République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli de Mascara

Faculté des Sciences Exactes

Département de Physique

Cours de la Relativité Restreinte

Destiné aux étudiants de troisième année licence LMD : Physique Fondamentale

Cours enseigné au Cinquième Semestre

Option: Physique Fondamentale

Rédigé par : Dr MONIR Mohammed El Amine

E-mail : mohammed.monir@univ-mascara.dz / moniralpha29@gmail.com

Année Universitaire 2022/2023

Avant-propos

La relativité restreinte, conçue en 1905 par Albert Einstein, s'est imposée comme un nouveau cadre pour décrire de façon cohérente les phénomènes physiques mettant en jeu des vitesses proches de celle de la lumière. Ses nombreuses conséquences ont été maintes fois confirmées. En imposant l'universalité de la vitesse de la lumière, la relativité restreinte amène à une description profondément modifiée de toute la physique dont la toile de fond devient un espace-temps quadridimensionnel. Des concepts aussi importants que la simultanéité de deux événements ou la longueur d'un objet deviennent relatifs aux systèmes de référence dans lesquels on les observe.

Ce polycopié de cours contient les principes fondamentaux sur lesquels se base la relativité restreinte, il s'étend sur les concepts de repère d'inertie, d'espace temps à quatre dimensions, de cône de lumière, de quadrivecteur, équivalence masse-énergie et unification des champs électrique et magnétique (tenseur champ électromagnétique).

Ce support de cours en relativité restreinte est un outil fondamental pour le développement des connaissances approfondies dans le domaine de la relativité restreinte, même il consiste à décrire les paradoxes qui en découlent, la compréhension actuelle de la relativité restreinte ne laisse guère de place à une théorie concurrente.

Ce cours est au profit des étudiants de la troisième année licence LMD, de spécialité physique fondamentale, il révèle un résumé sur la relativité restreinte, commençant par un historique de la relativité avant Albert Einstein, sur la cinématique et la dynamique relativistes ; finalement, on termine ce cours par l'étude de l'électromagnétisme dans le cadre de la relativité restreinte.

Table des Matières

Introduction

C'est à Einstein que l'on doit la théorie de la relativité restreinte (1905) et la théorie de la relativité générale (1920), la seconde englobant la première. Ce cours est une introduction à la théorie de la relativité restreinte. Celle-ci décrit un espace-temps sans phénomènes gravitationnels mais où il nous sera possible de comprendre beaucoup de problèmes liés à la notion d'espace-temps et à la causalité. Motivée par des contradictions apparentes entre la théorie de mécanique classique de Newton et la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell, la théorie de la relativité restreinte s'appuie sur les développements mathématiques de Lorentz et Poincaré, ainsi que sur des expériences de physique.

Avec sa théorie, Einstein nous a appris bien plus que sa célèbre formule $E = mc^2$. En effet, la théorie de la relativité restreinte nous oblige à considérer que les distances et les durées ne sont que des notions relatives qui dépendent de l'état de l'observateur. Par contre, les lois physiques sont invariantes. Cette théorie est aujourd'hui un outil indispensable en astrophysique et en physique des hautes énergies. Dans ce cours, toutes les idées de la relativité restreinte vont être développées en faisant appel à des notions simples de la mécanique classique, mais de nombreux exemples peuvent être traités avec la théorie de l'électromagnétisme.

La théorie de la relativité restreinte a établi de nouvelles formules permettant de passer d'un référentiel galiléen à un autre. Les équations correspondantes conduisent à des phénomènes qui heurtent le sens commun (mais qui ont tous été confirmés expérimentalement), un des plus étonnants et des plus célèbres étant connu sous le nom de paradoxe des jumeaux (un paradoxe qui a été parfois utilisé en science-fiction).

La relativité restreinte a eu également un impact en philosophie en éliminant toute possibilité d'existence d'un temps et de durées absolues dans l'ensemble de l'univers (Newton). À la suite de Henri Poincaré, elle a forcé les philosophes à se poser différemment la question du temps et de l'espace.

Chapitre I

Historique

I.1. Introduction.

Jusqu'à l'an du 19ème siècle, on croyait que les trois lois de Newton sur le mouvement et les idées associées sur les propriétés de l'espace et le temps ont fourni une base sur laquelle le mouvement de la matière pourrait être complètement compris. C'est grâce à ces lois que les physiciens dans le 18ème et 19ème siècle étaient capables de prédire les mouvements des planètes, les lunes, les comètes, les boulets de canon,...etc. Dans la deuxième moitié du 19ème siècle, Maxwell a établi les équations, qui portent maintenant son nom, qui régissent le comportement de l'électricité et le magnétisme, la base de toute la technologie moderne. En particulier, ses équations prédisent que les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière (c = 3×10^8 m/s) et établissent que la lumière est en fait une forme de rayonnement électromagnétique.

Contrairement à la mécanique de Newton, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par les transformations de Galilée. Il était normal alors d'essayer de mettre en évidence, par expérience, l'existence de cet éther, et en particulier les effets du mouvement du référentiel de l'observateur par rapport l'éther.

I.2. Rôles de l'éther : milieu de propagation des ondes électromagnétiques et repère absolu.

I.2.1. Milieu de propagation des ondes électromagnétiques.

En relativité, on a besoin d'une horloge marquant le temps ajoutée à chaque système de coordonnées spéciales, on appelle système de références ou référentiel, un tel système de coordonnées muni d'une horloge.

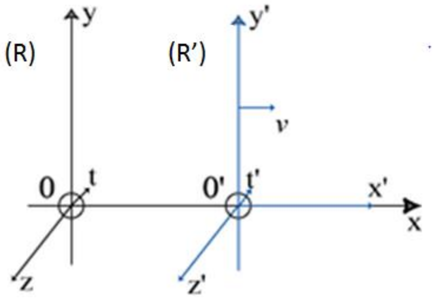

Figure I.1

Le mouvement d'un corps qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure est appelé « un mouvement libre ». Lorsque le mouvement libre d'un corps s'effectue à une vitesse constante par rapport à un référentiel, on dit que celui-ci est un système de référence d'inertie ou galiléen. Si un système de référence est d'inertie, alors tout autre référentiel se déplaçant d'un mouvement rectiligne à vitesse constante par rapport au premier est également un référentiel d'inertie.

Considérons deux référentiels d'inertie, (*R*) et (*R'*), en translation relative uniforme l'un par rapport à l'autre, le mouvement s'effectuant parallèlement aux axes *ox* et *ox'* (Figure I.1). Le référentiel (*R'*) se déplace à une vitesse V par rapport au référentiel (*R*), dans le sens des *x* et *x'* positifs. De plus, on suppose que le point *O'* de (*R'*) est passé au temps $t = 0$ au point *O*.

I.2.2. Le concept du temps absolu.

En mécanique classique, on n'a pas besoin de préciser qu'une horloge est attachée à chaque système de coordonnées car on suppose de manière implicite, qu'il existe une grandeur horloge universelle du temps. Quelque soit le référentiel utilisé, le temps est supposé s'écouler de manière identique en chaque point de l'espace et pour tous les référentiels. Ce fut Newton qui introduisit le temps absolu et universel. Il semble que les horloges mesureront une même durée dans chaque référentiel en translation uniforme, et l'on a $t = t'$. On retrouve le temps absolu de Newton.

I.2.3. La transformation de Galilée.

Considérons les deux référentiels de la Figure I.1 soumis aux conditions notées précédemment. Après un temps *t* de déplacement, les points *O* et *O'* se trouvent à une distance *Vt* l'un de l'autre. Notons *x* une distance quelconque *OM* sur l'axe *Ox* et *x'* la distance *OM'*. On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{I.1}$$

D'où

$$x = Vt + x' \tag{I.2}$$

La transformation des référentiels laisse inchangées les autres coordonnées, d'où les relations entre les coordonnées spatiales et le temps des deux référentiels :

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{I.3}$$

Ces quatre relations forment une transformation particulière de Galilée. Dans le cas général, pour un mouvement relatif quelconque des référentiels à vitesse constante $\vec{V}$, les rayons-vecteurs (vecteurs de position) $\vec{r}$ et $\overrightarrow{r'}$ d'un point *M* sont tels que :

$$\overrightarrow{r'} = \vec{r} - \vec{V}t \tag{I.4}$$

La loi d'addition des vitesses résulte simplement de la transformation de Galilée. Si un corps est mobile par rapport au référentiel (*R'*) avec une vitesse $\overrightarrow{v'}$, sa vitesse $\vec{v}$ par rapport au référentiel (*R*) est alors égale, à la somme des vitesses.

$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{V} \tag{I.5}$$

En mécanique du point, on retrouve les trois vitesses qui figurent dans la relation (I.5) respectivement sous les noms de *vitesse absolue*, *vitesse relative* et *vitesse d'entrainement*.

I.3. Expérience de Michelson et Morley.

I.3.1. Expérience de Michelson et Morley.

L'expérience de Michelson et Morley, réalisée en 1887, dans cette expérience (Figure I.2), la lumière qui provient d'une source est divisée en deux rayons par une lame semi-transparente *P*. Ces deux rayons cheminent perpendiculairement l'un à l'autre jusqu'aux miroirs M_1 et M_2. Là, il patent réunis vers la lunette d'observation sur l'écran, où ils interférent.

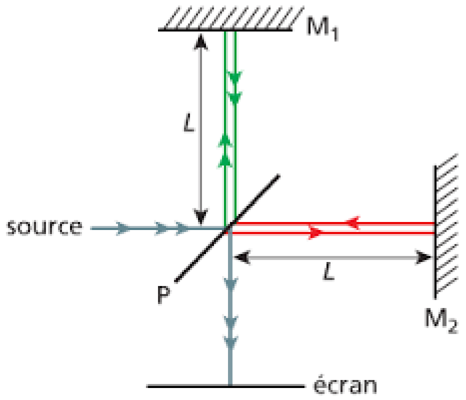

Figure I.2

Si les distances PM_1 et PM_2 sont égales, et si l'on place les bras de l'appareil portant le miroir M_2 dans la direction du mouvement terrestre sur son orbite autour du Soleil, les deux rayons devraient avoir des vitesses différentes, selon la loi de Galilée d'addition des vitesses. Le calcul de la différence entre les durées de parcours d'un même chemin, parallèle ou perpendiculaire au mouvement de la Terre, est cependant assez délicat car il faut tenir compte du déplacement des miroirs, dû à la translation de la Terre, durant le trajet de chaque rayon. On démontre ainsi que le phénomène optique d'interférences ne devrait pas être le même que si la Terre était immobile par rapport à éther.

Les interférences étant caractérisées par des bandes alternativement sombres et lumineuses, celles-ci devraient alors être déplacées d'une certaine distance. En tournant les bras de l'appareil de 90°, jusqu'à ce que le bras portant le miroir M_1 soit parallèle au mouvement de la Terre, les bandes d'interférences seraient déplacées d'une même distance mais dans l'autre sens. Or, on ne trouvera pas la moindre trace du déplacement attendu.

Finalement, l'expérience de Michelson et Morley contribua à démontrer que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante notée *c*, indépendante du mouvement de sa source.

« Sa vitesse ne s'additionne pas à celle de sa source contrairement à ce qu'exigerait la relativité galiléenne ».

I.3.2. Invariance de la vitesse de la lumière dans le vide.

La conclusion surprenante à laquelle conduisit l'expérience de Michelson et Morley fut, parmi d'autres idées, à la base de la théorie de la relativité restreinte. Cependant, cette idée difficilement acceptable devrait être testée à l'aide d'autres procédés expérimentaux. Tous les chercheurs arrivent à la même conclusion : La vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de sa source.

Exercices

<u>Exercice 01 :</u>

La galaxie d'Andromède est située à 2,3 millions d'années-lumière de la Terre. On considère que la Terre et Andromède sont des points, sans mouvement relatif. On décide de visiter Andromède grâce à une fusée voyageant à vitesse constante depuis la Terre jusqu'à Andromède.

1. Si le temps mis pour faire le voyage est de 2,31 millions d'années pour les observateurs terrestres, quelle est la vitesse de la fusée ? Quelle est la durée du voyage pour les passagers de la fusée ? Seront-ils encore vivants à la fin du voyage ? Et leurs descendants ?
2. Mêmes questions si on embarque sur une fusée plus puissante qui ne met que 2,301 millions d'années.
3. On désire que le voyage en fusée n'excède pas 20 ans pour les passagers. Quelle est la vitesse minimum à communiquer à la fusée pour réaliser ce projet ? Combien de temps dure ce voyage pour un observateur terrestre ?

<u>Exercice 02 :</u>

Deux vaisseaux spatiaux *A* et *B* se déplacent à droite et gauche avec des vitesses de 0.8c et -0.6c respectivement observés par un observateur sur terre.

1. Quelle est la vitesse du vaisseau *B* par rapport à *A* du point de vue de Galilée.

2. Quelle est la vitesse du vaisseau *B* par rapport à *A* en relativité restreinte.

Solutions

<u>Solution 01 :</u>

1. $\beta = 0{,}995671$, $\tau = 213780$ ans.
2. $\beta = 0{,}999565$, $\tau = 67801$ ans.
3. $\beta = 1 - 3{,}781 \times 10^{-11}$, $T = T_0 + 0{,}76$ h.

<u>Solution 02 :</u>

1. $v'_x = v_x - V$

$$\begin{cases} v'_x = v_{B/A} \\ v_x = v_{B/O} = -0.6c \\ V = v_{A/O} = 0.8c \end{cases}$$ donc, $v'_x = -0.6c — 0.8c = -1.4c$

2. $v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}}$ avec $\begin{cases} v'_x = v_{B/A} \\ v_x = v_{B/O} = -0.6c \\ V = v_{A/O} = 0.8c \end{cases}$

   Donc $v'_x = -0.95c$

Chapitre II

Cinématique relativiste

II.1. Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons détailler la cinématique relativiste. Le "cinématique" correspond à l'étude des mouvements, et l'aspect "relativiste" traduit le fait que les vitesses étudiées sont proches de celle de la lumière. Si ce n'est pas le cas, on utilise la cinématique classique.

II.2. Postulats.

Un certain nombre de postulats encore appelés principes servent à fonder la relativité restreinte.

II.2.1. Homogénéité de l'espace-temps.

L'espace-temps est homogène, c'est-à-dire qu'il a les mêmes propriétés en chaque point de l'espace et à n'importe quel instant.

II.2.2. Isotropie de l'espace.

L'espace est isotrope, c'est-à-dire que toutes les directions dans l'espace sont physiquement équivalentes.

II.2.3. Référentiels équivalents.

Il existe des référentiels dans lesquels les lois de la physique ont la même forme.

II.2.4. Causalité.

Si un phénomène A est la cause d'un autre phénomène B, alors A doit avoir lieu avant B. pour un tel couple de phénomènes, l'énoncé B a lieu après A est intrinsèque, c'est-à-dire valable quelque soit le référentiel considéré.

II.2.5. Invariance de la vitesse de la lumière.

La vitesse de la lumière est invariante dans les deux référentiels. Ainsi, qu'aucune vitesse ne peut dépasser une certaine valeur limite (vitesse limite).

II.3. Transformation de Lorentz.

II.3.1. Transformation de Lorentz.

Soient deux référentiels (*R*) et (*R'*) le second étant animé d'une vitesse uniforme $\vec{V}$ selon l'axe des *x* (Figure II.1).

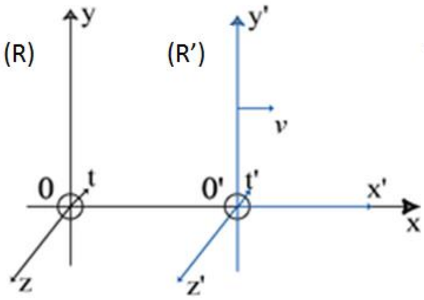

Figure II.1

On cherche une transformation de la forme:

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z, t) \\ t' = g(x, y, z, t) \end{cases} \tag{II.1}$$

1. Les transformations cherchées doivent être linéaires, si non on viole le principe de l'inertie.
2. Les coordonnées transversales (perpendiculaires) de la vitesse $\vec{V}$ ne sont pas affectées par le changement de référentiel :

$$y' = y \text{ et } z' = z$$

3. On cherche des transformations sous la forme:

$$\begin{cases} x' = \gamma x + \delta t \\ t' = \lambda x + \mu t \end{cases}$$

où les coefficients : γ, δ, λ et µ ne dépendent que de *V* . La vitesse *v* d'une particule dans (R) se transforme comme:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma dx + \delta dt}{\lambda dx + \mu dt} = \frac{\gamma v + \delta}{\lambda v + \mu}$$

En particulier, l'origine *O'* de (*R'*) se déplace à la vitesse $v = V$ par rapport à (*R*); soit:

$$0 = \frac{\gamma V + \delta}{\lambda V + \mu} \Rightarrow \delta = -\gamma V$$

De même, une particule au repos dans (R) a une vitesse $v' = -V$ mesurée dans (R'), alors:

$$-V = \frac{\delta}{\mu} \Rightarrow \delta = -\mu V$$

on aura $\gamma = \mu$.

L'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide *c* donne:

$$c = \frac{\gamma c + \delta}{\lambda c + \mu} \Rightarrow \lambda c^2 + \gamma c = \gamma c + \delta \Rightarrow \lambda c^2 = \delta \Rightarrow \lambda = \frac{\delta}{c^2} = -\frac{\gamma V}{c^2}$$

Les transformations s'écrivent alors comme suit:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{V}{c^2}x) \end{cases} \qquad \text{(II.2)}$$

Comme il n'y a pas de référentiel galiléen privilégié, on doit donc trouver la même relation, que l'on passe de (R) à (R') ou l'inverse, de (R') à (R). C'est-à-dire, il suffit de changer V en $-V$.

$$x = \gamma(x' + Vt') \qquad \text{(II.3)}$$

$$t = \gamma(t' + \frac{V}{c^2}x') \qquad \text{(II.4)}$$

On pose ainsi $\gamma(-V) = \gamma(V)$ qui découle de l'isotropie de l'espace. Remplaçons (II.3) et (II.4) dans (II.2), il vient:

$$x' = \gamma\left(\left(\gamma(x' + Vt')\right) - V\left(\gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right)\right)\right) = \gamma^2 x' + \gamma V t' - \gamma V t' - \frac{V^2}{c^2}\gamma^2 x' = \gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)x' \Leftrightarrow \gamma^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = 1$$

, donc : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

Posons $\beta = \frac{V}{c}$, c'est-à-dire: $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. On obtient ainsi les transformations suivantes :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases} \qquad \text{(II.5)}$$

Qu'on appelle transformations de Lorentz. Ces transformations s'écrivent aussi sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Matrice\ de\ Lorentz\ L(V)} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{(II.6)}$$

Notons pour les transformations de Lorentz :

- L'espace et le temps ne sont pas indépendants.
- Le temps n'est pas un absolu.
- Lorsque $c \to \infty$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de vitesse limite), les transformations de Lorentz se réduisent aux transformations de Galilée.
- On obtient les formules réciproques donnant les coordonnées dans (*R*) en fonction des coordonnées dans (*R'*), en les permutant et en changeant *V* en –*V*.
- Les équations de Maxwell sont invariantes sous une transformation de Lorentz.

II.3.2. Dilatation des temps.

L'intervalle de temps propre est l'intervalle de temps qui sépare deux indications d'une même horloge dans le référentiel où elle est au repos.

Soit une horloge fixe liée à un référentiel d'inertie que l'on appellera référentiel propre de l'horloge (*R'*), on suppose que cette horloge est placée à l'origine des coordonnées pour simplifier. Notons $\Delta t'$ l'intervalle de temps propre dans (*R'*).

On suppose maintenant que cette horloge est en translation uniforme par rapport un autre référentiel galiléen (*R*) selon l'axe des *x* avec une vitesse $\vec{V}$ (Figure II.2). Quel est l'intervalle de temps Δt correspondant dans (*R*) ?

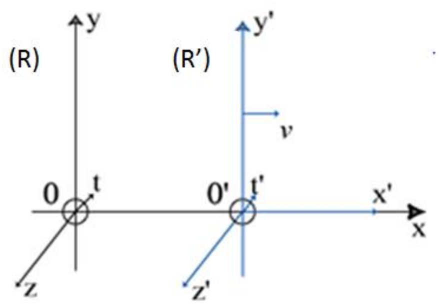

Figure II.2

Soit la transformation de Lorentz inverse: $ct = \gamma(ct' + \beta x')$. L'horloge étant placée en x' = 0; Il vient: $t = \gamma t'$.

Le temps entre deux événements dans (*R'*) est $\Delta t' = t_2' - t_1'$ (intervalle de temps propre), alors dans (*R*) on a:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \Delta t'$$

Et puisque $\gamma > 1$ alors $\Delta t > \Delta t'$. On en déduire que l'intervalle de temps correspondant Δt, mesuré dans (*R*); est toujours supérieur à l'intervalle de temps propre $\Delta t'$. C'est la dilatation des temps.

II.3.3. Contraction des longueurs.

On appelle longueur propre d'un objet, la longueur de cet objet mesurée dans le référentiel où il est immobile.

Soient deux référentiels d'inertie (*R*) et (*R'*) d'axes respectivement *xyz* et *x'y'z'*. Le référentiel (*R'*) est en translation uniforme par rapport (*R*) avec une vitesse $\vec{V}$ suivant le sens positif des axes *x* et *x'* (Figure II.3).

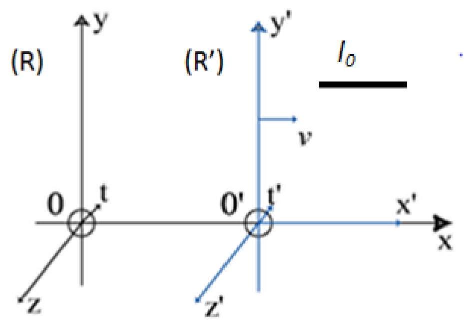

Figure II.3

Soit une tige fixe dans (*R'*) de longueur propre l_0 (longueur mesurée dans (*R'*)), donc:

$$l_0 = x_2' - x_1'$$

Sa longueur mesurée dans (*R*) est donnée par :

$$l = x_2 - x_1$$

Nous mesurons les coordonnées des deux extrémités x_2 et x_1 de la tige dans (*R*) en même temps *t*. La relation entre l_0 et *l* peut être trouvée au moyen de la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x'_2 = \gamma(x_2 - Vt) \\ x'_1 = \gamma(x_1 - Vt) \end{cases}$$

Donc,

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

Puisque $\gamma > 1$, on a : $\frac{l_0}{l} > 1 \Rightarrow l < l_0$.

Ainsi, la longueur de la tige telle que mesurée dans (*R*) est plus courte que sa la longueur mesurée dans (*R'*). C'est la contraction des longueurs.

II.4. Transformation des vitesses.

On va établir maintenant les formules permettant de calculer la vitesse d'une particule matérielle dans un référentiel donné connaissant sa vitesse dans un autre référentiel. Supposons à nouveau que le référentiel (*R'*) est en translation uniforme par rapport (*R*) avec une vitesse $\vec{V}$ suivant le sens positif des axes *x*. Soit $v_x = dx/dt$ la composante de la vitesse dans (*R*) et $v'_x = dx'/dt'$ sa composante dans (*R'*). Suivant la transformation de Lorentz, on a :

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - Vdt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx) \end{cases} \qquad \text{(II.7)}$$

divisons les trois premières équations par $dt' = \gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)$, on obtient :

$$\begin{cases} v'_x = \frac{dx - Vdt}{dt - \frac{V}{c^2}dx} \\ v'_y = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} \\ v'_z = \frac{dz}{\gamma(dt - \frac{V}{c^2}dx)} \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{V}{c^2}v_x)} \\ v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{V}{c^2}v_x)} \end{cases} \qquad \text{(II.8)}$$

C'est bien la transformation des vitesses.

Quand $c \to \infty$, ces formules se réduisent aux formules de la composition des vitesses de la mécanique classique, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \qquad \text{(II.9)}$$

II.5. Applications : Aberration de la lumière.

II.5.1 Aberration des étoiles.

L'aberration est la variation apparente de la position d'un corps céleste tel qu'une étoile, en raison du mouvement de l'observateur avec la Terre.

Considérons une étoile au repos dans un référentiel (*R*). Un télescope, attaché (*R*), voit cette étoile inclinée par rapport à l'axe *x* d'angle α : Soit *V* la vitesse de la Terre suivant la direction *x* par rapport (*R*). Dans le référentiel (*R'*), attaché à la Terre, le télescope voit l'étoile incliné d'angle α' par rapport à axe *x'* (Figure II.4).

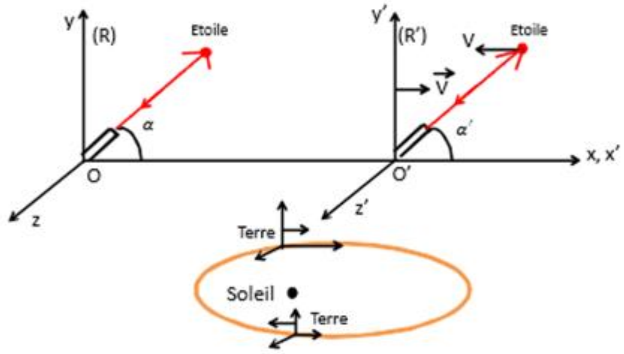

Figure II.4

Dans (*R*), le vecteur $\overrightarrow{SO}$ a les composantes de vitesses suivantes :

$$\begin{cases} v_x = -c\cos\alpha \\ v_y = -c\sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Soit,

$$\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} \\ \tan\alpha' = \dfrac{v'_y}{v'_x} \end{cases}$$

Selon les formules de transformation des vitesses : $v'_x = \frac{v_x - V}{1-\frac{V}{c^2}v_x}$ et $v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1-\frac{V}{c^2}v_x)}$, donc :

$$\tan\alpha' = \frac{v_y}{\gamma(v_x - V)} = \frac{\tan\alpha}{\gamma\left(1+\dfrac{\beta}{\cos\alpha}\right)} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\tan\alpha}{\left(1+\dfrac{\beta}{\cos\alpha}\right)} < \tan\alpha$$

Six mois plus tard, la vitesse de la Terre autour du soleil est dirigée de manière opposée, c'est-à-dire le référentiel (*R'*) a une vitesse -*V* par rapport à (*R*). On obtient ainsi en changeant seulement dans la formule précédente *V* par (-*V*) :

$$\tan \alpha'' = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\tan \alpha}{\left(1-\frac{\beta}{\cos \alpha}\right)}$$

Donc $\alpha'' \neq \alpha'$, cela signifie que l'inclinaison du télescope doit être modifiée pour garder l'étoile dans le champ de vision.

Faisons maintenant quelques approximations.

$$\beta = \frac{V}{c} \ll 1$$

On obtient au premier ordre en β :

$$\tan \alpha' = \tan \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\cos \alpha}\right) = \tan \alpha - \beta \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \qquad \text{(II.10)}$$

Posons $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$,

Donc,

$$\tan \alpha' = \tan(\Delta\alpha + \alpha) \approx \tan \alpha + \Delta\alpha \frac{d \tan \alpha}{d\alpha} = \tan \alpha + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha} \qquad \text{(II.11)}$$

Comparons les équations (II.10) et (II.11), nous obtiendrons :

$$\Delta\alpha = -\beta \sin \alpha$$

Alors :

$$\alpha' = \alpha - \beta \sin \alpha \Rightarrow \alpha' < \alpha$$

Six mois plus tard, on peut montrer :

$$\alpha'' = \alpha + \beta \sin \alpha \Rightarrow \alpha'' > \alpha$$

Ainsi, en raison du mouvement de la Terre autour du Soleil, l'inclinaison du télescope doit être changée entre les limites données par α' et α'' afin que l'étoile reste dans le champ de vision tout au long de l'année.

II.6. Univers de Minkowski.

En relativité restreinte, lieux et instants, ou événements, sont représentés par un ensemble de points p, $\{p\} = M_4$, l'espace-temps absolu. M_4 est postulé pseudo-euclidien, à quatre dimensions, de sorte que les points-événements peuvent être distingués par un système de quatre coordonnées minkowskiennes (ou pseudo-cartésiennes) Xi (i = 0, 1, 2, 3). La distance, ou intervalle entre deux points infiniment voisins de coordonnées Xi et $Xi + dXi$ est donnée par un théorème de Pythagore généralisé :

$$ds^2 = +(dX^0)^2 - (dX^1)^2 - (dX^2)^2 - (dX^3)^2 \qquad \text{(II.12)}$$

Soient ($x_1;y_1;z_1;ct_1$) et ($x_2;y_2;z_2;ct_2$) sont les coordonnés de l'espace-temps de deux événements quelconques, la quantité s dont le carré est défini par :

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \qquad \text{(II.13)}$$

Est appelée intervalle entre ces deux événements.

Notons aussi que l'intervalle Δs^2 peut être positif, négatif ou nul.

- Si $\Delta s^2 > 0$, l'intervalle est de genre temps. Dans ce cas, deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant à une vitesse inferieure à c. Il peut donc y avoir un lien de causalité entre eux.
- Si $\Delta s^2 = 0$, l'intervalle est dite de genre lumière. Dans ce cas, deux événements ne peuvent être joints que par un signal allant à la vitesse de la lumière.
- Si $\Delta s^2 < 0$, l'intervalle est dite de genre espace. Cette fois ci, il ne peut pas y avoir de lien causal entre les deux événements.

II.7. Cône de lumière.

Pour simplifier, nous considérons qu'une seule coordonnée spatiale et le temps. Un événement spécial par (*x*, *ct*) est juste un point dans le diagramme (*x, ct*). Soit une particule mobile de vitesse $v < c$, passe par l'origine *O* à t = 0 d'équation de mouvement $x = vt$. Sa position sera donc caractérisée par la condition $|x| < c|t|$. Les deux droites (*AA'*) et (*BB'*) d'équations respectives $x = ct$ et $x = -ct$ sont associées aux trajectoires des rayons lumineux issus de *O*.

Considérons les deux événements *O* (0 ; 0) et *P* (*x* ; *ct*) dans le secteur *AOB* du diagramme (Figure II.5). L'intervalle entre ces deux événements est de genre temps puisque $c^2dt^2 - dx^2$ est positif. Dans ce secteur *t* est positif, alors l'événement *P* se produit après l'événement *O*. En d'autres termes, tous les événements représentés par des points dans le secteur *AOB* sont absolument au futur par rapport à l'événement *O* (0 ; 0).

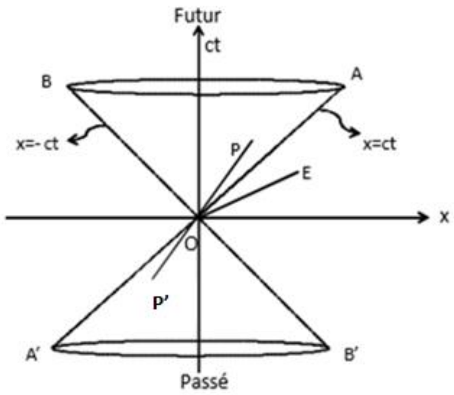

Figure II.5

Pour le secteur *A'OB'*, l'intervalle entre *O* (0 ; 0) et *P'*(*x* ; *ct*) est aussi de genre temps. Dans ce secteur *t* est négatif, l'événement *P'* se produit avant l'événement *O*. Par conséquent, tous les événements du secteur *A'OB'* sont dans le passé par rapport l'événement *O*.

Considérons maintenant un événement *E* dans le secteur *AOB'*. La ligne *OE* n'est pas une ligne d'univers possible pour toute particule puisqu'elle ne peut pas voyager plus vite que la lumière.

Le diagramme (*x, ct*) peut être étendu en ajoutant une autre dimension, à savoir *y* d'axe *Oy* perpendiculaire au plan (*x, ct*). Les lignes d'univers des signaux lumineux issus de *O* génère maintenant un cône dont l'équation est $x^2 + y^2 = c^2t^2$: Ce cône divise l'espace-temps (*x* ; *y* ; *ct*) en trois catégories : le passé de *O*, le futur de *O* et l'ailleurs.

Dans le cas le plus général, nous devons imaginer un espace à quatre dimensions (hyper espace) (*x* ; *y* ; *z* ; *ct*) où l'hyper cône de lumière est maintenant définie par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$.

II.8. Quadrivecteurs.

II.8.1. Notion de quadrivecteur.

On peut considérer l'ensemble des coordonnées (*ct* ; *x* ; *y* ; *z*) d'un événement comme les composantes d'un rayon vecteur quadridimensionnel (4-vecteur de position) dans un espace quadridimensionnel. Si on note x^{α}, $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ces composantes avec :

$$\begin{cases} x^0 = ct \\ x^1 = x \\ x^2 = y \\ x^3 = z \end{cases}$$

On écrit alors le 4-vecteur de position :

$$\underline{r} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = ct - \vec{r}$$

$\vec{r}$ est le vecteur de position ordinaire.

Le carré du 4-vecteur est donné par l'expression suivante :

$$\left(\underline{r}\right)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2$$

Qui est une quantité invariante par la transformation de Lorentz.

Définition : On général, on appelle quadrivecteur $\underline{A}$ un objet mathématique défini dans l'espace de Minkowski par quatre composantes A^0 ; A^1 ; A^2 ; A^3 qui se transforment selon la transformation de Lorentz de la façon suivante :

$$\begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \end{cases}$$

Le carré est donné par l'expression suivante :

$$\left(\underline{A}\right)^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

Pour simplifier l'écriture, on introduit deux types de composantes des quadrivecteurs, qu'on désigne par les lettres A^{α} et A_{α}. On doit ainsi tenir compte des égalités suivantes :

$$\begin{cases} A^0 = A_0 \\ A^i = -A_i, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Les composantes A^{α} sont dites composantes *contra-variantes* et les quantités A_{α} composantes *covariantes*.

Le carré $\left(\underline{A}\right)^2$ peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\underline{A}\right)^2 = \sum_{i=0}^{3} A^\alpha A_\alpha = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

$$= (A^0)^2 - \left(\vec{A}\right)^2$$

Convention : On désigne généralement la somme précédente par :

$$\sum_{i=0}^{3} A^\alpha A_\alpha = A^\alpha A_\alpha$$

On définit d'une façon analogue le produit scalaire de deux quadrivecteurs où les composantes sont :

$$\underline{A} = \binom{A^0}{\vec{A}} \quad ; \quad \underline{B} = \binom{B^0}{\vec{B}}$$

Comme :

$$\underline{A}.\underline{B} = \sum_{i=0}^{3} A^\alpha B_\alpha = A^\alpha B_\alpha = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

$$= A^0 B_0 - \vec{A}.\vec{B}$$

II.9. Temps propre.

Plus généralement, considérons un corps animé d'un mouvement quelconque de vitesse $\vec{V}$ par rapport à un référentiel (*R*). Ce mouvement peut être considéré comme une succession infinie de translations uniformes dont chacune s'effectue pendant un temps *dt* à vitesse $\vec{v}$ constante. En conséquence, nous pouvons à chaque instant *t*, attacher à ce corps en mouvement une horloge et un système de coordonnées qui, pendant un temps *dt*, vont définir un autre référentiel ($R'(\vec{V})$) en translation uniforme à la vitesse $\vec{V}$ par rapport au referentiel (*R*).

Pendant la durée impropre infiniment petite *dt* mesurée dans le référentiel (*R*), l'horloge mobile va parcourir une distance *dl* telle que :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = V^2 dt^2 \qquad \text{(II.14)}$$

Notons *x'*, *y'*, *z'*, *t'* les coordonnées dans le référentiel (*R'*) et appelons τ le temps propre mesuré par l'horloge attaché à (*R'*), Cette horloge étant fixe dans (*R'*) nous avons :

$$dx' = dy' = dz' = 0$$

L'intervalle *ds'* dans (*R'*) correspondant à ce déplacement infinitésimal de l'horloge dans (R), se réduit donc à :

$$ds' = cd\tau \qquad \text{(II.15)}$$

L'invariance de l'intervalle nous permet alors d'écrire :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - V^2dt^2 = dt^2(c^2 - V^2) = ds'^2 = c^2d\tau^2$$

Cette dernière relation donne l'expression suivante de la durée propre dans (*R'*) de ce déplacement dans (*R*) :

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}dt = \frac{dt}{\gamma} \qquad \text{(II.16)}$$

Avec : $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

Nous retrouvons la relation entre les durées propre $d\tau$ et impropre *dt* donnée par la formule (II.16).

L'invariance de l'intervalle montre que la durée propre $d\tau$ est un invariant dans une transformation de Lorentz.

II.10. Applications : effet Doppler relativiste.

Soient deux référentiels (R) et (R'), le second étant animé d'une vitesse uniforme $\vec{V}$ selon l'axe des x (Figure II.6). Les horloges dans les deux référentiels sont mises zéro à l'instant où les origines O et O' coïncident.

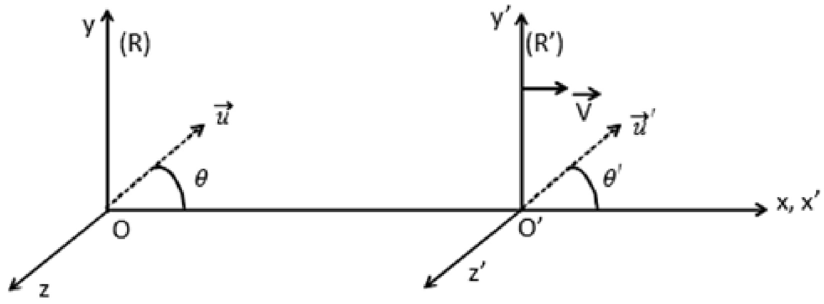

Figure II.6

Une source monochromatique, fixe dans le référentiel (R') au point O', émet une onde lumineuse plane, de fréquence ν', dans la direction $\overrightarrow{u'}$ du plan $x'O'y'$ faisant un angle θ' avec l'axe x'. La propagation de la lumière peut être décrite par les observateurs dans (R) et (R') respectivement par :

$$\begin{cases} \psi = Ae^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \\ \psi' = Ae^{-i(\overrightarrow{k'}.\overrightarrow{r'}-\omega' t')} \end{cases}$$

Où $\vec{r}$ est le vecteur de position, $\vec{k}$ = $k\vec{u}$ est le vecteur d'onde dirigé vers le sens de propagation de l'onde de célérité c, son module est $k = \frac{\omega}{c}$. La phase $(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)$ doit être invariante dans un changement de référentiel galiléen; c'est-à-dire :

$$\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right) = (\omega' t' - \overrightarrow{k'}.\overrightarrow{r'}) \quad (II.17)$$

L'égalité (II.17) s'écrit aussi comme suit :

$$\omega' t' - (k' \cos\theta')x' - (k' \sin\theta')\, y' = \omega t - (k\cos\theta)x - (k\sin\theta)\, y \quad (II.18)$$

Rappelons des transformations de Lorenz :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{cases}$$

Introduisons ces transformations dans (II.18), on obtient :

$$\omega' \frac{\gamma}{c}(ct - \beta x) - (k' \cos\theta')\gamma(x - \beta ct) - (k' \sin\theta')\, y = \omega t - (k\cos\theta)x - (k\sin\theta)\, y$$

Réécrivons cela de la manière suivante :

$$\left(\omega' \frac{\gamma}{c} - \frac{\omega}{c} + \gamma\beta k' \cos\theta'\right) ct + \left(-\omega' \frac{\gamma}{c}\beta - \gamma k' \cos\theta' + k\cos\theta\right) x + (-k' \sin\theta' + k\sin\theta) y = 0$$

Cette égalité doit être satisfaite pour tout *x*; *y*; *z* et *t*. On obtient ainsi les équations :

$$\begin{cases} \frac{\omega'}{c}\gamma = \frac{\omega}{c} - \gamma\beta k' \cos\theta' \\ \frac{\omega'}{c}\gamma\beta = k\cos\theta - \gamma k' \cos\theta' \\ k' \sin\theta' = k\sin\theta \end{cases} \qquad \text{(II.19)}$$

Multiplions la deuxième équation par –β et faisons la somme, on aura :

$$\frac{\omega'}{c}\gamma(1-\beta^2) = \frac{\omega}{c} - \beta k \cos\theta$$

Mais $k = \frac{\omega}{c}$,

Donc,

$$\frac{\omega'}{c}\gamma(1-\beta^2) = \frac{\omega}{c}(1 - \beta\cos\theta)$$

Alors :

$$\omega' = \omega\left(\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad \text{(II.20)}$$

Comme $\omega = 2\pi\nu$, où ν est la fréquence du signal, on a donc la relation suivante :

$$\nu' = \nu\left(\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad \text{(II.21)}$$

C'est bien l'effet Doppler relativiste.

De plus,

$$\cos\theta' = \left(\frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta}\right) \qquad \text{(II.22)}$$

Notons les points suivants :

- Comme $\nu' \neq \nu$ alors $\theta' \neq \theta$. Pour l'observateur en mouvement par rapport à la source, il y a donc en général modification de la fréquence et modification de la direction de l'onde.

- Si le signal se propage suivant *Ox* ∥ $\vec{V} \Rightarrow \theta = 0$, donc :

$$\nu' = \nu\left(\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Et d'après (II.22) on a : $\cos\theta' = 1 \Rightarrow \theta' = 0$. Donc dans ce cas il ny a pas de changement de direction de l'onde. Mais :

- Il y a augmentation de la fréquence $\nu' > \nu$ si $\beta < 0$, c'est-à-dire si l'observateur se rapproche de la source.
- Il y a diminution de la fréquence $\nu' < \nu$ si $\beta > 0$, c'est-à-dire si l'observateur s'éloigne de la source.

- Si le signal se propage suivant *Ox* $\perp \vec{V} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

D'après (II.22), on a : $\cos\theta' = -\beta$, il y a donc changement de direction de l'onde et augmentation de fréquence ($\nu' > \nu$) que l'observateur s'éloigne ou se rapproche de la source, c'est l'effet Doppler transversal. Cet effet supplémentaire n'est pas possible selon la théorie classique. Ceci est essentiellement dû à la dilatation du temps.

Exercices

Exercice 01 :

Une barre immobile dans le référentiel inertiel (*R'*) et placée selon la direction (*O'x'*) mesure une longueur l_0 dans (*R'*). Un observateur de (*R*) donne une mesure $l_0/3$ de la barre.

- Quelle est la vitesse relative des deux référentiels ?

Exercice 02 :

On observe qu'une horloge dans un vaisseau spatial indique un temps égale à 3/5 de celui indiqué par une horloge similaire restée sur Terre.

- A quelle vitesse le vaisseau se déplace-t-il ?

Exercice 03 :

Un vaisseau spatial s'éloigne de la Terre avec une vitesse rectiligne uniforme. On veut calculer la vitesse *V* que devrait se déplacer ce vaisseau pour qu'un observateur terrestre perçoive rouge la lumière émise par ses feux arrières verts. Soit (*R*) le référentiel terrestre supposé galiléen et (*R'*) le référentiel propre du vaisseau spatial. Pour simplifier, on prend $\vec{V}$ suivant l'axe *ox*.

1. Ecrivez les composantes du 4-vecteur d'onde $k = (\frac{\omega}{c} ; k)$ dans les deux référentiels.
2. Soit λ' la longueur d'onde de la lumière émise par rapport (*R'*) et la longueur d'onde par rapport (*R*). Montrer que $\lambda' = f(\beta)\lambda$ où $f(\beta)$ est une fonction de $\beta = \frac{V}{c}$ à déterminer.
3. En déduire la vitesse du vaisseau spatial par rapport au référentiel terrestre (*R*). On prendra pour longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0.7\ \mu m$ m pour la radiation rouge et $\lambda' = 0.5\ \mu m$ pour la radiation verte.

Solutions

Solution 01 :

1. $l_0 = \gamma l$, on a : $l = \frac{l_0}{3} = \frac{l_0}{\gamma}$, donc $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 3 \Rightarrow V = 0.94c.$

Solution 02 :

1. $T' = \gamma T$ et $T' = \frac{3}{5}T \Rightarrow \gamma = \frac{3}{5}$, donc $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{3}{5} \Rightarrow V = \frac{4}{5}c$

Solution 03 :

1. Dans le référentiel (R) :

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ -k\vec{\imath} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel (R') :

$$\underline{k'} = \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ -k'\vec{\imath} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda'} \\ -\frac{2\pi}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda'} \\ -\frac{2\pi}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aura : $\frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\lambda}\gamma(1+\beta) \Rightarrow \lambda' = \lambda\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1+\beta)} = \lambda\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, donc : $f(\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

3. On a : $\lambda' = \lambda\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1+\beta)} \Rightarrow \beta = \frac{\lambda^2-\lambda'^2}{\lambda^2+\lambda'^2} = \frac{0.7^2-0.5^2}{0.7^2+0.5^2}0.324$, donc $V = 0.324c.$

Chapitre III

Dynamique relativiste

III.1. Introduction.

Nous commencerons par poser les bases de la dynamique relativiste en nous appuyant sur les résultats obtenus en cinématique relativiste. Nous appliquerons les lois de conservation à l'étude des chocs élastiques et inélastiques des particules élémentaires et noyaux atomiques. Nous verrons enfin quelles sont les modifications apportées par la relativité restreinte par rapport au traitement classique.

III.2. Rappels : la dynamique newtonienne.

La dynamique newtonienne est basée sur les trois lois de Newton.

III.2.1. La première loi de Newton.

En physique mécanique, le principe d'inertie exprime le fait que, dans un référentiel galiléen, tout corps qui est soumis à une force résultante nulle est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme. Ce principe est la première des trois lois de Newton.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

III.2.2. La deuxième loi de Newton.

La deuxième loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique en translation) s'énonce ainsi :

Soit un corps de masse m (constante) : l'accélération subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m. Ceci est souvent récapitulé dans l'équation :

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$\vec{F}_i$ désigne les forces extérieures exercées sur l'objet.

m est sa masse.

$\vec{a}$ correspond à l'accélération de son centre d'inertie G.

III.2.3. La troisième loi de Newton.

Tout corps *A* exerçant une force sur un corps *B* subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps *B*. *A* et *B* étant deux corps en interaction, la force $\vec{F}_{A/B}$ (exercée par *A* sur *B*) et la force $\vec{F}_{A/B}$ (exercée par *B* sur *A*) qui décrivent l'interaction sont directement opposées :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$

Dans le cas de la mécanique du point, la troisième loi précise également :

$$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$$

La force d'interaction est portée par la droite reliant les positions des particules.

III.3. Impulsion et Energie : Quadrivecteur Impulsion-Energie.

III.3.1. Quadrivecteur vitesse.

La vitesse quadridimensionnelle (4-vitesse) d'une particule est le vecteur :

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{d\tau} \qquad \text{(III.1)}$$

où $\underline{r}$ est un quadrivecteur et $d\tau$ et le temps propre de la particule. Ces composantes sont alors :

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3 \qquad \text{(III.2)}$$

Soit un référentiel (*R*) supposé fixe. On peut introduire à tout instant un référentiel (*R'*) rigidement lié à la particule en mouvement. Pendant l'instant *dt* on peut supposer que (*R*) et (*R'*) sont galiléens. Notons que, par rapport au référentiel (*R'*) la particule mobile est au repos; c'est-à-dire *dx'* = *dy'* = *dz'* = 0.

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{et} \quad ds'^2 = c^2d\tau^2$$

En vertu de l'invariance de l'intervalle, $ds^2 = ds'^2$, on a :

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2d\tau^2$$

On aura : $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$

Ainsi, les composantes de v^α sont :

$$\begin{cases} v^0 = \dfrac{dx^0}{d\tau} = \gamma\dfrac{cdt}{dt} = \gamma c \\ v^1 = \dfrac{dx^1}{d\tau} = \gamma\dfrac{dx^1}{dt} = \gamma\dfrac{dx}{dt} = \gamma v_x \\ v^2 = \dfrac{dx^2}{d\tau} = \gamma\dfrac{dx^2}{dt} = \gamma\dfrac{dy}{dt} = \gamma v_y \\ v^3 = \dfrac{dx^3}{d\tau} = \gamma\dfrac{dx^3}{dt} = \gamma\dfrac{dz}{dt} = \gamma v_z \end{cases}$$

Le quadrivecteur vitesse s'écrit alors :

$$\underline{v} = (v^0, v^1, v^2, v^3) = \gamma(c, \vec{v})$$

On peut montrer que les composantes v^α se transforment comme un quadrivecteur par rapport aux transformations de Lorentz.

Calculons maintenant le produit scalaire $\underline{v}.\underline{v}$:

$$\underline{v}^2 = \underline{v}.\underline{v} = v^\alpha.v_\alpha = v^0.v_0 + v^i.v_i = \gamma^2c^2 - \gamma^2\vec{v}^2 = \gamma^2\left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)c^2 = c^2$$

C'est-à-dire : $\underline{v}.\underline{v} = c^2$

Cette quantité positive est bien invariante.

III.3.2. Quadrivecteur impulsion.

On définit le quadrivecteur-quantité de mouvement $\underline{p}$ comme suit:

$$\underline{p} = m\underline{v} \tag{III.3}$$

Où *m* est la masse de la particule, ses composantes sont explicitement données par:

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix}$$

Rappelons que $v^\alpha . v_\alpha = c^2$, on a:

$$\underline{p}^2 = p^\alpha . p_\alpha = mv^\alpha . mv_\alpha = m^2 v^\alpha . v_\alpha = m^2 c^2$$

$$p^\alpha . p_\alpha = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2 c^2$$

Autrement dit, le carré du quadrivecteur-impulsion est une quantité invariante. La norme de $\underline{p}$ est donc :

$$\left\|\underline{p}\right\| = mc \tag{III.4}$$

III.4. Equations de la dynamique relativiste.

III.4.1. Relation fondamentale de la dynamique relativiste.

On définit le quadrivecteur force comme :

$$\underline{f} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} \tag{III.5}$$

où $d\tau = dt/\gamma$ est le temps propre, $\underline{p}$ est le quadrivecteur impulsion :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \vec{p} = \gamma m\vec{v} \end{pmatrix}$$

Donc, on a :

$$\underline{f} = \gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma mc \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma mc\frac{d\gamma}{dt} \\ \gamma \vec{f} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Mais : $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2}\vec{a}.\vec{v}$ avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Donc,

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} m\frac{\gamma^4}{c}\vec{a}.\vec{v} \\ \gamma \vec{f} \end{pmatrix} \tag{III.6}$$

III.4.2. Théorème de l'énergie cinétique.

On a vu que est un invariant et que :

$$\underline{p}^2 = \underline{p}.\underline{p} = m^2c^2 \tag{III.7}$$

Dérivons (III.7) par rapport au temps, on aura :

$$\frac{d\left(\underline{p}.\underline{p}\right)}{dt} = 0$$

C'est-à-dire :

$$\underline{p}.\frac{d\underline{p}}{dt} = 0$$

Ou bien,

$$\underline{p}.\underline{f} = 0$$

Faisons ce produit scalaire explicitement :

$$\begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \gamma \dfrac{d(\gamma mc)}{dt} \\ \gamma \vec{f} \end{pmatrix} = 0$$

Soit $\frac{E}{c} = \gamma mc$, on aura :

$$\begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m\vec{v} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \gamma \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{E}{c}\right) \\ \gamma \dfrac{d\vec{p}}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

On obtient :

$$\frac{dE}{dt} - \vec{v}.\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

C'est-à-dire,

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f}.\vec{v}$$

Mais, $E = T + mc^2$, T est l'énergie cinétique et mc^2 est l'énergie de masse. Alors :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{f}.\vec{v} = P$$

Qui est le théorème de l'énergie cinétique. P est la puissance associée à la force $\vec{f}$. Ainsi, les composantes du quadrivecteur force s'écrivent aussi comme suit :

$$\underline{f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma}{c}(P) \\ \gamma \vec{f} \end{pmatrix}$$

III.5. Application au photon.

La masse est en relation d'équivalence avec l'énergie : l'une peut se transformer en l'autre et réciproquement. Alors, sous certaines conditions, la totalité de la masse d'une particule peut se convertir en énergie pure. Alors rien n'interdit d'imaginer une particule de masse nulle.

Ecrivons encore une fois l'équation :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

On constate alors que lorsque $v = c$ (cas du photon) l'énergie E devient infinie sauf si $m = 0$: Un photon est une particule de masse nulle (sans masse) et d'une énergie finie. Le quadrivecteur impulsion associé s'écrit :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma m v_x \\ \gamma m v_y \\ \gamma m v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E v_x}{c^2} \\ \frac{E v_y}{c^2} \\ \frac{E v_z}{c^2} \end{pmatrix}$$

Si ce photon se propage selon l'axe des *x*, on a :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III.8)}$$

La formule $E^2 = (\vec{p})^2 c^2 + m^2 c^4$ de l'énergie s'écrit dans le cas du photon comme :

$$E = pc \qquad \text{(III.9)}$$

D'autre part, l'énergie est attribuée à la fréquence de l'onde électromagnétique par la relation de Max Planck :

$$E = h\nu \qquad \text{(III.10)}$$

où $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck. On déduit des deux dernières relations la formule de de Broglie traduisant la dualité onde-corpusculaire :

$$pc = h\nu \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(III.11)}$$

Une autre façon d'écrire l'énergie et l'impulsion du photon est :

$$E = \hbar\omega \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Où $\hbar = h/2\pi$ est la constante de Planck réduite, et $\vec{k}$ est le vecteur d'onde dont sa norme est : $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$.

Le quadrivecteur énergie-impulsion pour le photon s'écrit donc :

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\frac{\omega}{c} \\ \hbar\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar k \\ \hbar\vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\underline{p}\right)^2 = 0 \qquad \text{(III.12)}$$

La norme du quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon est nulle qui est en accord avec le fait que la masse du photon est nulle.

III.6. Equivalence masse-énergie.

Si on écrit la première composante du quadrivecteur-impulsion comme :

$$p^0 = \frac{E}{c} = m\gamma c \tag{III.13}$$

Où *E* signifie une énergie, il vient :

$$E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{III.14}$$

On peut écrire également :

$$\underline{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\vec{p})^2 = m^2c^2$$

$$E^2 = (\vec{p})^2c^2 + m^2c^4 \tag{III.15}$$

A la limite des faibles vitesses, $v \ll c$, on a :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) + \cdots$$

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots$$

Cette formule montre, notamment, qu'en mécanique relativiste l'énergie d'une particule libre ne s'annule pas pour $v = 0$ et possède une valeur finie égale à :

$$E_0 = mc^2 \tag{III.16}$$

C'est l'énergie au repos de la particule (dite aussi énergie de masse). C'est donc l'énergie associée à la masse *m* seule, indépendamment de tout mouvement.

L'énergie de masse traduit donc une équivalence fondamentale entre la masse et l'énergie. En outre, notons que :

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 - mc^2 + m\gamma c^2 = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2$$

Ainsi, on définit l'énergie cinétique relativiste par :

$$T = (\gamma - 1)mc^2 \tag{III.17}$$

III.7. Interactions entre particules (collision de particules).

III.7.1. Définitions :

Une collision entre particules est dite **élastique**, si la nature et le nombre des particules sont conservés avant et après la collision.

Une collision entre particules est dite **inélastique**, si la nature et/ou le nombre des particules avant la collision n'est pas conservé après la collision.

III.7.2. Propriétés des collisions dans le référentiel du centre de masse (R) :*

Considérons une collision élastique entre deux particules A_1 et A_2 dans (R^*). En primant les grandeurs après collision, il vient:

$$\underline{p}^*_{avant} = \begin{pmatrix} \frac{E_1^* + E_2^*}{c} \\ \overrightarrow{p_1}^* + \overrightarrow{p_2}^* = \vec{0} \end{pmatrix}, \qquad \underline{p}^*_{après} = \begin{pmatrix} \frac{E'^*_1 + E'^*_2}{c} \\ \overrightarrow{p'_1}^* + \overrightarrow{p'_2}^* = \vec{0} \end{pmatrix}$$

Comme $\underline{p}^*_{avant} = \underline{p}^*_{après}$, donc :

$$\overrightarrow{p_1}^* + \overrightarrow{p_2}^* = \overrightarrow{p'_1}^* + \overrightarrow{p'_2}^* = \vec{0} \qquad \text{(III.18)}$$

Et

$$E_1^* + E_2^* = E'^*_1 + E'^*_2 \qquad \text{(III.19)}$$

D'après (III.18) :

$$\overrightarrow{p_1}^* = -\overrightarrow{p_2}^* \Rightarrow \left(\overrightarrow{p_1}^*\right)^2 = \left(\overrightarrow{p_2}^*\right)^2 \Rightarrow c^2\left(\overrightarrow{p_1}^*\right)^2 = c^2\left(\overrightarrow{p_2}^*\right)^2$$

Et de la relation $E^2 = (\vec{p})^2c^2 + m^2c^4$ on a donc pour chacune des particules :

$$p_1^{*2}c^2 = E_1^{*2} - m_1^2c^4 = p_2^{*2}c^2 = E_2^{*2} - m_2^2c^4$$

$$p_1'^{*2}c^2 = E'^{*2}_1 - m_1^2c^4 = p'^{*2}_2c^2 = E'^{*2}_2 - m_2^2c^4$$

On déduit que :

$$E_1^{*2} - m_1^2c^4 = E_2^{*2} - m_2^2c^4$$

$$E'^{*2}_1 - m_1^2c^4 = E'^{*2}_2 - m_2^2c^4$$

Faisons la différence, on aura :

$$E_1^{*2} - {E'}_1^{*2} = E_2^{*2} - {E'}_2^{*2} \Rightarrow E_1^{*2} - E_2^{*2} = {E'}_1^{*2} - {E'}_2^{*2}$$

C'est-à-dire :

$$(E_1^* - E_1'^*)(E_1^* + E_1'^*) = (E_2^* - E_2'^*)(E_2^* + E_2'^*)$$

D'après l'équation (III.19), on a :

$$(E_1^* - E_1'^*) = (E_2^* - E_2'^*) \qquad \text{(III.20)}$$

De (III.19) et (III.20), on a :

$$\begin{cases} E_1^* = E_1'^* \\ E_2^* = E_2'^* \end{cases} \qquad \text{(III.21)}$$

Et

$$\left\|\overrightarrow{p_1}^*\right\| = \left\|\overrightarrow{p_1}^*\right\| = \left\|\overrightarrow{p'_1}^*\right\| = \left\|\overrightarrow{p'_1}^*\right\| \qquad \text{(III.22)}$$

Chaque particule a donc la même énergie et la même norme de sa quantité de mouvement avant et après la collision dans le référentiel du centre de masse. Cette propriété de conservation de l'énergie de chaque particule dans (*R**) nous permis de savoir si la collision est élastique ou non en comparant la perte d'énergie subie par la particule incidente uniquement.

III.8. Effet Compton.

Compton a observé que lorsqu'un faisceau des rayons X dur monochromatique (des photons très énergétiques) est diffusé par un bloc de graphite, le rayonnement diffusé se compose de deux composantes, l'une ayant la même longueur d'onde que le rayonnement incident et l'autre ayant une longueur d'onde légèrement plus longue. Compton a expliqué la présence du rayonnement de longueur d'onde plus longue en considérant la diffusion comme une collision élastique entre un photon unique et un électron libre au repos initialement. La collision est élastique dans le sens où l'énergie cinétique obtenue par l'électron est égale à l'énergie perdue par le photon.

Supposons un photon venant de la gauche et se dirigeant vers la droite suivant un vecteur unitaire $\vec{u}$. Le photon est diffusé par un électron au repos dans une direction faisant un angle par rapport à la direction initiale (Figure III.1).

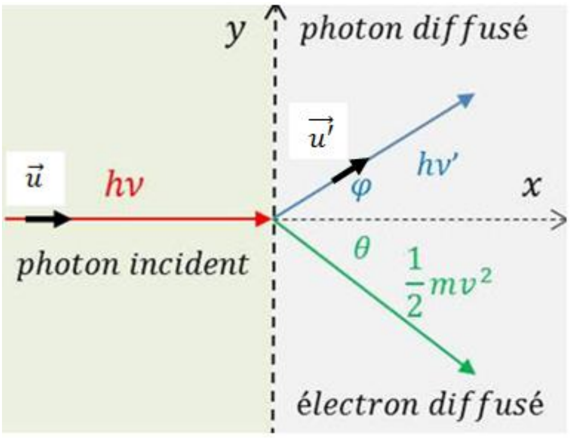

Figure III.1

Pour déterminer la variation de la longueur d'onde du photon dû à la collision, nous allons utiliser la conservation du quadrivecteur quantité de mouvement avant et après la collision :

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma} + \left(\underline{p}\right)_{\bar{e}} = \left(\underline{p}'\right)_{\gamma} + \left(\underline{p}'\right)_{\bar{e}} \qquad \text{(III.23)}$$

Avant la collision :

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\vec{u} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \left(\underline{p}\right)_{\bar{e}} = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Après la collision :

$$\left(\underline{p'}\right)_{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \frac{E'}{c}\overrightarrow{u'} \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \left(\underline{p'}\right)_{\bar{e}} = \begin{pmatrix} \gamma m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma} + \left(\underline{p}\right)_{\bar{e}} - \left(\underline{p'}\right)_{\gamma} = \left(\underline{p'}\right)_{\bar{e}}$$

Faisons le carré ;

$$\left(\left(\underline{p}\right)_{\gamma} + \left(\underline{p}\right)_{\bar{e}} - \left(\underline{p'}\right)_{\gamma}\right)^2 = \left(\underline{p'}\right)_{\bar{e}}^{\ 2}$$

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma}^{\ 2} + \left(\underline{p}\right)_{\bar{e}}^{\ 2} + 2\left(\underline{p}\right)_{\gamma}\left(\underline{p}\right)_{\bar{e}} - 2\left(\underline{p}\right)_{\gamma}\left(\underline{p'}\right)_{\gamma} - 2\left(\underline{p}\right)_{\bar{e}}\left(\underline{p'}\right)_{\gamma} + \left(\underline{p'}\right)_{\gamma}^{\ 2} = \left(\underline{p'}\right)_{\bar{e}}^{\ 2}$$

Mais pour un photon le carré du quadrivecteur quantité de mouvement est nul, c'est-à-dire :

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma}^{\ 2} = \left(\underline{p'}\right)_{\gamma}^{\ 2} = 0$$

et pour l'électron on a :

$$\begin{cases} \left(\underline{p}\right)_{\bar{e}}^{\ 2} = m_{\bar{e}}^2 c^2 \\ \left(\underline{p'}\right)_{\bar{e}}^{\ 2} = m_{\bar{e}}^2 c^2 \end{cases}$$

Il vient :

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma}\left(\underline{p}\right)_{\bar{e}} - \left(\underline{p}\right)_{\gamma}\left(\underline{p'}\right)_{\gamma} - \left(\underline{p}\right)_{\bar{e}}\left(\underline{p'}\right)_{\gamma} = 0 \qquad \text{(III.24)}$$

Calculons les produits scalaires :

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma}\left(\underline{p}\right)_{\bar{e}} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\vec{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = m_e E \qquad \text{(III.25)}$$

$$\left(\underline{p}\right)_{\gamma}\left(\underline{p'}\right)_{\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \frac{E}{c}\vec{u} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{E\prime}{c} \\ \frac{E\prime}{c}\overrightarrow{u'} \end{pmatrix} = \frac{EE\prime}{c^2} - \frac{EE\prime}{c^2}\vec{u}.\overrightarrow{u'} = \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\varphi) \qquad \text{(III.26)}$$

$$\left(\underline{p}\right)_{\bar{e}}\left(\underline{p'}\right)_{\gamma} = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{E\prime}{c} \\ \frac{E\prime}{c}\overrightarrow{u'} \end{pmatrix} = m_e E' \qquad \text{(III.27)}$$

Remplaçons les trois résultats des produits scalaires dans (III.24) :

$$m_e E - \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\varphi) - m_e E' = 0 \qquad \text{(III.28)}$$

Donc,

$$m_e(E-E') = \frac{EE'}{c^2}(1-\cos\varphi)$$

C’est-à-dire,

$$\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E}\right) = \frac{(1-\cos\varphi)}{mc^2}$$

L’énergie *E* est donnée en fonction de la constante de Planck et la fréquence par :

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

On obtient finalement :

$$(\lambda' - \lambda) = \frac{h}{mc}(1-\cos\varphi)$$

Ou bien :

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{mc}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad \text{(III.29)}$$

où $\lambda_c = \frac{h}{mc}$ est la longueur d’onde de Compton qui est de l’ordre de $2{,}4 \times 10^{-12}$ m: Après la diffusion, le photon dispersé à une énergie inferieure, et selon la relation de Planck le photon dispersé a une fréquence plus faible et notamment une plus longue longueur d’onde. Cette expérience a mis clairement en évidence l’aspect corpusculaire de la lumière.

III.9. Effet Cerenkov.

L'effet Tcherenkov (Cerenkov) est un rayonnement électromagnétique émis lorsqu'une particule chargée (comme un électron) se déplace à travers un milieu diélectrique plus rapidement que la vitesse de phase de la lumière dans ce milieu. Elle est similaire à la vague d'étrave produite par un bateau voyageant plus vite que la vitesse des vagues d'eau. Le rayonnement Tcherenkov ne se produit que si la vitesse des particules est supérieure à la vitesse de phase de la lumière dans le matériau. Même aux hautes énergies, l'énergie perdue par le rayonnement de Cherenkov est bien inférieure à celle des autres mécanismes (collisions, …). Il est nommé d'après le physicien soviétique Pavel Alekseyevich Cherenkov, qui a partagé le prix Nobel de physique en 1958 avec Ilya Frank et Igor Tamm pour la découverte du rayonnement Cherenkov, réalisée en 1934.

Une particule chargée qui traverse un milieu à grande vitesse excite les électrons des couches supérieures des atomes/molécules de ce milieu. En se désexcitant, ces électrons émettent un rayonnement, particulièrement dans la bande bleue et ultraviolette. Ce rayonnement se propage à la vitesse de la lumière dans ce milieu. La vitesse de la lumière dans le vide est indépassable, mais la vitesse de la lumière dans tout autre milieu ne l'est pas. Elle est égale à :

$$v = \frac{c}{n}$$

n étant l'indice de réfraction de la lumière par le milieu. Dans l'eau, la vitesse de la lumière n'est que de 225000 km/s, cela veut dire qu'une particule peut très bien se déplacer à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans l'eau! Que se passe-t-il dans ce cas ? Les photons émis tout au long de son parcours vont interférer de manière constructive et former un cône de lumière bleutée qui se déplace à la vitesse de la particule et dans la même direction. L'ouverture de ce cône est telle que :

$$\cos\theta = 1/\beta n \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

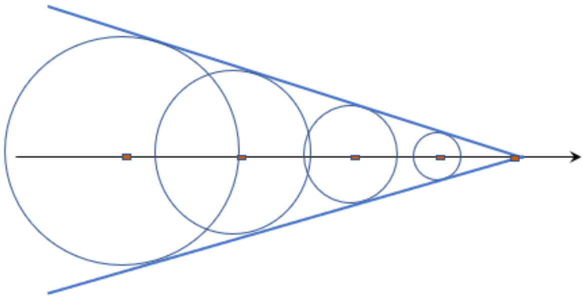

Figure III.2

Exercices

Exercice 01 :

Soit un référentiel fixe (*R*) où une particule de masse m, de quantité de mouvement $\vec{p}$ et d'énergie cinétique *T*, est animée d'une vitesse $\vec{v}$.

1. Exprimer *T* et *p* en fonction de *m* et γ.
2. Exprimer *T* en fonction de *p* et γ.
3. Etablir la relation $\vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{T+mc^2}$.

Exercice 02 :

Un proton de masse *m* = 938 MeV/c^2 possède une quantité de mouvement de module *p* = 3 GeV/c. Calculer:

1. L'énergie *E* de ce proton.
2. Le module de sa vitesse.
3. Son énergie cinétique.

Exercice 03 :

On considère le choc inélastique d'un positron (e^+) d'énergie E_1 et de quantité de mouvement $\vec{p}_1$ sur un électron (e^-) immobile dans le référentiel (*R*) du laboratoire supposé galiléen, dans le but d'obtenir un méson π^0 et de photons suivant la réaction :

$$e^+ + e^- \to \pi^0 + \gamma$$

1. Soit le référentiel (*R**), en translation uniforme par rapport au référentiel (*R*), animé d'une vitesse $\vec{V}$ parallèlement à $\vec{p}_1$; et dans lequel la somme des quantités de mouvement des particules e^+ et e^-: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$: Utiliser la transformation de Lorentz entre les quadrivecteurs impulsion-énergie du système ($e^+ + e^-$) pour exprimer $\beta = \frac{V}{c}$ en fonction de E_1, m.
2. Exprimer les énergies respectives E_1 et E_2 du positron e^+ et d'électron e^- dans (*R*), en fonction de E_1, *m*, ainsi que l'énergie totale $E^* = E_1^* + E_2^*$ du système ($e^+ + e^-$).

3. Montrer que l'énergie cinétique minimale du positron e^+ pour que la réaction soit possible est donnée par l'expression:

$$T_{min} = \frac{M^2c^4 - 4m^2c^4}{2mc^2}$$

<u>Applications numériques :</u>

$m_{e-} = m_{e+} = m = 0.511$ MeV/c^2; $m_{\pi 0} = M = 135$ MeV/c^2

Solutions

Solution 01 :

1. L'énergie totale de la particule est: $E = \gamma mc^2$, donc $T = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$

   Soit le quadrivecteur impulsion-énergie $\underline{p} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$, donc : $\underline{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2 \Rightarrow$

   $\vec{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2c^2 = \gamma^2 m^2c^2 - m^2c^2 = (\gamma^2 - 1)m^2c^2 \Rightarrow p = \sqrt{(\gamma^2 - 1)}mc$

2. Divisons les deux relations, on aura : $\frac{T}{p} = \frac{(\gamma-1)c}{\sqrt{(\gamma^2-1)}} = c\sqrt{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}}$.

3. $\vec{p} = \gamma m\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma m} = \frac{c^2}{E}\vec{p} \Rightarrow \vec{v} = \frac{c^2}{T+mc^2}\vec{p}$.

Solution 02 :

1. L'énergie de ce proton est: $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} = \sqrt{(mc^2)^2 - (pc)^2} = \sqrt{0.938^2 + 3^2} =$ 3.14GeV.

2. $p = \gamma mv \Rightarrow v = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2+p^2}} = \frac{3c}{\sqrt{0.938^2+9}} = 0.95c$

3. $E = mc^2 + T \Rightarrow T = E - mc^2 = 2.202$ GeV.

Solution 03 :

1.

$$\begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_1 + mc^2}{c} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aura ; $\beta = \frac{cp_1}{E_1+mc^2}$ et $cp_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2c^4} \Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{E_1^2-m^2c^4}}{E_1+mc^2} = \sqrt{\frac{E_1-mc^2}{E_1+mc^2}}$

2.

$$\begin{pmatrix} \frac{E_1^*}{c} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aura : $E_1^* = \frac{\sqrt{mc^2E_1+m^2c^4}}{\sqrt{2}}$ et $E_2^* = \frac{\sqrt{mc^2E_1+m^2c^4}}{\sqrt{2}}$

L'énergie totale :$E^* = E_1^* + E_2^* = \sqrt{2mc^2E_1 + 2m^2c^4}$

3.

Pour que la réaction soit possible, il faut qu'on ait :

$$E^* \geq Mc^2$$

C'est-à-dire :

$$2mc^2E_1 + 2m^2c^4 \geq M^2c^4 \text{ mais } E_1 = mc^2 + T$$

Donc, $2m^2c^4 + 2mc^2T + 2m^2c^4 \geq M^2c^4 \Rightarrow T \geq \frac{M^2c^4-4m^2c^4}{2mc^2}$

Alors : $T_{min} = \frac{M^2c^4-4m^2c^4}{2mc^2}$

$T_{min} = \frac{(Mc^2)^2-(2mc^2)^2}{2mc^2} = \frac{(135)^2-(2\times0.511)^2}{2\times0.511}$~17.8 GeV.

Chapitre IV

Électromagnétisme

IV.1. Introduction.

Einstein a conçu la relativité restreinte dans le but d'éliminer l'incompatibilité entre la mécanique newtonienne et l'invariance de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques. Nous avons montré quelles étaient les conséquences de la relativité sur l'énergie et le temps. Il nous reste à vérifier son impact sur les lois de l'électromagnétisme. La relativité restreinte a été élaborée à la base de l'électromagnétisme. Dans ce quatrième chapitre nous dévoilerons les primordiales relations qui existent entre la relativité restreinte et l'électromagnétisme.

IV.2. Rappel des lois de l'électromagnétisme.

Les équations de Maxwell de l'électromagnétisme, sont celles auxquelles satisfait le champ $(\vec{E}, \vec{B})$ produit par des sources.

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Faraday)} \qquad \text{(IV-1)}$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad \text{(Flux magnétique)} \qquad \text{(IV-2)}$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \text{(Maxwell-Gauss)} \qquad \text{(IV-3)}$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(Maxwell-Ampère)} \qquad \text{(IV-4)}$$

Où ρ est la charge volumique, $\vec{j}$ et le vecteur courant volumique, ε_0 est la permittivité du vide et μ_0 est la perméabilité du vide. Ces deux dernières constantes sont réalisées à la vitesse de la lumière par la relation suivante:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \qquad \text{(IV-5)}$$

A ces équations, il convient d'ajouter que toute particule de charge q est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \text{(IV-6)}$$

Ce qui permet de déduire la dynamique de cette particule.

Les équations de Maxwell sont des équations locales c'est-à-dire quelles sont valables en tout point et à tout instant. Ces équations s'interprètent comme suit :

- La première équation exprime la loi d'induction électromagnétique; toute variation de $\vec{B}$ dans le temps produit un champ électrique $\vec{E}$.
- La deuxième équation traduit d'une manière locale la conservation du flux d'un champ magnétique $\vec{B}$ à travers toute surface fermée.
- La troisième est la forme locale du théorème de Gauss; elle relie le champ électrique $\vec{E}$ et la charge volumique (densité de charge) des sources qui le produisent.
- La quatrième équation montre que toute variation de $\vec{E}$ dans le temps peut créer un champ magnétique, même en absence de courant ($\vec{J} = \vec{0}$).

Si on introduit un potentiel vecteur $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \text{(IV-7)}$$

La première équation devient :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{rot}\vec{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Donc,

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \text{(IV-8)}$$

φ est un potentiel scalaire.

D'après l'équation Maxwell-Gauss (IV-3),

$$div\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

C'est-à-dire :

$$\left(\Delta\varphi + \frac{\partial\left(div\vec{A}\right)}{\partial t}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

De même l'équation de Maxwell (IV-3) donne :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\vec{A} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{J}$$

On a : $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}div\vec{A} - \Delta\vec{A}$

On peut donc avoir l'expression suivante :

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} - \vec{\nabla}\left(div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\vec{J}$$

Comme les potentiels $\vec{A}$ et φ ne sont pas totalement définis, on peut imposer la condition suivante:

$$div\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

Alors :

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \square\varphi \\ \left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \mu_0\vec{J} = \square\vec{A}\end{cases}$$

Où $\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est l'opérateur d'alembertien.

Ces deux dernières équations traduisent la propagation des potentiels $\vec{A}$ et φ, à la vitesse de la lumière *c* dans le vide à partir des sources $\vec{J}$ et ρ, et par celle des champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$.

IV.3. Invariance des lois de l'électromagnétisme : Relation entre les quadrivecteurs potentiel et courant.

IV.3.1 Quadrivecteur courant.

Soit une charge dq contenue dans un volume élémentaire $dV = dxdydz$: La charge volumique correspondante par rapport à un référentiel d'inertie (*R*) est :

$$\rho = \frac{dq}{dV} \tag{IV-9}$$

Supposons maintenant que cette charge est centrée autour d'un point en mouvement quelconque, de vitesse $\vec{v}$ par rapport à (*R*): On suppose que l'axe des *x* est parallèle à $\vec{v}$ et introduisons le référentiel d'inertie (*R'*) lié à la charge *dq*. Comme *dq* est au repos par rapport (*R'*), on peut définir la charge volumique propre comme suit :

$$\rho_0 = \frac{dq}{dV'} \tag{IV-10}$$

Où $dV' = dx'dy'dz' = \gamma dV$, puisque $dx' = \gamma dx$, $dy' = dy$, $dz' = dz$.

Donc,

$$dq = \rho_0 \gamma dV = \rho dV$$

Alors,

$$\rho = \gamma \rho_0 \tag{IV-11}$$

Avec $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

On définit le quadrivecteur courant à partir de quadrivecteur vitesse et la charge volumique propre ρ_0 :

$$\underline{j} = \rho_0 \underline{v} = \rho_0(\gamma c, \gamma \vec{v}) = (\rho c, \rho \vec{v}) = (\rho c, \vec{j}) \tag{IV-12}$$

IV.3.2 Quadrivecteur potentiel.

On définit aussi le quadrivecteur potentiel $\underline{A}$ par :

$$\underline{A} = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right) \tag{IV-13}$$

IV.4. Le tenseur champ électromagnétique.

IV.4.1. Equations de propagation en notation covariante.

Soit le quadrivecteur gradient ∂_μ, tel que :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial_\mu = \left(\partial_{ct}, \vec{\nabla}\right) \qquad \text{(IV-14)}$$

Alors,

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= \left(\partial_{ct}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\partial_{ct}, -\vec{\nabla}\right) \qquad \text{(IV-15)}$$

Le quadrivecteur potentiel est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{A} = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$$

Ainsi, la jauge de Lorentz s'écrit simplement de la façon suivante :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{(IV-16)}$$

Le quadrivecteur potentiel est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{A} = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$$

Ainsi, la jauge de Lorentz s'écrit simplement de la façon suivante :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \qquad \text{(IV-17)}$$

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_0 A^0 + \partial_1 A^1 + \partial_2 A^2 + \partial_3 A^3 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\vec{A} = 0$$

De plus le d'alembertien $\square$ s'écrit :

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \partial^0\partial_0 + \partial^1\partial_1 + \partial^2\partial_2 + \partial^3\partial_3 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \qquad \text{(IV-18)}$$

Par suite, les relations de propagation (IV-9) peuvent être rassemblées en une seule équation; à savoir :

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}A^{\alpha} = \mu_0 j^{\alpha}, \alpha = 0,1,2,3 \qquad \text{(IV-19)}$$

En outre, si on considère le quadrivecteur courant j^{μ} avec :

$$j^{\mu} = (\rho c, \vec{j})$$

L'équation de continuité de la charge électrique s'écrit comme suit :

$$\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \Leftrightarrow \partial_0 j^0 + \partial_1 j^1 + \partial_2 j^2 + \partial_3 j^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0$$

IV.4.2. Tenseur champ électromagnétique.

<u>**Définition :**</u> Le tenseur du champ électromagnétique est un tenseur de rang 2 défini par :

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} = -F^{\nu\mu}$$

et donc son diagonal est nécessairement nul.

$$F^{\mu\mu} = -F^{\mu\mu} = 0$$

Explicitement, ce tenseur s'écrit sous la forme matricielle de la façon suivante :

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-20)}$$

Où

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(IV-21)}$$

Avec

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

Par exemple :

$$F_{01} = g_{00} g_{11} F^{01} = -F^{01}$$

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0, \qquad \partial^1 = -\partial_x$$

$$F^{01} = \frac{\partial A_x}{c\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{\varphi}{c}\right)}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = -\frac{E_x}{c}$$

Exercices

Exercice 01 :

Les champs électrique et magnétique sont donnés en termes des potentiels comme suit :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

1. Vérifier que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ restent les mêmes par transformations de jauge suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi} = \varphi - \partial_t \chi \\ \tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \end{cases}$$

2. On utilise cette liberté de jauge dans la définition de φ et $\vec{A}$. Montrer ainsi quon peut imposer la condition $\vec{\nabla}.\vec{\mathrm{A}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ connue comme condition de Lorentz.

Exercice 02 :

Soit le tenseur du champ électromagnétique :

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Développer l'expression $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ en termes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Exercice 03 :

Vérifier que le d'Alembertien $\Box = \partial^{\mu}\partial_{\mu}$ est un invariant de Lorentz.

Références

I. Jean Hladik et Michel Chrysos, Introduction à la Relativité Restreinte, Edition Dunod, Paris 2006.

II. Michel Hulin, Nicole Hulin et Lydie Mousselin, Relativité Restreinte, Edition Dunod, Paris 1998.

III. Mahdy Cissoko, Relativité Restreinte, Edition Armand Colin, Paris 1994.