Republique Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mustapha Stambouli de Mascara
Faculté des sciences et technologie
Département du génie mécanique

Polycopié de Cours

Maths 4 (Analyse complexe)

Présenté par :

Moulay Larbi Sinacer

Ce cours est destiné aux étudiants de deuxième année LMD sciences et techniques.

Année universitaire 2020/2021

Table des matières

Avant-propos

Ce polycopié présente de manière pédagogique et rigoureuse tous les éléments nécessaires à la compréhension et à l'application des théorèmes fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Il donne les principales définitions et les résultats fondamentaux illustrés par des exemples et des exercices avec solutions bien détaillées.

Le polycopié est destiné aux étudiants de la deuxième année licence des filières sciences et techniques.

Chapitre 1

Rappels sur les nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes a été étudie dans les classes précédentes. Il s'agit dans ce chapitre de donner un petit rappel.

Définition 1.0.1 *On appelle nombre complexe tout couple de l'ensemble produit* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$*. L'ensemble des nombres complexes* $z = (a, b)$ *est noté* $\mathbb{C}$*.*

On définit les lois de composition interne suivantes :

1. Addition :
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$
2. Multiplication :
$$(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad - bc).$$
Exemple 1.0.1
$$\begin{aligned} (b, 0).(0, 1) &= (0b - 01, 1b + 00) \\ &= (0, b). \end{aligned}$$

On a les propriétés suivantes :

1. "+" est associative
$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$
2. "+" est commutative
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$
3. Elément neutre pour l'addition
$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad z + (0, 0) = z.$$

4. Elément symétrique pour l'addition : tout nombre complexe non nul $z = (a, b)$ admet un symétrique noté $-z = (-a, -b)$, en effet,
$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (0, 0).$$
5. "." est associative
$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \qquad (z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3).$$
6. "." est commutative
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad z_1.z_2 = z_2.z_1.$$
7. Elément neutre pour la multiplication : le nombre $(1, 0)$ est élément neutre pour la multiplication, en effet, soit $z = (a, b) \in \mathbb{C}$
$$(1, 0).(a, b) = (1.a - 0b, 1b + 0a) = (a, b).$$
8. élément symétrique pour la multiplication : tout nombre complexe $z = (a, b)$ admet un inverse, noté z^{-1} défini par
$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$
9. Distributivité par rapport à l'addition
$$\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \qquad z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3.$$

Conclusion : Les propriétés précédentes permettent de conclure que l'ensemble $(\mathbb{C}, +, .)$ est **un corps commutatif**. On introduisant le nombre complexe $(0, 1)$, noté i, on trouve
$$(0, 1).(0, 1) = (-1, 0).$$
donc $i^2 = -1$ de plus
$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0).(0, 1) = a + ib.$$
a est appelé partie réelle de z et noté $Re(z)$.
b est appelé partie imaginaire de z et noté $Im(z)$.

Définition 1.0.2 *On appelle nombre complexe conjugué de $z = a + ib$ le nombre noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.*

Proposition 1.0.1 *Soient z_1, z_2 deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :*

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$.
4. $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$.
5. $z_1 + \overline{z_1} = 2Re(z_1)$.

Définition 1.0.3 *Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est définie par*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque 1.0.1 *Le module de nombre complexe $z = x + iy$ représente la distance de point (x, y) à l'origine dans le plan.*

Proposition 1.0.2 *Soient z_1, z_2 deux nombres complexes on a :*

1. $|z_1.z_2| = |z_1||z_2|$.
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ *avec* $z_2 \neq 0$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
4. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_- z_2|$.
5. $z\overline{z} = |z|^2$.

1.1 Représentation géométrique

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, nous pouvons représenter le nombre complexe $z = x + iy$ par un point M de coordonnées x et y.
Voir la figure 1.1.

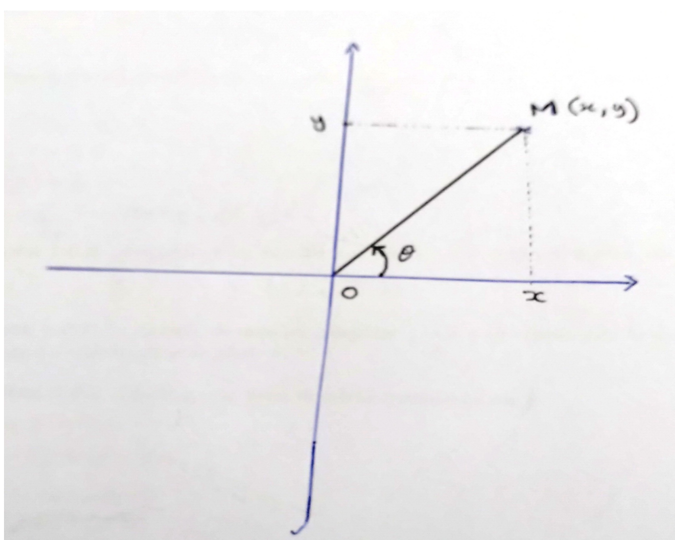

FIGURE 1.1 –

Exemple 1.1.1 *1. L'ensemble $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$ est le cercle de centre 0 et de rayon R.*

2. L'ensemble des points z qui vérifiant l'équation $|z - z_0| = R$ est le cercle de centre z_0 et de rayon R.

Définition 1.1.1 *On appelle argument du nombre complexe z l'angle polaire du vecteur $\overrightarrow{OM}$. On note*

$$arg(z) = \theta + 2\pi k = (Ox, \overrightarrow{OM})(mod 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

θ est une valeur parmi les différents valeurs de l'argument de z.
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique α (argument de z) tel que $-\pi < \alpha \leq \pi$, noté $Arg(z)$, il est appelé la valeur principale de l'argument de z.
Il est évident que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

On en déduit que

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta.$$

L'écriture précédente définit la forme trigonométrique d'un nombre complexe.
On pose :

$$\cos\theta + i\sin\theta =: e^{i\theta},$$

alors la forme trigonométrique devient :

$$z = re^{i\theta}.$$

Proposition 1.1.1 *Soient z_1, z_2 deux nombres complexes on a :*

1. *$arg(z_1.z_2) = arg z_1 + arg z_2$.*
2. *$arg \frac{z_1}{z_2} = arg z_1 - arg z_2$.*

Exemple 1.1.2 *Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1+i}{1-i}$.*

1. *$|z| = \left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.*
2. *$arg z = arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = arg(1+i) - arg(1-i) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.*

Proposition 1.1.2 (Formule de Moivre) *Soient $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, on a :*

1. *$z_1.z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)$.*
2. *$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$.*
3. *$z_1^n = r_1^n \left(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1)\right)$.*

La dernière formule appelée formule de Moivre.

1.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 1.2.1 *On appelle racines n-ièmes de nombre complexe w les nombres complexes solutions de l'équation $z^n = w$.*

Soit $w = \rho e^{i\alpha}$, pour que $z = re^{i\theta}$ soit solution de l'équation précédente il faut et il suffit que :

$$r^n = \rho \qquad \text{et} \qquad n\theta = \alpha + 2\pi k$$

d'où

$$r = \rho^{\frac{1}{n}} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

On obtient donc n racines distincts

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)} \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Exemples 1.2.1 *1. Racines sixièmes de -1 :*
on $|-1| = 1$ et $arg(-1) = \pi$, donc les racines sixième du -1 sont :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, \quad z_4 = e^{i\frac{9\pi}{6}}, \quad z_5 = e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

2. Racines quatrièmes de i :
On a $|i| = 1$ et $arg(i) = \frac{\pi}{2}$, donc les racines quatrièmes de i sont :

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

1.3 Exercices avec solutions

Exercice 1 :

Montrer que pour tout $z, w \in \mathbb{C}$, on a

1. $|z+w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2$.
2. $|z| \leq |Re(z = | + |Im(z)|$.
3. $|Re(z)| + |Im(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.

Solution :

1.

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2. \end{aligned}$$

2. Soit $z = x + iy$. On a

$$\begin{array}{rcl} |z|^2 & = & x^2 + y^2 \\ & = & |x|^2 + |y|^2 \\ & \leq & |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ & = & (|x| + |y|)^2 . \end{array}$$

ainsi

$$|z| \leq |Rez| + |Imz|.$$

3. Soit $z = x + iy$, on a $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, alors

$$|x|^2 + |y|^2 \geq 2|x||y|.$$

Donc on a

$$\begin{array}{rcl} (|x| + |y|)^2 & = & |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \\ & \leq & |x|^2 + |y|^2 + |x|^2 + |y|^2 \\ & = & 2(|x|^2 + |y|^2). \end{array}$$

D'où

$$|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{|x|^2 + |y|^2}$$

i.e

$$|Rez| + |Imz| \leq \sqrt{2}|z|.$$

Exercice 2

Montrer que si $|z| = 2$, alors

1. $|z^2 + 2z - 1| \leq 9$.
2. $\frac{1}{|z^3-1|} \leq \frac{1}{7}$.

Solution :

1.

$$\begin{array}{rcl} |z^2 + 2z - 1| & \leq & |z^2| + |2z| + |1| \\ & = & |z|^2 + 2|z| + 1 \\ & = & 4 + 4 + 1 \\ & = & 9. \end{array}$$

2. On a

$$\begin{array}{rcl} |z^3 - 1| & \geq & \big||z^3| - |1|\big| \\ & = & |8 - 1| \\ & = & 7. \end{array}$$

Donc

$$\frac{1}{|z^3 - 1|} \leq \frac{1}{7}.$$

Exercice 3
Résoudre l'équation :
$$|z+i|^2 = Im(z+2i).$$

Solution : Soit $z = x+iy$, alors l'équation devient
$$|x+iy+i|^2 = Im(x+iy+2i)$$
i.e
$$x^2+(1+y)^2 = 2+y$$
i.e
$$x^2+y^2+2y+1 = 2+y$$
i.e
$$x^2+y^2+y-1 = 0$$
i.e
$$x^2+(y+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}.$$
Donc l'ensemble des solutions de l'équation est le cercle de centre $(0,-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 4

Donner une interprétation géométrique de l'équation suivante :
$$|z-2i| = |z+2i|.$$

Solution : Soit $z = x+iy$, alors l'équation
$$|z-2i| = |z+2i|$$
devient
$$|x+iy-2i| = |x+iy+2i|$$
i.e
$$x^2+(y-2)^2 = x^2+(y+2)^2$$
i.e
$$y^2-4y+4 = y^2+4y+4$$
i.e
$$4y = 0$$
i.e
$$y = 0$$
et ceci est l'équation de l'axe réel.

Remarque 1.3.1 *L'ensemble de points z vérifiant l'équation $|z-2i| = |z+2i|$ est l'ensemble de tous les points du plan complexe équidistants des points $z_1 = 2i$ et $z_2 = -2i$, i.e c'est la médiatrice du segment $[z_1, z_2]$.*
Voir la figure 1.2.

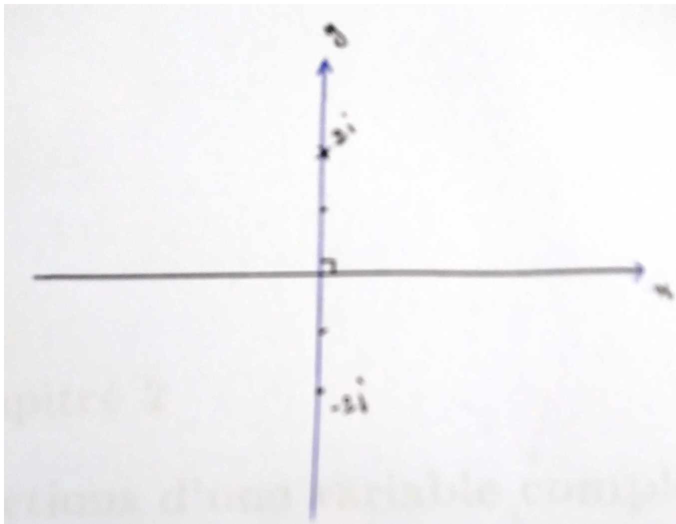

FIGURE *1.2* –

Exercice 5
Calculer les racines 5*-ièmes des nombres suivants :*

$$i, \qquad 1, \qquad 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i, \qquad (1+i\sqrt{3})^{11}$$

Solution :

1. *On a $|i| = 1$, $arg i = \frac{\pi}{2}$, donc les racines* 5*-ièmes de i sont*

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

i.e

$$z_1 = e^{\frac{\pi}{10}i}, \quad z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}, \quad z_2 = e^{\frac{9\pi}{10}i}, \quad z_3 = e^{\frac{13\pi}{10}i}, \quad z_4 = e^{\frac{17\pi}{10}i}.$$

2. *On a $|1| = 1$, $arg 1 = 0$, donc donc les racines* 5*-ièmes de* 1 *sont*

$$z_k = e^{\frac{2k\pi}{5}i}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

i.e

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{\frac{2\pi}{5}i}, \quad z_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i}, \quad z_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i}, \quad z_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i}.$$

3. *On a* $|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i| = 4$, $arg(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i) = \frac{\pi}{4}$, *donc les racines* 5*-ièmes de* $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ *sont*
$$z_k = 4e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

4. *On a* $\left|(1+i\sqrt{3})^{11}\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right|^{11} = 2^{11}$, $arg(1+i\sqrt{3})^{11} = 11arg(1+i\sqrt{3}) = 11\frac{\pi}{3}$, *donc les racines* 5*-ièmes de* $(1+i\sqrt{3})^{11}$ *sont*
$$z_k = 2^{11}e^{i\left(\frac{11\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

Chapitre 2

Fonctions d'une variable complexe

2.1 Fonction complexe

Définition 2.1.1 *On appelle fonction complexe une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f(z)$$

Posons $z = x + iy$. Comme $f(z) \in \mathbb{C}$, alors on peut écrire

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

où

$$P(x, y) = Re(f(z)) \quad \text{et} \quad Q(x, y) = Im(f(z)).$$

On est donc ramené à une application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Exemples 2.1.1

1. *La fonction $f(z) = 4z - i$ est définie sur $\mathbb{C}$, on a :*
   $f(z) = 4z - i = 4x + 4yi - i = 4x + (4y - 1)i$ c'est-à-dire $P(x, y) = 4x$, et $Q(x, y) = 4y - 1$.

2. *La fonction $g(z) = z^2 + 1$ est définie sur $\mathbb{C}$, on a :*
   $f(z) = z^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2xyi$ c'est-à-dire $P(x, y) = x^2 - y^2 + 1$, et $Q(x, y) = 2xy$.
3. *la fonction $h(z) = \frac{z}{z^2+1}$ est définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.*
4. *la fonction $k(z) = z^{\frac{1}{5}}$ est définie sur $\mathbb{C}$.*

Remarque 2.1.1 *Les fonctions f, g, h sont des fonctions uniformes, car l'image d'un nombre complexe par ces fonctions est unique. Tandis que pour la fonction k est multiforme car l'image d'un nombre complexe par cette fonction est multiple (5 valeurs).*

2.2 Les limites

Définition 2.2.1 *Soit f une fonction à une variable complexe définie dans un voisinage de z_0. On dit que f admet une limite l en z_0 et on note $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, si et seulement si*

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\eta > 0, \quad |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Exemples 2.2.1 *1. Soit la fonction $f(z) = 3z + i$.*
Montrer que $\lim_{z\to 0} f(z) = i$.
On a

$$|f(z) - i| = |3z + i - i| = |3z| = 3|z|.$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$.

2. Soit la fonction $f(z) = \overline{z}$.
Montrer que $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$.
On a :

$$|f(z) - 0| = |\overline{z}| = |z|.$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$.

Théorème 2.2.1 *Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction uniforme définie dans un voisinage de z_0, alors*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x, y) = a \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x, y) = b \end{cases}$$

avec $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$ et $L = a + ib$.

Démonstration 2.2.1 *D'après **l'exercice** 1 **du chapitre 1** on a*

$$\begin{aligned} |f(z) - L| &= |P(x, y) + iQ(x, y) - a - ib| \\ &\leq |P(x, y) - a| + |Q(x, y) - b| \\ &= \sqrt{2}|f(z) - L| \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exemple 2.2.1 *Soit la fonction $f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$, alors*

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 1+i} f(z) &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x^2 - y^2) + i \lim_{(x,y)\to(1,1)} (2xy) \\ &= 0 + 2i \\ &= 2i. \end{aligned}$$

Lemme 2.2.1 *Si $\lim_{z\to z_0} f(z) = L \neq 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que $|f(z)| > \frac{|L|}{2}$ quand $|z - z_0| < \eta$.*

Démonstration 2.2.2 *Comme* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ *il existe* $\eta > 0$ *tel que pour* $|z - z_0| < \eta$ *on a*

$$|f(z) - L| < \frac{|L|}{2}.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} |L| & = & |L - f(z) + f(z)| \\ & \leq & |L - f(z)| + |f(z)| \\ & < & \dfrac{|L|}{2} + |f(z)| \end{array}$$

ainsi $|f(z)| > \frac{|L|}{2}$.

Proposition 2.2.1 *Soient* f, g *deux fonctions telles que* $\lim_{z\to z_0} f(z)$, $\lim_{z\to z_0} g(z)$ *existent. Alors,*

1. *Si la limite* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *existe, alors elle est unique.*
2. $\lim_{z\to z_0}[f(z) + g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z)$.
3. $\lim_{z\to z_0}[f(z).g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z). \lim_{z\to z_0} g(z)$.
4. $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\lim_{z\to z_0} g(z)}$ *avec* $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$.
5. $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)}$ *avec* $\lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0$.

Démonstration 2.2.3

1. *On suppose que* f *admet deux limites i.e* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ *et* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_2$.
   Soit $\varepsilon > 0$ *la définition de la limite donne l'existence de* $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ *tel que pour* $|z - z_0| < \eta$ *on a :*

   $$|f(z) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad et \quad |f(z) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Donc

   $$\begin{array}{rcl} |L_2 - L_1| & = & |L_2 - f(z) + f(z) - L_1| \\ & \leq & |L_2 - f(z)| + |f(z) - L_1| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

2. *On pose* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$, $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$. *On a :*

   $$\begin{array}{rcl} |f(z) + g(z) - (L_1 + L_2)| & = & |f(z) - L_1 + g(z) - L_2| \\ & \leq & |f(z) - L_1| + |g(z) - L_2| \\ & = & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ & = & \varepsilon. \end{array}$$

   quand $|z - z_0| < \eta$ *avec* $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$.

3. *On pose* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$, $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$. *Comme* $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ *il existe* η_1 *tel que* $|f(z) - L_1| < 1$ *quand* $|z - z_0| < \eta_1$ *et d'après l'inégalité* $|f(z)| - |L_1| \leq |f(z) - L_1|$ *on trouve :*

$$|f(z)| < |L_1| + 1.$$

Puisque $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$ *pour* $\varepsilon > 0$ *il existe* η_2 *tel que pour* $|z - z_0| < \eta_2$ *on trouve :*

$$|g(z) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)}.$$

Et comme $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ *pour* $\varepsilon > 0$ *il existe* η_3 *tel que pour* $|z - z_0| < \eta_3$ *on trouve :*

$$|f(z) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(|L_2| + 1)}.$$

D'après ces trois résultats pour $|z - z_0| < \eta$ *avec* $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
|f(z)g(z) - L_1L_2| &= |f(z)[g(z) - L_2] + L_2[f(z) - L_1]| \\
&\leq |f(z)||g(z) - L_2| + L_2|f(z) - L_1| \\
&\leq |f(z)||g(z) - L_2| + (|L_2| + 1)|f(z) - L_1| \\
&< (|L_1| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|L_1| + 1)} + (|L_2| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|L_2| + 1)} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

4. *Comme* $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$ *il existe* $\eta_1 > 0$ *tel que pour* $|z - z_0| < \eta_1$ *on a* $|g(z) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2}\varepsilon$ *et d'après le lemme précédent il existe* $\eta_2 > 0$ *tel que pour* $|z - z_0| < \eta_2$ *on a* $|g(z)| > \frac{|L_2|}{2}$. *Donc pour* $|z - z_0| < \eta$ *avec* $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{L_2}\right| &= \left|\frac{g(z) - L_2}{g(z)L_2}\right| \\
&= \frac{|g(z) - L_2|}{|g(z)||L_2|} \\
&< \frac{\frac{|L_2|^2}{2}\varepsilon}{\frac{|L_2|}{2}|L_2|} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

5. *D'après* (3) *et* (4) *on trouve :*

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z\to z_0}\left(f(z).\frac{1}{g(z)}\right)\\ &= \lim_{z\to z_0} f(z).\lim_{z\to z_0}\frac{1}{g(z)}\\ &= L_1.\frac{1}{L_2}\\ &= \frac{L_1}{L_2}.\end{aligned}$$

2.3 La continuité

Définition 2.3.1 *On dit que la fonction f est continue en z_0 si elle admet une limite en z_0 et que cette limite vaut $f(z_0)$.*

i.e

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

On dit que la fonction f est continue sur un domaine D si elle est continue en tout point de D.

Proposition 2.3.1
1. *Soient f et g deux fonctions continues en z_0, alors les fonctions $f+g$, fg, $\overline{f}$ et $\frac{f}{g}$ avec $g(z)\neq 0$ sont continues en z_0.*
2. *Si la fonction f est continue en z_0, alors la fonction $|f|$ c'est aussi.*
3. *la fonction f est continue en z_0 si et seulement si les deux fonctions Ref et Imf sont continues en (x_0, y_0) avec $z_0 = x_0 + iy_0$.*

Proposition 2.3.2 *Soit $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ une fonction uniforme définie dans un voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$, alors :*
la fonction f est continue en z_0 si et seulement si les deux fonctions P et Q sont continues en (x_0, y_0).
ie :

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} P(x,y) = P(x_0,y_0)\\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} Q(x,y) = Q(x_0,y_0)\end{cases}.$$

Exemples 2.3.1
1. *la fonction $f(z) = x^2+1+i(y+x)$ est continue sur $\mathbb{C}$ car les fonctions $P(x,x) = x^2+1$ et $Q(x,y) = y+x$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *La fonction $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ n'est pas continue en $z_0 = 0$ car la limite $\lim_{z\to 0} f(z)$ n'existe pas. En effet,*

(a) *La limite suivant le chemin* $\gamma_1 : y = 0,\ x \to 0$. *Voir la figure* (2.1).
$\lim_{z \to 0_{\gamma_1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$.

(b) *La limite suivant le chemin* $\gamma_2 : x = 0,\ y \to 0$. *Voir la figure* (2.1).
$\lim_{z \to 0_{\gamma_2}} = \lim_{y \to 0} \frac{iy}{-iy} = -1$.

Et puisque les deux limites sont différentes, la limite $\lim_{z \to 0} f(z)$ *n'existe pas.*

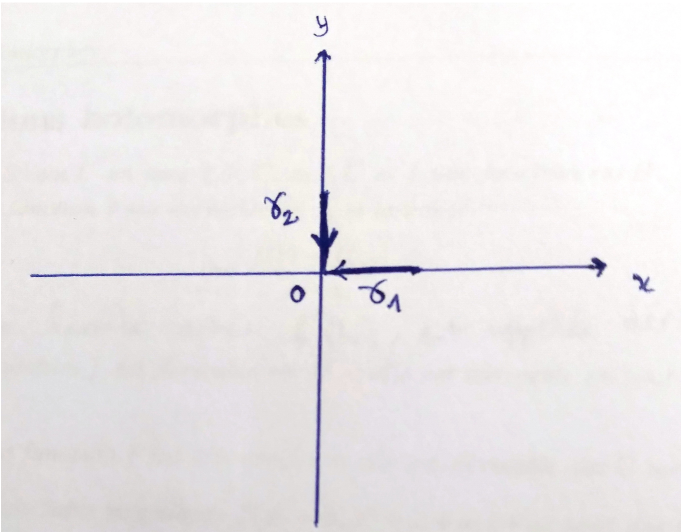

Figure *2.1* –

2.4 Fonctions holomorphes

Définition 2.4.1 *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ *et* f *une fonction sur* U.

1. *On dit que la fonction* f *est dérivable en* z_0 *si la limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Cette limite notée $f'(z_0)$, *est appelée dérivée de* f *en* z_0.

2. *On dit que la fonction* f *est dérivable sur* U *si elle est dérivable en tout point de* U.

Définition 2.4.2 *Une fonction* f *est dite entière si elle est dérivable sur* $\mathbb{C}$ *tout entier.*

Exemple 2.4.1 *Les fonctions polynômes* $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ *sont des fonctions entières.*

Remarque 2.4.1 *Si on pose* $z - z_0 = h$, *alors la limite précédente devient :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Définition 2.4.3 *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et f une fonction sur U.*

1. *On dit que la fonction f est holomorphe en un point z_0 si elle est dérivable en z_0 et en voisinage de z_0.*
2. *On dit que la fonction f est holomorphe sur U si elle est holomorphe en chaque point de U.*

Notations 2.4.1 *On note par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U. i.e*

$$H(U) = \{f : U \to \mathbb{C}, \quad f \quad holomorphe \quad sur \quad U\}$$

Proposition 2.4.1 *Soit f une fonction holomorphe en z_0, alors*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0)$$

avec

$$\lim_{z - z_0} \varepsilon(z) = 0.$$

Démonstration 2.4.1 *Soit $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) = \varepsilon$ donc*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0)$$

et comme f est holomorphe en z_0, on trouve :

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) = \lim_{z - z_0} \varepsilon = 0.$$

Exemples 2.4.1

1. *La fonction $f(z) = z$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ donc elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ on a*

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. *La fonction $f(z) = \overline{z}$ non dérivable en $z_0 = 0$ donc n'est pas holomorphe en $z_0 = 0$. En effet,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

   (a) *La limite suivant le chemin $\gamma_1 : y = 0, \ x \to 0$*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0_{\gamma_1}} \frac{\overline{h}}{h} &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) *La limite suivant le chemin* γ_2 : $x = 0$, $y \to 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0_{\gamma_2}} \frac{\overline{h}}{h} &= \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} \\ &= -1. \end{aligned}$$

Donc la limite n'existe pas.

3. *La fonction* $f(z) = \overline{z} Imz$ *n'est pas holomorphe en* $z_0 = 0$.
   On va montrer que la fonction f *est dérivable seulement en* $z_0 = 0$.

   (a) *Pour* $z = 0$: *soit* $h = re^{i\theta}$

   $$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{f(re^{i\theta}) - f(0)}{re^{i\theta}} \\ &= \lim_{r \to 0} \frac{re^{-i\theta} r \sin\theta}{re^{i\theta}} \\ &= \lim_{r \to 0} re^{-2i\theta} r \sin\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

   Donc f *est dérivable en* 0 *et on a* $f'(0) = 0$

   (b) *Pour* $z \neq 0$, *soit* $h = x + iy$

   $$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} Im(z+h) - \overline{z} Imz}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z} Imh + \overline{h} Im(z+h)}{h} \\ &= L. \end{aligned}$$

   i. *On calcule la limite* L *suivant le chemin* γ_1 *i.e* $y = 0$, $x \to 0$:

   $$\begin{aligned} L &= \lim_{h \to 0_{\gamma_1}} \frac{\overline{z} Imh + \overline{h} Im(z+h)}{h} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x Imz}{x} \\ &= Imz. \end{aligned}$$

ii. *On calcule la limite L suivant le chemin γ_2 i.e $x = 0$, $y \to 0$:*

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h \to 0_{\gamma_2}} \frac{\overline{z}Imh + \overline{h}Im(z+h)}{h} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\overline{z}y - iy(Imz + y)}{iy} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\overline{z}y - iyImz + iy^2}{iy} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{\overline{z} - iImz + iy}{i} \\ &= i\overline{z} + Imz. \end{aligned}$$

Puisque les limites ne sont pas égaux, donc la fonction f n'est pas dérivable en $z \neq 0$.

4. *Trouver $f'(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ avec $f(z) = z^3$.*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^3 - z^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{z^3 + 3z^2h + 3zh^2 + h^3 - z^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3z^2h + 3zh^2 + h^3}{h} \\ &= 3z^2. \end{aligned}$$

5. *Montrer que $f(z) = Rez$ n'est pas dérivable pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
Soit $z \in \mathbb{C}$, alors,

$$\lim_{h \to 0} \frac{Re(z+h) - Rez}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{Reh}{h}.$$

(a) *On calcule la limite suivant le chemin γ_1, on trouve :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{Reh}{h} = 1.$$

(b) *On calcule la limite suivant le chemin γ_2, on trouve :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{Reh}{h} = 0.$$

Puisque les limites ne sont pas égaux, donc la fonction f n'est pas dérivable en z.

6. *Montrer que $f(z) = \overline{z} + 1$ n'est pas dérivable pour tout $z \in \mathbb{C}$.*
Soit $z \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} + 1 - \overline{z} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h}. \end{aligned}$$

(a) *On calcule la limite suivant le chemin γ_1, on trouve :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} = 1.$$

(b) *On calcule la limite suivant le chemin γ_2, on trouve :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} = -1.$$

Puisque les limites ne sont pas égaux, donc la fonction f n'est pas dérivable en z.

Théorème 2.4.1 *Si une fonction f est dérivable en z_0, alors elle est continue en z_0.*

Démonstration 2.4.2 *Comme la fonction f est dérivable en z_0 alors la limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe et vaut $f'(z_0)$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.(z - z_0) \right) \\ &= \lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) . \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0). \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où la fonction f est continue en z_0.

Remarque 2.4.2

$$f \quad \text{continue en} \quad z_0 \quad \not\Rightarrow \quad f \quad \text{dérivable en} \quad z_0$$

Démonstration 2.4.3 ***[Remarque]***
La fonction $f(z) = |z|^2$ est continue pour tout $z \in \mathbb{C}$ mais elle est dérivable en $z_0 = 0$ seulement.

Théorème 2.4.2 *Soit c une constante complexe, et soient f, g deux fonctions dérivables en $z \in \mathbb{C}$, alors on a :*

1. $\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ *et* $n \neq -1$ $z \neq 0$.
2. $(cf(z))' = cf'(z)$.
3. $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$
4. $(f(z).g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
5. $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ *avec* $g(z) \neq 0$
6. $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)).f'(z)$.

Exemple 2.4.2 *Trouver $f'(z)$ telle que $f(z) = \frac{1+z}{(1-z^2)^2}$.*

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{(1-z)^2 + 2(1+z)(1-z)}{(1-z)^4} \\ &= \frac{-z^2 - 2z + 3}{(1-z)^4} \end{aligned}$$

Théorème 2.4.3 ***[La règle de L'Hôpital]*** *Soit f et g deux fonctions holomorphes en z_0 et supposons que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ avec $g'(z_0) \neq 0$. Alors,*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Démonstration 2.4.4 *D'après la proposition (2.4.1) on obtient :*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_1(z - z_0)$$

et

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_2(z - z_0)$$

avec

$$\lim_{z - z_0} \varepsilon_1 = 0 \quad et \quad \lim_{z - z_0} \varepsilon_2 = 0$$

et comme $f(z_0) = g(z_0) = 0$ les deux équations précédente devient :

$$f(z) = f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_1(z - z_0)$$

et

$$g(z) = g'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_2(z - z_0)$$

D'où

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_1(z - z_0)}{g'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_2(z - z_0)} \\ &= \lim_{z \to z_0} \frac{(f'(z_0) + \varepsilon_1)(z - z_0)}{(g'(z_0) + \varepsilon_2)(z - z_0)} \\ &= \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}. \end{aligned}$$

Exemple 2.4.3 *Calculer la limite*

$$\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}.$$

On pose $f(z)=z^{10}+1$ *et* $g(z)=z^6+1$, *on a alors,*

$$f(i)=g(i)=0$$

d'où

$$\lim_{z\to i}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to i}\frac{z^{10}+1}{z^6+1}=\lim_{z\to i}\frac{10z^9}{6z^5}=\lim_{z\to i}\frac{5}{3}z^4=\frac{5}{3}.$$

2.5 Les conditions de Cauchy-Riemann

Soient $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ une fonction et z_0 un point, dans cette section on va donner la relation entre l'existence de f' en $z_0=x_0+iy_0$ et l'existence de P_x, P_y, Q_x et Q_y en (x_0,y_0), où P_x est la dérivée partielle de la fonction P par rapport a x, i.e $P_x=\frac{\partial P}{\partial x}$ et idem pour P_y, Q_x et Q_y.

Théorème 2.5.1 ***[Condition nécessaire] :***
Si la fonction $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ *est dérivable en* $z_0=x_0+iy_0$. *Alors*

1. *Les dérivées partielles* P_x, P_y, Q_x *et* Q_y *sont existent en* (x_0,y_0), *et on a les équations de Cauchy Riemann suivantes :*
$$\begin{cases} P_x(x_0,y_0)=Q_y(x_0,y_0),\\ P_y(x_0,y_0)=-Q_x(x_0,y_0).\end{cases}$$
2. *De plus* $f'(z_0)=P_x(x_0,y_0)+iQ_x(x_0,y_0)$.

Démonstration 2.5.1 *Soient* $z_0\in\mathbb{C}$ *et* $h=x+iy$, *d'après l'hypothèse* $f'(z_0)$ *existe, donc*

$$\lim_{h\to 0_{\gamma_1}}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{h\to 0_{\gamma_2}}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z_0).$$

1. *La limite suivant le chemin* γ_1 *(i.e* $y=0$ *et* $x\to 0$*) et on a :*

$$\lim_{h\to 0_{\gamma_1}}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(z_0+x)-f(z_0)}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0}\frac{P(x_0+x,y_0)+iQ(x_0+x,y_0)-P(x_0,y_0)-iQ(x_0,y_0)}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{P(x_0+x,y_0)-P(x_0,y_0)}{x}+i\frac{Q(x_0+x,y_0)-Q(x_0,y_0)}{x}\right]\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{P(x_0+x,y_0)-P(x_0,y_0)}{x}\right]+i\lim_{x\to 0}\left[\frac{Q(x_0+x,y_0)-Q(x_0,y_0)}{x}\right]\\
&= P_x(x_0,y_0)+iQ_x(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

Donc

$$f'(z_0) = P_x(x_0, y_0) + iQ_x(x_0, y_0). \tag{2.1}$$

2. *La limite suivant le chemin γ_2 (i.e $x = 0$ et $y \to 0$) et on a :*

$$\lim_{h \to 0_{\gamma_2}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{y \to 0} \frac{f(z_0 + iy) - f(z_0)}{iy}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \to 0} \frac{P(x_0, y_0 + y) + iQ(x_0, y_0 + y) - P(x_0, y_0) - iQ(x_0, y_0)}{iy} \\
&= \lim_{y \to 0} \left[\frac{P(x_0, y_0 + y) - P(x_0, y_0)}{iy} + i \frac{Q(x_0, y_0 + y) - Q(x_0, y_0)}{iy} \right] \\
&= \lim_{y \to 0} \left[\frac{P(x_0, y_0 + y) - P(x_0, y_0)}{iy} \right] + i \lim_{y \to 0} \left[\frac{Q(x_0 + x, y_0) - Q(x_0, y_0)}{iy} \right] \\
&= \lim_{y \to 0} \left[\frac{Q(x_0 + x, y_0) - Q(x_0, y_0)}{y} \right] - i \lim_{y \to 0} \left[\frac{P(x_0, y_0 + y) - P(x_0, y_0)}{y} \right] \\
&= Q_y(x_0, y_0) - iP_y(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Donc

$$f'(z_0) = Q_y(x_0, y_0) - iP_y(x_0, y_0), \tag{2.2}$$

et d'après (2.1) et (2.2) on trouve :

$$\begin{cases} P_x(x_0, y_0) = Q_y(x_0, y_0), \\ P_y(x_0, y_0) = -Q_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Exemple 2.5.1 *Soit la fonction $f(z) = z^3$.*
On a :

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 \\
&= (x + iy)^3 \\
&= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 \\
&= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3),
\end{aligned}$$

donc $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ avec $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$ et $Q(x, y) = 3x^2y - y^3$ on a :

$$\begin{cases} P_x(x, y) = Q_y(x, y), \\ P_y(x, y) = -Q_x(x, y). \end{cases}$$

Car :

$$P_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2$$

$$P_y(x,y) = -6xy$$
$$Q_x(x,y) = 6xy$$
$$Q_y(x,y) = 3x^2 - 3y^2.$$

De plus

$$\begin{aligned} f'(z) &= P_x(x,y) + iQ_x(x,y) \\ &= 3x^2 - 3y^2 + i6xy \\ &= 3(x^2 - y^2 + i2xy) \\ &= 3z^2 \end{aligned}$$

Exemple 2.5.2 *La fonction $f(z) = \overline{z}$ est non dérivable pour tout $z \in \mathbb{C}$ car :*
$f(z) = \overline{z} = x - iy$ alors $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ telle que $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = -y$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$P_x(x,y) = 1 \quad et \quad Q_y(x,y) = -1.$$

Donc les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaits pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $f'(z)$ n'existe pas pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.5.1 *Les conditions du théorème précédent sont nécessaire mais non suffisantes. i.e*

$$\text{les conditions} \quad \nRightarrow \quad \text{la fonction dérivable.}$$

Démonstration 2.5.2 ***[Remarque (2.5.1)]***
Soit la fonction

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\overline{z}^2}{z}, & si\,; \quad z \neq 0 \\ 0, & si. \quad z = 0. \end{cases}$$

La fonction f satisfait les conditions de Cauchy Riemann mais n'est pas dérivable en $z_0 = 0$. En effet,
on peut écrire $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec :

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & si, \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si, \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

et

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - 3x^2 y}{x^2 + y^2}, & si, \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si, \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Le calcule donne :*

$$P_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{P(x,0) - P(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1,$$

$$Q_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^3} = 1.$$

Donc

$$P_x(0,0) = Q_y(0,0)$$

par la même méthode on trouve :

$$P_y(0,0) = -Q_x(0,0).$$

2. *La dérivabilité de* f *au point* $z_0 = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\overline{h}^2}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}^2}{h^2}.$$

   (a) *La limite suivant le chemin* γ_1 $(y = 0,\ x \to 0)$ *:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}^2}{h^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

   (b) *La limite suivant le chemin* γ_1 $(y = x)$, $x \to 0$ *:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}^2}{h^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-i)^2}{x^2(1+i)^2} = -1.$$

Et comme les deux limites sont differentes alors la fonction n'est pas dérivable en $z_0 = 0$.

Théorème 2.5.2 ***[Condition suffisante]***
Soit $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ *une fonction définie dans un voisinage* $V_\varepsilon(z_0)$ *du point* $z_0 = x_0 + iy_0$. *Supposons que les dérivées partielles* P_x, P_y, Q_x *et* Q_y *existent partout dans* $V_\varepsilon(z_0)$ *et sont continues au point* (x_0, y_0), *alors,*
si

$$\begin{cases} P_x(x_0,y_0) = Q_y(x_0,y_0), \\ P_y(x_0,y_0) = -Q_x(x_0,y_0), \end{cases}$$

alors, $f'(z_0)$ *existe.*

Démonstration 2.5.3 *On pose $h = h_1 + ih_2$ et $\Delta f = f(z_0 + h) - f(z_0) = \Delta P + i\Delta Q$ avec*

$$\Delta P = P(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - P(x_0, y_0)$$
$$\Delta Q = Q(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - Q(x_0, y_0)$$

et comme les dérivées partielles P_x, P_y, Q_x et Q_y existent et continues au point (x_0, y_0), alors,

$$\Delta P = P_x(x_0, y_0)h_1 + P_y(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_1|h|,$$

et

$$\Delta Q = Q_x(x_0, y_0)h_1 + Q_y(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_2|h|,$$

tels que $\varepsilon_1 \to 0$ et $\varepsilon_2 \to 0$ quand $(h_1, h_2) \to (0, 0)$.
Donc

$$\Delta f = P_x(x_0, y_0)h_1 + P_y(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_1|h| + i\left(Q_x(x_0, y_0)h_1 + Q_y(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_2|h|\right),$$

En utilisant les conditions de Cauchy Riemann on trouve :

$$\begin{aligned}\Delta f &= P_x(x_0, y_0)h_1 - Q_x(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_1|h| \\ &+i\left(Q_x(x_0, y_0)h_1 + P_x(x_0, y_0)h_2 + \varepsilon_2|h|\right) \\ &= P_x(x_0, y_0)h + iQ_x(x_0, y_0)h + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)|h|\end{aligned}$$

Nous divisons les deux membres sur h et on obtient :

$$\frac{\Delta f}{h} = P_x(x_0, y_0) + iQ_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{|h|}{h},$$

D'où

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = P_x(x_0, y_0) + iQ_x(x_0, y_0),$$

car $\left|\frac{|h|}{h}\right| = 1$.

Exemple 2.5.3 *Soit $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.*
Montrer que f est dérivable pour tout $z \in \mathbb{C}$ et trouver $f'(z)$.
On a $P(x, y) = \sin x \cosh y$, $Q(x, y) = \cos x \sinh y$, alors

$$P_x(x, y) = \cos x \cosh y, \qquad Q_y = \cos x \cosh y$$
$$P_y(x, y) = \sin x \sinh y, \qquad Q_x(x, y) = -\sin x \sinh y.$$

Donc les dérivées P_x, P_y, Q_x et Q_y existent et vérifient les conditions de Cauchy Riemann et sont continues pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De plus on a

$$f'(z) = P_x(x, y) + iQ_x(x, y) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Exercice : [Les conditions de Cauchy Riemann en coordonnées polaires].
Montrer que en coordonnées polaires les conditions de Cauchy Riemann s'écrivent :

$$\begin{cases} P_r = \frac{1}{r} Q_\theta, \\ Q_r = -\frac{1}{r} P_\theta. \end{cases}$$

Solution :
On va montrer que :
Les conditions de Cauchy-Riemann en coordonnées cartésiennes $\Longleftrightarrow$ Les conditions de Cauchy Riemann en coordonnées polaires.

1. $\Longrightarrow$
   Soient $x(r,\theta) = r\cos\theta$ et $y(r,\theta) = r\sin\theta$, donc les dérivées partielles des fonctions composées donne :
   $$\begin{cases} P_r = \cos\theta P_x + \sin\theta P_y, \\ P_\theta = -r\sin\theta P_x + r\cos\theta P_y, \end{cases}$$
   et
   $$\begin{cases} Q_r = \cos\theta Q_x + \sin\theta Q_y, \\ Q_\theta = -r\sin\theta Q_x + r\cos\theta Q_y, \end{cases}$$
   et d'après les conditions de Cauchy Riemann en coordonnées cartésiennes, on obtient :
   $$\begin{cases} P_r = \frac{1}{r} Q_\theta, \\ Q_r = -\frac{1}{r} P_\theta. \end{cases}$$

2. $\Longleftarrow$:
   Soient $x(r,\theta) = r\cos\theta$ et $y(r,\theta) = r\sin\theta$, alors $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, donc on a :
   $$\begin{aligned} P_x &= P_r \frac{\partial r}{\partial x} + P_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= P_r \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + P_\theta \frac{-y}{x^2+y^2} \\ &= P_r \cos\theta - \frac{1}{r} P_\theta \sin\theta, \end{aligned}$$
   et
   $$\begin{aligned} Q_y &= Q_r \frac{\partial r}{\partial x} + Q_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ &= Q_r \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + Q_\theta \frac{x}{x^2+y^2} \\ &= Q_r \sin\theta + \frac{1}{r} Q_\theta \cos\theta. \end{aligned}$$
   On utilise les conditions de Cauchy Riemann en coordonnées polaires on obtient :

$$P_x = Q_y.$$

Par la même méthode on obtient :

$$P_y = -Q_x.$$

Corollaire 2.5.1 *La formule polaire de la dérivée d'une fonction dérivable f est donné par*

$$f'(z) = (P_r + iQ_r)\, e^{-i\theta}.$$

Théorème 2.5.3 *Soit $f(z) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta)$ une fonction définie dans un domaine qui ne contient pas le point $z = 0$. Alors la fonction f est holomorphe dans ce domaine si et seulement si les dérivées partielles premières P_r, P_θ, Q_r et Q_θ existent et sont continues sur le domaine et vérifient :*

$$\begin{cases} P_r = \frac{1}{r} Q_\theta, \\ Q_r = -\frac{1}{r} P_\theta. \end{cases}$$

Exemple 2.5.4 *Montrons que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est dérivable pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.*
Solution :
Soit $z \neq 0$, tel que $z = re^{i\theta}$, alors, on a :

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\cos\theta - i\frac{1}{r}\sin\theta.$$

Donc on a $f(z) = P(r,\theta) + iQ(r,\theta)$ avec

$$P(r,\theta) = \frac{1}{r}\cos\theta \qquad Q(r,\theta) = \frac{1}{r}\sin\theta.$$

Les calcules donnent :

$$P_r = -\frac{1}{r^2}\cos\theta, \qquad Q_\theta = -\frac{1}{r}\cos\theta$$

$$Q_r = \frac{1}{r^2}\sin\theta, \qquad P_\theta = -\frac{1}{r}\sin\theta.$$

D'où

$$\begin{cases} P_r = \frac{1}{r} Q_\theta, \\ Q_r = -\frac{1}{r} P_\theta. \end{cases}$$

Donc $f'(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et on a :

$$\begin{aligned}
f'(z) &= (P_r + iQ_r)e^{-i\theta} \\
&= \left(-\frac{1}{r^2}\cos\theta + i\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)e^{-i\theta} \\
&= -\frac{1}{r^2}\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)e^{-i\theta} \\
&= -\frac{1}{r^2}e^{-i\theta}e^{-i\theta} \\
&= -\frac{1}{r^2}e^{-2i\theta} \\
&= -\frac{1}{z^2}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.5.4 *Soit $f = P + iQ$ une fonction telle que les deux fonctions P, Q admettent des dérivées partielles premières continues par rapport à x et y sur Ω. On pose $F(z, \overline{z}) = f(x+iy)$, alors*

$$f \quad \text{est holomorphe dans} \quad \Omega \quad \Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}(z, \overline{z}) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Démonstration 2.5.4 *Montrons que*

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} P_x = Q_y, \\ P_y = -Q_x. \end{cases}$$

On a :

$$x(z, \overline{z}) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad y(z, \overline{z}) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Alors

$$F(z, \overline{z}) = f(x+iy) = P(x(z, \overline{z}), y(z, \overline{z})) + iQ(x(z, \overline{z}), y(z, \overline{z})).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial Q}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial P}{\partial y} + i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Exemple 2.5.5
1. *Soit la fonction $f(z) = z^2 + i$, on a $F(z, \overline{z}) = z^2 + i$ et comme $\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = 0$, alors la fonction f est holomorphe.*
2. *Soit la fonction $g(z) = \overline{z}$, on a $G(z, \overline{z}) = \overline{z}$ et comme $\frac{\partial G}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$, alors la fonction g n'est pas holomorphe.*
3. *Soit la fonction $h(z) = Imz$, on a $H(z, \overline{z}) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ car $Imz = y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ et comme $\frac{\partial H}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{2i} \neq 0$, alors la fonction h n'est pas holomorphe.*

2.6 Fonctions harmoniques

Définition 2.6.1 *Une fonction f de domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est dite de classe C^2 sur Ω ($f \in C^2(\Omega)$) si pour tout $(x, y) \in \Omega$, les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ existent et sont continues.*

Théorème 2.6.1 ***[Théorème de Schwarz]***
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω. Alors, pour tout (x, y) dans U on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y).$$

Définition 2.6.2 *Soit f une fonction de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 sur Ω. On dit que f est harmonique si pour tout $(x, y) \in \Omega$ on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 0.$$

Notations 2.6.1 *L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$ est noté Δ est appelé L'opérateur de Laplace.*

Autrement dit une fonction f est harmonique si son laplacien est nul, i.e

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0.$$

Exemple 2.6.1

1. *La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \cos y e^x$ est de classe C^2 et on a :*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = \cos y e^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = -\cos y e^x$$
alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = 0.$$
D'où la fonction f est harmonique.
2. *La fonction $g(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$ est harmonique dans $\Omega = \mathbb{R}^2$.*

Théorème 2.6.2 *Soit $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ une fonction holomorphe, si les dérivées partielles secondes de P et Q (i.e $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x}$ et $\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}$) existent et sont continues dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, alors, P et Q sont des fonctions harmoniques.*

Démonstration 2.6.1 *On va montrer que :*

$$\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y} \quad et \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 y}.$$

Nous utilisons les conditions de Cauchy Riemann et le théorème de Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P}{\partial^2 x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= -\frac{\partial^2 P}{\partial^2 y}.
\end{aligned}$$

De la même manière on trouve :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 x} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial^2 y}.$$

2.7 Exercices avec solutions

Exercice 1 :

Montrer que l'image de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, \quad Rez > 0\}$ par la fonction $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ est le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 i.e l'ensemble :

$$\{z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1\}.$$

Solution :

On pose $w = \frac{z-1}{z+1}$, alors on trouve $z = \frac{1+w}{1-w}$.

Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
Rez &= \frac{1}{2}(z+\overline{z})\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1+w}{1-w}+\overline{\left(\frac{1+w}{1-w}\right)}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1+w}{1-w}+\frac{1+\overline{w}}{1-\overline{w}}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+w)(1-\overline{w})+(1+\overline{w})(1-w)}{(1-w)(1-\overline{w})}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(1-w\overline{w})}{|1-w|^2}\right]\\
&= \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2},
\end{aligned}$$

et puisque $Rez > 0$, cela signifie que $1-|w|^2 > 0$ i.e $|w| < 1$.

Exercice 2 :

Soient la fonction $f(z) = z^2$ et le domaine $D = \{z = x + i, \quad 0 \leq x \leq 2\}$. Donner l'image de D par la fonction f.

Solution :

On pose $w = f(z) = z^2$. Soit $z \in D$, alors,

$$w = z^2 = (x+i)^2 = (x^2-1) + 2xi$$

donc $w = u + iv$ avec $u = x^2 - 1$ et $v = 2x$, on va trouver maintenant une relation entre u et v, comme $u = x^2 - 1$ alors $x^2 = u + 1$ ainsi $x = \sqrt{u+1}$ d'où $v = 2\sqrt{u+1}$. Finalement l'image de D par la fonction f est le graphe de la fonction g dans le plan complexe telle que $g(u) = 2\sqrt{u+1}$ avec $u \in [-1, 3]$. Voir figure 2.2

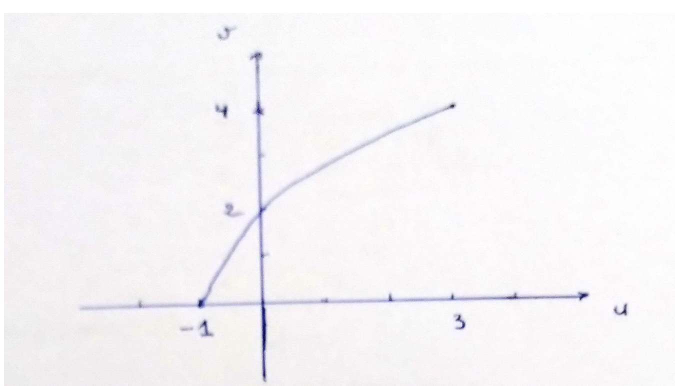

FIGURE 2.2 –

Exercice 3 :

Trouver l'image de l'ensemble $D = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z-2| < 1\}$ par la fonction $f(z) = \frac{2}{z-1}$.
Solution :
On pose $w = u + iv = f(z)$, alors on a :
$z = \frac{2}{w} + 1$, donc

$$\begin{aligned} |z-2| < 1 \;&\Rightarrow\; \left|\frac{2}{w} - 1\right| < 1 \\ &\Rightarrow\; \left|\frac{2-w}{w}\right| < 1 \\ &\Rightarrow\; |2-w| < |w| \\ &\Rightarrow\; |2-w|^2 < |w|^2 \\ &\Rightarrow\; (u-2)^2 + v < u^2 + v^2 \\ &\Rightarrow\; -4u + 4 < 0 \\ &\Rightarrow\; u > 1 \end{aligned}$$

Voir la figure 2.3

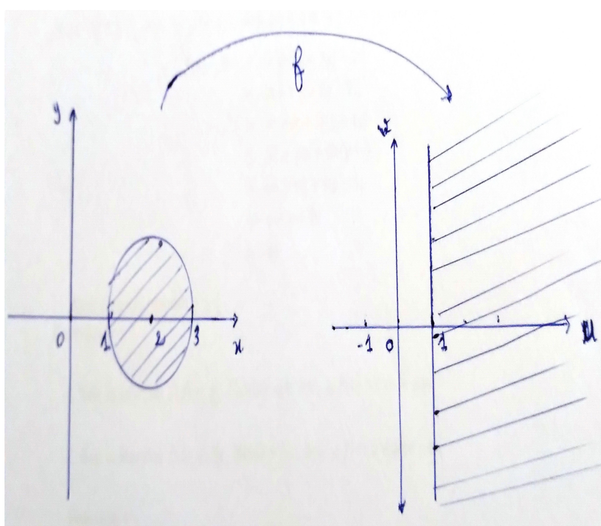

FIGURE 2.3 –

Exercice 4 :
Soit la fonction f définie par

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & \text{si,} \quad z \neq i \\ 0, & \text{si,} \quad z = i \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{z\to i} f(z) = -1$.

Solution :
Soit $\varepsilon > 0$, on va montrer l'existence de $\eta > 0$ tel que :

$$|z^2+1| < \varepsilon \quad \textit{quand} \quad |z-i| < \eta.$$

On peut choisir $\eta < 1$, alors $\eta^2 < \eta$ et on a :

$$\begin{array}{rcl} |z^2+1| & = & |(z+i)(z-i)| \\ & = & |z+i||z-i| \\ & < & \eta|z-i+2i| \\ & \leq & \eta\left(|z-i|+|2i|\right) \\ & < & \eta(\eta+2) \\ & = & \eta^2+2\eta \\ & < & \eta+2\eta \\ & = & 3\eta. \end{array}$$

Donc on peut choisir $\eta \leq \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$.

Exercice 5 :
Soit la fonction f définie par $f(z) = x + i(x+2y)$. Montrer que

$$\lim_{z\to i} f(z) = 2i.$$

Solution :
Soit $\varepsilon > 0$, on va montrer l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$|f(z)-2i| < \varepsilon \quad \textit{quand} \quad |z-i| < \eta.$$

Si $|z-i| < \eta$ i.e, $|x+i(y-1)| < \eta$, alors, $|x| < \eta$ et $|y-1| < \eta$, donc on a :

$$\begin{array}{rcl} |f(z)-2i| & = & |x+i(x+2y)-2i| \\ & = & |x+i(x+2y-2)| \\ & = & |x+ix+2i(y-1)| \\ & \leq & |x|+|ix|+|2i(y-1)| \\ & = & |x|+|x|+2|y-1| \\ & < & \eta+\eta+2\eta \\ & = & 4\eta. \end{array}$$

Ainsi on peut prendre $\eta \leq \frac{\varepsilon}{4}$.
Exercice 6 :

1. Soit la fonction $f(z) = \frac{z}{|z|}$, Montrer que $\lim_{z\to 0} f(z)$ n'existe pas.

2. Soit la fonction $f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$, Montrer que $\lim_{z\to 0} f(z)$ n'existe pas.

Solution :

1. On va calculer la limite suivant deux chemins différents :

   (a) La limite suivant le chemin γ_1 :
   $\gamma_1 : y = 0,\, x \to 0^+$,
   $$L_1 = \lim_{z \to_{\gamma_1} 0} f(z) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

   (b) La limite suivant le chemin γ_2 :
   $\gamma_2 : y = 0,\, x \to 0^-$,
   $$L_2 = \lim_{z \to_{\gamma_2} 0} f(z) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1.$$

   Comme $L_1 \neq L_2$ donc la limite n'existe pas.

2. On va montrer par la même méthode avec les deux chemins suivants :
   $$\gamma_1 : \qquad y = 0 \quad x \to 0$$
   et
   $$\gamma_2 : \qquad x = 0 \quad y \to 0.$$

Exercice 7 :
Etudier la continuité des fonctions suivantes au point z_0.

1. $$z_0 = 1 \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{z^2-1}{z-1}, & \text{si, } \quad z \neq 1 \\ 2, & \text{si} \quad z = 1. \end{cases}$$

2. $$z = i \qquad g(z) = \begin{cases} z^2, & \text{si, } \quad z \neq i \\ 0, & \text{si} \quad z = i. \end{cases}$$

3. $$z = 0 \qquad h(z) = \begin{cases} \frac{Rez}{z}, & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0, & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

4. $$z = 2i \qquad j(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i}, & \text{si, } \quad z \neq 2i \\ 3+4i, & \text{si} \quad z = 2i. \end{cases}$$

Solution :

1. La fonction f est continue au point $z_0 = 1$, car
$$\lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1} = \lim_{z\to 1} z+1 = 2 = f(1).$$
2. La fonction g n'est pas continue au point $z = i$ car
$$\lim_{z\to i} g(z) = \lim_{z\to i} z^2 = -1 \neq g(i) = 0.$$
3. On va calculer la limite $\lim_{z\to 0} h(z)$ suivant les chemins γ_1 et γ_2 :
   (a) Suivant γ_1 : $y = 0$ et $x \to 0$:
$$\lim_{z\to_{\gamma_1} 0} h(z) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$
   (b) Suivant γ_2 : $x = 0$ et $y \to 0$:
$$\lim_{z\to_{\gamma_2} 0} h(z) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{iy} = 0.$$
   Donc la limite n'existe pas, d'où la fonction h n'est pas continue au point $z_0 = 0$.
4.
$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2i} j(z) &= \lim_{z\to 2i} \frac{z^2+4}{z-2i} \\
&= \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)(z+2i)}{z-2i} \\
&= \lim_{z\to 2i} (z+2i) \\
&= 4i.
\end{aligned}$$

Et puisque $\lim_{z\to 2i} j(z) \neq j(2i)$ alors j n'est pas continue au point $z_0 = 2i$.

Exercice 8 :

Montrer que la fonction $f(z) = z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que
$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

Solution :

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :
$$\begin{aligned}
f(z_0+h) - f(z_0) &= (z_0+h)^n - z_0^n \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k z_0^{n-k} h^k - z_0^n \\
&= C_n^0 z_0^n h^0 + C_n^1 z_0^{n-1} h + ... + C_n^n h^n - z_0^n \\
&= C_n^1 z_0^{n-1} h + ... + C_n^n h^n.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{C_n^1 z_0^{n-1}h + C_n^2 z_0^{n-2}h^2+\ldots+C_n^n h^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(C_n^1 z_0^{n-1} + C_n^2 z_0^{n-2}h+\ldots+C_n^n h^{n-1}\right)\\
&= n z_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 9 :

Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(z) = iz^3 + (1-i)z - i$.
2. $g(z) = (z-2i)(iz+1)$.
3. $h(z) = \frac{iz}{z-2i}$.
4. $j(z) = ((2+i)z+3+i)^3$.
5. $k(z) = (iz+2)^{-2}$.

Solution :

1. $f'(z) = 3iz^2 + 1 - i$.
2. $g'(z) = iz + 1 + i(z-2i) = 2iz + 3$.
3. $h'(z) = \frac{i(z-2i)-iz}{(z-2i)^2} = \frac{iz+2-iz}{(z-2i)^2} = \frac{2}{(z-2i)^2}$.
4. $j'(z) = 3(2+i)((2+i)z+3+i)^2$.
5. $k'(z) = -2i(iz+2)^{-3}$.

.

Exercice 10 :

Montrer que la fonction $f(z) = zImz$ est dérivable seulement en $z_0 = 0$ et trouver $f'(0)$.

Solution :

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors on peut écrire :

$$f(z) = zImz = (x+iy)y = xy + iy^2,$$

donc

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

avec $P(x,y) = xy$ et $Q(x,y) = y^2$ et on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$P_x(x,y) = y, \qquad P_y(x,y) = x, \qquad Q_x(x,y) = 0 \qquad \text{et} \qquad Q_y(x,y) = 2y.$$

Il est clair que les conditions de Cauchy Riemann sont verifiées seulement pour $(0,0)$ et que les dérivées partielles P_x, P_y, Q_x et Q_y sont continues pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors f est dérivable seulement en $z=0$ et on a :

$$f'(0) = P_x(0,0) + iQ_x(0,0) = 0 + i0 = 0.$$

Exercice 11 :

Soit la fonction $f(z) = |z|^2$. Montrer que la fonction n'est holomorphe au point $z_0 = 0$.

Solution :

On va montrer que la fonction f est dérivable seulement au point $z_0 = 0$.

1. **Méthode** (1) **:**
   Voir **l'exercice 10**.
2. **Méthode** (2) **:**
   Soit $z \in \mathbb{C}$ on peut écrire :
   $$f(z) = |z|^2 = z\overline{z}.$$
   Alors, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = z$. Donc
   $$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Exercice 12 :

Déterminer le domaine D où la fonction $f(z) = (Rez)^2$ soit holomorphe.

Solution :
On peut écrire :

$$f(z) = Re^2 z = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2.$$

Alors,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} = Rez.$$

Donc la fonction f est holomorphe si et seulement si $Rez = 0$, D'où

$$D = \{z \in \mathbb{C}, \quad Rez = 0\}.$$

Exercice 13 :
Soit la fonction f définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{zRez}{|z|}, & \text{si}, \quad z \neq 0 \\ 0, & \text{si}, \quad z = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue en $z=0$ mais n'est pas dérivable en $z=0$.

Solution :

1. La continuité de f en $z=0$:
   On va montrer que $\lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on a :
   $$|f(z) - f(0)| = |f(0) - 0| = \left|\frac{zRez}{|z|}\right| = |Rez| < |z|.$$
   Il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$, donc la fonction f est continue au point $z=0$.
2. La dérivabilité de f en $z=0$, soit $z = x+iy$,
   $$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{zRez}{z|z|} = \lim_{z\to 0}\frac{Rez}{|z|}.$$
   (a) La limite suivant le chemin γ_1 : $y=0$ et $x\to 0^+$,
   $$\begin{aligned}\lim_{z\to_{\gamma_1}0}\frac{Rez}{|z|} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2}}\\ &= 1.\end{aligned}$$
   (b) La limite suivant le chemin γ_2 : $x=0$ et $y\to 0$,
   $$\begin{aligned}\lim_{z\to_{\gamma_2}0}\frac{Rez}{|z|} &= \lim_{y\to 0}\frac{0}{\sqrt{y^2}}\\ &= 0.\end{aligned}$$
   Donc la limite dépend de chemin choisi alors, elle n'existe pas, d'où f n'est pas dérivable au point $z=0$.

Exercice 14 :

Donner un exemple d'une fonction qui verifie les conditions de Cauchy Riemann et qui n'est pas dérivable.

Solution :

Soit la fonction f telle que :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si,} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si,} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ telle que

$$P(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si,} \quad z \neq 0 \\ 0, & \text{si,} \quad z = 0 \end{cases}$$

et
$$Q(x,y) = (0,0) \quad \text{pour tout} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Nous calculons les dérivées partielles premieres des fonctions P et Q au point $(0,0)$.
$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{P(0+h,0)-P(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{P(h,0)-P(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \\ &= 0\end{aligned}$$
et par la même méthode on trouve :
$$\frac{\partial P}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) = 0.$$
Donc les conditions de Cauchy Riemann sont satisfaites au point $(0,0)$, mais la fonction n'est pas dérivable en 0, car elle n'est pas continue, en effet,
soient les chemins $\{\gamma_k, \quad y = kx \quad k \in \mathbb{R}^*\}$, alors, le calcul de la limite $\lim_{z\to 0} f(z)$ suivant le chemin γ_k donne :
$$\begin{aligned}\lim_{z\to_{\gamma_k} 0} f(z) &= \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} \\ &= \frac{k}{1+k^2},\end{aligned}$$
et comme la limite dépend de k alors n'existe pas.

Exercice 15 :
Montrer que la fonction $f(z) = i\sqrt{xy}$, avec $z = x+iy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, satisfait aux équations de Cauchy-Riemann au point $z = 0$ mais n'est pas dérivable en ce point.
Solution :
On a
$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$$
où
$$P(x,y) = 0, \qquad Q(x,y) = \sqrt{xy}.$$
Par définition, on a
$$P_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{P(h,0)-P(0,0)}{h} = 0,$$
$$P_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{P(0,h)-P(0,0)}{h} = 0.$$

Par la même manière on obtient :

$$Q_x(0,0) = 0, \qquad Q_y(0,0) = 0.$$

Donc les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. Cependant, la fonction f n'est pas dérivable en $z = 0$. En effet, pour $z \to 0$ selon les chemins définis par $z = x + iy$ avec $y = kx$, k réel positif, on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} &= \lim_{x\to 0} \frac{i\sqrt{xy}}{x + iy} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{i\sqrt{xkx}}{x + ikx} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{i\sqrt{k}}{k + ik}.
\end{aligned}$$

Cette limite dépend de k, c-à-d, du chemin choisi, donc la limite n'existe pas.
D'où la fonction f n'est pas dérivable en $z = 0$.

Exercice 16 :

Trouver la fonction holomorphe f dont la partie imaginaire est $Q(x, y) = 2x - 2xy$ et $f(i) = 0$.

Solution :

La fonction que nous cherchons est écrite sous la forme :

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

il suffit donc de trouver la fonction P.
Comme la fonction f est holomorphe alors, les dérivées partielles sont existes et continues et vérifieés les conditions de Cauchy-Riemann, donc on a :

1. $P_x(x, y) = Q_y(x, y) = -2x$, alors,
$$P(x, y) = -x^2 + g(y).$$
2. D'une part, on a :
$$P_y(x, y) = g'(y)$$
et d'autre part on a :
$$Q_x(x, y) = 2 - 2y$$
et comme $P_y(x, y) = -Q_x(x, y)$, alors, $g'(y) = -2 + 2y$ et donc
$$g(y) = -2y + y^2 + c, \qquad \text{avec} \quad c \quad \text{constante réelle.}$$
D'où $P(x, y) = -x^2 - 2y + y^2 + c$ et pour déterminer c on utilise la condition $f(i) = 0$.
i.e $-2 + 1 + c + i \times 0 = 0$
qui donne $c = 1$.
Finalement, on trouve : $f(z) = -x^2 - 2y + y^2 + 1 + i2x(1 - y)$.

Exercice 17 :
Trouver la fonction holomorphe f dont la partie imaginaire est $Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ et $f(2) = 0$.

Solution :
Comme la fonction f est holomorphe alors, les dérivées partielles existent et sont continues et vérifient les conditions de Cauchy Riemann, donc on a :
(1)

$$P_y(x,y) = -Q_x(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

donc

$$P(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + g(x).$$

(2) Puisque $P_x(x,y) = Q_y(x,y)$, alors,

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} + g'(x) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

donc $g'(x) = 0$, alors $g(x) = c$ avec c constante, ainsi

$$f(z) = \frac{-x}{x^2+y^2} + c + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{-x+iy}{|z|^2} + c = \frac{-\overline{z}}{z\overline{z}} + c = \frac{-1}{z} + c.$$

Et comme $f(2) = 0$, avec substitution, on trouve $c = \frac{1}{2}$ d'où

$$f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 18 :
Montrer que si $P(x,y)$ est la partie réelle d'une fonction holomorphe f, alors la fonction $xP_x + yP_y$ est la partie réelle de la fonction $zf'(z)$ et qu'elle est harmonique.
Solution :
Comme la fonction $f = P + iQ$ est holomorphe, alors, on a :

$$P_x = Q_y \qquad \text{et} \qquad P_y = -Q_x.$$

Soit $z = x + iy$, par calcul on trouve :

$$zf'(z) = (x+iy)\left(P_x(x,y) + iQ_x(x,y)\right) = xP_x(x,y) - yQ_x(x,y) + i\left(xQ_x(x,y) + yP_x(x,y)\right)$$

et d'après les conditions de Cauchy-Riemann on obtient :

$$zf'(z) = xP_x(x,y) + yP_y(x,y) + i\left(xQ_x(x,y) + yP_x(x,y)\right)$$

et puisque la fonction $zf'(z)$ est holomorphe (car la fonction $z \mapsto z$ est holomorphe et la fonction f' est aussi holomorphe), donc sa partie réelle est une fonction harmonique, i.e la fonction $xP_x + yP_y$ est harmonique.

Chapitre 3

Les fonctions élémentaires

3.1 Fonction exponentielle

Considérons la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

le rayon de la convergence de cette série vaut ∞, car d'après la règle d'Alembert, on a

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = 0.$$

D'où la fonction f est une série qui est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$, i.e, la fonction f est définie sur $\mathbb{C}$.
On pose pour $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\
&= 1 + iy + \frac{1}{2!}(iy)^2 + ... + \frac{1}{k!}(iy)^k + ... \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - ... + (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + ...\right) \\
&+ i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - ... + (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} + ...\right) \\
&= \cos y + i \sin y.
\end{aligned}$$

D'où **la formule d'Euler** : pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Et **on a aussi** $\overline{e^{iy}} = e^{-iy}$, car

$$\overline{e^{iy}} = \overline{\cos y + i \sin y} = \cos y - i \sin y = \cos(-y) + i \sin(-y) = e^{-iy}$$

Il y a des propriétés de la fonction e^z similaires à la fonction e^x ($x \in \mathbb{R}$) et il y a des propriétés différentes.

Proposition 3.1.1 ***[propriétés communes]***

1. $e^0 = 1$.
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3. $(e^z)^n = e^{nz}$.
4. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$
5. $(e^z)' = e^z$

Démonstration 3.1.1 *1. D'après la définition.*

2.

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_1^k}{k!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z_2^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{p=k} \frac{z_1^{k-p}}{(k-p)!} . \frac{z_2^p}{p!} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{p=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{(k-p)!p!} z_1^{k-p} z_2^p \right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{k!} \sum_{p=0}^{p=k} \left(C_k^p z_1^{k-p} z_2^p \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} \\
&= e^{z_1+z_2}
\end{aligned}$$

3. *Par récurrence et en utilisant la propriété* (2).

4. *Soit* $z = x + iy \in \mathbb{C}$ *d'après la propriété* (1) *et* (2) *on trouve :*

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x-iy} \\ &= e^{-x}e^{-iy} \\ &= \frac{1}{e^x}\frac{e^{-iy}e^{iy}}{e^{iy}} \\ &= \frac{1}{e^x}\frac{e^0}{e^{iy}} \\ &= \frac{1}{e^x}\frac{1}{e^{iy}} \\ &= \frac{1}{e^x e^{iy}} \\ &= \frac{1}{e^{x+iy}} \\ &= \frac{1}{e^z}. \end{aligned}$$

5. *Soit* $z = x + iy \in \mathbb{C}$, *d'après la formule d'Euler on a :*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

On pose $P(x, y) = e^x \cos y$ *et* $Q(x, y) = e^x \sin y$. *Alors,*

$$P_x(x, y) = e^x \cos y, \qquad et \qquad Q_y(x, y) = e^x \cos y$$

$$P_y(x, y) = -e^x \sin y, \qquad et \qquad Q_x(x, y) = e^x \sin y.$$

Donc les dérivées P_x, P_y, Q_x *et* Q_y *existent et sont continues sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} P_x(x, y) = Q_y(x, y), \\ P_y(x, y) = -Q_x(x, y). \end{cases}$$

D'où la fonction e^z *est dérivable sur* $\mathbb{C}$ *et on :*

$$\begin{aligned} (e^z)' &= P_x(x, y) + iQ_x(x, y) \\ &= e^x \cos y + ie^x \sin y \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.2 ***[propriétés différentes.]***

1. $e^z \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.
2. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.
3. *La fonction exponentielle est périodique et de période* $2\pi i$.

Démonstration 3.1.2 *1. On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = 0$,*

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1,$$

mais comme e^{-z} est fini, alors

$$e^z e^{-z} = 0.e^{-z} = 0.$$

C'est une contradiction.

2.

$$\begin{aligned}
\overline{e^z} &= \overline{e^x \cos y + ie^x \sin y} \\
&= e^x \cos y - ie^x \sin y \\
&= e^x (\cos y - i \sin y) \\
&= e^x e^{-iy} \\
&= e^{x-iy} \\
&= e^{\overline{z}}
\end{aligned}$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
e^z &= e^x (\cos y + i \sin y) \\
&= e^x (\cos(y + 2\pi k) + i \sin(y + 2\pi k)), \quad k \in \mathbb{Z} \\
&= e^x e^{i(y+2\pi k)} \\
&= e^{x+iy} e^{2\pi ki} \\
&= e^{z+2\pi ki}.
\end{aligned}$$

3.2 Fonction logarithme

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on définit la logarithme de z et on écrit $\ln z$ le nombre complexe $w = \ln z$ qui vérifie $e^w = z$.

Définition 3.2.1 *On définit logarithme du nombre complexe $z \neq 0$ par :*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Remarque 3.2.1 *On remarque que la fonction logarithme est une fonction multiforme, en effet,*

$$\ln z = \{\ln |z| + i (Argz + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}\} \quad avec \quad -\pi < Argz \leq \pi.$$

Définition 3.2.2 *La détermination principale du logarithme d'un nombre complexe non nul est définie par :*

$$Lnz = \ln |z| + iArgz.$$

Remarque 3.2.2 *On remarque que la fonction* $\ln z$ *est une fonction multiforme mais la fonction* Lnz *est une fonction uniforme.*

Exemples 3.2.1
1. *Si le nombre* z *est un réel positif, alors* $Argz = 0$ *et* $|z| = z$, *donc* $Lnz = \ln z$ *(* $\ln z$ *c'est la logarithme de cas réel).*
2. *Si le nombre* z *est un réel négatif, alors* $Argz = \pi$, *donc* $Lnz = \ln |z| + i\pi$
3. $Ln(1+i) = \ln |1+i| + iArg(1+i) = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$

3.3 Fonction puissance

Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction z^a est définie par :

$$z^a = e^{a \ln z}$$

Exemple 3.3.1

$$\begin{aligned} (1+i)^i &= e^{i \ln(1+i)} \\ &= e^{i(\ln|1+i| + iarg(1+i))} \\ &= e^{i\left(\frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)\right)} \\ &= e^{\frac{i}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4} + 2\pi k} \qquad \textit{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.4 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Ce sont des fonctions uniformes définies à partir de l'exponentielle.

3.4.1 Fonctions trigonométriques

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{et} \quad e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

Donc

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \text{et} \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}.$$

Par analogie pour tout $z \in \mathbb{C}$, **on définit** $\sin z$ et $\cos z$ par :

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{et} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

On définit aussi

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{avec} \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\coth z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \text{avec} \quad z \neq k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'après la définitions de $\cos z$ et $\sin z$, on donne le développement en série entière par :

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Soit $z \in \mathbb{Z}$, on a les propriétés suivantes :

1. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
2. $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\quad \cos(z + 2\pi) = \cos z$.
3. $\sin(-z) = -\sin z$, $\quad \cos(-z) = \cos z$.
4. $\overline{\cos z} = \cos(\overline{z})$, $\quad \overline{\sin z} = \sin(\overline{z})$
5. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.
6. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.
7. Soit $z = x + iy$, alors
   (a) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.
   (b) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.

3.4.2 Fonctions hyperboliques

1. **Cosinus hyperbolique :** pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

2. **Sinus hyperbolique :** pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

3. **Tangente hyperbolique :** pour $z \in \mathbb{C}$,

$$thz = \frac{\sinh z}{coshz} \quad , z \neq i(\frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4. **Cotangente hyperbolique :** pour $z \in \mathbb{C}$,

$$cothz = \frac{coshz}{\sinh z}, \quad z \neq k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

D'après la définition de $\cosh z$ et $\sinh z$, on donne le développement en série entière par :

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Il est facile de prouver les relations suivantes :
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$.

1. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
2. $\cosh(-z) = \cosh z, \qquad \sinh(-z) = -\sinh z$.
3. $\cosh(z + i\pi) = -\cosh z, \qquad \sinh(z + i\pi) = -\sinh z$
4. $\cosh(z + i\frac{\pi}{2}) = i \sinh z, \qquad \sinh(z + i\frac{\pi}{2}) = i \coth z$.
5. $\cosh(z + z') = \cosh z \cosh z' + \sinh z \sinh z'$,
$$\sinh(z + z') = \sinh z \cosh z' + \cosh z \sinh z'.$$
6. $(\sinh z)' = \cosh z, \qquad (\cosh z)' = \sinh z$.

La proposition suivante donne le lien entre les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques.

Proposition 3.4.1 *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *on a :*

1.
$$\sin(iz) = i \sinh z.$$

2.
$$\cos(iz) = \cosh z.$$

3.
$$\sinh(iz) = i \sin z.$$

4.
$$\cosh(iz) = \cos z.$$

Exemple 3.4.1 *Calculer* $\cos(2i)$, $\sinh(\frac{\pi}{4}i)$.

1. $\cos(2i) = \cosh 2 = \frac{e^2+e^{-2}}{2}$.
2. $\sinh(\frac{\pi}{4}i) = i \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

3.5 Fonctions trigonométriques et hyperboliques inverses

Définition 3.5.1
1. *La fonction* $f(z) = \arcsin z$ *est appelée la fonction inverse de la fonction* $\sin z$ *i.e* $\sin(f(z)) = z$*. De la même façon, on peut définir* $\arccos z$*,* $\arctan z$*.*
2. *La fonction* $g(z) = argshz$ *est appelée la fonction inverse de la fonction* $\sinh z$ *i.e* $\sinh(g(z)) = z$*. De la même façon, on peut définir* $argchz$*,* $argthz$*.*

On peut exprimer ces fonctions au moyen de la fonction logarithme par :

1. $\arcsin z = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$.
2. $\arccos z = -iLn\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$.
3. $\arctan z = -\frac{i}{2}Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$.
4. $argshz = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$.
5. $argchz = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$.
6. $argthz = \frac{1}{2}Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

3.6 Exercices avec solutions

Exercice 1 :
Calculer les nombres complexes suivants :
$e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $e^{1-3i\pi}$.
Solution :

1. $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$.
2. $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.
3. $e^{1-3i\pi} = ee^{-3i\pi} = e(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)) = -e$.

Exercice 2 :
Calculer les nombres complexes suivants :
$\cos i$, $\sin i$, $\sin(\frac{\pi}{3} + i)$, $\sinh(\frac{\pi}{3}i)$, $\cosh(\frac{\pi}{2}i)$.
Solution :

1. $\cos i = \frac{1}{2}(e^{-1} + e)$.
2. $\sin i = \frac{1}{2i}(e^{-1} - e) = -\frac{1}{2}(e^{-1} - e)i$.

3.
$$\begin{aligned}\sin(\frac{\pi}{3}+i) &= \sin(\frac{\pi}{3})\cos i+\cos(\frac{\pi}{3})\sin i\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(e^{-1}+e)-\frac{1}{4}(e^{-1}-e)i.\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}\sinh(\frac{\pi}{3}i) &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{-\frac{\pi}{3}i}\right)\\ &= i\sin(\frac{\pi}{3})\\ &= i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}\cosh(\frac{\pi}{2}i) &= \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}i}+e^{-\frac{\pi}{2}i}\right)\\ &= \cos(\frac{\pi}{2})\\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. Calculer
   $|\cos z|$, $|\sin z|$, $|\sinh z|$ et $|\cosh z|$.

2. Déduire que les fonctions $\cos z$, $\sin z$, ne sont pas bornées sur $\mathbb{C}$.

Solution :

1. Soit $z = x+iy$.
   (a) On a :

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(x+iy)\\ &= \cos x\cos(iy)-\sin x\sin(iy)\\ &= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y+\sin^2 x\sinh^2 y}\\ &= \sqrt{\cos^2 x\cosh^2 y+(1-\cos^2 x)\sinh^2 y}\\ &= \sqrt{\cos^2 x(\cosh^2 y-\sinh^2 y)+\sinh^2 y}\\ &= \sqrt{\cos^2 x+\sinh^2 y}.\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x+iy)\\ &= \sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)\\ &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y}\\ &= \sqrt{(1-\cos^2 x)\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y}\\ &= \sqrt{\cosh^2 y-\cos^2 x(\cosh^2 y-\sinh^2 y)}\\ &= \sqrt{\cosh^2 y-\cos^2 x}.\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{1}{2}\left(e^z-e^{-z}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{x+iy}-e^{-x-iy}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^x(\cos y+i\sin y)-e^{-x}(\cos y-i\sin y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((e^x-e^{-x})\cos y+i(e^x+e^{-x})\sin y\right)\\ &= \sinh x\cos y+i\cosh x\sin y.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\sinh z| &= \sqrt{\sinh^2 x\cos^2 y+\cosh^2 x\sin^2 y}\\ &= \sqrt{\sinh^2 x\cos^2 y+\cosh^2 x(1-\cos^2 y)}\\ &= \sqrt{\cos^2 y(\sinh^2 x-\cosh^2 x)+\cosh^2 x}\\ &= \sqrt{\cosh^2 x-\cos^2 y}.\end{aligned}$$

(d) Par la même méthode on trouve :

$$|\cosh z| = \sqrt{\cosh^2 x-\sin^2 x}.$$

2. (a) Comme $|\sin z| = \sqrt{\cosh^2 y-\cos^2 x}$, alors pour x fixé et $y \to +\infty$ on trouve :

$$|\sin z| \to +\infty.$$

(b) Comme $|\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y}$, alors pour x fixé et $y \to +\infty$ on trouve :

$$|\cos z| \to +\infty.$$

Exercice 4 :
Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sin(iz) = i\cosh z, \qquad \sinh(z + \frac{\pi}{2}i) = i\cosh z.$$

Solution :

1. $\sin(iz) = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\sinh z.$
2. $$\begin{aligned} \sinh(z + \frac{\pi}{2}i) &= \sinh z \cosh(i\frac{\pi}{2}) + \cosh z \sinh(i\frac{\pi}{2}) \\ &= \sinh z \cos(\frac{\pi}{2}) + \cosh z (i \sin(\frac{\pi}{2})) \\ &= i\cosh z. \end{aligned}$$

Exercice 5 :
Calculer

$$\lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z^3 + 1}, \qquad \lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z^3}.$$

Solution :

1. $$\begin{aligned} \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{3}}}{z^3 + 1} &= \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{3}}} \frac{1}{3z^2} \\ &= \frac{1}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{3}. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z^3} &= \lim_{z \to 0} \frac{1 - \cos z}{3z^2} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{6z} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{6} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 6 :
Montrer que $\sin \overline{z}$ et $\cos \overline{z}$ ne sont pas holomorphes.

Solution :

1. Soit $z = x + iy$, on a :

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x+iy) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x - e^{y}\cos x + ie^{y}\sin x\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left((e^{-y}+e^{y})i\sin x + (e^{-y}-e^{y})\cos x\right) \\
&= i\sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2i}\right) - \cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2i}\right) \\
&= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y,
\end{aligned}$$

   et comme $\sin \overline{z} = \overline{\sin z}$, alors,

$$\sin \overline{z} = \overline{\sin x\cosh y + i\cos x\sinh y} = \sin x\cosh y - i\cos x\sinh y$$

   i.e $\sin \overline{z} = P(x,y) + iQ(x,y)$ avec

$$P(x,y) = \sin x\cosh y \qquad \text{et} \qquad Q(x,y) = -\cos x\sinh y$$

   et on a :

$$P_x = \cos x\cosh y \qquad \text{et} \qquad Q_y = -\cos x\cosh y$$

   et

$$P_y = \sin x\sinh y \qquad \text{et} \qquad Q_x = \sin x\sinh y,$$

   et puisque $P_x \neq Q_y$ et $P_y \neq -Q_x$ donc $\sin \overline{z}$ n'est pas holomorphe.
2. Par la même méthode on montre que $\cos \overline{z}$ n'est pas holomorphe.

Exercice 7 :
Calculer les déterminations principales des logarithmes complexes suivants :
$\ln(-2)$, $\ln(i+1)$, $\ln i$, $\ln i^2$, $\ln(-1+i)$, $\ln(-1+i)^2$, $\ln(1-i)$.
Solution :

1. On a $|-2| = 2$ et $Arg(-2) = \pi$, alors,
$$\ln(-2) = \ln 2 + i\pi.$$
2. On a $|1+i| = \sqrt{2}$ et $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, alors,
$$\ln(i+1) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$
3. On a $|i| = 1$ et $Arg i = \frac{\pi}{2}$, alors,
$$\ln i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}.$$
4. On a $i^2 = -1$, alors $|i^2| = 1$ et $Arg i^2 = \pi$, donc,
$$\ln i^2 = i\pi.$$
5. On a $|-1+i| = \sqrt{2}$ et $Arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, alors,
$$\ln(-1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{3\pi}{4}.$$
6. On a $(-1+i)^2 = -2i$, alors $|(-1+i)^2| = 2$, et $Arg(-1+i)^2 = -\frac{\pi}{2}$, alors,
$$\ln(-1+i)^2 = \ln 2 - i\frac{\pi}{2}.$$
7. On a $|1-i| = \sqrt{2}$ et $Arg(-1+i) = -\frac{1\pi}{4}$, alors,
$$\ln(-1+i)^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - i\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 8 :
Résoudre les equations suivantes dans $\mathbb{C}$:
$$e^z = 4+3i, \qquad e^z = 1-i, \qquad \sin z = 1, \qquad e^{iz} = (-1+i)e^{-iz}.$$
Solution :

1. Soit $z = x + iy$.
$$e^z = 4+3i \Leftrightarrow e^x\cos y + ie^x \sin y = 4+3i,$$
donc
$$\begin{cases} e^x\cos y = 4, \\ e^x \sin y = 3, \end{cases}$$
alors $\tan y = \frac{3}{4}$ donc $y = \arctan\frac{3}{4}$ et $x = \ln\frac{3}{\sin y}$.

2. On a $|1-i| = \sqrt{2}$ et $arg(1-i) = \frac{7\pi}{4}$, donc,
$$1 - i = \sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4}+2k\pi)}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
et comme $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, on obtient :
$$e^z = 1 - i \Leftrightarrow e^x e^{iy} = \sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{4}+2k\pi)}$$
alors
$$e^x = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$
i.e
$$x = \frac{\ln 2}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$
donc,
$$z = \frac{\ln 2}{2} + i(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
3.
$$\begin{aligned} \sin z = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = 2i \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2iz} - 1 = 2ie^{iz} \\ &= \quad e^{2iz} - 2ie^{iz} - 1 = 0. \end{aligned}$$
On pose $e^{iz} = w$, alors l'equation $e^{2iz} - 2ie^{iz} - 1 = 0$ devient $w^2 - 2iw - 1 = 0$ qui possède une solution double $w = i$, alors $e^{iz} = i = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}$, donc,
$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$
4.
$$e^{iz} = (-1+i)e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 + i,$$
donc
$$2iz = \ln(-1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$
d'où
$$z = -\frac{i}{4}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\frac{i}{4}\ln 2 + \frac{3\pi}{8} + k\pi \qquad \text{avec} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 9 :
Déterminer toutes les valeurs de i^i, $1^{\sqrt{2}}$.
Solution :

1. $i^i = e^{iLni} = e^{i\left(i(\frac{\pi}{2}+2\pi k)\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$
2. $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{i2\sqrt{2}\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Chapitre 4

Intégration d'une fonction à variable complexe.

4.1 Les chemins

Définition 4.1.1 *Soit l'application* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *telle que* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ *où* x, y *sont deux fonctions réelles d'une variable reelle.*

1. γ *est dite chemin continu (ou arc continu) si* x *et* y *sont continues.*
2. γ *est dite chemin de classe* C^1 *si* x *et* y *ont des dérivées continues dans* $[a, b]$.
3. $\gamma(a)$ *: L'origine du chemin.*
4. $\gamma(b)$ *: L'extrémité du chemin.*

Définition 4.1.2 *On appelle chemin de classe* C^1 *par morceaux dans* $\mathbb{C}$ *une application* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *continue sur* $[a, b]$ *telle qu'il existe une subdivision* $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m = b$, *de* $[a, b]$ *telle que la restriction de* γ *à* $[t_k, t_{k+1}]$, *pour* $k \in \{0, ..., m-1\}$ *soit de classe* C^1. *C'est-à-dire un chemin formé d'un nombre fini d'arcs de classe* C^1.

Exemples 4.1.1 1. $\gamma_1(t) = t + it^2, \quad t \in [-1, 2]$

2. $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *avec* $\gamma_2(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$,
   $\gamma_2([0, 2\pi]) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} = C(0, 1)$ *c'est le cercle de centre* 0 *et de rayon* 1.
   γ_2 *est un chemin* C^1 *par morceau.*
3. $\gamma_3(t) = \begin{cases} 1 + t - i, & si, \quad -1 \leq t \leq 0 \\ 1 + (t-1)i, & si; \quad 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$
4. $\gamma_4(t) = \begin{cases} t, & si; \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t + (t-1)i, & si; \quad 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t)i, & si. \quad 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$

Voir la figure 4.1.

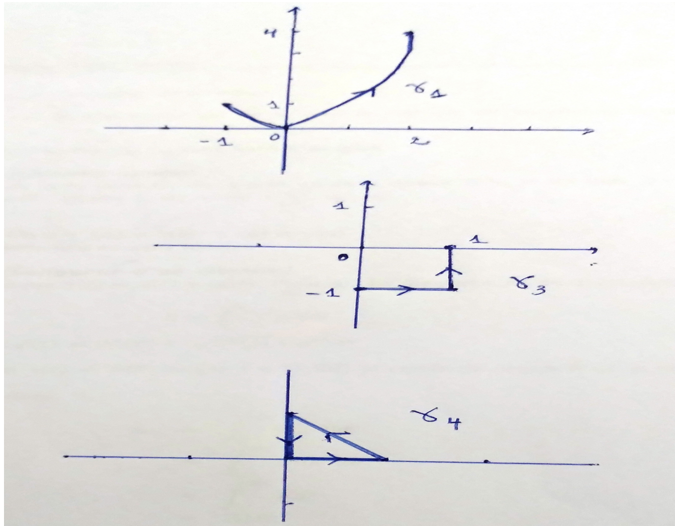

FIGURE 4.1 –

Définition 4.1.3 *Un chemin γ est dit fermé si les extrémités de ce chemin coïncident c'est-à-dire si $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Exemples 4.1.2
1. *Les chemins γ_2, γ_4 sont fermés.*
2. *Les chemins γ_1, γ_3 ne sont pas fermés.*

Définition 4.1.4 *Un chemin fermé qui ne se recoupe pas est dit un chemin fermé simple.*

Exemple 4.1.1 *Les chemins γ_2, γ_3 sont fermés simples.*

Définition 4.1.5 ***[Chemin opposé]***
Soit γ un chemin de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, on appelle chemin opposé à γ, et on note γ^- le chemin de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$.

Remarque 4.1.1 *On a $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$.*
γ^- et le chemin γ sont parcourus en sens inverse.

Définition 4.1.6 ***[Longueur d'un chemin]***
Soit γ un chemin tel que $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$. La longueur de de γ est donnée par :

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|dt,$$

avec $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ et $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$.

Exemple 4.1.2 *Soit $\gamma(t) = Re^{it}$ tel que $t \in [0, 2\pi]$ le cercle de centre 0 et de rayon R. On a $\gamma'(t) = iRe^{it}$, alors,*

$$\begin{aligned} L_\gamma &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|dt \\ &= \int_0^{2\pi} |iRe^{it}|dt \\ &= \int_0^{2\pi} Rdt \\ &= 2\pi R. \end{aligned}$$

Définition 4.1.7 *Une fonction f est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| < M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

4.2 Intégrale curviligne d'une fonction

Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin continu, on partage l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, on note $P_i = \gamma(t_i)$ et Δz_i la longueur du segment P_iP_{i+1} avec $i = 0, ..., n-1$. Voir la figure 4.2.

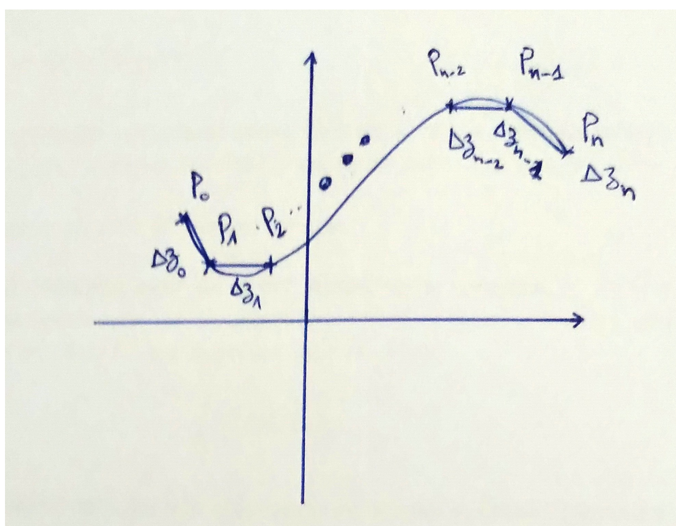

FIGURE 4.2 –

Définition 4.2.1 *Soit γ un chemin continu et f une fonction définie sur γ. L'intégrale curviligne de f le long de γ est la limite si elle existe de*

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(P_i)\Delta z_i.$$

On note cette limite, alors,

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{i=n} f(P_i)\Delta z_i.$$

Proposition 4.2.1 *Soit γ un chemin de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux et soit f une fonction de $\gamma([a,b])$ dans $\mathbb{C}$ continue sur $\gamma([a,b])$.*
Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Exemple 4.2.1 *Soient le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(t) = e^{it}$ et la fonction f telle que $f(z) = \frac{1}{z}$.*
Le chemin γ de classe C^1 donc il est de classe C^1 par morceaux et la fonction f continue sur $\mathbb{C}^*$ donc elle est continue sur $\gamma([a,b]) = C(0,1)$, alors on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt \\ &= 2i\pi.\end{aligned}$$

Exemple 4.2.2 *Soit la fonction $f(z) = y - x - 3ix^2$ où $z = x + iy$ et γ est le segment $[0, 1+i]$, il est clair que $\gamma(t) = t + it$, avec $t \in [0,1]$*

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_0^1 -3it^2(1+i)dt \\ &= -3i(1+i)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 1-i.\end{aligned}$$

Proposition 4.2.2

1. *Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ deux chemins de classe C^1 par morceaux, tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.*
   Alors,
   $$\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$
2. *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et f, g sont deux fonctions continues sur un chemin γ.*
   Alors,
   $$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz.$$

3. *Soit γ un chemin et γ^- le chemin opposé à γ.*
   Alors on a :
$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

Exemple 4.2.3 *Soient les deux chemins γ_1, γ_2 tels que :*

$$\gamma_1(t) = e^{it}, \quad t \in [0, \pi]$$

et

$$\gamma_2(t) = t, \quad t \in [-1, 1]$$

C'est-à-dire

$$\gamma_1([0, \pi]) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \quad et \quad Im(z) \geq 0\}$$

et

$$\gamma_2([-1, 1]) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1 \quad et \quad Im(z) = 0\}.$$

Voir la figure 4.3.

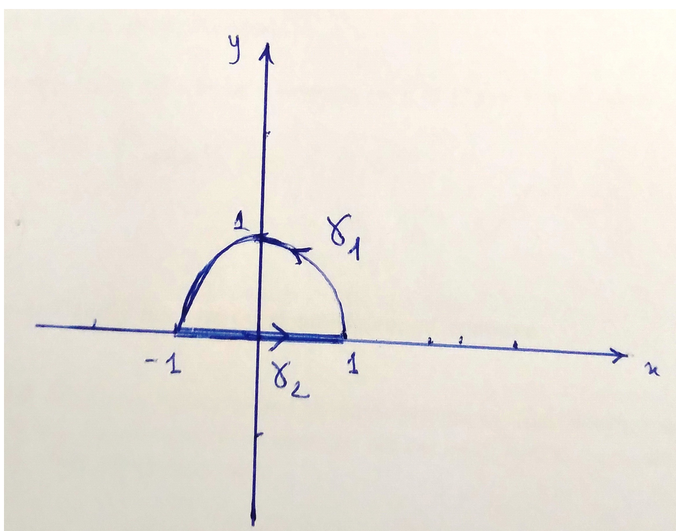

FIGURE *4.3* –

Soit la fonction $f(z) = \overline{z}^2$.
Les chemins γ_1, γ_2 sont de classe C^1 donc le chemin $\gamma_1 \cup \gamma_2$ est de classe C^1 par morceaux et la fonction f est continue sur $\mathbb{C}$ donc elle est continue sur $\gamma_1 \cup \gamma_2$.

Alors on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_0^{\pi} \left(\overline{e^{it}}\right)^2 ie^{it}dt + \int_{-1}^{1} t^2 dt \\
&= \int_0^{\pi} e^{-2it} ie^{it}dt + \int_1^1 t^2 dt, \qquad \overline{e^{it}} = e^{-it}. \\
&= \int_0^{\pi} ie^{-it}dt + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\left[e^{-it}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{3} \\
&= 1 - \cos\pi - i\sin\pi + \frac{2}{3} \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

On peut présenter γ_2 *par* $\gamma_2(t) = (1-t)z_1 + tz_2$, $t \in [0,1]$ *avec* $z_1 = -1$ *et* $z_2 = 1$ *c'est-à-dire* $\gamma_2(t) = 2t - 1$ *et on trouve le même résultat.*

4.3 Théorème de Cauchy

Définition 4.3.1 *Soit* D *un ensemble ouvert,* D *est dit simplement connexe si l'intérieur de tout chemin fermé simple tracée dans* D *est inclus dans* D *c'est-à-dire* D *n'a pas de trous.*
Dans le cas contraire est dit multiplement connexe.
Voir la figure 4.4.

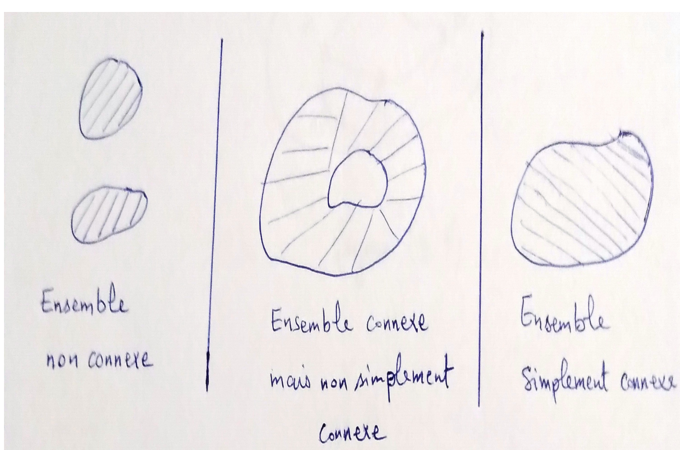

FIGURE *4.4* –

Théorème 4.3.1 ***[Théorème de Cauchy pour un ouvert simplement connexe]*** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert D simplement connexe et soit γ un chemin fermé simple de classe C^1 par morceaux dans D. Alors,*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Corollaire 4.3.1 *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert D simplement connexe et soit γ un chemin inclus dans D d'extrémités A et B, alors l'intégral $\int_\gamma f(z)dz$ ne depend que des extrémités A et B.*
Voir la figure 4.5.

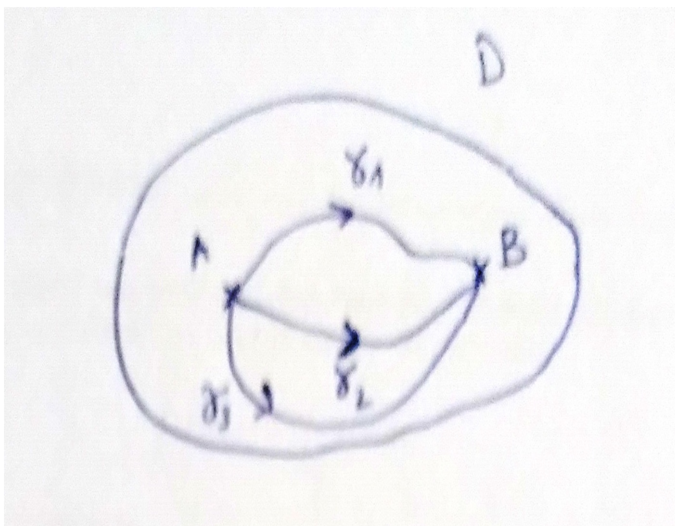

Figure 4.5 –

Théorème 4.3.2 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D. Si A et B sont deux points quelconques de D et si $F'(z) = f(z)$, alors on obtient la formule :*

$$\int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A).$$

Démonstration 4.3.1 *Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin quelconque inclus dans D tel que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$, d'après la définition on a :*

$$\int_A^B f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Et comme

$$\frac{dF(\gamma(t))}{dt} = F'(\gamma(t))\gamma'(t),$$

alors

$$\begin{aligned}\int_A^B f(z)dz &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[F(\gamma(t))\right]dt \\ &= \left[F(\gamma(t))\right]_a^b \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(B) - F(A).\end{aligned}$$

Exemple 4.3.1 *On va calculer l'intégrale :*

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz.$$

Comme la fonction $f(z) = 3z^2 + 2z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $F(z) = z^3 + z^2$, alors

$$\begin{aligned}\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz &= \left[F(z)\right]_{1-i}^{2+i} \\ &= \left[z^3 + z^2\right]_{1_i}^{2+i} \\ &= 7 + 19i.\end{aligned}$$

Théorème 4.3.3 (Théorème de Cauchy pour un ouvert multiplement connexe) *Soit f une fonction holomorphe dans domaine limité par les chemins fermés simples γ, γ_1,..., γ_n qui ne se chevanchent pas tels que les chemin γ_1,..., γ_n sont à l'intérieur de γ et sur ces chemins, alors,*

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Avec γ, γ_1,..., γ_n ont le même sens.

Voir la figure 4.6.

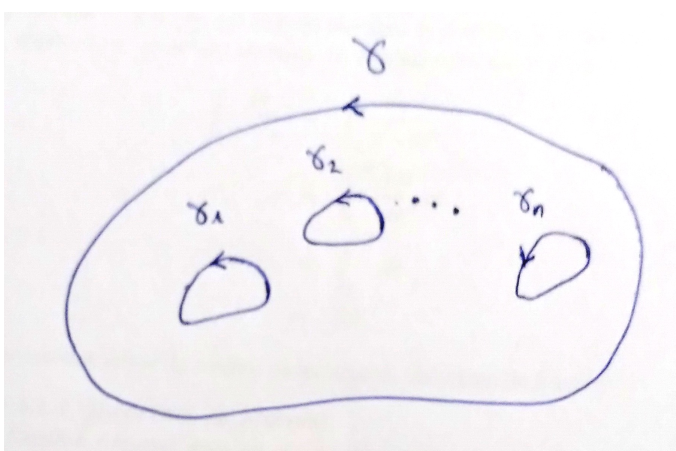

FIGURE 4.6 –

Corollaire 4.3.2 *Soit f une fonction holomorphe dans D limité par deux chemins simples γ, γ_1 où γ_1 est à l'intérieur de γ et sur ces chemins, alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

Avec γ et γ_1 ont le même sens.

Voir figure 4.7.

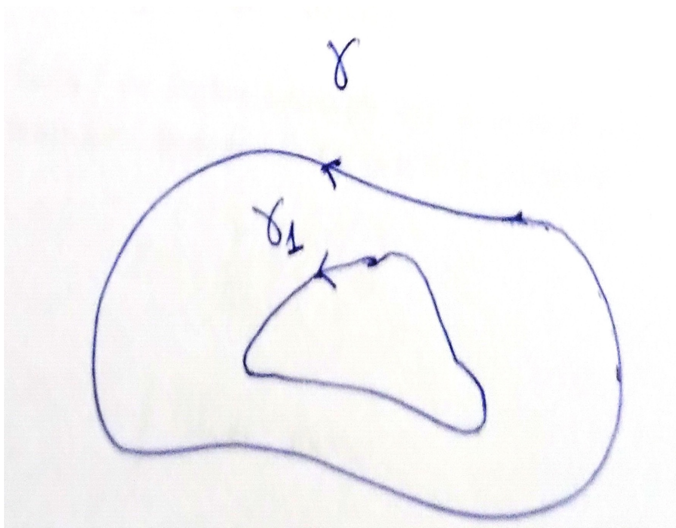

FIGURE 4.7 –

Exemple 4.3.2 $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} =?$
où γest un chemin de classe C^1 fermé simple et a est un point à l'intérieur de γ.
La fonction $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, soit γ_1 le cercle de centre a et de rayon r [c'est-à-dire $\gamma_1(t) = a + re^{it}$ et $t \in [0, 2\pi]$] tel que γ_1 est à l'intérieur de γ. Voir la figure (4.8).
Donc La fonction $f(z) = \frac{1}{z-a}$ est holomorphe dans le domaine D limité par les deux chemins simples γ, γ_1 et sur ces chemins. Le corollaire précédent donne :

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-a} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} idt \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

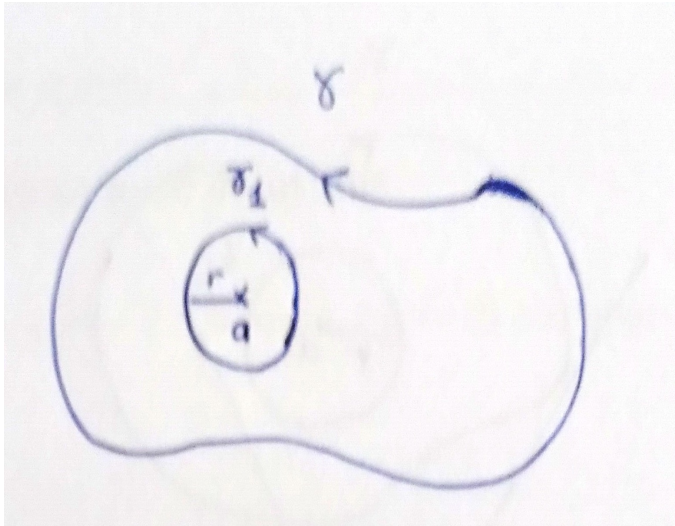

FIGURE 4.8 –

Le théorème suivant donne la version réciproque du théorème de Cauchy.

Théorème 4.3.4 ***[Théorème de Morera]***
Soit f une fonction continue dans un ouvert simplement connexe D si $\int_\gamma f(z)dz = 0$ pour tout chemin γ fermé simple de D, alors la fonction f est holomorphe dans D.

Théorème 4.3.5 ***[Théorème de Liouville]***
Si f est une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est une fonction constante.

4.4 Formule intégrale de Cauchy

Théorème 4.4.1 *Soient f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D, γ un chemin fermé simple dans D et w un point à l'intérieur de γ.*
Alors,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz$$

ou bien

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}dz = 2\pi i f(w).$$

Exemple 4.4.1 *On va calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z+i}dz$ où γ le cercle de centre 0 et de rayon 2.*
On remarque que $f(z) = e^{iz}$ et $w = -i$, comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est simplement connexe et $-i$ est à l'intérieur de γ, alors on a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z+i} &= 2\pi i f(-i)\\ &= 2\pi i e.\end{aligned}$$

Théorème 4.4.2 ***[Formule intégrale de Cauchy généralisée]***
Soient f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D et γ un chemin fermé simple dans D et w un point à l'intérieur de γ.
Alors,

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ou bien

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(w), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 4.4.2 *On va calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}dz$ où γ est le cercle de centre 1 et de rayon 1.*
On a :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}dz &= \int_\gamma \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2(z-1)^2}dz \\ &= \int_\gamma \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz.\end{aligned}$$

On prend $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}$, $w = 1$ et $n = 1$.
Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ alors elle est holomorphe sur D. Donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}dz &= \frac{2\pi i}{1!}f'(1) \\ &= -\frac{\pi^2}{2}i.\end{aligned}$$

Exemple 4.4.3 *On va calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3}dz$ où γ est un chemin tel que $-i$ est à l'intérieur de γ.*
On a $f(z) = z^4 - 3z^2 + 6$ holomorphe sur $\mathbb{C}$, $w = -i$ et $n = 2$, alors on obtient

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z^4-3z^2+6}{(z+i)^3} &= \frac{2\pi i}{2!}f''(-i) \\ &= \pi i[12z^2 - 6]_{z=-i} \\ &= -18\pi i.\end{aligned}$$

4.5 Exercices avec solutions

Exercice 1 :
Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer les deux intégrales suivantes,

1. $\int_\gamma \frac{dz}{z}$,

2. $\int_\gamma (\overline{z})^2 dz$.

solution :

Comme γ le cercle de centre 0 et de rayon 1 c'est-à-dire $\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$, alors $\gamma'(t) = ie^{it}$ donc γ' existe et est continu sur $[0, 2\pi]$ d'où γ est de classe C^1 alors il est de classe C^1 par morceaux.

1. La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est continue sur $\mathbb{C}^*$ donc elle l'est sur $\gamma([0, 2\pi])$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt \\
&= i \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2i\pi.
\end{aligned}$$

2. La fonction $g(z) = \overline{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 + y^2 - 2xyi$ avec $z = x + iy$ est continue sur $\mathbb{C}$ donc elle l'est sur $\gamma([0, 2\pi])$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma g(z)dz &= \int_0^{2\pi} g(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}}^2 ie^{it} dt \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-2it} ie^{it} dt, \qquad \overline{e^{it}} = e^{-it} \\
&= \int_0^{2\pi} ie^{-it} dt \\
&= \left[-e^{-it}\right]_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Soient $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux telle que la fonction f est bornée sur γ.

1. Montrer que :

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq ML.$$

où $M > 0$ et L est la longueur du chemin γ.

2. Appliquer la formule de majoration ci dessus au cas de l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$ où γ est un cercle de centre 0 et de rayon 2.

Solution :

1.

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \\ &= \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \\ &\leq \int_a^b M|\gamma'(t)|dt \\ &= M\int_a^b |\gamma'(t)|dt \\ &= ML\end{aligned}$$

2. Sur le chemin $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(t) = 2e^{it}$, on a $\left|\frac{1}{z^2}\right| = \left|\frac{1}{4e^{2ti}}\right| = \frac{1}{4}$, alors $\frac{1}{4}$ joue le rôle de M. De plus, la longueur de γ est 4π. On obtient donc,

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \pi.$$

Exercice 3 :
Soit z_1, z_2 deux nombres complexes et soit γ le segment $[z_1, z_2]$. Calculer $\int_\gamma e^z dz$.
Solution :
Comme γ est le segment $[z_1, z_2]$, alors $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ avec $t \in [0,1]$ donc $\gamma'(t) = z_2 - z_1$, $t \in [0,1]$. D'où le chemin γ est de classe C^1 par morceaux et comme la fonction $f(z) = e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$ (donc elle est sur $\gamma([0,1])$), alors

$$\begin{aligned}\int_\gamma e^z dz &= \int_0^1 e^{(1-t)z_1+tz_2}(z_2-z_1)dt \\ &= e^{z_1}\left[e^{t(z_2-z_1)}\right]_0^1 \\ &= e^{z_2} - e^{z_1}.\end{aligned}$$

Exercice 4 : Calculer l'intégrale $\int_\gamma z^2 dz$ où γ est le segment de droite reliant le point $z_1 = -i$ au point $z_2 = 2+i$, orienté de z_1 à z_2.
Solution :
On a $\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2 = 2t + (2t-1)i$ avec $t \in [0,1]$. Posons $z = x + iy$, alors,

pour le chemin γ, on a la relation $y = x - 1$. On a alors,

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2 dz &= \int_0^2 (x + (x-1)i)^2 (dx + idy)\\ &= \int_0^2 \left(x^2 + (x-1)^2 + 2ix(x-1)\right)(1+i)dx\\ &= 2 + \frac{14}{3}i.\end{aligned}$$

Exercice 5 : [Théorème de Cauchy.]

Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{7z-6}{z^2-2z} dz$$

avec γ le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Solution :

On a

$$\frac{7z-6}{z^2-2z} = \frac{7z-6}{z(z-2)} = \frac{3}{z} + \frac{4}{z-2}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{7z-6}{z^2-2z} dz &= \int_\gamma \left(\frac{3}{z} + \frac{4}{z-2}\right) dz\\ &= 3\int_\gamma \frac{1}{z} dz + \int_\gamma \frac{4}{z-2} dz.\end{aligned}$$

D'après **l'exercice 1**, on a :

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

et d'après le théorème de Cauchy on obtient :

$$\int_\gamma \frac{4}{z-2} dz = 0,$$

car la fonction $f(z) = \frac{4}{z-2}dz$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ donc elle est holomorphe à l'intérieur de γ et sur γ. Alors,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{7z-6}{z^2-2z} dz &= 3 \times 2\pi i + 0\\ &= 6\pi i.\end{aligned}$$

Exercice 4 : [La formule intégrale de Cauchy.]

Calcules les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ avec $\gamma(t) = a\cos t + ib\sin t$ $t \in [0, 2\pi]$.
2. $\int_{|z|=3} \frac{e^{iz}}{z+i}dz$.
3. $\int_\gamma \frac{\sin 2\pi z}{3z-1}dz$, γ le cercle de centre 0 et de rayon 3.
4. $\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2+1}dz$.
5. $\int_\gamma \frac{z+2}{(z-2)(z+4)^2}dz$, γ le cercle de centre 0 et de rayon 3.
6. $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}dz$, γ le cercle de centre 0 et de rayon 2.
7. $\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz$, γ le cercle de centre 0 et de rayon 3.

Solution :

1. Comme γ est un chemin fermé simple et la fonction $f(z) = 1$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est un domaine simplement connexe et le point $a = 0$ est à l'intérieur de γ, alors d'après la formule intégrale de Cauchy on obtient :
$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$
2. On a le chemin γ donné par $|z| = 3$ c'est le cercle de centre 0 et de rayon 3, la fonction $f(z) = e^{iz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est un domaine simplement connexe et le point $a = -i$ est à l'intérieur de γ. Alors d'après la formule intégrale de Cauchy on obtient :
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z+i}dz &= 2\pi i f(-i)\\ &= 2\pi i e^{i\times(-i)}\\ &= 2\pi i e.\end{aligned}$$
3. On a :
$$\int_\gamma \frac{\sin 2\pi z}{3z-1}dz = \int_\gamma \frac{\frac{1}{3}\sin 2\pi z}{z-\frac{1}{3}}dz.$$
Comme la fonction $f(z) = \frac{1}{3}\sin(2\pi z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le point $a = \frac{1}{3}$ est à l'intérieur de γ, alors d'après la formule intégrale de Cauchy on obtient :
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\sin 2\pi z}{3z-1}dz &= \int_\gamma \frac{\frac{1}{3}\sin 2\pi z}{z-\frac{1}{3}}dz\\ &= \frac{2\pi i}{3}\sin(\frac{2\pi}{3})\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi i.\end{aligned}$$

4. On a :
$$\int_\gamma \frac{z+2}{(z-2)(z+4)^2}dz = \int_\gamma \frac{\frac{z+2}{(z+4)^2}}{(z-2)}dz.$$
La fonction $f(z) = \frac{z+2}{(z+4)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-4\}$ donc elle est holomorphe sur (par exemple) le domaine limité par le cercle de centre 0 et $R = \frac{7}{2}$ qui est un domaine simplement connexe et le point $a = 2$ est à l'intérieur de γ. Alors d'après la formule intégrale de Cauchy on obtient :
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{z+2}{(z-2)(z+4)^2}dz &= \int_\gamma \frac{\frac{z+2}{(z+4)^2}}{(z-2)}dz \\ &= 2\pi i f(2) \\ &= 2\pi i \left[\frac{2+2}{(2+4)^2}\right] \\ &= \frac{2\pi i}{9}.\end{aligned}$$

5. Comme $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{z+i}$ alors,
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{1}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{1}{z+i}dz.$$
La fonction $f(z) = 1$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et les points i et $-i$ sont à l'intérieur de γ, alors l'application de la formule intégrale de Cauchy à la fonction $f(z) = 1$ donne :
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz &= \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{1}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\int_\gamma \frac{1}{z+i}dz \\ &= \frac{1}{2i}2\pi i f(i) - \frac{1}{2i}2\pi i f(-i) \\ &= \frac{1}{2i}2\pi i \times 1 - \frac{1}{2i}2\pi i \times 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

6. On a $f(z) = e^{iz}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ et le point $-i$ est à l'intérieur de γ, alors l'application de la formule intégrale de Cauchy généralisée donne :
$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}dz &= \frac{2\pi i}{1!}f'(-i). \\ &= -2\pi e i.\end{aligned}$$

7. l'application de la formule intégrale de Cauchy pour un domaine multiplement connexe à la fonction $f(z) = \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}$ et les chemins γ, γ_1 et γ_{-1} où

γ_1 le cercle de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$
γ_{-1} le cercle de centre -1 et de rayon $\frac{1}{2}$
donne :

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz = \int_{\gamma_1} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz + \int_{\gamma_{-1}} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz.$$

On va calculer les deux intégrales, on pose
$g(z) = \frac{\cosh z}{(z+1)^3}$ et $h(z) = \frac{\cosh z}{z-1}$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\cosh z}{(z+1)^3}}{z-1}dz \\ &= 2\pi i g(1) \\ &= \pi i\frac{e+e^{-1}}{8}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{-1}} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz &= \int_{\gamma_{-1}} \frac{\frac{\cosh z}{z-1}}{(z+1)^3}dz \\ &= \frac{2\pi i}{2!}h''(-1) \\ &= \pi i\frac{-3e^{-1}-e}{8}.\end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{\cosh z}{(z+1)^3(z-1)}dz &= \pi i\frac{e+e^{-1}}{8} + \pi i\frac{-3e^{-1}-e}{8} \\ &= -\frac{\pi i}{4e}.\end{aligned}$$

Exercice 5 :

En considérant l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ avec $\gamma(t) = a\cos(t)+ib\sin(t)$ avec $t \in [0, 2\pi]$. Démontrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\sin t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}dt = 0.$$

Solution :

Il est clair que le chemin γ est de classe C^1 alors il est de classe C^1 par morceaux et la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est continue sur $\gamma([0, 2\pi])$. On pose $z = a\cos t + ib\sin t$, nous concluons que $dz = (-a\sin t + ib\cos t)dt$, alors

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t} \times \frac{a\cos t - ib\sin t}{a\cos t - ib\sin t} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\cos t\sin t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt \\
&= (b^2 - a^2)\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\sin t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt + iab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}.
\end{aligned}$$

Et comme $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$ d'après **l'exercice** 4 **question** 1, il vient

$$(b^2 - a^2)\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\sin t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt = 0$$

et

$$ab\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = 2\pi.$$

D'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$$

et

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t\sin t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} dt = 0.$$

Exercice 6 :

Calculer les deux intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\cos 2t dt$.

Solution :

1. On pose $z = e^{it}$ et γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Donc $dz = ie^{it}dt$ et $dt = \frac{dz}{iz}$. Comme $z = e^{it} = \cos t + i\sin t$ et $z^{-1} = e^{-it} = \cos t - i\sin t$, alors $\cos t = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, donc, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt &= \int_\gamma \left[\frac{1}{2}(z+z^{-1})\right]^4 \frac{dz}{iz} \\
&= \frac{1}{16i}\int_\gamma \frac{1}{z}\left(z^4+4z^3z^{-1}+6z^2z^{-2}+4zz^{-3}+z^{-4}\right)dz \\
&= \frac{1}{16i}\int_\gamma \frac{1}{z}\left(z^4+4z^2+6+\frac{4}{z^2}+\frac{1}{z^4}\right)dz \\
&= \frac{1}{16i}\int_\gamma \left(z^3+4z+\frac{6}{z}+\frac{4}{z^3}+\frac{1}{z^5}\right)dz \\
&= \frac{1}{16i}\left(\int_\gamma \left(z^3+4z\right)dz + 6\int_\gamma \frac{dz}{z}+\int_\gamma \frac{dz}{z^3}+\int_\gamma \frac{dz}{z^5}\right).
\end{aligned}$$

Comme la fonction $f(z) = z^3+4z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors d'après le théorème de Cauchy, on obtient :

$$\int_\gamma \left(z^3+4z\right)dz = 0$$

et la formule intégrale de Cauchy pour la fonction $f(z) = 1$ et le point $a = 0$ donne :

$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i f(0) = 2\pi i, \qquad n = 0, \quad f(0) = 1.$

$\int_\gamma \frac{dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = 0 \qquad n = 2 \quad f''(z) = 0.$

$\int_\gamma \frac{dz}{z^5} = \frac{2\pi i}{4!}f^{(4)}(0) = 0, \qquad n = 4 \quad f^{(n)}(z) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 0.$

D'où

$$\int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \frac{1}{16i} \times 6 \times 2\pi i = \frac{3\pi}{4}.$$

2. Il est facile de remarquer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cos 2t dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cos 2t dt = \frac{1}{2}Re\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{2it}\cos^4 t dt\right).$$

On pose $z = e^{2it}$, alors $dz = 2ie^{2it}dt = 2izdt$ et puisque t varie dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $2t$ varie dans $[-\pi, \pi]$, donc le point z parcourt le cercle de centre 0 et de rayon 1. Comme $z = e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t$ on peut conclure $\cos 2t = \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\cos 2t &= \cos^2 t - \sin^2 t \\
&= \cos^2 t - (1-\cos^2 t) \\
&= 2\cos^2 t - 1,
\end{aligned}$$

alors
$$\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2},$$
donc
$$\cos^4 t = \left(\frac{\cos 2t + 1}{2}\right)^2,$$
et d'après les calculs on trouve :
$$\cos^4 t = \left(\frac{\cos 2t + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \frac{1}{2}(z + z^{-1})}{2}\right)^2 = \frac{1}{16z^2}(z+1)^4.$$
D'où
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cos 2t dt &= \frac{1}{2} Re\left(\int_{|z|=1} \frac{z(z+1)^4}{16z^2}\frac{dz}{2iz}\right)\\ &= \frac{1}{2} Re\left(\frac{1}{32i}\int_{|z|=1}\frac{(z+1)^4}{z^2}dz\right),\end{aligned}$$
l'application de la formule intégrale de Cauchy à la fonction $f(z) = (z+1)^4$ ($f'(z) = 4(z+1)^3$) et le point $a = 0$ qui est à l'intérieur du cercle $|z| = 1$. On obtient :
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cos 2t dt &= \frac{1}{2} Re\left(\frac{1}{32i}\frac{2\pi i}{1!}f'(0)\right)\\ &= \frac{1}{2} Re\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

Exercices supplémentaires :

Exercice 7 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_\gamma \overline{z} dz$ avec γ le chemin défini sur $[0, \pi]$ par $\gamma(t) = e^{it}$.
2. $\int_\gamma \overline{z} dz$ avec γ est le segment de droite $[-i, i]$.
3. $\int_\gamma (z+1) dz$ avec γ le chemin défini sur $[0, 1]$ par $\gamma(t) = (1+i)t$.
4. $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ avec γ le chemin défini sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $\gamma(t) = e^{it}$.

Indication : On pose comme un changement de variable $u = \sin t$.

Exercice 8 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{|z|=1} \frac{z+1}{z^4+2iz^3} dz$.
2. $\int_{|z+i|=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$.

3. $\int_{|z|=\frac{1}{2}} (z^2 + e^z)\, dz$.

Exercice 9 :

En utilisant la formule intégrale de Cauchy. Calculer les intégrales :

$$\int_{\gamma_k} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz, \qquad k = 1, 2, 3,$$

avec

1. $\gamma_1 : |z - 2| = 1$.
2. $\gamma_2 : |z - 2| = 3$.
3. $\gamma_3 : |z - 2| = 5$.

Chapitre 5

Série de Laurent et Théorème des Résidus

5.1 Série de Laurent

Définition 5.1.1 *On appelle série de Laurent une série de la forme :*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n = ... + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ...$$

Théorème 5.1.1 *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, R_1 et R_2 deux réels tels que $R_1 > R_2 \geq 0$ et $D(z_0, R_1, R_2)$ la couronne :*

$$D(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C}, \quad R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Soit f une fonction de D dans $\mathbb{C}$ holomorphe sur D.
Alors f est développable en série de Laurent en z_0 c'est-à-dire :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Et pour tout $r \in]R_1, R_2[$, on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

où γ le cercle de centre z_0 et de rayon r.

Voir la figure 5.1.

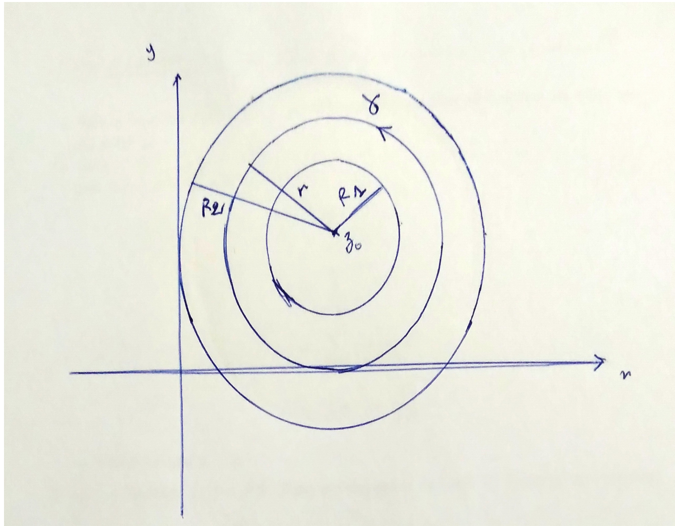

FIGURE 5.1 –

Exemples 5.1.1

1. Soit la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, f est développable en série de Laurent au voisinage du point $z_0 = 0$.
   On a :
   $$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}, \quad u \in \mathbb{C}.$$
   Soit $u = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}^*$, alors,
   $$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^n} \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^{-n} \\ &= \sum_{m\leq 0} \frac{1}{(-m)!} z^m \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots \end{aligned}$$
   on remarque que $a_{-1} = 1$
2. Soit la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, f est développable en série de Laurent au voisinage de 0.
   On a :
   $$\sin z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \text{pour} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k$$

telle que :

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & \text{si}\,; \quad k = 2n, \quad n \geq 0 \\ 0, & \text{si}\,; \quad k = 2n+1 \quad n \geq 0 \\ 0, & \text{si.} \quad k < 0. \end{cases}$$

3. Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ et la couronne $D(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$.
La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-1, -3\}$, alors elle est sur la couronne $D(0, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Donc f est développable en série de Laurent au point $z_0 = 0$.
On a $\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right)$, On sait que $\frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n$ pour $|z| < 1$, alors,
–

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z} &= \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^n}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc pour $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$ c'est-à-dire $|z| > 1$ on a :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}}$$

et

–

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3^n}z^n, \quad \left|\frac{z}{3}\right|<1 \\
&= \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}z^n.
\end{aligned}$$

Donc pour $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$ c'est-à-dire $|z| < 3$, on a :

$$\frac{1}{z+3} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}z^n.$$

D'où

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}z^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + ... - \left(\frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} - ...\right)\right) \\
&= ... - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + ...
\end{aligned}$$

On remarque que $a_{-1} = \frac{1}{2}$.

5.2 Les points singuliers

Définition 5.2.1 *On dit que le point z_0 est un point singulier de la fonction f (ou une singularité de f) si la fonction est holomorphe au voisinage de z_0 à l'exception en z_0.*

Exemple 5.2.1
1. *Soit la fonction $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$, f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ donc $z = -1$ est un point singulier de la fonction f.*
2. *Soit la fonction $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$, f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$ donc $z = -i$, $z = i$ sont des points singuliers de la fonction f.*
3. *La fonction $f(z) = e^z$ ne possède aucun point de singularité.*

Définition 5.2.2 *Le point z_0 est appelé singularité isolée, si l'on peut trouver un cercle $|z| = r$ ne contenant pas d'autre point singulier que z_0, si l'on ne peut trouver un tel cercle $|z| = r$ on dit que z_0 est une singularité non isolée.*

Exemple 5.2.2 *Soit la fonction* $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}$, *Les points singuliers de* f *sont*

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

1. *Les points* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ *sont singuliers isolés.*
2. *Le point* 0 *est un point singulier non isolé.*

5.2.1 Classification des singularités

Il est possible de classer les singularités isolées d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent.
Soit f une fonction developpable en série de Laurent en z_0 c'est-à-dire :

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

– **La partie** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

est appelée **la partie analytique** de la série de Laurent.

– **La partie** :

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n$$

est appelée **la partie principale** de la série de Laurent.

1. **Si** f **a la forme** :

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n$$

dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par :

$$\frac{a_{-1}}{z-z_0} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + ... + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, \qquad \text{avec} \qquad a_{-n} \neq 0,$$

alors, $z = z_0$ est **appelé un pôle d'ordre** n.

Remarque 5.2.1 *(a) Si* $n = 1$, *alors,* $z = z_0$ *est appelé un pôle simple.*

(b) Si $z = z_0$ *est un pôle de la fonction* f, *alors,* $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

(c) Le coefficient a_{-1} *dans la série de Laurent est dit **résidus** de la fonction* f *au point* z_0.

Exemples 5.2.1 *(a) Soit la fonction* $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$*, le point* 0 *est un pôle simple (d'ordre* 1*), car :*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z^2} \\ &= \frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \qquad 0 < |z| < \infty \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{z^3}{120} - ... \end{aligned}$$

(b) Soit la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$*, le point* 0 *est un pôle d'ordre* 3*, car*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z^4} \\ &= \frac{1}{z^4}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \qquad 0 < |z| < \infty \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-3} \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} - \frac{z^3}{7!} + ... \end{aligned}$$

2. **Si f a la forme**

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$$

dans laquelle la partie principale est nulle c'est-à-dire,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Alors, $z = z_0$ est appelé **singularité apparente** de f.

Remarque 5.2.2 *Si* $z = z_0$ *est un point singulier apparente de la fonction* f*, alors la limite* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *existe.*

Exemple 5.2.3 *Soit la fonction* $f(z) = \frac{\sin z}{z}$*,* 0 *est un* ***singularité apparente***

de f car

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z} \\ &= \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \qquad 0<|z|<\infty \\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}, \qquad 0<|z|<\infty \\ &= 1-\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{5!}z^4-... \qquad 0<|z|<\infty \end{aligned}$$

et on a :

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0}\left(1-\frac{1}{6}z^2+\frac{1}{5!}z^4-...\right) = 1$$

3. **Si la partie principale** du développement de Laurent de la fonction possède une infinité de termes, alors, le point $z = z_0$ est appelé une **singularité essentielle** de f.

Remarque 5.2.3 *$z = z_0$ est une singularité essentielle de la fonction f si et seulement si, la limite $\lim_{z\to z_0} f(z)$ n'existe pas.*

Exemples 5.2.2 *1. Soit la fonction $f(t) = e^{\frac{1}{z}}$, 0 est une singularité essentielle de f car d'après l'exemple (5.1), 1. on a :*

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + ...$$

et donc

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \infty.$$

2. Soit la fonction $g(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$, 1 est une singularité essentielle car la limite $\lim_{z\to 1} g(z)$ n'existe pas. En effet,

*(a) Soit le chemin γ_1 : ($y = 0$ **et** $x \to 1^+$), alors,*

$$\lim_{\gamma_1} g(z) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty.$$

*(b) Soit le chemin γ_2 : ($y = 0$ **et** $x \to 1^-$), alors,*

$$\lim_{\gamma_2} g(z) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0.$$

5.3 Le théorème des résidus

Définition 5.3.1 *Le coefficient a_{-1} dans la série de Laurent au voisinage de z_0 de la fonction f est dit* ***résidus*** *de la fonction f au point z_0, ce coefficient est noté $Res(f, z_0)$.*

Exemple 5.3.1 *D'après l'exemple (5.1)* 1. *on a :*

$$Res(e^{\frac{1}{z}}, 0) = 1.$$

5.3.1 Calcule des résidus

On peut calculer le résidu sans passer par le développement de Laurent :

1. **Pôle simple** : Si z_0 est un pôle simple (d'ordre 1), alors,

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Exemple 5.3.2 *Soit la fonction $f(z) = \frac{z+1}{(z+2)(z-1)}$ et $z_0 = 1$, comme 1 est un pôle simple alors,*

$$\begin{aligned} Res(f, 1) &= \lim_{z \to 1} (z-1) f(z) \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{z+1}{z+2} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. **Pôle d'ordre n :** Si z_0 est un pôle d'ordre n, alors,

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z - z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)}.$$

Exemple 5.3.3 *Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{z^2}+z^4}{(z-3)^2}$ et $z_0 = 1$, comme 3 est un pôle d'ordre 2 alors,*

$$\begin{aligned} Res(f, 3) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to 3} \left((z-3)^2 f(z)\right)' \\ &= \lim_{z \to 3} (e^{z^2} + z^4)' \\ &= \lim_{z \to 3} (2z e^{z^2} + 4z^3) \\ &= 6e^9 + 108. \end{aligned}$$

3. **Théorème 5.3.1** *Soient P et Q deux fonctions holomorphes en z_0 . Si z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ et $Q'(z_0) \neq 0$, alors,*

$$Res(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Exemple 5.3.4 *Soit la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$, on a :*

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i \quad \vee z = -i,$$

donc $-i$, i sont deux pôles simples.
On pose $P(z) = e^{iz}$ et $Q(z) = z^2 + 1$, comme $P(-i) = e \neq 0$, $P(i) = e^{-1} \neq 0$ et $Q'(z) = 2z$ ($Q'(i) = 2i$ et $Q'(-i) = -2i$), alors,

(a) $Res(f, i) = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{-i}{2e}$.

(b) $Res(f, z_0) = \frac{e}{-2i} = \frac{ie}{2}$.

Théorème 5.3.2 ***[Théorème des Résidus]***
Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'un chemin γ fermé simple et sur γ sauf en un nombre fini de points z_1, z_2,...,z_n, alors,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_i),$$

où les points z_1, z_2,...,z_n sont à l'intérieur de γ.

Voir la figure 5.2.

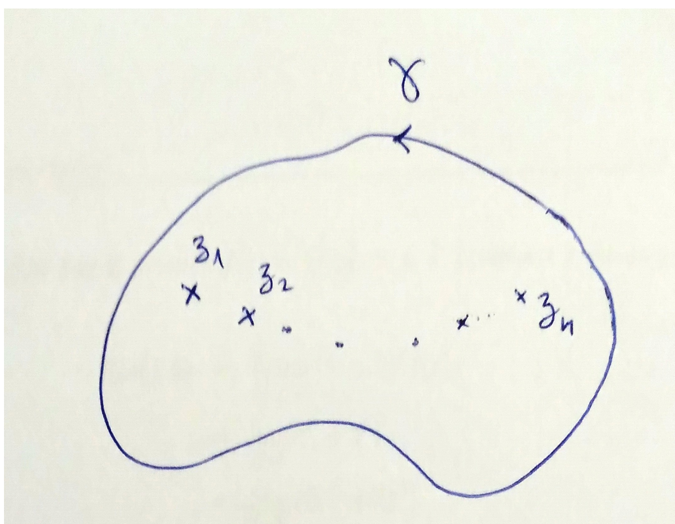

FIGURE 5.2 –

Exemples 5.3.1 *1. $\int_{|z|=2} \frac{z^3+1}{z^2+1}dz$, on a $f(z) = \frac{z^3+1}{z^2+1} = \frac{P(z)}{Q(z)}$ la fonction f possède deux pôles simples i et $-i$, alors,*

(a) $Res(f, i) = \frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{1-i}{2i} = -\frac{1+i}{2}$,

(b) $Res(f, -i) = \frac{P(-i)}{Q'(-i)} = \frac{1+i}{-2i} = \frac{-1+i}{2}$.

Comme i et $-i$ sont à l'intérieur de chemin $|z| = 2$ i.e cercle de centre 0 et de rayon 2, alors

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^3+1}{z^2+1}dz &= 2\pi i\left(Res(f,i) + Res(f,-i)\right)\\ &= 2\pi i\left(-\frac{1+i}{2} + \frac{-1+i}{2}\right)\\ &= -2\pi i.\end{aligned}$$

2. $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{z^3+1}{z^2+1}dz = 0$ *car la fonction* $f(z) = \frac{z^3+1}{z^2+1}$ *est holomorphe à l'intérieur de chemin* $|z| = \frac{1}{2}$.

5.3.2 Application du théorème des résidus

1. **Calcul d'intégrale sous forme $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ où R est une fonction rationnelle.**
L'idée principale est de convertir l'intégrale $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ en une intégrale complexe sur un chemin qui est le cercle unité $|z| = 1$.
Pour cela on pose $z = e^{it}$ avec $y \in [0, 2\pi]$, on obtient

$$\sin t = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \qquad \cos t = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad dt = -i\frac{dz}{z}.$$

Donc L'intégrale devient :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_{|z|=1} -iR\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{z}.$$

Exemples 5.3.2 *(a)*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3\sin t}.$$

L'intégrale I devient :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin t} &= \int_{|z|=1} -\frac{idz}{z\left(5 + 3\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)}\\ &= \int_{|z|=1} -\frac{idz}{\left(5z + 3\frac{z^2-1}{2i}\right)}\\ &= \int_{|z|=1} \frac{-idz}{\frac{1}{2i}\left(10iz + 3z^2 - 3\right)}\\ &= \int_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2 + 10iz - 3}\\ &= \int_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)}dz.\end{aligned}$$

Les deux nombres complexes $\frac{-i}{3}$, $-3i$ sont deux pôles simples de la fonction $f(z) = \frac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ et $\frac{-i}{3}$ est le seul pôle de f qui appartient à l'intérieur de cercle $|z| = 1$ et on a :

$$\begin{aligned} Res(f, \frac{-i}{3}) &= \lim_{z\to\frac{-i}{3}} (z + \frac{i}{3})f(z) \\ &= \lim_{z\to\frac{-i}{3}} \frac{2}{3(z+3i)} \\ &= \frac{2}{3(\frac{-i}{3}+3i)} \\ &= -\frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème des résidus on trouve :

$$\int_{|z|=1} \frac{2}{(3z+i)(z+3i)}dz = 2\pi i Res(f, \frac{-i}{3}) = 2\pi i \times \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $I = \frac{\pi}{2}$.

(b)

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{5+3\cos t}$$

L'intégrale J devient :

$$J = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{3(z+3)(z+\frac{1}{3})},$$

et comme $-\frac{1}{3}$ est le seul pôle qui appartient à l'intérieur de cercle $|z| = 1$, alors, on a :

$$J = -2i \times 2\pi i Res\left(\frac{1}{3(z+3)(z+\frac{1}{3})}, -\frac{1}{3}\right) = -2i \times 2\pi i \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

2. **Calcul d'intégrale sous forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx$**

Lemme 5.3.1 *Soit f une fonction avec $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$ sur le demi cercle Γ de centre 0 et de rayon R i.e ($z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$) avec M, k sont des constantes telles que $M, k > 0$. Alors,*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma} f(z)e^{imz}dz = 0.$$

Exemple 5.3.5 *Soit l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$.
On considère l'intégrale $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz$ *où* γ *désigne le chemin fermé formé du segment* $[-R, R]$ *et le demi cercle* Γ *de centre* 0 *et de rayon* R.
le point i *est le seul pôle simple qui est à l'intérieur de* γ, *et on a :*

$$Res(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i) = \lim_{z \to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Donc

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \times \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e},$$

d'autre part

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}$$

ou

$$\int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^2+1} dx + i \int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x^2+1} dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e},$$

comme la fonction $\frac{\sin x}{x^2+1}$ *est impaire et la fonction* $\frac{\cos x}{x^2+1}$ *est paire, alors on a*

$$\int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x^2+1} dx = 0$$

et

$$\int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = 2 \int_0^{+R} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$$

donc

$$2 \int_0^{+R} \frac{\cos x}{x^2+1} dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}$$

et puisque pour $z = Re^{it}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z^2+1} \right| &= \frac{1}{|R^2 e^{2it} + 1|} \\ &\leq \frac{1}{|R^2 e^{2it}| - |1|} \qquad |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| \\ &= \frac{1}{R^2 - 1} \\ &= \frac{2}{R^2} \qquad R > 2 \end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 0.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

3. **Calcul d'intégrale sous forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$:**

   Théorème 5.3.3 *Soit f une fonction holomorphe dans le demi plan supérieur i.e ($Imz > 0$) et continue sur la droite réelle i.e ($Imz = 0$) à l'exception en un nombre finis de pôles z_1, z_2,..., z_n et si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ alors,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Exemple 5.3.6 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$.
On considère l'intégrale $\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz$ où γ désigne le chemin fermé formé du segment $[-R, R]$ et le demi cercle Γ de centre 0 et de rayon R.
On pose $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, alors la fonction f possède deux pôles simples $-i$ et i. Le pôle simple i est le seul qui est à l'intérieur de Γ et on a :

$$Res(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2},$$

donc $\int_\gamma \frac{1}{z^2+1} = 2\pi i Res(f, i) = 2\pi i \times \frac{-i}{2} = \pi$,
d'autre part

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz = \int_\Gamma \frac{1}{z^2+1}dz + \int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^2+1}dx = \pi,$$

et comme $\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} z\frac{1}{z^2+1} = 0$, *alors* $\int_\Gamma \frac{1}{z^2+1}dz = 0$.
D'où

$$\int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^2+1}dx = \pi.$$

5.4 Exercices avec solutions

Exercice 1 :

1. Donner le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{\cosh z}{z^3}$ dans le couronne

$$D = \{z \in \mathbb{C}, \quad 0 < |z| < +\infty\}.$$

2. Utiliser ce développement pour évaluer l'integrale suivante :

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^3}dz$$

   où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

solution :

On a $\cos z = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ pour $|z| < +\infty$ et comme $\cosh z = \cos(iz)$, alors pour $|z| < +\infty$ on trouve :

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cos(iz)\\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Donc pour $0 < |z| < +\infty$ on obtient :

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\cosh z}{z^3}\\ &= \frac{1}{z^3}\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n-3}}{(2n)!}\\ &= z^{-3} + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4!}z + \frac{1}{6!}z^3 + ...\end{aligned}$$

on remarque que $a_{-1} = \frac{1}{2}$ et comme $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$ où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 1 donc

$$a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz.$$

D'où

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi a_{-1} = i\pi.$$

Exercice 2 :

1. Donner le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$.
   (a) Dans le domaine $D_1 = \{z \in \mathbb{C},\quad 0 < |z| < 1\}$
   (b) Dans le domaine $D_2 = \{z \in \mathbb{C},\quad 0 < |z-1| < 1\}$
2. Donner le développement de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-2)}$ Dans le domaine $D = \{z \in \mathbb{C},\quad 1 < |z| < 2\}$.

solution :

1. Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$.

(a) Pour $z \in D_1 = \{z \in \mathbb{C}, \quad 0 < |z| < 1\}$:
On remarque que $z_0 = 0$, et on a $\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n\geq 0} z^n$ pour $|z| < 1$.
Donc pour $0 < |z| < 1$ on trouve :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}.\frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} z^n \\ &= -\sum_{n\geq 0} z^{n-1}. \end{aligned}$$

(b) Pour $z \in D_2 = \{z \in \mathbb{C}, \quad 0 < |z-1| < 1\}$:
On remarquer que $z_0 = 1$ et pour $|z-1| < 1$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1-(1-z)} \\ &= \sum_{n\geq 0}(1-z)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n, \end{aligned}$$

et donc pour $0 < |z-1| < 1$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}.\frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1}.\sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n(z-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-2)}$, pour le développement pour $1 < |z| < 2$, on remarque que $z_0 = 0$ et on a :

$$\frac{1}{(z+i)(z-2)} = \frac{a}{z+i} + \frac{b}{z-2},$$

alors,

$$1 = a(z-2) + b(z+i).$$

On prend $z = 2$ on trouve $b(2+i) = 1$ donc $b = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5}$.
On prend $z = -i$ on trouve $a(-i-2) = 1$ donc $a = -\frac{2-i}{5} = -b$.
D'où

$$f(z) = \frac{2-i}{5}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+i}\right),$$

et on a :

– pour $|z| < 2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n}\\ &= -\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

– pour $|z| > 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+i} &= \frac{1}{z(1-(-\frac{i}{z}))}\\ &= \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-\frac{i}{z})^n\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-i)^n}{z^{n+1}}.\end{aligned}$$

Finalement, pour $1 < |z| < 2$, on obtient :

$$f(z) = \frac{2-i}{5}\left[-\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n\geq 0}\frac{(-i)^n}{z^{n+1}}\right].$$

Exercice 3 : Calculer :

1. $Res\left[\frac{\sin z}{z^2}, 0\right]$.
2. $Res\left[\frac{e^z}{(z-1)^2}, 1\right]$.
3. $Res\left[\frac{z}{(z+1)(z+i)^2(z-i)^2}, -1\right]$.

Solution :

1. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\sin z\\ &= \frac{1}{z^2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1}\\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + ...\end{aligned}$$

donc $Res\left[\frac{\sin z}{z^2}, 0\right] = 1$

2. Pour la fonction $\frac{e^z}{(z-1)^2}$, 1 est un pôle d'ordre deux, donc

$$\begin{aligned} Res\left[\frac{e^z}{(z-1)^2},1\right] &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2},1\right]' \\ &= \lim_{z\to 1} e^z \\ &= e. \end{aligned}$$

3. Pour la fonction $\frac{z}{(z+1)(z+i)^2(z-i)^2}$, -1 est un pôle d'ordre 1 (simple) donc

$$\begin{aligned} Res\left[\frac{z}{(z+1)(z+i)^2(z-i)^2},-1\right] &= \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z}{(z+1)(z+i)^2(z-i)^2} \\ &= \lim_{z\to -1}\frac{z}{(z+i)^2(z-i)^2} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 4 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{|z|=2}\frac{zdz}{(z-1)^2(z-3)}$.
2. $\int_{|z|=5}\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}$.

Solution :

1. La fonction $f(z)=\frac{z}{(z-1)^2(z-3)}$
   possède deux pôles :
   1 pôle d'ordre deux qui est à l'intérieur de $\gamma : |z|=2$ (cercle de centre 0 et de rayon 2)
   et 3 pôle simple qui est à l'extérieur de $\gamma : |z|=2$. Voir figure (5.3)
   et on a :

$$\begin{aligned} Res\left[,\frac{z}{(z-1)^2(z-3)},1\right] &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z}{(z-1)^2(z-3)}\right]' \\ &= \lim_{z\to 1}\left[\frac{z}{(z-3)}\right]' \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{-3}{(z-3)^2} \\ &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2}\frac{z}{(z-1)^2(z-3)}dz &= 2\pi i Res\left[\frac{z}{(z-1)^2(z-3)},1\right] \\ &= 2\pi i\times\frac{-3}{4} \\ &= -\frac{3}{2}\pi i. \end{aligned}$$

2. π est un pôle d'ordre 3 qui est à l'intérieur de $\gamma : |z| = 5$ et on a :

$$\begin{aligned} Res\left[\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}, \pi\right] &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to\pi}\left[(z-\pi)^3\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}\right]'' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to\pi}\left[e^{iz}\right]'' \\ &= \frac{1}{2}\lim_{z\to\pi}(-e^{iz}) \\ &= \frac{1}{2}(-e^{i\pi}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{|z|=5}\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3} = 2\pi i \times \frac{1}{2} = \pi i.$$

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-2\cos t+\sin t}$.
2. $J = \int_0^{2\pi}\frac{\cos t dt}{5+\cos t}$.

Solution :

1. Soit $z = e^{it}$ avec $t \in [0, 2\pi]$, alors on a :

$$\cos t = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad \sin t = \frac{z^2-1}{2iz}, \qquad dt = -i\frac{dz}{z},$$

donc l'intégrale devient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1}\frac{-i\frac{dz}{z}}{3+2\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^2-1}{2iz}} \\ &= \int_{|z|=1}\frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-(1+2i)} \\ &= \int_{|z|=1}\frac{2dz}{(z-z_1)(z-z_2)}, \end{aligned}$$

où $z_1 = -2-i$ et $z_2 = \frac{2-i}{5}$ sont les solutions de l'equation :

$$(1-2i)z^2+6iz-(1+2i) = 0$$

et on a z_1 est à l'extérieur de $\gamma : |z| = 1$ et z_2 est à l'intérieur de γ et comme

$$\begin{aligned} Res\left[\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_2\right] &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)} \\ &= \lim_{z\to z_2}\frac{2}{(z-z_1)} \\ &= \frac{3-i}{4}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \times Res\left[\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_2\right] \\ &= \frac{\pi(1+3i)}{2}. \end{aligned}$$

2. On remarque que :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{5+\cos t} = Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}dt}{5+\cos t}\right)$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}dt}{5+\cos t} &= \int_{|z|=1} \frac{z}{5+\frac{z^2+1}{2z}} \frac{-idz}{z} \\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{z^2+10z+1} \\ &= \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{zdz}{(z+5-2\sqrt{6})(z+5+2\sqrt{6})} \\ &= \frac{2}{i} \times 2\pi i Res\left[\frac{z}{(z+5-2\sqrt{6})(z+5+2\sqrt{6})}, -5+2\sqrt{6}\right] \\ &= 4\pi \lim_{z\to -5+2\sqrt{6}} (z+5-2\sqrt{6})\frac{z}{(z+5-2\sqrt{6})(z+5+2\sqrt{6})} \\ &= \pi\frac{-5+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Donc

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos t dt}{5+\cos t} = Re\left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}dt}{5+\cos t}\right) = \pi\frac{-5+2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 6 : Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5-\cos t}dt.$$

Solution :

Soit $z = e^{it}$, alors,

$$dt = \frac{dz}{iz} \qquad ,\cos(t) = \frac{z+z^{-1}}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos(3t) = \frac{z^3+z^{-3}}{2},$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5-\cos t}dt = -\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)dz,$$

où $f(z) = \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}$ et γ le cercle unité.
La fonction f a trois pôles :

1. $z_1 = 0$ pôle d'ordre 3.
2. $z_2 = \frac{1}{2}$ et $z_3 = 2$ deux pôles simples.

Les pôles qui se trouvent à l'intérieur de γ sont z_1 et z_2. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3t)}{5-\cos t} dt &= -\frac{1}{2i}\int_\gamma f(z)dz \\
&= -\frac{1}{2i}2\pi i\left(Res(f,0) + Res(f,\frac{1}{2})\right) \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

Exercice 7 : Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}.$$

Solution :
Soit la fonction $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ les pôles (simples) de la fonction f sont les racines sixième du -1 i.e,

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_3 = e^{i\frac{7\pi}{6}}, \quad z_4 = e^{i\frac{9\pi}{6}}, \quad z_5 = e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$

On considère l'intégrale $\int_\gamma \frac{1}{z^6+1}dz$ où γ désigne le chemin fermé formé du segment $[-R, R]$ et le demi cercle Γ de centre 0 et de rayon R.
Les pôles simples $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ sont les seuls qui sont à l'intérieur de γ et on a :

$$\begin{aligned}
Res(f, e^{i\frac{\pi}{6}}) &= \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{z - e^{i\frac{\pi}{6}}}{z^6+1} \\
&= \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \frac{1}{6z^5} \\
&= \frac{1}{6e^{i\frac{5\pi}{6}}} \\
&= -\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{6}.
\end{aligned}$$

et de la même manière on trouve :
$Res(f, e^{i\frac{\pi}{2}}) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{6}$
$Res(f, e^{i\frac{5\pi}{6}}) = -\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{6}$.

Donc

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z^6+1} &= 2\pi i\left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{6}-\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{6}-\frac{e^{i\frac{5\pi}{6}}}{6}\right)\\ &= 2\pi i\times\frac{-i}{3}\\ &= \frac{2\pi}{3},\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\int_\gamma \frac{1}{z^6+1}=\int_\Gamma \frac{1}{z^6+1}dz+\int_{-R}^{+R}\frac{1}{x^6+1}dx=\frac{2\pi}{3}$$

et comme $\lim_{z\to\infty} zf(z)=\lim_{z\to\infty} z\frac{1}{z^6+1}=0$, alors $\int_\Gamma \frac{1}{z^6+1}dz=0$.
Donc

$$\int_{-R}^{+R}\frac{1}{x^6+1}dx=\frac{2\pi}{3}.$$

D'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}\frac{1}{x^6+1}dx=\frac{2\pi}{3}.$$

Exercice 8 : Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx.$$
2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx.$$

Solution :
Posons $f(z)=\frac{z}{z^2-2z+10}$ et calculons l'intégrale $\int_\gamma f(z)e^{iz}dz$ où γ désigne le chemin fermé formé du segment $[-R,R]$ et le demi cercle Γ de centre 0 et de rayon R.
La fonction f a deux pôles simple : $z_1=1+3i$ et $z_2=1-3i$. Seul z_1 appartient au demi plan supérieur, alors,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)e^{iz}dz &= 2\pi i Res\left(f(z)e^{iz},z_1\right)\\ &= \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1-3\sin 1)+i\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1+\sin 1).\end{aligned}$$

Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)e^{iz}dz &= \int_{-R}^{R} f(x)e^{ix}dx + \int_\Gamma f(z)e^{iz}dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx + \int_\Gamma f(z)e^{iz}dz \\
&= \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1) + i\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1)
\end{aligned}$$

et puisque pour $z = Re^{it}$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z}{z^2-2z+10}\right| &= \left|\frac{Re^{it}}{R^2e^{2it}-2Re^{it}+10}\right| \\
&\leq \frac{R}{|R^2e^{2it}| - |-2Re^{it}+10|} \\
&= \frac{R}{R^2 - |2Re^{it}| - |10|} \\
&= \frac{R}{R^2-2R-10} \\
&= \frac{R}{R(R-2)-10} \\
&= \frac{10R}{R(R-2)} \\
&= \frac{10}{R-2} \\
&= \frac{20}{R} \quad R > 5, \quad M = 20, \quad k = 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_\Gamma f(z)e^{iz}dz = 0,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1) + i\frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1).$$

C'est-à-dire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3\sin 1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1 + \sin 1).$$

Bibliographie

[1] K.BADDARI, A.ABBASSOV, Théorie et pratique des fonctions d'une variable complexe, Office des Publications Universitaires, 2015.

[2] A.HITTA, Cours d'algèbre et exercices corriges, Office des Publications Universitaires, Alger, 2009.

[3] A. LESFARI, Variables complexes. Cours et exercices corriges, Ellipses, Paris, 2014.

[4] M. R. Spiegel, Variables complexes. Cours et problèmes,Séries Schaum, McGraw-Hill, 1976.

[5] P.THUILLIER, J.C. BELLOC, Algèbre, Masson, Paris, 1982.

[6] P. TAUVEL, Analyse complexe pour la licence 3 , Dunod, Paris, 2006.

[7] P. TAUVEL, Exercices d'analyse complexe, Masson, Paris, 1994.