad \eta = \mathrm{e}^{\rho}dt, \quad \varphi X = JX$$

هي منوّعة الرُكن.

البرهان 4.2.74. بداية، على الطالب أن يتحقق من أن البُنية (φ, ξ, η, g) هي فعلا بنُية مترية تلامسية تقريبا.
و بعد، لدينا $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\rho \wedge \eta$ و هذا يستلزم $\omega = \mathrm{d}\rho$.
كذلك، الشكل الأساسي الثاني ϕ للبنُية (φ, ξ, η, g) هو

$$\phi\big((X\ , a\partial t), \big(Y, b\partial t)\big) = g\big((X, \partial t), \varphi(Y, \partial t)\big),$$

يمكننا بسهولة تبيان أن

$$\phi = \Omega, \tag{18}$$

و بما أن (N, J, h) هي منوّعة كالير إذن، $\mathrm{d}\Omega = 0$ و $N_J = 0$ فينتج $\mathrm{d}\phi = 0$.
اعتمادا على عبارة φ، يمكن اثبات أن

$$N_\varphi\big((X\ , a\partial t), \big(Y, b\partial t)\big) = N_J(X, Y) = 0.$$

و بالتالي $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي عائلة ذات وسيط من منوّعات الركن.

ملاحظة 4.2.23. لاحظ أن المبرهنة عامة غير مقيدة بالبعد الثلاثي كما أن البرهان مختصر، على الطالب أن يفصّله ثم يؤكّد هذه النتيجة باستعمال الطريقة الثانية المبيّنة أعلاه (استعمال وصلة لوفي-سيفيتا).

وختاما

بحمد الله وتوفيقه تمّ انجاز هذا العمل في جزءه الثاني في شهر
رمضان الكري(1444 هجرية).
ندعو الله تعالى أن يتقبل منا هذا العمل خالصا لوجهه الكريم
وأن يكون إضافة نافعة لمكتبتنا العربية ينفع به أبنائنا الطلبة
ويحفّز به زملائنا الأساتذة للنهوض بلغتنا وقيّمنا فهو وليّ ذلك والقادر عليه.

الجمعة 9 رمضان 1444 هجرية الموافق ل 31 مارس 2023 ميلادية

المصطلحات

الإنجليزية	الفرنسية	العربية
local coordinates	coordonneés locales	إحداثيات محلّيّة
stereographic projection	projection stéréographique	إسقاط مجسمي
atlas	atlas	أطلس
trivial	triviale	اعتيادي
base global	globale base	أساس شامل
left translation	translation à gauche	إنسحاب إلى اليسار
almost contact structure	structure presque de contact	بنية تلامسية تقريباً
commutative	commutatif	تبديلي
bijective	bijective	تقابل
paramétrization	parametrisation	تمثيل وسيطي
cosymplectic	cosymplectique	ثنائي التماسك
dual space	espace dual	ثنوي فضاء
space cotangent	cotangente espace	ثنوي الفضاء المماس
open neighborhood	voisinage ouvert	جِوار مفتوح
simpl Lie algebra	algébre de Lie simple	جبر لي البسيط
vectors field	champ de vecteurs	حقل أشعة
map	carte	خريطة
Lie group	groupe de Lie	زمرة لي
differential form	forme différentielle	شكل تفاضلي
differential one-form	1-forme différentielle	شكل تفاضلي أحادي
differential second form	forme différentielle seconde	شكل تفاضلي ثنائي
fundamental form	forme fendamentale	شكل أساسي
skew-symmetric, antisymmetric	antisymétrique	ضد تناظري
nilpotent	nilpotente	عديم النمو
surjective	surjective	غامر

العربية	الفرنسية	الإنجليزية
متباين	injective	injective
تقابل	bijective	bijective
غير منحل	non dégénérée	not degenerate
فضاء مماس	espace tangent	tangent space
قابلية المكاملة	intégrabilité	integrability
قابلية التوجيه	orientabilité	orientability
قابل للقلب	inversible	invertible
قوس لي	crochet de Lie	Lie bracket
لامتغير من اليسار	invariant à gauche	left invariant
ليف	fibré	bundle
ماوراء-ساساكي	Trans-Sasaki	Trans-Sasaki
متشاكل	homéomorphisme	homeomorphism
متشاكل تفاضلياً	difféomorphisme	diffeomorphism
متماثل	isomorphe	isomorphic
متوازية	parallélisable	parallelizable
متوافق	compatible	compatible
مثالي	idéal	ideal
ملساء	lisse	smooth
منوّعة	variété	manifold
منظومة إحداثيات	systeme de coordonnées	system coordinates
موافق التفاضل	codifférentielle	codifferential
موتّر الفتل	tenseur de torsion	torsion tensor
موتّر متري	tenseur métrique	metric tensor
مؤثر تدرّج كمية قياسية	opérateur gradient	gradient operator
مؤثر التباعد	opérateur divergence	divergence operator
ناظمي	normale	normal
وصلة	connexion	connection

المصادر

[1] ر. أبوراس، م. الشيخ و س. أبو عقل، صفان من المنطويات المترية التلامسية ثلاثية الأبعاد شبه المتناظرة جزئيا ومن نمط ريشي، مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية ـ المجلد) (24ـ العدد الثاني ـ 2008.

[2] م.بوزبوجة، م.بنيان، المنوعة الذهبية التلامسية ثلاثية الأبعاد، مذكرة ماستر، جامعة معسكر، (2018).

[3] س.سلامة، دراسة في زمر لي وأهم الأمثلة عنها (زمرة هايزنبرغ)، جامعة البعث، مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية -المجلد (4)- العدد(1)- ص 45-59، (2020).

[4] أ.عاشور، دراسة في صياغة الجاذبية ونظريات المعيار بواسطة الهندسة التفاضلية، رسالة ماجستير، جامعة دمشق، (2012) .

[5] P. Alegre, A. Carriazo, Generalized Sasakian Space Forms and Conformal Changes of the Metric, Results Math., 59 (2011), 485-493.

[6] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, Kählerian structures on $\mathcal{D}$-homothetic bi-warping, J. Geom. Symmetry Phys. 42 (2016) 1-13.

[7] G. Beldjilali, Produit de deux variétés munies de quelques structures, Thèse de doctorat, Univ. Tlemcen (2018).

[8] G. Beldjilali, Structures and $\mathcal{D}$-isometric warping. HSIG, Vol.2(1), (2020), 21-29.

[9] G. Beldjilali, M. Belkhelfa, Kählerian structures on generalized doubly D-homothetic bi- warping, African Diaspora Journal of Mathematics, Vol. 21(2), 1-14 (2018).

[10] G. Beldjilali, almost G-contact metric manifold, International Journal of Maps in Mathematics- Volume (2)- Issue (2)- (2019), Pages :(175-186).

[11] G. Beldjilali, M. A. Akyol, On certain transformation on almost contact metric manifolds, Facta Universitatis (NIS) Ser. Math. Inform. Vol. 36, No 2 (2021), 365-375 https ://doi.org/10.22190/FUMI200803027B

[12] G. Beldjilali, A. Mohamed cherif, K. Zegga, Sasakian structures on product of real line and Kählerian manifolds, Korean J. Math. 27 (2019), No. 4, pp. 1061-1075, https ://doi.org/10.11568/kjm.2019.27.4.1061.

[13] G. Beldjilali, N. Oubbiche, C_{12}-space form, Commun. Korean Math. Soc. (2023), https ://doi.org/10.4134/CKMS.c220210.

[14] R. Bishop , and B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc., 46 , (1969) 1-49.

[15] D. E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics Vol. 203, Birhauser, Boston, 2002.

[16] D. E. Blair, J. A. Oubina, Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds, Publication Mathematiques, Vol 34 (1990).

[17] D. E. Blair, $\mathcal{D}$-homothetic warping, Publ. math. (Beograd) (NS.), 94 (108), (2013), 47-54.

[18] D. E. Blair, T. Koufogirgos and R. Sharma, A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with $Q\varphi = \varphi Q$, Kodai Math. J., **13** (1990), 391-401.

[19] H. Bouzir, G. Beldjilali, B. Bayour, On three dimensional C_{12}-Manifolds, Mediterr. J. Math. **18**, 239 (2021). https ://doi.org/10.1007/s00009-021-01921-3

[20] C. P. Boyer, K. Galicki, Sasakian Geometry, oxford uviversity press Inc, New York, 2008.

[21] D. Chinea, C. Gonzalez, A classification of almost contact metric manifolds, Ann. Mat. Pura Appl. 156(4) (1990), 15-36.

[22] S. Gallot, Hulin, D., et J. Lafontaine, Riemannian Geometry, third edition Mathematics Subject Classification, Springer (2004).

[23] A. Gray, L. M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 123 (1980).

[24] S. Guerine, H. Chabane, Application harmonique la valeurs dans une variété Riemannienne admet un champ de vecteurs homothétique, Mémoire Master, Université de Mascara, 2018.

[25] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., 24, 93-103 (1972).

[26] P. Liberman, Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et de structures de contact, Coll. Géom. Diff. Globale (Bruxelles 1958), Gauthier-Villars, Paris, 37-59.

[27] J. C. Marrero, The local structure of Trans-Sasakian manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata , Vol 162, Issue 1, (1992),77-86.

[28] S. Mehdi, Une introduction relativement compacte aux algèbres de Lie, Université Paris X et Institut de Mathèmatiques de Jussieu, 2005.

[29] Z. Olszak, Normal almost contact manifolds of dimension three, *Annales Pol. Math.* XLVII (1986), 41-50.

[30] Z. Olszak, Locally conformal almost cosymplectic manifolds. Colloq. Math. 57(1), (1989), 73-87.

[31] Z. Olszak, Almost cosymplectic manifolds with Käehlerian leaves, Tensor N. S. 46(1987), 117-124.

[32] J. A. Oubina, New classes of almost contact metric structures, Publicationes Mathematicae, Debrecen, 32, 187-193 (1985).

[33] N. Özdemir, M. Solgun and S. Aktay, Almost Contact Metric Structures on 5-Dimensional Nilpotent Lie Algebras, Symmetry, 2016.

[34] J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, Invariants of real low dimension Lie algebras, J. Mathematical Phys. 17, (1976), 986-994.

[35] A. Sharfuddin, S. I. Husain, Almost contact structures induced by a conformal transformation, Pub. Inst. Math., T. 32 (46), 1982, p. 155-159.

[36] M. L. Sinacer, G. Beldjilali, B. Bayour , H. Bouzir, Generalized Trans-Sasakian manifolds, Diff. Geo. and its App. 87 (2023) 101976. doi.org/10.1016/j.difgeo.2023.101976

[37] V. Svensson, Curvature of Lie groups, Bachelor's thesis, Lund uviversity, 2009.

[38] S. Tanno, Almost complex structures in boundle spaces over almost contact manifolds. J. Math Soc. Japan 17 (1965), 167-186.

[39] S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds., Illinois J. Math. 12 (1968), 700-717.

[40] I. Vaisman, Conformal Changes of Almost Contact Metric Structures. Lecture Notes in Mathematics, vol. 792, (1980) , 435-443.

[41] K. Yano, M. Kon, Structures on Manifolds, Series in Pure Math., Vol 3, World Sci.,1984.