

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE MUSTAPHA STAMBOULI DE MASCARA
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Notion des phénomènes de transfert

Réalisée Par Dr BEKHOUKH Amina

**Ce cours est destiné aux étudiants de 2^{ème} Année Licence
Génie des procédés**

Algérie

2020/2021

Avant-propos

Ce cours s'adresse aux étudiants de 2^{ème} année Licence Génie des Procédés et Environnement et à tous ceux qui souhaitent acquérir ou développer des compétences pour maîtriser puis optimiser un procédé de transformation de la matière.

Cet ouvrage est le fruit d'une longue année de travail au département de génie des procédés

En effet le génie chimique est bâti sur un socle important voire indispensable qui a pour but la compréhension des processus de transfert. A l'usage chacun sait que, lorsque dans un espace donné il apparaît un Gradient d'une grandeur intensive (concentration d'un constituant, température, vitesse), on assiste à un transfert de la grandeur extensive correspondante (flux de matière, de chaleur, de quantité de mouvement...).

Ce cours se propose de donner une compréhension générale de ces phénomènes tout en exposant. Les lois fondamentales de Fourier, Newton et Fick ainsi que l'initiation des étudiants aux calculs des différent flux de matières et de chaleur et la démonstration des équations des bilans pour l'équilibre et pour l'écoulement des fluides.

Table des matières

Notations et Abréviations

Introduction 1

Chapitre 1 Introduction aux modes de transfert

1.1 Un phénomène de transfert.....2

1.2. Différents phénomènes de transfert.....2

1.3 Définitions et relations entre les grandeurs physiques3

1.3.1. Un système3

1.3.2. La chaleur.....4

1.3.3. La conservation de la chaleur.....4

1.3.4. L'enthalpie.....5

1.3.5. La chaleur latente de changement d'état5

1.3.6. L'Entropie (S).....5

1.3.7. Transport convectif5

1.3.8. Conduction et diffusion.....6

1.3.9. Situations induisant des transferts de chaleur ou de matière.....6

1.3.10. Phénomènes permanents — Phénomènes établis6

1.3.11. Phénomènes de transfert et changements d'état physique.....7

1.3.12. Turbulence et phénomènes de transfert7

1.3.13. Régimes d'écoulement8

1.3.14. Compressibilité et dilatabilité9

1.3.15. Vitesse — Gradient de vitesse9

1.3.16. Le volume..... 10

1.3.17. La masse..... 10

1.3.18. Débit d'un fluide de vitesse V traversant une surface S11

1.3.19. vitesse moyenne d'un fluide 11

1.3.20. Le flux de chaleur à la surface ΔS12

1.3.21. Le flux d'échange sur la surface ΔS 12

1.4. Introduction aux bilans..... 12

1.5. Les variables..... 12

Chapitre 2 Transfert de chaleur

2.1. Introduction..... 14

2.2. Définitions..... 14

2.2.1	Champ de température.....	14
2.2.2	Gradient de température	14
2.2.3	Flux de chaleur.....	15
2.3.	Formulation d'un problème de transfert de chaleur.....	15
2.3.1.	Bilan d'énergie.....	15
2.4.	Les modes de transmission de la chaleur	17
2.4.1.	La conduction thermique	17
2.4.2.	La convection thermique.....	24
2.4.2.2.	Transferts parois-fluides	27
2.4.3.	Transfert de chaleur par rayonnement.....	35

Chapitre 3 Transfert de matière

3.1.	Introduction.....	36
3.2.	Généralités sur le transfert de matière.....	36
3.2.1.	Le transfert de matière.....	39
3.2.2.	La diffusion.....	38
3.2.3.	transfert de matière par diffusion moléculaire.....	38
3.2.4.	<i>Principes de transfert de matière</i>	39
3.2.5.	Notions de concentration	38
3.2.6.	<i>Notions de densité de flux de matière</i>	46
3.2.7.	<i>Définition des vitesses moyennes molaire et massique</i>	46
3.2.8.	<i>Les flux</i>	47
3.3.	Transfert diffusif.....	50
3.3.1.	<i>Equation de Fick (Transfert diffusif (conductif))</i>	50
3.4.	<i>Transfert de matière par convection</i>	51
3.5.	<i>Hydrodynamique du fluide</i>	52
3.6.	<i>Estimation du coefficient de diffusion binaire (diffusivité moléculaire)</i>	54
3.6.1.	<i>Coefficient de diffusion binaire en phase gazeuse</i>	55
3.6.2.	<i>Coefficient de diffusion binaire en phase liquide</i>	56

Chapitre 4 Transfert de quantité de mouvement

4.1.	Introduction à la mécanique des fluides.....	59
4.2.	Définition d'un fluide.....	59
4.3.	Etats de la matière.....	60
4.4.	Propriétés des fluides.....	61
4.4.1.	Masse volumique ; Densité, poids volumique.....	61

4.4.2. Viscosité.....	61
4.4.3. Compressibilité.....	65
4.4.4. Dilatation isobare.....	65
4.4.5. Tension superficielle et capillarité.....	66
4.4.6. Capillarité.....	66
4.4.7. Pression de vapeur saturante.....	66
4.5. Statique des fluides.....	68
4.5.1. Principe fondamental de la statique des fluides.....	69
4.5.2. Relation fondamentale de l'hydrostatique.....	70
4.5.3. Manomètres.....	71
4.6. Dynamique des fluides parfaits.....	74
4.6.1. Définitions générales.....	74
4.7. Equation de Conservation générale.....	76
4.8. Equation de Bernoulli.....	77
4.8.1. Conservation de l'énergie.....	77

Notations et Abréviations

C : Chaleur spécifique

D : Diamètre

D : coefficient de diffusion matière

e : Epaisseur

g : Accélération de la pesanteur

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection

ΔH : Chaleur latente de changement de phase

L : largeur, longueur

Q : Quantité de chaleur

r : Rayon

R : Résistance au transfert de chaleur

R : constante des gaz parfait

S : Surface, L'Entropie

t : Temps

T : Température

m : la masse

M : masse molaire

u : Vitesse

V : Volume

P : pression

Q_v : Le débit volumique

Q_m : Le débit massique

W : débit massique moyen

n : densité de flux massique

n : nombre de moles

\vec{n} : Vecteur normal à une surface

N : densité de flux molaire

x, y, z : Variables d'espace

$\langle V \rangle$: vitesse moyenne d'un fluide

grad : gradient

F : Force

\hat{q} : Puissance massique générée

U : Potentiel électrique

I : intensité électrique

K : conductance du milieu

I : hauteur
A : espèce chimique
B : espèce chimique
C : espèce chimique
y : fraction molaire d'un constituant dans le gaz ou la vapeur
J : densité de flux de matière
 μ : Masse molaire moyenne
H : Constante d'Henry.
 x_A : Fraction molaire
 \bar{x}_A : Fraction massique
 X_A : Fraction molaire relative
 \bar{X}_A : Fraction massique relative
 C_A : Concentration molaire en volume
 \bar{C}_A : Concentration massique en volume
k : coefficient de transfert de matière
K : La constante de BOLTZMANN
d : la densité
U : la vitesse
 q_m : Le débit massique
 q_v : Le débit volumique
dm : masse élémentaire
 E_c : l'énergie cinétique
W(P) : Le travail du poids
W : travail
 \dot{N}_{Conv} : le flux molaire par convection

Lettres grecques

α : Coefficient d'absorption du rayonnement
 α : Coefficient de dilatation volumique isobare
 β : Coefficient de dilatation isobare
 χ : Coefficient de compressibilité isotherme
 ε : Facteur d'émission de la surface
 Φ : Densité de flux de chaleur
 φ : Flux de chaleur
 λ : Conductivité thermique, longueur d'onde
 μ : Viscosité dynamique

ν : Viscosité cinématique
 ρ : Masse volumique
 σ : Constante de Stefan-Boltzmann
 σ : Constante de LENNARD-JONES
 σ : Tension superficielle du liquide
 τ : Contrainte de frottement à la paroi
 Ω_D : L'intégrale de collision.
 ε : L'énergie caractéristique de LENNARD-JONES
 ξ : Coefficient empirique
 ϖ : Poids spécifique
 τ : Contrainte de cisaillement
V: le volume massique
 Θ : La température
 Θ : Angle plan

Introduction

Les phénomènes de transfert occupent une place essentielle lorsqu'il s'agit de comprendre et expliquer le fonctionnement d'un procédé de transformation de la matière. Leur connaissance est indispensable lorsqu'il s'agit de les mettre en œuvre, qu'il s'agisse de processus impliquant de simples séparations avec ou sans changements de phase. Ils deviennent complexes en présence des réactions chimiques et lorsqu'ils sont couplés. Par exemple, l'écoulement et le mélange des fluides, le contrôle de la température, la nature et la vitesse des réactions chimiques ou biochimiques sont fortement tributaires des transferts à la fois mécaniques, énergétiques et matériels. [1]

Pour faciliter l'étude, ces phénomènes de transfert seront abordés de façon séquentielle. Nous débuterons par la présentation du transfert d'énergie et plus particulièrement du transfert de chaleur par conduction, convection et rayonnement. Dans la deuxième partie nous développerons les processus mis en jeu dans le transfert de matière : diffusion moléculaire et transfert convectif. Nous terminerons par l'étude du transfert de quantité de mouvement en rappelant les notions indispensables de la mécanique des fluides. [1]

Chapitre 1 Introduction aux modes de transfert

1.1 Un phénomène de transfert

Un phénomène de transfert (ou phénomène de transport) est un phénomène irréversible durant lequel une grandeur physique est transportée par le biais de molécules et qui a pour origine l'inhomogénéité d'une grandeur intensive. C'est la tendance spontanée des systèmes physiques et chimiques à rendre uniformes ces grandeurs qui provoquent le transport.

L'étude de chaque phénomène de transport se réfère à une certaine entité (caractéristique) transférée, par exemple : la quantité de mouvement nécessaire pour augmenter la vitesse d'un fluide, la chaleur afin de vaporiser un liquide et la masse du liquide transportée dans une conduite ou la dispersion d'un liquide coloré au sein d'un autre liquide transparent. [2]

Les grandeurs physiques transférées les plus connues sont la chaleur (transfert thermique), la matière (transfert de masse) et la quantité de mouvement.

Les corps qui assurent le transfert de ces grandeurs physiques sont appelés porteurs de charge.

1.2. Différents phénomènes de transfert

Les phénomènes de transfert les plus connus sont :

- a) Transfert de chaleur (thermique) : Pour lequel la grandeur transférée est la chaleur (Température), ce transfert s'effectue entre deux zones où règnent des températures différentes : il se fait toujours de la température la plus élevée vers la température la plus basse (moins élevée). La différence de température est appelée : la force motrice du transfert thermique. [2]
- b) Transfert de masse (de matière) : Pour lequel la grandeur transférée est la matière (Concentration massique), ce transfert s'effectue entre deux zones où règnent des concentrations massiques différentes, il se fait toujours de la concentration plus élevée vers la concentration la plus faible. La différence de concentration est appelée: la force motrice du transfert de masse. [2]
- c) Transfert de quantité de mouvement: Pour lequel la grandeur transférée est la quantité de mouvement (Vitesse), ce transfert s'effectue entre deux entités qui possèdent des vitesses différentes, il se fait toujours de l'entité qui a la vitesse la plus élevée vers celle qui a la vitesse la plus faible. La différence de vitesse appelée: la force motrice du transfert de quantité de mouvement. [2]

La présentation de ces 3 disciplines adopte un plan similaire afin de dégager facilement les analogies très importantes qui favorisent la compréhension physique des phénomènes

Tableau 1.1. Présentation du plan et mise en évidence des analogies [3]

	Mécanique des fluides	Transfert thermique	Transfert de masse
Le flux transféré	Quantité de mouvement	Quantité de chaleur	Quantité de matière
Le mécanisme de transport :	Loi de Newton (fluide visqueux)	Loi de Fourier (conduction)	Loi de Fick (diffusion)
Les propriétés de transport	viscosité	Conductivité thermique	Diffusivité
Les bilans sur le transport de :	Mouvement	Energie	Matière
Pour la détermination de profils de :	Vitesse	Température	Concentration

1.3 Définitions et relations entre les grandeurs physiques

Au cours de l'exposé qui va suivre nous serons amenés à utiliser des écritures mathématiques et des définitions sur de nombreuses grandeurs. Il est donc nécessaire de bien les définir en préambule.

1.3.1. Un système

On appelle système l'ensemble de la matière située à l'intérieur d'un volume V délimité par une enveloppe fermée de surface externe S . La matière située à l'extérieur de cette surface constitue le milieu extérieur.

Si, durant le temps d'observation, le système n'échange pas de matière avec le milieu extérieur, on dit qu'il est fermé. Dans le cas contraire, on dit qu'il est ouvert. Suivant les circonstances, il pourra éventuellement être semi-ouvert, ou semi-fermé. Seul le système ouvert peut fonctionner en régime stationnaire ou permanent.

De manière analogue, un système sera qualifié d'isolé s'il n'a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur. Il sera non-isolé, s'il y a échange de chaleur.

Un système est en équilibre si aucune de ses propriétés macroscopiques n'évolue dans le temps. Mais un système ouvert en régime permanent n'est pas en équilibre !

Un système évolue, spontanément ou pas, pour atteindre un état d'équilibre.

Un système est caractérisé par deux catégories de paramètres : des grandeurs extensives, et des grandeurs intensives

Grandeur intensive : Une grandeur intensive est définie localement ; elle est indépendante de la taille du système. [4]

Quelques grandeurs intensives courantes

- la pression
- la température
- la tension superficielle

- l'affinité chimique
- La masse volumique
- La densité
- L'accélération
- La vitesse

Grandeur extensive : Une grandeur extensive est définie sur la totalité du système ; elle est additive lors de la réunion de deux systèmes disjoints.

Quelques grandeurs extensives courantes

- la masse
 - le nombre de particules
 - le volume (la surface, la longueur)
 - la charge électrique
 - L'énergie (cinétique, potentielle, élastique..)
 - l'entropie
 - l'enthalpie
 - le débit
- ✓ En général une grandeur intensive est associée à une grandeur extensive.
 - ✓ Le rapport de deux grandeurs extensives est intensif (par exemple : les densités comme la masse volumique, la charge surfacique etc.).
 - ✓ Le produit d'une variable intensive par une extensive donne une variable extensive.

1.3.1.1. Les contraintes d'un système.

Le régime de fonctionnement d'un appareil physico-chimique quelconque résulte de la combinaison d'un très grand nombre de facteurs caractérisant soit la transformation chimique elle-même, soit les processus de transport de matière, de chaleur et de quantité de mouvement, etc. On appelle contraintes du système toutes les relations mathématiques entre ces différents facteurs.

Quand on décrit mathématiquement le fonctionnement d'un tel système, il parfois difficile d'être certain d'avoir tenu compte de toutes les contraintes, et inversement, il est difficile de s'assurer que les nombreuses relations mathématiques que l'on est tenté [4]

1.3.2. La chaleur

Pour le cours "Phénomènes de transfert" nous disons simplement que c'est une forme de l'énergie. Disons aussi que, lorsqu'on introduit une quantité de chaleur dans un corps, la température de ce dernier augmente. Dans le cas d'un changement de phase, une partie de cette chaleur est utilisée pour satisfaire les besoins thermiques liés à ce phénomène (fusion, évaporation, etc...). [4]

1.3.3. La conservation de la chaleur

Une fois que l'énergie a été transformée en chaleur, cette dernière se "conserve" lors des différents transferts qu'elle subit.

$$Q + \Delta Q = Q'$$

1.3.3.1. La chaleur spécifique

La relation fondamentale

$$\Delta Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

La relation fondamentale exprime que, si un corps de masse m stocke ΔQ joules, sa température s'élèvera de ΔT .

c_p , la chaleur spécifique (en J/(kg K)) est une propriété physique des matériaux et elle dépend généralement de la température. Elle caractérise sa capacité à emmagasiner de la chaleur. La chaleur spécifique d'une substance est fonction de sa structure moléculaire et de sa phase.[4]

1.3.4. L'enthalpie

On appelle "enthalpie" la quantité d'énergie contenue dans l'unité de masse d'un corps porté d'une température de référence T_0 à la température T . Elle contient d'éventuelles chaleurs de transformation survenues dans l'intervalle $T_0 - T$. [$H(T_0) = 0$; $T_0 = 0^\circ\text{C}$ ou 20°C selon les tables] [4]:

$$\Delta H = \Delta Q/m \text{ [J/kg]}$$

1.3.5. La chaleur latente de changement d'état

La chaleur latente spécifique d'une substance est la quantité de chaleur nécessaire pour entraîner le changement de phase d'une unité de masse de la substance. L'unité SI de la chaleur latente spécifique est le J/kg. La chaleur latente de fusion est la quantité d'énergie thermique dégagée par 1 kg de substance solide (p. ex. quand elle fond) sans qu'il y ait de changement de température. La chaleur latente de vaporisation est la quantité d'énergie thermique nécessaire pour transformer à l'état de vapeur 1 kg d'une substance sans qu'il y ait changement de température. [4]

1.3.6. L'Entropie (S)

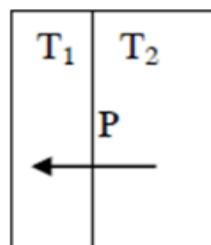
L'entropie est une mesure du défaut de structure ou de la quantité de désordre dans un système. Lorsque deux points dans l'espace sont à des températures différentes ($T_2 > T_1$), il y a systématiquement transfert de chaleur de T_2 vers T_1 (c'est le deuxième principe de la thermodynamique). [4]

$$dS = dS_1 + dS_2$$

$$dS = \frac{dQ}{T_1} + \frac{-dQ}{T_2} = dQ \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

$$dS = dQ \left(\frac{T_2}{T_1 T_2} - \frac{T_1}{T_1 T_2} \right) = dQ \frac{(T_2 - T_1)}{T_1 T_2}$$

$$dS \geq 0 \Rightarrow T_2 > T_1$$



1.3.7. Transport convectif

Un mode important de transport des grandeurs ou extensités que nous venons de passer en revue est la convection : on désigne sous ce nom le transport par l'intermédiaire des mouvements de la matière.

En effet, tout écoulement de fluide transporte, obligatoirement, la masse, la quantité de mouvement, l'énergie, la masse de chaque espèce que contiennent les éléments de matière qui se déplacent.

C'est essentiellement par convection que la chaleur, transmise à de l'eau à l'intérieur d'un chauffe-eau, est transportée jusqu'à l'installation de douche, éventuellement située à l'autre extrémité de la maison. C'est par convection qu'un produit chimique est transporté du réservoir dans lequel il est stocké jusqu'à l'appareil dans lequel il est utilisé. [4]

1.3.8. Conduction et diffusion

Si la masse, la quantité de mouvement et la chaleur peuvent être transportées par l'intermédiaire des écoulements de fluide – c'est la convection –, l'expérience montre que ces extensités peuvent aussi être transmises, de proche en proche, sans intervention d'un quelconque écoulement. On parle alors de transports conductifs ou diffusifs.

L'expérience montre que la conduction ne se produit qu'en présence de gradients de grandeurs intensives particulières. Nous pouvons associer :

- (Diffusion de quantité de mouvement) et (gradient de vitesse) ;
- (conduction de chaleur) et (gradient de température) ;
- (Diffusion de matière) et (gradient de composition).

L'expérience montre que l'extensité diffuse toujours des zones de haute intensité vers celles d'intensité plus faible, c'est-à-dire, dans un sens où les gradients sont négatifs. Par exemple, si on place soigneusement une goutte de liquide coloré au milieu d'un cristalliseur rempli de ce même liquide transparent et immobile (pas de convection), on observe que la tâche colorée s'étend progressivement. [4]

1.3.9. Situations induisant des transferts de chaleur ou de matière

Que le mécanisme soit conductif ou convectif, il ne peut y avoir transfert de chaleur ou de matière que lorsque la température ou la concentration ne sont pas uniformes au sein du fluide. Les variations de ces intensités peuvent être provoquées soit par le fait que les surfaces qui bornent le fluide sont portées à des températures ou concentrations différentes de celles du cœur du fluide, soit par des changements d'état physique ou des réactions chimiques qui consomment ou dégagent, localement, de l'énergie thermique ou transforment les espèces. En l'absence de ces sources ou puits de chaleur ou de matière, tant que le fluide reste isotherme et à composition constante, il ne peut y avoir ni transfert de chaleur ni transfert de matière. [4]

1.3.10. Phénomènes permanents — Phénomènes établis

Dans le cas le plus général, tout phénomène de transfert, caractérisé par les valeurs particulières que prennent les densités de flux de quantité de mouvement, d'énergie ou de matière ou par les valeurs des intensités correspondantes, vitesse, température et concentration, est fonction à la fois du temps et de la position.

On qualifie de permanent ou stationnaire tout phénomène dont les caractéristiques n'évoluent pas dans le temps. Beaucoup d'unités industrielles de transformation de la matière fonctionnent en état permanent.

Par opposition, on dit qu'un phénomène qui évolue dans le temps est instationnaire ou transitoire. Dans le cas d'un fluide qui coule à l'intérieur d'une conduite, on dit que la situation est établie lorsqu'elle a atteint un état tel que la vitesse et les grandeurs qui en dépendent, quantité de mouvement, énergie cinétique, n'évoluent plus dans la direction générale de l'écoulement. Pour ce qui concerne la température ou la concentration, maintenant, en présence des échanges nécessaires pour créer des profils, il est rare que ces grandeurs n'évoluent pas dans la direction de l'écoulement. Par extension, on dit que le régime est quasi établi, lorsque la forme des profils n'évolue plus. Les distances nécessaires pour obtenir les établissements ou quasi-établissements des régimes sont presque toujours différentes pour les phénomènes de transfert de quantité de mouvement, de chaleur ou de matière.[4]

1.3.11. Phénomènes de transfert et changements d'état physique

Beaucoup d'opérations industrielles combinent des phénomènes de transfert avec des changements d'état physique de la matière ou d'une partie de la matière mise en jeu : c'est le cas, par exemple, dans les évaporateurs, les condenseurs ou les cristalliseurs. Remarquons bien que l'existence d'un changement d'état physique (évaporation d'un liquide, condensation d'une vapeur, cristallisation d'un soluté, etc.) implique, nécessairement que le système comprenne, au moins, deux phases.

Nous avons évoqué dans le paragraphe précédent, le surcroît de complexité qui résulte du caractère diphasique et avons décrit les deux grandes voies d'analyse qu'on peut utiliser.

Nous voulons simplement préciser, ici, que le changement d'état physique se produit, nécessairement, sur les interfaces qui séparent les phases. En conséquence, l'existence de changements d'état physique ne modifie en rien les relations qui décrivent les phénomènes de transfert au sein de chaque phase. Ces changements d'état physique sont pris en compte dans l'expression des conditions limites qu'on écrit au niveau des interfaces.[4]

1.3.12. Turbulence et phénomènes de transfert

S'il est indiscutable que la structure d'un écoulement turbulent est nettement plus complexe que celle d'un écoulement laminaire, il ne faudrait pas que cette observation guide le praticien vers de mauvais choix de conditions opératoires et, en particulier, le conduise à rechercher des situations laminaires.

En fait, la turbulence présente le grand intérêt d'induire des phénomènes de mélange intenses, tout à fait favorables pour de multiples opérations de génie des procédés.

On peut rappeler qu'une condition impérative pour qu'une réaction chimique ait lieu est que les molécules des réactifs se rencontrent. Il faut donc que ces réactifs, à l'origine séparés, soient mélangés de manière très intime. Dans ce contexte, la turbulence présente un intérêt considérable puisqu'elle induit, naturellement, ce mélange dont on vient de rappeler la nécessité ; a contrario, le régime d'écoulement laminaire, qui tend à maintenir les réactifs séparés, ne facilite pas les transformations chimiques.

De même, tout échange de chaleur ou de matière entre une surface et un fluide en écoulement implique un transfert transversal (de la paroi vers le cœur du fluide ou vice versa). En régime laminaire, où le mouvement reste toujours parallèle à la paroi, ces transferts transversaux ne peuvent prendre place que par conduction ou diffusion, processus qui sont lents. En régime turbulent, par contre, les transports transversaux induits par la turbulence viennent renforcer et, rapidement, supplanter la diffusion ; la turbulence accélère fortement les échanges. [4]

1.3.13. Régimes d'écoulement

Suivre l'évolution d'un filet coloré qu'on a introduit, avec précaution, dans un fluide transparent constitue une méthode assez simple pour déterminer l'organisation détaillée d'un écoulement ; à titre d'exemple, nous schématisons sur la figure 1.1, les observations qu'on peut, ainsi, effectuer à l'intérieur d'un tube cylindrique.

L'expérience montre que, tant que le débit de fluide transparent reste faible, le fluide coloré suit une trajectoire rectiligne, parallèle à l'axe du tube. Cette observation démontre que, en tout point et à tout instant, chacun des éléments de fluide se déplace en ligne droite, parallèlement aux parois solides qui le guident : ce mode d'écoulement est appelé laminaire.

À plus fort débit du fluide transparent, l'expérience montre que le mouvement réel dans le tube devient beaucoup plus complexe. On observe que, peu après son introduction, le filet coloré perd son identité ; il est dispersé dans le fluide transparent, produisant une teinte très pâle mais uniforme.

Dans ce cas, on doit conclure qu'il existe, dans le tube, des mouvements dans toutes les directions, seuls capables de réaliser le mélange qu'on observe. Par contre, certains de ces mouvements doivent, sans cesse, varier dans le temps et dans l'espace, en direction et intensité, pour que leurs moyennes sur l'espace ou dans le temps soient nulles, condition absolument nécessaire puisque, par exemple, on n'observe, évidemment, aucun débit radial ou angulaire (c'est-à-dire aucun mouvement moyen dans ces directions).

Ce mode d'écoulement compliqué, où les mouvements fluctuent dans le temps et l'espace, est dit turbulent.

Pour terminer, nous devons insister sur le fait que le passage du régime laminaire au régime turbulent, que nous venons de décrire à l'intérieur d'un tube cylindrique, constitue un phénomène naturel - et donc inévitable - qui se produit, quelle que soit la géométrie du système d'écoulement, quand on augmente le débit. [4]

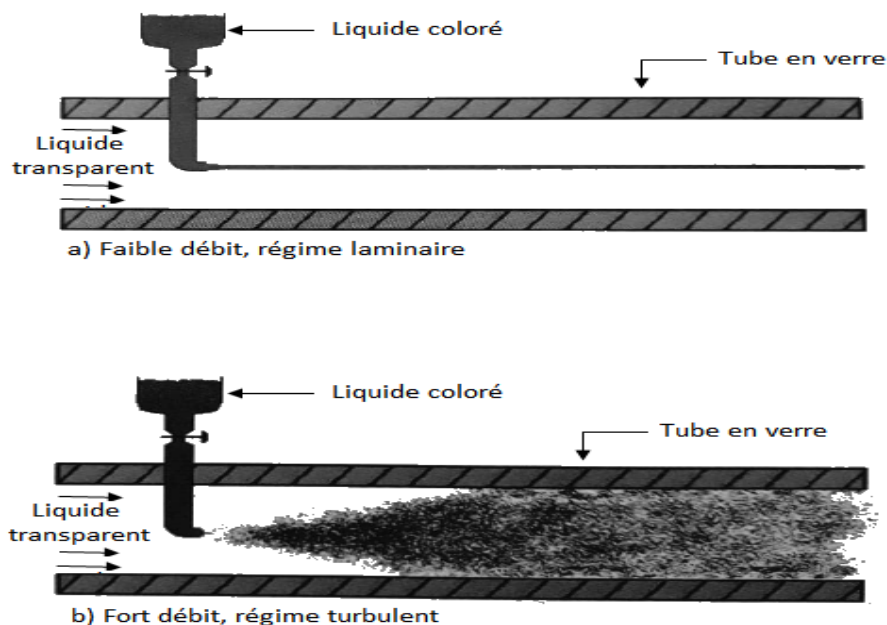


Figure 1.1. Les régimes d'écoulement [4]

1.3.14. Compressibilité et dilatabilité

La masse volumique constitue une propriété importante des fluides. Elle est égale au rapport entre une masse homogène de matière et le volume qu'elle occupe. $\rho = \frac{m}{V}$

On peut préciser que cette propriété possède un sens physique parfaitement défini, à partir du moment où on retient l'approche continue de la matière.

À pression atmosphérique, les gaz ont des masses volumiques de l'ordre du kg/m^3 et les liquides non métalliques de l'ordre de 1000 kg/m^3 .

Les fluides sont compressibles : à température constante, des variations de pression provoquent des variations de volume ou de masse volumique. L'ampleur du phénomène est traduite par la valeur du coefficient de compressibilité isotherme.[4]

$$\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T$$

On sait que les liquides sont infiniment moins compressibles que les gaz ; pour la plupart des utilisations que le génie des procédés en fait, les liquides peuvent, même, être considérés comme incompressibles.

Les fluides sont dilatables : à pression constante leur volume ou leur masse volumique sont fonction de la température. L'ampleur du phénomène est traduite par la valeur du coefficient de dilatation isobare, [4]

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

À nouveau, les liquides sont beaucoup moins dilatables que les gaz.

1.3.15. Vitesse — Gradient de vitesse

Définir la vitesse de déplacement d'un objet solide est relativement facile. Définir la vitesse d'écoulement d'un fluide devient nettement plus délicat car chaque élément de matière se déforme en même temps qu'il se déplace. Provisoirement, nous proposons de considérer les composantes de la vitesse d'écoulement comme les rapports entre les composantes du vecteur densité de flux massique \vec{n} et la masse volumique, soit :

$$v_i = \frac{n_i}{\rho}$$

Lorsque, dans tout le volume du fluide, le vecteur vitesse ne possède qu'une seule composante non nulle, on dit que l'écoulement est unidirectionnel. Avec deux composantes non nulles, il s'agit d'un écoulement bidirectionnel.

La plupart des systèmes d'intérêt en génie des procédés relèvent de deux catégories principales (voir figure 1.2), les écoulements en conduites pour lesquels le fluide est contenu dans une enceinte solide, avec une entrée et une sortie (au moins), et les écoulements autour d'un objet submergé pour lesquels le fluide, supposé d'extension infinie, entoure un volume solide (ou constitué d'un fluide immiscible).

Dans tous les cas, comme les fluides adhèrent aux parois solides, il ne peut y avoir écoulement que si la vitesse varie, de zéro sur les surfaces, lorsqu'elles sont immobiles, jusqu'à des valeurs différentes, atteintes loin des surfaces ; il existe donc, nécessairement, des variations spatiales de vitesse ou, encore, un gradient de vitesse. [4]

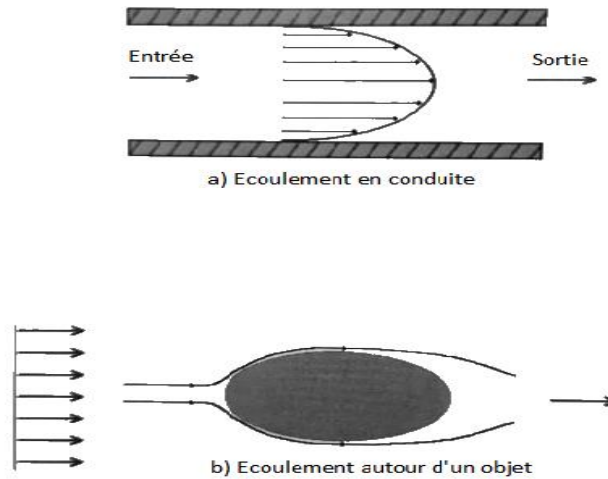
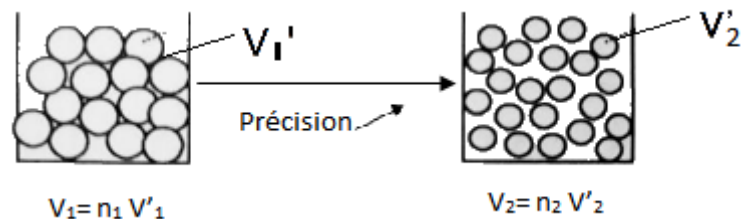


Figure 1.2. Catégories d'écoulements : a) en conduite ; b) autour d'un objet [4]

1.3.16. Le volume

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_V \Delta V = \int_V dV$$

La signification physique de l'opérateur $\int_{\Delta V \rightarrow 0}^{dV} V$ peut être illustrée par la figure ci-dessous. Si l'on souhaite connaître le volume V d'un récipient en comptabilisant le nombre « n » de sphères de volume unitaire V' , on augmentera la précision de la mesure si $V' \rightarrow 0$. [1]



1.3.17. La masse

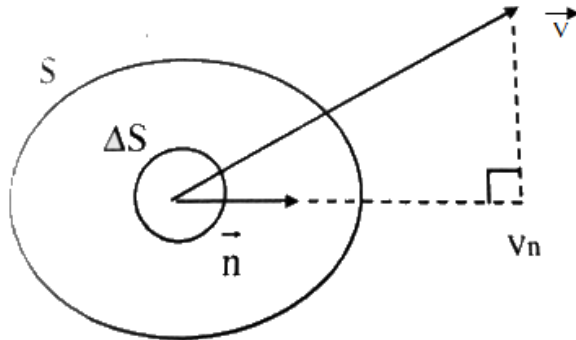
La masse m dans un volume de contrôle V au temps t est obtenue à partir de petites masses Δm contenues dans un petit volume ΔV avec [1] :

$$\sum_V \Delta m = \sum_V \rho \Delta V$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_V \rho \Delta V = \int_V \rho dV$$

ρ : Masse volumique fonction du temps et de la position dans un espace tridimensionnel $\rho = \rho(x, y, z, t)$

1.3.18. Débit d'un fluide de vitesse \vec{V} traversant une surface S



Le vecteur \vec{V} représentant l'écoulement de la masse qui n'est pas forcément perpendiculaire à S

Si \vec{n} est le vecteur normal, perpendiculaire à S et orientée vers l'extérieur du volume de contrôle.

Le débit volumique à travers ΔS est $Q_V = (\vec{V} \cdot \vec{n}) \Delta S$

Le débit massique à travers ΔS est $Q_m = (\vec{V} \cdot \vec{n}) \rho \cdot \Delta S$

La projection du vecteur \vec{V} sur l'axe \vec{n} est V_n qui représente la vitesse entrant ou sortant de la surface ΔS .

Si les 2 vecteurs \vec{n} et \vec{V} sont dans le même sens, le fluide sort du volume V .

Si les 2 vecteurs \vec{n} et \vec{V} sont dans le sens opposé, le fluide rentre dans le volume V .

La masse qui entre ou qui sort à travers la surface de contrôle S pendant Δt est [1]

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\sum_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) \Delta S \cdot \Delta t \right) = \Delta t \int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$$

Soit $q_m = \int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS$

et $q_V = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS$

1.3.19. vitesse moyenne d'un fluide $\langle V \rangle$

Par définition on pose $\langle V \rangle \equiv \frac{\int_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS}{S}$

On peut établir alors la relation suivante :

$$\int_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \rho \int_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \equiv \rho (\langle V \rangle_S - \langle V \rangle_E) S$$

$\langle V \rangle_S$ et $\langle V \rangle_E$: vitesses moyennes des flux sortant et entrant dans le volume de contrôle

On note $W = \rho \cdot S \cdot \langle V \rangle$: débit massique moyen [1]

- Terme d'échange de chaleur à la surface S

1.3.20. Le flux de chaleur à la surface ΔS [1]

$$\varphi_q = \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot \Delta S$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_S (\vec{q} \cdot \vec{n}) \Delta S = \int_S (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS$$

-Terme d'échange d'énergie mécanique à la surface S

1.3.21. Le flux d'échange sur la surface ΔS [1]

$$\varphi_m = (\vec{\tau}_s \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n} \cdot \Delta S$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_S (\vec{\tau}_s \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n} \Delta S = \int_S (\vec{\tau}_s \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n} dS$$

1.4. Introduction aux bilans

Les procédés développés en génie chimique peuvent être décrits par des modèles mathématiques basés sur la conservation des grandeurs fondamentales du phénomène observé : la matière (masse en Kg ou mole), l'énergie (J) et la quantité de mouvement (en Kg.m.s⁻¹)

Ces bilans sont réalisés dans tout ou partie de l'espace dit « volume de contrôle » entouré par la « surface de contrôle » qu'il s'agit de définir judicieusement par rapport à l'échelle des phénomènes étudiés. Lorsque le volume de contrôle est petit les bilans sont microscopiques et le formalisme mathématique fait appel aux équations différentielles. Lorsque le volume de contrôle augmente, on utilise les intégrales pour obtenir les bilans de type macroscopique. Le bilan microscopique permettra de connaître l'évolution des paramètres fondamentaux présentant des gradients dans le volume étudié. Le bilan macroscopique est quant à lui fondé sur une analyse globale à l'entrée et à la sortie du volume sur les grandeurs étudiées (matière, énergie, quantité de mouvement) [1]

1.5. Les variables

Les variables sont de deux types. Les variables dépendantes qui s'influencent entre elles (P, T, Cp, ρ ...). D'autres sont indépendantes : le temps t et les coordonnées spatiales en coordonnées rectangulaires (x, y, z), en coordonnées cylindriques (r, θ , z), ou en coordonnées sphériques (r, θ , φ).

Les équations de bilans : équations fondamentales

Dans le volume de contrôle retenu, la grandeur fondamentale étudiée de quantité X est conservative. Ce principe de conservation conduit à trois équations fondamentales.

La première dite équation de continuité repose sur un bilan de matière mettant en œuvre le principe de conservation de la masse.

La deuxième dite équation du mouvement est obtenue en effectuant un bilan de force et en appliquant le principe fondamental de la mécanique. [1]

La troisième résulte d'un bilan d'énergie mettant en jeu le principe de conservation de l'énergie.

Soit X l'une des trois grandeurs conservatives, l'écriture du bilan pour l'intégrale de temps.

$$\Delta t = t_2 - t_1 \text{ s'écrit : } X_{t_2} = X_{t_1} + X_{\text{entré ou formé pendant } \Delta t} - X_{\text{sortie ou disparu pendant } \Delta t}$$

Avec

X_{t_2} : Quantité de X contenue dans le volume de contrôle au temps t_2

X_{t_1} : Quantité de X contenue dans le volume de contrôle au temps t_1

$X_{\text{entré ou formé}}$: Quantité de X entrée à travers la surface de contrôle ou produite à l'intérieur du volume de contrôle pendant l'espace temps Δt .

$X_{\text{sortie ou disparu}}$: Quantité de X sortie à travers la surface de contrôle ou consommée à l'intérieur du volume de contrôle pendant l'espace temps Δt .

Il y a donc deux approches: la première consiste à effectuer les bilans macroscopiques qui ne prennent en compte que l'aspect global sur les paramètres entrant et sortant du système. En revanche, la connaissance de l'évolution des paramètres au cœur du système consiste à effectuer les bilans microscopiques ou locaux. [1]

Chapitre 2 Transfert de chaleur

2.1. *Introduction*

Les nombreux procédés utilisés dans l'industrie sont le siège d'échange d'énergie. Le passage d'un état d'équilibre à un autre conduit à un échange d'énergie entre le système et l'extérieur qui est prévisible par la thermodynamique. La thermique (ou thermocinétique) s'intéresse au processus de transfert de chaleur dans l'espace et dans le temps. Ce transfert d'énergie est une chaleur dite sensible pour un changement de température ou une chaleur latente pour un changement d'état (solide, liquide, gazeux). [1]

Des connaissances de base sont indispensables à l'ingénieur de production ou de développement s'il veut comprendre les phénomènes physiques ou chimiques qu'il observe pour agir sur le procédé étudié et maîtriser ainsi la qualité du produit recherché. [1]

Le coût énergétique d'un procédé s'améliore à travers le contenu énergétique du produit final. Que le transfert de chaleur soit nécessaire (fours, coulée, échangeurs, thermoformage, trempe) ou subit (chocs thermiques, pertes de chaleur, rayonnement) on comprend bien que la compréhension des mécanismes mis en jeu au cours d'un chauffage ou d'un refroidissement permettront d'améliorer le bilan énergétique du procédé. [1]

Dans la pratique, ces transferts de chaleur s'établissent entre deux points de l'espace dont la différence de température est non nulle. Le débit de chaleur transmis au cours de ce transfert doit être maîtrisé et optimisé. [1]

2.2. *Définitions*

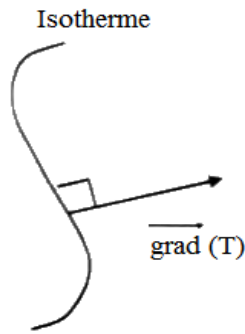
2.2.1 *Champ de température*

Le transfert de chaleur est lié aux températures locales considérées qui varient dans le temps et dans l'espace : $T = f(x,y,z,t)$. La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé champ de température. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit permanent ou stationnaire.
- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit variable, instationnaire ou transitoire. [1]

2.2.2 *Gradient de température*

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température : [1]



$$\overrightarrow{\text{grad}} (T) = \vec{n} \frac{\partial T}{\partial n}$$

Avec : \vec{n} vecteur unitaire de la normale

$\frac{\partial T}{\partial n}$: Dérivée de la température le long de la normale.

Figure 2.1. Isotherme et gradient thermique

2.2.3 Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température par conduction des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur (dQ) transmise par unité de temps (dt) et par unité d'aire de la surface isotherme (S) est appelée densité de flux de chaleur : [1]

$$\Phi = \frac{1}{S} \cdot \frac{dQ [J]}{dt [m^2 \cdot s]} ; \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Où S est l'aire de la surface (m²).

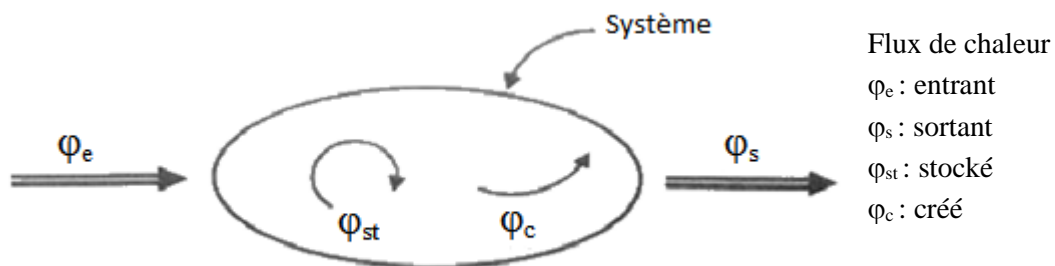
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface S par unité de temps [1]

$$\varphi = \frac{dQ}{dt}$$

2.3. Formulation d'un problème de transfert de chaleur

2.3.1. Bilan d'énergie

Après avoir défini un système (S) par ses limites dans l'espace, il faut ensuite faire l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système.



On applique le 1^{er} principe de la thermodynamique sur le système S pour lequel

$$\varphi_e - \varphi_s = \varphi_{st} - \varphi_c$$

Lorsque le régime permanent est établi $\varphi_e = \varphi_s$ de sorte que $\varphi_{st} - \varphi_c = 0$

En régime transitoire on rencontre deux situations :

Si $\varphi_e > \varphi_s$ la température du système augmente et $\varphi_{st} > \varphi_c$

Si $\varphi_e < \varphi_s$ la température du système diminue et $\varphi_{st} < \varphi_c$

- Flux stocké

Le stockage d'énergie dans un corps conduit à une augmentation de son énergie interne donc de sa température au cours du temps. A pression constante il peut être évalué de la façon suivante

$$\varphi_{st} = \rho \cdot V \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

φ_{st} : Flux de chaleur stocké [W]

ρ : masse volumique du système [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]

V : Volume du système [m^3]

C_p : Chaleur massique du système [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$]

T : température moyenne du système [$^\circ\text{C}$]

t : temps [s]

Les grandeurs ρ , V et C_p sont supposées comme constantes dans le domaine de température.

Le produit $\rho \cdot V \cdot C_p$ [$\text{J} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$] est appelé capacitance thermique du milieu. [1]

- Flux créé (général)

Ce flux correspond aux différentes formes d'énergie créées (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) converties en énergie thermique. D'une façon générale on peut exprimer ce flux de la façon suivante :

$$\varphi_c = \hat{q} \cdot \rho \cdot V$$

φ_c : Flux d'énergie thermique créé [W]

ρ : masse volumique du système [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]

V : Volume du système [m^3]

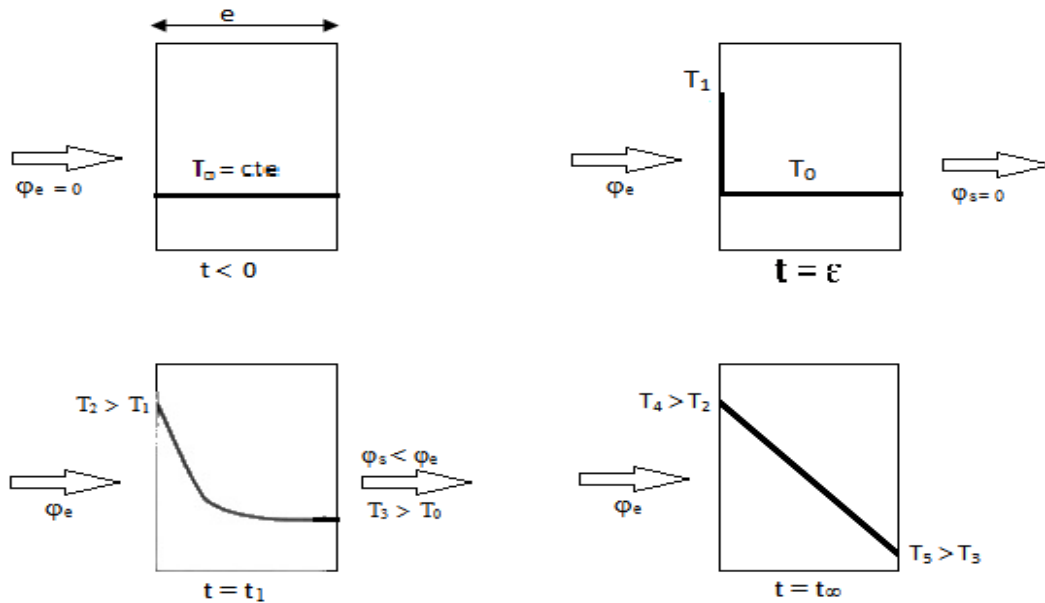
\hat{q} : puissance massique générée [$\text{W} \cdot \text{kg}^{-1}$]

- Flux entrant et flux sortant

Ils définissent le régime du transfert : transitoire ou permanent.

Au cours du chauffage d'un solide homogène, d'épaisseur « e » et de surface S perpendiculaire au flux thermique incident, on assiste à une variation de la température T suivante en fonction du temps t.

Lorsque le flux φ_e transfère son énergie dans les premiers instants ($t = \varepsilon$), seule les premières couches atomiques sont concernées sur l'épaisseur. La surface atteint la température T_1 et le flux incident sert à chauffer la surface et est totalement stocké dans le matériau ($\varphi_s = 0$). [1]



A $t = t_1$ toute l'épaisseur du matériau est affectée, la surface exposée au flux φ_e a sa température qui est passée de T_1 à T_2 et l'autre face a sa température qui commence à augmenter $T_3 > T_0$. Le flux sortant $\varphi_s \neq 0$ mais on a toujours $\varphi_s < \varphi_e$ car le matériau continue à s'échauffer. [1]

A $t = t_\infty$ les températures se stabilisent et ne varient plus dans le temps et alors $\varphi_s = \varphi_e$.

Ainsi pour $\epsilon < t < t_\infty$ on a le régime transitoire $\varphi_s \neq \varphi_e$

Pour $t \geq t_\infty$ on est en régime permanent $\varphi_s = \varphi_e$

2.4. Les modes de transmission de la chaleur

Le deuxième principe de la thermodynamique admet que la chaleur ne peut passer que d'une zone chaude vers une zone froide. Il s'agit de comprendre comment il s'effectue au sein et sur les frontières du système. Les principes mis en jeu doivent être examinés mais l'on peut considérer d'ores et déjà qu'il y a trois modes de transfert : la conduction, la convection et le rayonnement. En fait les trois modes de transfert sont souvent présents simultanément mais dans certains cas on peut comprendre qu'un ou deux des trois modes sont négligeables ; l'analyse du transfert s'effectue alors comme si seul le mode prédominant existait. [1]

2.4.1. La conduction thermique

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de la matière, en présence d'un gradient de température. Elle s'effectue selon deux mécanismes différents: une transmission par vibration des molécules ou atomes et une transmission par les électrons libres. Ce mode se produit au sein d'une même phase au repos ou mobile, en présence d'un gradient de température. Dans ce cas, le transfert de chaleur résulte d'un transfert d'énergie cinétique d'une molécule à une autre molécule adjacente. Ce mode de transfert est le seul à exister dans un solide opaque (qui absorbe tous les rayons). Pour les solides transparents, une partie de l'énergie peut être

transmise par rayonnement. Avec les fluides (gaz ou liquides), la convection et le rayonnement peuvent se superposer à la conduction. [2, 3]

Au sein d'un milieu optiquement opaque et au repos macroscopique (pas de mouvement de matière qui peut transporter son énergie), le transfert de chaleur par conduction s'effectue lorsqu'il y a une différence de température en deux points du système considéré. [1]

Au sein d'un corps homogène en composition (solide ou fluide immobile), la propagation de la chaleur par conduction s'effectue selon deux mécanismes distincts :

- une transmission par les vibrations des atomes ou molécules autour d'une position moyenne pour les solides ou leur mobilité et des chocs au sein du liquide ou du gaz.
- La mobilité des électrons plus ou moins libres selon la nature des liaisons mises en jeu (métalliques, covalentes, ioniques, Van der Waals ...) entre les atomes ou les molécules. [1]

Exemples

Un enfant qui touche une tige métallique chaude, la chaleur passe directement de la tige à la main de l'enfant car il y'a un gradient de température entre la tige métallique et la main de l'enfant [2]

2.4.1.1. Loi fondamentale de la conduction (loi de Fourier)

La loi fondamentale de la transmission de la chaleur par conduction, a été proposée par le mathématicien et physicien Français, Jean Baptiste Joseph Fourier en 1822.

Considérons par exemple un corps solide et à l'intérieur de ce solide deux points M_0 et M_1 dont les températures sont respectivement T_0 et T_1 tels que ($T_0 > T_1$). Il y'a propagation de la chaleur de M_0 vers M_1 par l'intermédiaire de tous les points du solide situés entre eux et sans déplacement de matière et tels que : $\frac{dT}{dx} < 0$ [4]

On dit que la chaleur est transmise par conduction. Ce type de transfert suppose l'immobilité du milieu mais il peut se développer dans un fluide en mouvement par référence à un repère mobile se déplaçant à la vitesse de ce fluide. [4]

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : le flux de chaleur transféré dans une direction donnée est proportionnel au gradient de température dans cette direction. La loi de Fourier s'écrit donc [1,4] :

$$\vec{\varphi} = - \lambda S \overrightarrow{\text{grad}} (T)$$

En général

$$\varphi = - \lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$$

Le signe (-) : la propagation de la chaleur s'effectue dans le sens opposé du gradient de température.

Avec :

φ : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

x : Variable d'espace dans la direction du flux (m)
 S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2)
 T : Température (K)
 λ : Conductivité thermique. ($W m^{-1} K^{-1}$)

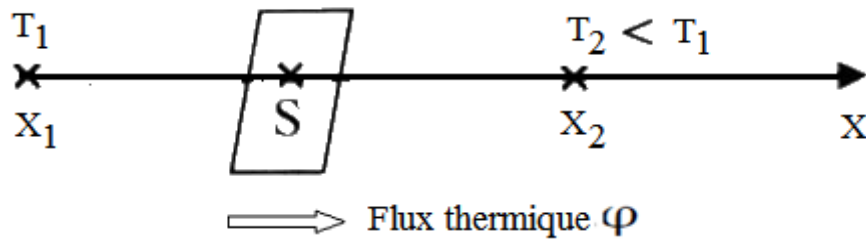


Figure 2.2. Schéma du transfert de chaleur conductif [1]

- La conductivité thermique

La conductivité thermique de la matière dépend de sa température, de sa composition chimique et de son état (solide, liquide ou gazeux).

On trouvera dans le tableau 2.1 les propriétés physiques de certains matériaux parmi les plus courants. [1]

Tableau 2.1. Propriétés physiques de certains matériaux [1]

Nature	θ	P	C_p	λ
Unité	$^{\circ}\text{C}$	Kg.m^{-3}	$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Métaux, alliages et céramiques				
Acier carbone	20	7833	465	54
	200			48
	600			35
Argent	20	10526	234	407
Cuivre	20	8964	383,1	986
	400			363
Fer	20	7870	452	73
Or	20	1336	19300	129
Matériaux divers				
Amiante	20			0,16
Carton	20	86	2030	0,048
Glace	0	920	2040	1,88
Verre	20	2700	840	0,78
Matériaux de construction				
Ardoise	20	2400	879	2,2
Bois feuillus légers	20	526	3143	0,15
Carrelage	20	2400	875	2,4
Marbre	20	2700	881	2,9
Plâtre	20			0,48
Matériaux isolants				
Copeaux bois	23			0,059
Coton	20	80	1300	0,06
Laine de verre	20	8	875	0,051
	20	10	890	0,045
	20	15	880	0,041
	20	40	880	0,035
Polystyrène expansé	20	12	1300	0,047

La conductivité thermique définit le caractère conducteur ou isolant de la matière considérée. Il est indispensable de choisir le matériau en fonction de l'utilisation retenue. Le fond d'une casserole doit avoir une forte conductivité pour favoriser le transfert de flux depuis la flamme vers le produit à chauffer. L'isolation d'un bâtiment est assurée par de la laine de verre et par le double vitrage pour limiter le transfert du flux thermique vers l'extérieur. Dans ce dernier cas ce n'est pas le verre qui isole ($\lambda \approx 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) mais l'air ($\lambda = 0,026 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) immobilisée entre deux vitres ou dans la laine. C'est pour cette raison que la laine de verre présente une faible conductivité thermique variant de 0,035 à 0,051 $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ selon la proportion d'air emprisonnée. [1]

Exercice 1

Calculer le flux traversant une vitre de 1 m² de surface et d'épaisseur e_v, La température de la face interne de la vitre est T₁ et celle de la face externe est T₂. [2]

Données :

$$T_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}, T_2 = 5 \text{ }^\circ\text{C}, e_v = 3,5 \text{ mm } k_v = 0,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \quad (k_v : \text{la Conductivité thermique du verre})$$

Solution

La loi de Fourier

$$\varphi = -\lambda S \frac{dT}{dX} = \text{Cte}$$

$$\varphi \int_{X_1=0}^{X_2=e_v} dX = -\lambda_v \cdot S \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_v}{\lambda_v S}}$$

$$\varphi = \frac{(10-5)}{\frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{0,71}} = 1000 \text{ W}$$

2.4.1.2. L'équation de la chaleur

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan d'épaisseur « e » et de longueur et largeur L >> e :

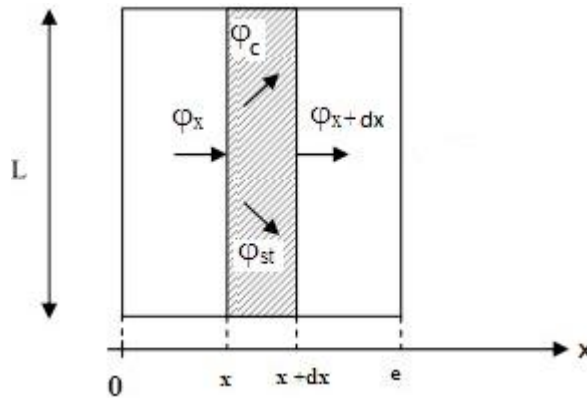


Figure 2.3. Bilan thermique sur un système élémentaire [1]

Considérons le système d'épaisseur élémentaire dx dans la direction x, de section d'aire S normale à la direction d'écoulement du flux. Le bilan thermique sur ce système s'écrit [1]:

$$\varphi_x + \varphi_c = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st}$$

$$\text{avec } \varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial X}\right)_x$$

$$\varphi_c = \hat{q} \cdot \rho \cdot s \cdot dx$$

$$\varphi_{x+dx} = - \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial X} \right)_{x+dx} \qquad \varphi_{st} = \rho \cdot s \cdot dx \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

En reportant dans le bilan thermique et en divisant par dx, on obtient l'équation du transfert de chaleur unidirectionnel :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \hat{q} \cdot \rho = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation de la chaleur dans le cas le plus général, tridimensionnel est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\lambda_X \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \hat{q} \cdot \rho = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation se simplifie lorsque les hypothèses suivantes sont satisfaites:

- lorsque le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$
- S'il n'y a pas de création d'énergie $\hat{q} = 0$
- Si le milieu est homogène, λ n'est fonction que de T.

Lorsque ces trois hypothèses sont satisfaites, l'équation prend la forme suivante :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho \cdot C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Si λ varie peu avec la température, c'est-à-dire dans tous les cas où la variation de la température est faible, on obtient l'équation de Poisson :

$$\frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le rapport $\frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} = a$ est appelé la diffusivité thermique ($m^2 \cdot s^{-1}$) qui traduit la vitesse de pénétration d'une isotherme au cours du régime transitoire (données dans le tableau 2.1).

Si enfin le régime permanent est établi on obtient l'équation de Laplace [1] :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow a \nabla^2 T = 0 \\ \text{Avec } a \neq 0 \end{array} \right\} \boxed{\nabla^2 T = 0}$$

Conduction unidirectionnelle dans un plan en régime permanent (Mur simple)

En l'absence de stockage et de création de chaleur, dans un matériau isotrope et de conductivité λ constante, nous considérons un plan d'épaisseur « e » et de grandes dimensions transversales dont les faces de surface $S_1 = S_2$ sont respectivement à T_1 et T_2 [1].

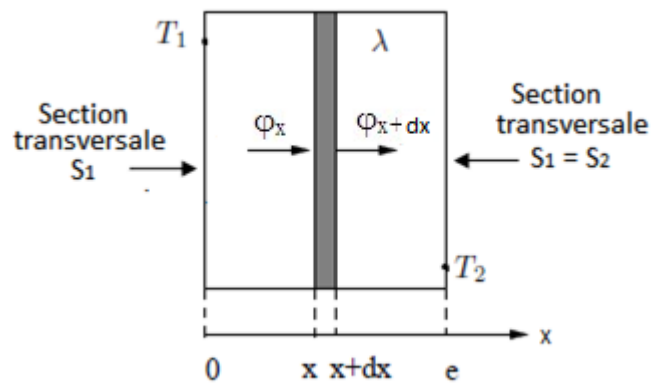


Figure 2.4. Bilan thermique élémentaire sur un mur simple [1]

Le bilan thermique sur le volume compris entre les abscisses x et $x + dx$ conduit en régime permanent ($\varphi_x = \varphi_{x+dx}$) à :

$$-\lambda S \left(\frac{dT}{dX}\right)_x = -\lambda S \left(\frac{dT}{dX}\right)_{x+dx}$$

$$d'où \frac{dT}{dX} = A \text{ soit } T = A x + B$$

Soit les conditions aux limites $T_{(x=0)} = T_1$ et $T_{(x=e)} = T_2$:

$$d'où \quad T = T_1 - \frac{x}{e} (T_1 - T_2)$$

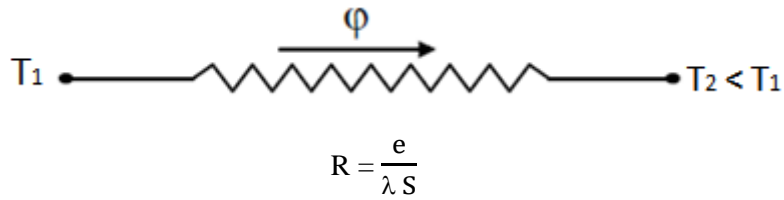
Le profil de température est donc linéaire et le flux de chaleur traversant le mur est obtenu à partir de l'équation de Fourier :

$$\varphi = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_2)$$

Cette expression peut également être mise sous une autre forme avec $R = \frac{e}{\lambda S}$

$$\text{On obtient : } T_1 - T_2 = R \cdot \varphi$$

Cette dernière expression est analogue à la loi d'ohm en électricité ($\Delta U = RI$) avec dans notre cas l'écart de température $\Delta T = T_1 - T_2$ (le potentiel thermique) qui est le produit de la résistance thermique R par le débit de chaleur φ . Cette analogie nous conduit à utiliser en thermique des schémas équivalents au transfert électrique, soit dans notre cas [1] :



L'expression du ϕ est également présentée sous la forme d'un produit de trois termes:

$$\phi = \frac{\lambda}{e} \cdot S \cdot (T_1 - T_2) = K \cdot S \cdot \Delta T$$

Le terme $K = \frac{\lambda}{e}$ [W. m⁻².K⁻¹] traduit la conductance du milieu, S la surface perpendiculaire au flux, ΔT le potentiel thermique.

L'augmentation de l'un de ces trois termes conduit à une augmentation du flux thermique transféré. [1]

2.4.2. La convection thermique

La convection consiste essentiellement en la transmission de l'énergie par le mouvement ou le déplacement macroscopique d'une parcelle (grand nombre de molécules), généralement d'un fluide d'une région à autre. Ce mécanisme est accompagné toujours par le transfert d'énergie dû au mouvement moléculaire et qui représente le côté conductif de ce mode. On distingue deux types de convection ; la convection naturelle (convection libre) où le mouvement des particules est dû aux différences de température qui sont imposées au fluide. La différence de température implique une différence de masses volumiques (déplacement des particules, dilatation), exemple (chauffage de l'air pour une montgolfière, chauffage de l'eau dans un récipient). La convection forcée où le mouvement des particules résulte de la pression appliquée au fluide par l'intermédiaire des moyens mécaniques, (d'une pompe par exemple) [3].

Le transfert de la chaleur par convection, se produit entre deux phases dont l'une est généralement au repos et l'autre en mouvement, en présence d'un gradient de température [3].

Le mouvement du fluide peut résulter de la différence de masses volumiques (ρ) due aux différences de températures.

Exemples

- C'est par convection que la chaleur, transmise à de l'eau à l'intérieur d'une chaudière, est transportée jusqu'aux différentes pièces d'un appartement.
- C'est par convection qu'un produit chimique est transporté du réservoir dans lequel il est stocké jusqu'à l'appareil dans lequel il est utilisé. [2]

2.4.2.1. Loi fondamentale de la convection (loi de Newton)

On considère que la résistance thermique R est équivalente à celle que le flux de chaleur rencontrerait en conduction à travers une paroi dont l'épaisseur serait celle du film laminaire et qui posséderait les mêmes caractéristiques thermiques que le fluide [1], soit :

$$R = \frac{e}{\lambda S}$$

Avec

e : épaisseur du film laminaire (m)

λ : Conductivité thermique du fluide ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)

S : surface d'échange (m^2)

Selon la loi de Fourier, le flux de chaleur sur la surface s'écrit: $\varphi = \frac{\lambda S}{e} (T_1 - T_p)$

Avec

T_1 : température à la limite du film laminaire (K)

T_p : température de la paroi (K)

Lorsque le régime thermique est bien établi, on peut considérer en première approximation que par suite des courants de convection, la masse fluide au-delà du film laminaire est à une température constante

($T_\infty = T_1$) et prend comme loi de convection [1] : $\varphi = \frac{\lambda S}{e} (T_\infty - T_p)$

Avec

T_∞ : température loin de la paroi

La loi énoncée au-dessus présente néanmoins une énorme difficulté dans son application puisque l'on ne connaît pas l'épaisseur e du film laminaire [1].

C'est ce qui amène à définir un coefficient de transfert superficiel ou coefficient de transfert de chaleur par convection par [1] :

$$h = \frac{\lambda}{e}$$

$h = [\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \text{K}^{-1}]$

$e = [\text{m}]$

La loi fondamentale de la convection est la loi d'Isaac Newton (1643-1727), traduite par la relation expérimentale de flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide. La loi de Newton s'écrit donc [4]: $\varphi = h S (T_p - T_\infty)$

Avec :

φ : Flux de chaleur transmis par convection (W)

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{W m}^{-2} \text{°C}^{-1}$)

T_p : Température de surface du solide (°C)

T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide (°C)

S : Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2)

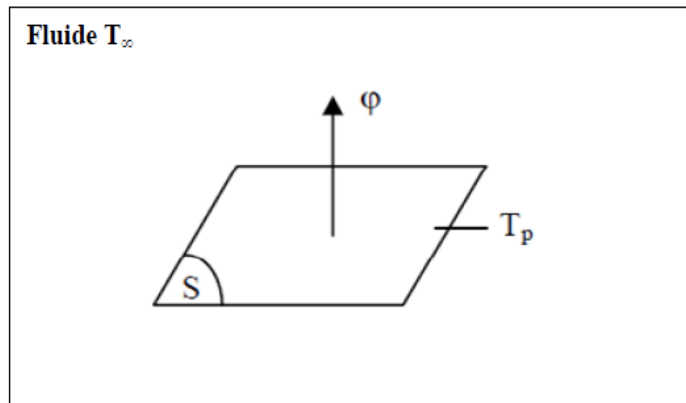


Figure 2.5. Schéma du transfert de chaleur convectif [5]

Remarque

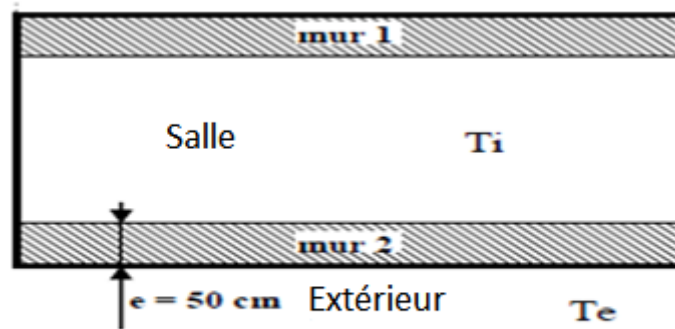
La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide [4].

Exercice 2

Un local est séparé de l'extérieur par 2 murs d'épaisseur $e_p = 50$ cm et de conductivité thermique $\lambda_p = 0,4$ W/m K

L'intérieur de la salle est maintenu à une température $T_i = 20^\circ\text{C}$, grâce à un système de chauffage (radiateur muni d'ailettes à circulation d'eau). Le coefficient de convection interne est $h_i = 1,5$ W/m² °C.

L'air extérieur est à une température $T_e = 5^\circ\text{C}$, le coefficient de convection externe est $h_e = 2$ W/m² °C[5].



Vue de dessus du local

- Calculer la densité de flux de chaleur perdue par chaque mur.

Solution

La densité de flux de chaleur

$$\Phi = \frac{(T_i - T_e)}{\frac{1}{h_i} + \frac{e_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_e}} \quad \Phi = 6,21 \text{ W/m}$$

2.4.2.2. Transferts parois-fluides

a) Mur multicouches

C'est le cas rencontré pour les murs réels constitués de plusieurs couches de matériaux. Les fluides de part et d'autre peuvent être de nature différente et présenter une convection plus ou moins importante. [1]

Les profils de températures représentés sur la figure 2.6 en régime permanent dépendent des modes de transfert convectif et conductif et de la nature des matériaux et des fluides en présence[1].

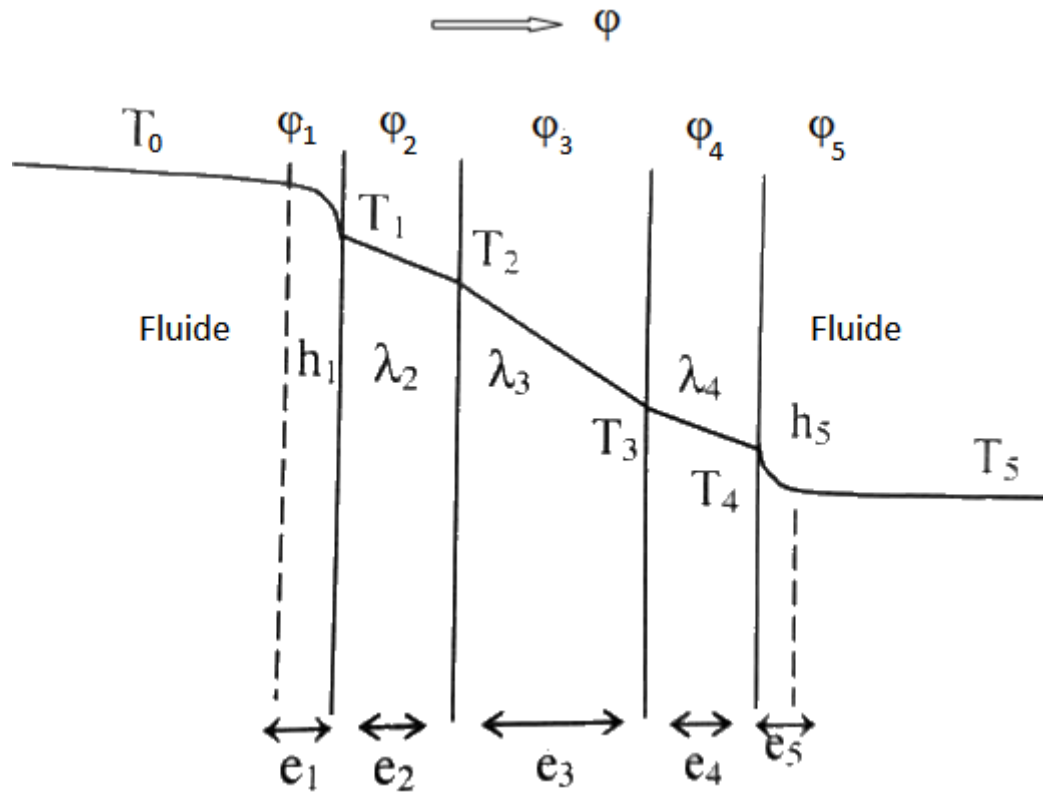


Figure 2.6. Mur multicouche [1]

Les parois planes solides et d'épaisseur e_2 , e_3 , et e_4 sont entourées de deux fluides en mouvement avec des épaisseurs de couches limites e_1 et e_5 . En régime permanent les flux thermiques traversant chaque couche répondent à l'égalité $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = \phi$. Les lois de la conduction et de la convection permettent d'écrire [1] :

$$\phi = h_1 S (T_0 - T_1) = \frac{\lambda_2 S (T_1 - T_2)}{e_2} = \frac{\lambda_3 S (T_2 - T_3)}{e_3} = \frac{\lambda_4 S (T_3 - T_4)}{e_4} = h_5 S (T_4 - T_5)$$

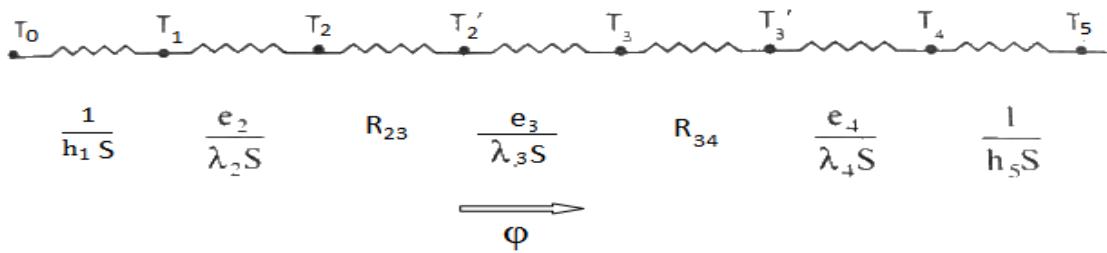
D'où après simplification :

$$\phi = \frac{(T_0 - T_5)}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{1}{h_5 S}}$$

On peut compléter l'expression en rajoutant les résistances de la couche d'air entre chaque paroi solide R_{23} et R_{34} . En effet la rugosité des surfaces conduisent à l'impossibilité d'un contact parfait. Ces résistances sont appelées résistances thermiques de contact liées au caractère isolant de l'air des rugosités de surfaces [1] :

$$\varphi = \frac{(T_0 - T_5)}{\frac{1}{h_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + R_{23} + \frac{e_3}{\lambda_3 S} + R_{34} + \frac{e_4}{\lambda_4 S} + \frac{1}{h_5 S}}$$

Le schéma électrique équivalent est le suivant :



En posant $\frac{1}{K} = \frac{1}{h_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + R_{23} S + \frac{e_3}{\lambda_3} + R_{34} S + \frac{e_4}{\lambda_4} + \frac{1}{h_2}$, On retrouve l'expression générale du transfert thermique de la forme[1] :

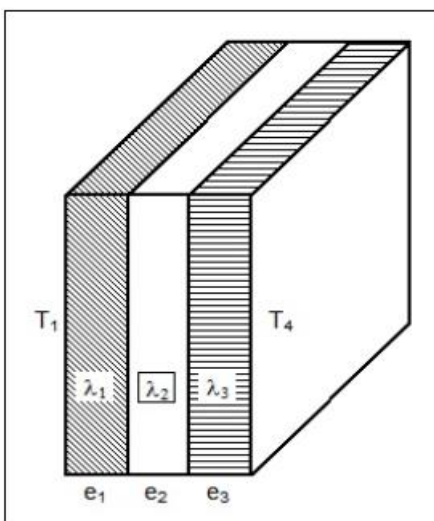
$$\varphi = K S (T_0 - T_5)$$

Exercice 3

La paroi d'un four est constituée de trois matériaux isolants en série :

- Une couche intérieure de 18 cm d'épaisseur est en briques réfractaires ($\lambda = 1,175 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$);
 - Une couche de briques isolantes de 15 cm d'épaisseur ($\lambda = 0,259 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$);
 - Et une épaisseur suffisante de briques ($\lambda = 0,693 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$).
1. Quelle épaisseur de briques doit-on utiliser pour réduire la perte de chaleur à 721 W/m^2 lorsque les surfaces extérieures et intérieures sont respectivement à 38°C et 820°C [5] ?

Solution



$$T_1 = 820^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 38^\circ\text{C}$$

Briques réfractaires :

$$\lambda_1 = 1,175 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$e_1 = 18 \text{ cm}$$

Briques isolantes :

$$\lambda_2 = 0,259 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$e_2 = 15 \text{ cm}$$

Briques :

$$\lambda_3 = 0,693 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

Pertes maxi :

$$\Phi = 721 \text{ W/m}^2$$

Conduction en régime permanent : φ est constant $\varphi = -\lambda S \frac{dT}{dX}$

On intègre pour chaque épaisseur, chaque valeur de λ constante

$$\int_0^{e_j} \varphi dX = - \int_{T_j}^{T_{j+1}} \lambda_j \cdot S dT \quad \varphi e_j = \lambda_j \cdot S (T_j - T_{j+1})$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 S}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 S}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{\lambda_3 S}} \quad \Phi = \frac{\varphi}{S} = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}}$$

Epaisseur de briques

$$e_3 = \lambda_3 \cdot \left(\frac{T_1 - T_4}{\Phi} - \frac{e_1}{\lambda_1} - \frac{e_2}{\lambda_2} \right) \quad 0,693 \cdot \left(\frac{820 - 38}{721} - \frac{18}{1,175} - \frac{15}{0,259} \right) \quad e_3 = 24,4 \text{ cm}$$

b) Mur composite

C'est un cas très courant, les parois ne sont pas isotropes et le transfert n'est pas monodirectionnel en toute rigueur [4].

On peut représenter le schéma électrique équivalent pour un mur de largeur L et de hauteur $I = I_1 + I_2 + I_3$ et d'épaisseur $e_1 + e_2 + e_3$ (Figure 2.7)

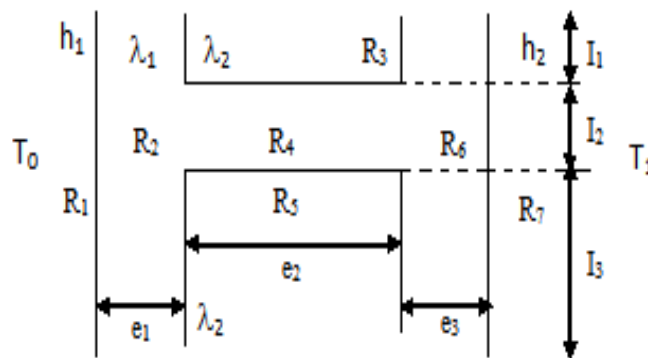
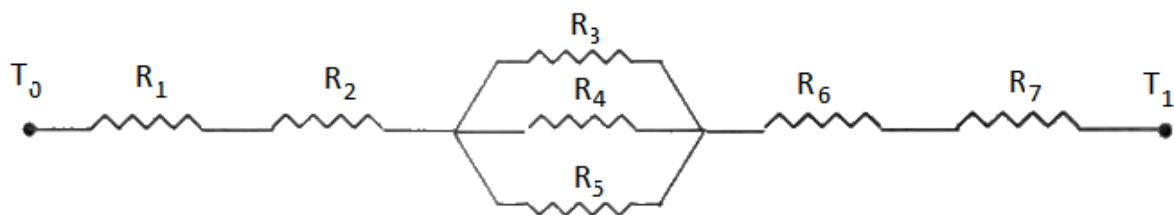


Figure 2.7. Mur composite[1].

En régime permanent $\varphi = \frac{T_0 - T_1}{R}$

Soit R la résistance globale prenant en compte les résistances en parallèles et en séries

$$R = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$



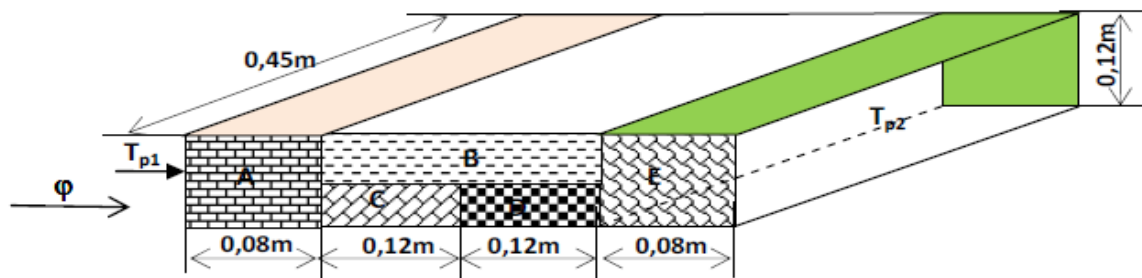
$$R_1 = \frac{1}{h_1 IL}; \quad R_2 = \frac{e_1}{\lambda_1 IL}; \quad R_3 = \frac{e_2}{\lambda_2 I_1 L}; \quad R_4 = \frac{e_2}{\lambda_1 I_2 L};$$

$$R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 I_3 L}; \quad R_6 = \frac{e_3}{\lambda_1 IL}; \quad R_7 = \frac{1}{h_2 IL}$$

Exercice 4

Considérons le mur composé de plusieurs couches de différents matériaux illustré ci-dessous avec les dimensions dans les trois directions. Supposant une conduction unidimensionnelle et connaissant les températures des surfaces de gauche et celle de droite respectivement, T_{p1} et T_{p2} , de même que les conductivités thermiques de ces différentes couches, calculer le flux de chaleur par unité de surface à travers ce mur [5].

Données : $T_{p1}=200^\circ\text{C}$, $T_{p2}=50^\circ\text{C}$, $\lambda_A=70 \text{ W/m.K}$, $\lambda_B=60 \text{ W/m.K}$, $\lambda_C=40 \text{ W/m.K}$, $\lambda_D=30 \text{ W/m.K}$, $\lambda_E=20 \text{ W/m.K}$



Solution

Pour simplifier le calcul, on doit représenter le schéma équivalent de mur considéré en se basant bien sûr sur l'analogie existant entre les grandeurs thermiques et électriques.

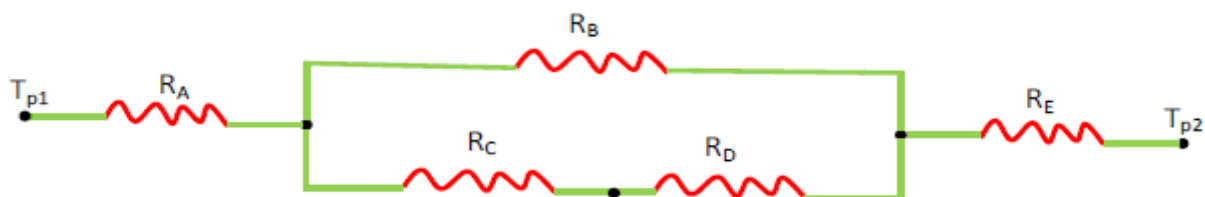


Figure Schéma électrique équivalent

Le flux de chaleur est donné donc par : $\varphi = \frac{(T_{P1} - T_{P2})}{R_A + R_{\acute{e}q} + R_E}$

Tels que;

$$R_A = \frac{e_A}{\lambda_A S_A} = \frac{0,08 \text{ m}}{70 \frac{\text{W}}{\text{m.K}} 0,12\text{m} \cdot 0,45\text{m}} = 0,02116 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$R_B = \frac{e_B}{\lambda_B S_B} = \frac{0,24 \text{ m}}{60 \frac{\text{W}}{\text{m.K}} 0,06\text{m} \cdot 0,45\text{m}} = 0,1481 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$R_C = \frac{e_c}{\lambda_c S_c} = \frac{0,12 \text{ m}}{40 \frac{\text{W}}{\text{m.K}} 0,06\text{m} \cdot 0,45\text{m}} = 0,1111 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

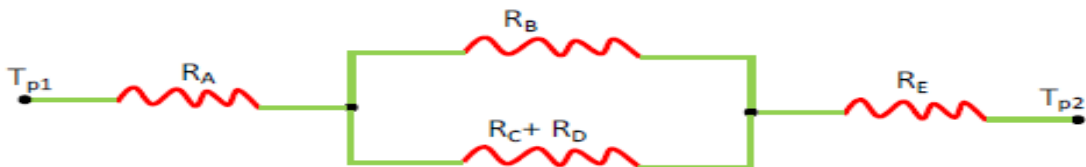
$$R_D = \frac{e_D}{\lambda_D S_D} = \frac{0,12 \text{ m}}{30 \frac{\text{W}}{\text{m.K}} 0,06\text{m} \cdot 0,45\text{m}} = 0,1481 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$R_E = \frac{e_E}{\lambda_E S_E} = \frac{0,08 \text{ m}}{20 \frac{\text{W}}{\text{m.K}} 0,12\text{m} \cdot 0,45\text{m}} = 0,0740 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Pour les résistances en série : $R_{\acute{e}q} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$

Pour les résistances en parallèles : $\frac{1}{R_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}$

Le schéma équivalent :



$$\frac{1}{R_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C + R_D} = \frac{R_B + R_C + R_D}{R_B \cdot (R_C + R_D)} \Rightarrow R_{\acute{e}q} = \frac{R_B \cdot (R_C + R_D)}{R_B + R_C + R_D}$$

$$R_{\acute{e}q} = \frac{0,1481 \cdot (0,1111 + 0,1481)}{0,1481 + 0,1111 + 0,1481} = 0,09425 \text{ K/W}$$

$$\varphi = \frac{(T_{P1} - T_{P2})}{R_A + R_{\acute{e}q} + R_E} = \frac{(200 - 50)\text{K}}{(0,02116 + 0,09425 + 0,0740)\text{K/W}} = 791,94 \text{ W}$$

Exercice 5

Un local est composé de murs composites :

- Bois à l'extérieur
Conductivité thermique : $\lambda_b = 0,15 \text{ W/m.K}$ et épaisseur $e_b = 20 \text{ mm}$
- Calorifuge au milieu

Conductivité thermique : $\lambda_c = 0,038 \text{ W/m.K}$ et épaisseur $e_c = 100 \text{ mm}$

- Plâtre à l'intérieur

Conductivité thermique : $\lambda_p = 0,17 \text{ W/m.K}$ et épaisseur $e_p = 10 \text{ mm}$

En hiver, il faut maintenir une température intérieure $T_i = 19^\circ\text{C}$, le coefficient de convection intérieure étant $h_i = 30 \text{ W/m}^2.\text{K}$ pour une température moyenne extérieure de $T_e = -2^\circ\text{C}$ et un coefficient de convection extérieure $h_e = 60 \text{ W/m}^2.\text{K}$. La surface totale des parois est de 350 m^2 . [5]

- Évaluer les déperditions thermiques du local.

$$\varphi = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i} + \frac{e_p}{\lambda_p} + \frac{e_c}{\lambda_c} + \frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{1}{h_e}} \cdot S \quad \varphi = 2,558 \text{ kW}$$

$$R = \frac{\frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{e_c}{\lambda_c} + \frac{e_p}{\lambda_p} + \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e}}{S} = 8211 \text{ K/MW}$$

c) *Cylindre creux à faces isothermes*

- Cas d'un tube simple

En régime permanent et en supposant que le gradient de température longitudinal est négligeable devant le gradient radial, on peut dans un premier temps nous intéresser au cas d'une épaisseur élémentaire selon la figure 2.8 et effectuer le bilan thermique sur la partie cylindrique comprise entre les rayons r et $r + dr$. [1]

Contrairement au mur plan caractérisé par un transfert monodirectionnel, dans le cas du cylindre il a lieu dans toutes les directions du plan perpendiculaire à l'axe du tube. Par ailleurs, lorsque le flux de chaleur progresse, la surface d'échange varie de sorte que les densités de flux en entrée et en sortie ne sont pas identiques en régime permanent $\frac{\varphi_e}{S_e} \neq \frac{\varphi_s}{S_s}$ bien que $\varphi_e = \varphi_s$ [1]

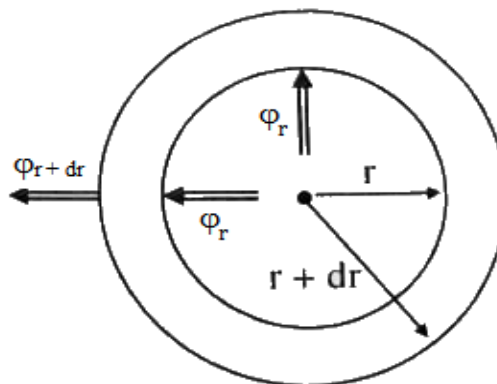


Figure 2.8. Bilan thermique sur l'épaisseur élémentaire «dr» du cylindre creux de longueur L. [1]

En régime permanent $\varphi_r = \varphi_{r+dr}$

$$\text{Soit } -\lambda 2 \pi r L \left(\frac{dT}{dr}\right)_r = -\lambda 2 \pi (r + dr) \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r+dr}$$

Cela revient dans cette géométrie à considérer que le Laplacien de la température est de la forme :

$$\nabla^2 T = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

$$\text{Soit } \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

C'est-à-dire $T(r) = C_1 \ln r + C_2$

Pour un tube ayant respectivement les rayons r_1 et r_2 et les températures de surface T_1 et T_2

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \quad \text{et} \quad C_2 = T_2 - \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln r_2$$

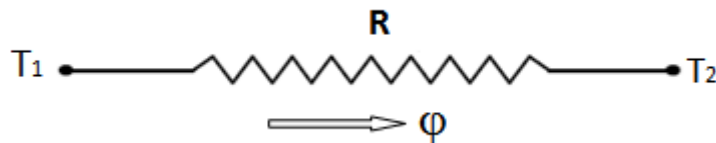
$$\text{D'où } T(r) = \frac{T_2 \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

Par application de la relation $\varphi = -\lambda 2 \pi L r \frac{dT}{dr}$ on obtient :

$$\varphi = \frac{2 \pi L \lambda (T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$\text{En posant } R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \pi L \lambda} \text{ on retrouve } \varphi = \frac{T_1 - T_2}{R}$$

Le schéma électrique équivalent est alors :



Pour obtenir un flux sous la forme d'un produit du coefficient global d'échange d'une surface et d'un écart de température, on est amené à introduire la notion de diamètre logarithmique moyen D_{ml} avec[1]

$$D_{ml} = \frac{D_2 - D_1}{\ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)} \quad \text{soit} \quad \ln \frac{D_2}{D_1} = \frac{D_2 - D_1}{D_{ml}} = \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r_{ml}}$$

L'expression (28) devient :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{D_2 - D_1}{2 \pi L \lambda D_{ml}}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{r_2 - r_1}{2 \pi L \lambda r_{ml}}} = K S \Delta T$$

Soit encore:
$$\frac{1}{KS} = R = \frac{r_2 - r_1}{2 \pi L \lambda r_{ml}}$$

Avec $K = \frac{\lambda}{r_2 - r_1}$ et $S = 2 \pi r_{ml} L$

On aurait pu également choisir l'une des deux surfaces S_1 ou S_2 comme référence. Pour S_1 on obtient :

$$\varphi = \frac{2 \pi L \lambda r_1 (T_1 - T_2)}{r_1 \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

On a alors:
$$\varphi = K_1 \cdot S_1 \cdot \Delta T$$

Avec $S_1 = 2 \pi r_1 L$ et $K_1 = \frac{\lambda}{r_1 \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

Ou encore pour S_2 :
$$\varphi = K_2 \cdot S_2 \cdot \Delta T$$

Avec $S_2 = 2 \pi r_2 L$ et $K_2 = \frac{\lambda}{r_2 \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$

Exercice 6

Une conduite cylindrique en acier (diamètre intérieur 53 mm, diamètre extérieur 60 mm, $\lambda = 40,4 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$) transportant de la vapeur est calorifugée par 32 mm d'un revêtement fondu à haute température, composé de terre à diatomée et d'amiante ($\lambda = 0,101 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$). Ce revêtement est isolé par 65 mm de feutre d'amiante feuilleté ($\lambda = 0,072 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$).

Au cours d'un essai, on a trouvé que la température du milieu environnant était de 30°C , la température moyenne intérieure au tuyau dans lequel circule la vapeur était de 482°C et la température de la surface extérieure du revêtement de 50°C . [5]

- Calculer les pertes de chaleur exprimées par unité de longueur de tuyau.

Solution

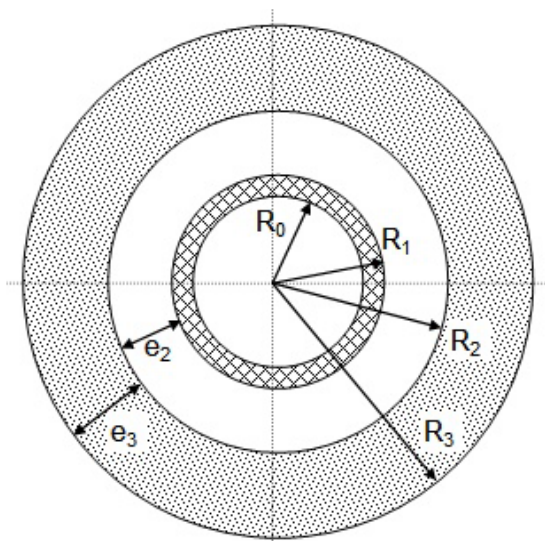
$$\varphi = \Phi S = - \lambda 2 \pi r L \frac{dT}{dr}$$

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{\varphi}{r} dr = - \int_{T_0}^{T_1} 2 \pi L \lambda_1 dT$$

$$\varphi \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = 2 \pi L \lambda_1 (T_0 - T_1)$$

$$\varphi = \frac{T_0 - T_1}{\frac{1}{2 \pi L \lambda_1} \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2 \pi L \lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{1}{2 \pi L \lambda_3} \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}$$

$$\varphi = \frac{T_0 - T_3}{\frac{1}{2 \pi L \lambda_1} \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + \frac{1}{2 \pi L \lambda_2} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2 \pi L \lambda_3} \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}$$



$$\phi = \frac{\varphi}{L}$$

$$\phi = \frac{2 \pi (T_0 - T_3)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) + \frac{1}{\lambda_2} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{\lambda_3} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}$$

$$\phi = \frac{2 \pi (482 - 50)}{\frac{1}{40,4} \ln\left(\frac{60}{53}\right) + \frac{1}{0,101} \ln\left(\frac{62}{30}\right) + \frac{1}{0,072} \ln\left(\frac{127}{62}\right)} \quad \phi = 158,3 \text{ W/m}$$

2.4.3. Transfert de chaleur par rayonnement

Le rayonnement est le transfert d'énergie électromagnétique d'un milieu à haute température vers un autre milieu à basse température sans aucun support matériel (il peut s'effectuer dans le vide). En général, tout corps opaque ou partiellement opaque porté à une température supérieure à zéro Kelvin rayonne de l'énergie dans toutes les directions. Cette énergie est transportée sous forme d'une onde électromagnétique dont la propagation n'exige pas du support matériel. Ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de la lumière et il ne nécessite aucun support matériel, contrairement aux écoulements. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d'émettre et d'absorber les rayonnements thermiques. [3]

Exemples

- La chaleur que reçoit la terre à partir du soleil se fait grâce aux rayonnements.
- Les plats sont chauffés dans un four à micro-ondes grâce à la chaleur transportée par des rayonnements micro-ondes. [2]

2.4.3.1. Loi fondamentale du rayonnement (loi de Stefan-Boltzmann)

Le flux de chaleur rayonné par un milieu de surface (S) et de température (T) s'exprime grâce à la loi de Joseph Stefan (1835-1893) et Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906). [4]

$$\varphi = \sigma \varepsilon_p S (T_p^4 - T_\infty^4)$$

Avec:

φ : flux de chaleur transmise par rayonnement (W)

σ : constante de Stefan ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$)

ε_p : Facteur d'émission de la surface

T_p : Température de la surface (K)

T_∞ : Température du milieu environnant la surface (K)

S : Aire de la surface (m^2)

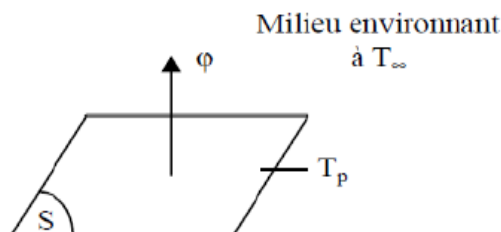


Figure 2.9. Schéma du transfert de chaleur radiatif [5]

Chapitre 3 **Transfert de matière**

3.1. Introduction

Les phénomènes relevant de ce qu'on appelle le transfert de matière se manifestent chaque fois que, dans un mélange fluide, les différents constituants sont en déplacement relatif les uns par rapport aux autres. Ceci se produit, en particulier, lorsque les concentrations ne sont pas uniformes au sein du mélange. Si, par conséquent, un constituant prend naissance ou disparaît localement dans le mélange, il se produira un transfert de ce constituant à partir des régions où la concentration est la plus forte vers les régions où elle est plus faible.

Cette émission ou disparition d'un constituant peut être due, soit à un phénomène physique du type dissolution, soit à une réaction chimique et, dans l'un ou l'autre cas, il est important de connaître la vitesse à laquelle s'effectue le transfert correspondant. En effet, la connaissance de cette vitesse permet d'évaluer le rendement qu'on peut attendre d'un appareil où le transfert de matière est utilisé pour séparer les constituants d'un mélange ou d'une réaction chimique (de cinétique connue) s'effectuant au voisinage d'une Interface. Dans ce dernier cas, vitesse de réaction et vitesse de transfert sont concurrentes et suivant les circonstances, l'une ou l'autre pourra être limitative.

L'étude du transfert de matière se présente donc comme celle d'une cinétique physique dans des milieux où les potentiels chimiques sont variables d'un point à un autre par opposition à l'équilibre thermodynamique obtenu lorsque ces potentiels chimiques sont constants.

D'une manière générale, le transfert de matière désigne le passage d'un constituant d'un mélange dans un autre mélange séparé du premier par une interface. C'est un processus complexe dont nous n'étudierons que l'aspect essentiel, à savoir : la migration d'un constituant au sein d'un mélange. Celle-ci s'effectue suivant un processus diffusif, c'est-à-dire qu'elle résulte du mouvement désordonné de molécules ou de Particules fluides. [4]

On sera ainsi amené à caractériser le transfert de matière par des coefficients de transfert qui dépendent :

- 1) de la nature des substances chimiques en présence.
- 2) des conditions hydrodynamiques dans lesquelles s'effectue le transfert.

La connaissance de ces coefficients permet de résoudre tous les problèmes où intervient le transfert de matière

3.2. Généralités sur le transfert de matière

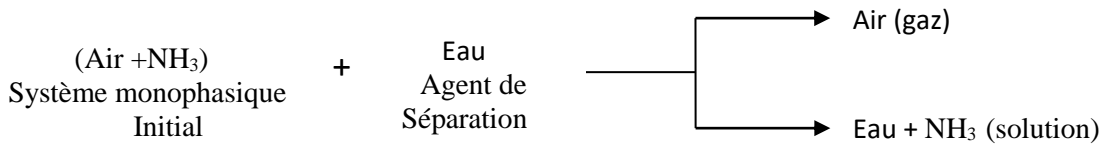
Le transfert de matière a pour but la compréhension des phénomènes diffusifs et convectifs qui servent de base à l'étude des opérations de séparation (Opérations unitaires).

Ces dernières concernent, à quelques exceptions près, la séparation totale ou partielle d'un mélange homogène en ses différents constituants et nécessitent un "agent de séparation".[5]

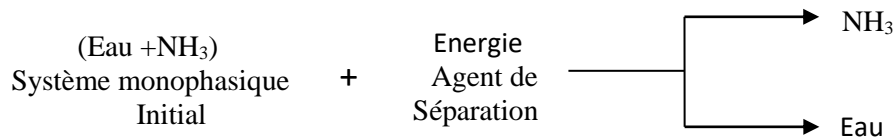
Exemple

Elimination d'ammoniac (NH_3) d'un courant gazeux (air- NH_3) qui peut se faire en 02 étapes :

1^{ère} étape : Elimination de l'ammoniac du mélange gazeux

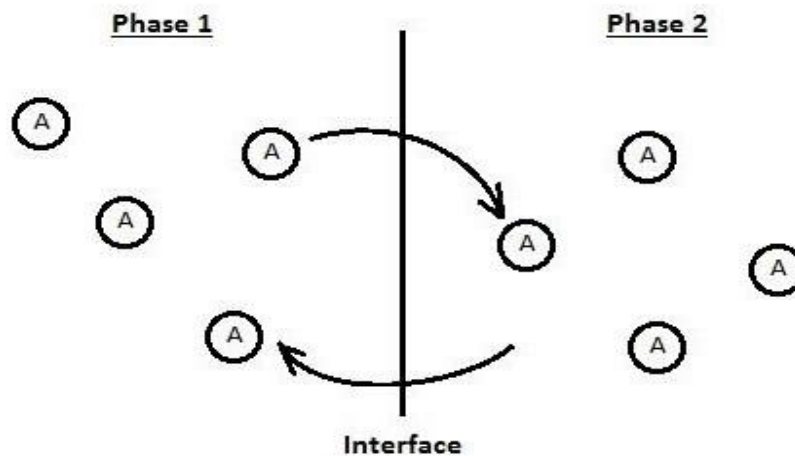


2^{ème} étape : récupération de l'ammoniac du mélange liquide (Eau-NH₃)



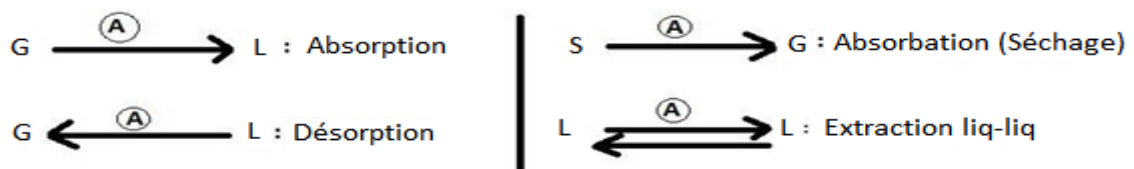
3.2.1. Le transfert de matière

Le transfert de matière est une redistribution d'une substance (A) entre deux phases avec ou sans réaction chimique [5]



Ainsi, il existe au minimum trois constituants : phase ①, phase ② et substance (A). Exemples : (Eau, NH₃, Air) et (Eau, CO₂, Air)

Ces phases peuvent être solide (S), liquide (L) ou gazeuse (G)



Dans le cas de deux constituants, on a distillation et rectification. Exemple : Mélange (Alcool – Eau).

Au sein de la même phase, la matière peut se déplacer par deux modes : convection et diffusion moléculaire.

3.2.2. La diffusion

S'il existe une différence de concentration dans l'espace, par exemple entre deux compartiments séparés par une membrane perméable (laissant passer le solvant et le soluté) ; il va y avoir, au cours du temps, un déplacement de la matière, du compartiment concentré vers le moins concentré, Figure 3.1. Ce transfert s'effectue, jusqu'à ce que l'équilibre en concentration soit atteint. Ce phénomène spontané est appelé diffusion. [5]

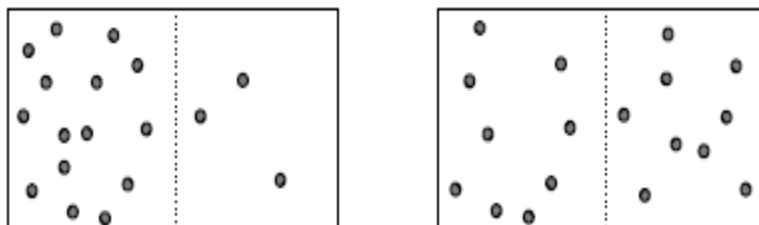


Figure 3.1. Diffusion du milieu le plus concentré vers le milieu le moins concentré.

Si on considère un plan normal à la direction du gradient de concentration d'un réactif A quelconque, ou n'importe quel autre plan, il existe un flux de molécules A à travers ce plan.

Le mouvement de l'élément chimique, de la région à haute concentration vers la région à faible concentration, peut être observé en mettant un morceau de KMnO_4 (permanganate de potassium) dans l'eau. Le KMnO_4 commence à se dissoudre dans l'eau et près du cristal on voit une couleur bleue foncée qui devient claire en s'éloignant du cristal. [5]

3.2.3. Diffusion moléculaire

Lorsqu'on a affaire à un fluide immobile, la seule agitation à considérer est l'agitation moléculaire. Celle-ci tend à égaliser les concentrations dans un milieu non uniforme, donnant lieu à un transport de molécules statistiquement plus grand des régions de forte concentration vers les régions de faible concentration que dans le sens inverse. On dit, dans ce cas, que le transfert s'effectue par diffusion moléculaire et on définit une vitesse de diffusion, pour chaque constituant, par rapport à une vitesse moyenne convenablement choisie : celle-ci peut être une vitesse moléculaire moyenne (somme des vitesses macroscopiques des différents constituants pondérées par leurs fractions molaires respectives), ou une vitesse massique moyenne encore appelée vitesse barycentrique (somme des vitesses pondérées par les fractions massiques) ou encore la vitesse volumique moyenne, ou même la vitesse d'un constituant déterminé. [4]

La diffusion moléculaire est un phénomène irréversible, tendant toujours à rétablir l'uniformité des concentrations. Dans le cas d'un mélange de deux constituants, à température et pression constantes, l'étude thermodynamique des phénomènes irréversibles appliquée à la diffusion conduit à écrire que la vitesse de diffusion d'un constituant est proportionnelle au gradient de son potentiel chimique, cette loi étant d'autant plus exacte qu'on est plus près de l'équilibre. [4]

3.2.4. Principes de transfert de matière

- C'est un procédé déséquilibré
- La quantité de matière transférée est proportionnelle à un potentiel ou à une force motrice.
- Le TM s'effectue par 02 mécanismes (diffusion et convection)
- L'étape la plus lente limite la vitesse de transfert (en général c'est la diffusion).
- Les procédés de TM sont réversibles. [5]

3.2.5. Notions de concentration

Notation ou nomenclature des systèmes diffusionnels

Phase gaz : $y_A, \bar{y}_A, C_A, \bar{C}_A$

Phase liquide : $x_A, \bar{x}_A, X_A, \bar{X}_A, C_A, \bar{C}_A$

Remarque : sans (-) : molaire, Avec (-) : massique.

En général, on a affaire à un mélange de "n" constituants ou espèces. Soit "i" une espèce ou un constituant de ce mélange. [5]

$$(\sum x_i = 1 \text{ ou } \sum y_i = 1, \sum \bar{x}_i = 1 \text{ ou } \sum \bar{y}_i = 1)$$

a) En phase liquide

➤ fraction molaire : x_A

La fraction molaire d'un constituant A est égale au rapport du nombre de moles de ce constituant n_A sur le nombre total de moles du mélange $n_{\text{tot}} = \sum n_i$. Elle est donc une grandeur sans dimensions. La somme des fractions molaires des constituants du mélange est égale à l'unité. [5]

$$x_A = \frac{n_A}{\sum n_i}$$

Cas d'un mélange binaire : $x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B}$

➤ Fraction massique : \bar{x}_A

La fraction massique ou titre massique désigne la composition d'un mélange en divisant la masse de A par la masse totale. Par multiplication à 100, on obtient le pourcentage massique. [5]

$$\bar{x}_A = \frac{m_A}{\sum m_i}$$

Cas d'un mélange binaire : $\bar{x}_A = \frac{m_A}{m_A + m_B}$

➤ Expression de $x_A = f(\bar{x}_A)$

$$\text{Ou : } n_A \text{ (mole)} = \frac{m_A}{M_A}$$

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{\frac{m_A}{M_A}}{\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}} = \frac{\frac{m_A}{M_A} \times \frac{1}{m_A + m_B}}{\left(\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}\right) \times \frac{1}{m_A + m_B}} = \frac{\bar{x}_A / M_A}{\frac{m_A}{M_A(m_A + m_B)} + \frac{m_B}{M_B(m_A + m_B)}}$$

$$x_A = \frac{\bar{x}_A / M_A}{\frac{\bar{x}_A}{M_A} + \frac{\bar{x}_B}{M_B}}$$

➤ Expression de $\bar{x}_A = f(x_A)$

$$\bar{x}_A = \frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{n_A M_A}{n_A M_A + n_B M_B} = \frac{n_A \cdot M_A / n_A + n_B}{(n_A M_A + n_B M_B) \frac{1}{n_A + n_B}}$$

$$\bar{x}_A = \frac{x_A / M_A}{\frac{x_A}{M_A} + \frac{x_B}{M_B}}$$

➤ Fraction molaire relative: X_A

$$X_A = \frac{n_A}{n_B}$$

➤ Fraction massique relative: \bar{X}_A

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B}$$

➤ Expression de $X_A = f(\bar{x}_A)$

$$X_A = \frac{n_A}{n_B} = \frac{m_A}{m_B} \cdot \frac{M_B}{M_A} = \bar{X}_A \cdot \frac{M_B}{M_A}$$

$$X_A = \bar{X}_A \cdot \frac{M_B}{M_A} \quad (*)$$

➤ Expression de $\bar{X}_A = f(X_A)$

$$(*) \Rightarrow \bar{X}_A = X_A \cdot \frac{M_A}{M_B}$$

➤ Expression de $X_A = f(\bar{x}_A)$

$$X_A = \frac{n_A}{n_B} = \frac{m_A}{m_B} \frac{M_B}{M_A} = \frac{m_A/n_A + m_B}{m_B/n_A + m_B} \times \frac{M_B}{M_A}$$

$$X_A = \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_B} \times \frac{M_B}{M_A}$$

➤ Expression de $X_A = f(x_A)$

$$X_A = \frac{n_A}{n_B} = \frac{n_A/n_A + n_B}{n_B/n_A + n_B}$$

$$X_A = \frac{x_A}{x_B}$$

➤ Expression de $\bar{X}_A = f(\bar{x}_A)$

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{m_A/n_A + m_B}{m_B/n_A + m_B}$$

$$\bar{X}_A = \frac{\bar{x}_A}{\bar{x}_B}$$

➤ Expression de $\bar{X}_A = f(x_A)$

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{n_A M_A}{n_B M_B} = \frac{n_A/(n_A + n_B)}{n_B/(n_A + n_B)} \cdot \frac{M_A}{M_B}$$

$$\bar{X}_A = \frac{x_A}{x_B} \cdot \frac{M_A}{M_B} = \frac{x_A}{1 - x_A} \cdot \frac{M_A}{M_B}$$

➤ Expression de $x_A = f(X_A)$

$$x_A = \frac{n_A}{(n_A + n_B)} = \frac{n_A/n_B}{(n_A + n_B)/n_B}$$

$$x_A = \frac{X_A}{X_A + 1}$$

➤ Expression de $x_A = f(\bar{X}_A)$

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{\frac{m_A}{M_A}}{\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B}} = \frac{\frac{m_A}{M_A} \times \frac{1}{m_B}}{\frac{m_A}{M_B} \cdot \frac{1}{M_A} + \frac{1}{M_B}}$$

$$x_A = \frac{\bar{X}_A / M_A}{\bar{X}_A + \frac{1}{M_B}}$$

En terme de concentration C_A^G, \bar{C}_A^G (gaz) et $\{C_A^L, \bar{C}_A^L$ (liquide)

Soit : C_A : Concentration molaire en volume (mol/m³)

\bar{C}_A : Concentration massique en volume (Kg/m³)

La concentration molaire

La concentration molaire d'un constituant ou molarité, est sa quantité de matière par unité de volume.

La concentration massique, ou concentration pondérale d'un composé A est le rapport entre la masse m_A du soluté et le volume V_{tot} du mélange. [5]

La somme des concentrations massiques des composants est égale à la masse volumique ρ (densité massique) du mélange. [5]

$$C_A = \frac{n_A}{V} \quad \text{Avec} \quad \sum C_i = C$$

$$\bar{C}_A = \frac{m_A}{V} \quad \text{Avec} \quad \sum \bar{C}_i = \rho \quad (\text{masse volumique})$$

- $\bar{C}_A = C_A \cdot M_A \quad \left(\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} = \frac{\text{mol}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{Kg}}{\text{mol}} \right)$
- $C_A = x_A \cdot C \quad \text{et} \quad \bar{C}_A = \rho \bar{x}_A$
- $\rho = C \cdot M \quad \text{avec} \quad M = \sum x_i M_i$

➤ Expression de $x_A = f(C_A)$

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{n_A/V}{n_A/V + n_B/V} = \frac{C_A}{C_A + C_B}$$

$$x_A = \frac{C_A}{C_A + C_B} = \frac{C_A}{C} = x_A$$

➤ Expression de $x_A = f(\bar{C}_A)$

$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{m_A/M_A}{m_A/M_A + m_B/M_B} = \frac{\frac{m_A}{V} \cdot 1/M_A}{\frac{m_A}{V} \cdot \frac{1}{M_A} + \frac{m_B}{V} \cdot \frac{1}{M_B}} = \frac{\bar{C}_A/M_A}{\bar{C}_A/M_A + \bar{C}_B/M_B} = x_A$$

$$= \frac{\frac{m_A}{M_A} \cdot \frac{1}{V}}{\frac{m_A}{M_A} \cdot \frac{1}{V} + \frac{m_B}{M_B} \cdot \frac{1}{V}} = \frac{\frac{m_A}{M_A} \cdot \frac{1}{V}}{\left(\frac{m_A}{M_A} + \frac{m_B}{M_B} \right) \cdot \frac{1}{V}}$$

Par ailleurs:
$$x_A = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{\frac{m_A}{M_A} \frac{1}{V}}{\frac{n_A + n_B}{V}} = \frac{\bar{C}_A \frac{1}{M_A}}{C_A + C_B} = \frac{\bar{C}_A / M_A}{C} \quad \text{donc} \quad x_A = \frac{\bar{C}_A}{C \cdot M_A}$$

➤ Expression de $\bar{C}_A = f(x_A)$

$$\begin{aligned} \bar{C}_A &= \frac{m_A}{V} = \frac{n_A \cdot M_A}{V} = \frac{\frac{n_A}{n_A + n_B}}{\frac{n_A + n_B}{V}} \cdot M_A \\ &= \frac{n_A}{n_A + n_B} \cdot \left(\frac{n_A}{V} + \frac{n_B}{V} \right) \cdot M_A \\ &= x_A \cdot (C_A + C_B) \cdot M_A \quad \text{et} \quad C_A + C_B = C \\ \bar{C}_A &= x_A \cdot C \cdot M_A \end{aligned}$$

➤ Expression de $\bar{x}_A = f(\bar{C}_A)$

$$\bar{x}_A = \frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{m_A/V}{m_A/V + m_B/V} = \frac{\bar{C}_A}{\bar{C}_A + \bar{C}_B} = \frac{\bar{C}_A}{\rho} \quad \text{et} \quad \bar{C}_A + \bar{C}_B = \rho$$

$$\bar{x}_A = \frac{\bar{C}_A}{\rho}$$

➤ Expression de $\bar{X}_A = f(\bar{C}_A)$

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{m_A/V}{m_B/V} = \frac{\bar{C}_A}{\bar{C}_B} \quad \text{et} \quad \bar{C}_A + \bar{C}_B = \rho \Rightarrow \bar{C}_B = \rho - \bar{C}_A$$

$$\bar{X}_A = \frac{\bar{C}_A}{\rho - \bar{C}_A}$$

➤ Expression de $\bar{X}_A = f(C_A)$

$$(C_A = \frac{n_A}{V})$$

$$\bar{X}_A = \frac{m_A}{m_B} = \frac{n_A \cdot M_B}{n_B \cdot M_B} = \frac{\frac{n_A}{V} \cdot M_A}{\frac{n_B}{V} \cdot M_B} = \frac{C_A \cdot M_A}{C_B \cdot M_B} = \frac{C_A \cdot M_A}{(C - C_A) \cdot M_B}$$

$$\bar{X}_A = \frac{C_A \cdot M_A}{(C - C_A) \cdot M_B}$$

➤ Expression de $C_A = f(\bar{x}_A)$

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{\frac{m_A}{M_A}}{V} \times \frac{1}{\frac{m_A+m_B}{M_A+m_B}} = \frac{1}{M_A} \cdot \frac{m_A}{m_A+m_B} \cdot \frac{m_A+m_B}{V} \quad \text{donc} \quad C_A = \frac{\rho \bar{x}_A}{M_A}$$

Cas des gaz parfaits

Loi des gaz parfaits : ($Z=1$), Gaz réel : $Z \neq 1$

$$PV = n \cdot R \cdot T$$

Unités: P (Pa) ou bien: (atm), V (m^3) ou (L), n (mol)

$$R = 8,314 \text{ Pa} \cdot m^3 / \text{mol} \cdot K. \text{ (J/mol} \cdot K), \quad R = 1,987 \text{ cal/K mol}$$

$$R = 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm/mol} \cdot K, \quad R = 8,2 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot \text{atm/K mol}$$

NB : Pression atmosphérique

$$1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \text{ Bar} = 760 \text{ mm Hg}$$

$$PV = n \cdot R \cdot T \Rightarrow PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow PM = \frac{m}{V} RT \Rightarrow PM = \rho RT$$

$$\rho = \frac{P \cdot M}{RT}$$

$$\text{Par ailleurs : } \frac{\rho}{M} = \frac{P}{RT} \Rightarrow C = \frac{P}{RT} ; \quad C : (\text{mol}/m^3)$$

Cas 1 :

La pression partielle

Soit un volume V de Masse volumique ρ Composé de A, B et C.

P_A : c'est la pression partielle de A si A occupe tout le volume V .

$$P_A V = n_A \cdot R \cdot T$$

$$\text{Globalement on aura: } P_A V = n_A \cdot R \cdot T \dots\dots\dots(1)$$

$$P_B V = n_B \cdot R \cdot T \dots\dots\dots (2)$$

$$P_C V = n_C \cdot R \cdot T \dots\dots\dots (3)$$

$$(P_A + P_B + P_C) \cdot V = (n_A + n_B + n_C) \cdot RT \dots\dots\dots (4)$$

$$(4) \Rightarrow PV = n \cdot R \cdot T$$

$$\frac{(1)}{(4)} \Rightarrow \frac{P_A}{P} = \frac{n_A}{n}$$

$$P_A = y_A \cdot P \quad \text{Loi de Dalton}$$

La pression partielle = pression totale \times la fraction molaire

Cas 2 :

Soit un volume V composé De A, B et C

$$P V_A = n_A \cdot R \cdot T \dots\dots\dots (5)$$

$$P V_B = n_B \cdot R \cdot T \dots\dots\dots (6)$$

$$P V_C = n_C \cdot R \cdot T \dots\dots\dots (7)$$

$$P(V_A + V_B + V_C) = (n_A + n_B + n_C) \cdot R \cdot T$$

$$\Rightarrow PV = n \cdot R \cdot T \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{(5)}{(8)} \Rightarrow \frac{P V_A}{P V} = \frac{n_A}{n} \Rightarrow V_A = \frac{n_A}{n} V \Rightarrow V_A = y_A \cdot V$$

V : Volume total

V_A : Volume partiel de A

Masse molaire moyenne : $\mu = \sum y_i M_i$

$$\text{On a : } C = \frac{P}{R T} \Rightarrow C_A = \frac{P_A}{R T} \text{ et } P_A = y_A \cdot P \quad (\text{Dalton})$$

$$C_A = \frac{P y_A}{R T}$$

$$\text{On a : } P_A \cdot V = n_A R T \Rightarrow P_A \cdot V = \frac{m_A}{M_A} R T$$

$$\Rightarrow \frac{m_A}{V} = \frac{P_A M_A}{R T} \quad (P_A = y_A \cdot P)$$

$$\Rightarrow \bar{C}_A = \frac{P y_A M_A}{R T}$$

Soit un gaz A en équilibre entre une phase liquide et une phase gazeuse. Dans la phase gazeuse :

$$P_A = y_A \cdot P$$

Dans la phase liquide :

$$P_A^* = H x_A \text{ (Loi d'Henry)}$$

Avec : P_A^* : Pression partielle de A à l'équilibre (*)

H : Constante d'Henry.

x_A : Fraction molaire de A.

Ou bien: $P_A = H x_A^*$

Avec : P_A : Pression partielle de A

H : Constante d'Henry. [5]

x_A^* : Fraction molaire de A à l'équilibre.

Ou bien encore: $P_A^* = H' C_A$

$$P_A = H' C_A^*$$

3.2.6. Notions de densité de flux de matière

Le transport de matière est quantifié par un flux de matière (ou plus exactement une densité de flux de matière), J, qui représente la masse (ou le nombre de moles) qui passe à travers une unité de surface (perpendiculaire à la direction du transport) par unité de temps. Son unité est ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ou $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) [11], figure 3.2.

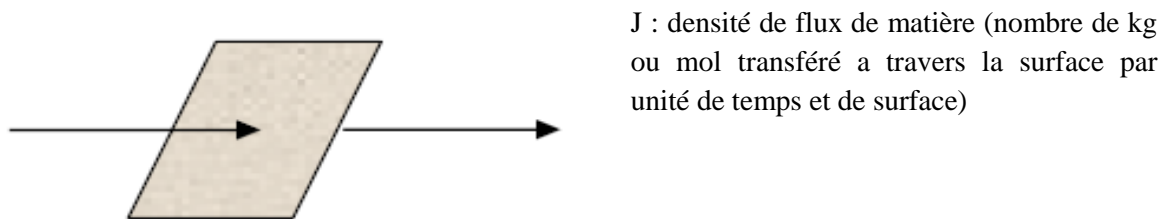


Figure 3.2. Schéma descriptif du flux de diffusion à travers un plan. [11]

3.2.7. Définition des vitesses moyennes molaire et massique

a) La vitesse massique moyenne

Dans un mélange en diffusion les éléments sont en mouvement à des vitesses différentes. En supposant que v_i est la vitesse de l'élément i par rapport à un repère fixe. On définit la vitesse massique moyenne v pour un mélange de n constituants comme suit [8] :

$$V = \sum (\rho_i v_i) / \sum \rho_i$$

$$V = \frac{1}{\rho} \sum (\rho_i v_i)$$

ρv est le débit de masse qui passe à travers une unité de surface placée perpendiculairement à la vitesse v .

b) La vitesse molaire moyenne

De la même façon, on pourrait définir la vitesse molaire moyenne comme suit [8] :

$$v^* = \sum (c_i v_i) / \sum c_i$$

$c v$ est le débit des moles qui passent à travers une unité de surface perpendiculairement à la vitesse v^* .

Pour un système multicomposant, les relations du tableau ci-dessous sont valables.

Tableau 3.1. Notations pour les vitesses dans un système multicomposant. [8]

v_A	Vitesse de l'espèce A par rapport à un repère fixe
$\mathbf{v} = \sum_i (\bar{x}_i \mathbf{v}_i)$	Vitesse massique moyenne
$\mathbf{v}^* = \sum_i (\bar{x}_i \mathbf{v}_i)$	Vitesse molaire moyenne
$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}$	Vitesse de diffusion de l'espèce A par rapport à la vitesse massique moyenne
$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}^*$	Vitesse de diffusion de l'espèce A par rapport à la vitesse molaire moyenne

3.2.8. Les flux

Le flux massique (molaire) de l'élément i représente la masse (nombre de moles) de l'élément i qui passe pendant une unité de temps à travers une surface perpendiculaire à la direction de diffusion).

Tableau 3.2. Expressions des différents flux massiques et molaires. [8]

Flux massique	Formule	Unité
par rapport à un repère fixe	$n_i = \rho_i v_i$	
par rapport à la vitesse massique moyenne \mathbf{v}	$j_i = \rho_i (v_i - v)$	[Kg / (m ² s)]
par rapport à la vitesse molaire moyenne \mathbf{v}^*	$j_i^* = \rho_i (v_i - v^*)$	
Flux molaire		
par rapport à un repère fixe	$N_i = c_i v_i$	
par rapport à la vitesse massique moyenne \mathbf{v}	$J_i = c_i (v_i - v)$	[mole / (m ² s)]
par rapport à la vitesse molaire moyenne \mathbf{v}^*	$J_i^* = c_i (v_i - v^*)$	

Le tableau 3.2. regroupe les différentes expressions des flux. Le mouvement peut être représenté par rapport à un repère fixe ou par rapport à la vitesse massique moyenne v ou bien par rapport à la vitesse molaire moyenne v^* [8].

Remarque

Lorsqu'il s'agit de transport de matière, on définit trois types de débits :

Le débit volumétrique est le volume par unité de temps; [L s⁻¹].

Le débit molaire est le nombre de moles par unité de temps; [mol s⁻¹].

Le débit massique est le nombre de grammes par unité de temps; [kg s⁻¹].

Exercice 1

La composition molaire du GNL commercial est :

- méthane, CH₄ \longrightarrow 94,9 %
- éthane, C₂H₆ \longrightarrow 4,0 %
- propane, C₃H₈ \longrightarrow 0,6 %
- dioxyde de carbone, CO₂ \longrightarrow 0,5 %
- Déterminer :

- a) La fraction massique du méthane.
- b) La masse molaire moyenne du mélange GNL.
- c) La masse volumique du mélange gazeux lorsqu'il est à 193 K et sous une pression de 1,013.10⁵ Pa.
- d) La pression partielle du méthane lorsque la pression totale dans le système est 1,013.10⁵ Pa.
- e) La fraction massique du propane en ppm (parts par million). [5]

Solution

$$a) \omega_A = \frac{y_A M_A}{\sum y_i M_i} = \frac{0,949 \times 16}{0,949 \times 16 + 0,04 \times 30 + 0,006 \times 44 + 0,005 \times 44} = 0,9$$

$$b) M = \sum y_i M_i = 0,949 \times 16 + 0,04 \times 30 + 0,006 \times 44 + 0,005 \times 44 = 16,86 \text{ g/mol}$$

$$c) \rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum m_i}{V} = \frac{\sum N_i M_i}{V} = \frac{\sum y_i N M_i}{V} = \frac{N}{V} \sum y_i M_i = \frac{N}{V} M = \frac{P}{RT} M \text{ (Gaz parfait)}$$

$$= \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 16,86}{8,314 \times 193} = 1067 \text{ g/m}^3 = 1,067 \text{ g/l}$$

d) Nous avons un mélange de gaz supposés parfaits, nous pouvons donc écrire:

$$\left. \begin{array}{l} P_A V = N_A R T \\ P V = N R T \end{array} \right\} \implies \frac{P_A}{P} = \frac{N_A}{N} \implies P_A = y_A P \quad \text{Loi de DALTON}$$

$$P_A = 0,949 \times 1,013 \cdot 10^5 = 0,96 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$e) \omega_P = \frac{y_P M_P}{\sum y_i M_i} = \frac{y_P M_P}{M} = \frac{0,006 \times 44}{16,86} = 0,0156 = 15600 \text{ ppm}$$

Exercice 2

Considérons le transfert de matière, en régime unidirectionnel, pour un mélange gazeux formé d'oxygène (A) et de gaz carbonique (B) à la température de 294 K et à la pression totale de 1,519.10⁵ Pa. [5]

Sachant que :

$$x_A = 0,4 \quad ; \quad v_A = 0,8 \text{ m/s} \quad ; \quad v_B = -0,02 \text{ m/s}$$

Calculer :

- la masse molaire moyenne du mélange
- les concentrations massiques de A et du mélange
- la concentration molaire de B
- les vitesses de diffusion massique de A et molaire de
- la densité de flux molaire de transport de A
- la densité de flux massique de diffusion de B

Solution

$$a) \quad M = \sum M_i y_i = 32 \times 0,4 + 44 \times 0,6 = 39,2 \text{ g/mol}$$

$$b) \quad \bar{C}_A = \frac{m_A}{V} = \frac{M_A N_A}{V} = \frac{M_A y_A N}{V} = \frac{P}{RT} M_A y_A = \frac{1,519 \cdot 10^5}{8,314 \times 294} 32 \times 0,4 = 795 \text{ g/m}^3$$

$$\bar{C} = \rho = \bar{C}_A + \bar{C}_B = \frac{P}{RT} \sum M_i y_i = \frac{1,519 \cdot 10^5}{8,314 \times 294} (32 \times 0,4 + 44 \times 0,6) = 2436 \text{ g/m}^3$$

$$c) \quad C_B = \frac{N_B}{V} = \frac{y_B N}{V} = \frac{y_B P}{RT} = \frac{0,6 \times 1,519 \cdot 10^5}{8,314 \times 294} = 37,3 \text{ mol/m}^3$$

$$\text{Autre méthode } C_B = \frac{\bar{C}_B}{M_B} = \frac{\bar{C} - \bar{C}_A}{M_B} = \frac{2436 - 795}{44} = 37,3 \text{ mol/m}^3$$

$$d) \quad v_A - v = v_A - \frac{\sum M_i y_i v_i}{\sum M_i y_i} = v_A - \frac{\sum M_i y_i v_i}{M}$$

$$= 0,8 - \frac{32 \times 0,4 \times 0,8 + 44 \times 0,6 \times (-0,02)}{39,2} = 0,067 \text{ m/s}$$

$$v_B - v^* = v_B - \sum y_i v_i = (-0,02) - [0,4 \times 0,8 + 0,6 \times (-0,02)] = -0,04 \text{ m/s}$$

$$e) \quad J_i^* = c_A v_A = \frac{y_A P}{RT} v_A = \frac{0,4 \times 1,519 \cdot 10^5}{8,314 \times 294} \times 0,8 = 1,988 \text{ mol/m}^2 \text{s}$$

$$f) \quad J_B = \bar{C}_B (v_B - v) = M_B C_B \left(v_B - \frac{\sum M_i y_i v_i}{M} \right)$$

$$= 44 \times 37,3 \times \left[(-0,02) - \frac{32 \times 0,4 \times 0,8 + 44 \times 0,6 \times (-0,02)}{39,2} \right] = -53,5 \text{ g/m}^2 \text{s}$$

3.3. Transfert diffusif

3.3.1. Equation de Fick (Transfert diffusif (conductif))

Plaçons nous dans un premier temps dans un système unidirectionnel et considérons le comportement de l'espèce A d'un mélange. Soit $C_A(x,t)$ la concentration, exprimée en nombre de particules, masse ou moles par unité de volume. Considérons un cristal soluble placé au fond d'un récipient contenant un grand volume d'eau. L'évolution de la concentration $C_A(x,t)$ dans une direction de l'espace au cours du temps peut être représentée par la figure 3.3 ci-dessous. Au voisinage de la surface du cristal ($x=0$), la concentration de A dans l'eau est celle à saturation C_{A0} . Le liquide immobile s'enrichit progressivement en constituant A sur une profondeur qui augmente avec le temps. Au-delà d'un temps $t=t_\infty$ le gradient de concentration sensiblement linéaire ne semble plus évoluer; on a alors atteint le régime permanent et la concentration de A est monovariante $C = f(x)$. Pour $t_0 < t < t_\infty$, on est en régime transitoire pour lequel $C = f(x,t)$. [1]

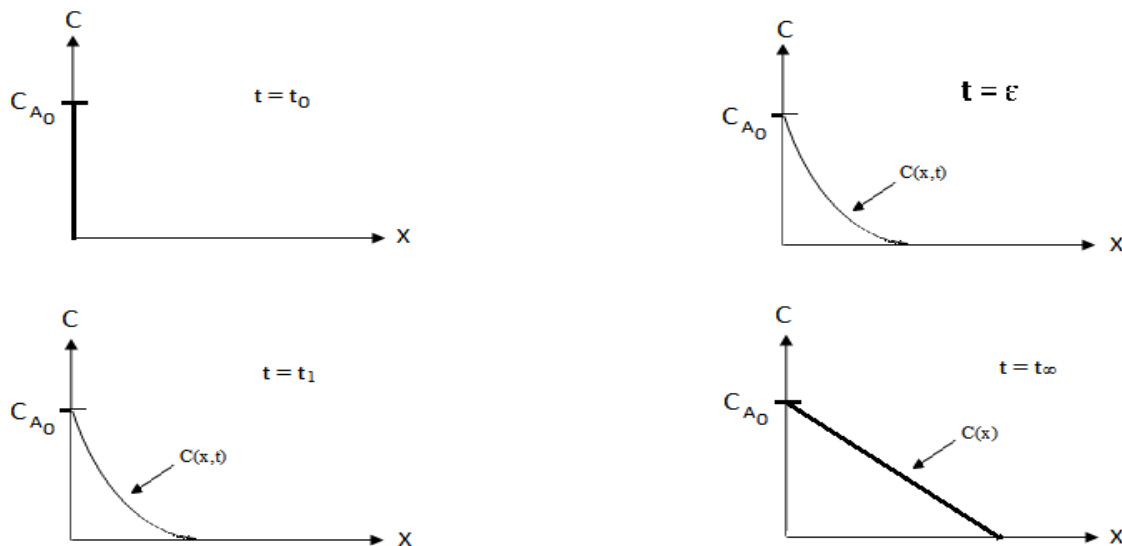


Figure 3.3 : Variation de la concentration en régime transitoire. [1]

Lorsque l'on a atteint le régime permanent on admet qu'il s'établit un flux de A constant et que celui-ci est proportionnel au gradient de concentration ainsi obtenu. L'expression traduisant ce processus est la loi de Fick [1,7] :

$$J_A = -D \frac{\partial C_A}{\partial X} = -C_T D \frac{\partial X_A}{\partial X}$$

avec

$C_T = \sum C_i$: concentration molaire totale du mélange [mole. m⁻³]

$C_A = x_A.C_T$, : concentration molaire de A dans le mélange [mole. m⁻³]

x_A : fraction molaire de A dans le mélange [-]

D: coefficient de diffusion de A dans le mélange [$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$]

J_A = densité de flux molaire de A dans le mélange [$\text{mole} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$]

- Le signe moins rappelle que la matière diffuse des zones de haute intensité (ici de haute concentration) vers les zones de basse intensité, c'est-à-dire dans le sens opposé au gradient.

Dans le cas d'un mélange de A et de B immobile, le transfert de matière par diffusion moléculaire d'une espèce A dans un fluide B est décrit par la première loi de FICK [1] :

$$\vec{J}_A = - D_{AB} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} C_A$$

D_{AB} : est le coefficient de diffusion moléculaire (ou diffusivité moléculaire) de l'espèce A au sein du fluide B, qui s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Généralement, la diffusivité des gaz est plus importante que la diffusivité des liquides. Cette équation est dite 1ère loi de Fick de diffusion. On note qu'elle est identique aussi bien à l'équation de Fourier de conduction thermique qu'à l'équation de Newton de viscosité et que dans des conditions analogues (conditions aux limites identiques), les solutions sont parfaitement superposables. [1]

Un processus diffusif est donc provoqué par une différence de concentration d'un constituant entre deux points du volume considéré. Ce processus tend à égaliser cette concentration en tout point de ce volume. Le coefficient de proportionnalité entre la densité de flux et le gradient de concentration est le coefficient de diffusion du constituant A dans le milieu considéré (l'eau). Celui-ci est tabulé et dépend fortement de la température mais très peu de la pression. Le débit de A appelé également le flux de A : φ_A [$\text{mole} \cdot \text{s}^{-1}$] traverse une surface S perpendiculaire à l'axe x avec $J_A = \frac{\varphi_A}{S}$ [1]

Lorsque la diffusion a lieu dans les trois directions de l'espace, la loi de Fick se généralise avec [7]

$$\vec{J} = - D \overrightarrow{\text{grad}} C_A = - C_T \cdot D \overrightarrow{\text{grad}} x_A$$

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ (∇ en notation américaine : nabra) est dimensionné inversement à une longueur et transforme un scalaire en vecteur. Pour une base orthonormée ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$)

$$\overrightarrow{\text{grad}} C_A \equiv \nabla C_A = \frac{\partial C_A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C_A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C_A}{\partial z} \vec{k}$$

3.4. Transfert convectif

En plus du transport par mouvement moléculaire, la matière peut également être transportée par le mouvement de masse du fluide.

Dans le cas des transferts de quantité de mouvement et des transferts thermiques, on distingue les milieux immobiles des milieux en écoulement pour distinguer la diffusion de la convection.

Dans le cas de la diffusion de matière, comme cela a par exemple été illustré par l'expérience fondamentale présentée plus haut, un mouvement non intentionnel peut être provoqué lorsque l'on impose des conditions aux limites susceptibles de provoquer la diffusion. On parlera dans ce cas de

convection massique : le fluide n'est pas intentionnellement mis en mouvement, mais subit inévitablement la convection massique.[7]

Notons également que dans le cas où le transfert de matière induit un mouvement, la condition limite au niveau des parois solides devrait être modifiée en distinguant :

- une composante parallèle à la paroi pour laquelle on conserve la condition d'adhérence (vitesse nulle si la paroi est immobile) ;
- une composante perpendiculaire à la paroi qui est non nulle dès que la paroi est une source ou un puits de matière.

Cependant les vitesses de convection massique restent –presque toujours– très faibles, notamment par rapport aux mouvements intentionnels de convection, même très lents.

Un exemple typique de la contribution de la convection dans le transfert de matière en génie des procédés est le cas de la distillation. Dans l'opération de distillation binaire, par exemple, la condensation des mélanges de vapeurs et l'évaporation des solutions volatiles s'accompagne toujours d'une vitesse interfaciale, due à la condensation des vapeurs ou à l'évaporation des liquides. Bien que le transfert de matière dans de tels cas soit considérablement affecté par le flux de masse convectif, cet effet a longtemps été négligé par les ingénieurs. [7]

Le mouvement du fluide est un facteur qui contribue à la promotion des phénomènes de transfert de matière : C'est la convection de matière. Par analogie à la loi de Newton de refroidissement, le flux molaire par convection est exprimé par l'équation [8] :

$$\dot{N}_{\text{Conv}} = k (C_p - C_\infty)$$

où k est le coefficient de transfert de matière lequel dépend de :

- La vitesse de l'écoulement du fluide ;
- Propriétés physiques du fluide ;
- Géométrie de la conduite.

On distingue la convection naturelle et la convection forcée

La convection naturelle : la convection naturelle est due à la gravité, et implique des différences de densité qui peuvent être causées par une différence de température ou une différence de concentration dans un milieu homogène.

La convection forcée : ce mode de transfert est dû à la présence d'une force externe dont le plus souvent est d'origine mécanique (différence de niveau, pompe...etc).

3.5. Hydrodynamique du fluide (Transfert convectif)

Les forces extérieures agissantes sur le volume considéré peuvent être d'origines très diverses (thermique, électrique, écoulement forcé) Et provoquent le déplacement de l'ensemble du fluide avec une certaine vitesse moyenne du fluide \vec{V}^* donnant ainsi naissance à un flux complémentaire de chaque constituant. Soit [1] :

C_i : concentration molaire du constituant i du mélange [mole.m^{-3}]

\vec{V}_i : vitesse du constituant i par rapport à un repère fixe [m.s^{-1}]

\vec{V}^* : vitesse molaire moyenne du mélange par rapport à un repère fixe [m.s^{-1}]

La définition de la vitesse molaire moyenne est :

$$\vec{V}^* = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \vec{V}_i}{\sum_{i=1}^n C_i}$$

Le produit $C_i \vec{V}_i$ [$\text{mole.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$] est \vec{N}_i , la densité de flux molaire du constituant i à travers une surface perpendiculaire à la direction \vec{V}_i . De même on peut définir $V^*.C_A = J'_A$ qui représente le flux molaire convectif moyen du constituant A à travers une surface perpendiculaire à la direction \vec{V}^* [1]

Exercice 3

Montrer que dans un mélange binaire de A et B , la relation entre la densité de flux massique de diffusion de A et sa fraction molaire est donnée par : [5]

$$\bar{J}_A = - \frac{C^2}{\rho} M_A M_B D_{AB} \nabla X_A$$

Solution

La densité de flux massique de diffusion s'écrit :

$$\vec{J}_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A$$

Considérons la composante suivant x de ce vecteur, soit :

$$\vec{J}_{AX} = -\rho D_{AB} \frac{\partial \omega_A}{\partial X} \text{ et sachant que : } \omega_A = \frac{M_A X_A}{M_A X_A + M_B X_B}$$

$$\begin{aligned} \text{On aura : } \frac{\partial \omega_A}{\partial X} &= \frac{M_A \frac{\partial X_A}{\partial X} (M_A X_A + M_B X_B) - M_A X_A (M_A \frac{\partial X_A}{\partial X} + M_B \frac{\partial X_B}{\partial X})}{(M_A X_A + M_B X_B)^2} \\ &= \frac{M_A (M_A X_A + M_B X_B - M_A X_A + M_B X_A) \frac{\partial X_A}{\partial X}}{M^2} \quad \left(\text{Car } \frac{\partial X_B}{\partial X} = -\frac{\partial X_A}{\partial X} \right) \\ &= \frac{M_A M_B (X_B + X_A) \frac{\partial X_A}{\partial X}}{\left(\frac{\rho}{C}\right)^2} = \frac{C^2}{\rho^2} M_A M_B \frac{\partial X_A}{\partial X} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{J}_{AX} = -\rho D_{AB} \frac{C^2}{\rho^2} M_A M_B \frac{\partial X_A}{\partial X} = - \frac{C^2}{\rho} M_A M_B D_{AB} \frac{\partial X_A}{\partial X}$$

Exercice 4

Dans un container rectangulaire, on a stocké de l'hydrogène gazeux sous une pression élevée. Le matériau du container est de l'acier d'épaisseur 10 mm. La concentration d'hydrogène dans la surface interne est 1 kmol/m³. La concentration d'hydrogène sur la surface externe est négligeable. Le coefficient de diffusion de H dans l'acier est: $D = 0,26 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$. [5]

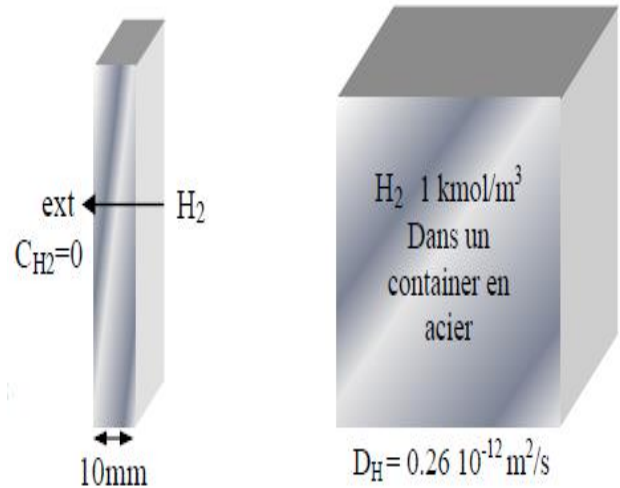
Quelle est le flux molaire de l'hydrogène dans l'acier?

Solution

Posons tout d'abord les hypothèses nécessaires à la résolution de ce problème:

- 1) Cas stationnaire
- 2) on considère le coefficient de diffusion $D_{\text{H-Acier}} = \text{constante}$
- 3) Pas de transport
- 4) Concentration de H₂ (interne) constante
- 5) Concentration nulle à l'extérieur
- 6) Aucune réaction chimique entre H et l'acier

Après toutes ces simplifications on peut aisément calculer le flux molaire de H₂ dans l'acier:



$$J = -D_{\text{H-A}} \frac{\partial C}{\partial x} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{\text{int}} - C_{\text{ext}}}{e} = \frac{1000}{0,01} = 10^5 \text{ mol. m}^{-2}$$

Alors $J = 0,26 \cdot 10^{-12} \cdot 10^5 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ mol. s}^{-1}$

3.6. Estimation du coefficient de diffusion binaire (diffusivité moléculaire)

On trouve assez peu de données relatives aux valeurs du coefficient de diffusion binaire dans la littérature. Certainement parce que la situation est beaucoup plus délicate que pour la viscosité ou la conductivité thermique. En effet ces deux dernières propriétés sont caractéristiques d'une espèce, alors qu'il faudrait des informations sur la diffusivité de chacun des binaires que l'on peut former à partir des différentes espèces. [8]

Dans les conditions habituelles de température et de pression, le coefficient de diffusion binaire est de l'ordre de :

- 10^{-5} (jusqu'à 10^{-4}) $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ dans les gaz ;
- 10^{-9} (jusqu'à 10^{-8}) $\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$ dans les liquides ;
- $10^{-12} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ voire beaucoup moins dans les solides.

Il faut souligner que l'unité du coefficient de diffusion binaire est indépendante du système d'unité retenu pour exprimer les concentrations et les flux (en massique ou en molaire).

À température ambiante, la diffusion dans les solides est pratiquement inexistante, ce qui fait que dans les cas classiques en génie des procédés elle pourra être négligée. À haute température, elle devient possible mais reste très lente. [8]

Pour les fluides, le coefficient de diffusion dépend de la température et de la pression (comme la viscosité –diffusivité de la quantité de mouvement– et la conductivité thermique –diffusivité de la chaleur–) ; il peut en outre varier avec la composition.

3.6.1. Coefficient de diffusion binaire en phase gazeuse

Le tableau suivant donne des valeurs de coefficients de diffusion mesurés pour quelques mélanges binaires gazeux.

Tableau 3.3. Valeurs du coefficient de diffusion pour quelques binaires gazeux

Gaz A—B	Température (K)	D_{AB} (cm ² /s)
Air— dioxyde de carbone	317,2	0,177
Air— éthanol	313	0,145
Air— hélium	317,2	0,765
Air— eau	313	0,288
Argon— ammoniac	333	0,253
Dioxyde de carbone —oxygène	293,2	0,153
Hydrogène— benzène	311,3	0,102
oxygène— eau	352,3	0,352

3.6.1.1. Paramètres influent le coefficient de diffusion binaire en phase gazeuse

Dans les mélanges binaires gazeux, jusqu'à des pressions modérées (de l'ordre de quelques atmosphères), la diffusivité est inversement proportionnelle à la pression et augmente rapidement avec la température (comme $T^{3/2}$ ou plus rapidement), mais reste à peu près indépendante de la composition.

3.6.1.2. Estimation du coefficient de diffusion binaire en phase gazeuse

Lorsque la valeur du coefficient de diffusion recherché n'est pas disponible dans la littérature, on peut utiliser diverses relations pour l'estimer.

La plupart de ces relations sont fondées sur la théorie cinétique des gaz et permettent d'estimer de manière assez correcte le coefficient de diffusion. [8]

On citera par exemple la relation de CHAPMAN-ENSKOG :

$$D_{AB} = \frac{0,001858 \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{M_A + M_B}{M_A \cdot M_B}\right)^{1/2}}{P \cdot \sigma_{AB}^2 \cdot \Omega_D}$$

Où T est la température en K, M_j la masse molaire de l'espèce j en g mol⁻¹, P la pression totale en atm, σ la constante de LENNARD-JONES en angstrom, et Ω_D l'intégrale de collision.

La valeur du coefficient de diffusion D_{AB} est obtenue en cm² s⁻¹ [8].

La constante de LENNARD-JONES de mélange vaut $\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2}$. Si la constante de LENNARD-JONES d'une espèce n'est pas disponible dans le tableau A1 (Annexes), elle peut être estimée

à partir de $\sigma = 1,18.V_b^{1/3}$, où V_b est le volume molaire au point d'ébullition normal en $\text{cm}^3 \text{mol}^{-1}$ (pouvant lui-même être évalué par la méthode de contributions décrite dans le tableau A.3 (Annexes).

L'intégrale de collision Ω_D s'obtient à partir du tableau A.2 (Annexes), une fois que l'on a estimé la valeur de $\frac{K.T}{\varepsilon_{AB}}$ pour le mélange A-B.

L'énergie caractéristique de LENNARD-JONES pour le mélange est telle que

$$\varepsilon_{AB} = \sqrt{\varepsilon_A \cdot \varepsilon_B}$$

Si l'énergie caractéristique de LENNARD-JONES d'une espèce n'est pas disponible dans le tableau A.1 (Annexes), elle peut être estimée à partir de $\frac{K.T}{\varepsilon} = 1,30 \cdot \frac{T}{T_C}$, où T_C est la température critique de l'espèce considérée en K. La constante de BOLTZMANN K vaut $1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$. [8]

3.6.2. Coefficient de diffusion binaire en phase liquide

Le tableau suivant donne des valeurs de coefficients de diffusion mesurés pour quelques mélanges binaires liquides à faible concentration de soluté.

Tableau 3.4. Valeurs du coefficient de diffusion pour quelques solutés A en faible concentration dans un solvant liquide B

Solvant B	Soluté A	Température (K)	$D_{AB}, \text{cm}^2/\text{s} \times 10^5$
Eau	Acide acétique	293	1,19
	Aniline	293	0,92
	Méthanol	288	1,26
Ethanol	Benzène	298	1,81
	Eau	298	1,24
	Oxygène	303	2,64
Benzène	Acide acétique	298	2,09
	Cyclohexane	298	2,09
	Toluène	298	1,85

3.6.2.1. Paramètres influent le coefficient de diffusion binaire en phase liquide

La diffusion à l'état liquide présente des caractéristiques bien plus complexes qu'en phase gazeuse : on observe que le coefficient de diffusion binaire augmente généralement avec la température, mais surtout dépend fortement de la composition, et ce de manière non monotone. L'influence de la pression reste faible.

3.6.2.2. Estimation du coefficient de diffusion binaire en phase liquide

Là encore, si la valeur expérimentale n'est pas disponible, on peut utiliser une méthode d'estimation telle que celle de WILKE-CHANG décrite dans la suite.

Il faut néanmoins souligner que les méthodes d'estimation en phase liquide fournissent des résultats beaucoup moins satisfaisants que celles en phase gazeuse. [8]

La relation de WILKE-CHANG est la suivante[8] :

$$D_{AB} = 7,4 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{T \cdot (\xi \cdot M_B)^{1/2}}{\mu \cdot V_{b,A}^{0,6}}$$

Où le coefficient empirique ξ est lié au solvant B (il vaut par exemple 1,9 pour le méthanol, 1,5 pour l'éthanol, 1,0 pour le benzène, l'éther et l'heptane, etc.) ;

La température T doit être en K, la masse molaire du solvant B en g mol⁻¹, la viscosité dynamique μ de la solution en poise.

$V_{b,A}$ est le volume molaire au point d'ébullition normal de l'espèce A en cm³ mol⁻¹.

La valeur du coefficient de diffusion D est obtenue en cm² s⁻¹.

Exercice 5

Calculer le coefficient de diffusion de NH₃ dans l'azote à 353 K et 200 kPa. Comparer la valeur trouvée à celle expérimentale, $D_{AB} = 1,66 \cdot 10^{-5}$ m²/s (Sherwood et al 1975). Les valeurs des paramètres de Lennard-Jones sont [5] :

	σ_i (Å)	ε_i / k (°K)
NH ₃	2,900	558,3
N ₂	3,798	71,4

Solution

On applique la relation de CHAPMAN-ENSKOG, valable pour deux molécules inertes et non polaires soit :

$$D_{AB} = \frac{0,001858 \cdot T^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{M_A + M_B}{M_A \cdot M_B}\right)^{1/2}}{P \cdot \sigma_{AB}^2 \cdot \Omega_D}$$

Avec :

M_A, M_B : en g

P : en atm

σ_{AB} : en Å

Ω_D : Paramètre sans dimensions tiré à partir des tables (Annexe)

$$\sigma_{AB} = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} = \frac{2,900 + 3,798}{2} = 3,349 \text{ Å}$$

Les valeurs de Ω_D sont tabulées en fonction du paramètre kT/ε (k : constante de Boltzman).

Calculons d'abord la valeur de ε/k :

$$\frac{\varepsilon}{k} = \sqrt{\frac{\varepsilon_A}{k} \cdot \frac{\varepsilon_B}{k}} = \sqrt{558,3 \times 71,4} = 199,65 \text{ K} \longrightarrow \frac{kT}{\varepsilon} = \frac{353}{199,65} = 1,768$$

Sur les tables, on constate que la valeur de kT/ε est comprise entre 1,75 et 1,80. Si on considère une évolution linéaire entre ces deux valeurs, on obtient :

$$\Omega_D = 1,123$$

On aura enfin :

$$D_{AB} = \frac{0,001858 \times (353)^{\frac{3}{2}} \times \left(\frac{17+28}{17 \times 28}\right)^{1/2}}{\frac{2 \cdot 10^5}{1,013 \cdot 10^5} \times (3,349)^2 \times 1,123} = 0,152 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{0,166 - 0,152}{0,166} = 8,2 \%$$

Chapitre 4

Transfert de quantité de mouvement

4.1. Introduction à la mécanique des fluides

La mise en contact des réactifs lors d'une réaction chimique est améliorée lorsque l'on augmente l'agitation du fluide. Pour comprendre et maîtriser cette agitation fondamentale, on fait appel à la mécanique des fluides qui s'intéresse à l'étude des mouvements des fluides (gaz ou liquide) sous l'influence des forces de pression, de gravité etc....

L'agitateur transmet à un élément de fluide une quantité de mouvement, et ce dernier transmettra lui-même une partie de cette quantité de mouvement à l'élément de fluide adjacent jusqu'à ce que ce transfert de quantité de mouvement devienne impossible sur la paroi qui elle est immobile. En effet on admet que sur la paroi le fluide a une vitesse nulle. Le transfert de la quantité dépend également de la nature chimique des constituants du fluide et des forces de liaisons chimiques qui s'établissent entre eux. Ainsi des fluides visqueux transmettent mal la quantité de mouvement reçue de l'agitateur. Il apparaît donc un « frottement » entre chaque couche du fluide pour entraîner l'ensemble du fluide. On dit qu'il apparaît une contrainte de cisaillement τ au fluide. Cette contrainte a la dimension d'une force par unité de surface (comme la pression). Néanmoins, pour la contrainte la force est parallèle à la surface considérée alors que pour la pression cette force est perpendiculaire à la surface. Cette contrainte de cisaillement est également homogène à un débit de quantité de mouvement par unité de surface. Puisque la vitesse du fluide est importante près de l'agitateur et nulle sur la paroi du réacteur contenant le fluide, on génère des gradients de vitesse du fluide dans les trois directions de l'espace [1]

$$\nabla \vec{V} = \text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

L'écriture du bilan de quantité de mouvement macroscopique permet d'accéder à la puissance nécessaire pour provoquer l'écoulement du fluide à un certain débit. La connaissance des gradients de vitesse est possible en effectuant les bilans microscopiques qui sont exprimés par les célèbres équations de Navier-Stokes [1].

4.2. Définition d'un fluide

Une question que l'on se pose souvent : quelle est la différence entre un solide et un fluide ? Nous avons en général une idée vague de cette différence. Un solide est « dur » et pas facile à déformer, tandis qu'un fluide est une matière molle et qui peut être facilement déformée (on peut très simplement bouger dans l'air). Mais ces explications des différences entre un solide et un fluide ne sont pas satisfaisantes d'un point de vue scientifique. Si l'on regarde ces matières d'un point de vue moléculaire (voir figure 4.1), on s'aperçoit que le solide (acier, béton..) a des molécules rapprochées de façon très dense avec des forces de cohésion intermoléculaires très grandes et qui permettent au solide de maintenir sa forme initiale. En revanche, pour des liquides (eau, huile...), les molécules sont plus espacées, les forces intermoléculaires sont plus faibles que dans le cas des solides et les molécules ont une grande liberté de mouvement. Par conséquent, les liquides peuvent être facilement déformés (sans avoir la possibilité d'être très fortement comprimés comme pour les gaz) mais peuvent, par exemple, être versés dans des récipients ou s'écouler dans un tube. Les gaz (air, oxygène..) ont un espace entre les molécules encore plus grand et ont des forces intermoléculaires de cohésion extrêmement petites et par conséquent ils sont très facilement déformables et compressibles (ils peuvent remplir complètement le volume d'un récipient quelconque dans lequel ils sont placés) [10].

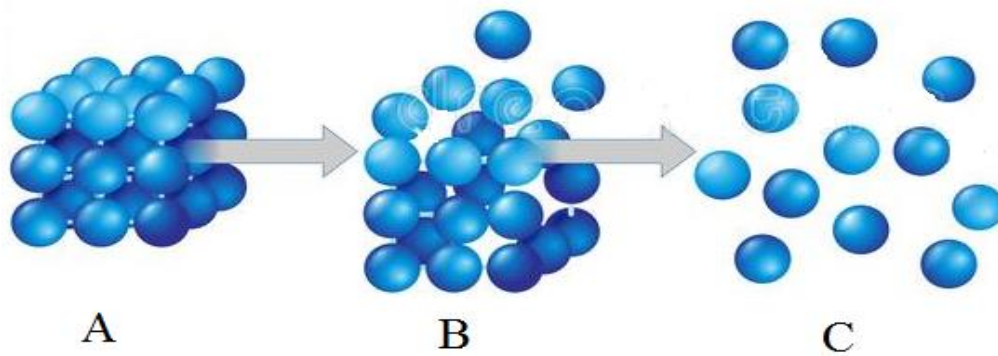


Figure 4.1. Structures moléculaires. A : solide, B : liquide, C : gaz [10].

4.3. Etats de la matière

Les trois états de la matière sont : état solide, état liquide, état gazeux.

Ils se distinguent par leurs propriétés :

- Les solides possèdent des formes propres. On ne peut pas les faire couler ; on ne peut que les déplacer en bloc.
- Un liquide (pratiquement incompressible) n'a de forme que celle de son contenant, mais son volume est défini ;
- Un gaz (incompressible) n'a ni forme, ni volume propre.

C'est la température et l'agitation thermique qui permet de justifier ces propriétés. L'augmentation de température produit une augmentation de l'agitation des composants (atomes, molécules, ions). Il est possible de se représenter ce qui se passe quand on augmente la température d'un corps [9] :

- Dans le solide, les atomes, molécules et ions sont à des emplacements définis, autour desquels ils peuvent vibrer quand la température augmente. L'état est donc, en général, ordonné.
- Dans le liquide l'agitation a été suffisante pour rompre les liaisons fortes du solide, atomes, molécules et ions se déplacent librement. Cependant, il reste des liaisons intermoléculaires qui retiennent à faible distance les molécules ou atomes. Le volume est donc défini. L'état est désordonné.
- Dans le gaz les forces d'attraction sont très faibles et les molécules sont libres de se déplacer.

Les liquides et les gaz forment donc, par opposition aux solides les fluides : à l'échelle macroscopique (pour une observation à l'œil nu), ils présentent un aspect continu, déformable aisément, sans forme propre, et pouvant s'écouler. C'est de cette dernière propriété que découle le nom fluide.

À l'interface entre un fluide et un solide, l'expérience a montré que les interactions entre les deux phases conduisent à une situation telle que le solide impose son mouvement propre au fluide ; on dit qu'un fluide adhère aux parois solides avec lesquelles il est en contact. En particulier, la vitesse d'un fluide est nulle au contact d'une surface solide immobile [9].

4.4. Propriétés des fluides

Les propriétés des fluides en générale, sont l'ensemble des caractères physiques qui conditionnent leurs comportements (au repos ou en mouvement)

4.4.1. Masse volumique ; Densité, poids volumique.

La masse volumique ρ d'un fluide est le rapport entre la masse d'une certaine quantité de matière, m et le volume occupé par cette quantité de matière V . Cette définition n'a de sens que si la matière est homogène[9].

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ en kg.m}^{-3}$$

On peut définir la densité, par relation à un corps de référence. C'est le rapport entre la masse d'un certain volume du corps et la masse du même volume du corps de référence. En général, on utilise le rapport des masses volumiques.

- Pour les solides et les liquides, le corps de référence est l'eau pure (à 4°C, et $\rho = 1,013 \text{ bar}$, sa masse volumique est $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$). En particulier pour les liquides, dont la masse volumique est plus sensible à la température, on choisit de la mesurer à 20°C. On parle alors de la densité d_4^{20} .
- Pour les gaz, le corps de référence est l'air sec, dans les mêmes conditions de température et de pression que le gaz étudié. [9]

La densité, plutôt que de se référer à la masse volumique, se réfère souvent, alors, à la masse molaire.

Une mole de gaz occupe (à 0°, 1,013 bar) 22,4 L.

Une mole d'air a une masse $M_{\text{air}} = 29 \text{ g}$, et la relation de définition de la densité du gaz de masse molaire M (en g) est alors :

$$d = \frac{M}{29} \quad (d \text{ n'a pas d'unité})$$

On utilise assez souvent le volume massique v , inverse de la masse volumique :

$$V = \frac{1}{\rho} \text{ en m}^3.\text{Kg}^{-1}$$

Le poids volumique (Poids spécifique) est le poids d'une unité de volume :

$$\varpi = \frac{mg}{V} = \rho g \text{ en N.Kg}^{-1}$$

4.4.2. Viscosité

La viscosité est définie comme étant la propriété d'un fluide à résisté au mouvement d'une couche de fluide au-dessus d'une autre couche de fluide adjacente.

a- Viscosité dynamique

- La loi de Newton

La loi de Newton établit que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse par l'intermédiaire de la viscosité [3]

$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

τ : Contrainte de cisaillement représente la force nécessaire au cisaillement du fluide par unité de surface (en Pascal). Ce terme est appelé shear stress en Anglais.

$\frac{dU}{dy}$: Le gradient de vitesse est la dérivée de la vitesse selon la distance en s^{-1} . Ce terme est aussi appelé déformation ou taux de cisaillement (shear rate en Anglais)

- L'expérimentale de la loi de Newton

Considérons l'écoulement d'un fluide entre deux plaques parallèles : une fixe et une mobile. Lorsque la plaque mobile est mise en mouvement, le fluide qui était initialement immobile est entraîné par le mouvement. Très rapidement, le fluide atteint une vitesse constante : l'écoulement est stationnaire (vitesse indépendante du temps). [11]

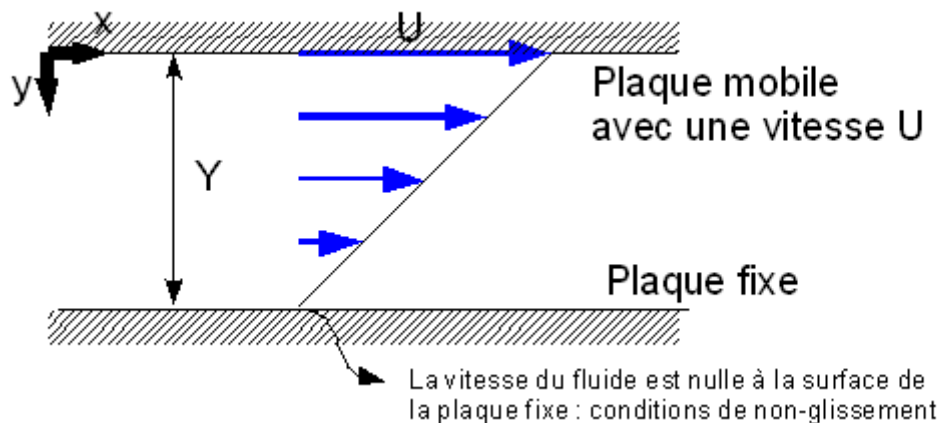


Figure 4.2. Écoulement d'un fluide contenu entre deux plaques [11]

Le problème se résume donc à deux plaques planes d'aire S (suffisamment grande pour négliger les effets dus à leurs bords) séparées d'une distance Y contenant le fluide. Une plaque est fixe tandis que l'autre est mobile dans la direction Ox avec une vitesse U constante. Lorsque l'écoulement est stationnaire, il est nécessaire de fournir une force F dans la direction Ox à la plaque mobile pour la déplacer à une vitesse U. Expérimentalement, nous pourrions noter que cette force est proportionnelle à la vitesse de la plaque, U, et à la surface des plaques en regard, A, et inversement proportionnelle à l'épaisseur du fluide, Y. Il est donc possible de relier la force F nécessaire au déplacement à la vitesse u avec l'expression suivante: [11]

$$F = - \mu S \frac{dU}{dY}$$

Où :

μ : la viscosité dynamique du fluide représente le coefficient de proportionnalité entre force et vitesse. Une force, nécessaire au déplacement, importante est synonyme d'une viscosité de fluide élevée : les frottements entre les différentes molécules du fluide et donc la résistance à l'écoulement sont importants.

F : force de glissement entre les couches en (N),

μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s),

S : surface de contact entre deux couches en (m²),

ΔU : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),

ΔY : Distance entre deux couches en (m).

La viscosité dynamique s'exprime en unités suivantes

M.K.S : kgf.s/m²

C.G.S : dyne.s/cm² = poise = 0,1 poiseuille = 100 cp.

S.I : N.S/m²

Ou :kgf =9,81 N

dyne = g.cm/s²

Remarque

La loi de Newton peut être interprétée en termes de quantité de mouvement. Au niveau du plan en mouvement, le fluide acquiert une certaine quantité de mouvement dans la direction x. Ce fluide va à son tour transmettre une certaine fraction de cette quantité de mouvement vers les couches inférieures leur permettant de rester en mouvement. La contrainte de cisaillement peut aussi donc être considérée comme le flux visqueux de la quantité de mouvement suivant x se propageant dans la direction y.

Vous pouvez ainsi montrer que l'unité de la contrainte de cisaillement en Pa est ainsi similaire à celle d'un flux de quantité de mouvement : kg.m.s⁻¹ (pour la quantité de mouvement) m⁻² (par unité de surface) s⁻¹ (par unité de temps). [11]

Le signe négatif de la loi traduit le fait que la quantité de mouvement se transmet toujours des zones de vitesse importante vers les zones de vitesse plus faibles, donc dans le sens de vitesse décroissantes et donc des dérivées négatives. Dans ce contexte, la viscosité peut être considérée comme la propriété du fluide, soumis à une déformation, d'exercer une résistance à la vitesse de glissement des couches moléculaires les unes sur les autres. Vue de cette façon, les similarités entre la loi de Newton (transfert de la quantité de mouvement des couches de fluides à vitesse vers les vitesses faible) avec la loi de transport de la matière par diffusion (transfert de matière des zones à concentration élevée vers les zones diluées) et à la loi de transfert de chaleur (transfert de chaleur vers les zones à températures élevés vers les températures faibles) sont évidentes. [11]

b- Viscosité cinématique

Elle est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique du fluide.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

La viscosité cinématique s'exprime en unités suivantes

C.G.S : cm²/s= stockes

S.I : m²/s

Suivant la viscosité on distingue cinq types de fluide

- Fluides idéals : c'est des fluides incompressibles et qui n'ont pas de viscosité, c'est des fluides qui n'existent pas dans la nature.
- Fluides réels : ceux qui ont une viscosité c'est des fluides réels, c'est le cas de tous les fluides disponibles.
- Fluides Newtoniens : un fluide réel qui obéit à la loi de Newton est dit fluide Newtonien.
- Fluides non Newtoniens : c'est des fluides réels qui n'obéissent pas à la loi de Newton.
- Fluides plastiques idéals : c'est des fluides dont la droite de proportionnalité entre l'effort tangentiel et le gradient de vitesse ne passe pas zéro. [5]

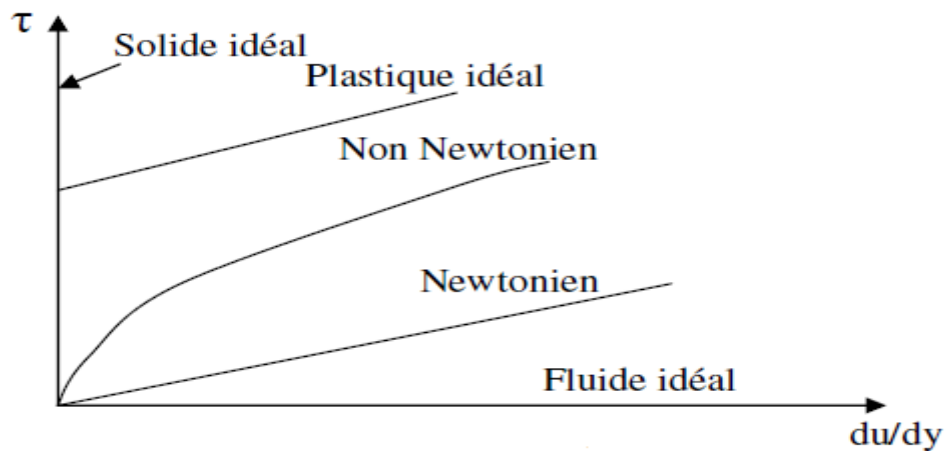


Figure 4.3. Types de fluides [5]

Tableau 4.1: valeurs de viscosité cinématique et dynamique pour quelques fluides à pression atmosphérique. [5]

Fluide	μ (Pa. s)	ν ($m^2 \cdot S^{-1}$)
Air (0°C)	$1,7 \times 10^{-5}$	$1,3 \times 10^{-5}$
Eau (20°C)	$1,0 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-6}$
Mercure (20°C)	$1,6 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-7}$
Huiles	10^{-2} à 1	10^{-5} à 10^{-3}
Polymères fondus – verre fondu	10^2 à 10^4	10^{-1} à 10

Remarque

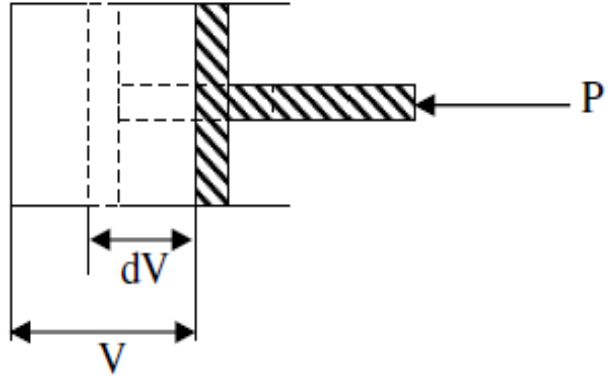
Lorsque le fluide est parfait (fluide idéal, non visqueux) alors $\mu = 0$

4.4.3. Compressibilité

La compressibilité représente la propriété du fluide à se comprimé sous l'effet de sollicitations, elle est définie comme étant l'inverse du module d'élasticité K qui est le rapport entre l'effort de compression et le changement de volume [4]

$$K = -v \frac{dP}{dv} \quad , \text{ La Compressibilité étant } 1/K.$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{K} \quad , \text{ c'est l'élasticité cinématique.}$$



On distingue compressibilité isotherme (à température constante), compressibilité isochore (à volume constant) et compressibilité isobare (à pression constante).

4.4.3.1. Compressibilité isotherme

Les gaz sont fortement compressibles, et l'étude de cette compressibilité fait généralement partie de la thermodynamique. À température constante, par exemple, la pression absolue du gaz et le volume d'une masse définie varient en sens inverses (c'est la loi de Mariotte : $p.V = \text{Constante}$). L'écoulement des fluides compressibles relève de l'étude de la thermodynamique.

Les liquides sont peu compressibles. [9]

On définit le coefficient de compressibilité isotherme X par la relation :

$$V_2 = V_1(1 - X \cdot \Delta p)$$

Où V_2 est le volume final.

V_1 : le volume initial.

Δp : la variation de pression ($\Delta p = p_2 - p_1$) en pascal (Pa).

X : le coefficient de compressibilité en Pa^{-1} .

Le signe — vient de ce qu'en augmentant la pression, le volume diminue, et qu'on souhaite garder un coefficient positif.

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\Delta V = -X \cdot V \cdot \Delta p$$

Avec $\Delta V = V_2 - V_1$. Pour les liquides X est de l'ordre de 10^{-10} pa^{-1} .

4.4.4. Dilatation isobare

On définit le coefficient de dilatation volumique isobare α par la relation

$$V_2 = V_1 (1 + \alpha \Delta \theta)$$

Où V_2 est le volume final, V_1 : le volume initial, $\Delta\theta$ la variation de température

($\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$) (La différence entre deux températures est la même, qu'on opère en °C ou en Kelvin), α le coefficient de dilatation volumique en K^{-1} ou $^{\circ}C^{-1}$.

Cette relation peut encore s'écrire [9] :

$$\Delta V = \alpha \cdot V \cdot \Delta\theta$$

Avec $\Delta V = V_2 - V_1$

4.4.5. Tension superficielle et capillarité

La tension superficielle est définie comme la force de tension qui s'exerce, sur la surface d'un liquide en contact avec un gaz ou un autre liquide immiscible, de telle sorte que la surface de contact apparaît comme une membrane sous tension.

Le rapport de cette force par unité de longueur de surface libre est appelée tension superficielle et est dénoter par σ (N/m) ($\sigma = 0,07289$ N/m, pour l'eau). La tension superficielle provoque une remonté de l'eau au sens inverse de la gravité dans les espaces étroits, ce phénomène est appelé capillarité. [5]

4.4.6. Capillarité

Si on plonge un tube étroit dans un liquide, on remarque une surélévation de niveau du liquide dans le tube avec un ménisque concave si le liquide est mouillant (l'eau), ou un abaissement avec un ménisque convexe si le liquide est non mouillant (mercure), cela est due à l'action de la tension superficielle. [5]

En égalant les forces qui s'exercent sur une colonne de liquide, on détermine l'expression de la hauteur capillaire, c'est la loi de Jurin. [5]

$$h = \frac{2 \cdot \sigma \cdot \cos \theta}{r \cdot \rho \cdot g}$$

h : est la hauteur du liquide dans le tube.

σ : la tension superficielle du liquide.

θ : est l'angle de raccordement entre le liquide et la paroi du tube, il est fonction de la nature du liquide.

ρ : Masse volumique du liquide.

g : accélération de la pesanteur.

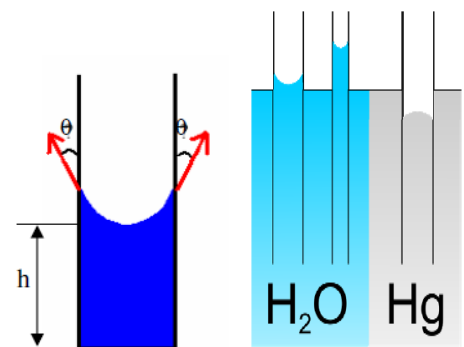
r : rayon du tube.

Les conditions de validité sont les suivantes :

Il faut que le diamètre du tube soit petit devant la longueur capillaire, qui vaut typiquement deux millimètres à la température et à la pression ambiante. La loi de Jurin donne la hauteur capillaire verticale.

4.4.7. Pression de vapeur saturante

La pression de vapeur saturante ou tension de vapeur est la pression à laquelle la phase gazeuse d'une substance est en équilibre avec sa phase liquide ou solide. Elle dépend exclusivement de la température. Certain utilisent le terme « pression de vapeur », mais celui-ci est ambigu car il évoque la pression partielle de la vapeur.



La pression de vapeur saturante est la pression partielle de la vapeur d'un corps pur à partir de laquelle une partie du corps pur passe sous forme liquide (ou solide). On dit aussi que c'est la pression maximale de sa vapeur « sèche » (c'est-à-dire sans phase liquide).

Si la pression partielle de la vapeur est égale à la pression de vapeur saturante d'une substance, les phases gazeuses, liquides ou solides sont dites en équilibre.

Si la pression partielle de la vapeur dépasse la pression de vapeur saturante, il y a liquéfaction ou condensation. A partir d'une situation d'équilibre, cela peut se faire soit en augmentant la pression de vapeur (par exemple en diminuant le volume), ou en diminuant la valeur de la pression de vapeur saturante, ceci est possible en diminuant la température. [5]

Soit un tube vidé fermé du haut introduit dans un récipient rempli de liquide soumis à la pression atmosphérique P_0 ,

Le liquide s'élève d'une hauteur h , la hauteur restante h_v , représente la tension de vapeur du liquide.

En d'autres termes, la tension de vapeur est la pression limite de passage d'un liquide de l'état liquide à l'état gazeux, et vis versa.

La tension de vapeur croît avec la température, elle égale à la pression atmosphérique à la température d'ébullition. [5]

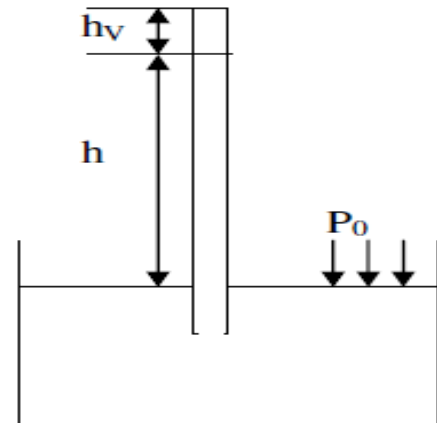


Tableau 4.2 : Tension de vapeur saturante de l'eau douce à différentes températures.

T (°C)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
P_{sat} (KPa)	0,61113	1,2281	2,3388	4,2455	7,3814	12,344	19,932	31,176	47,373

Exercice 1

Pour mesurer la densité de l'éthanol. on utilise une fiole jaugée de 50 ml on pèse la fiole vide : $m_1 = 53,257$ g ;

On la pèse remplie d'éthanol jusqu'au trait de jauge, à 20°C : $m_2 = 92.807$ g.

En déduire la densité de l'éthanol, connaissant la masse volumique de l'eau à 4°C :

$$\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}. \quad [9]$$

Solution

La masse d'éthanol est :

$$m = m_2 - m_1$$

$$m = 39,550 \text{ g} = 3,9550 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

Son volume est :

$$V = 50 \text{ ml.} = 5,00 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

La masse volumique de l'éthanol est donc : $\rho = \frac{m}{v}$

$$\text{Application numérique : } \rho = \frac{3,9550 \cdot 10^{-2}}{5,00 \cdot 10^{-5}} = 791 \text{ kg/m}^3$$

La densité de l'éthanol est :

$$d = \frac{\rho_{\text{éthanol}}}{\rho_{\text{eau}}}$$

$$\text{Application numérique : } d = 0,791$$

Exercice 2

Le verre de la fiole jaugée précédente a un coefficient de dilatation volumique

$$\alpha_v = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}.$$

On remplit de nouveau jusqu'au trait de jauge la fiole, préalablement vidée, rincée, séchée et portée à 60°C, d'éthanol à 60°C.

On la pèse et on trouve $m_3 = 91,302 \text{ g}$.

En déduire le coefficient de dilatation volumique de l'éthanol entre 20°C et 60°C. [9]

Solution

A 60°C, la fiole jaugée a un volume de : $V' = V(1 + \alpha_v \cdot \Delta\theta)$

$$\text{Application numérique : } V' = 50,04 \text{ mL.}$$

V' est le volume d'éthanol à 60°C.

La masse d'éthanol dans la fiole est de : $m' = m_2 - m_0$

$$\text{Application numérique : } m' = 38,045 \text{ g}$$

$$\text{A } 20^\circ\text{C, ils occuperaient : } V'_0 = \frac{m'}{\rho}$$

$$\text{Application numérique : } V'_0 = 48,10 \text{ mL}$$

Le coefficient de dilatation de l'éthanol entre 20°C et 60°C est :

$$\alpha = \frac{V' - V'_0}{V'_0 \cdot \Delta\theta}$$

$$\text{Application numérique : } \alpha = 1,008 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

4.5. Statique des fluides

La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos, lorsque le fluide n'est animé d'aucun mouvement. L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide. Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos sur des surfaces solides indéformables avec

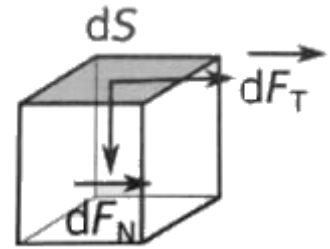
lequel il est en contact. Le champ d'applications est très large et concerne par exemple le calcul de la force résultante appliquée sur un barrage ou sur un objet partiellement ou complètement immergé, ainsi que le calcul de la pression dans des réservoirs. [10]

4.5.1. Principe fondamental de la statique des fluides

- La pression

Soit un élément de volume d'un fluide, limité supérieurement par une surface dS . Sur cette surface élémentaire s'exercent des actions de l'extérieur, qu'on peut modéliser par deux forces élémentaires, $d\vec{F}_T$, tangentielle et $d\vec{F}_N$, normale à la surface. La force tangentielle ne s'exerce que dans les situations de mouvement, et nous nous intéresserons plus tard à elle. La pression est définie comme le quotient de la force normale par la surface [9] :

$$P = \frac{dF_N}{dS}$$



La pression est une grandeur scalaire, et ne dépend pas de l'orientation de la surface.

- Unités de mesure

L'unité légale découle de la définition : c'est le pascal (Pa) qui vaut 1N/m^2 . Comme elle est très petite, on utilise plutôt ses multiples, le kPa et le Mpa. Le bar est une unité autorisée : $1\text{bar} = 10^5 \text{ Pa} = 0,1 \text{ MPa}$. Il correspond en gros à la pression atmosphérique au niveau de la mer. Les météorologues utilisaient le mbar pour leurs mesures (cela correspond à la précision qu'ils choisissent). Ils l'ont remplacé par l'hectopascal (hPa) qui lui est égal. [9]

Des unités anciennes et exotiques subsistent :

- 1 $\text{kgf/cm}^2 = 98066 \text{ Pa}$: c'est le « kilo » des indicateurs de pression des pneus ;
- 1 atm = $101325 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar}$: l'atmosphère ;
- 1 $\text{mmHg} = 133,32 \text{ Pa} = 1/760 \text{ atm}$;
- 1 torr = 1 mmHg , utilisé pour le vide ;
- 1 $\text{mCE} = 9806,65 \text{ Pa}$: 1 m de colonne d'eau, utilisé en tuyauterie ;
- 1 PSI = $1\text{lb/in}^2 = 6894,8 \text{ Pa}$ unite anglo-saxonne (pound per square inch).

- Différentes mesures de pressions

Ces pressions font référence à des mesures obtenues avec différents appareils. Certains mesurent une pression seule : pression absolue ou pression atmosphérique, d'autres mesurent une différence de pression entre deux points quelconque, ou entre un point et l'atmosphère.

La pression absolue p_{abs} se mesure en référence au vide absolu dont la pression est nulle.

La différence de pression ou pression différentielle $\Delta p = p_2 - p_1$ se mesure entre 2 points.

En général $P_{\text{dif}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{ref}}$ où P_{ref} est une pression de référence.

La pression atmosphérique ambiante P_{amb} ou P_{atm} est mesurée avec un baromètre par rapport au vide absolu.

La pression effective P_{eff} ou pression relative P_{rel} est la pression différentielle mesurée en référence à la pression ambiante. On a donc : $P_{\text{eff}} = P_{\text{abs}} - P_{\text{atm}}$

Pression à l'air libre

Dans les problèmes, on rencontre souvent un réservoir, ou un point à l'air libre. Ça signifie que sa pression est égale à la pression atmosphérique définie pour le problème. [9]

4.5.2. Relation fondamentale de l'hydrostatique

La pression en un point d'un fluide au repos dépend des forces que subit le fluide, et en particulier du champ de forces. Le seul champ de forces que nous traiterons est le champ de pesanteur. Par convention, nous orienterons toujours l'axe Oz vers le haut.

Nous prenons ici l'exemple d'un élément parallélépipédique, situé en (x,y,z) , de dimensions (dx, dy, dz) , orienté suivant les 3 axes : on a donc [9]

$$dS_x = dS_{x+dx}, \quad dS_y = dS_{y+dy}, \quad dS_z = dS_{z+dz}.$$

Sa masse est $dm = \rho \cdot dV$, avec $dV = dS_z \cdot dz$.

- Forces à distance

La seule force à distance est le poids,

vertical vers le bas :

$$dP = dm \cdot g$$

$$dP = \rho \cdot dV \cdot g$$

$$dP = \rho \cdot dS_z \cdot dz \cdot g$$

- Forces de contact

Exercées sur les surfaces :

Sur chaque surface s'exerce une force de pression de norme :

$$dF_x = p_x \cdot dS_x \quad dF_{x+dx} = p_{x+dx} \cdot dS_x$$

$$dF_y = p_y \cdot dS_y \quad dF_{y+dy} = p_{y+dy} \cdot dS_y$$

$$dF_z = p_z \cdot dS_z \quad dF_{z+dz} = p_{z+dz} \cdot dS_z$$

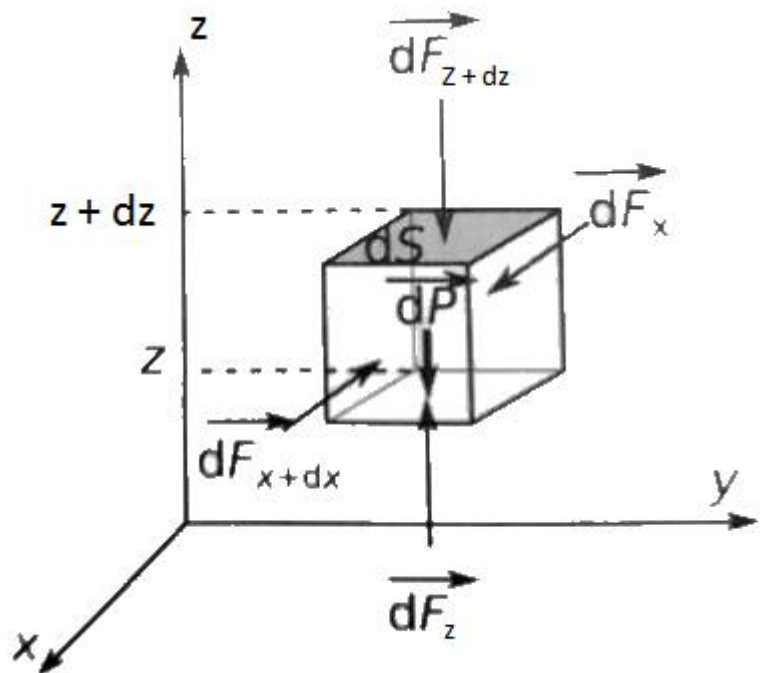
- Bilan

Les forces de pressions exercées sur les surfaces verticales se compensent deux à deux.

- Selon Ox, $d\vec{F}_x = -d\vec{F}_{x+dx}$

Soit $dF_x = dF_{x+dx}$

ou. $p_x \cdot dS_x = p_{x+dx} \cdot dS_x$



et on peut en déduire que $p_x = p_{x+dx}$

et donc $p_y = p_{y+dy}$

- La relation serait la même selon Oy.

Dans un fluide au repos, la pression est la même en tout point d'un plan horizontal. En conséquence, la surface libre d'un liquide au repos, qui est à la pression atmosphérique est un plan horizontal.

Il reste selon Oz $d\vec{F}_z + d\vec{F}_{z+dz} + d\vec{P} = \vec{0}$

Soit : $p_{z+dz} \cdot dS_z - p_z \cdot dS_z = -\rho \cdot g \cdot dS_z \cdot dz$

On peut simplifier par dS_z

$$p_{z+dz} - p_z = -\rho \cdot g \cdot dz$$

On peut appeler dp cette variation de p et donc

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$$

Cette équation est la forme différentielle de la relation fondamentale de la statique des fluides (ou hydrostatique) dans le champ de pesanteur.

La grandeur $\frac{dp}{dz}$ est appelée gradient de la pression. Le signe $-$ est lié au fait que g est en sens inverse de z et que la pression augmente avec le champ de gravitation. [9]

En intégrant la relation : $dp = -\rho \cdot g \cdot dz$

On obtient : $\Delta p = \int dp = p_2 - p_1 = -g \cdot \int \rho \cdot dz$

Si ρ est constant on a : $\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1) = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$

Forme intégrale de la relation fondamentale de la statique des fluides.

On peut aussi l'écrire : $\Delta p = -\rho \cdot g \cdot \Delta z$

En choisissant : $z_1 = 0, z_2 = z, p_1 = p_0, p_2 = p$

La relation peut aussi s'écrire : $p = p_0 - \rho \cdot g \cdot z$

Dans un fluide continu au repos, la différence de pression entre deux niveaux est mesurée par le poids de la colonne de fluide ayant pour surface de base l'unité et pour hauteur la distance entre ces deux niveaux. [9]

4.5.3. Manomètres

La mesure de pression statique dans un liquide est obtenue à partir d'un manomètre. Le dispositif le plus simple est le manomètre en U tel que celui représenté sur la Figure 4.4. Ce manomètre est raccordé à une enceinte contenant un fluide à la pression P_A . Il est composé de 2 fluides de poids spécifiques ϖ_1 et ϖ_2 respectivement. [10]

La relation de l'hydrostatique nous permet d'écrire des relations entre les pressions aux points A, M, N et B

$$P_M = P_N$$

$$P_M = P_A + \varpi_{g_1} h$$

$$P_N = P_B + \varpi_{g_2} H$$

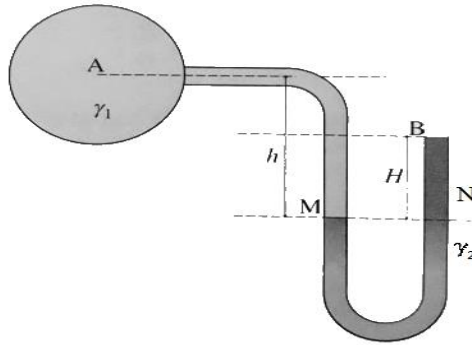


Figure 4.4. Mesure de la pression d'un réservoir par manomètre en U [10]

Ceci conduit donc à la valeur de la pression effective en A (la pression au point B étant à la pression atmosphérique) :

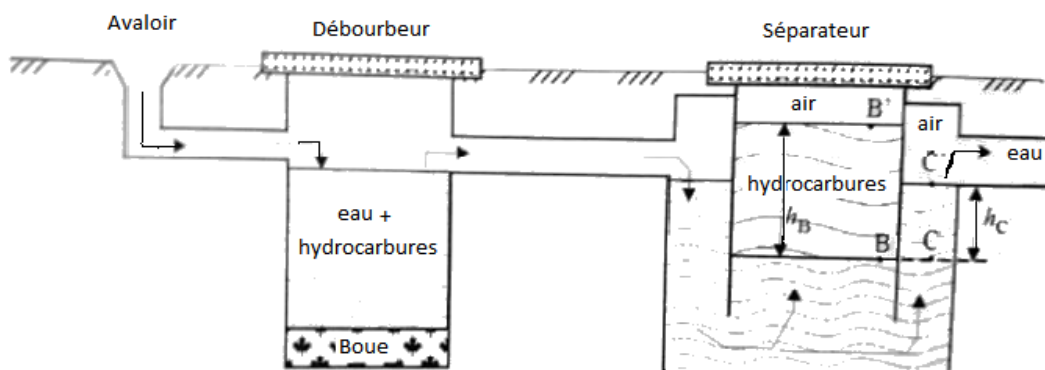
$$P_A = + \varpi_{g_2} H - \varpi_{g_1} h$$

Il existe d'autres technologies de manomètres tels que le manomètre à membrane.

Dans ce cas le fluide exerce une force sur une membrane qui va se déformer. La mesure cette déformation par capteur capacitif et l'utilisation d'une table d'étalonnage conduit à la pression dans le fluide. [10]

Exercice 3

Le schéma d'un système permettant de récupérer et traiter l'eau de lavage des véhicules de chantier est le suivant :



L'eau est récupérée par un avaloir de sol puis passe par un débourbeur qui permet de retenir la boue par décantation. Le mélange eau + hydrocarbures se dirige ensuite vers un séparateur où les hydrocarbures moins denses que l'eau sont isolés et peuvent être récupérés. La capacité totale du débourbeur est 160 L et sa surface de base est un carré de 0,32 m² de surface. [9]

1. Le débourbeur est plein. Il contient 110 L d'eau, 1,5 L d'hydrocarbures et de la boue. Calculer la pression exercée par l'ensemble sur le fond du débourbeur.

2. Calculer la densité du mélange eau + hydrocarbures, ce mélange étant supposé homogénéisé.
3. Sachant que $h_C = 0,36$ m, calculer h_B .

Donnée:

- densité des hydrocarbures : $d_h = 0,85$;
- densité moyenne de la boue ; $d_b = 1,84$;
- intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$;
- masse volumique de l'eau ; $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

Solution

1. La pression est le quotient de la force exercée (égale au poids) par la surface du fond.

Il y a 100 L d'eau :

$$m_{\text{eau}} = V_{\text{eau}} \cdot \rho_{\text{eau}}$$

$$\text{Soit : } m_{\text{eau}} = 110 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 110 \text{ Kg.}$$

Il y a 1,5 L d'hydrocarbures.

$$\text{Soit : } m_h = V_h \cdot \rho_h = V_h \cdot d_h \cdot \rho_{\text{eau}}$$

$$m_h = 1,5 \cdot 10^{-3} \times 0,85 \cdot 10^3 = 1,275 \text{ Kg.}$$

Il y a $160 - 110 - 1,5 = 48,5$ L de boue.

Et donc :

$$m_b = V_b \cdot \rho_b = V_b \cdot d_b \cdot \rho_{\text{eau}}$$

$$m_b = 48,5 \cdot 10^{-3} \times 0,85 \cdot 10^3 = 41,23 \text{ Kg.}$$

La masse totale est :

$$m = m_{\text{eau}} + m_h + m_b$$

$$m = 152,5 \text{ Kg.}$$

Le poids du contenu est :

$$P = m \cdot g = 1525 \text{ N.}$$

La pression exercée est :

$$P = \frac{P}{S}, P = 4766 \text{ N}$$

2. La densité du mélange est le quotient de la masse volumique par celle de l'eau. La masse volumique est :

$$\rho_{\text{mélange}} = \frac{m_{\text{mélange}}}{V_{\text{mélange}}} = \frac{m_{\text{eau}} + m_b}{V_{\text{eau}} + V_h}$$

$$d_{\text{mélange}} = \frac{\rho_{\text{mélange}}}{\rho_{\text{eau}}}$$

Application numérique : $d_{\text{mélange}} = 1,093$

3. B' et C' sont dans l'air.

Donc : $p_{B'} = p_{C'} = p_{\text{atm}}$

B et C sont dans le même plan horizontal, dans le même liquide, donc : $p_B = p_C$

La relation fondamentale s'écrit :

Dans les hydrocarbures :

$$p_{C'} - p_C = \rho_h \cdot g \cdot h_c$$

Dans l'eau :

$$p_{B'} - p_B = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h_B$$

$$p_{B'} - p_B = p_{C'} - p_C$$

$$\text{Donc : } \rho_h \cdot g \cdot h_c = \rho_{\text{eau}} \cdot g \cdot h_B$$

$$\rho_h \cdot h_c = \rho_{\text{eau}} \cdot h_B$$

$$h_c = \frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_h} \cdot h_B = \frac{h_B}{d_h}$$

Application numérique : $h_c = 0,42 \text{ m}$

4.6. Dynamique des fluides parfaits

L'écoulement des fluides est un phénomène complexe. On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse).
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement, Le transport de la quantité de mouvement se fait par l'intermédiaire de la viscosité du fluide (flux visqueux donné par la loi de Newton) ou par le mouvement même du fluide (flux convectif). (Exemple les jets d'eau). [5]

4.6.1. Définitions générales

- Ligne de courant : ligne imaginaire tracée pour indiquer la direction du mouvement, tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse des particules de fluide en ce point.

- Écoulement permanent (stationnaire) : les vitesses sont indépendantes du temps. Donc les lignes de courant le sont, elles représentent donc les trajectoires des particules.
- Écoulement uniforme : la vitesse est la même en tout point du champ d'étude
- Tube de courant : ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour donné.
- Débit : quantité de matière qui traverse une section droite (perpendiculaire au lignes de courant).
- Débit en masse (massique) [9]

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm / dt quand dt tend vers 0.

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

où :

q_m : est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite. (kg/s)

dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt

dt : intervalle de temps en (s) en tenant compte des équations précédentes on obtient [9] :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{dx_1}{dt} = V_1 \text{ et } \frac{dx_2}{dt} = V_2$$

Avec :

V_1 : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_1

V_2 : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_2

D'où :

$$q_m = S_1 V_1 = S_2 V_2$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne v [9] :

$$q_m = \rho S V$$

où :

q_m : Débit massique en (kg/s) ; ρ : Masse volumique en (kg/m³)

S : Section de la veine fluide en (m²) ; V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

- Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport dV / dt quand dt tend vers 0. [9]

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

q_v : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

dV : Volume élémentaire, en (m³), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt ,

dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation précédente, et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$

On peut écrire également que $q_v = \frac{q_m}{\rho}$

En fin

$$q_v = SV$$

- Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

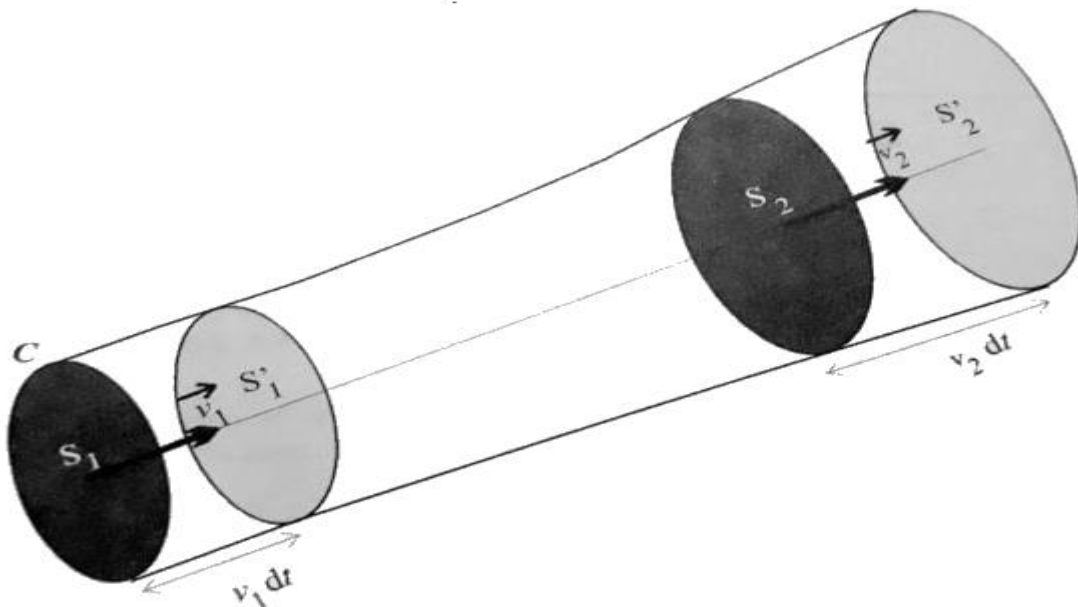
$$q_m = \rho \cdot q_v$$

Dans le cas des liquides, incompressibles (ou presque) la masse volumique est constante, et le débit est qualifié d'isovolume.

Dans le cas des gaz, ils sont compressibles, et la masse volumique dépend de la pression (qui varie avec la vitesse) et de la température. Les débits volumiques sont soit donnés en précisant les conditions de température et de pression, soit ramenés aux CNTP (0°C, 760 mmHg) et on les mesure alors en normo-m³.s⁻¹. [9]

4.7. Conservation du débit massique

On étudie le mouvement d'un ensemble de fluide contenu dans un tube de courant, appuyé sur le contour C, d'aire S₁ et compris, à t entre S₁ et S₂, se déplaçant pendant dt pour être entre S'₁ et S'₂. [9]



La masse de fluide qui à t est entre S₁ et S₂ est à t + dt entre S'₁ et S'₂. La masse qui est entre S'₁ et S₂ ne change pas de propriétés, même s'il ne s'agit pas tout à fait des mêmes particules. Cependant tout se passe comme si l'on voyait passer une masse de S₁/S'₁ à S₂/S'₂

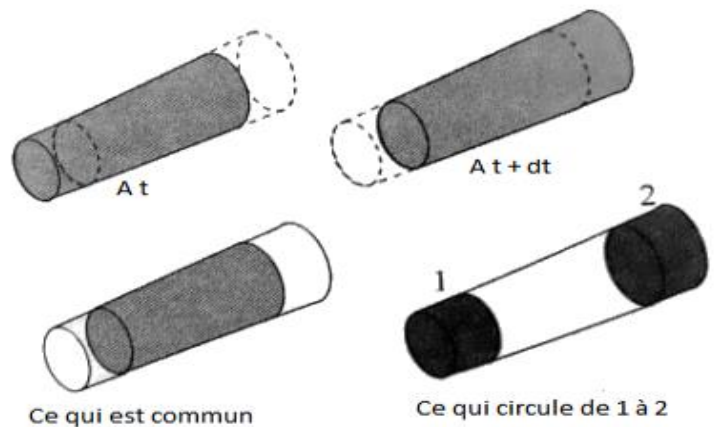
Cette démarche est courante en dynamique des fluides.

Le premier volume est $v_1 \cdot dt \cdot S_1$, le deuxième $v_2 \cdot dt \cdot S_2$. Si les masses volumiques en 1 et 2 sont ρ_1 et ρ_2 , les masses contenues dans ces volumes sont $\rho_1 v_1 \cdot dt \cdot S_1$, et $\rho_2 v_2 \cdot dt \cdot S_2$. Elles sont égales et on peut écrire [9] :

$$\rho_1 v_1 \cdot S_1 = \rho_2 v_2 \cdot S_2$$

Soit $qm_1 = qm_2$

C'est l'équation de continuité : le débit massique est constant.



De même qu'en électricité, la loi des nœuds exprime la conservation des charges, l'équation de continuité exprime que l'ensemble du fluide circule sans pertes de matière et donc de masse. Si l'écoulement est isovolume, on a [9] :

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

Soit

$$qv_1 = qv_2$$

Le débit volumique est constant

- Vitesse moyenne

Dans une conduite, les vitesses sont rarement les mêmes en tous points d'une section droite. On définit alors une vitesse moyenne, ou vitesse de débit volume telle que :

$$v_{\text{moy}} \cdot S = q_v$$

C'est la vitesse qui, à travers la même section S permettrait le même débit. [9]

4.8. Equation de Bernoulli

4.8.1. Conservation de l'énergie

On étudie un tube limité de courant. (une conduite le représente bien). La limite de ce tube est lié à sa dimension latérale : la vitesse doit être la même dans une section droite pour que nos expressions gardent leur validité.

Le système étudié est le fluide compris entre les sections 1 et 2 du tube de courant, qui se déplace dans le sens de 1 vers 2.

Le milieu extérieur est : le reste du liquide : autour du tube, en amont, en aval, la paroi de la conduite si il y en a une.

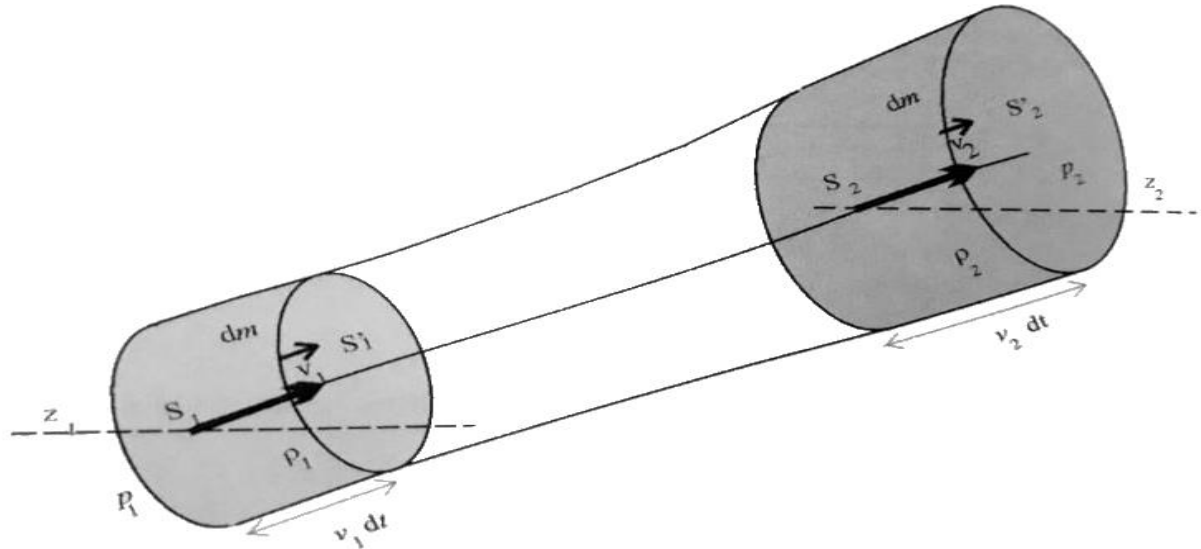
Les actions extérieures sont :

- le poids du fluide ;
- les forces de pression, normales aux parois du tube.

Dans un premier temps, on va négliger l'existence de frottements, et ne pas s'intéresser à l'action sur le fluide de machines (pompe, turbine...).

La vitesse du fluide passe de v_1 à v_2 .

Comme plus haut, on étudie, de t à $t + dt$ l'évolution du fluide : il passe du volume limité par les sections S_1 et S_2 au volume limité par S'_1 et S'_2 . [9]



Mais le volume compris entre S'_1 et S_2 ne subit aucun changement, si ce n'est l'identité des particules qui le remplissent. On peut donc se contenter d'étudier le transfert en dt de la masse dm comprise entre S_1 et S'_1 en une masse identique comprise entre S_2 et S'_2 , et de lui appliquer le théorème de l'énergie mécanique. [9]

La variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} dm.(v_2^2 - v_1^2)$$

Le travail du poids est :

$$W(P) = -dm.g.(z_2 - z_1)$$

Le travail des forces de pression sur les parois latérales est nul (elles sont perpendiculaires au déplacement).

Sur la face 1 (d'aire S_1), la force de pression $p_1.S_1$ s'exerce dans le sens du déplacement, son travail est :

$$W_1 = p_1.S_1.v_1.dt$$

Sur la face 2 la force de pression $p_2.S_2$ s'exerce en sens inverse du déplacement, son travail est:

$$W_2 = - p_2.S_2.v_2.dt$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit ici :

$$\frac{1}{2} dm.(v_2^2 - v_1^2) = p_1.S_1.v_1.dt - p_2.S_2.v_2.dt - dm.g.(z_2 - z_1)$$

La conservation du débit massique qui s'écrit :

$$dm = \rho_1.S_1.v_1.dt = \rho_2.S_2.v_2.dt$$

Permet de transformer cette expression (en divisant par dm) :

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} - g.(z_2 - z_1)$$

Soit en la réorganisant en fonction des indices

$$\left(\frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + g.z_2\right) - \left(\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + g.z_1\right) = 0$$

Cette expression est la première écriture du théorème de Bernoulli, où chacun des termes à la dimension d'une énergie massique et donc d'unité le $J.kg^{-1}$.

Si la masse volumique est constante ($\rho_1 = \rho_2$), on peut encore écrire cette relation :

$$\left(\frac{1}{2}\rho.v_2^2 + p_2 + \rho.g.z_2\right) - \left(\frac{1}{2}\rho.v_1^2 + p_1 + \rho.g.z_1\right) = 0$$

Cette deuxième écriture du théorème de Bernoulli, où chacun des termes a la dimension d'une pression et donc pour unité le Pa.

Si maintenant on divise la première expression par g. on obtient :

$$\left(\frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g} + \frac{p_2}{\rho_2.g} + z_2\right) - \left(\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} + \frac{p_1}{\rho_1.g} + z_1\right) = 0$$

Où chaque terme à la dimension d'une hauteur. L'unité est donc le m.

L'équation de Bernoulli traduit donc la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant, en l'absence de frottements ou de machine (pompe. turbine...). [9]

Selon les formes, l'expression de l'énergie peut être différente :

- Dans la première forme c'est une énergie massique (par unité de masse) : on l'appelle charge massique ou énergie massique totale. Elle se mesure en $J.kg^{-1}$

On peut noter l'équation de Bernoulli dans cette forme :

$$e_{t2} - e_{t1} = 0$$

- Dans la deuxième forme, il s'agit d'une pression (énergie volumique) ; on l'appelle pression totale, notée p_t . Elle se mesure en Pa.

On peut noter l'équation de Bernoulli dans cette forme :

$$p_{t2} - p_{t1} = 0$$

- Dans la troisième forme il s'agit d'une hauteur (énergie par unité de poids). On l'appelle charge ou hauteur manométrique totale et on la note H. Elle se mesure en m (de fluide considéré, et on parle de mètre de colonne de fluide, cette hauteur étant une hauteur liée à la pression exercée par une colonne de ce fluide. [9])

On peut noter l'équation de Bernoulli dans cette forme :

$$H_2 - H_1 = 0$$

Exercice 4

Une conduite Verticale, de diamètre D_1 présente un étranglement de diamètre D_2 . Elle sert à transporter de l'eau de masse volumique ρ_{eau} . L'eau s'écoule de bas en haut et sera considérée dans tout le problème comme un fluide parfait. [9]

Soient deux points A et B du fluide situés à une distance verticale h l'un de l'autre, comme l'indique la figure ci-contre.

L'accélération de la pesanteur (g) est uniforme dans l'espace où se situe la conduite

1. Vannes de la conduite fermée.

En précisant la loi utilisée, exprimer puis calculer la différence de pression $p_A - p_B$

2. Vannes ouvertes, fluide en écoulement.

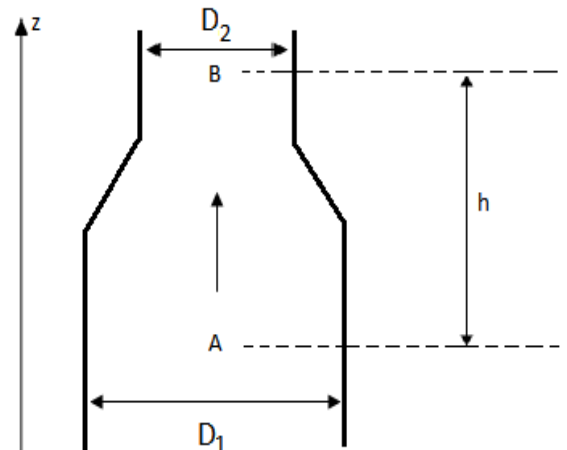
2.1 Le débit volumique de l'eau est noté q_v . Exprimer et calculer son débit massique.

2.2 En utilisant les données de l'énoncé, exprimer puis calculer les vitesses v_A et v_B de l'eau aux points A et B.

2.3 Soit p_A la pression au point A

2.3.1 Exprimer la pression P_B au point B ; calculer la pression p_B et la différence de pression $p_A - p_B$.

2.3.2 Doit-on retrouver la même valeur que dans la partie 1 ?



Données numériques:

- $h = 4,0 \text{ m}$
- $p_A = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;
- $q_v = 85 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$
- $D_1 = 30 \text{ cm}$;
- $D_2 = 20 \text{ cm}$.

Solution

1. les vannes étant fermées, on est dans une situation d'hydrostatique,

On a donc. D'après le principe fondamental de l'hydrostatique :

$$P_A - P_B = \rho g (h_B - h_A) = \rho g h$$

Application numérique:

$$P_A - P_B = 4.10^4 \text{ Pa}$$

2. Vannes ouvertes, fluide en écoulement

2.1 On a : $q_m = \rho \cdot q_v$

Application numérique :

$$q_m = 85 \text{ kg/s}$$

2.2 Il y a conservation du débit volumique. Donc

$$q_v = v_A \cdot S_A = v_A \cdot \pi \cdot \frac{D_1^2}{4} = v_B \cdot S_B = v_B \cdot \pi \cdot \frac{D_2^2}{4}$$

Et $v_A = \frac{4q_v}{\pi D_1^2}$

Application numérique : $v_A = 1,20 \text{ m/s}$

Et $v_B = \frac{4q_v}{\pi D_2^2}$

Application numérique : $v_B = 2,71 \text{ m/s}$

2.3 On écrit l'équation de Bernoulli entre A et B.

$$2.3.1 \quad \left(\frac{1}{2} \rho \cdot v_B^2 + p_B + \rho \cdot g \cdot z_B \right) - \left(\frac{1}{2} \rho \cdot v_A^2 + p_A + \rho \cdot g \cdot z_A \right) = 0$$

Et on dresse le tableau :

	P	v	z
Point A	p_A	$v_A = 1,20 \text{ m/s}$	$z_A = 0$
Point B	p_B	$v_B = 2,71 \text{ m/s}$	$z_B = h$

On en déduit :

$$p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho \cdot (v_A^2 - v_B^2) - \rho \cdot g \cdot h$$

Application numérique: $p_B = 1,29.10^5 \text{ Pa}$

Et $p_A - p_B = \frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2) + \rho \cdot g \cdot h$

Application numérique : $p_A - p_B = 4,12.10^4 \text{ Pa}$

2.3.2 On ne retrouve pas la même valeur que dans la partie 1, à cause du terme de pression dynamique:

$$\frac{1}{2} \rho (v_B^2 - v_A^2).$$

Références

- [1] D. MORVAN et Fr. ROUSSEAU, « GENIE DES PROCEDES - Processus de transfert - transferts massiques, dynamiques et énergétiques. Cours et exercices corrigés », ellipses, Paris (2015) ISBN: 9782340-007789
- [2] M. A. BOUTRA
- [3] Pierre Wuithier, Le pétrole, Raffinage et Génie chimique tome2, 2^e édition, technip Paris 1972.
- [4] J.P. COUDERC, C. GOURDON et A. Liné, «Phénomènes de transfert en génie des procédés», Tech and Doc, Lavoisier 2008
- [5]<http://cours-examens.org/index.php/30-etudes-secondaires/sciences-physiques/64-phenomene-de-transfert-et-application>
- [6] R.B. BIRD, W.E. TEWARTS, N. EDWIN & Lightfoot,, Energy Transport by Radiation in «Transport phenomena (P.520) », Second edition, John Wiley& Sons, New York 2002.
- [7] Treybal, Mass transfer operations, 3rd edition, McGraw-Hill; (1982) ISBN 0-07-066615-6.
- [8] R.B. BIRD, W.E. TEWARTS, N. EDWIN & Lightfoot, Mass transport in « Transport phenomena (P.541-560) », Second edition, John Wiley& Sons, New York 2002.
- [9] D. PICARD, « Mécanique des fluides – BTS industriels », 2^e édition, ellipses, Paris (2015) ISBN: 9782340-006690
- [10] S. AMIROUDINE et J-L. BATTAGLIA, « Mécanique des fluides», 2^e édition, Dunod, Paris (2011,2014) ISBN: 978-2-10-070655-6
- [11] Patrice Bacchin, Polycopie «La physico-chimie en mouvement : phénomènes de transport» Université Paul Sabatier (Toulouse III)-France 2009

Annexes

Tableau A 1. Constantes de LENNARD-JONES

Composé	$\epsilon/k, K$	$\sigma, \text{Å}$	Composé	$\epsilon/k, K$	$\sigma, \text{Å}$
Acétone	560,2	4,600	Éthane	215,7	4,443
Acétylène	231,8	4,033	Éthanol	362,6	4,530
Acide chlorhydrique	344,7	3,339	Éthylène	224,7	4,163
Acide cyanhydrique	569,1	3,630	Fluor	112,6	3,357
Acide iodhydrique	288,7	4,211	Hélium	10,22	2,551
Air	78,6	3,711	n-Hexane	339,3	5,949
Ammoniaque	558,3	2,900	Hydrogène	59,7	2,827
Argon	93,3	3,542	Iode	474,2	5,160
Azote	71,4	3,798	Méthane	188,4	3,758
Benzène	412,3	5,349	Méthanol	481,8	3,626
Brome	507,9	4,296	Mercure	750,0	2,969
n-Butane	330,1	5,278	Monoxyde de carbone	91,7	3,690
Chlorure de méthyle	350	4,182	Oxyde nitrique	116,7	3,492
Chlorure de méthylène	356,3	4,898	Oxyde nitreux	232,4	3,828
Dioxyde de carbone	195,2	3,941	Oxygène	106,7	3,467
Dioxyde de soufre	335,4	4,112	n-Pentane	341,1	5,784
Disulfure de carbone	336	4,130	Propane	237,1	5,118
Eau	809,1	2,641	Propanol	576,7	5,549
Chlore	316	4,217	Propène	298,9	4,678
Chloroforme	340,2	5,389	Sulfure d'hydrogène	301,1	3,623
Cyclohexane	297,1	6,182	Tétrachlorure de carbone	322,7	5,947
Cyclopropane	248,9	4,807			

Tableau A 2. Valeurs des intégrales de collision (obtenues à partir des potentiels de LENNARDJONES)

$\frac{kT}{\epsilon_{AB}}$	Ω_D	$\frac{kT}{\epsilon_{AB}}$	Ω_D	$\frac{kT}{\epsilon_{AB}}$	Ω_D
0,30	2,662	1,65	1,153	4,0	0,8836
0,35	2,476	1,70	1,140	4,1	0,8788
0,40	2,318	1,75	1,128	4,2	0,8740
0,45	2,184	1,80	1,116	4,3	0,8694
0,50	2,066	1,85	1,105	4,4	0,8652
0,55	1,966	1,90	1,094	4,5	0,8610
0,60	1,877	1,95	1,084	4,6	0,8568
0,65	1,798	2,00	1,075	4,7	0,8530
0,70	1,729	2,1	1,057	4,8	0,8492
0,75	1,667	2,2	1,041	4,9	0,8456
0,80	1,612	2,3	1,026	5,0	0,8422
0,85	1,562	2,4	1,012	6	0,8124
0,90	1,517	2,5	0,9996	7	0,7896
0,95	1,476	2,6	0,9878	8	0,7712
1,00	1,439	2,7	0,9770	9	0,7556
1,05	1,406	2,8	0,9672	10	0,7424
1,10	1,375	2,9	0,9576	20	0,6640
1,15	1,346	3,0	0,9490	30	0,6232
1,20	1,320	3,1	0,9406	40	0,5960
1,25	1,296	3,2	0,9328	50	0,5756
1,30	1,273	3,3	0,9256	60	0,5596
1,35	1,253	3,4	0,9186	70	0,5464
1,40	1,233	3,5	0,9120	80	0,5352
1,45	1,215	3,6	0,9058	90	0,5256
1,50	1,198	3,7	0,8998	100	0,5130
1,55	1,182	3,8	0,8942	200	0,4644
1,60	1,167	3,9	0,8888	400	0,4170

Tableau A 3. Valeurs (colonne de gauche) et incréments (colonne de droite) pour le calcul du volume molaire au point d'ébullition normal

Air	29,9	Carbone	14,8
Ammoniac	25,8	Hydrogène	3,7
Azote	31,2	Oxygène en général	7,4
Brome	53,2	dans méthyl s esters et éthers	9,1
Chlore	48,4	dans éthyl esters et éthers	9,9
Dioxyde d'azote	36,4	dans les autres esters et éthers	11,0
Dioxyde de soufre	44,8	dans les acides	12,0
Eau	18,9	lié à S, N ou P	8,3
Hydrogène	14,3	Azote doublement lié	15,6
Hydrogène sulfuré	32,9	dans amine primaire	10,5
Oxygène	25,6	dans amine secondaire	12,0
Monoxyde d'azote	23,6	Brome	27,0
Monoxyde de carbone	30,7	Chlore	24,6
		Fluor	8,7
		Iode	37,0
		Soufre	25,6
		Cycle à trois	- 6,0
		à quatre	- 8,5
		à cinq	- 11,5
		à six	- 15,0
		naphtalène	- 30,0
		anthracène	- 47,5

