الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha STAMBOULI de Mascara

Faculté des Sciences Exactes

Département de Physique

جامعة مصطفى اسطمبولي بمعسكر

كلية العلــوم الدقيقة

قسم الفيزياء

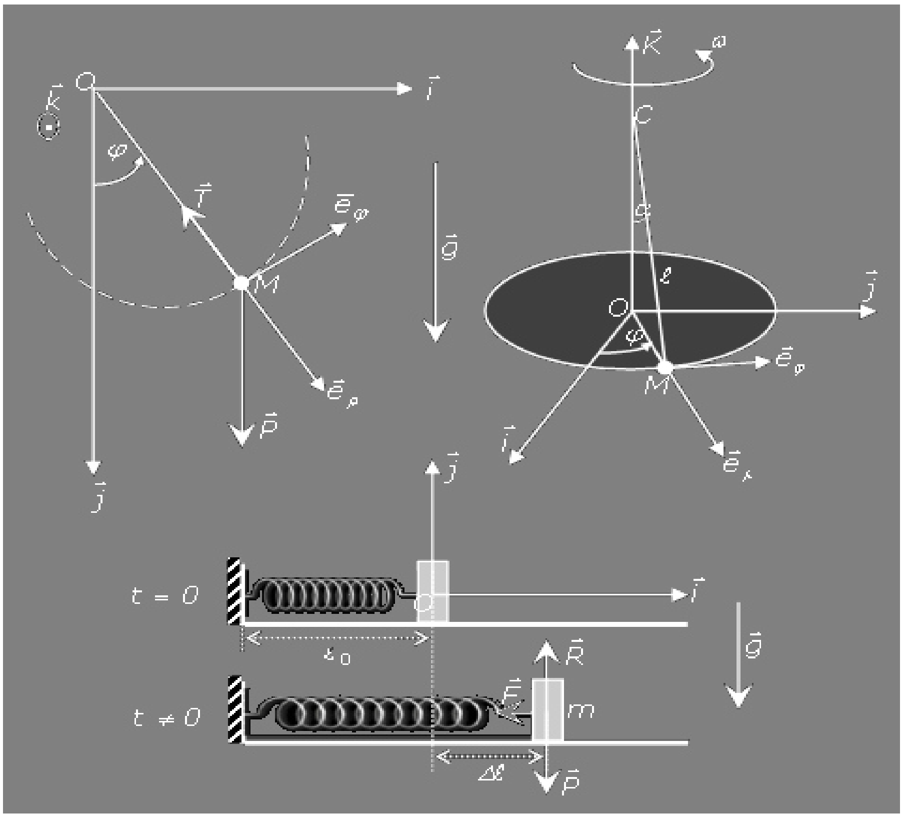
Polycopié de cours de Physique I-Mécanique du Point

Domaine Sciences de la matière

Pour les étudiants de première année L1

Préparé Par :

Dr. Zegaou Boudjelal



Année Universitaire : 2021/2022

AVANT- PROPOS

Au sujet de ce polycopié

Conforme aux programmes officiels du LMD, ce polycopié de cours de physique I-Mécanique du Point- s'adresse aux étudiants de première année de l'enseignement supérieur dans le domaine des Sciences de la Matière. Il est conçu de façon à aplanir au mieux les difficultés inhérentes au discours scientifique tout en conservant la rigueur nécessaire. Ce manuel couvre les quatre chapitres du polycopié de cours de la mécanique du point matériel :

CHAPITRE I

Rappels mathématiques: analyse dimensionnelle, vecteurs. L'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées.

CHAPITRE II

Cinématique du point matériel. Son but est de décrire les mouvements d'objets sans s'intéresser aux causes qui les produisent. Il traite uniquement des mouvements de points matériels c'est-à-dire

exclusivement des translations.

CHAPITRE III

Dynamique du point matériel. Il est proposé pour étudier Le principe d'inertie et les référentiels galiléens, Le principe de conservation de la quantité de mouvement, Définition Newtonienne de la force (3 lois de

Newton), Quelque loi de forces. L'objectif et d'appliqué les lois de Newton pour la résolution des problèmes.

CHAPITRE IV

Travail et énergie du point matériel. Il traite le travail d'une force, La puissance, Energie et collision de particules. Son but et de savoir calculer l'énergie cinétique d'un mobile et l'énergie mécanique d'un système et déterminer l'équation différentielle d'oscillateur harmonique.

Enfin, une bibliographie sommaire présente les principaux ouvrages utilisés pour la confection de ce polycopie.

L'ensemble cours et exercices résolus devrait permettre aux étudiants :

- de consolider leurs connaissances,
- un entrainement efficace afin de s'assurer que le cours est bien assimilé,
- d'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
- d'initier leurs cultures scientifiques en mécanique du point matériel.

Ce polycopie représente un support de cours de mécanique du point matériel. Il est destine aux étudiants du premier semestre des filières SM et ST. On souhaite que les étudiants trouveront dans ce support un bon outil de travail qui leur permettra de combler les éventuelles lacunes qui peuvent avoir lieu lors de la prise des notes pendant l'explication du cours ou des travaux dirigées par leurs enseignants.

Ce polycopie n'est qu'un complément de cours. Il ne pourra, en aucune façon, dispenser l'étudiant de sa présence en cours.

On souhaite à tous nos étudiants un très bon cursus universitaire et un parcourt plein de réussite.

Module Physique 1 – Mécanique du point

Domaine SM, Licence de Physique, première année, Semestre 1, UEF 11.

Crédits : 6 Coefficient : 3

Volume horaire	Semestriel	Hebdomadaire
Cours	45 heures	3h
Travaux dirigés	22.5 heures	1h30mn
Total	67.5 heures	4h30mn

1. Rappels mathématiques (6 h) Les équations aux dimensions - calculs d'erreurs - Les vecteurs

2. Cinématique du point (12 h) Mouvement rectiligne - Mouvement dans l'espace - Etude de mouvements particuliers - Etude de mouvements dans différents systèmes (polaires, cylindriques et sphériques) - Mouvements relatifs.

3. Dynamique du point (12h) Le principe d'inertie et les référentiels galiléens - Le principe de conservation de la quantité de mouvement - Définition Newtonienne de la force (3 lois de Newton) - Quelque lois de forces.

4. Travail et énergie dans le cas d'un point matériel (12h) Energie cinétique- Energie potentielle de gravitation et élastique - Champ de forces - Forces non conservatives.

Gestion du temps pédagogique

Le contenu de ce programme est prévu pour être enseigné pendant un semestre de 15 semaines, à raison de deux cours hebdomadaire de 3h et d'une séance de travaux dirigés de 1h30mn par semaine. Toutefois, pour diverses raisons, la durée réelle de l'enseignement par semestre est de 14-16 semaines. Afin de couvrir la plus grande partie du programme officiel pendant cette durée, une gestion rigoureuse du temps pédagogique ainsi qu'une coordination-synchronisation entre les cours et les travaux dirigés sont indispensables. Nous recommandons la progression ci-dessus (Tableau 1) pour une durée réelle du semestre (14-16 semaines).

Ce manuel est le fruit d'une pratique pédagogique dans cette matière de plusieurs années et résulte de longues discussions avec les collègues qui ont eu à assurer cet enseignement. Les exercices proposés dans ce manuel ont été confectionnés à partir d'une compilation des séries d'exercices et des sujets d'examens proposés par les collègues qui ont enseigné le module Mécanique du point au Faculté des sciences et de la Technologie et Faculté des sciences exactes de l'Université de Mustapha Stanbouli de Mascara.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I
Rappels Mathématiques

Chapitre II
Cinématique Du Point

Chapitre III

Dynamique du point Matériel

Chapitre IV

Travail, Puissance Et Énergie

Liste des tableaux

Liste des Figures

Chapitre I

Rappels Mathématiques

I.1 Equation aux dimensions

I.1.1 Les grandeurs physiques

La physique est une science basée sur l'observation de phénomènes physiques, et l'étude de ces phénomènes nécessite la définition de grandeurs physiques. On appelle ***grandeur physique*** toute propriété physique repérable ou mesurable.

I.1.2 Grandeurs physiques repérables

Une grandeur physique est repérable s'il est possible de définir une relation d'ordre pour chaque couple d'observation une grandeur, sans lui donner des valeurs numériques précises.

Exemple : Dureté, Viscosité, Rigidité diélectrique, …………

I.1.3 Grandeurs physiques mesurables

Une grandeur physique est mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de son espèce, et s'il est possible aussi de lui associer une valeur numérique. Il existe deux types de grandeurs mesurables : Scalaires et Vectorielles.

I.1.3.1.Grandeur scalaire:

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante

Exemple: Longueur, Masse, Temps, la température ……

I.1.3.2. Grandeur vectorielle:

un grandeur vectorielle est un grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module. La mesure de la grandeur s'obtient donc par comparaison entre deux grandeurs physiques de même nature dont l'une est choisie comme unité.

Exemple ; Vitesse, Accélération, la force …..etc

I.1.4. Les grandeurs de base

L'ensemble des unités est regroupé dans un système cohérent et universel d'unités, appelé le Système International (S.I). Toute grandeur physique peut donc s'exprimer sur la base de ces unités fondamentales (de base). Les sept unités de base sont données par le tableau suivant :

Grandeur	symbole	unité	désignation
Longueur	m	mètre	L
Masse	Kg	kilogramme	M
Temps	S	seconde	T
Intensité du courant électrique	A	ampère	I
Température	K	degré Kelvin	ɵ
Intensité lumineuse	Cd	candela	J
Quantité de matière	mol	mole	N

Tableau I.1 : Le système international d'unités (système SI)

- On peut exprimer n'importe quelle unité en fonction d'une ou plusieurs des sept unités du système international.
- Chacune des unités est rattachée à une grandeur physique qui définit sa nature, on l'appelle dimension.

Remarque : Il existe aussi d'autres systèmes d'unités en physique, comme par exemple :

- Le système C. G. S (Centimètre, Gramme, Seconde) ;
- Le système M. T. S (Mètre, Tonne, Seconde).
- Le système M.K.S.A (Mètre, Kilogramme, Seconde. Ampère).

I.2. Equations aux dimensions

Le principe des équations aux dimensions consiste à ramener les différents paramètres qui interviennent dans une formule aux grandeurs fondamentales du système international d'unités. Le tableau ci-dessus donne quelques grandeurs physiques et leur dimension.

I.2.1. Notions de dimensions

- La connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur la nature
- La dimension d'une grandeur G se note [G].
- Toute relation doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres ont la même dimension. Ainsi l'équation $A = B + C.D$ n'a de sens que si les dimensions de A et de $(B + C. D)$ sont identiques. Pour obtenir la dimension du second membre on doit appliquer les règles

suivantes :

- la dimension du produit C. D est le produit des dimensions de chacune des grandeurs C et D:
  $[C.D] = [C]. [D]$
- La dimension de la somme B + C.D est la même dimension de chacun des deux termes B et C.D :
- $[B + C.D] = [B] = [C. D]$.
- $[A/B]=[A]/[B]$.
- $[constante]=1$, Exp : $[5]=1$, $[\sin\alpha]=1$, $[\pi]=1$..

Remarques

Toute équation aux dimensions d'une grandeur G peut se mettre sous la forme :

$$[G] = L^a M^b T^c I^d \theta^e J^f N^g$$

Exemple01 :

Une vitesse : $[V] = \frac{[l]}{[t]} = LT^{-1}$

Une accélération : $[a] = \frac{[l]}{[t^2]} = LT^{-2}$

Une force : $F = m.a$; $[F] = [m] . [a] = MLT^{-2}$

Exemple02 : Ecrire l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes :

Grandeur	Equation aux dimensions	Unités de base
Force		
Pression		
Travail		
Puissance		
Charge		
Potentiel		
Capacité		
Resistance		
Conductance		
Champ Magnétique		
Inductance		

I.3. Calcul d'erreurs

I.3.1 Introduction

Il est impossible de déterminer la valeur d'une grandeur physique, sans que celle-ci ne contienne un certain taux d'erreur. Ainsi, tout résultat numérique, qui découle d'une mesure ou d'un calcul, n'a en réalité pas de valeur s'il n'est pas accompagné d'une estimation, même grossière, des limites à l'intérieur desquelles la "vraie" valeur devrait se placer. L'intérêt de nos résultats dépend souvent de notre efficacité dans l'estimation de ces limites.

I.3.2 Erreur et incertitude

Toute mesure expérimentale est associée d'une erreur dont sa valeur ne peut être estimée avec exactitude. Toutefois, même s'il est impossible de déterminer la valeur exacte de l'erreur commise, en revanche, il est possible pour chaque type d'erreur de calculer sa limite supérieure (en valeur absolue) que l'on appellera incertitude absolue.

I.3.3 Erreur absolue

Toute mesure est attachée d'une erreur. On définit l'erreur comme étant l'écart entre la valeur obtenue par la mesure $\boldsymbol{a}$ et la valeur vraie $\boldsymbol{a_0}$. Cette dernière est inconnue (puisqu'on la cherche) et elle ne peut jamais être une valeur exacte.

$$\delta a = |a - a_0|$$

On distingue deux catégories d'erreurs :

I.3.4 Erreurs aléatoires

En général, nous associons au terme aléatoire la notion de hasard ou d'imprévu. Si votre poids est 79.0 kg et si vous vous faites mesurer plusieurs fois avec la même balance, vous allez obtenir des valeurs rapprochées : 78.8, 79.4, 79, 79.1 kg. Les erreurs aléatoires sont celles qui peuvent être du au hasard soit en plus soit en moins par rapport à la valeur exacte ; il est impossible d'en prévoir le sens. Elles proviennent de l'instabilité des appareils de mesure, de fluctuations des conditions ambiantes, d'erreurs de

lectures..etc.

I.3.5 Erreurs systématiques

De nombreuses grandeurs mesurées dépendent légèrement de facteurs physiques qui sont liés à l'environnement, et qui sont par conséquent susceptibles d'évoluer au cours du temps de manière incontrôlée. Il s'agit là d'une erreur systématique qui introduit un décalage constant entre la valeur vraie et la valeur mesurée. Les erreurs systématiques regroupent les problèmes sur lesquels vous n'avez pas de contrôle. Elles sont causées par des appareils ou des méthodes fournissant des mesures erronées toujours plus hautes ou toujours plus basses que la valeur exacte. Par exemple, un instrument de mesure mal étalonné peut introduire systématiquement une erreur constante dans un seul sens. Plus généralement, elles ont des origines diverses :

a) Les Erreurs d'étalonnage de l'instrument.

b) Les erreurs personnelles (Oubli d'un paramètre par exemple.).

c) Les erreurs de méthode.

Les erreurs systématiques peuvent être éliminées à partir du moment où on les a décelées. On cite que l'étude statistique ne les évaluera pas ni elle pourra les délimiter.

I.3.6 Erreur relative:

est le quotient de l'erreur absolue à la valeur de référence. L'erreur relative est sans dimension; elle nous indique la qualité (la précision) du résultat obtenu. Elle s'exprime en termes de pourcentage

$$\text{Erreur relative} = \frac{\delta a}{a}$$

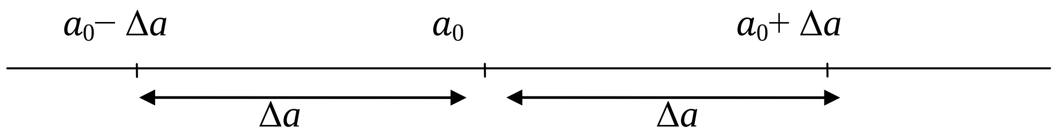
I.3.7 Incertitude absolue Δa

L'erreur absolue δa n'étant pas connue, on se contente de donner une limite supérieure Δa appelée incertitude absolue telle que :

$\delta a \leq \Delta a \Rightarrow \Delta a > 0$ (l'incertitude absolue est toujours >0)

Cela veut dire que l'incertitude absolue est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue. Alors une mesure ***a*** est toujours accompagnée d'une incertitude Δa.

$a = (a_0 \pm \Delta a)$ signifie que la valeur de a est comprise dans l'intervalle : $a_0 - \Delta a \leq a_0 \leq a_0 + \Delta a$



Souvent l'incertitude absolue correspond à la plus petite graduation de l'instrument de mesure utilisé. Elle est donc liée à la qualité et au prix de ce dernier.

Exemples :

$d = (354 \pm 3)$ (km) $\Rightarrow$ 351(km) < d < 357 (km)

$m = (5,25 \pm 0,02)$ (kg) $\Rightarrow$ 5,23 (kg) < m < 5,27 (kg)

Toutefois, il est erroné d'écrire :

$d = (15,83379 \pm 0,173)$ (m),

Puisqu'il y a une incertitude, il faut écrire :

$d = (15,8 \pm 0,2)$ [m].

I. 3.8 Incertitude relative : Δa/a

L'incertitude relative est le quotient de l'erreur absolue par la valeur mesurée. Elle est indiquée en % ou en ‰.

Exemple : Si $m = (25,4 \pm 0,2)$ (m) $\Rightarrow \Delta m/m = 0,2/25,4 = 0,8\%$

I. 3.9 Incertitude résultant d'un calcul :

a) Addition ou soustraction de plusieurs mesures :

$m = m_1 + m_2 + m_3$ ou $m = m_1 - m_2 - m_3$

$\Rightarrow \Delta m = \Delta m_1 + \Delta m_2 + \Delta m_3$

Les incertitudes absolues s'additionnent en présence de ces deux opérations.

b) Multiplication ou division de plusieurs mesures :

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

On utilise la méthode de différentiel logarithmique : On prend le logarithme népérien de l'expression de R

$lnR = ln\rho + lnL - lnS$

Puis on prend la différentielle de l'expression précédente

$d(lnR) = d(ln\rho) + d(lnL) - d(lnS)$

On obtient ; $\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dS}{S}$

Puis On remplace le d par Δ et on prend les valeurs absolues des coefficients de ΔR, ΔS, $\Delta\rho$ et ΔL car cela correspond à la valeur maximale que l'on peut avoir sur l'incertitude.

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta S}{S}$$

I. 4 Calcul vectoriel

La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan) ou trois (l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension quelconque. Cette notion, devenue abstraite et introduite par un système d'axiomes, est le fondement de la branche des mathématiques appelée algèbre linéaire. Le vecteur permet, en physique, de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre ou une fonction numérique seuls. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, une force ou un champ électrique, la direction et le sens sont indispensables. Les vecteurs s'opposent aux grandeurs scalaires décrites par un simple nombre, comme la masse, la température, etc.

I. 4.1. Définition d'un vecteur

En termes simples, un vecteur est une grandeur qui a une intensité, une direction et un sens. Il est commode de le représenter par une flèche

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

x, y et z représentent les coordonnées du point M dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$).

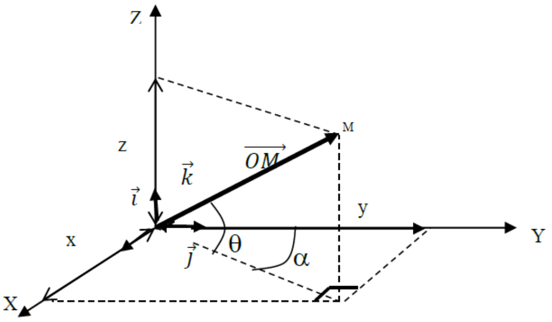


Fig I.1 : Composantes d'un vecteur

I. 4.2. Notion de vecteur unitaire

A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire $\vec{u}$ qui a

la même direction que $\vec{a}$ et de orme égale à un. On obtient le vecteur unitaire en divisant le vecteur initial par son module :

$\vec{u}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\,\|}$

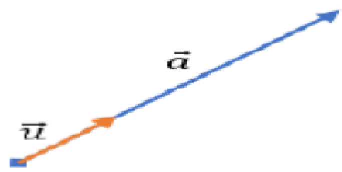


Fig.I.2 : vecteur unitaire $\vec{u}$

I.4.1 Composantes d'un vecteur

Comme il est présenté sur la figure I.2 Les composantes, (x, y, z), d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ sont les projections orthogonales du vecteur position sur les trois axes du repère. Dans ce cas le vecteur position s'écrit :

$$\vec{V} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Et a pour module: $\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

I.4.1.2 En coordonnées rectangulaires :

On décompose le vecteur $\vec{V}$ suivant l'axe des X et l'axe des Y, comme indiqué sur la fig.1.3

$\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y$ ou $V_X = V\cos\alpha$ et $V_y = V\sin\alpha$

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$,

respectivement dans les directions des

deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

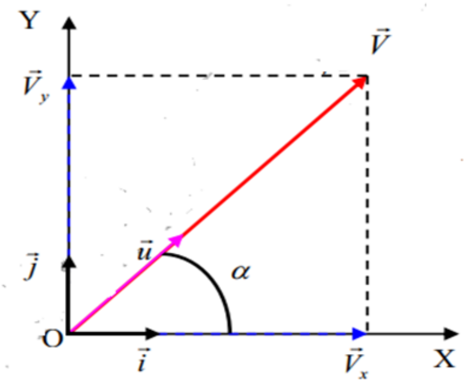


Fig.I.3 coordonnées rectangulaires

$\vec{V} = V\cos\alpha\,\vec{\imath} + V\sin\alpha\,\vec{\jmath}$ or $\vec{V} = V\ \vec{u}$ d'où

$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{\imath} + \sin\alpha\,\vec{\jmath}$

Quant à la norme du vecteur V elle vaut :V $=\sqrt{x^2+y^2}$

* Dans l'espace : dans le repère R

(O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) (base orthonormée),

nous remarquons que:

$\vec{V} = \vec{V}x + \vec{V}y + \vec{V}z$ avec, V = Vx $\vec{\imath}$ + Vy $\vec{\jmath}$ + Vz$\vec{k}$ (fig. I-4)

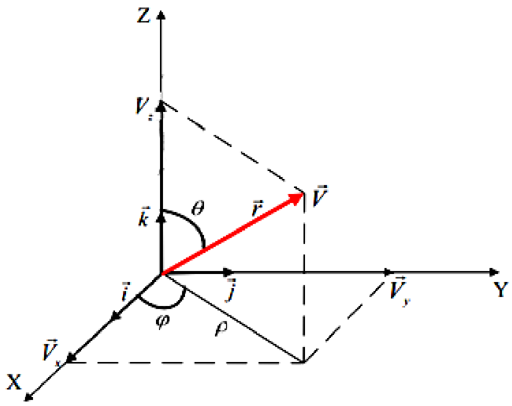


Fig1.4.composantes d'un vecteur

Nous pouvons nous assurer géométriquement que :

$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \Longrightarrow V_z = r\cos\theta$

$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{\rho}{r} \Longrightarrow \rho = r\sin\theta}$

$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Longrightarrow V_x = \rho\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$

$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Longrightarrow V_x = \rho\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi$

En résumé :

$V_x = r\sin\theta\cos\varphi$; $V_y = r\sin\theta\sin\varphi$; $V_Z = r\cos\theta$

I.5. Produit scalaire entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ leur produit scalaire est un produit qui donne comme résultat un scalaire, (Fig.I- 5).

$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = V_1 . V_2 \cos\theta$ Tel que θ est l'angle entre les deux vecteurs, Ce produit admet quelques propriétés

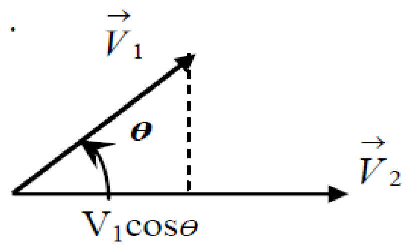


Fig.1.5 produit scalaire

tel que : $\vec{\imath} . \vec{\imath} = \vec{\jmath} . \vec{\jmath} = \vec{k} . \vec{k} = 1$,

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\imath}.\vec{k} = \vec{\jmath}.\vec{k} = 0$.

$$\begin{cases} \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} > 0 \\ \theta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} < 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = 0 \end{cases}$$

Propriétés :

- $\vec{V}1.\vec{V}1 = V_1^2$.
- $\vec{V}1.\vec{V}2 = \vec{V}2.\vec{V}1$. on dit que le produit scalaire est commutatif.
- $\vec{V}1.(\vec{V}2 + \vec{V}3) = \vec{V}1.\vec{V}2 + \vec{V}1.\vec{V}3$.
- $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$.
- $(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1.\vec{V}_2)$.

Le produit scalaire peut être aussi exprimé en termes des composantes des vecteurs :

$$\vec{V}1.\vec{V}2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

I.6 Le produit vectoriel

Soient deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant un angleθ. Par définition, le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tel que :

1. la direction de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est orthogonale à chacun des deux vecteurs.
2. le sens de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ donne au triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ une orientation directe : cette orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur),illustrée ci-dessous.
3. la norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin(\alpha)|$$

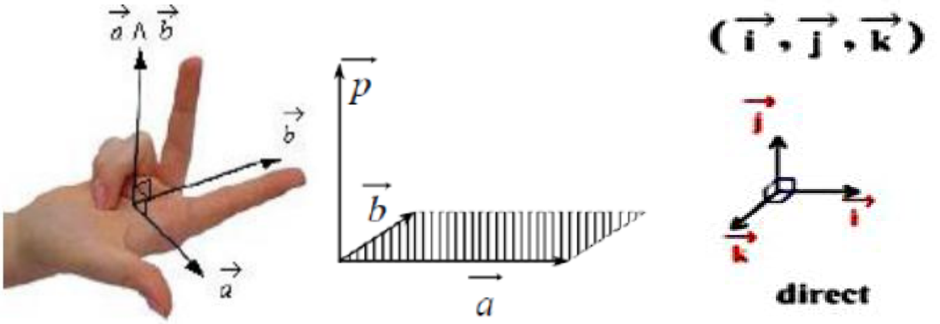


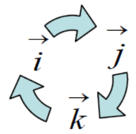
Fig I.6 : produit vectoriel

En termes de composantes des vecteurs, le produit vectoriel est exprimé de la façon suivante :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - y_2z_1 \\ x_2z_1 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

I.7. Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction ($\theta = 0$) ou l'un des vecteurs est nul.
- Le produit vectoriel est anticommutatif (antisymétrique) : $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$



$\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$; $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$ $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$.

On aura de même ; $\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} = -\vec{k}$, $\vec{\imath} \wedge \vec{k} = -\vec{\jmath}$ $\vec{k} \wedge \vec{\jmath} = -\vec{\imath}$

- Interprétation géométrique du produit vectoriel :

Le module, $\vec{a} \wedge \vec{b}$ du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ représente la surface du parallélogramme formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

$$\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = |\vec{a}|.|\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

$h = \text{b} \, sin(\vec{a}\,,\vec{b})$, donc $S = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = h.V_1$

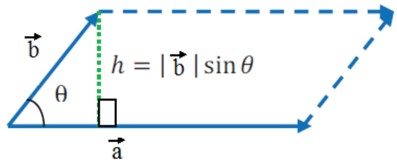


Fig I.7 : produit vectoriel

I. 8. Fonction à plusieurs variables

En Physique, nous avons souvent à étudier les fonctions de plusieurs variables indépendantes. Nous nous limiterons à trois notées x , y et z mais les résultats sont facilement généralisable.

Soit une fonction f (x, y, z), nous appellerons différentielle de f (notation df)

. Il existe des fonctions algébriques et des fonctions vectorielles à plusieurs variables.

Fonction algébrique à une seule variable, c'est une fonction qui ne dépend que d'une seule variable y =f (x).

* Fonction à plusieurs variables qui dépendent de deux ou plusieurs variables.

g = f (x, y) deux variables

g = f (x, y, z) trois variables

Sa différentielle totale s'écrit

$$dg = df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

Exemple

Soit la fonction suivante $f(x, y, z) = x^2 - yz$

sa différentielle totale est : $df = 2xdx - zdy - ydz$.

On vient de définir des fonctions algébriques à plusieurs variables. Il existe aussi des fonctions vectorielles à plusieurs variables :

$$\vec{V} = \text{f}\,(\text{x},\text{y},\text{z})\vec{\imath} + \text{g}\,(\text{x},\text{y},\text{z})\vec{\jmath} + \text{h}(\text{x},\text{y},\text{z})\vec{k}$$

I.9 Opérateurs

I.9.1. Le Gradient

C'est des grandeurs mathématiques qui agissent sur ces fonctions.

L'opérateur Nabla qui est un vecteur qui agit sur les fonctions.

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Lorsqu'il agit sur les fonctions algébriques, les transforme en fonctions vectorielles

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=\overrightarrow{grad}f(x,y,z)$$

Et transforme les fonctions vectorielles en fonctions algébriques

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).(f(x,y,z)\vec{\imath}+g(x,y,z)\vec{\jmath}+\mathrm{h}(x,y,z)\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=div\vec{V}.$$

*Si f (x, z, y) est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z)=\vec{\nabla}.f=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

Exemple : Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z)=3x^2y^3z$

Réponse : $\overrightarrow{grad}f(x,y,z)=6xy^3z\vec{\imath}+9x^2y^2\vec{\jmath}+3x^2y^3\vec{k}$

I.9.2. La Divergence

Si $\vec{V}=V_x\vec{\imath}+V_y\vec{\jmath}+V_z\vec{k}$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$div\vec{V}=\vec{\nabla}.\vec{V}=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Exemple 2.7 : Calculer la divergence de la fonction vectorielle.

$\vec{V}$ (x, y, z) = 2xy $\vec{\imath}$ − 3yz2 $\vec{\jmath}$ + 9xy3 $\vec{k}$

Réponse : $div\vec{V}=2y-3z^2$

I.9.3. Le Rotationnel

Si $\vec{V}(V_x,V_y,V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant:

$$\overrightarrow{rot\vec{V}}=\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath}+(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y})\vec{k}$$

Démarche à suivre :

Etablir la matrice suivante :

$$\overrightarrow{rot\vec{V}}=\begin{vmatrix}+\vec{\imath} & -\vec{\jmath} & +\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=\overrightarrow{rot\vec{V}}=\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{\jmath}+(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y})\vec{k}$$

Exemple: Calculer le rotationnel du vecteur : $\vec{V}$ (x, y, z) = 2xy $\vec{\imath}$ − 3yz^2 $\vec{\jmath}$ + 9xy^3 $\vec{k}$

Réponse : $\overrightarrow{rot\vec{V}} = (27xy^2 - 6yz)\,\vec{\imath} - 9y3\,\vec{\jmath} - 2x\,\vec{k}$

I.9.4 Le Laplacien

I.9.4.1 Définitions :

En coordonnées cartésiennes le laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient ou le gradient du divergent:

- Le laplacien d'une fonction algébrique est donné par la relation suivante

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \vec{\Delta}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Le laplacien d'une fonction vectorielle est donné par la relation suivante :

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(\vec{V}) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \vec{\Delta}(\vec{V}) = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$$

Exercices d'application

<u>Exercice 01 :</u>

Ecrire l'équation aux dimensions des grandeurs suivantes :

Grandeur	Equation aux dimensions	Unités de base
Force		
Pression		
Travail		
Puissance		
Charge		
Potentiel		
Capacité		
Resistance		
Conductance		
Champ Magnétique		
Inductance		

<u>Exercice 02 :</u>

Vérifiez la cohérence dimensionnelle des équations suivantes :

1. La Relation d'Einstein : $E = m.C^2$

2. L'énergie potentielle : $E = mgh$

Où E, m, g et h sont respectivement une énergie, une masse, une accélération et une hauteur.

Exercice 03 :

La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante : $\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$

1- En utilisant les dimensions, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$

2- En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Exercice 04 :

Soit à déterminer la masse volumique (ρ) de la substance d'un cube homogène à partir de la mesure de sa masse (m) et de son arête (a) .

Ecrire le résultat de la mesure.

Exercice 05 :

Soit la relation : $y = y_0 \,.\, e^{-\omega t}$

Calculer l'incertitude absolue sur $\boldsymbol{y}$ en fonctions des incertitudes absolues $\Delta\omega$,Δt, Δy_0 .

Exercice 06 :

Dans un repère orthonormé R(o,x,y,z), soient les trois points suivants :

A(-1,-2,1) ; B(-3,1,4) ; C(-1,2,-3) .

1- donner l'expression des vecteur $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

2- Déterminer les expressions de $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$, $\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$ et $\overrightarrow{OC}.(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$.

3- Déterminer l'angle entre les vecteur $(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$ et $\overrightarrow{OC}$.

Exercice 07 :

On donne les vecteurs suivants :

$\vec{r}_1 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{r}_2 = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{r}_3 = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

1- Calculer leurs modules.

2- donner l'expression et les modules des vecteurs :

$\vec{A} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$; $\vec{B} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3$

3. Determiner le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2$

Exercices supplémentaires

Exercice 01 :

Déterminez la dimension physique des constantes physiques intervenant dans les relations suivantes :

1. Loi d'attraction gravitationnelle

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

2. La période des oscillations d'un pendule simple

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Où F, r, m et k sont respectivement une force, une distance et une masse.

3. L'énergie transportée par un photon

$$E = h.\nu$$

où ν représente la fréquence du rayonnement correspondant.

4. l'énergie cinétique d'une molécule d'un gaz monoatomique a la température T :

$$E_C = \frac{3}{2} K.T$$

5. la force d'interaction électrique (loi de Coulomb) :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

Exercice 02 :

La loi de Stokes exprime la force de frottement **F** d'un fluide sur une sphère de rayon **r** en déplacement avec une vitesse **v** dans le fluide :

$$F = 6\pi\eta^a r^b v^c$$

Où η est la viscosité dynamique du fluide tel que : $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$.

En déduire les dimensions, trouver les exposants a, b et c

Exercice 04 :

Calculer l'incertitude relative sur la mesure de la capacité (*C*) d'un condensateur équivalent à deux condensateurs montés :

a. en parallèle
b. en série, et cela en fonction des précisions sur (C_1) et (C_2).

Solution des exercices

Solution 01 :

Grandeur	Équations aux dimensions	Unités de base	Noms
Force	MLT^{-2}	$kg.m.s^{-2}$	newton : N
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	$kg.m^{-1}.s^{-2}$	pascal : Pa
Travail	ML^2T^{-2}	$kg.m^2.s^{-2}$	joule : J
Puissance	ML^2T^{-3}	$kg.m^2.s^{-3}$	watt : W
Charge	$Q = IT$	A. s	coulomb : C
Potentiel	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$	$kg.m^2.s^{-3}\,A^{-1}$	volt : V
Capacité	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$	$kg^{-1}\,m^{-2}\,s^4\,A^2$	farad : F
Résistance	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$	$kg.m^2.s^{-3}\,A^{-2}$	ohm : Ω
Conductance	$M^{-1}L^{-2}TQ^2$	$kg^{-1}.m^{-2}.s^3\,A^2$	siemens : S
Champ magnétique	$MT^{-1}Q^{-1}$	$kg\,s^{-2}\,A^{-1}$	tesla : T
Inductance	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	$kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-2}$	henry : H

Solution 02 :

La masse volumique est par définition le rapport entre la masse et le volume c'est-à-dire elle admet comme dimension :

$[\rho] = ML^{-3}$ avec $[\rho] = \frac{[m]^x}{[l]^y\,[R]^2}$

Il vient que, $x = 1 \quad et \quad -y - 2 = -3 \Longrightarrow y = -1$

Donc, $\rho = \dfrac{m}{\pi l R^2}$

Solution 03 :

Calcul de la masse volumique : $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3} \Leftrightarrow \rho = 3.041 g/cm^2$

Nous déduisons l'incertitude absolue de l'incertitude relative
$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a} \Longrightarrow \Delta\rho = \rho\left(\frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta a}{a}\right)$ et par suite $\Delta\rho = 0.02 g/cm^2$.
D'où l'incertitude relative : $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.0063 = 6.3‰$

Ecriture de résultat de la mesure : $\rho = (3.01 \pm 0.02) g/cm^2$

Solution 04 :

Après introduction de la fonction logarithmique dans les deux membres de l'équation nous obtenons :

$$log\, y = log\, y0 + log e^{-\omega t}$$

Sa différentielle est :

$$dlogy = \mathrm{dlog}\, y_0 - d(\omega t)$$

Posons $X = \omega t \Longrightarrow \frac{dX}{X} = \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dt}{t} \Leftrightarrow dX = X\left(\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dt}{t}\right)$

D'où : $\frac{dy}{y} = \frac{dy_0}{y_0} + \omega t\left(\frac{d\omega}{\omega} + \frac{dt}{t}\right)$

On passe à l'incertitude relative pour en déduire l'incertitude absolue :

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta y_0}{y_0} + \omega t\left(\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{\Delta t}{t}\right) \Leftrightarrow \Delta y = y\left(\frac{\Delta y_0}{y_0} + t\Delta\omega + \omega\Delta t\right)$$

Solution 05:

$\overrightarrow{OA} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ $\quad \overrightarrow{OB} = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$ $\quad \overrightarrow{OC} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -9\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 7\vec{k}$ $\quad \left|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{131}$ $\quad \overrightarrow{OC}\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right) = 32$

Pour déterminer l'angle entre les vecteurs $\left(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right)$ et $\overrightarrow{OC}$, *il* suffit d'utiliser le produit scalaire ou vectoriel des deux vecteurs.

Donc soit $\vec{E} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = -9\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 7\vec{k}$ D'où $\vec{E}.\overrightarrow{OC} = E.OC\cos\left(\vec{E}, \overrightarrow{OC}\right)$

Il vient ; $\cos\left(\vec{E}, \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\vec{E}.\overrightarrow{OC}}{E.OC} = \frac{32}{\sqrt{131}.\sqrt{14}} = 0.0174 \Leftrightarrow \theta = \left(\vec{E}, \overrightarrow{OC}\right) = 89°$

Solution 06 :

$\|\vec{r}_1\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$; $\|\vec{r}_2\| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$; $\|\vec{r}_3\| = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$

$\vec{A} = 9\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$; $\|\vec{A}\| = \sqrt{81+4+16} = \sqrt{101}$

$\vec{B} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$; $\|\vec{B}\| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$.

$\vec{C} = 8\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$; $\|\vec{C}\| = \sqrt{74}$ et $\vec{u} = \frac{8\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}}{\sqrt{74}}$

Chapitre II

Cinématique Du Point

II.1 Introduction

La cinématique du point matériel est l'étude du mouvement des corps matériels en fonction du temps (la position, la distance parcouru, la vitesse, l'accélération…) sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement (les forces, l'énergie,…)

On suppose que le corps étudié est un point matériel. On considère que les dimensions du corps sont très petites devant la distance parcourue.

La notion du mouvement est relative. Un corps peut être, en même temps, en mouvement par rapport à un corps et en repos par rapport à un autre. Par conséquent, il est nécessaire de définir un repère pour déterminer la position, la vitesse ou l'accélération d'un mobile à un instant correspondant à la position du mobile par rapport à ce repère.

On définit plusieurs systèmes de coordonnées selon la nature du mouvement du point matériel. Cartésien, polaire, cylindrique et sphérique.

II.2 Étude Descriptive du mouvement d'un point matériel :

II.2.1 La position du mobile :

La position d'un mobile à un instant t est déterminée par rapport à un repère par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ qu'on appelle vecteur position. Son origine est le centre du repère O et son extrémité est le mobile M Fig(II.1). Suivant le repère cartésien dans l'espace R (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), le vecteur position s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Les composantes x, y et z du vecteur position dans la base cartésienne sont les coordonnées cartésiennes du mobile M. Ces coordonnées changent avec le temps car le mobile M est en mouvement : x(t), y(t), z(t).

Les fonctions x(t), y(t) et z(t) sont appelées les équations horaires du mouvement.

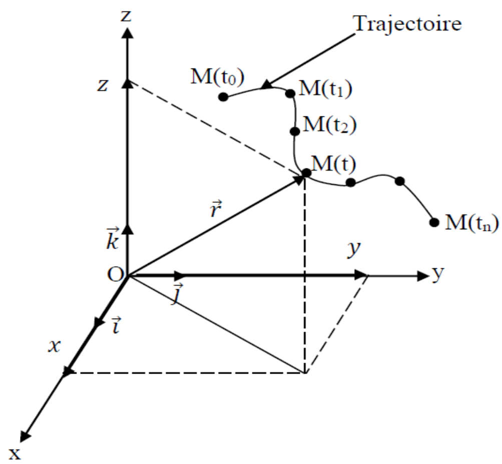


Fig.II.1 : Vecteur position

II.2.2. Équation de la trajectoire :

C'est la relation qui lie les coordonnées du mobile x, y, z entre eux indépendamment du temps. Pour trouver l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les équations horaires.

<u>Exemple</u> :

Les équations horaires d'un point ponctuel en mouvement dans le plan (O, x, y) sont :

$x = 2t$…….. (1)

$y = 2t + 1$….. (2)

De l'équation (1), on a $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}$. On remplace t dans l'équation (2), on aura :

$y = x + 1$

Cette équation de la trajectoire est l'équation d'une ligne droite de la forme $y = ax + b$ ce qui signifie que le mouvement est rectiligne.

II.3. Le vecteur déplacement :

Soient deux points M_1 à l'instant t_1 et un autre M_2 à l'instant t_2 (Fig. II. 2), On définit le vecteur $\overrightarrow{M1M2}$ le vecteur de déplacement

$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|\vec{u}$

Ou $\vec{u}$: est le vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$

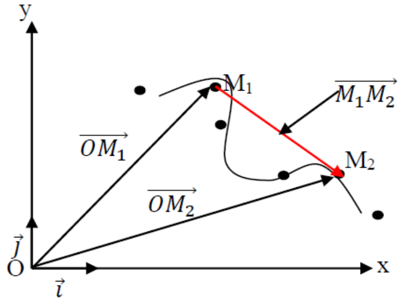


Fig.II.2 Vecteur déplacement

II.4. Le vecteur vitesse

II.4.1. La vitesse moyenne

La vitesse moyenne est la variation de la distance entre deux positions M_1, M_2 occupées par le mobile par rapport au temps écoulé entre ces deux positions.

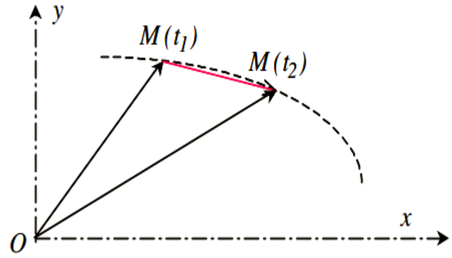


Fig.II.3 La vitesse moyenne

Elle est définit comme suit :

$\overrightarrow{v_m} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$ Le vecteur $\overrightarrow{v_m}$ parallèle au vecteur de déplacement. $\overrightarrow{M_1M_2}$

II.4.2. La vitesse instantanée

C'est la vitesse à un instant t donné et elle est définit comme suit :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur de la vitesse instantanée est tangent à la trajectoire et sa direction suivant la direction du mouvement.

Les coordonnées du vecteur vitesse suivant les coordonnées cartésiennes sont :

Soit: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Donc $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

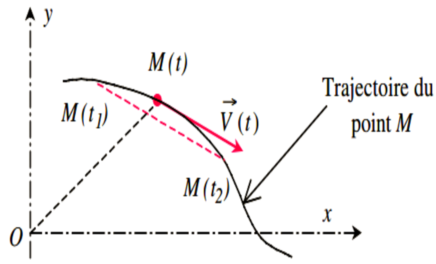


Fig.II.4 La vitesse instantanée

II.5. Le vecteur accélération

II.5.1. L'accélération moyenne

L'accélération moyenne est la variation de la vitesse entre deux positions par rapport au temps. Soit v_1 la vitesse du mobile à un instant t_1 et v_2 sa vitesse à instant t_2. Le mobile subit une accélération moyenne telle que : $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1}$

Le vecteur $\vec{a}$ est // à $\overrightarrow{\Delta v}$ et il se dirige vers la concavité de la trajectoire.

II.5.1 L'accélération instantanée

L'accélération instantanée est l'accélération à un instant t donné :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{a_m} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

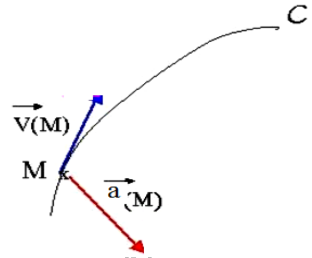


Fig.II.5 Accélération instantanée

II.6. Systèmes de coordonnées

II.6.1 Coordonnées Cartésiennes

II.6.1.1 Définitions

Soit le repère fixe orthonormé directe *R(O;X,Y,Z)* de base orthonormé directe R (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), Figure.II.1

Le vecteur position s'écrit alors:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

II.6.1.2 Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

En dérivant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Ou bien la notation suivante :

$\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$ où le point sur la variable signifie la dérivée par rapport au temps.

II.6.1.3 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Pour obtenir les expressions des composantes du vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées il faut dériver les expressions du vecteur vitesse obtenues dans le paragraphe précédent

Les coordonnées du vecteur accélération suivant les coordonnées cartésiennes sont: Soit:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$; ou bien $\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$

Où les deux points sur une variable signifie la dérivée seconde de la variable par rapport au temps.

II.7. Exemple de mouvement

Un mouvement peut se faire suivant des trajectoires rectilignes ou curvilignes ou suivant la combinaison des deux.

II.7.1. Mouvement rectiligne

Le mouvement rectiligne est caractérisé par une trajectoire sous forme d'une droite. Le mobile M est repéré par les coordonnées cartésiennes selon la droite Ox (si le mouvement est linéaire suivant Ox)

Le vecteur position s'écrit : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath}$

II.7.1.1 Mouvement rectiligne uniforme

Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par une vitesse constante et par conséquent l'accélération est nulle : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

Le vecteur Vitesse est : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath}$ Ou le module de la vitesse s'exprime : $v = \frac{dx}{dt} = C^{te}$

$$\frac{dx}{dt} = v \Leftrightarrow dx = v\,dt \text{ D'où } \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt$$

Avec : x_0 est l'abscisse (la position) de M à l'instant initiale t0

$$x(t) = v(t - t_0) + x_0\ (m)$$

Cette équation est appelée l'équation horaire du mouvement rectiligne uniforme

- Diagramme du mouvement rectiligne uniforme*:*

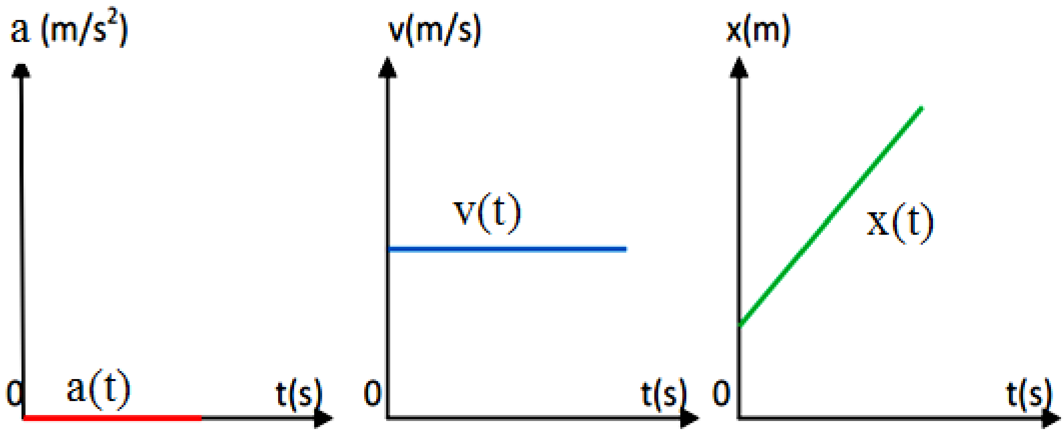


Fig.II.6. Le diagramme du mouvement

II.7.1.2. Le mouvement rectiligne uniformément varié

Rectiligne : mouvement en ligne droit (Trajectoire rectiligne : (x'Ox)

Uniformément varie : à accélération constante (a=Cte)

$$a = \frac{dv}{dt} = Cte({}^{m}/_{s^2}) \Leftrightarrow dv = a\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

Avec v_0 est la vitesse initiale à l'instant t0

$$v(t) = a\left(t - t_{0)}\right) + v_0\quad ({}^{m}/_{s})$$

D'autre part :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow dx = v(t)dt$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt = \int_{t_0}^{t} (a\left(t - t_{0)}\right) + v_0)dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2) + v_0(t - t_0) + x_0$$

Si t0=0, l'équation horaire du mouvement rectiligne uniformément varié devient :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \ (m)$$

Nature du mouvement :

Si $\vec{a}.\vec{v}$ >0, le mouvement est uniformément accéléré

Si $\vec{a}.\vec{v}$ <0, le mouvement est uniformément retardé

Remarque : relation indépendante du temps :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a\ dx = \frac{dv}{dt}dx$$

$$\int_{x_0}^{x1} a\ dx = \int_{v_0}^{v1} v\ dv$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - x_0)$$

- Diagramme du mouvement rectiligne uniformément varié:

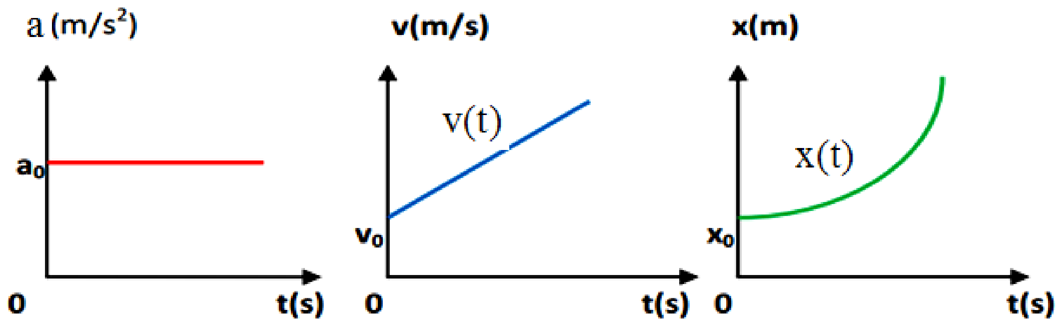


Fig.II.7. Le diagramme du mouvement

II.7.1.3. Mouvement rectiligne a accélération variable

II.7.1.3.1 Définition : Le mouvement d'un point matériel est dit rectiligne à accélération variable si sa trajectoire est une droite et que son accélération est en fonction du temps (**a = f (t)**).

Exemple : Soit un mobile ponctuel se déplace suivant une droite avec une accélération : a = 2t-1.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a\ dt = \int_{t_0}^{t} 2t - 1\ dt$$

On suppose à l'instant t_0=0s, v_0=0m/s et x_0=0m.

$$v = t^2 - t$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v\, dt = \int_{t_0}^{t} (t^2 - t)\, dt$$

$$x(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} (m)$$

II.7.2. Mouvement rectiligne sinusoïdal

II.7.2.1. Equation horaire

L'équation horaire du mouvement rectiligne sinusoïdal s'écrit sous la forme sinusoïdale en fonction du cosinus ou sinus tel que :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

X_m : est l'amplitude maximale

ω :est la pulsation du mouvement

φ : est la phase initiale et elle est déterminée par les conditions initiales

La vitesse est la dérivée de x(t) tel que:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

L'accélération est la dérivée de la vitesse telle que :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -x_m \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t)$$

- Diagramme du mouvement rectiligne sinusoïdal :

La (Fig. II-8) suivante représente les diagrammes du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal (pour simplifier nous avons choisi $\varphi = 0$)

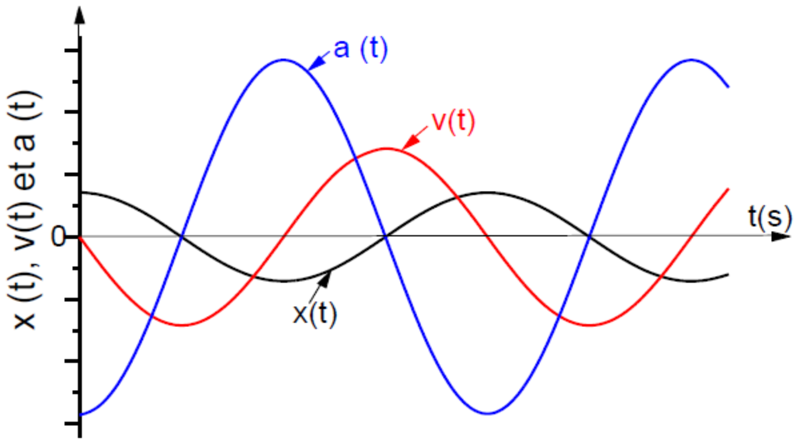


Fig. II-8. Déplacement, vitesse et accélération

Le mouvement rectiligne sinusoïdal est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\varpi}$ et une fréquence

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\varpi}{2}$$

II.7.3 Le mouvement dans le plan (Base polaire)

II.7.3.1 Définitions

C'est un système de coordonnées utilisé pour repérer la position d'un point *M* à deux dimensions. Ainsi, la position du point *M*, est repérée par la donnée de la distance *r*, qui le sépare de l'origine O et de l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *(OX)*.

On définit la base polaire par la base orthonormée,$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ tel que :

$\vec{u}_r$: Vecteur unitaire suivant la direction du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

$\vec{u}_\theta$: Vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_r$en faisant une rotation de π/2 du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

La base cartésienne est une base fixe alors que la base polaire est une base qui dépend du mobile M qui est en mouvement en fonction du temps.

Suivant les coordonnées cartésiennes, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

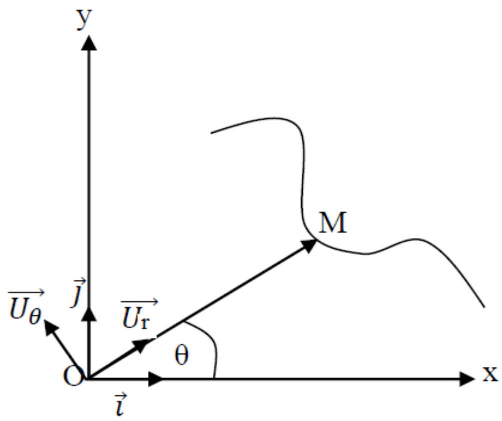


Fig.II. 9: **la base polaire** $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

On a donc ; $\begin{cases} r = |\overrightarrow{OM}| \ ; \ 0 < r < \infty \\ \theta = (\overrightarrow{OM}, \vec{\imath}) \ ; \ 0 < r < 2\pi \end{cases}$

Suivant les coordonnées polaires, $\overrightarrow{OM}$ s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

Remarque :

Les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sont (x, y) dans la base cartésienne alors que dans la base polaires les composantes de $\overrightarrow{OM}$ sont (r, θ).

- Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :

En utilisant le schéma dans la figure ci-dessus on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} ;\ cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ;\ \tan\theta = \frac{y}{x} \ ;\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

La base polaire s'écrit en fonction de la base cartésienne comme suit :.

$$\begin{cases} \vec{u}_r = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$

a. Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires on dérive le vecteur position en coordonnées polaires :

: $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt}$

$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

La dérivée du vecteur $\vec{u}_r$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) = \frac{d\theta}{dt}(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

b. Vecteur accélération en coordonnées polaires

On dérive l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{u}_r + \dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) + (\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(t) = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta$$

Par identification on obtient :

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & \text{composante radiale} \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} & \text{composante transversale} \end{cases}$$

II.7.4 Le mouvement curviligne [Base de Frenet (intrinsèque)]

Il s'agit d'un mouvement qui admet comme trajectoire une trajectoire curviligne. La courbure de la trajectoire nécessite la connaissance du rayon de courbure et le centre de courbure. Ce mouvement peut être modélisé comme un cercle de rayon ρ, qui dépend du temps (variable), de centre C et un angle θ exprimé en radian. La mesure s de la longueur de l'arc de cercle intercepté par cet angle est donnée par : $s = \rho$ θ. L'angle θ apparaît comme le rapport de deux longueurs et est sans dimension. Cette grandeur S s'appelle la coordonnée curviligne.

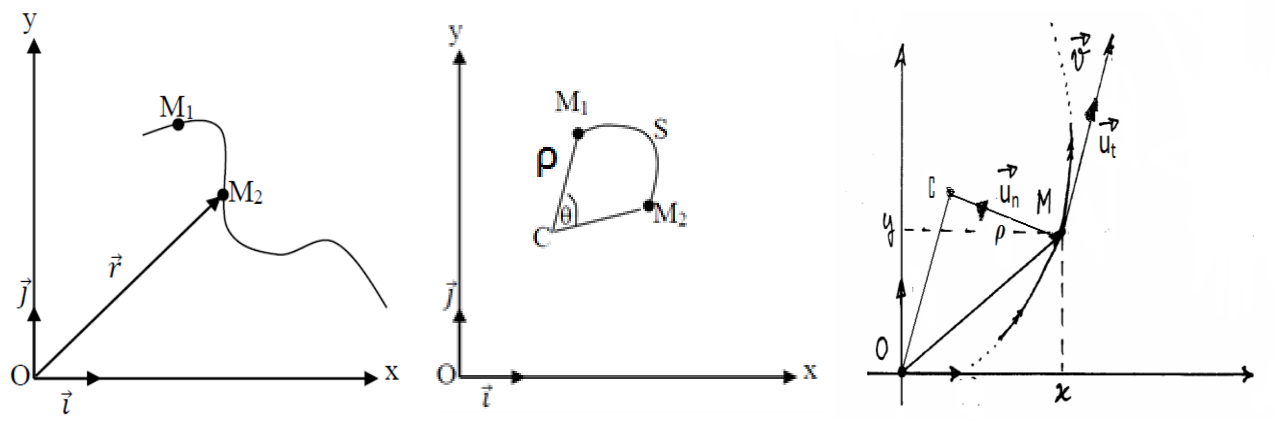


Fig.II.10 Les coordonnées curvilignes

La position du mobile est déterminée par l'abscisse curviligne S tel que : $S(t)= \rho\ \theta(t)$.

S est la longueur de l'arc $\widehat{M1M}2$. M1 est la position du mobile à l'instant t_1 et M_2 est la position du mobile à l'instant t_2.

➢ *Base de Frenet :*

La base de Frenet est une base reliée au mobile en mouvement curviligne. Elle est définit par la base orthonormé ($\overrightarrow{Ut}$, $\overrightarrow{Un}$) tel que :

$\overrightarrow{Ut}$ est un vecteur unitaire tangentiel à la trajectoire et en direction du mouvement ($\overrightarrow{Ut}$ est parallèle au vecteur vitesse $\vec{v}$)

$\overrightarrow{Un}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{Ut}$ et il est dirigé vers le centre de la courbure de la trajectoire.

La vitesse instantanée est définie par :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v\overrightarrow{Ut} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{Ut}$$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{Ut} + v\frac{d\overrightarrow{Ut}}{dt}$ D'où $\frac{d\overrightarrow{Ut}}{dt} = (-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})\frac{v}{\rho} = \frac{v}{\rho}\overrightarrow{U_n}$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{U}_t + v\dot{\theta}\vec{U}_n$$

D'autre part : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{1}{\rho} = \frac{v}{\rho}$

Donc ; $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{U}_t + \frac{v^2}{\rho}\overrightarrow{Un} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$

Tel que ; $\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{U_t}$ et $\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\ \vec{U}_n$

$\overrightarrow{a_t}$ est l'accélération tangentielle (suivant un axe tangentiel au mouvement) et $\overrightarrow{a_n}$ est l'accélération normale (suivant un axe normale au mouvement et orienté vers le centre de courbure).

C'est la résultante de deux accélération voir Fig.II. 11.

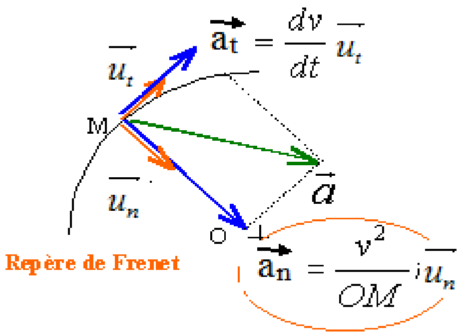


Fig.II. 11. L'accélération tangentielle et normale

Propriétés

- Dans le cas d'un mouvement curviligne uniforme

Si $|v|$ est constant donc l'accélération tangentielle a_t est nulle. On dit que le mouvement et curviligne uniforme :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad et\ a(t) = \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\ \overrightarrow{U_n}$$

- Dans le cas d'un mouvement rectiligne

le rayon de courbure tend vers l'infini, l'accélération se réduit à une composante tangentielle.

II.7.4.1 Détermination du rayon de courbure

ρ: est le rayon de courbure de la trajectoire qui est déterminé comme suit :

$$\vec{a} \wedge \vec{v} = \left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\ \vec{u}_n\right) \wedge v\vec{u}_t$$

$$\vec{a} \wedge \vec{v} = \frac{v^3}{\rho}(\vec{u}_t \wedge \vec{u}_n)$$

$$|\vec{a} \wedge \vec{v}| = \frac{v^3}{\rho}$$

$$\rho = \frac{v^3}{|\vec{a} \wedge \vec{v}|}$$

On remarque que le rayon de courbure est une grandeur algébrique, il peut etre calculer dans n'importe quelle base.

II.7.4.2 Détermination du Centre de courbure : $C\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OC} = x_c\vec{\imath} + y_c\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OM} + \rho\vec{u}_n$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\vec{u}_n \Longrightarrow \vec{u}_n = \frac{\rho}{v}\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)}{dt} \quad donc\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \frac{\rho}{v}\frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v}\right)}{dt}$$

Le centre de courbure est un point qu'on cherche à repérer dans une base, pour cela il est judicieux de trouver l'expression du vecteur position de ce point.

II.8 Le mouvement circulaire

Le mouvement circulaire est un mouvement dont la trajectoire est un cercle de rayon R constant. L'équation de la trajectoire est comme suit :

$$(x - x_0) + (y - y_0) = R^2$$

R est le rayon du cercle et (x_0, y_0) sont les coordonnées du centre du cercle. Le vecteur position s'écrit suivant les coordonnées polaires comme suit :

$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$

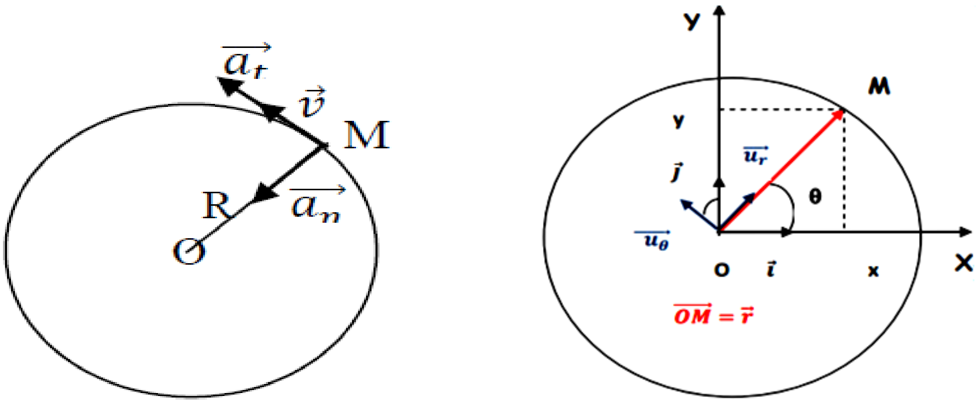


Fig.II.12. Mouvement circulaire

a- Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

b- Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

L'accélération est la somme de l'accélération tangentielle $a_\theta = R\,\dot{\theta}$ et l'accélération normale $ar = R\,\theta^2$ qui s'écrient suivant la base de Frenet comme suit :

$$\vec{a}_t = R\ddot{\theta}\vec{u}_t \qquad et \qquad \vec{a}_n = R\dot{\theta}^2\vec{u}_n$$

$\dot{\theta} = \omega$ est appelée la vitesse angulaire.

Si le module de la vitesse v ou la vitesse angulaire ω est constante, on dit que le mouvement est circulaire uniforme. L'accélération dans ce cas est :

$$\vec{a}_n = R\omega^2\vec{u}_n$$

II.9 Mouvement suivant les coordonnées cylindriques ((dans l'espace)

Pour obtenir le système de coordonnées cylindriques il suffit de compléter le système de coordonnées polaires (dans le plan xOy) par un troisième axe : l'axe Oz avec sa coordonnée cartésienne z (appelée la cote).voir Fig.II.13

La base cylindrique est déterminée par les vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k})$. Voir Fig.II.13

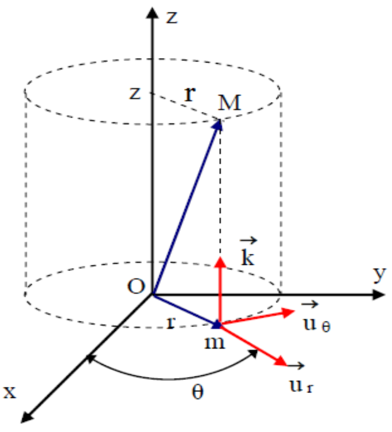


Fig.II 13 La base cylindriques (O, $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{k}$)

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit suivant les coordonnées cylindriques comme suit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$$

Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

La base cylindrique s'écrit en fonction de la base cartésienne comme suit :

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Alors : L'expression du vecteur vitesse sera :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(r\vec{u}_r + z\vec{k}\right)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Nous rappelons que :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r \quad ; \quad \dot{\vec{k}} = \vec{0}$$

D'où :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$$

L'expression du vecteur accélération sera :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k})$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

II.10 Mouvement suivant les coordonnées sphériques

Les coordonnées sphériques permettent de repérer un point sur une sphère de rayon $OM = R$. C'est typiquement le repérage d'un point sur la Terre pour lequel il suffit alors de préciser deux angles : latitude et la longitude. Ces Vecteurs unitaires sont : $(\vec{u}_R, \vec{u}_{\theta,} \vec{u}_\varphi)$. Voir figure II.14

On définit *M* par la longueur

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_R$$

$$\begin{cases} R = |\overrightarrow{OM}| \ ; \qquad 0 < r < \infty \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}\right) \ ; \ 0 < r < \pi \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{Om}, \vec{i}}\right) \ ; \ 0 < r < 2\pi \end{cases}$$

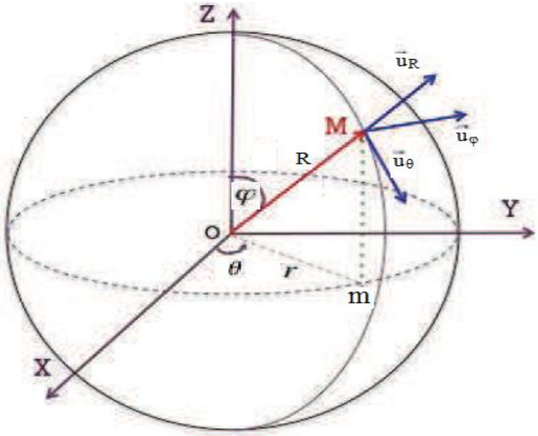


Fig II.14. les coordonnées sphériques

- Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Sachant que r=$R\sin\varphi$, donc :

$$\begin{cases} x = \mathrm{R}\sin\varphi \, cos\theta \\ y = \mathrm{R}\sin\varphi \, sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Ces relations peuvent être inversées, pour exprimer les coordonnées sphériques en termes des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \ ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

La base $(\vec{u}_R, \vec{u}_{\theta,} \vec{u}_\varphi)$ est reliée à la Base des coordonnées cartésiennes par les relations:

$$\begin{cases} \vec{u}_R = sin\theta \ cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta \ sin\varphi\vec{\jmath} + cos\theta\vec{k} \\ \vec{u}_{\theta,} = cos\theta cos\varphi\vec{\imath} + cos\theta \ sin\varphi\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k} \\ \vec{u}_\varphi = -sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath} \end{cases}$$

a- Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(R\vec{u}_R)}{dt} = \frac{dR}{dt}\vec{u}_R + R\frac{d\vec{u}_R}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_R}{dt} = \dot{\varphi}(cos\varphi cos\varphi\vec{\imath} + cos\varphi \ sin\theta\vec{\jmath} - sin\varphi\vec{k}) + \dot{\theta}(-\sin\varphi \ sin\theta\vec{\imath} + sin\varphi \ cos\theta\vec{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{u}_R}{dt} = \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\vec{u}_\theta$$

D'où : $\vec{v} = \dot{R}\vec{u}_R + R\dot{\theta}sin\varphi\vec{u}_\theta$

b- Vecteur accélération en coordonnées sphériques

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{R}\vec{u}_R + R\dot{\theta}sin\varphi\vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 - R\dot{\theta}^2 sin^2\varphi\right)\vec{u}_R + \left(R\ddot{\theta}sin\varphi + 2\dot{R}\dot{\theta}sin\varphi + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}cos\varphi\right)\vec{u}_\theta + (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi} - R\dot{\theta}^2 sin\varphi\ cos\varphi)\vec{u}_\varphi$$

II.11 Mouvement relatif

II.11.1 Introduction

En physique Newtonienne, on distingue deux types de repères :

- **Repère absolu** : mouvement d'un corps par rapport a un référentiel supposé fixe appelé référentiel absolu.
- **Repère relatif** : peut être animé de deux mouvements simples par rapport au repère fixe.

Soit un point M en mouvement par rapport à un repère mobile $\Re'$(O', x', y', z') lui même en mouvement par rapport à un repère fixe $\Re$ (O, x, y, z).Voir Fig.II.15

a- La position :

La position de M par rapport au repère fixe $\Re$ (position absolue) :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

La position de M par rapport au repère mobile $\Re'$ (position relative) :

$$\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

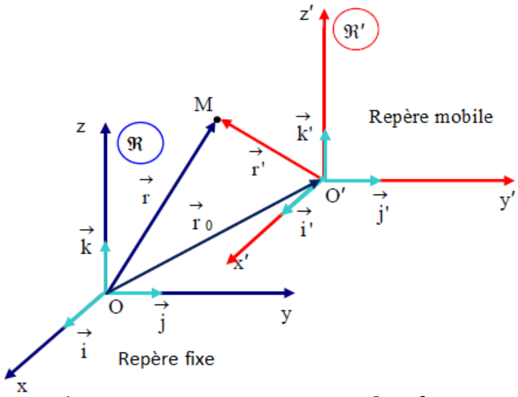


Fig. II.15. Mouvement relatif

II.11.2 Calcul de la vitesse et l'accélération

b- Composition des vitesses :+

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$

La vitesse absolue est la vitesse de M par rapport au repère fixe $\Re$:

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

La vitesse absolue est composée de la vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$ et la vitesse relative $\vec{v}_r$ tel que :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt} \quad ; \quad \vec{v}_r = \frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}$$

Donc : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$

Ou : $\vec{v}_a$: vitesse absolu est La vitesse de M dans le référentiel $\mathfrak{R}$

$\vec{v}_e$: vitesse d'entrainement est définie comme étant la vitesse que le point M acquiert dans le repère absolu

$\vec{v}_r$: vitesse relative est la vitesse de M dans le référentiel $\mathfrak{R}'$

c- Composition des accélérations

L'accélération absolue est l'accélération de M par rapport au repère fixe $\mathfrak{R}$ et est donnée par :

$$\vec{a}_a = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a}_a = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}\right] + 2\left[\frac{d\overrightarrow{x'}}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{y'}}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right] + \left[\frac{d^2\overrightarrow{x'}}{dt}\vec{i'} + \frac{d^2\overrightarrow{y'}}{dt}\vec{j'} + \frac{d^2\overrightarrow{z'}}{dt}\overrightarrow{k'}\right]$$

L'accélération est composée de trois accélérations :

L'accélération relative : $\vec{a}_r = \frac{d^2\overrightarrow{x'}}{dt}\vec{i'} + \frac{d^2\overrightarrow{y'}}{dt}\vec{j'} + \frac{d^2\overrightarrow{z'}}{dt}\overrightarrow{k'}$

L'accélération d'entrainement : $\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}$

L'accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = 2\left[\frac{d\overrightarrow{x'}}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{y'}}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right]$ qui est due à une force inertielle agissant perpendiculairement à la direction du mouvement d'un corps en déplacement dans un référentiel lui-même en rotation uniforme.

Donc : $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

Deux cas de mouvement de $\mathfrak{R}'$ peuvent être, en translation et en rotation, la vitesse absolue et relative garde la même expression par contre la vitesse d'entrainement se met différemment.

- **Cas de Translation**

$\mathfrak{R}'$ en translation par rapport à $\mathfrak{R}$

$\vec{i} = \vec{i'}$; $\vec{j} = \vec{j'}$; $\vec{k} = \overrightarrow{k'}$

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \frac{d\vec{j'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{0}$$

La vitesse d'entrainement devient :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$$

L'accélération d'entrainement devient :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

Et l'accélération de Coriolis s'annule : $\vec{a}_c = \vec{0}$

➢ **Cas de rotation**

Si $(\Re')$ est en rotation par rapport à $(\Re)$, on définit un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{k'}$ (Ω est la vitesse angulaire), voir Fig.II.16

On sait que n'importe quel vecteur en rotation par rapport à l'axe perpendiculaire sa dérivé dans le temps est :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \quad ; \quad donc\ \frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i'}$$

La vitesse d'entrainement devient :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

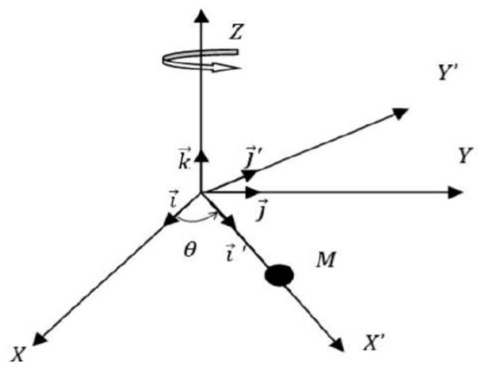


Fig. II.16. Vecteur rotation$\vec{\boldsymbol{\Omega}}$

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(\vec{\Omega} \wedge \vec{i'}) + y'(\vec{\Omega} \wedge \vec{j'}) + z'(\vec{\Omega} \wedge \vec{k'})$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge (x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'})$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

d- Accélération

On a : $\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i'}$

D'où : $\frac{d^2\vec{i'}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{i'}\right) + (\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{i'}}{dt})$

$$\vec{a}_e = x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt}$$

$$\vec{a}_e = x'\left[(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{i'}) + (\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{i'}}{dt})\right] + y'\left[(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{j'}) + (\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{j'}}{dt})\right] + z'\left[(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{k'}) + (\vec{\Omega} \wedge \frac{d\vec{k'}}{dt})\right]$$

$$\vec{a}_e = \left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge x'\vec{i'}\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge x'\ \frac{d\vec{i'}}{dt}\right)\right] + \left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge y'\vec{j'}\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge y'\ \frac{d\vec{j'}}{dt}\right)\right] + \left[\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge z'\vec{k'}\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge z'\ \frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right]$$

$$\vec{a}_e = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \left(\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)\right)$$

Pour l'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{d\vec{x}}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{d\vec{y}}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{d\vec{z}}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt}\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{d\vec{x}}{dt}(\vec{\Omega}\wedge\vec{i}) + \frac{d\vec{y}}{dt}(\vec{\Omega}\wedge\vec{j}) + \frac{d\vec{z}}{dt}(\vec{\Omega}\wedge\vec{k})\right]$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\wedge\left[\frac{d\vec{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\vec{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\vec{z}}{dt}\vec{k}\right]$$

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r)$$

Exercices d'application

Exercice 01 :

un point matériel se déplace dans le plan (xOy) suivant les équations horaires suivantes :

$$x(t) = t \quad et \quad y(t) = t^2$$

1. donner l'équation de mouvement du mobile
2. calculer la vitesse ainsi que l'accélération du pt M.

Exercice 02 :

Un point matériel se déplace sur l'axe $x'ox$ de façon qu'entre le carré v^2 de sa vitesse et son abscisse x , il existe la relation $\boldsymbol{v^2 = Ax + B}$, où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont des constantes.

1/ Calculer l'accélération du mobile. Que peut-on dire du mouvement ?

2/ Connaissant la nature du mouvement, trouver par une autre méthode les valeurs de A et B en fonction des caractéristiques du mouvement.

Exercice 03 :

Un homme au sommet d'un immeuble lance une boule verticalement vers le haut avec une vitesse $12 m.s^{-1}$. La boule atteint le sol 4,25s plus tard.

1/ Quelle est la hauteur maximale atteinte par la boule ?

2/ Quelle est la hauteur de l'immeuble ?

3/ Avec quelle vitesse atteint-elle le sol ? $g = 9{,}8 ms^{-2}$

Exercice 04

On se propose d'étudier le mouvement d'un point matériel dans le système des coordonnées polaires, il décrit une trajectoire suivant une loi donnée par l'expression :

r=2acosθ avec θ=ωt (**a** et **ω** étant des constantes).

1- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées polaires

2- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leur normes, dans le système des coordonnes intrinsèques (Frenet).

3- Déterminer le rayon de courbure

4- Déterminer la vitesse et l'accélération de M ainsi que leurs normes, dans le système des coordonnées cartésiennes.

Exercice 05 :

Un point matériel A décrit une courbe plane de coordonnées polaires :

$$\theta = t \qquad et \quad r = R \quad \text{Tel que R constant}$$

1. Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération. Déduire leurs normes.
2. Exprimer la vitesse et l'accélération dans la base intrinsèque (Frenet).
3. Quel est le rayon de courbure ρ de la trajectoire ?

Exercice 06 :

Un avion se dirige vers le nord ouest avec une vitesse de 125km/h par rapport à un observateur lié à la terre. Si le vent souffle vers l'ouest avec une vitesse de 50km/h par rapport au même observateur.

Trouver la vitesse de l'avion et sa direction.

Exercices supplémentaires

Exercice 01 :

Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire :

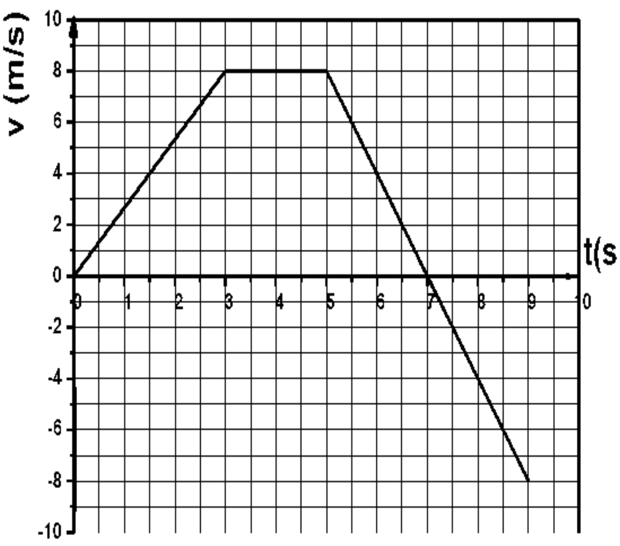
$$x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1 \ \text{(m)}$$

a/ Calculer la vitesse et l'accélération à la l'instant ***t*** .

b/ Etudier le mouvement du point lorsque **t** croît de 0 à $+\infty$

Exercice 02 :

Soit un mobile se déplaçant suivant un axe x'ox. Son diagramme des vitesses est donné ci-dessous. A l'instant t = 0s, le mobile se trouve à x = 0 m.



1- Représenter le diagramme des accélérations.

2- Préciser les différentes phases du mouvement. Justifier.

3- Déterminer la distance parcourue entre les instants t = 0s et t =9s.

4- Donner les positions du mobile aux instants t=6s et t=9s.

5- Représenter les vecteurs vitesses et accélérations à ces mêmes instants.

Exercice 03 :

Une comète se déplace dans le système solaire. Sa position a pour expression :

$$x(t) = (t-1) \quad et \;\; y(t) = \frac{t^2}{2}$$

On suppose que la comète reste dans le plan (O, x, y).

1. Déterminez les composantes et le module des vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ En partant de

l'expression de l'accélération normale en fonction du rayon de courbure $\boldsymbol{\rho}$, démontrez la relation :

$$\rho = \frac{v^3}{\|\vec{v} \wedge \vec{a}\|}$$

En déduire le rayon de courbure ρ de la trajectoire en fonction de t.

2. Déterminez l'expression de l'accélération tangentielle $\vec{a}_T$
3. En déduire celle de l'accélération normale $\vec{a}_N$

Exercice 04 :

Une particule décrivant une trajectoire curviligne dans le plan (ox, oy) est repérée, en coordonnées polaires par les équations :

$$r(t) = r_0 e^{\frac{-t}{a}} \;\; et \;\; \theta(t) = \frac{t}{a}$$ (r_0 et a sont des constantes positives)

1- Donner l'expression du vecteur vitesse de cette particule.

2- Montrer que l'angle$(\vec{V}, \vec{u}_\theta)$ est constant. Quelle est sa valeur ?

3- Donner l'expression du vecteur accélération.

4- Montrer que l'angle entre le vecteur accélération et la normale $(\vec{a}, \vec{u}_N)$ est constant.

Donner sa valeur (On se servira de la question 2).

5- Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 05

L'unité de longueur est le centimètre, l'unité de temps est la seconde.

Une automobile se déplace en mouvement rectiligne. Son accélération est donnée par $a = -\frac{\pi^2}{4}\, x$

Tel que , à la l'instant $t = 1s$, on ait l'abscisse $x = 4cm$ et la vitesse $v = 2\pi \; cm.s^{-1}$.

1/ déterminer la nature du mouvement, écrire son équation horaire.

2/ calculer toutes les constantes qui caractérisent le mouvement,

3/ montrer que *x* peut s'écrire sous la forme : $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

Exercice 06 :

Un repère $R'(OX'Y')$ en rotation par rapport à un repère $R(OXY)$ fixe, suivant l'axe (OZ), avec une vitesse angulaire w constante. On considère l'angle θ entre l'axe (OX) et (OX') tel que $\theta = \omega t$. Soit un mobile M suivant l'axe (OX') et obéissant à la relation suivante

$$\overrightarrow{OM} = ae^{-t}\,\vec{i}' \quad avec\ \ a = Cte$$

a. Déterminer la vitesse relative, d'entrainement et absolue

b. Déterminer l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue.

Exercice 07 :

Dans un repère $R'\ (O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, les coordonnées cartésiennes d'un objet matériel *M* sont données en fonction du temps : $x' = t^2 + 3t\ ;\ \ y' = t\ ;\ \ z' = -t^3$

Le repère R' est en mouvement de translation rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\vec{u}$= (−3, 0, +5) par rapport à un repère (absolu). *R*

1. Trouver l'expression du vecteur vitesse de *M* par rapport au repère *R*
2. En déduire les coordonnées de M dans le repère *R*, sachant qu'à l'instant $t = 0$, dans le repère *R*, *M* est au point (0, 1, 0).
3. Calculer l'accélération relative et absolue de M.

Solution des exercices

Solution 01

1. Equation de la trajectoire : $y = x^2$
2. $\vec{v} = \vec{i} + 2t\,\vec{j}$
3. $\vec{a} = 2\,\vec{j}$

Solution 02 :

1/ On dérive les deux membres de l'équation par rapport au temps :

$$2v\frac{dv}{dt} = A\frac{dx}{dt} \quad , \quad 2v.a = A.v \Rightarrow a = \frac{A}{2}$$

Puisque l'accélération est constante et la trajectoire une droite, le mouvement est rectiligne uniformément varié.

2/ Détermination de A et B : $v = at + v_0 \Rightarrow\ v^2 = a^2t^2 + v_0^2 + 2a.v_0.t$

$$v^2 = a(at^2 + 2v_0t) + v_0^2 \Rightarrow\ v_0^2 = 2a(\frac{1}{2}\mathrm{at}^2 + v_0\mathrm{t}) + v_0^2 = 2\mathrm{a.x} + v_0^2 \longrightarrow (1)$$

D'après les données : $v_2 = Ax + B$ (2)

Par identification des deux équations (1) et (2) on en déduit : $A = \frac{a}{2}\ ;\ B = v_0^2$

Solution 03 :

1/ On choisit l'axe OZ orienté positivement vers le haut, son origine la terrasse de l'immeuble.
Le mouvement de la balle est uniformément varié. La balle atteint sa hauteur maximale quand sa vitesse s'annule, elle s'arrête alors pour tomber en chute libre. :

$$v^2 - v_0^2 = -2gh \Rightarrow \left| h = \frac{v_0^2}{2g} \right| \quad ; \quad h \cong 7.35m$$

2/ La hauteur de l'immeuble est égale à l'abscisse de la balle au moment de sa collision
avec le sol(soit à t □ □ 4, 2s) :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t \quad ; \quad |z| = 37.5m$$

3/ La vitesse de la collision de la balle avec le sol :

$$v = -gt + v_0 \quad ; \quad v = -29{,}65\ m\ s^{-1}$$

Le signe – résulte de l'orientation de l'axe.

Solution 04 :

$\vec{v} = 2a\omega(-\sin(\omega t)\vec{u}_r + \cos(\omega t)\,\vec{u}_\theta) \qquad \Longrightarrow |\vec{v}| = 2a\omega$

$\vec{a} = -4a\omega(\cos(\omega t)\vec{u}_r + \sin(\omega t)\,\vec{u}_\theta) \Longrightarrow \|\vec{a}\| = 4a\omega$

$\vec{a} = \left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N\right) = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$\vec{a}_T = \vec{0} \quad et\ puisque\ a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Longrightarrow a^2 - a_t^2 = a_n^2 \Longrightarrow a_n^2 = (4a\omega)^2$

$\rho = \frac{v^3}{|\vec{a}\wedge\vec{v}|} \quad avec\ \ |\vec{a}\wedge\vec{v}| = 8a^2\omega^3 \quad d'ou \quad \rho = a$ Cercle de rayon a

$r = 2a\cos\theta$ avec $x = r\cos\theta$ d'où $r_2 = 2a.x$

comme $r_2 = x^2 + y^2$ si on remplace l'expression de r dans cette dernière équation on aura

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$ c'est l'équation d'un cercle de rayon a et de centre (a, 0).

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ Avec $x = r\cos\theta\ \ et\ y = r\sin\theta$

Solution 05 :

1. L'expression de la vitesse : $\vec{v} = 6Rt^2\,\vec{u}_\theta \Leftrightarrow \|\vec{v}\| = 6Rt^2$

Et celle de l'accélération : $\vec{\gamma} = 12Rt(-3t^2\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$; $\|\vec{\gamma}\| = 12Rt\sqrt{9t^6+1}$

2. $\vec{v} = 6Rt^2\,\vec{u}_T$ et $\vec{\gamma} = \left(\frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N\right) = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_T = 12Rt \\ \gamma_N^2 = \gamma^2 - \gamma_T^2 \end{cases} \Longrightarrow \gamma_N = 36Rt^4$$

3. Détermination du rayon de courbure

$$\rho = \frac{v^2}{\gamma_N} = R$$

4. Pour calculer le centre de courbure, on détermine le vecteur

$$\overrightarrow{OC} = R\,\vec{u}_r + \frac{R^2}{6Rt^2}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

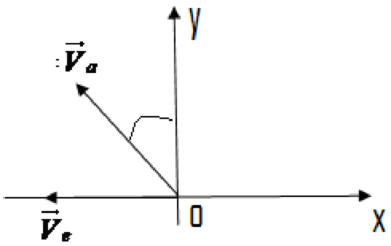
$\overrightarrow{OC} = R\,\vec{u}_r + \frac{R^2}{6Rt^2} - 6t^2\vec{u}_r = \vec{0}$ donc C(0,0)

$Avec\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -6t^2\vec{u}_r$

5. $\vec{v} = 6Rt^2\,\vec{u}_\theta \quad et\ \vec{v} = 6Rt^2\vec{u}_T \Longrightarrow \vec{u}_\theta = \vec{u}_T$

De la même façon pour les accélérations on compare l'accélération des coordonnées polaires avec celle des coordonnées de Frenet on trouve $\vec{u}_N = -\vec{u}_r$

Solution 06 :



$v_a = 125\ {km}/{h}$, $\quad v_e = 50\ {km}/{h}$

$\vec{v}_e = \begin{pmatrix} -v_e \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_a = \begin{pmatrix} -v_a \sin\alpha \\ v_a \cos\alpha \end{pmatrix}$

$\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e$

$\vec{v}_r = \begin{pmatrix} -v_a \sin\alpha + v_e \\ v_a \cos\alpha \end{pmatrix} = (-v_a \sin\alpha + v_e)\vec{\imath} + (v_a \cos\alpha)\vec{\jmath}$

$\vec{v}_r = -125\sin 45\vec{\imath} + 125\cos 45\vec{\jmath} + 50\vec{\imath} = -38.388\vec{\imath} + 88.388\vec{\jmath}$

$\|\vec{v}_r\| = 96.36\ {km}/{h}$

Chapitre III

Dynamique du point Matériel

II1.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, consacré à la cinématique, nous avons effectué une description géométrique du mouvement sans nous préoccuper des agents qui en sont la cause. Dans cette partie, nous abordons **la dynamique qui est la partie de la mécanique qui traite des causes du mouvement.** Elle permet de déterminer les causes d'un mouvement connu et de prédire le mouvement pour des causes données. En somme, il s'agit d'établir les relations entre les deux.

II1.2. Notion de force

Le mouvement d'une particule est le résultat de l'interaction entre cette particule et son environnement. Cette interaction, appelée **force**, est caractérisée par les propriétés de la particule (masse, charge, moment dipolaire …) et par la nature de l'environnement dans lequel elle est placée.

En physique, la force est une cause capable de produire ou de modifier le mouvement d'un corps, ou d'engendrer sa déformation. Il est possible de classer les forces en forces de contact ou actions à distance.

II1.3 Différentes forces :

Il existe plusieurs types de Forces :

- **Force de contact** : interaction entre deux corps en contact physique.

Exemple :

a. Les forces de frottement : les forces de frottement apparaissent lorsque deux corps en contact sont en mouvement relatif, l'un par rapport à l'autre. Elles s'opposent toujours au mouvement du corps considéré.

b. Les forces de tension : exercées sur un corps : ce sont des forces qui tirent sur un élément d'un corps comme par exemple, la tension exercée par un fil ou par un ressort.

- **Forces à distance** : ce sont des forces qui peuvent se manifester même s'il n'y a pas de contact physique entre les deux corps qui interagissent. Ces forces interviennent par l'intermédiaire de champs vectoriels.

Exemple :

a. Forces de gravitation : ce sont des forces d'attraction qui s'exercent entre des corps et qui sont dues à leurs masses. Le poids d'un corps et les forces échangées par les astres sont essentiellement des forces de gravitation.

b. les forces électriques : elles s'exercent entre deux objets portant des charges électriques. Elles peuvent être aussi bien attractives que répulsives.

c. les forces magnétiques : elles s'exercent entre des aimants, entre des aimants et certains matériaux (en particulier le fer) ou bien entre deux conducteurs parcourus par un courant électrique. Elles, aussi, peuvent être attractives ou répulsives.

II1.4 Le vecteur force

La force est représentée par un vecteur, tel que : (Fig.III.1)

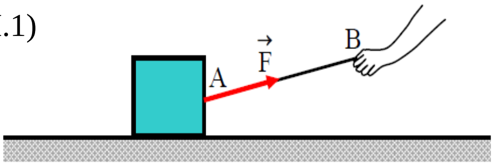


Fig III.1.vecteur force

1- la direction : droite selon laquelle l'action s'exerce (celle du fil de la Figure III.1) .

2- le sens : sens selon lequel s'exerce l'action (de A vers B, voir Figure III.1).

3- le point d'application : point où l'action s'exerce sur le corps (le point A).

4- le module : l'intensité de la force à laquelle est associée une unité adéquate.

II1.5 Interactions fondamentales

Malgré leur grande diversité, les forces rencontrées dans la nature sont les manifestations des quatre interactions fondamentales :

a- **l'interaction gravitationnelle :** elle se manifeste par une force d'attraction entre toutes les particules. Cette force apparaît dans la plupart des phénomènes décrits par l'astronomie et la géologie (le mouvement des astres, la montée des marées ; les corps attirés par la Terre en son voisinage, la non désagrégation de la Terre …).

b- **l'interaction électromagnétique :** elle se manifeste entre les charges électriques dans tous les phénomènes faisant intervenir l'électricité et/ou le magnétisme.

c- **l'interaction forte :** c'est l'interaction qui s'exerce entre les nucléons qui sont les constituants du noyau d'un atome. Elle permet aux particules composées de quarks, comme les protons et les neutrons, de ne pas se désagréger. Elle s'exerce à très courte distance et est responsable de la cohésion du noyau.

d- **l'interaction faible :** elle s'applique à toutes les particules de matière (quarks, électrons, neutrinos, etc...). En particulier, les neutrinos, qui sont électriquement neutres et qui ne sont pas des quarks, ne sont sensibles qu'aux interactions faible et gravitationnelle. L'interaction faible se manifeste dans certains types de réactions nucléaires telles que la radioactivité.

II1.6 Lois fondamentales de la dynamique

Les trois lois de Newton sont à la base de la mécanique classique. Ces lois ont été postulées sans démonstration mais elles sont en tel accord avec les expériences que leur validité ne pourrait être mise en doute (ils sont valables dans n'importe quel système galiléen).

II1.6.1 Première loi de Newton « Principe d'inertie »

- **Enoncé du principe d'inertie**

un corps isolé mécaniquement (un corps dont la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ reste au repos s'il est initialement au repos ou il garde son mouvement rectiligne uniforme ($\vec{a} = \vec{0}$) tant que la résultante des forces est nulle et ceci par rapport à un repère ou référentiel d'inertie.

II1.6.2 Référentiel d'inertie ou galiléen

Un référentiel d'inertie (ou galiléen) est un référentiel dans lequel un corps qui n'est soumis à aucune force ou qui subit des forces dont la résultante est nulle, sera au repos ou en mouvement rectiligne uniforme.

<u>Remarque</u> :

1- Un référentiel lié à la terre peut être considéré comme un référentiel d'inertie.

2- En réalité la Terre n'est pas vraiment un référentiel d'inertie, à cause de son mouvement orbital autour du soleil et de sa propre rotation autour de son axe. Cependant, dans le premier mouvement son accélération, dirigée vers le soleil, est de l'ordre de $4{,}4 \cdot 10^{-3}$m/ s^2 et dans le second, un point de l'équateur a une accélération additionnelle, dirigée vers le centre de la terre, d'environ $3{,}37 \cdot 10^{-2}$ m/ s^2. Ces deux accélérations, faibles devant celle de la pesanteur, peuvent être négligées.

3- Tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est aussi Galiléen.

II1.6.3 Exemples de référentiel Galiléens

- **Le Référentiel de Copernic (héliocentrique)**

Le référentiel de Copernic a pour centre le centre du système solaire et ses axes sont donnés par les directions de trois étoiles très éloignées (supposées fixes par rapport au soleil).

- **Référentiel géocentrique**

Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de la terre et ses axes ont des directions fixes qui sont celles du référentiel de Copernic.

- **Référentiel terrestre**

Un référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre. Son origine est donc un point de la planète et ses axes sont fixes par rapport à elle.

II1.7 Concept de masse

On sait tous que plus la masse d'un corps est grande, plus il est difficile de changer son vecteur vitesse ou changer son mouvement (sa direction). « Il est facile pour une personne de faire bouger une table que de faire bouger une armoire ». Il est donc nécessaire d'introduire une grandeur physique mesurant la capacité du corps à résister au mouvement qu'on souhaite lui imposer. Sachant que la masse d'un corps est proportionnelle à la quantité de matière qui le compose, en conséquence elle est d'autant plus grande que l'inertie de celui-ci est plus importante. **Ainsi, on peut considérer la masse comme une mesure de l'inertie.** C'est-à-dire que plus un objet aura une masse importante et plus il sera difficile de le faire accélérer, ralentir ou changer de direction.

II1.8 La quantité de mouvement

II1.8.1 Définition

On a vu précédemment que le mouvement d'un corps peut être influencé par la masse du mobile. Le concept de **quantité de mouvement** fournit une distinction quantitative entre les mouvements de deux particules de même vitesse mais de masses différentes. **C'est la grandeur qui combine une propriété cinématique du mouvement, la vitesse, et la masse.** La quantité de mouvement $\vec{P}$ d'une particule est définie comme étant le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$

Pour un système de N particules, la quantité de mouvement totale est :

$$\vec{P}_{tot} = \sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i$$

Ainsi, la quantité de mouvement est un vecteur ayant la même direction et le même sens que la vitesse et a pour unité SI le $Kg.m/s$.

Si la quantité de mouvement change en fonction du temps, on définit ce qu'on appelle l'impulsion : $\overrightarrow{dP}$

II1.8.2 Conservation de la quantité de mouvement

Pour un système isolé cette quantité de mouvement est constante :

$$\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{tot}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}} \vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{i}} = \mathrm{cte}$$

On dit que la quantité de mouvement est conservée.

➢ **Cas de deux particules en collision :**

Soit un système de deux particules m_1 et m_2.

a. Avant la collision les vitesses sont notées $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$

b. Après la collision les vitesses sont notées $\vec{V}_1'$ et $\vec{V}_2'$

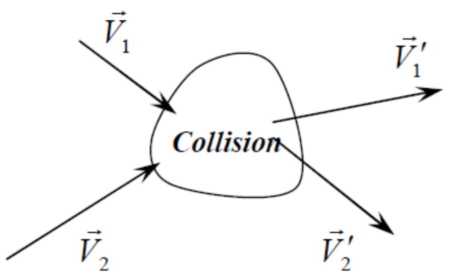


Fig III.2. Deux particules en collision

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$$

Ou ; $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'$

Remarques :

➢ Le principe de conservation de la quantité de mouvement n'a jamais été démontré théoriquement (c'est pour cela que nous l'appelons « principe »), mais il a été toujours vérifié expérimentalement.

➢ En réalité nous ne pourrons jamais trouver de système parfaitement isolés, mais si les forces extérieures sont négligeables par rapport aux interactions internes dans le système alors nous pourrons considérer le système comme *quasi-isolé*.

➢ Remarque sur le principe axiomatique (l'existence des référentiels galiléens et le principe d'inertie).

II1.9 Principe fondamentale de la dynamique : (2^{ième} lois de Newton) .

En mécanique newtonienne, la résultante des forces s'exerçant sur un corps est égale à la dérivée de la quantité de mouvement :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v})$$

Cette relation est valable est tant que la vitesse est très inférieure à celle de la lumière.

➢ **Cas particulier d'un corps à masse constante :** La masse étant constante, la dérivée de la quantité de mouvement s'effectue comme suit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = \frac{dm}{\underbrace{dt}_{=0}}.\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\ \vec{a}$$

Cette relation associe le terme cinétique qui est l'accélération et le terme dynamique qui est les forces exercées donc si on connait les forces (la résultante des forces) on peut déterminer la nature du mouvement d'un point matériel donné. Ainsi, la "relation fondamentale de la dynamique" (R.F.D.) pour un corps de masse constante est donnée par :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\ \vec{a}$$

II1.10 Principe d'action et de la réaction : 3^{ième} lois de Newton (principe des actions réciproques)

Si un objet (1) exerce une force, $\vec{F}1_{/_2}$, sur un autre objet (2), ce dernier exerce en retour une force, $\vec{F}2_{/_1}$, d'intensité égale mais de sens opposée:Fig.III.…

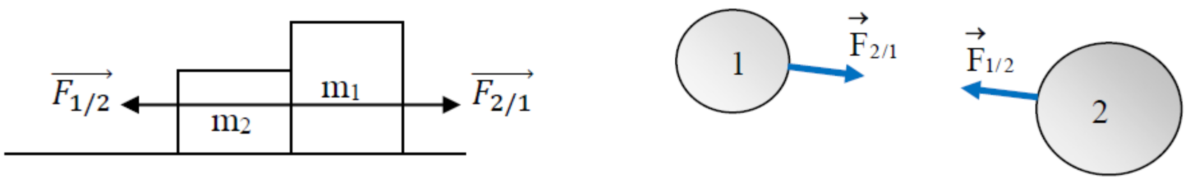


Fig.III.3. Principe de l'action **et** de la réaction

$$\begin{cases} \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \\ F_{1/2} = F_{2/1} \end{cases}$$

Propriétés :

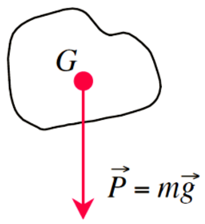
- Toute force est associée à une réaction.
- il est impossible de trouver une force qui agit de façon isolée ; toute force est associée à une réaction.
- Les forces sont de même nature. Il ne faut pas confondre avec la force du poids et la force de réaction (ces deux forces ne sont pas de même nature).

II1.11 Loi de Force

Dans cette partie, nous allons considérer les lois générales, dites lois de forces, établies pour un certain nombre d'interactions.

II1.11.1 Le poids d'une masse :

Soit une masse ponctuelle m, en interaction gravitationnelle avec la terre. (figure. III-4) ,Cette dernière agit sur la masse avec une force qu'on appelle poids de la masse et qui a pour expression:



$\vec{P} = m\vec{g}$ Tel que $\vec{g}$: est accélération de la pesanteur

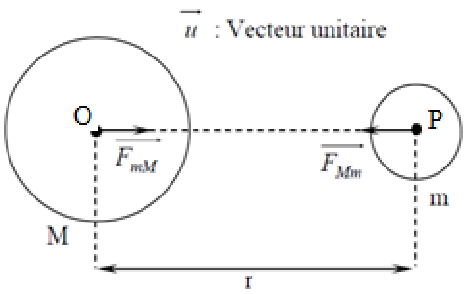
Fig III.4. poids d'une masse

La grandeur de $\vec{g}$ se situe entre 9,78 m/s^2 et 9,83 m/s^2 selon les endroits (plus fort aux pôles, plus faible vers l'équateur). Elle vaut environ 9.81 m/s^2 en Algérie.

II1.11.2 Force d'interaction gravitationnelle :

La loi de la gravitation universelle de Newton s'exprime comme suit :

Soit une masse M au point O en interaction avec une autre de masse m au point P, telle que la distance entre O et P est égale à r, s'érit :



$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{op}$$

Fig.III.5 Interaction gravitationnelle

Avec G = 6.726 .10^{-11} N m^2/kg^2 est la constante de gravitation universelle

La loi de gravitation obéit au principe de superposition : s'il y plus de deux corps, il faut considérer la présence de toutes les forces d'attraction exercées sur les corps.

II1.11.3 Force d'interaction coulombienne

L'interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour les charges électriques

$$|\vec{F}_{qq'}| = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qq'}{r^2} = K\frac{qq'}{r^2}$$

Avec $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 mc^2KgS^{-2}$

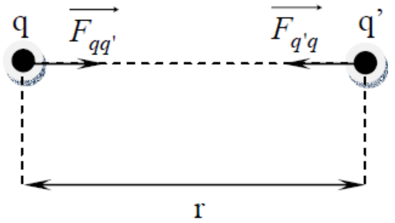


Fig.III.6. interaction coulombienne

II1.11.4 Notion de Champ

a- Champs gravitationnel :

➤ ***Cas au voisinage de la terre :***

Au voisinage de la terre la loi d'attraction universelle entre un corps de masse m et la terre (de masse M_T et de rayon R_T) s'écrit :

M_T et R_T sont la masse et le rayon de la terre respectivement tel que :

M_T = 5.98. 10^{24} kg et R_T = 6.37.10^6 m

$$\vec{F} = -m\vec{g}_0 = -G\frac{m.M_T}{{R_T}^2}\vec{u}$$

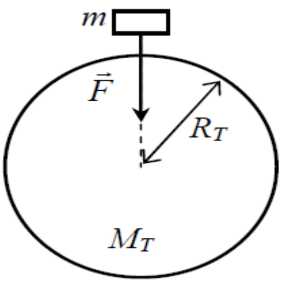


Fig.III.7. Champs gravitationnel

La gravitation $\vec{g}_0$ est :

$$\vec{g}_0 = G\frac{M_t}{{R_T}^2}\vec{u} \quad : \text{Champ de pesanteur}$$

Cette dernière expression est appelée champ de gravitation crée par m en tout point P de l'espace. Elle a la même dimension qu'une accélération..

➤ **Cas d' une hauteur h de la terre** ***:***

Champ de gravitation de la terre en un point P de l'espace situé à l'extérieur de la terre(Fig.III.8), ce champ a pour expression :

$$\vec{F}' = -m\vec{g}' = -G\frac{m.M_t}{r^2}\vec{u}_{op}$$

$$\vec{g}' = G\frac{M_t}{(R_T+h)^2}\vec{u}_{op}$$

Avec r = $R_T + h$

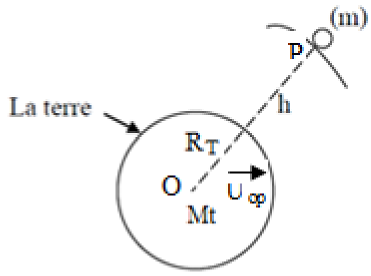


Fig.III.8. Champs gravitationnel à hauteur h

r : Représente l'altitude du point m par rapport au centre de la terre.

g_0 est le champ de pesanteur (9,8 m/s^2 près de la surface de la Terre).

$$\vec{g}' = \frac{r^2}{(R_T+h)^2}\vec{g}_0$$

D'où :

$$g' = \frac{r^2}{(R_T + h)^2} g_0$$

b- Champ électrique

Par analogie avec le champ de la pesanteur, on définit le champ électrique, tel que :

$$\vec{F}_{qq'} = q\vec{E}$$

Avec $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q'}{r^2} \vec{u}$

III.11.5 Interaction électromagnétique

La force que subit une charge électrique placée dans des champs $\vec{E}$ (électrique) et $\vec{B}$ (magnétique) est appelée forces électromagnétique ou force de Lorentz:

$$\vec{F} = \left(q\,\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

III.12 Les forces de contact ou forces de liaison

Ce sont les forces qui s'exercent entre deux corps en contact physique l'un avec l'autre. Cette définition fait intervenir trois éléments : **deux objets** que l'on met en contact par une **surface**.

Plusieurs facteurs influencent ces forces: la nature des matériaux en présence, le fini des surfaces, les corps interstitiels (contaminants, molécules adsorbées, débris d'usure, poussières, etc.…), la température et le degré de contamination des surfaces. Comme il est quasiment impossible de modéliser les forces de contact en prenant en compte toute les interactions microscopiques, elles sont déterminées de façon globale au moyen de méthodes expérimentales.

III.12.1 Réaction d'un support

On considère un corps solide posé sur une surface horizontale. Fig.III.9

L'action de la surface est d'empêcher la masse de s'enfoncer vers le bas sous l'action de son poids. $\vec{P}$ Cette action qui est une réaction $\vec{R}_n$ de la surface sur la masse est en équilibre avec le poids, d'où l'immobilité de la masse.

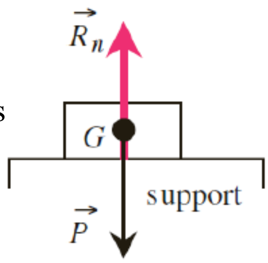


Fig III.9. Force de Réaction

Tel que $\vec{R}_n$: représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

$$\vec{P} + \vec{R}_n = m.\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_n = -\vec{P}$$

III.12.2 Forces de frottement

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet, soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement. Il existe deux types de frottement:

1. frottement visqueux (contact solide-fluide)
2. frottement solide (contact solide-solide)

a- Frottement visqueux

Un corps solide qui se déplace dans un fluide visqueux subit une force de frottement (résistance au mouvement) qui a les caractéristiques suivantes :

a. Sa direction est parallèle à la direction du mouvement.

b. Son sens est opposé au mouvement.

c. Son module est proportionnel à : la vitesse du solide, sa forme et la viscosité du milieu.

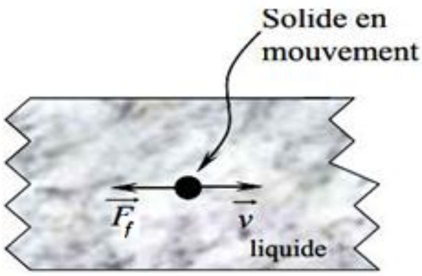


Fig III.10. Frottement visqueux

b- Cette force est donnée par la formule empirique suivante

$$\vec{F_f} = -K\eta\,\vec{v}$$

Tel que :

η : coefficient de viscosité du milieu.

k : est un facteur exprimant la forme du corps solide.

Remarque :

1. Parfois on trouve la force de frottement sous la forme

$\vec{F_f} = -\boldsymbol{K}\vec{v}$ avec $\boldsymbol{K} = K\eta$

2. La loi empirique précédente n'est valable que pour des vitesses réduites (quelques mètres par secondes), pour des vitesses plus grandes (quelques dizaines de mètre par secondes) l'expérience montre que la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse :

$$\vec{F_f} = -\boldsymbol{K}v^2\vec{u}$$

3. Pour des vitesses encore plus grandes on adopte une loi sous la forme

$\vec{F_f} = -\boldsymbol{K}v^n\vec{u}$ avec $n \geq 2$.

c- Frottements Solide–Solide :

Considérons un objet posé sur un plan horizontal. Celui ci est en équilibre sous l'action des deux forces $\vec{P}$ et $\vec{C}$ qui doivent être égales et opposées.

En exerçant sur lui une force de traction horizontale $\vec{F}$ graduellement croissante. On observera deux types de frottements: le "frottement statique" et le "frottement dynamique".

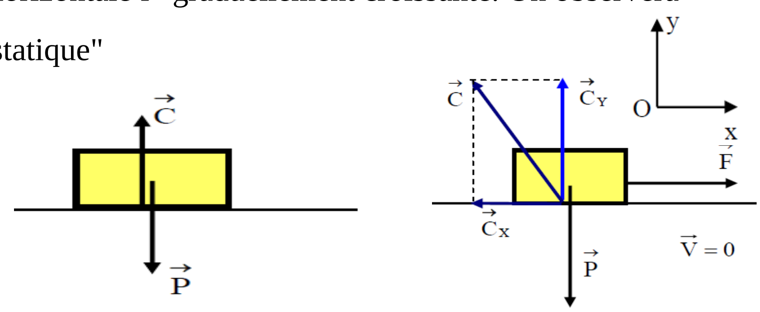


Fig III.11. frottement Solide–Solide

➢ **Le frottement statiques**

Exemple : soit les forces exercées sur un corps : $\vec{F}$,$\vec{C}_y$,$\vec{P}$ et la force de frottement statique $\vec{C}_x$ (figure III.11).

La force de frottement est la force qui s'oppose au mouvement du corps sur une surface plane. **Dans le cas statique**, le corps est au repos.

L'application de la deuxième loi de Newton met alors en évidence une force de contact $\vec{C}$ telle que :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F} = \vec{0}$$

D'où :

$$\vec{C} = -\vec{P} - \vec{F}$$

La projection géométrique de cette équation sur l'axe (Ox) donne :

$$C_x = -F$$

$\vec{C}_x$est une force d'adhérence qui s'oppose à $\vec{F}$ et au déplacement éventuel de l'objet vers la droite. De plus cette force est tangente à la surface de contact, elle est par définition une force de frottement. Comme le corps ne se déplace pas on dit que $\vec{C}_x$ est une force de frottement **statique.**

- **Cas de la rupture de l'équilibre**

Tout juste avant d'arracher le corps, la force statique C_x atteint sa valeur maximale et est associée à une adhérence limite :

$\left|\vec{C}_x\right|_{max} = \left|\vec{F}\right|_{limite}$ qui nous permet de définir le coefficient de frottement statique μ_S :

$$\mu_S = \left|\frac{\vec{C}_x}{\vec{C}_y}\right|$$

Les caractéristiques du coefficient de frottement statique

- ce coefficient, sans dimension, exprime la proportionnalité du module de la force limite de frottement, $\vec{C}_x$, et celui de la force de pression, $\vec{C}_y$;
- μ_S dépend de la nature des surfaces en contact ;
  - il est déterminé expérimentalement ;
  - il ne dépend pas de l'aire des surfaces en contact.

Quelques valeurs de μ_S :

Matériaux	μ_S
Acier-Acier	0.2
Chêne-Sapin	0.67
Caoutchouc-bitume	0.6

- **Le frottement dynamique**

Lorsque $\vec{F}$ augmente et dépasse la valeur limite ($|\vec{F}| > |\vec{F}|_{limite}$) le corps solide bouge de sa position d'équilibre (Fig.III.12)

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{C} + \vec{F} = m \ \vec{a}$$

D'où : $\vec{C} = m \ \vec{a} - \vec{P} + \vec{F}$

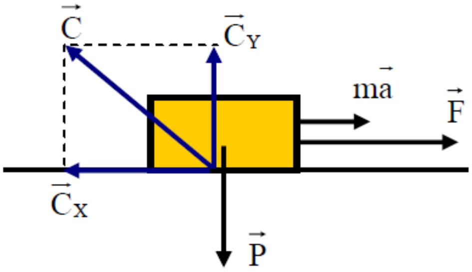


Fig.III.12. frottement dynamique

$\vec{C}$ possède une composante tangentielle,$\vec{C}_x$,qui s'oppose au mouvement du corps qui, par définition, est une force de frottement **dynamique**. Comme dans le cas statique, on introduit un coefficient de frottement dynamique (ou de glissement) :

$$\mu_d = \left|\frac{\vec{C}_x}{\vec{C}_y}\right|$$

Les caractéristiques du coefficient de frottement dynamique

ses valeurs sont déterminées expérimentalement ;

- $\mu_d < \mu_S$;
- μ_d est sensiblement indépendant de la vitesse ;
- μ_d ne dépend que de la nature des surfaces en contact.

III.13 Forces de tension (Force élastique)

Force de tension ou force de rappel. L'exemple le plus simple est la force de rappel du ressort.

$$\vec{F} = -K(l - l_0)\vec{k}$$

k : coefficient d'allongement (coefficient de raideur du ressort)

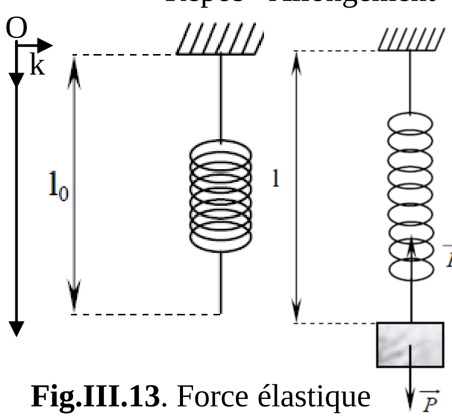


Fig.III.13. Force élastique

III.14 Moment cinétique d'une particule

III.14.1 Définition:

Le **moment cinétique** est la grandeur physique qui joue un rôle analogue dans le cas des mouvements de rotation.

Soit une particule de masse **m** se trouvant en un point repéré par le vecteur $\vec{r}$ et se déplace à la vitesse $\vec{v}$.

Son moment cinétique $\vec{L}$, par rapport à l'origine O, est défini par :

$$\vec{L}(M)/0 = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

avec :

$\vec{P}$: est la quantité de mouvement

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur position

$\vec{L}(M)/0$:est un vecteur perpendiculaire au plan ($\vec{r}$, $\vec{P}$) Son module est :

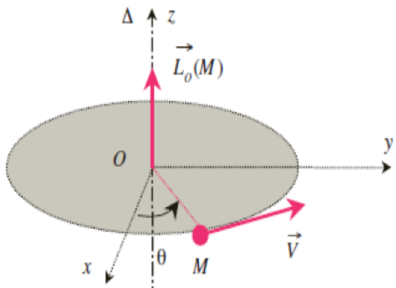


Fig.III.14. Moment cinétique

$$L/_O = r.P\sin(\vec{r},\vec{P})$$

Si le mouvement est circulaire de rayon r, on aura $\vec{r}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et donc

$\vec{L}(M)/0 = m\vec{r} \wedge \vec{v}$ D'où son module est $L(M)/0 = m.\mathrm{r}.v$

Posant : $v = \omega\, r$ on aura :

$$L(M)/0 = m.\mathrm{r}^2.\omega$$

Comme le vecteur moment cinétique $\vec{L}(M)/0$ a le même sens et la même direction que le vecteur vitesse angulaire, il devient évident que :

$$\vec{L}(M)/0 = m.\mathrm{r}^2.\vec{\omega}$$

III.15 Théorème du moment cinétique :

Enoncé : « En un point fixe O d'un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel est égal au moment de la force qui lui est appliquée en ce point ».

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{P})}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P}\right) + \left(\vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0}$$

Et de la relation du principe fondamentale de la dynamique :

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$$

Et puisque $\vec{F}$ et la résultante de toutes les forces extérieures.

Alors ;

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

On définit le moment d'une force par rapport à l'origine O par :

$$\vec{\mathcal{T}}/_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{T}}/_{O}(\vec{F})$$

Remarque 01:

Le moment cinétique joue pour la rotation. ($\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{T}}/_{O}(\vec{F})$ un rôle similaire à celui que joue la force pour la translation $\left(\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}\right)$

III.16 Conservation du moment cinétique

L'analyse de la relation $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{T}}/_{O}(\vec{F})$ montre que La dérivée du moment cinétique s'annule si :

a. La particule est isolée : $\vec{F} = \vec{0}$ ce qui signifie que le moment cinétique d'une particule libre est constant.

b. Si la force $\vec{F}$ est centrale : $\vec{F}$ est parallèle à $\vec{r}$. Donc le moment cinétique par rapport au centre de forces est constant. Le contraire est vrai c'est à dire si le moment cinétique est constant donc la force est centrale.

Remarque 02:

Le moment d'inertie représente la résistance du corps à son propre mouvement de rotation. En effet, pour une force constante plus le moment d'inertie est grand, plus l'accélération angulaire est faible (exemple du patineur).

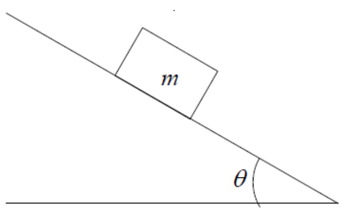
De la même manière **la masse *m* représente la résistance du corps à son propre mouvement de translation**. En effet, pour une force constante plus la masse est grande, plus l'accélération est faible. C'est pour cette raison que la masse est aussi appelée masse d'inertie.

Exercices d'applications

Exercice 01 :

La figure ci-contre représente un corps dont le poids est 5*N* et qui repose sur un plan rugueux incliné de θ = 35°. Le coefficient de frottement statique est 0.80.

On prend $g = 10ms^{-2}$.



a/ Quel doit être l'angle d'inclinaison pour que le corps décolle ?

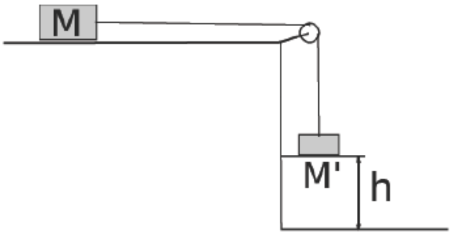
b/ Quelle est la force de frottement statique maximale?

c/ Quelle est la force normale pour 35° ?

d/ Quelle est la force de frottement statique pour une inclinaison de 35° ?

Exercice 02 :

Deux corps M et M' de masse M et M' respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement le corps M' se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché sans vitesse initiale. Le contact entre le corps M et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μs et glissement μg.



Données :

$\mu_S = 0.6$, $\mu_d = 0.4$, $M = 6$ kg,

$h = 1.5$ m et $g = 10$ m/s^2

1- Donner l'expression de la masse M'_{min} pour que le système se mette en mouvement, en fonction de M et μs.

2- On prend maintenant une masse M'= 4 kg, le système se met en mouvement. En considérant les deux phases du mouvement de la masse M jusqu'à son arrêt:

a- Quelle est la nature du mouvement de la masse M. Justifier ?

b- Calculer l'accélération dans la première phase

c- Déduire la vitesse à la fin de cette phase.

d- Calculer l'accélération dans la deuxième phase

e- Déduire la distance totale D parcourue par la masse M. Donner sa valeur.

Exercice 03 :

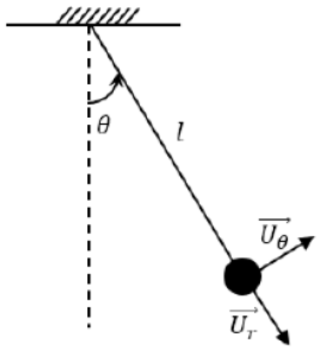
On écarte de sa position d'équilibre une masse ponctuelle *m* suspendue à un fil inextensible de longueur *l* . On repère la position de la masse *m* par l'angle *θ* entre la verticale et la direction du fil.

Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant :

1- Le principe fondamental de la dynamique

2- le théorème de l'énergie mécanique

3- le théorème du moment cinétique

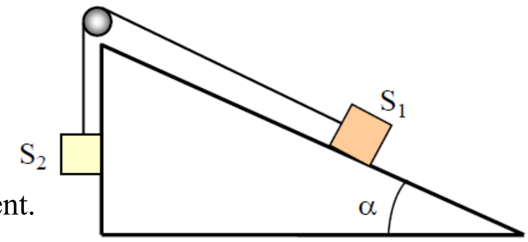


Exercices supplémentaires

Exercice 01 :

Deux corps S_1 et S_2 assimilés à des points matériels de masses m_1 et m_2 sont liés par un fil idéal (souple, inextensible et d'inertie négligeable) passant par une poulie idéale (inertie négligeable).

S1 glisse sans frottement sur un plan incliné d'angle α et S_2 se déplace verticalement.



a) Représenter les différentes forces s'exerçant sur S_1.

b) Représenter les différentes forces s'exerçant sur S_2.

c) Etablir l'équation du mouvement de S_1 à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique selon l'axe du mouvement.

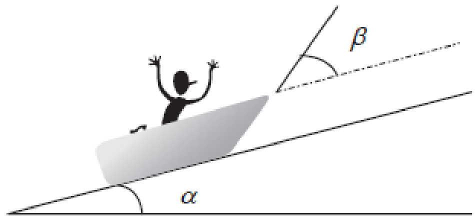
d) Etablir l'équation du mouvement de S_2 à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique selon l'axe du mouvement.

e) Déterminer l'accélération des deux solides en fonction de m_1, m_2, g et α.

Exercice 02 :

Un traîneau de masse m = 200 kg est tiré suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle $\boldsymbol{\beta}$ avec celui-ci (voir figure ci dessous).

1) La tension du câble vaut T = 1000 N. Le mouvement étant uniforme de vitesse v = 10 km.h^{-1}, déterminer la réaction $\vec{R}$ somme des forces de contact exercées par le sol sur le traîneau (norme et inclinaison par rapport à la normale au plan incliné).



Données : $\boldsymbol{\alpha} = 20°$,$\boldsymbol{\beta} = 30°$; g = 10 m.s^{-2}.

2) On augmente la tension et le mouvement du traîneau devient Uniformément accéléré.

a. Le coefficient de frottement (traîneau-sol) restant identiques, la réaction $\vec{R}$ est-elle modifiée ?

b. La vitesse du traîneau passe de 10 km.h^{-1} à 20 km.h^{-1} sur une distance de 10 m. Calculer la puissance exercée par la tension du câble lorsque la vitesse vaut 15 km.h^{-1}.

Exercice 03

Une balle de masse m = 100 g, considéré comme un point matériel est lancé verticalement vers le haut avec une vitesse initiale. Elle subit des forces de frottements d'expression proportionnelles à sa vitesse de type: $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k est le coefficient de frottement (0,1 en SI).

a) Ecrire et représenter les différentes forces agissant sur la balle.

b) Ecrire le principe fondamental de la dynamique (l'équation du mouvement de la balle). C'est une équation vectorielle.

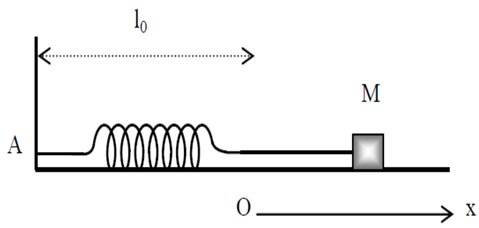
c) Quelle est la valeur de la vitesse de la balle lorsqu' elle atteint son altitude maximale ?

d) Trouver l'accélération de la balle lorsqu'elle atteint son altitude maximale.

e) En supposant que la chute est suffisamment longue pour que la balle puisse atteindre une vitesse limite vlim (vitesse constante), **quelle** est la valeur de cette vitesse limite ?

Exercice 04 :

Un point matériel M de masse m est relié à un ressort horizontal de raideur k et de longueur à vide l0. L'autre extrémité du ressort est fixe en A. Le point M glisse sans frottement sur un plan le long de l'axe Ox.



a) Etablir un bilan des forces appliquées au point matériel M dans la base vectorielle ($\vec{i}$, $\vec{j}$), $\vec{i}$ est suivant Ox.

b) Etablir l'équation vectorielle du mouvement à partir de l'application du principe fondamental de la dynamique.

c) Etablir les équations scalaires en projetant cette équation vectorielle selon les axes de la base vectorielle ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

d) Parmi ces équations, identifier l'équation du mouvement.

e) De quel type d'équation s'agit-il ?

f) Déterminer ω_0, la pulsation propre du mouvement.

g) En déduire T, la période du mouvement. La solution d'une telle équation a la forme :

$$x(t) = A_1\cos\omega_0 t + A_2\sin\omega_0 t$$

où A_1 et A_2 sont des constantes à trouver à partir des conditions initiales du mouvement du point matériel.

A l'instant t = 0, le point matériel est abandonné sans vitesse initiale d'un point d'abscisse x_0.

h) Déterminer x(t), l'équation horaire du mouvement du point matériel en fonction de x_0 et ω_0.

i) En déduire la force de rappel du ressort en fonction de x_0, ω_0 et k.

Solution des exercices

Solution 01

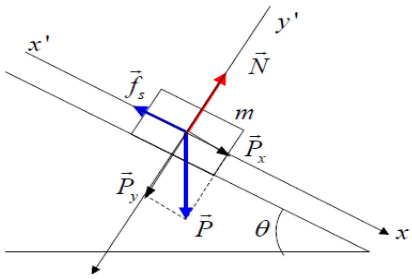
a. Angle d'inclinaison nécessaire pour que le corps décolle.

Quand la force de frottement statique atteint sa valeur maximale pour un angle de décollage θ_0 , appelé angle de frottement et qui est un angle limite, elle s'équilibre avec la composante du poids Px , à ce moment là, le corps décolle :

$$\begin{cases} f_{s,max} = P_x = mg\sin\theta_0 \\ f_{s,max} = \mu_s N \\ N = P_y = mg\cos\theta_0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\theta_0 = \mu_s, \Leftrightarrow \tan\theta_0 = 0.80 \Longrightarrow \theta_0 = 38{,}66^0 ,$$

b. Intensité de la force de frottement maximale : $f_{s,max} = \mu_s N \Longrightarrow f_{s,max} = 3.13N$

c. La force normale pour l'angle35^0:

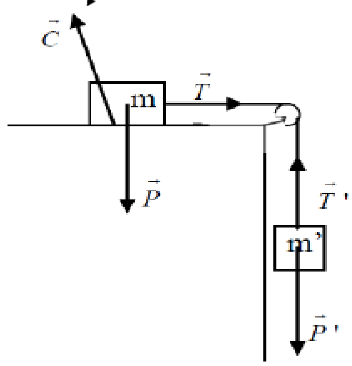


$$\boxed{N = P_y = mg\cos\theta} \; , \; \boxed{N = 4{,}1N}$$

d. Force de frottement pour l'angle 35^0:

$$\boxed{f_s = P_x = mg\sin\theta} \; , \; \boxed{f_s = 2{,}87N}$$

Solution 02



1- A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Les forces sur la masse M' : $\vec{P'} + \vec{T'} = \vec{0} \implies \vec{P'} - \vec{T'} = \vec{0}$

Sur la masse M : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = \vec{0}$

Sur l'axe OX : T-Cx = 0 et sur OY : Cy-P = 0

Et comme T = T' alors :

P' = Cx et Cx = $\mu_S C_y$ = μ_SMg $\Longrightarrow$ M' = μ_SM$\Leftrightarrow$ M = 3.6kg

<u>2- On a deux étapes</u>

- Durant la première étape les forces sont constantes, l'accélération est constante et la vitesse augmente, il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré.

on applique le principe fondamental de la dynamique.

sur la masse M' : $\overrightarrow{P'} + \overrightarrow{T'} = M'\overrightarrow{\gamma_1} \Longrightarrow$ P'-T' = M'γ_1 ……………...(1)

Sur la masse M : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{C} = M\overrightarrow{\gamma_1}$ …………………………………(2)

Sur :OX T-Cx = M γ_1

sur : Oy Cy-P = 0

De (1) et (2) on trouve : $P'' - C_x = (m+m')\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \dfrac{(m' - \mu_g m)}{m+m'} g = 1.6\, m/s^2$

La distance parcourue durant la deuxième phase est :

$v_1^2 - v_0^2 = 2\,\gamma_1 h \Longrightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = 2.2\text{m/s}$

- Durant la deuxième étape avec la présence des frottements et l'absence de la masse M', la vitesse diminue donc un mouvement uniformément retardé.

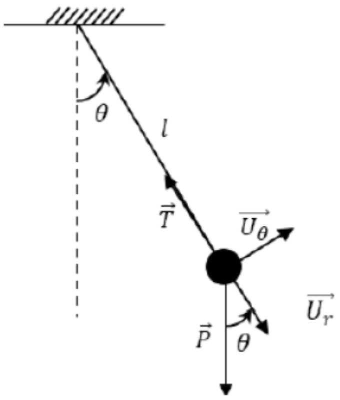
$\vec{P} + \vec{C} = M\overrightarrow{\gamma_2} \Longrightarrow$ sur OX : -Cx = M γ_2 et sur OY : Cy - P = 0

Donc : $-\square\boldsymbol{g}\, Mg = M\,\gamma_2 \Longrightarrow \gamma_2 = -\square_g\, g$

La distance parcourue durant la deuxième phase est : $0 - v_1^2 = 2\gamma_2 D_2 \Rightarrow D_2 = \dfrac{v_1^2}{2\gamma_2} = 0.6m$

Donc la distance totale : D = 1.5+0.6 = 2.1m

<u>Exercice 03 :</u>



La masse *m* est soumise à deux forces :

Tension du fil $\vec{T}$ et à son poids $\vec{P}$

L'accélération dans le repère polaire s'exprime ainsi:

$\vec{a} = -(l\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

1. Appliquons le principe fondamental de la dynamique

$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Projetons sur la direction :$\vec{u}r$

$-T + mg\cos\theta = -ml\dot{\theta}^2$

Projetons sur la direction :u_θ.

$-mg\sin\theta = ml\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

Dans l'approximation des petits angles, $sin\theta\approx\theta$ soit

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=0 \quad avec \;\; \omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

L’énergie mécanique est conservée.

$$\frac{dE_m}{dt}=0 \qquad avec\; E_m=E_c+E_P$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2 \quad ou \;\; v=l\dot{\theta}\Longrightarrow E_c=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

Il n'y a que l'énergie potentielle de pesanteur. En prenant comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur la position $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$E_P=-mgl\cos\theta$$

Donc ; $E_m=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl\cos\theta$

$$\frac{dE_m}{dt}=ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}-mgl\sin\theta\dot{\theta}=0$$

D’où l’équation différentielle : $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$

Théorème du moment cinétique: la dérivée du moment cinétique par rapport à *O* est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à *O* .

$\sum M_0(\vec{F}_{ext})=\frac{d\vec{L}}{dt}$ ……………*

$$\vec{L}(M)/0=\vec{\mathrm{r}}\wedge \mathrm{m}\vec{v}$$

$$\vec{L}(M)/0=m(l\vec{u}\wedge l\dot{\theta}\vec{u}_\theta)=m\dot{\theta}l^2\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=ml^2\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{k}=ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$$

D’un autre coté,

$$\sum M_0(\vec{F}_{ext})=M_0(\vec{P})+M_0(\vec{T})$$

$M_0(\vec{T})=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{T}=\vec{0}$ $(\vec{T}\;\; et\; \overrightarrow{OA}\;\; sont\; colinaires)$.

$$M_0(\vec{P})=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{P}=-mgl\sin\theta\vec{k}$$

En appliquant la relation (*) on trouve :

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{k}=mgl\sin\theta\vec{k}$$

D’où, l’équation différentielle : $\ddot{\theta}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$

Chapitre IV

Travail, Puissance Et Énergie

IV.1 Introduction

Nous avons établi Dans le chapitre précédent (dynamique), les relations qui existent entre un mouvement et les forces qui en sont la cause. En particulier, nous avons vu que la connaissance des forces qui agissent sur une particule et des conditions initiales (position et vitesse) peut permettre de prédire son mouvement. Cependant, on ne connait pas toujours toutes les forces en présence et même si c'est le cas, il arrive que les équations à résoudre soient difficiles à traiter. Dans ces conditions, on peut faire appel à des notions telles que le travail et l'énergie qui font l'objet de ce chapitre.

IV.2 Travail d'une force

IV.2.1 Force constante sur un déplacement rectiligne

Soit un point matériel M qui se déplace entre les points A et B. Sous l'effet d'une force constante $\vec{F}$. Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :

$$W_{A-B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})$$

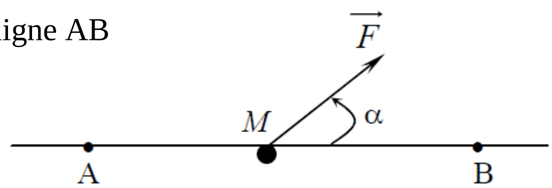


Fig.IV.1. Travail d'une force

Ce travail peur être positif, négatif ou nul, ça dépend du signe de cos $(\vec{F},\overrightarrow{AB})$:

- cos $(\vec{F},\overrightarrow{AB}) > 0$ c'est un travail moteur.
- cos $(\vec{F},\overrightarrow{AB}) < 0$ travail résistant
- cos $(\vec{F},\overrightarrow{AB}) = 0$ travail nul

L'unité de travail, dans le système MKSA, est le **Joule**. [Joule=N.m]

IV.2.2 Travail élémentaire

Si une particule subit un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ sur une trajectoire quelconque sous l'effet d'une force $\vec{F}$, cette dernière effectue un travail élémentaire dw qu'on ne peut pas le calculer avec l'expression précédente. Donc on décompose le trajet AB en une succession de déplacements Elémentaires $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petits et donc rectilignes.

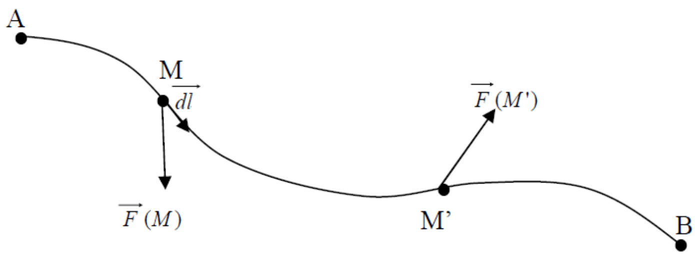


Fig.IV.2. Travail élémentaire

Sur $\overrightarrow{MM'}$, la force $\vec{F}$ peut être considéré comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par :

$$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Pour trouver le travail total entre le premier point et le deuxième, on intègre cette dernière équation.

$$w_{A-B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

Cette intégrale est appelée « circulation du champ de force $\vec{F}$ sur la courbe C »

Si on veut utiliser les coordonnées cartésiennes, on exprime la force et le déplacement dans ce système, pour cela on aura :

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ et $\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ et par suite :

$$w_{A-B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Remarque : si la force $\vec{F}$ est constante en grandeur et en direction l'expression de $w_{A-B}(\vec{F})$ prend une forme plus simple:

$$w_{A-B}(\vec{F}) = F_x\int_A^B dx + F_y\int_A^B dy + F_z\int_A^B dz = F_x(x_B - x_A) + F_y(y_A - y_A) + F_z(z_B - z_A)$$

Ce résultat montre que le travail ne dépend alors que des positions initiale et finale et non pas du chemin suivi. Le travail du poids en est une bonne illustration.

IV.2.3 Travail de la force de pesanteur

$h = Z_M - Z_{M'}$

$w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}.\overrightarrow{dl}$ avec $\vec{P} = -P\vec{k}$; $\overrightarrow{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{P}.\overrightarrow{dl} = --Pdz$

D'où : $w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}.\overrightarrow{dl} = \int_M^{M'} -P.dz = -P(Z_{M'} - Z_M)$

$\Leftrightarrow w_{\vec{P}} = P(Z_M - Z_{M'}) = Ph = mgh$

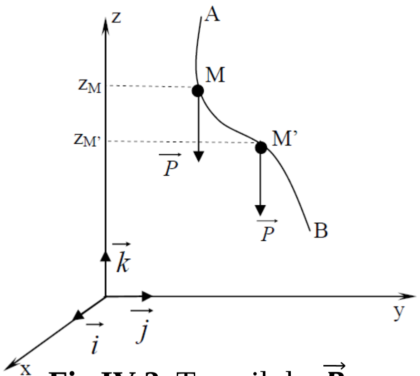


Fig IV.3. Travail de $\vec{P}$

IV.2.4 Travail d'une force élastique

$\vec{F} = -k\Delta l\vec{\imath} = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -kx\vec{\imath}$

$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -= -kx\vec{\imath}.dx\vec{\imath}$

Lorsque $\vec{F}$ passe d'une position x_1 à x_2, on a :

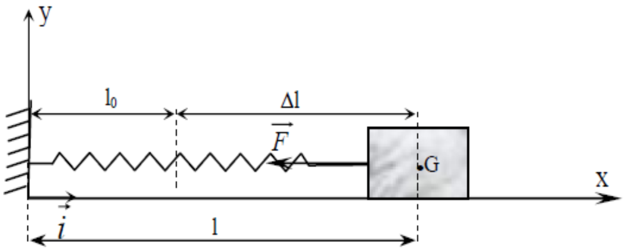


Fig IV.4. Travail d'une force élastique

$$w(\vec{F}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_{x_1}^{x_2} -kx.dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

IV.3 Puissance d'une force

Pour élever verticalement un corps d'une hauteur h, à vitesse constante, il faut lui appliquer une force $\vec{F}$ qui est telle que :

$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0}$

Soit :

$|\vec{F}| = |\vec{P}| = mg$ et par suite $w(\vec{F}) = mgh$

Ainsi, le temps n'apparaissant pas dans cette expression, la valeur du travail est la même que ce déplacement ait duré une seconde ou une année. Pour tenir compte de la vitesse d'exécution de ce travail, on définit la puissance par :qui est la vitesse de variation du travail par rapport au temps :

$P = \vec{F}.\vec{v}$ tel que : $\begin{cases} P \longrightarrow watt(w) \\ F \longrightarrow N \\ v \longrightarrow m/s \end{cases}$

La puissance moyenne est définie par la valeur du travail entre deux points, divisée par le temps mis pour le réaliser Δt.

$$P_{moy} = \frac{\Delta w(\vec{F})}{\Delta t}$$

D'où la définition de la puissance instantanée :

$$P(t) = \frac{dw(\vec{F})}{\mathrm{d}t}$$

Unités :

Dans le système [MKSA] :

- L'unité du travail est le Joule (1 Joule = 1 N.m)

Autres unités : Calorie (1 Cal = 4,1855 Joule)

Watt–heure (1 Wh = 3600 Joule)

KiloWatt–heure (1 kWh = 3,6 106 Joule)

- L'unité de la puissance est le Watt (1 Watt = 1 Joule/s)

Autres unités :Cheval–vapeur (1 Cv = 736 Watt)

IV.4 Energie

IV.4.1 Energie cinétique

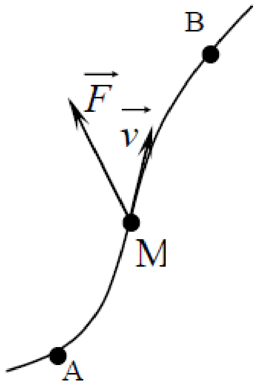
On définit l'énergie cinétique d'un point matériel *M*, de masse *m* et animé avec une vitesse $\vec{v}$, par la grandeur E_C, telle que,

$E_C = \frac{1}{2} m v^2$ (E_C : Se mesure en Joules)

Soit un point matériel *M*, de masse m, en déplacement entre les points *A* et *B* sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$ Selon le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Leftrightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par :



$$dw(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{dl} = m\frac{d\vec{v}}{dt} * \vec{v}dt \quad car \quad \vec{v}(t) = \frac{\vec{dl}}{dt} \Longrightarrow \vec{dl} = \vec{v}(t).dt$$

Il vient, $$dw(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{dl} = m\vec{v}.d\vec{v} = mv.dv$$

D'où : $w(\vec{F}) = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.\vec{dl} = m\int_A^B vdv = \int_A^B d(\frac{1}{2}mv^2) = \int_A^B dE_C = E_c(B) - E_c\,(A)$

IV.4.2 Théorème de l'énergie cinétique

« Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique, entre deux position A et B d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieurs (dont la résultante est noté $\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$ est égal au travail de cet résultante entre ces deux points »

Ce théorème est exprimé par la relation :

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum w(\vec{F}_{ext})$$

Remarques :

- L'énergie cinétique est toujours positive.
- Si le corps est soumis à plusieurs forces, de résultante $\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext}$ alors :

$$\Delta E_{C\,(A\longrightarrow B)} = \sum_i W(\vec{F}) = W_i(\vec{F}_1) + W_2(\vec{F}_2) + W_3(\vec{F}_3) \dots \dots$$

- $\vec{P} = m\vec{v}$ étant la quantité de mouvement, il vient :

$$P^2 = m^2.v^2 \Longrightarrow E_C = \frac{P^2}{2m}$$

Si $\vec{F}$ est perpendiculaire au déplacement son travail est nul et, en conséquence, l'énergie cinétique est constante.

IV.5 Forces conservatives et énergie potentiel

IV.5.1 Forces conservatives

Les forces sont dites conservatrices lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

Exemples

- force de pesanteur ;
- force du poids ;
- force de rappel des ressorts.

Les forces sont dites non conservatrices ou forces vives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

Exemple

- Force de frottement.

IV.5.2 Energie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatrices ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle *Ep*

$$E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}\left(\vec{F}_C\right)$$

avec $\vec{F}_C$: force conservatrice.

$$\Delta E_P = -W_{AB}\left(\vec{F}_C\right)$$

Lorsque la variation est très faible, $\Delta E_P \longrightarrow dE_P$

En utilisant la notion du travail élémentaire, on a :

$$dE_P = -\vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

D'autre part, soit le gradient ($\overrightarrow{grad}$) d'une fonction f défini par :

$$\overrightarrow{grad}f(x,y,z) = \vec{\nabla}.f = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

La différentielle totale de f est donnée par :

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

On définit un point *M*, repéré dans le référentiel $Oxyz$ par son vecteur $\overrightarrow{OM}$, tel que,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Longrightarrow d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Alors : $$\overrightarrow{grad}f.d\overrightarrow{OM} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right).\left(d\overrightarrow{OM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{grad}f.d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Il vient : $$\overrightarrow{grad}f.d\overrightarrow{OM} = df$$

A partir de l'équation précédente, on peut facilement remarquer que puisque

$$dE_P = -\vec{F}.\overrightarrow{dl} \quad \text{avec} \quad d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Donc ; $\vec{F}_C = -\overrightarrow{grad}E_P = -\vec{\nabla}.E_P$ on parle d'une force qui dérive d'un potentiel Ep.

Remarque 01:

Une force est conservatrice vérifiée une des trois conditions

- son travail ne dépend pas du chemin suivi
- Elle dérive d'un potentiel $\vec{F}_C = -\overrightarrow{grad}E_P(x,y,z)$
- $\overrightarrow{rot}\vec{F}_c = \vec{0}$ *puisque* $\left[\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}E_P\right) = \vec{0}\right]$

Remarque 02:

Le $\overrightarrow{grad}$, est un opérateur différentiel vectoriel s'exprime dans les systèmes de coordonnées selon :

- Dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{grad}E_P. = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz$$

- Dans le système de coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

- Dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}$$

- Dans le système de coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad}E_P = \frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

IV.5.3 Enoncé du théorème de l'énergie potentielle :

Soit un déplacement d'un point A à un point B.Le travail des forces conservatrices est égal à la différence entre l'énergie potentielle de la position initiale et la position finale

$$W_{AB}(\vec{F}_C) = -\Delta E_P = E_P(A) - E_P(B)$$

IV. 5.4 Exemples de forces conservatrices

1. **Force gravitationnelle**

$\vec{F}_g$ est une force conservatrice.

$\vec{F}_g(r) = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u} = -G\frac{M_T m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ ....*

avec $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

D'où ; $\vec{F}_g(r) = -G\frac{M_T m}{r^3}\vec{r}$

$\vec{F}_g(r) = -\overrightarrow{grad}E_P(r) = -\frac{dE_P}{dr}\vec{u}$

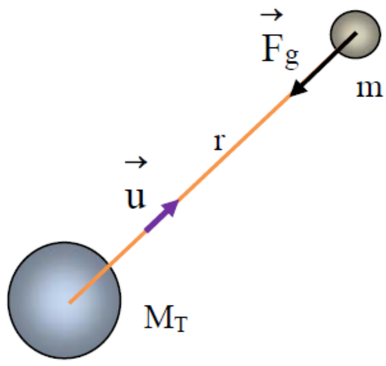


Fig IV.5. Force gravitationnelle

1. Par la comparaison avec * on trouve :

$\frac{dE_P}{dr} = G\frac{M_T m}{r^2}$ et par suite $E_P(r) = \int G\frac{M_T m}{r^2}dr$

Ou : $E_P(r) = G\frac{M_T m}{r^2} + Cte$

2. **Force élastique**

On sait que : $\vec{F} = -kx\vec{\imath}$

D'autre part : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P = -\frac{dE_P}{dx}\vec{\imath}$

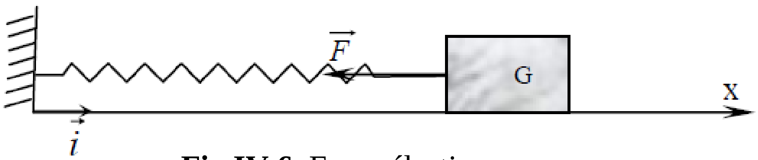


Fig IV.6. Force élastique

1. Alors : $\frac{dE_P}{dx} = kx \Leftrightarrow E_P = \int kxdx$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$$

2. Force électrique

$$\vec{F} = -K\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\,\vec{u}$$

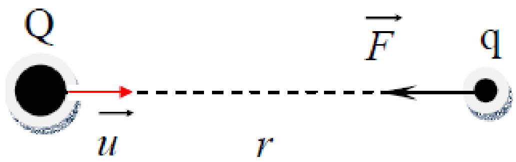


Fig IV.7. Force électrique

En appliquant le même raisonnement que précédemment, on aura :

$$E_P = -K\frac{Qq}{r} + Cte$$

IV.6 Energie mécanique totale

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatrices et non conservatrices. En appliquant les deux théorèmes de l'énergie cinétique et potentielle, il découle les conséquences suivantes :

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum w_{A\to B}(\vec{F}_C) + \sum w_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

$\vec{F}_C$: Force conservatrice ;

$\vec{F}_{NC}$: Force non conservatrice.

Alors ; $E_C(B) - E_C(A) = -\big(E_P(B) - E_P(A)\big) + \sum w_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$

Puisque ; $\sum w_{A\to B}(\vec{F}_C) = \big(E_P(A) - E_P(B)\big)$

En manipulant ces deux équations on trouve :

$$E_C(B) + E_P(B) - \big(E_C(A) + E_C(B)\big) = \sum w_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler « **Energie Total »** du système qui est égale à la somme de l'énergie potentielle et cinétique et Symbolisée par (E), telle que,

$$E_M = E_T = E_C + E_P$$

D'où ;

$$E_T(B) - E_T(A) = \sum w_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

IV.6.1 Théorème de l'énergie mécanique totale

« La variation de l'énergie mécanique totale d'un système, en mouvement entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatrices appliquées à ce système,

$$E_T(B) - E_T(A) = \sum w_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

IV.6.2 Principe de la conservation de l'énergie mécanique :

Cependant, lorsque le système est isolé mécaniquement (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservatrice) l'énergie totale se conserve. $E_T(B) - E_T(A) = 0 \Leftrightarrow E_T = Cte$ ou encore $\frac{dE_T}{dt} = 0$

Dans le cas de la présence de frottements, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces de frottement $\sum W(\vec{F}_{frott})$:

$$E_T = \sum W(\vec{F}_{frott})$$

IV.7 Stabilité d'un système

IV.7.1 Définition de la stabilité

Pour un système soumis uniquement à une force conservatrice $\vec{F}_C$, il est intéressant de savoir s'il existe ou pas des états d'équilibre. La forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que:

$$\vec{F}_C = -\overrightarrow{grad}E_P$$

Dans le cas où l'énergie ne dépend que d'une variable x, cela revient à dire que:

$$\vec{F}_C = -\frac{dE_P}{dx}\vec{i}$$

La condition d'équilibre, pour l'importe quel système soumis à un ensemble de forces, est que la somme ou la résultante de l'ensemble des forces est égale à zéro $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Dans le cas d'un système soumis uniquement à une force conservatrice $_c\vec{F}_C$, celle-ci devrait être nulle, il vient:

$$F_C = 0 \Rightarrow \frac{dE_P}{dx} = 0$$

Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle. En d'autre terme, l'énergie potentielle devrait être maximale ou minimale pour qu le système soit en équilibre.

Un équilibre est dit **stable** si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celle-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit **instable**.

IV.7.1 Condition de stabilité

Soit le cas de la figure ci-dessous, cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x.

Supposant que la dérivée de l'énergie potentielle à x_0 est nulle $\frac{dE_P}{dx} = 0$ lorseque $x = x_0$

Pour une perturbation amenant le système à $x < x_0$,

1. la valeur algébrique de la force doit être positive

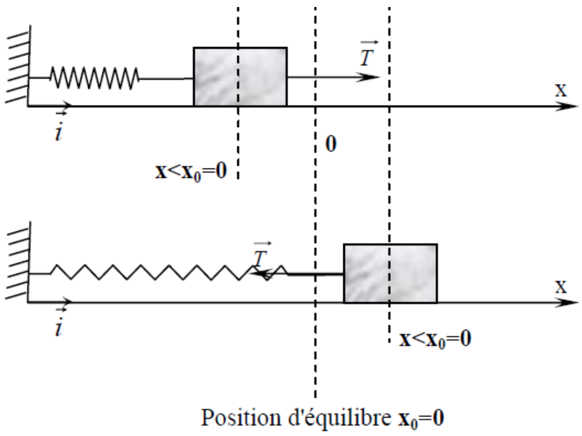


Fig IV.8. points de stabilité

pour ramener le système vers x_0 $F_C > 0$ donc, $\frac{dE_P}{dx} < 0$ puisque $F_C = -\frac{dE_P}{dx}$

Dans le cas contraire $x > x_0$, la force doit être négative et donc $\frac{dE_P}{dx} > 0$.

L'énergie potentielle E_P décroît avant x_0 et est croissante après x_0. Elle présente donc un minimum pour $x = x_0$.

Dans ce cas, la fonction $\frac{dE_P}{dx}$ est une fonction croissante qui s'annule pour $x = x_0$. La condition de stabilité, c'est-à-dire, E_P minimale, peut donc se traduire par $\frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$ au voisinage de x_0 et donc pour $x=x_0$. Dans le cas contraire, la position sera une position d'équilibre instable.

En Résumé

Equilibre stable pour $x = x_0 \Leftrightarrow E_P(x_0)$ minimale $\Longrightarrow \begin{cases} \frac{dE_P}{dx} = 0 \\ \quad et \\ \frac{d^2E_P}{dx^2} > 0 \end{cases}$.

Equilibre instable pour $x = x_0 \Leftrightarrow E_P(x_0)$ maximale $\Longrightarrow \begin{cases} \frac{dE_P}{dx} = 0 \\ \quad et \\ \frac{d^2E_P}{dx^2} < 0 \end{cases}$

Un système, livré à lui-même, évolue spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.

Exercices d'application

Exercice 01 :

Soit un point matériel M soumis à un champ de force $\vec{F}$: $\vec{F} = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}$

a. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ pour le déplacement de M du point O(0,0) au point A(2,4) en passant par le point C(0,4).

b. Trouver la valeur de (a) pour que $\vec{F}$ soit conservatrice, en déduire l'énergie potentielle Ep résultante de ce champ de force.

c. Déterminer le travail de $\vec{F}$ pour le déplacement de M suivant une trajectoire circulaire de rayon R et de centre O(0,0).

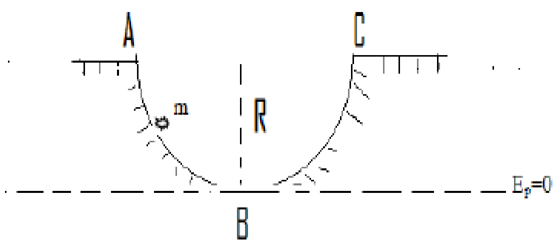
Exercice 02 :

Une masse m glisse sans vitesse initiale d'un point A dans un demi cercle de rayon R figure.

I - Si on néglige les frottements :

a. Est-ce que l'énergie total (mécanique) de la masse se conserve durant sont mouvement ? déterminer sa vitesse au point B.

b. A quelle hauteur h_1 la masse atteint ?



II- si on a la présence de frottements sur l'arc AB et la vitesse de la masse au point B vaut $\sqrt{gR}$:

a. calculer le travail des forces de frottements.

b. A quelle hauteur h_2 la masse atteint si l'arc BC est lisse (pas de frottements).

III- si on suppose qu'on se trouve dans le 2ème cas, et la masse m démarre avec une vitesse initiale V0. On remarque qu'elle arrive au point C avec une vitesse nulle.

a. déterminer le travail de la force de frottement.

b. Calculer la vitesse de la masse au pointB

Exercice 03 :

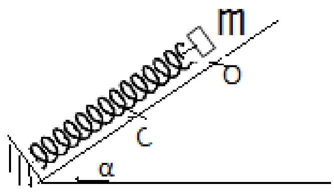
On pose une masse m à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k sur un plan incliné avec un angle α de l'horizontale. On laisse la masse au point O sans vitesse initiale. On suppose qu'il y a des frottements sur le plan μ.

Trouver l'énergie totale aux points O et C.

a. Calculer le travail de la force de frottement.

b. Déduire Xc la compression maximum du ressort.

Que devient-elle si on néglige les frottements ?



Exercice 04 :

Un corps de masse *m* se déplace sur l'axe *x* '*Ox* .Son énergie potentielle est donnée par l'expression :

$E_P = K \frac{x}{x^2+a^2}$, où *K* et *a* sont des constantes positives.

1/ Représenter l'allure générale de la courbe $E_P(x) = f(x)$.

2/ Trouver les positions d'équilibre en précisant celles qui sont stables et celle qui sont instables.

Exercices supplémentaires

Exercice 01 :

a) Désigner parmi les forces suivantes celles qui sont des forces conservatives :

$\vec{F} = a(y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})$

$\vec{F} = a(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})$

$\vec{F} = a\left(x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + 3z\vec{k}\right)$

où a est une constante.

b) Trouver dans le cas de force conservative l'énergie potentielle correspondante E_P.

Exercice 02 :

Soit la force $\vec{F}$ donnée par $\vec{F} = (x^2 + y)\vec{\imath} + (x - y)\vec{\jmath}$

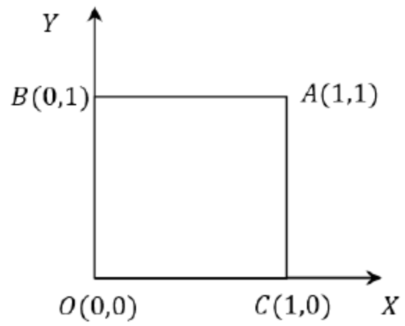
1) Calculer le travail de $\vec{F}$ suivant les chemins suivant :

a) $O(0,0) \longrightarrow B(0,1) \longrightarrow A(1,1)$

b) La droite $O(0,0) \longrightarrow A(1,1)$

c) La parabole $(y = x^2)$ $O(0,0) \longrightarrow A(1,1)$

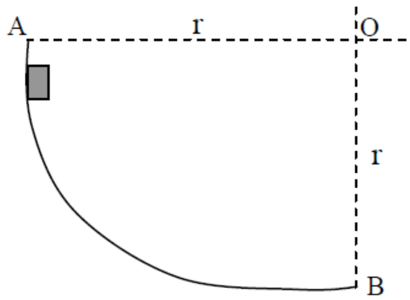
d) Chemin fermé $O(0,0) \longrightarrow B(0,1) \longrightarrow A(1,1) \longrightarrow C(1,0) \longrightarrow O(0,0)$



2) Calculer $\overrightarrow{rot}\vec{F}$.
3) Conclure.
4) Déterminer l'énergie potentiel *EP* . On donne *EP* (0,0) = 0.
5) Déterminer le travail de $\vec{F}$ de $O(0,0) \rightarrow A(1,1)$ de façon directe.

Exercice 03 :

Un solide de masse m=500 g peut glisser sans frottement sur une piste circulaire de rayon $r = 1\ m$ (Fig. 01).



Il part d'un point A sans vitesse initiale.

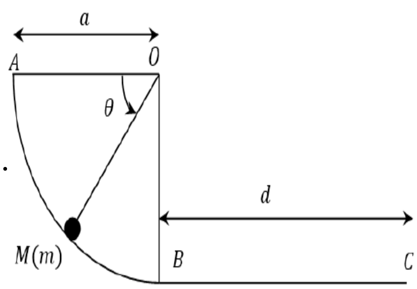
1. Déterminer la vitesse du solide au point B.

2. En réalité, la vitesse en B est de 3,5 ms-1.

Déterminer le travail des forces de frottement puis en déduire l'intensité, supposée constante, de la résultante des ces forces de frottement.

Exercice 04 :

Une particule de masse *m*, initialement au repos en *A*, glisse sans frottement sur la surface circulaire *AOB* de rayon *a*.



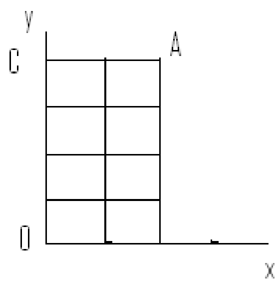
1) Déterminer le travail du poids de *A* à *M*.
2) Déterminer le travail de la force de contacte (surface-particule ***m***).
3) Déterminer l'énergie potentielle Ep de $\boldsymbol{m}$ au point *M* ($Ep\ (B) = 0$).
4) Utiliser le théorème de l'énergie cinétique, pour déterminer la vitesse de ***m*** au point *M*,en déduire son énergie cinétique Ec .
5) Calculer l'énergie mécanique *Em*.
6) Représenter Ec , $Ep\ et\ Em$ $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$. Discuter
7) La surface circulaire *AOB* est raccordée à une partie horizontale *BC*, il existe des frottements entre *B* et *C*, la particule s'arrête a une distance *d* de *B*. Déterminer le coefficient de frottement cinétique.

On donne $d = 3a = 3m.$

Solution des exercices

Solution 01:

a- $\vec{F} = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}$



$dw = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = F_x dx + F_y dy + Fz\ \ dz = (x - ay)dx + (3y - 2x)dy$

$W_{OCA} = W_{OC} + W_{CA}$

Le chemin de O à C ($x = 0$; $dx = 0, y\ varie\ de$ 0 à 4)

$$W_{OC} = \int_0^4 3y dy = \frac{3y^2}{2} = 24\ joules$$

Le chemin de O à C (varie de 0 à 2, y = 4 ; dy = 0)

$W_{OC} = \int_0^2 (x-a)dx = \frac{x^2}{2} - 4ax = 2 - 8a$

Donc le chemin $W_{OCA} = 26 - 8a$

b- Pour que la force soit conservative elle doit vérifier $\overrightarrow{rot}\vec{F} = 0$

D'où :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-4a & 3y-2x & 0 \end{vmatrix}$$

C'est dire que : $a = 2$

c- $\vec{F} = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}$ qui est une force conservatrice. Donc c'est une fonction qui dérive d'un potentiel Ep

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P(x,y) = -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{\jmath}$$

$\frac{\partial E_P}{\partial x} = -(x-2y)$…………………(1) et $\frac{\partial E_P}{\partial x} = -(3y-2x)$………………………..(2)

De l'éq (1) $E_P = -\int (x-2y)dx = -\frac{x^2}{2} + 2yx + C(y)$

De l'éq (2) $\frac{\partial E_P}{\partial y} = 2x + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = -(3y-2x) \Longrightarrow C(y) = -\frac{3y^2}{2} + C$

Donc $E_P(x,y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2xy + C$

Solution 02 :

I.) 1- puisque que la masse n'est soumise qu'a son poids $\vec{P}$ et la réaction du support sur la masse $\vec{R}$

$w(\vec{R})$ □ □ 0 parce que la force $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement.

Comme le poids est une force qui dérive d'un potentiel alors

$E_T(A) = E_T(B)$

2- $E_P(A) + E_C(A) = E_P(B) + E_C(B)$

$$mgR + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_B^2 \Longrightarrow v_B = \sqrt{2gR}$$

3- $E_T(B) = E_T(D) \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_1 \Leftrightarrow h_1 = \frac{1}{2}v_B^2 = R$ donc la masse atteint le point C.

II) le chemin AB n'est pas lisse donc la présence des forces de frottements $\vec{f}$ et l'énergie totale ne se conserve pas

$W_{A-B}(\vec{f}) = E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_M$

$$W_{A-B}(\vec{f}) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{gR}\right)^2 - mgR = -\frac{mgR}{2}$$

Comme le chemin BC est lisse , pas de force de frottement, donc l'énergie totale se conserve

$$E_T(B) = E_T(D) \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_2 \Leftrightarrow h_2 = \frac{1}{2}R$$

III) $W_{A-B}(\vec{f}) = -\frac{1}{2}mv_0^2$

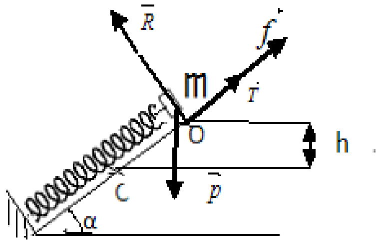
Solution 03 :

$\vec{f}$: Force de frottement et $\vec{T}$: tension du ressort

Si on choisit le point O comme référence pour l'énergie potentielle gravitationnelle et K constante de raideur

Alors : $Ep(0) = 0$, et $T = 0$, $E(M)(0) = 0$

Au point C.



$$E_M(C) = E_P(C) + T(C) = \frac{1}{2}kx_C^2 - mgh = \frac{1}{2}kx_C^2 - mgx_C \sin\alpha$$

$$\Delta E_M = E_M(C) - E_M(O) = \frac{1}{2}kx_C^2 - mgx_C \sin\alpha = W\left(\vec{f}\right)$$

Il s'agit du travail de la force de frottement, l'énergie mécanique (totale) ne se conserve pas.

- le travail de la force de frottement

$$W(\vec{f}) = \int \vec{f}.\vec{dl} = -\int f.dl$$

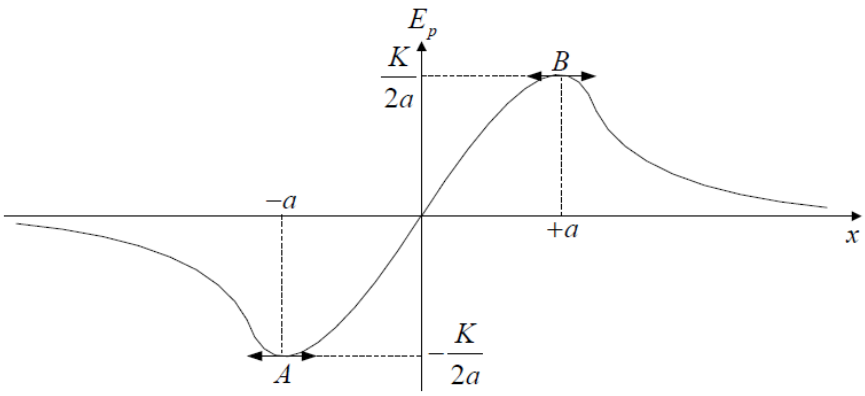
Avec : $f = \mu.R = \mu\, m\, g\, \cos\alpha$ donc $W_{O-C}(\vec{f}) = -\int_O^C \mu\, m\, g\, \cos\alpha\, dx = -\mu\, m\, g\, \cos\alpha\, x_C$

En comparant ce travail avec celui de la première question

$$\frac{1}{2}kx_C^2 - mgx_C \sin\alpha = -\mu\, m\, g\, \cos\alpha\, x_C$$

$$x_C = \frac{2mg}{K}(\sin\alpha) - \mu\cos\alpha$$

Si on néglige les frottements : $x_C = \frac{2mg}{K}(\sin\alpha)$



1. L'allure générale de la courbe est la suivante :
2. Les positions d'équilibre stable sont caractérisées par les deux conditions :

$$\frac{dE_P}{dx} = 0 \quad et \quad \left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} > 0$$

Les positions d'équilibre instable sont caractérisées par les deux conditions :

$$\frac{dE_P}{dx} = 0 \quad et \quad \left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} < 0$$

En dérivant $_pE$ par rapport à x deux fois de suite, on obtient :

$$\frac{dE_P}{dx} = K\frac{a^2 - x^2}{(x^2 - a^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm a$$

$$\frac{d^2E_P}{dx^2} = 2kx\frac{x^2 - 3a^2}{(x^2 + a^2)^3} \Longrightarrow \begin{cases} \left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x=+a} < 0 \\ et \\ \left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x=+a} > 0 \end{cases}$$

Nous remarquons que la position d'équilibre stable est (A) d'abscisse $x = -a$, mais la position d'équilibre instable est (B) d'abscisse $x = +a$.

Références Bibliographiques

[1] S.Pommier et Y.Berthaud, Mécanique générale, Dunod 2010.

[2] Alonso M. et Finn E. , Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique, Dunod, (2004).

[3] P. Benoist-Gueutal et M. Courbage, mathématique pour la physique, tome 1, 2, 3, édition Eyrolles, Paris (1992)

[4] M. Henri et N. Delorme Mini manuel de mécanique du point, édition Dunod (2008).

[5] S. Pommier et Yves Berthaud, Mécanique Générale, édition DUNOD (2010).

[6] A. Fizazi , Mecanique du point matériel : rappel de cours et exercice corrigés,
https://www.fichier-pdf.fr/2016/11/14/cours-physique-1ere-annee/

[7] N. Ziani , A. Boutaous, Mécanique du point matériel, Cours et Exercices,
https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/cours_de_mecanique_point.pdf

[8] R. Rahmani et H. Sediki, Cours et Exercices de mécanique du point matériel, université des sciences et technologie d'Oran - Mohamed Boudiaf-,2019/2020

[9] H. Stocker., Jundt F. et Guillaume G., Toute la physique, Dunod, (2007).

[10] L. Benallegue, M. DEBIANE, A. Gourari, et A. Mahamdia, Physique I Mécanique du Point Matériel, Edité par la Faculté de Physique U.S.T.H.B., Alger, (2011).

[11] A. Gibaud et M. Henry, Cours de Physique Mécanique du Point, 2ième édition, Dunod, Paris, (1999-2007).