Republique Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli de Mascara
Faculté des sciences et technologie
Département du tronc commun sciences et technologie

Polycopié de Cours

Maths 2 (Analyse & Algèbre 2)

Présenté par : **Mohamed Helal**

Ce cours est destiné aux étudiants de premiére année LMD sciences et techniques.

Année universitaire 2021/2022

Table des matières

Avant Propos

Ce cours d'Analyse et Algèbre est destiné surtout aux étudiants de première années LMD Sciences et Technologie, ainsi qu'aux étudiants de premières années LMD Sciences de la matiére et mathématiques et informatique.

Il couvre le programme officiel d'Analyse et d'Algèbre, à savoir :

- ▷ Matrices et déterminants.
- ▷ Systèmes d'équations linéaires.
- ▷ Les intégrales.
- ▷ Les équations différentielles.
- ▷ Les fonctions à plusieurs variables.

Chaque chapitre remet en place les bases indispensables pour aborder des études scientifiques, et introduit quelques notions nouvelles, qui seront pour la plupart traitées au cours de cette année.

Ce cours est traité en détail avec de nombreux exemples. La plupart des théorèmes et propositions sont démontrés.

À la fin de chaque chapitre nous proposons une liste des exercices avec leurs solutions.

Ainsi que des cours que j'ai enseigné de 2017 à 2021 pour les étudiants de première années LMD Sciences et Techniques au sein du Département tronc commun Sciences et Techniques de la Faculté des Sciences et Technologie.

Enfin, des erreurs peuvent être relevées, prière de les signaler à l'auteur.

L'auteur

Chapitre 1

Matrices et déterminants

Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ désigne un corps commutatif, en pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1 Généralités sur les matrices

Définition 1.1.1. *Une matrice $m \times n$ est un tableau de nombres à m lignes et n colonnes. Les nombres qui composent la matrice sont appelés les éléments de la matrice (ou aussi les coefficients). Une matrice à m lignes et n colonnes est dite matrice d'ordre (m, n) ou de dimension $m \times n$.*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Notation 1.

- $(*)$ *L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $M_{m,n}(\mathbb{K})$.*
- $(*)$ *Si $m = n$, la matrice A est dite matrice carrée d'ordre m et l'ensemble des matrices carrées d'ordre m est noté $M_m(\mathbb{K})$.*
- $(*)$ *Une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls (certains éléments de la diagonale peuvent aussi être nuls) est appelée matrice diagonale.*
- $(*)$ *Pour tous $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$, la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont le $(ij)^{me}$ terme vaut 1 et tous les autres sont nuls est appelée matrice élémentaire, on la note E_{ij}.*
- $(*)$ *On définit la trace de la matrice A, notée $tr(A)$ par : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Exemple 1.1.1.

1
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$
est une matrice de 3 *lignes et* 4 *colonnes,* $A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$*, et on a :* $a_{13} = -1$ *et* $a_{31} = \sqrt{2}$.

2
$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & -1 & 0 \\ 2 & -\mathbf{7} & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & -\mathbf{6} \end{pmatrix}$$
est une matrice carrée. La diagonale de la matrice B *est la suite des éléments en gras.*

3
$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \textit{ est une matrice diagonale.}$$

4
$$D = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & \sqrt{7} \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow tr(D) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = -4 + 5 + 3 = 4.$$

1.1.1 Opérations sur les matrices

▷ **Egalité de deux matrices :** soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, on dit que $A = B$ si tous les éléments de A sont égaux aux éléments correspondants de B :
$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq n.$$

Exemple 1.1.2. *On donne,*
$$E = \begin{pmatrix} 2x+3 & 5 \\ 3 & 2y-3 \end{pmatrix} \textit{ et } F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
Déterminons x *et* y *pour que les deux matrices* E *et* F *soient égaux.*
$$E = F \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 = -1 \\ 2y - 3 = 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

▷ **Somme de deux matrices :** soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On définit la somme de A et B et on note $A + B$ la matrice :
$$A + B = (c_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \textit{ tel que } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq n.$$

Exemple 1.1.3.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

▷ **Multiplication d'une matrice par un scalaire :** soient $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le produit de A par λ est la matrice de même dimension que A et dont chaque élément est le produit de λ par l'élément correspondant de A :

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Exemple 1.1.4. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors, } \lambda A = \begin{pmatrix} 4\lambda & a\lambda \\ b\lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.1. *En prenant $\lambda = -1$, on peut définir la matrice opposée d'une matrice A. C'est la matrice $(-1) \times A$ qu'on note aussi $-A$. De même, on définit la soustraction de deux matrices A et B : $A - B = A + (-1) \times B$.*
Exemple 1.1.5. *Soit A et B les matrices définies par :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

L'opposée de B : $-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et la différence de A et B : $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.
Exemple 1.1.6. *On donne : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.*
Soit $X \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $2X + 3A = B$. Déterminer la matrice X.

$$\begin{aligned} 2X + 3A = B &\iff 2X = B - 3A \\ &\iff X = \frac{1}{2}(B - 3A) \\ &\iff X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

▷ **Produit de deux matrices :** soient $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. (C'est à dire le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). On définit alors le produit $A \times B$ la matrice de dimension $m \times p$ obtenue en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B. Plus précisément, le coefficient de la i^{me} ligne et de la j^{me} colonne de $A \times B$ est obtenu en multipliant la i^{me} ligne de A par la j^{me} colonne de B.

$$C = (c_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}) = A \times B \in M_{m,p}(\mathbb{K}) \text{ tel que } C = (c_{ik}) = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

Exemple 1.1.7. *Soient*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\\4&1\end{pmatrix} \text{ et } C=\begin{pmatrix}0&1&2\\5&4&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}A\times B &= \begin{pmatrix}1\times 1+2\times 2+3\times 4 & 1\times 0+2\times 3+3\times 1\\ 4\times 1+5\times 2+6\times 4 & 4\times 0+5\times 3+6\times 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}17&9\\38&21\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B\times A &= \begin{pmatrix}1\times 1+0\times 4 & 1\times 2+0\times 5 & 1\times 3+0\times 6\\ 2\times 1+3\times 4 & 2\times 2+3\times 5 & 2\times 3+3\times 6\\ 4\times 1+1\times 4 & 4\times 2+1\times 5 & 4\times 3+1\times 6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3\\14&19&24\\8&13&18\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\times C &= \begin{pmatrix}1\times 0+2\times 5+3\times 2 & 1\times 1+2\times 4+3\times 1 & 1\times 2+2\times 3+3\times 3\\ 4\times 0+5\times 5+6\times 2 & 4\times 1+5\times 4+6\times 1 & 4\times 2+5\times 3+6\times 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}16&12&17\\37&30&41\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$C\times A$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de C est différent du nombre de lignes de A.

Remarque 1.1.2.

- ∗ *Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit $A\times B$ n'est pas défini.*
- ∗ *En général, et lorsque le produit est bien défini, on a : $A\times B\neq B\times A$.*
- ∗ *Le produit des matrices carrées d'ordre n est toujours défini.*

Définition 1.1.2. *Soit A une matrice carrée d'ordre m et soit p un entier naturel non nul. On note A^p la matrice définie par :*

$$A^p=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{p\ fois\ la\ matrice\ A}.$$

Attention!!! Le calcul de A^2, par exemple, ne consiste pas à élever les éléments de A au carré !

Exemple 1.1.8. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 1.1.1. *Soient A, B et C trois matrices. Lorsque le produit est bien défini, on a :*

(i) $A + B = B + A$, *la commutativité de l'addition matricielle.*
(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$, *l'associativité de l'addition matricielle.*
(iii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \lambda')A = \lambda A + \lambda' A, \quad \lambda(\lambda' A) = (\lambda\lambda')A.$
(iv) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$, *distributivité à gauche de la multiplication des matrices sur l'addition.*
(v) $(A + B) \times C = A \times B + A \times C$, *distributivité à droite de la multiplication des matrices sur l'addition.*
(vi) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$, *associativité de la multiplication matricielle.*
(vii) $tr(A \times B) = tr(B \times A)$.

1.1.2 Les matrices particulières

Définition 1.1.3. *La matrice dont tous les éléments sont nuls est dite matrice nulle :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.4. *On appelle matrice* **identité** *d'ordre m, la matrice carrée dont tous les termes diagonaux a_{ii} sont égaux à 1 et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On la note I_m et on écrit :*

$$I_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : pour toute

$$A \in M_m(\mathbb{R}), \qquad AI_m = I_m A = A.$$

Exemple 1.1.9.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.5. *On appelle matrice* **triangulaire inférieure** *d'ordre m, la matrice carrée dont tous les coeffcients $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.*

Exemple 1.1.10.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 5 & 1 & 0 \\ 7 & 11 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.6. *On appelle matrice* **triangulaire supérieure** *d'ordre m, la matrice carrée dont tous les coeffcients $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.*

Exemple 1.1.11.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.7. *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle* **transposée** *de A la matrice notée ${}^tA$ de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par : ${}^tA = (a_{ji})$.*

Exemple 1.1.12. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \ alors, \ {}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.8. *Une matrice carrée A d'ordre m est dite* **symétrique** *si et seulement si ${}^tA = A$.*

Exemple 1.1.13. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.9. *Une matrice carrée A d'ordre m est dite* **anti-symétrique** *si et seulement si ${}^tA = -A$.*

Exemple 1.1.14. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.10. *Une matrice carrée A d'ordre m est dite* **inversible** *si et seulement si il existe une matrice carrée A' d'ordre m telle que $AA' = A'A = I_m$.*
Si A est inversible alors, A' est unique et appelée inverse de A, notée A^{-1}.

Exemple 1.1.15. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a : $A \in M_3(\mathbb{R})$ donc $A^{-1} \in M_3(\mathbb{R})$, c'est à dire elle est de la forme suivante :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
AA^{-1} = I_3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} & a_{13} + 2a_{23} \\ a_{21} + a_{31} & a_{22} + a_{32} & a_{23} + a_{33} \\ a_{11} + a_{31} & a_{12} + a_{32} & a_1 + a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad (i) \begin{cases} a_{11} + 2a_{21} = 1 \\ a_{21} + a_{31} = 0 \\ a_{11} + a_{31} = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} a_{12} + 2a_{22} = 0 \\ a_{22} + a_{32} = 1 \\ a_{12} + a_{32} = 0 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} a_{13} + 2a_{23} = 0 \\ a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_1 + a_{33} = 1 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad (i) \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{3} \\ a_{21} = \frac{1}{3} \\ a_{31} = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} a_{12} = -\frac{2}{3} \\ a_{22} = \frac{1}{3} \\ a_{32} = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} a_{13} = \frac{2}{3} \\ a_{23} = -\frac{1}{3} \\ a_{33} = \frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1.3.

(i) *Une matrice carrée non inversible est appelée matrice* **singulière**.

(ii) *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a :*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Proposition 1.1.1. *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et on a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Preuve : Il suffit de montrer $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Cela suit de

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}IB^{-1}B^{-1}B = I,$$

et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Proposition 1.1.2.

▷ $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), {}^t({}^tA) = A$.

▷ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$.

▷ $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K}), {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

▷ $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

▷ $\forall A \in M_m(\mathbb{K})$ *inversible*, ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

1.2 Déterminants

Soit $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{K})$, le déterminant de A est l'élément de $\mathbb{K}$, noté $det(A)$ ou $|A|$.

Comment calculer $|A|$?

- Déterminant d'ordre 2 : soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ alors,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemple 1.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = (1 \times 5) - (-2 \times 3) = 11.$$

- Déterminant d'ordre 3 : soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$ alors,

▷ **Première méthode :** développement suivant la première ligne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}^{+} & a_{12}^{-} & a_{13}^{+} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

▷ **Deuxième méthode :** développement suivant la première colonne :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11}^{+} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}^{-} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}^{+} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Exemple 1.2.2. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ *alors,*

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 2^{+} & 1^{-} & 4^{+} \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2[(0)(6) - (5)(7)] - [(3)(6) - (5)(1)] + 4[(3)(7) - (0)(1)] = 1. \end{aligned}$$

Ou

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 2^+ & 1 & 4 \\ 3^- & 0 & 5 \\ 1^+ & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2[(0)(6)-(5)(7)] - 3[(1)(6)-(4)(7)] + [(1)(5)-(4)(0)] = 1. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1. *Il est préférablede calculer le déterminant suivant la rangée (ligne ou colonne) qui contient beaucoup de zéros.*

▷ **Méthode de Sarrus :** voici la formule pour le déterminant :

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Il existe un moyen facile de retenir cette formule, on recopie les deux premières colonnes à droite de la matrice (colonnes grisées), puis on additionne les produits de trois termes en les regroupant selon la direction de la diagonale descendante, et on soustrait ensuite les produits de trois termes regroupés selon la direction de la diagonale montante.

Exemple 1.2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \quad alors, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$det(A) = (2)(0)(6) + (1)(5)(1) + (4)(3)(7) - (1)(0)(4) - (7)(5)(2) - (6)(3)(1) = 1.$

Attention : cette méthode ne s'applique pas pour les matrices de taille supérieure à 3. Nous verrons d'autres méthodes qui s'appliquent aux matrices carrées de toutes tailles et donc aussi aux matrices 3×3.

- Cas général : on note A_{ij} la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la i^{me} ligne et la j^{me} colonne. On appelle déterminant de A développé suivant la i^{me} ligne le scalaire :

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{i+1}a_{i1}det(A_{i1}) + (-1)^{i+2}a_{i2}det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}det(A_{in}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}det(A_{ik}). \end{aligned}$$

On appelle déterminant de A développé suivant la j^{me} colonne le scalaire :

$$\begin{aligned} det(A) &= (-1)^{1+j}a_{1j}det(A_{1j}) + (-1)^{2+j}a_{2j}det(A_{2j}) + \cdots + (-1)^{n+j}a_{in}det(A_{nj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}det(A_{kj}). \end{aligned}$$

Propriétés 1.2.1.

1/ $det(I_m) = 1$.

2/ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall A \in M_m(\mathbb{K}) : det(\alpha A) = \alpha^m det(A)$.

3/ $\forall A, B \in M_m(\mathbb{K}) : det(AB) = det(A)det(B)$.

4/ *A est inversible* $\Longleftrightarrow det(A) \neq 0$ *et* $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$.

5/ $\forall A \in M_m(\mathbb{K}) : det({}^tA) = det(A)$.

6/ $det(A) = 0$ *si A possède deux colonnes (lignes) égaux.*

7/ $det(A) = 0$ *si une des colonnes (lignes) de A est combinaison linéaire de plusieures autres colonnes (lignes).*

8/ *Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne (ligne) une combinaison linéaires d'autres colonnes (lignes).*

9/ *Un déterminant est nul si l'une de ses colonnes (lignes) est nulle.*

Exemple 1.2.4.

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad car \quad L_1 = L_3.$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 13 & -3 \\ 5 & -24 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad car \quad C_1 = C_3.$$

$$(iii) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad car \quad L_3 = 2L_1 \ (Combinaison\ linéaires).$$

Définition 1.2.1. *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{K})$. *On appelle* **cofacteur** *de la place* (i, j) *dans A et on note* c_{ij} *le nombre* $c_{ij} = (-1)^{1+j} det(A_{ij})$, *où* A_{ij} *la matrice d'ordre* $(m-1)$ *déduite de A en supprimant la* i^{me} *ligne et la* j^{me} *colonne.*

Définition 1.2.2. *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{K})$. *On appelle* **comatrice** *de A la matrice carrée d'ordre m définie par :*

$$com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{m1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}.$$

Où c_{ij} *est le cofacteur de la place* (i, j) *dans A.*

Théorème 1.2.1. *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{K})$ *inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \ {}^t[com(A)].$$

Exemple 1.2.5. *Soit la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} si elle existe.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad alors, \quad A^{-1} \quad existe.$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^t[com(A)] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

1.3 Matrices associée à une application linéaires

1.3.1 Les applications linéaires

On dit que l'application $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire si :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^m)^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Exemple 1.3.1.

- *L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z) = (x+2y-4z, 2x+3y+z)$ est une application linéaire car :*
  - $\triangleright$ $f((x,y,z)+(x',y',z')) = f(x+x', y+y', z+z')$

$$\begin{aligned} &= ((x+x')+2(y+y')-4(z+z'), 2(x+x')+3(y+y')+(z+z')) \\ &= ((x+2y-4z)+(x'+2y'-4z'), (2x+3y+z)+(2x'+3y'+z')) \\ &= ((x+2y-4z)+(x'+2y'-4z'), (2x+3y+z)+(2x'+3y'+z')) \\ &= ((x+2y-4z), (2x+3y+z)) + (((x'+2y'-4z'), (2x'+3y'+z')) \\ &= f(x,y,z)+f(x',y',z'). \end{aligned}$$

$$\triangleright\ f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$
$$\begin{aligned} &= (\lambda x+2\lambda y-4\lambda z, 2\lambda x+3\lambda y+\lambda z)\\ &= (\lambda(x+2y-4z),\lambda(2x+3y+z))\\ &= \lambda((x+2y-4z),(2x+3y+z)) = \lambda f(x,y,z).\end{aligned}$$

- *L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :*
$$g(x,y,z) = (x-y, y+2z)$$
est une application linéaire (à vérifier).
- *L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*
$$h(x,y) = |x-y|$$
n'est pas linéaire car $h(X+Y) \neq h(X)+h(Y)$.

On pourra écrire toute application linéaire $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit :

$$f\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \dots & a_{mn}x_n\end{pmatrix}.$$

1.3.2 La matrice associée

La matrice associée à l'application f est :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

On remarque que :

$$f\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.3.2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ x &\longmapsto f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+2z\\ x-y+4z\\ 7x-3z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La matrice associée à l'application f est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 4\\ 7 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

1.4 Application linéaires associée à une matrice

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{une matrice donnée.}$$

L'application linéaire associée à la matrice A définie par :

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire associée à la matrice A est :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+2z \\ x-y+4z \\ 7x-3z \end{pmatrix}.$$

1.5 Changement de base, Matrice de passage

Définition 1.5.1. *Une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de E est dite* **libre** *ou* **linéairement dépendants** *si pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que,*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Exemple 1.5.1. *Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $x_1 = (0,1,3), x_2 = (2,0,-1)$ et $x_3 = (2,0,1)$ sont libres car :*

$$\begin{aligned} \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad &\Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Définition 1.5.2. *Une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de E est dite* **génératrice** *de E ou* **engendre** *E si tout vecteur x de E est une combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ c'est à dire :*

$$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Exemple 1.5.2. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *les deux vecteurs* $x_1 = (2,3)$ *et* $x_2 = (-1,5)$ *est une famille génératrice car :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\begin{aligned} (x,y) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1(2,3) + \alpha_2(-1,5) = (2\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_1 + 5\alpha_2) \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ y = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \dfrac{5x+y}{13} \\ \alpha_2 = \dfrac{-3x+2y}{13} \end{array} \right. \end{aligned}$$

donc (α_1, α_2) *existe pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*.*

Définition 1.5.3. *Une famille de vecteurs* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(E, +, \cdot)$ *est une* **base** *de* E *si elle est à la fois libre et génératrice.*

Exemple 1.5.3. $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$*, en effet :*

(*i*) B_0 *est libre car :* $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.

(*ii*) B_0 *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *car :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Définition 1.5.4. *Soient* B_1, B_2 *deux bases de* E*. On appelle matrice de* **passage** *de* B_1 *à* B_2 *la matrice de* $M_n(\mathbb{K})$ *dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de* B_2 *exprimés dans la base* B_1*, on la note* $Pass(B_1, B_2)$*, c'est à dire, si* $B_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ *et* $B_2 = \{e'_1, e'_2, \cdots, e'_n\}$ *alors,*

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n, \\ e'_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ e'_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n, \end{aligned}$$

et

$$Pass(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5.4. *Soient* $E = \mathbb{R}^3$*,*

$$\begin{aligned} B_1 &= \{e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,1,1)\}, \\ B_2 &= \{e'_1 = (2,1,0), e'_2 = (0,2,1), e'_3 = (1,1,1)\} \end{aligned}$$

deux base de $\mathbb{R}^3$ *(à vérifier).*
Déterminer la matrice de passage de B_1 *à* B_2*, on a :*

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 \\ e'_3 = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ e'_3 = e_3 \end{array} \right.$$

Alors,

$$Pass(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriétés 1.5.1. *Soient B_1, B_2, B_3 trois bases de E, alors,*

1 $Pass(B_1, B_3) = Pass(B_1, B_2) \times Pass(B_2, B_3)$.

2 $Pass(B_1, B_1) = I_n$ *(matrice identité).*

3 $P = Pass(B_1, B_2)$ *est inversible et* $P^{-1} = Pass(B_2, B_1)$.

Exercice 1. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^t, A^tA, AA^t, tr(A^tA)$ *et* $tr(AA^t)$.

Solution :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors, } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}, \qquad AA^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}.$$

$tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 10 + 5 + 16 = 31$ et $tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{2} a_{ii} = 5 + 26 = 31$.

Exercice 2. *Soient A, B et C trois matrices tel que :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On pose $M = 3A + 2B$.

1) *Calculer* $M^2, |M^2|, tr(M^2), f(M)$ *tel que* $f(x) = x^2 + 2x - 15$.

2) *Déduire que M est inversible et calculer son inverse* M^{-1}.

Solution :

$$M = 3A + 2B = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3.$$

1) $M^2 = 9I_3, |M^2| = 729, tr(M^2) = 27, f(M) = M^2 + 2M - 15I_3 = 9I_3 + 6I_3 - 15I_3 = 0$.

2) On a : $M^2 + 2M - 15I_3 = 0 \Longrightarrow M(M + 2I_3) = 15I_3 \Longrightarrow M\left(\frac{M + 2I_3}{15}\right) = I_3$, donc M est inversible et son inverse $M^{-1} = \frac{1}{15}(M + 2I_3) = \frac{1}{3}I_3$

Exercice 3. *Soient A et B deux matrices tels que :*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{16}{3} & -1 \\ 0 & \frac{-4}{3} & 6 \end{pmatrix}.$$

On pose $C = A + \frac{1}{4}B$.

1) *Calculer $C^2, C^3, C^n, S = C + C^2 + C^3 + \cdots + C^n, |C^2|$ et $f(C)$ tel que $f(x) = x^3 + x^2 - 12$.*
2) *Déduire que M est inversible et calculer son inverse C^{-1}.*

Solution :

$$C = A + \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{16}{3} & -1 \\ 0 & \frac{-4}{3} & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

1) $C^2 = 4I_3, C^3 = 8I_3, C^n = 2^n I_3$,
   S est une sommes des termes d'une suite géométrique de terme général $U_n = 2^n$ de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $q = 2$, alors,
   $$\begin{aligned} S = C + C^2 + C^3 + \cdots + C^n &= 2I_3 + 4I_3 + 8I_3 + \cdots + 2^n I_3 \\ &= (2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n)I_3 \\ &= 2(2^n - 1)I_3, \end{aligned}$$
   $|C^2| = 64$ et $f(C) = C^3 + C^2 - 12I_3 = 8I_3 + 4I_3 - 12I_3 = 0$.
2) On a : $C^3 + C^2 - 12I_3 = 0 \Longrightarrow C(C^2 + C) = 12I_3 \Longrightarrow C\left(\frac{C^2 + C}{12}\right) = I_3$.
   Donc C est inversible et son inverse $C^{-1} = \frac{1}{12}(C^2 + C) = \frac{1}{2}I_3$

Exercice 4. *Soient A, B et C trois matrices tels que :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) *Calculer C^2 et déduire C^{-1}.*
2) *Montrer que $AC = CA$ (La commutativité de la multiplication matricielle).*
3) *Calculer B^2 et vérifier que $B = A + 2I_4 + 3C$.*
4) *Déterminer α et β tel que $A^2 + \alpha AC + \beta I_4 = 0$. ($I_4$ est une matrice identité d'ordre 4).*
5) *Déduire que A est inversible et calculer son inverse.*

Solution :

1) Calculer C^2 et déduire C^{-1} :

$$C^2 = C \times C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4.$$

On a : $C \times C^{-1} = I_4$, alors, par identification, on obtient, $C^{-1} = C$.

2) Montrer que $AC = CA$ (La commutativité de la multiplication matricielle) : on a :

$$AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors, la multiplication est commutative.

3) Calculer B^2 et vérifier que $B = A + 2I_4 + 3C$:

$$B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} =1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} A + 2I_4 + 3C &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

4) Déterminer α et β tel que $A^2+\alpha AC+\beta I_4=0$:

$$A^2+\alpha AC+\beta I_4=0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 & 6 \\ -6 & 7 & 6 & -6 \\ -6 & 6 & 7 & -6 \\ 6 & -5 & -6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha & \alpha & -\alpha \\ \alpha & -2\alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & -2\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & \alpha & -2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} 7-2\alpha+\beta & -6+\alpha & -6+\alpha & 6-\alpha \\ -6+\alpha & 7-2\alpha+\beta & 6-\alpha & -6+\alpha \\ -6+\alpha & 6-\alpha & 7-2\alpha+\beta & -6+\alpha \\ 6-\alpha & -6+\alpha & -6+\alpha & 7-2\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

par identification, on obtient,

$$\begin{cases} 7-2\alpha+\beta=0 \\ 6-\alpha=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=6 \\ \beta=5. \end{cases}$$

5) Déduire que A est inversible et calculer son inverse : on a :

$$A^2+6AC+5I_4=0 \iff A(A+6C)=-5I_4 \iff A\left(-\frac{A+6C}{5}\right)=I_4,$$

donc A est inversible et son inverse

$$A^{-1}=\frac{-1}{5}(A+6C)=\frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 2

Systèmes d'équations linéaires

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. *On appelle systèmes d'équations linéaires de m équations et n inconnues un système de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \tag{2.1}$$

où les coefficients a_{ij} et b_i sont données, et où les x_i sont des inconnues dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Peut s'écrire le système (2.1) sous la forme matricielle :

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.1.1.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + 2z = 10 \\ x - y + 4z = -5 \\ 7x - 3z = 11 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Rang d'un système d'équations linéaires

Définition 2.1.2. *Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le nombre maximum de vecteurs colonnes de A qui sont linéairement indépendants et on a : $rg(A) \leq \min(m,n)$.*

Définition 2.1.3. *Le rang d'une matrice A est l'ordre du déterminant non nul, le plus élevé, extrait de A.*

Définition 2.1.4. *On appelle rang du système linéaire (S) le rang de sa matrice associée $rg(S) = rg(A) = rg(f)$.*

Exemple 2.1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

on trouve $|A| = 0$, donc A est de rang $r < 4$. Parmi les matrices d'ordre 3 extraites de A, on trouve

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

de déterminant égal à 2. Il en résulte que $rg(A) = 3$.

Exemple 2.1.3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix},$$

les quatre déterminants d'ordre 3 sont nuls, par contre le déterminant d'ordre 2 extrait de B, on trouve

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

n'est par nul, il en résulte que $rg(B) = 2$.

2.2 Etude de l'ensemble des solutions

Soit le système (2.1) que nous supposons de rang r est écrit de telle façon que le déterminant Δ des coefficients des r premières inconnues et r premières équations soit non nul.

Déterminant caractéristique : on appelle déterminant caractéristique de (2.1) le déterminant de la forme :

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & b_r \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & b_k \end{vmatrix}, \qquad k = r+1, r+2, \cdots, m.$$

- $\triangleright$ Si $r = m = n$, le système (2.1) admet une seule solution.
- $\triangleright$ Si $r < m < n$, le système (2.1) indéterminé à $(n - r)$ paramètres.
- $\triangleright$ Si $r < m$ et si l'un au moins des déterminants caractéristiques de (2.1) non nul, (2.1) n'a pas de solution.
- $\triangleright$ Si $r < m$ et si les déterminants caractéristiques de (2.1) sont nuls, (2.1) réduit aux r équations et se résout comme dans le deuxième cas.

Exemple 2.2.1.

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+2z=-2 \\ x+2y+3z=a \\ 3x+5y+8z=2 \\ 5x+9y+14z=b \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 2 \\ b \end{pmatrix} \iff AX = B.$$

Les quatre déterminants d'ordre 3 *sont nuls, par contre le déterminant d'ordre* 2 *extrait* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ *n'est par nul,* A *est de rang* 2.
Les déterminants caractéristiques :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2a + 4 \qquad et \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 5 & 9 & b \end{vmatrix} = -4a + b + 2.$$

- *Si* $D_1 \neq 0$ *ou* $D_2 \neq 0$ *alors, ce système n'a pas de solution.*
- *Si* $D_1 = D_2 = 0$*, dons ce cas ce système indéterminé à un paramètre* z *:*

$$\left\{\begin{array}{l} x = -3z - 6 \\ y = z + 4 \end{array}\right. \qquad z \in \mathbb{R}.$$

2.3 Les méthodes de résolutions d'un système linéaires

2.3.1 Résolutions par la méthode de Cramer

Soit (S) un système linéaire carré c'est à dire sa matrice A est carrée, avec l'interprétation matricielle $AX = B$. Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par méthode de Cramer.

Nous noterons A_i la matrice A des coefficients dans laquelle on a remplacé la $i^{\text{éme}}$ colonne par la matrice B.

La résolution du système, par la méthode de Cramer, donne

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Exemple 2.3.1.

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -5x + 2y = -2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ça nous donnera

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

et

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = 6, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}} = 14.$$

Alors, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$ *est une solution unique de ce système.*

Exemple 2.3.2.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + 4y - 3z = 3 \\ -2x + 3y - z = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ça nous donnera

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = 2, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = 3.$$

Alors, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *est une solution unique de ce système.*

2.3.2 Résolutions par la méthode de la matrice inverse

Soit (S) un système linéaire carré, avec l'interprétation matricielle : $AX = B$. Si la matrice A est inversible on peut résoudre ce système par la méthode de la matrice inverse comme suit :

$$AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

Exemple 2.3.3.

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -5x + 2y = -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$|A| = 1 \neq 0 \Longleftrightarrow A \textit{ est inversible.}$$

On peut calculer A^{-1} *comme suit :*

$$com(A) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow [com(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ça nous donnera

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[com(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$X = A^{-1}B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.3.4.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + 4y - 3z = 3 \\ -2x + 3y - z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = 20 \neq 0, \quad \textit{alors}, \quad A^{-1} \quad \textit{existe.}$$

On peut calculer A^{-1} *comme suit :*

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ & & \\ +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 0 & -4 & -12 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \ {}^t[com(A)] = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 10 & -4 & 2 \\ 20 & -12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$X = A^{-1}B \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 10 & -4 & 2 \\ 20 & -12 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.3.3 Résolutions par la méthode de Gauss

Le principe de cette méthode est de transformer le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

à un système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases}$$

Application de la méthode de Gauss : pour simplifier le calcule, on pose $n = 3$, alors le système (4.11) devient :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \longrightarrow E_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \longrightarrow E_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \longrightarrow E_3 \end{cases}$$

Etape 1 : élimination de x_1 dans E_2 et E_3

$$\begin{cases} E_1^1 = E_1 \\ E_2^1 = E_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}E_1 \\ E_3^1 = E_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}}E_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \longrightarrow E_1^1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 & \longrightarrow E_2^1 \\ \qquad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 & \longrightarrow E_3^1 \end{cases}$$

Etape 2 : élimination de x_2 dans E_3^1

$$\begin{cases} E_1^2 = E_1^1 \\ E_2^2 = E_2^1 \\ E_3^2 = E_3^1 - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}E_2^1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \longrightarrow E_1^2 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 & \longrightarrow E_2^2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3 & \longrightarrow E_3^2 \end{cases}$$

On obtient alors la solution, en commençant par : $x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}, x_2$ et x_1.

Remarque 2.3.1. *La méthode de Gauss est applicable dans le cas où* $a_{kk}^k \neq 0,\ \forall k \leq n$.

Exemple 2.3.5.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 & \longrightarrow E_1 \\ 4x + 4y - 3z = 3 & \longrightarrow E_2 \\ -2x + 3y - z = 1 & \longrightarrow E_3 \end{cases}$$

Etape 1 : *élimination de x dans E_2 et E_3*

$$\begin{cases} E_1^1 = E_1 \\ E_2^1 = E_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} E_1 = E_2 - 2E_1 \\ E_3^1 = E_3 - \dfrac{a_{31}}{a_{11}} E_1 = E_3 + E_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \longrightarrow E_1^1 \\ -2y - z = -7 \longrightarrow E_2^1 \\ 6y - 2z = 6 \longrightarrow E_3^1 \end{cases}$$

Etape 2 : *élimination de y dans E_3^1*

$$\begin{cases} E_1^2 = E_1^1 \\ E_2^2 = E_2^1 \\ E_3^2 = E_3^1 - \dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} E_1 = E_3^1 + 3E_2^1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \longrightarrow E_1^2 \\ -2y - z = -7 \longrightarrow E_2^2 \\ -5z = -15 \longrightarrow E_3^2 \end{cases}$$

Alors, E_3^2 donne $z = \dfrac{15}{5} = 3, E_2^2$ donne $y = 2$ et E_2^1 donne $x = 1$.

Finalement, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une solution unique de ce système.

Exercice 1. *On considère la matrice C définie par :*

$$C = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le déterminant de C.*
2. *Soit $P(\alpha) = 2\alpha^3 + 8\alpha^2 - 8\alpha - 32$. Calculer $P(2)$.*
3. *Pour quelles valeurs de α, C est inversible.*
4. *On considère le système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Résoudre le systéme (4.11) pour $\alpha \in \mathbb{R} - \{-4, -2, 2\}$ par la méthode de Cramer.

Solution : on considère la matrice C définie par :

$$C = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de C :

$$|C| = (\alpha + 2) \begin{vmatrix} 2\alpha + 2 & 2 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 12 & 2\alpha + 2 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha^3 + 8\alpha^2 - 8\alpha - 32.$$

2. Soit $P(\alpha) = 2\alpha^3 + 8\alpha^2 - 8\alpha - 32$. Calculer $P(2)$: $P(2) = 0$.
3. Les valeurs de α pour que C soit inversible :

$$C \ \ est \ \ inversible \iff |C| \neq 0.$$

$$P(\alpha) = 0 \iff (\alpha - 2)(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0.$$

Par identification ou division Euclidienne, on trouve :

$$\begin{aligned} P(\alpha) = 0 &\iff (\alpha - 2)(2\alpha^2 + 12\alpha + 16) = 0 \\ &\iff (\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha + 4) = 0 \\ &\iff \alpha = 2 \vee \alpha = -2 \vee \alpha = -4. \end{aligned}$$

Par conséquent, C est inversible si $\alpha \in \mathbb{R} - \{-4, -2, 2\}$.

4. On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Résoudre le systéme (4.11) pour $\alpha \in \mathbb{R} - \{-4, -2, 2\}$ par la méthode de Cramer :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2\alpha + 2 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow |C_1| = 2\alpha^2 + 3\alpha - 2,$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & 2 \\ \alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow |C_2| = -\alpha^2 - 13\alpha,$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} \alpha + 2 & 1 & 1 \\ 12 & 2\alpha + 2 & -1 \\ \alpha & 2 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |C_3| = -2\alpha^2 - \alpha + 28.$$

$$x = \frac{|C_1|}{|C|} = \frac{2\alpha^2 + 3\alpha - 2}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha + 4)}, y = \frac{|C_2|}{|C|} = \frac{-\alpha^2 - 13\alpha}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha + 4)},$$
$$z = \frac{|C_3|}{|C|} = \frac{-2\alpha^2 - \alpha + 28}{(\alpha - 2)(\alpha + 2)(\alpha + 4)}.$$

Exercice 2. *Soit la matrice suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer* $A = I_3 - M$ *et* $B = I_3 + M + M^2$. *Rappelons que* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. *Calculer* $A \times B$ *et* $B \times A$.
3. *Déduire que* B *est inversible et donner son inverse.*
4. *Résoudre le système d'équations linéaires suivant :*

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

   (a) *en utilisant la question* 3.
   (b) *en utilisant la méthode de Cramer.*

Solution :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculons $A = I_3 - M$ et $B = I_3 + M + M^2$:

$$A = I_3 - M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} B = I_3 + M + M^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Calculons $A \times B$ et $B \times A$:

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

3. Déduire que B est inversible et donner son inverse B^{-1} : on a :$A \times B = B \times A = I_3$, donc B est inversible ($|B| \neq 0$) et son inverse donné par :

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. On va résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$$

(a) en utilisant la question 3 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) en utilisant la méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4x + 2y + z = 1 \\ -5x - 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a : $|B| \neq 0$ donc ce système admet une seule solution.
Ça nous donnera

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -3, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 8, \; z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -3.$$

Alors, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une solution unique de ce système.

Chapitre 3

Les intégrales

L'origine de la théorie actuelle de l'intégration remonte à l'antiquité avec le souci de la mesure des aires, des longueurs et des volumes, "géomètre" signifie en grec ancien "arpenteur" c'est à dire "celui qui mesure la terre". Trois idées fondent le concept de mesure, la première est la définition de la mesure pour des ensembles simples : $b-a$ pour la longueur du segment $[a, b], L_1L_2$ pour l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent L_1 et $L_2, L_1L_2L_3$ pour le volume d'un parallélépipède rectangle dont les côtés ont pour longueurs L_1, L_2 et L_3. La seconde idée est celle d'addition : la mesure de la réunion de deux ensembles disjoints est égale à la somme des mesures de ces ensembles. La troisième idée est celle de continuité de la mesure : ainsi la longueur du cercle est la limite des longueurs des polygones réguliers inscrits dans ce cercle. C'est cette voie que nous allons suivre pour construire l'intégrale d'une fonction continue : on commence par définir l'intégrale d'une fonction constante, puis celle d'une fonction en escalier et enfin celle d'une limite d'une suite de fonctions en escalier.

La forme moderne de cette construction est due à Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866, et à Jean Gaston Darboux, 1842-1917. La théorie de la mesure trouvera sa forme achevée grâce aux travaux de Henri Léon Lebesgue, 1875-1941.

On cherche dans ce chapitre à construire l'opérateur réciproque de l'opérateur de dérivation.

3.1 Intégrale indéfinie, propriété

Définition 3.1.1. *Soit f une fonction continue sur I. On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si et seulement si la dérivée de F donne $f(F' = f)$. On prend alors l'habitude de noter toute primitive de f sous forme :*

$$F(x) = \int f(x)dx$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f.

Exemple 3.1.1. *Soit* $f : \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ *définie par :*

$$f(x) = x^3 + 1 - \frac{2}{(2x+3)^2}.$$

Alors, $F : \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ *définie par :*

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + \frac{1}{2x+3}$$

est une primitive de f.
La fonction définie par :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x - \sqrt{3} + \frac{1}{2x+3}$$

est aussi une primitive de f.

Remarque 3.1.1. *La primitive d'une fonction s'il existe n'est pas unique.*

3.1.1 Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$e^{nx},\ n \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{n}e^{nx} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$
$\tan(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$	$\cot(ax+b)$	$\frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$	$\cosh x$	$\sinh x + c$
$\tanh x$	$\ln(\cosh x) + c$	$\coth x$	$\ln(\sinh x) + c$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\lvert\tan\frac{x}{2}\rvert + c$	$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\lvert\tan(\frac{x}{2} + \frac{\Pi}{4})\rvert + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sinh x}$	$\ln\lvert\tanh\frac{x}{2}\rvert + c$	$\frac{1}{\cosh x}$	$2\arctan e^x + c$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\cot x + c$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\lvert\frac{1+x}{1-x}\rvert + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+\alpha}\rvert + c$
$f'(x)f^n(x)$	$\frac{1}{n+1}f^{n+1}(x) + c$	$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$	$\arcsin f(x) + c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert + c$	$\frac{f'(x)}{f^n(x)},\ n \geq 2$	$\frac{-1}{n-1}f^{n-1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

Proposition 3.1.1. *Soient f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

▷ $\displaystyle\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

▷ $\displaystyle\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$

Exemple 3.1.2. *c est une constante réelle.*

- $$\begin{aligned} I_1 = \int \left(x^4 - \sqrt{x^3} + x + \sqrt{2}\right) dx &= \int \left(x^4 - x^{\frac{3}{2}} + x + \sqrt{2}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \sqrt{2}x + c. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} I_2 = \int \frac{x^4 - 3x^2 + 4}{x^2} dx &= \int \left(x^2 - 3 + \frac{4}{x^2}\right) dx \\ &= \tfrac{1}{3}x^3 - 3x - \tfrac{4}{x} + c. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} I_3 &= \int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}} + x^{-\frac{3}{4}}\right) dx \\ &= \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 4x^{\frac{1}{4}} + c = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3} - \tfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + 4\sqrt[4]{x} + c. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} I_4 &= \int (2x+5)^7 dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+5)^7 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}(2x+5)^8\right] + c \\ &= \tfrac{1}{16}(2x+5)^8 + c. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{x}{(3x^2-5)^3} dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{(3x^2-5)^3} dx = \frac{1}{6}\left[\frac{-1}{2(3x^2-5)^2}\right] + c \\ &= \tfrac{-1}{12(3x^2-5)^2} + c. \end{aligned}$$
- $$I_6 = \int \frac{dx}{(3x-4)^5} = \frac{1}{3}\int \frac{3}{(3x-4)^5} dx = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{4(3x-4)^4}\right] + c = \frac{-1}{12(3x-4)^4} + c.$$
- $$I_7 = \int \frac{-2x-1}{x^2+x-2} dx = -\int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx = \ln(x^2+x-2) + c.$$
- $$I_8 = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = 2\int \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} dx = 2\sqrt{x^2+x+1} + c.$$

3.1.2 Méthodes des intégrations

1. **Intégration par parties :**

   Théorème 3.1.1. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a :*
   $$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

   Preuve : on a : $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ et on intègre, alors,
   $$\begin{aligned} &\int [u(x)v(x)]'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \\ \Longleftrightarrow\ & u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x))dx \\ \Longleftrightarrow\ & \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x))dx. \end{aligned}$$

   Remarque 3.1.2. *On utilise l'intégration par parties dans le cas où la fonction à intégrer est une fonction élémentaire ou produit des fonctions élémentaires suivantes :*

fonctions trigonométriques, polynômes, fonctions inverses des fonctions trigonométriques, $\ln[f(x)], e^{f(x)}, \cdots$
La méthode de l'intégration par parties s'emploie fréquemment dans le calcul des intégrales de la forme : $\int x^k \sin x dx, \int x^k \cos x dx, \int x^k \ln x dx, \int x^k e^{ax} dx.$
Ou bien dans les formules de réduction qui introduits pour chaque intégrale une nouvelle intégrale, de même forme que l'intégrale initiale, mais ayant un exposant réduit ou augmenté.

Exemple 3.1.3.

(a) *Calculons* $\int x^n \ln x dx$. *On pose :*

$$u(x) = \ln x \Longleftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad v'(x) = x^n \Longleftrightarrow v(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.$$

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b) *Calculons* $\int x \sin x dx$. *On pose :*

$$u(x) = x \Longleftrightarrow u'(x) = 1, \qquad v'(x) = \sin x \Longleftrightarrow v(x) = -\cos x.$$

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + c \\ &= x(\sin x - \cos x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(c) $\int \ln(ax+b)dx$. *On pose :*

$$u'(x) = 1 \Longleftrightarrow u(x) = x, \qquad v(x) = \ln(ax+b) \Longleftrightarrow v'(x) = \frac{a}{ax+b}.$$

$$\begin{aligned}\int \ln(ax+b)dx &= x\ln(ax+b) - \int \frac{ax}{ax+b}dx \\ &= x\ln(ax+b) - \int \left[\frac{ax+b}{ax+b} - \frac{b}{ax+b}\right]dx \\ &= x\ln(ax+b) - x + \frac{b}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx \\ &= x\ln(ax+b) - x + \frac{b}{a}\ln(ax+b) + c \\ &= \left(x + \frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(d) $\int \arctan x$. *On pose :*

$$u'(x) = 1 \Longleftrightarrow u(x) = x, \qquad v(x) = \arctan x \Longleftrightarrow v'(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\begin{aligned} \int \arctan x dx &= x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. **Changement de variable :**
si le calcul de $\int f(x)dx$ s'avère difficile, on remplace x par $\varphi(t)$ dérivable et donc $dx = \varphi'(t)dt$ et on aura :

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Exemple 3.1.4.

(a) *Pour calculer l'intégrale* $\int (x+3)^4 dx$, *remplaçons* $x+3$ *par* t. *Ce qui donne* $x = t-3 \Rightarrow dx = dt$. *Alors,*

$$\int (x+3)^4 dx = \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + c = \frac{1}{5}(x+3)^5 + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(b) *Calculons* $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$. *On pose :*

$$t = \sin x \Longleftrightarrow dt = \cos x dx \Longleftrightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}.$$

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int t^{\frac{1}{2}} \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) *Calculons* $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$. *On pose :*

$$t = \cos x \Longleftrightarrow dt = -\sin x dx \Longleftrightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}.$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{t} \frac{dt}{-\sin x} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + c = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(d) *Calculons* $\int \tan^3 x dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x} dx$. *On pose :*

$$t = \cos x \Longleftrightarrow dt = -\sin x dx \Longleftrightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}.$$

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x dx &= \int \frac{(1-t^2)\sin x}{t^3}\frac{dt}{-\sin x} = -\int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t} \\ &= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + c = -\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(e) Calculons $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}dx$. *On pose :*

$$t = \sin x \Longleftrightarrow dt = \cos x dx \Longleftrightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin^4 x}dx &= \int \frac{(1-t^2)\cos x}{t^4}\frac{dt}{\cos x} \\ &= \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + c \\ &= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3.2 Intégration des fonctions rationnelles

Une fonction fraction où fonction rationnelle est une fonction $f(x)$ quotient de deux fonctions polynômes $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Exemple 3.2.1.

$$f_1(x) = \frac{1}{x^3+1}, \qquad f_2(x) = \frac{x+2}{x^3+3}, \qquad f_3(x) = \frac{x+3}{(x-1)^4(x^2-2x+3)^3}.$$

3.2.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur $\mathbb{R}$

▷ 1^{er} **cas :** si $deg\ (P) < deg\ (Q)$.
Soit $Q(x) = (x-a)^k(x-b)^m \cdots (x-c)^n(x^2+px+q)^t \cdots (x^2+rx+s)^l$ avec $a, b, \cdots, c$ sont des racines réelles et les polynômes de deuxiéme dégrés n'admet pas des solutions ($\Delta_1 = p^2-4q < 0$ et $\Delta_2 = r^2-4s < 0$). Alors,

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \\ &+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3} \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m} \\ &+ \frac{C_1}{x-c} + \frac{C_2}{(x-c)^2} + \frac{C_3}{(x-c)^3} \cdots + \frac{C_n}{(x-c)^n} \\ &+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \frac{M_3x+N_3}{(x^2+px+q)^3} \cdots + \frac{M_\ell x+N_\ell}{(x^2+px+q)^\ell} \\ &+ \frac{U_1x+V_1}{x^2+rx+s} + \frac{U_2x+V_2}{(x^2+rx+s)^2} + \frac{U_3x+V_3}{(x^2+rx+s)^3} \cdots + \frac{U_tx+V_t}{(x^2+rx+s)^t}.\end{aligned}$$

Exemple 3.2.2.

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^5-x^2} = \frac{1}{x^2(x^3-1)} = \frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+e}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(a+c+d)x^4 + (b+c-d+e)x^3 + (-a+c-e)x^2 - b}{x^5-x^2}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient,

$$\begin{cases} a+c+d=0, \\ b+c-d+e=0, \\ -a+c-e=0, \\ -b=1, \end{cases} \iff \begin{cases} a=0, \\ b=-1, \\ c=e=\frac{1}{3} \\ d=\frac{-1}{3}. \end{cases}$$

Alors,

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)}.$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2 + (-a-3b)x - 2a + 2b - c}{(x^2-1)(x-2)}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient,

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ -a-3b=1, \\ -2a+2b-c=0, \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{1}{6}, \\ c=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Alors,

$$g(x) = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x+2)}.$$

3.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} = \frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-2a-b+c)x + a}{x^3-2x^2+x}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient,

$$\begin{cases} a+b=2, \\ -2a-b+c=-3, \\ a=3, \end{cases} \iff \begin{cases} a=3, \\ b=-1, \\ c=2. \end{cases}$$

Alors,

$$h(x)=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Donc il suffit de connaitre les valeurs des intégrales de ces types pour déduire celles des intégrales des rationnelles.

▷ 2^{me} **cas :** si $deg\ (P) \geq deg\ (Q)$.

On dévise $P(x)$ par $Q(x)$ de telle sorte que le reste $R(x)$ ait $deg\ (R) < deg\ (Q)$. Si $S(x)$ la solution de la dévision, alors, $P(x)=Q(x)\cdot S(x)+R(x)$. Finalement,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

où $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ se traite comme 1^{re} cas.

Exemple 3.2.3.

1.

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

2.

$$g(x) = \frac{x^6+2x^4+2x^3-1}{x(x^2+1)^2}=x+\frac{2x^3-x^2-1}{x(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{2x^3-x^2-1}{x(x^2+1)^2} &= \frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}+\frac{dx+e}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^4+cx^3+(2a+b+d)x^2+(c+e)x+a}{x(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient,

$$\begin{cases} a+b=0, \\ c=2, \\ 2a+b+d=-1, \\ c+e=0, \\ a=-1, \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1, \\ b=1, \\ c=2, \\ d=0, \\ e=-2. \end{cases}$$

Alors,

$$g(x)=x-\frac{1}{x}+\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{2}{(x^2+1)^2}.$$

3.

$$h(x) = \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$$

$$\begin{aligned}\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} &= \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2+(-5a-3b-2c)x+6a}{x^3-5x^2+6x}.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient,

$$\begin{cases} a+b+c=5, \\ -5a-3b-2c=-6, \\ 6a=1, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6}, \\ b=\frac{-9}{2}, \\ c=\frac{28}{3}. \end{cases}$$

Alors,

$$h(x) = 1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}.$$

4.

$$k(x) = \frac{x^4}{x^4+3x^2+2} = 1 + \frac{-3x^2-2}{x^4+3x^2+2}$$

$$\begin{aligned}\frac{-3x^2-2}{x^4+3x^2+2} &= \frac{-3x^2-2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{ax+b}{x^2+1} + \frac{cx+d}{x^2+2} \\ &= \frac{(a+c)x^3+(b+d)x^2+(2a+c)x+2b+d}{x^4+3x^2+2}.\end{aligned}$$

Par identification, on obtient,

$$\begin{cases} a+c=0, \\ b+d=-3, \\ 2a+c=0, \\ 2b+d=-2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=1, \\ c=0, \\ d=-4. \end{cases}$$

Alors,

$$k(x) = 1 + \frac{1}{x^2+1} - \frac{4}{x^2+2}.$$

3.2.2 Intégration du type $\int \frac{dx}{x-a}, \int \frac{dx}{(x-a)^k}$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + c, & \text{si } k=1 \\ \dfrac{-1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + c, & \text{si } k \geq 2. \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.2.4.

1. *Calculons* $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x^2-1)(x-2)}dx &= -\int \frac{dx}{2(x-1)} - \int \frac{dx}{6(x+1)} + \int \frac{2dx}{3(x+2)} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+2} \\
&= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2. *Calculons* $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx &= \int \frac{3dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{2dx}{(x-1)^2} \\
&= 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} \\
&= 3\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3. *Calculons* $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx &= \int dx + \int \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx \\
&= \int dx + \int \frac{dx}{6x} - \int \frac{9dx}{2(x-2)} + \int \frac{28dx}{3(x-3)} \\
&= \int dx + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{28}{3}\int \frac{dx}{x-3} \\
&= x + \frac{1}{6}\ln|x| - \frac{9}{2}\ln|x-2| + \frac{28}{3}\ln|x-3| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4. *Calculons* $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx.$ *(Par changement de variable).*
   On pose :

$$t = \cos x \Longleftrightarrow dt = -\sin x dx \Longleftrightarrow dx = -\frac{dt}{\cos x}.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos x)}dx &= -\int \frac{dt}{t(t+1)} \\
&= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1} = -\ln|t| + \ln|t+1| + c \\
&= \ln\left|\frac{t+1}{t}\right| + c = \ln\left|1 + \frac{1}{\cos}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

3.2.3 Intégration du type $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$

On remarque que $x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$, si on pose $x+\frac{p}{2} = t$ et $q-\frac{p^2}{4} = \alpha^2 > 0$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx &= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+\alpha^2}dt \\
&= M\int \frac{tdt}{t^2+\alpha^2} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+\alpha^2} \\
&= \frac{M}{2}\ln|t^2+\alpha^2| + \frac{2N-Mp}{2\alpha}\arctan\frac{t}{\alpha} + c \\
&= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{2\alpha}\arctan\frac{2x+p}{2\alpha} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.5.

1. *Calculons* $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx &= \int (x+3)dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ln|x^2+2| + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. *Calculons* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^2}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^5-x^2} &= -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln|x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + c, \;\; c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3. *Calculons* $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+3x^2+2}dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{x^4+3x^2+2}dx &= \int dx + \int \frac{-3x^2-2}{x^4+3x^2+2}dx \\ &= \int dx + \int \frac{dx}{x^2+1} - 4\frac{dx}{x^2+2} \\ &= x + \arctan x - 2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3.2.4 Intégration du type $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\ell}dx$

Si on pose comme ci-dessus, $x + \frac{p}{2} = t$ et $q - \frac{p^2}{4} = \alpha^2 > 0$, on obtient :

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\ell}dx = M\int \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^\ell} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^\ell}.$$

Etudiions séparément les deux intégrales obtenues dans le second membre.
La premièr se calcule de manière très simple :

$$\int \frac{tdt}{(t^2+\alpha^2)^\ell} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+\alpha^2)^\ell} = \frac{-1}{2(\ell-1)(t^2+\alpha^2)^{\ell-1}}.$$

le calcule de la seconde intégrale est un peu plus compliqué. Soit

$$I_\ell = \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^\ell}, \qquad \ell = 1, 2, 3, \cdots$$

Si on intègre par parties, en posant,

$$u(t) = \frac{1}{(t^2+\alpha^2)^\ell} \Longleftrightarrow u'(t) = \frac{2\ell t}{(t^2+\alpha^2)^{\ell+1}}, \qquad v'(t) = 1 \Longleftrightarrow v(t) = t.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_\ell &= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^\ell} + 2\ell \int \frac{t^2}{(t^2+\alpha^2)^{\ell+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^\ell} + 2\ell \int \frac{(t^2+\alpha^2)-\alpha^2}{(t^2+\alpha^2)^{\ell+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^\ell} + 2\ell \left[\int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^\ell} - \alpha^2 \int \frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^{\ell+1}} \right] + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$I_\ell = \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^\ell} + 2\ell I_\ell - 2\ell\alpha^2 I_{\ell+1}.$$

Ainsi, on obtient la relation de récurrence :

$$I_{\ell+1} = \frac{1}{2\ell\alpha^2} \frac{t}{(t^2+\alpha^2)^\ell} + \frac{2\ell-1}{2\ell\alpha^2} I_\ell \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

qui nous permet de calculer I_ℓ pour $\ell > 1$, sachant que I_1 est facile à calculer ($I_1 = \arctan \frac{t}{\alpha}$).

Exemple 3.2.6.

1) *Calculons* $\int \frac{x^6+2x^4+2x^3-1}{x(x^2+1)^2} dx$ *:*

$$\int \frac{x^6+2x^4+2x^3-1}{x(x^2+1)^2} = \int x dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+1} dx &= \int \frac{x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + 2 \arctan x + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On peut calculer

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

par l'utilisation de la relation de récurrence $(*)$ *avec*

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

on obtient,

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^6+2x^4+2x^3-1}{x(x^2+1)^2} &= \int x dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+2}{x^2+1}dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{\ln|x^2+1|}{2} + 2\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} \\ &\quad + \frac{\arctan x}{2} + c \\ &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{\ln|x^2+1|}{2} + \frac{5\arctan x}{2} \\ &\quad + \frac{x}{2(x^2+1)} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) *Calculons* $\int \frac{3x+6}{(x^2+x+1)^2}dx$ *:*

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+6}{(x^2+x+1)^2}dx &= 3\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+x+1)^2}dx \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx + \frac{9}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx.\end{aligned}$$

▷ *Calculons* $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$ *:*

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \frac{-1}{x^2+x+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

▷ *Calculons* $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx$ *:*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2}dx &= \int \frac{1}{[(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]^2}dx = \int \frac{1}{(t^2+\frac{3}{4})^2}dt \\ &= \int \frac{1}{[\frac{3}{4}(\frac{4t^2}{3}+1)]^2}dt = \frac{16}{9}\int \frac{1}{[(\frac{2t}{\sqrt{3}})^2+1]^2}dt \\ &= \frac{16}{9}\frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{ds}{(s^2+1)^2}, \text{ par changement de variable } s = \frac{2t}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

On peut calculer

$$I_2 = \int \frac{1}{(s^2+1)^2}ds$$

par l'utilisation de la relation de récurrence $(*)$ *avec*

$$I_1 = \int \frac{1}{s^2+1}ds = \arctan s + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

on obtient,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}I_1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\arctan s + c \\ &= \frac{1}{2}\frac{2t}{\sqrt{3}\left(\frac{4t^2}{3}+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}} + c \\ &= \frac{2x+1}{2\sqrt{3}\left(\frac{4(x+\frac{1}{2})^2}{3}+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int \frac{3x+6}{(x^2+x+1)^2}dx = \frac{-1}{x^2+x+1} + \frac{2x+1}{2\sqrt{3}\left(\frac{4(x+\frac{1}{2})^2}{3}+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3.3 Intégration des fonctions exponentielles et trigonométriques

3.3.1 Intégration des fonctions exponentielles

▷ Calculer les primitives de la forme $\int f(e^x)dx$, on peut choisir le changement de variable $e^x = t, dx = \frac{dt}{e^x}$ donc

$$\int f(e^x)dx = \int \frac{1}{t}f(t)dt.$$

Exemple 3.3.1.

1. $\int \frac{e^x}{e^x+2}dx = \int \frac{1}{t}\frac{t}{t+2}dt = \ln|t+2| + c = \ln|e^x+2| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$
2.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5\cosh + 3\sinh + 4} &= \int \frac{dx}{5(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) + 3(\frac{e^x-e^{-x}}{2}) + 4} = \int \frac{e^x}{4e^{2x}+e^x+1}dx \\ &= \int \frac{1}{t}\frac{t}{4t^2+t+1}dt = \int \frac{dt}{(2t+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{(2t+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2t+1}\right) + c = \frac{-1}{4e^x+2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

▷ Calculer les primitives de la forme $I_n = \int x^n e^x dx$, on utilise l'intégrale par partie comme suite :

$$u(x) = x^n \Longleftrightarrow u'(x) = nx^{n-1}, \qquad v'(x) = e^x \Longleftrightarrow v(x) = e^x.$$

Alors,

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}.$$

Exemple 3.3.2. *Calculons* $\int x^2 e^x dx$. *(Intégration par partie). On pose :*

$$u(x) = x^2 \Longleftrightarrow u'(x) = 2x, \qquad v'(x) = e^x \Longleftrightarrow v(x) = e^x.$$

Alors,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x dx - 2\int xe^x dx.$$

Calculons maintenant $\int xe^x dx$. *On pose :*

$$u(x) = x \Longleftrightarrow u'(x) = 1, \qquad v'(x) = e^x \Longleftrightarrow v(x) = e^x.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx \quad &\Longleftrightarrow \quad \int xe^x dx = xe^x - e^x + c \\ &\Longleftrightarrow \quad \int xe^x dx = (x-1)e^x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x dx - 2[(x-1)e^x] + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3.3.2 Intégration des fonctions trigonométriques

Le calcule des primitives des fonctions trigonométriques nécessite une bonne connaissance des formules de trigonométrie.

Exemple 3.3.3. *Calculons* $I = \int \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx$. *On a :*

$$I = \int \frac{\sin(2x)}{\sin^2 x - 5\sin x + 6)} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} dx$$

Posons :

$$t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2t}{t^2-5t+6}dt \\
&= \int \frac{2t-5}{t^2-5t+6}dt + 5\int \frac{1}{t^2-5t+6}dt \\
&= \ln|t^2-5t+6| + 5\int \left[\frac{-1}{t-2} + \frac{1}{t-3}\right] dt \\
&= \ln|t^2-5t+6| - 5\ln|t-2| + 5\ln|t-3| + c \\
&= \ln|\sin^2 x - 5\sin x + 6| + 5\ln\left|\frac{\sin x - 3}{\sin x - 2}\right| + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

▷ Calculer les primitives de la forme $\int f(\sin x, \cos x, \tan x)dx$:
on peut choisir le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, donc on obtient :

$$\begin{cases} dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

Alors,

$$\int f(\sin x, \cos x, \tan x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Preuve :

• On a :

$$\begin{aligned}
t = \tan\frac{x}{2} &\iff \frac{x}{2} = \arctan t \\
&\iff x = 2\arctan t \\
&\iff dx = \frac{2}{t^2+1}dt.
\end{aligned}$$

• On a :

$$\begin{aligned}
x = 2\arctan t &\iff \sin x = \sin(2\arctan t) \\
&\iff \sin x = 2\sin(\arctan t)\cos(\arctan t) \\
&\iff \sin x = 2\tan(\arctan t)\cos^2(\arctan t) \\
&\iff \sin x = 2t\cos^2(\arctan t) \\
&\iff \sin x = 2t\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{2t}{1+t^2},
\end{aligned}$$

car

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha\cos\alpha,$$

et

$$1+\tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2}.$$

- On a :

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exemple 3.3.4.

1. *Calculons* $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ *:*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^3 x} &= 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3}dt\\ &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{2}{t}+t\right)dt\\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2t^2}+2\ln|t|+\frac{1}{2}t^2\right)+c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. *Calculons* $\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$ *:*

on a : $t=\tan\frac{x}{2}$*, donc si* $x=\frac{\Pi}{2}$*, alors* $t=-1$ *et si* $x=0$*, alors* 0*.*

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\Pi}{2}}^{0}\frac{dx}{1-\sin x} &= 2\int_{-1}^{0}\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\\ &= 2\int_{-1}^{0}\frac{1}{(1-t)^2}dt\\ &= -2\left[\frac{-1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 1.\end{aligned}$$

▷ Calculer les primitives de la forme $\int \sin^n x\cos^m x dx$:

on peut choisir le changement de variable $\sin x = t, \cos x = \sqrt{1-t^2}, dx = \frac{dt}{\cos x}$, donc on obtient :

$$\int \sin^n x\cos^m x dx = \int t^n(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}dt.$$

Exemple 3.3.5. $\int \sin^2 x\cos^3 x dx = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + c, \quad c\in\mathbb{R}.$

3.4 L'intégrale des polynômes

Définition 3.4.1. *Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C})$ est une expression de la forme :*

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

avec $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{K}$.

- ▷ *L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.*
- ▷ *Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme.*
- ▷ *On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a_i\neq 0$, on le note $degP$.*

On a :

$$\begin{aligned}\int P(x) &= \int a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\\ &= \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\frac{a_{n-2}}{n-1}x^{n-1}\cdots+\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x+c, \qquad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Exemple 3.4.1. $\int(x^3-x^2+2x+3)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+c, \quad c\in\mathbb{R}.$

3.5 Intégration définie

Définition 3.5.1. *Soit f une fonction continue sur $I=[a,b]$. L'intégrale définie de f entre a et b est le nombre réel défini par :*

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a),$$

où F est une primitive de f sur I.

Propriétés 3.5.1. *Soient f et g sont des fonctions en escalier positive sur $[a,b]$, on a :*

- $\int_a^b f(x)dx\geq 0.$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,dx.$
- *Si k est un réel positif vérifiant $|f(x)|\leq k$ sur $[a,b]$, alors,* $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq k(b-a).$
- *Si $f\geq g$, alors,* $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx.$
- *Si $c\in[a,b]$, alors,* $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$

Exemple 3.5.1.

1. *Calculons* $\int_0^{\Pi} \cos(2x)dx$ *:*

$$\int_0^{\frac{\Pi}{4}} \cos(2x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\Pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\Pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{1}{2}.$$

2. *Calculons* $\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ *:*

$$\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = -\left[\frac{-1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\Pi}{3}} = -\left[\frac{-1}{\cos\frac{\Pi}{3}} + \frac{1}{\cos 0}\right] = 1.$$

Interprétation géométrique :

▷ Aire d'un domaine compris entre deux courbes : soient f et g deux fonctions continues telles que $f(x) \leq g(x)$ sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire algébrique du domaine délimité par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

▷ Calcul de volumes, dans l'espace muni du repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'unité de volume est le volume du pavé droit construit à partir des points O, I, J et K avec $\overrightarrow{OI} = \vec{i}, \overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$. Soit Σ un solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ avec $a < b$.
Si l'intersection de Σ avec un plan de côte z est une surface dont l'aire est donnée par $S(z)$, alors le volume de Σ est

$$V = \int_a^b S(z)dz.$$

Exercice 1. *Soient*

$$I_1 = \int_0^{\Pi} (x\cos x)^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{\Pi} (x\sin x)^2 dx.$$

1. *Calculer* $I_1 + I_2$ *et* $I_1 - I_2$*.*
2. *Déduire* I_1 *et* I_2*.*

Solution :

1. Calculons $I_1 + I_2$ et $I_1 - I_2$:
   ▷ Calculons $I_1 + I_2$:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_0^{\Pi} (x\cos x)^2 dx + \int_0^{\Pi} (x\sin x)^2 dx \\ &= \int_0^{\Pi} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\Pi} = \frac{\Pi^3}{3}. \end{aligned}$$

▷ Calculons $I_1 - I_2$:

$$I_1 - I_2 = \int_0^{\Pi} (x\cos x)^2 dx - \int_0^{\Pi} (x\sin x)^2 dx = \int_0^{\Pi} x^2 \cos 2x dx.$$

Par l'intégration par partie deux fois, posons :

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x, \quad dv = \cos(2x) \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

$$I_1 - I_2 = \left[\frac{1}{2}x^2\sin(2x)\right]_0^{\Pi} - \int_0^{\Pi} x\sin(2x)dx,$$

posons :

$$u = x \Rightarrow du = 1, \quad dv = \sin(2x) \Rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \left[\frac{1}{2}x^2\sin(2x)\right]_0^{\Pi} + \left[\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\Pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\Pi}\cos(2x)dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\Pi} = \frac{\Pi}{2}. \end{aligned}$$

2. En déduire I_1 et I_2 :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \frac{\Pi^3}{3} \\ I_1 - I_2 = \frac{\Pi}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{\Pi^3}{6} + \frac{\Pi}{4} \\ I_2 = \frac{\Pi^3}{6} - \frac{\Pi}{4} \end{cases}$$

Exercice 2. *On pose :*

$$H = \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\cos(2x)dx, \quad I = \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\cos^2(x)dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\sin^2(x)dx.$$

1. *Calculer H, $I + J$ et $I - J$.*
2. *Déduire I et J.*

Solution : on pose :

$$H = \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\cos(2x)dx, \quad I = \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\cos^2(x)dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\sin^2(x)dx.$$

1. Calculons H, $I + J$ et $I - J$:
   - Calculons H par intégration par partie, on pose :

$$U = e^{-2x} \Rightarrow dU = -2e^{-2x}, \quad dV = \cos(2x) \Rightarrow V = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

$$H = \left[\frac{1}{2}e^{-2x}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\Pi}{8}} + \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\sin(2x)dx = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\Pi}{4}} + \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\sin(2x)dx.$$

Par intégration par partie, on pose :

$$U = e^{-2x} \Rightarrow dU = -2e^{-2x}, \quad dV = \sin(2x) \Rightarrow V = -\frac{1}{2}\cos(2x).$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\Pi}{4}} + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\Pi}{8}} - \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\cos(2x)dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\Pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{\Pi}{4}} + \frac{1}{2} - H. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 2H = \frac{1}{2} \Longrightarrow H = \frac{1}{4}$$

- Calculer $I + J$:

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}[\cos^2(x) + \sin^2(x)]dx \\ &= \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\frac{\Pi}{8}} = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{\Pi}{4}}) \end{aligned}$$

- Calculer $I - J$:

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}[\cos^2(x) - \sin^2(x)]dx \\ &= \int_0^{\frac{\Pi}{8}} e^{-2x}\cos(2x)dx = H = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. En déduire I et J :

$$\begin{cases} I + J = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{\Pi}{4}}) \\ I - J = \frac{1}{4} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I = \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{-\frac{\Pi}{4}} \\ J = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}e^{-\frac{\Pi}{4}} \end{cases}$$

Chapitre 4

Les équations différentielles

Dans ce chapitre nous allons apprendre à résoudre les cas les plus élémentaires des équations différentielles du premier ordre et du second ordre à coefficients constantes.

4.1 Les équations différentielles ordinaires

Définition 4.1.1. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}, A_0, \cdots, A_n$ et f des fonctions continues sur I. Une équation de la forme :*

$$A_0(x)y(x) + A_1(x)y'(x) + \cdots + A_n(x)y^{(n)}(x) = f(x), \quad x \in I, \tag{4.1}$$

est appelée équation différentielle linéaire. L'équation homogéne associée est :

$$A_0(x)y(x) + A_1(x)y'(x) + \cdots + A_n(x)y^n(x) = 0, \quad x \in I, \tag{4.2}$$

La fonction y est l'inconnue des ces équations.

On appelle solution de l'équation (4.1) *toute fonction y dérivable dans I qui vérifie l'égalité $A_0(x)y(x) + A_1(x)y'(x) + \cdots + A_n(x)y^n(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Exemple 4.1.1.

- $y' - y^2 - x = 0$ *est une équation* **homogéne** *du premier ordre.*
- $y'' + xy + y^3 = x^2$ *est une équation* **non homogéne** *du second ordre.*
- $y_1(x) = x$ *et* $y_2(x) = 5$ *deux solutions de l'équation* $y''' + y'' = 0$ *alors* $y_3(x) = x + 5, y_4(x) = 10x$ *sont aussi des solutions.*
- $y = \cos x$ *est une solution définie dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$.

Proposition 4.1.1. *Si S_0 est l'ensemble des solutions de* (4.2) *et y_p une solution* **particulière** *(évidente) de* (4.1) *alors, l'ensemble des solutions de* (4.1) *est donné par :*

$$S = \{y_p + y_h \quad \textit{tel que} \quad y_h \in S_0\}.$$

Preuve : on a y_p est une solution particulière de (4.1) et y_h est une solution de (4.2), alors,

$$A_0(x)y_p(x) + A_1(x)y_p'(x) + \cdots + A_n(x)y_p^n(x) = f(x),$$

et

$$A_0(x)y_h(x) + A_1(x)y_h'(x) + \cdots + A_n(x)y_h^n(x) = 0,$$

donc

$$A_0(x)[y_p(x) + y_h(x)] + A_1(x)[y_p(x) + y_h(x)]' + \cdots + A_n(x)[y_p(x) + y_h(x)]^n = f(x).$$

Ce qui implique que $y_p + y_h$ est une solution de (4.1).

Remarque 4.1.1. *Résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent.*

4.1.1 Equations différentielles à variables séparées

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Une équation différentielle est dite à variables séparées ou séparables si elle est de la forme :

$$g(y)y' = f(x).$$

Résolution : on a :

$$\begin{aligned} g(y)y' = f(x) &\iff g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \\ &\iff g(y)dy = f(x)dx \\ &\iff \int g(y)dy = \int f(x)dx \\ &\iff G(y) = F(x) + C, \quad C \textit{ est une constante} \\ &\iff y = G^{-1}[F(x) + C]. \end{aligned}$$

Où G est une primitive de g sur J et F est une primitive de f sur I.

Exemple 4.1.2.

1) *Considérons l'équation différentielle suivante :* $y' = xy$.
Remarquons que $y = 0$ *est une solution triviale (évidente). On suppose que* $y \neq 0$, *donc* $\frac{y'}{y} = x$ *qui est à variables séparées avec* $f(x) = x$ *et* $g(y) = \frac{1}{y}$. *On a :*

$$\begin{aligned} y' = xy &\iff \frac{dy}{dx} = xy \\ &\iff \frac{dy}{y} = xdx \\ &\iff \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \\ &\iff |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C} \\ &\iff y = \pm e^{\frac{1}{2}x^2 + C} \\ &\iff y = Ke^{\frac{1}{2}x^2}, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

Finalement, les solutions sont $y(x) = Ke^{\frac{1}{2}x^2}, \qquad K \in \mathbb{R}$. *Elles sont défnies sur* $\mathbb{R}$.

2) *Résoudre* $y' = y^2$. *On a :*

$$\begin{aligned} y' = y^2 &\iff \frac{dy}{dx} = y^2 \\ &\iff \frac{dy}{y^2} = dx \\ &\iff -\frac{1}{y} = x + C \\ &\iff y = -\frac{1}{x+C}, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) *Résoudre* $y' = x^2 + 1$. *On a :*

$$\begin{aligned} y' = x^2 + 1 &\iff \frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \\ &\iff dy = (x^2+1)dx \\ &\iff y = \frac{1}{3}x^3 + x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) *Résoudre sur* $I =]1, \infty[$ *l'équation différentielle suivante :*

$$xy' \ln x = (3\ln x + 1)y.$$

On peut séparer les variables x *et* y *en divisant par* $yx\ln x$,

$$\begin{aligned} xy'\ln x = (3\ln x + 1)y &\iff \frac{y'}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x \ln x} \\ &\iff \frac{dy}{y} = \frac{3\ln x + 1}{x\ln x} dx \\ &\iff \int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x} \right) dx \\ &\iff \ln|y| = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + C \\ &\iff y = \pm e^{3\ln|x| + \ln|\ln x| + C} = Ke^{3\ln|x| + \ln|\ln x|}, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

4.1.2 Equations différentielles homogènes en x et y

C'est une équation de la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x \neq 0, \tag{4.3}$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Résolution : on utilise ce changement d'inconnue $z = \frac{y}{x}$ qui donne $y' = z + xz'$. Par suite,

$$\begin{aligned}
(4.3) \iff\ & z + xz' = f(z) \\
\iff\ & z + x\frac{dz}{dx} = f(z) \\
\iff\ & zdx + xdz = f(z)dx \\
\iff\ & xdz = [f(z) - z]dx \\
\iff\ & \frac{x}{dx} = \frac{f(z) - z}{dz} \\
\iff\ & \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dz}{f(z) - z} \\
\iff\ & \ln|x| = \phi(z) + C, \qquad \phi \textit{ est une primitive de } f(z) - z \\
\iff\ & x = \pm e^{\phi(z)+C} = Ke^{\phi(z)}, \qquad K = \pm e^C,
\end{aligned}$$

puis, on détermine y solution de (4.3) grâce à la relation $y = xz$.

Exemple 4.1.3. *Résoudre $xyy' = y^2 - x^2$. Elle est de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec*

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right).$$

Le changement d'inconnue $z = \frac{y}{x}$ conduit à l'équation $z + xz' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$$\begin{aligned}
z + xz' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \iff\ & z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z \\
\iff\ & x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z - z \\
\iff\ & xdx = -\frac{z^2+1}{2zdz} \\
\iff\ & \frac{dx}{x} = -\frac{2zdz}{z^2+1} \\
\iff\ & \ln|x| = -\int \frac{2z}{z^2+1}dz = -\ln|z^2+1| + C \\
\iff\ & x = \pm e^{-\ln|z^2+1|+C} = Ke^{-\ln|z^2+1|}, \qquad K = \pm e^C \\
\iff\ & x = \frac{K}{z^2+1}.
\end{aligned}$$

D'où

$$y(x) = \pm\sqrt{x(K - x)}.$$

4.2 Les équations différentielles d'ordre 1

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle de la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = f(x), \qquad ou \qquad y' + b(x)y = f(x), \tag{4.4}$$

où a, b et f sont deux fonctions réelles définies sur un intervalle I. (4.4) est dite équation différentielle non homogène (ou avec second membre).

L'équation différentielle suivante :

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \qquad ou \qquad y' + b(x)y = 0, \tag{4.5}$$

est dite équation différentielle homogène (ou sans second membre).(4.5) est appelée l'équation homogène associée à l'équation (4.4).

4.2.1 Résolution de l'équation homogène (4.5)

Soit $y' + b(x)y = 0$. Si $y \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} y' + b(x)y = 0 &\Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = -b(x)y \\ &\Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -b(x)dx \\ &\Longleftrightarrow \ln|y| = -B(x) + C, \qquad B \textit{ est une primitive de } b(x) \\ &\Longleftrightarrow y = \pm e^{-B(x)+C} = Ke^{-B(x)}, \qquad K = \pm e^{C}. \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1. $y = 0$ *est une solution triviale (évidente) de* (4.5). *Finalement,*

$$y(x) = Ke^{-B(x)}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

est la solution homogène de (4.5).

4.2.2 Résolution de l'équation non homogène (4.4)

Si y_h est la solution homogène de (4.5) et y_p est une solution particulière de (4.4).

Méthode de la variation de la constante : soit $y_h(x) = Ke^{-B(x)}$ la solution homogène de (4.5). On fait varier la constante K, et la solution particulière de (4.4) sera $y_p(x) = K(x)e^{-B(x)}$. On a : $y_p'(x) = K'(x)e^{-B(x)} - K(x)B'(x)e^{-B(x)}$. En remplaçant $y_p(x)$ et $y_p'(x)$ dans (4.4), on obtient,

$$(4.4) \Longleftrightarrow K'(x)e^{-B(x)} - K(x)B'(x)e^{-B(x)} + b(x)K(x)e^{-B(x)} = f(x),$$

on obtient $K(x)$ et finalement, la solution générale de (4.4) et donnée par :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Exemple 4.2.1.

1) *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y' - y = e^x \cdots\cdots\cdots\cdots (E).$$

L'équation homogène associée est

$$y' - y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (EH).$$

Pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} y' - y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = dx \\ &\iff \ln|y| = x + C \\ &\iff y = Ke^x, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

$y = 0$ *est une solution évidente de* (EH). *Finalement, la solution générale de* (EH) *est* $y(x) = Ke^x,\ K \in \mathbb{R}$. *On fait varier la constante* K *et la solution générale de* (E) *sera* $y(x) = K(x)e^x$. *On a :* $y'(x) = K'(x)e^x + K(x)e^x$. *En remplaçant* $y(x)$ *et* $y'(x)$ *dans* (E), *on obtient,*

$$\begin{aligned} (E) &\iff K'(x)e^x + K(x)e^x - K(x)e^x = e^x \\ &\iff K'(x) = 1 \\ &\iff K(x) = x + d, \qquad d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) *est* $y(x) = (x + d)e^x$.

2) *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (E).$$

L'équation homogène associée est

$$y' + 2xy = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (EH).$$

Pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} y' + 2xy = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -2xdx \\ &\iff \ln|y| = -x^2 + C \\ &\iff y = Ke^{-x^2}, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

$y = 0$ *est une solution évidente de* (EH). *Finalement, la solution générale de* (EH) *est* $y(x) = Ke^{-x^2},\ K \in \mathbb{R}$. *On fait varier la constante* K *et la solution générale de* (E) *sera* $y(x) = K(x)e^{-x^2}$. *On a :* $y'(x) = K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2}$. *En remplaçant* $y(x)$ *et* $y'(x)$ *dans* (E), *on obtient,*

$$\begin{aligned} (E) &\iff K'(x)e^{-x^2} - 2xK(x)e^{-x^2} + 2xK(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2} \\ &\iff K'(x) = 2x \\ &\iff K(x) = x^2 + d, \qquad d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) *est* $y(x) = (x^2 + d)e^{-x^2}$.

3) *Résoudre l'équation différentielle :*

$$y' - \frac{1}{x}y = x \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$

L'équation homogène associée est

$$y' - \frac{1}{x}y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdot (EH).$$

Pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = \frac{1}{x}dx \\ &\iff \ln|y| = \ln|x| + C \\ &\iff y = Kx, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

$y = 0$ *est une solution évidente de* (EH). *Finalement, la solution générale de* (EH) *est* $y(x) = Kx,\ K \in \mathbb{R}$. *On fait varier la constante* K *et la solution générale de* (E) *sera* $y(x) = K(x)x$. *On a :* $y'(x) = K'(x)x + K(x)$. *En remplaçant* $y(x)$ *et* $y'(x)$ *dans* (E), *on obtient,*

$$\begin{aligned} (E) &\iff K'(x)x + K(x) - \frac{1}{x}K(x)x = x \\ &\iff K'(x) = 1 \\ &\iff K(x) = x + d, \qquad d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) *est* $y(x) = (x + d)x$.

4) *Résoudre sur* $\mathbb{R}^*$ *l'équation différentielle :*

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2+1} \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$

L'équation homogène associée est

$$y' + \frac{2}{x}y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdot (EH).$$

Pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned} y' + \frac{2}{x}y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}dx \\ &\iff \ln|y| = -2\ln|x| + C \\ &\iff y = \frac{K}{x^2}, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

$y = 0$ *est une solution évidente de* (EH). *Finalement, la solution générale de* (EH) *est* $y(x) = \frac{K}{x^2},\ K \in \mathbb{R}$. *On fait varier la constante* K *et la solution générale de* (E)

sera $y(x) = \frac{K(x)}{x^2}$. *On a :* $y'(x) = \frac{K'(x)x^2 - 2xK(x)}{x^4}$. *En remplaçant* $y(x)$ *et* $y'(x)$ *dans* (E)*, on obtient,*

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad \frac{K'(x)x^2 - 2xK(x)}{x^4} + \frac{2}{x}\frac{K(x)}{x^2} = \frac{x}{x^2+1} \\
&\iff \quad \frac{K'(x)}{x^2} - \frac{-2K(x)}{x^3} + \frac{2K(x)}{x^3} = \frac{x}{x^2+1} \\
&\iff \quad K'(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} \\
&\iff \quad K(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + d, \qquad d \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) *est*

$$y(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + d}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln|x^2+1| + d}{2x^2}.$$

4.2.3 Equation différentielle de Bernoulli

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Une équation de la forme

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, 1, \tag{4.6}$$

est dite de Bernoulli.

On écarte les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ pour lesquels l'équation est linéaire. La fonction y sera supposée positive si α est non entier et de plus non nulle si α est négatif.

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (éventuellement en écartant la solution triviale $y = 0$), on divise par y^α puis on fait le changement de la fonction inconnue $z = y^{1-\alpha}$. On aura :

$$\frac{y'}{y^\alpha} + \frac{f(x)}{y^{\alpha-1}} + g(x) = 0$$

et par conséquent,

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} + g(x) = 0.$$

Cette dernière équation devient en z (du fait que $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$)

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z + g(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple 4.2.2.

1) *Soit l'équation différentielle de Bernoulli :* $y' + xy + xy^4 = 0$. *Elle est de la forme* (4.6) *avec* $\alpha = 4, f(x) = g(x) = x$. *En posant* $z = y^{-3}$ *pour* $y \neq 0$, *on aura :*

$$z' - 3xz = 3x \cdots\cdots\cdots\cdot(E).$$

L'équation homogène associée à (E) *est*

$$z' - 3xz = 0 \cdots\cdots\cdots\cdot(EH).$$

$$\begin{aligned} z' - 3xz = 0 &\iff \frac{dz}{z} = 3xdx \\ &\iff \ln|z| = \frac{3}{2}x^2 + C \\ &\iff z = Ke^{\frac{3}{2}x^2}, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

$z = 0$ *est une solution évidente de* (EH). *Finalement, la solution générale de* (EH) *est* $z(x) = Ke^{\frac{3}{2}x^2}$, $K \in \mathbb{R}$. *On fait varier la constante* K *et la solution générale de* (E) *sera* $z(x) = K(x)e^{\frac{3}{2}x^2}$. *On a :* $z'(x) = K'(x)e^{\frac{3}{2}x^2} + 3K(x)e^{\frac{3}{2}x^2}$. *En remplaçant* $z(x)$ *et* $z'(x)$ *dans* (E), *on obtient,*

$$\begin{aligned} (E) &\iff K'(x)e^{\frac{3}{2}x^2} + 3xK(x)e^{\frac{3}{2}x^2} - 3xK(x)e^{\frac{3}{2}x^2} = 3x \\ &\iff K'(x) = 3xe^{-\frac{3}{2}x^2} \\ &\iff K(x) = -e^{-\frac{3}{2}x^2} + d, \qquad d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) *est* $z(x) = \left(-e^{-\frac{3}{2}x^2} + d\right)e^{\frac{3}{2}x^2} = -1 + de^{\frac{3}{2}x^2}$.
Par conséquent,

$$\frac{1}{y^3(x)} = -1 + d\ e^{\frac{3}{2}x^2} \iff y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + d\ e^{\frac{3}{2}x^2}}}.$$

2) *Soit l'équation différentielle de Bernoulli :* $xy' + y = y^2 \ln x$. *Elle est de la forme* (4.6) *avec* $\alpha = 2, f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $g(x) = -\frac{\ln x}{x}$. *En posant* $z = y^{-1}$ *pour* $y \neq 0$, *on aura :*

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x} \cdots\cdots\cdots\cdot(E).$$

L'équation homogène associée à (E) *est*

$$z' - \frac{1}{x}z = 0 \cdots\cdots\cdots\cdot(EH).$$

$$\begin{aligned} z' - \frac{1}{x}z = 0 &\iff \frac{dz}{z} = \frac{1}{x}dx \\ &\iff \ln|z| = \ln x + C \\ &\iff z = Kx, \qquad K = \pm e^C. \end{aligned}$$

$z = 0$ est une solution évidente de (EH). Finalement, la solution générale de (EH) est $z(x) = Kx$, $K \in \mathbb{R}$. On fait varier la constante K et la solution générale de (E) sera $z(x) = K(x)x$. On a : $z'(x) = K'(x)x + K(x)$. En remplaçant $z(x)$ et $z'(x)$ dans (E), on obtient,

$$\begin{aligned}(E) &\iff K'(x)x + K(x) - \frac{1}{x}K(x)x = -\frac{\ln x}{x} \\ &\iff K'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} \\ &\iff K(x) = \int -\frac{\ln x}{x^2} dx.\end{aligned}$$

Calculons $\int -\frac{\ln x}{x^2} dx$ (Intégration par partie). On pose :

$$u(x) = \ln x \iff u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad v'(x) = -\frac{1}{x^2} \iff v(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned}\int -\frac{\ln x}{x^2} dx &= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x}\frac{1}{x} dx \\ &= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + d, \qquad d \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) est $z(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + d\right) x = \ln x + 1 + d$.
Par conséquent,

$$\frac{1}{y(x)} = \ln x + d\ x + 1 \iff y(x) = \frac{1}{\ln x + d\ x + 1}.$$

4.2.4 Solution vérifiant une condition initiale

Les données d'une condition initiale pour l'équation (4.4) sur l'intervalle ouvert I est les données d'un point x_0 de I et d'un réel y_0. Une solution satisfaisant à cette condition initiale est une solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

La condition initiale permet de déterminer la constante exacte de la solution générale y_g de l'équation (4.4), ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution vérifiant la condition initiale.

Remarque 4.2.2. *Il existe une seule solution de l'équation (4.4) sur I satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$.*

Exemple 4.2.3. *Résourdre* $\begin{cases} y' - \frac{1}{x}y = x \\ y(1) = 0. \end{cases}$
La solution générale donnée par :

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{\ln|x^2+1| + d}{2x^2}, \qquad d \in \mathbb{R}.$$

On a :

$$y(1) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} - \ln 2 + d = 0 \Rightarrow d = \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Finalement la solution y qui est vérifiée la condition initiale est donnée par :

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{2\ln|x^2+1| + 2\ln 2 + 1}{4x^2}.$$

4.3 Les équations différentielles d'ordre 2

Une équation différentielle du second ordre est du type :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x), \tag{4.7}$$

où a, b et c sont des fonctions données, appelées coefficients de l'équation différentielle et f est appelée secnod membre de l'équation différentielle. Une solution de (4.7) est une fonction y de classe C^2 sur un intervalle I vérifiant (4.7) pour tout $x \in I$.

La solution générale de l'équation (4.7) s'écrivent :

$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée à l'équation (4.7) suivante :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0,$$

et y_p est une solution particulière de (4.7).

4.4 Les équations différentielles ordinaires du second ordre à coefficient constant

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{4.8}$$

est dite équation différentielle du second ordre à coefficients constantes avec second membre. On lui associe l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{4.9}$$

Proposition 4.4.1. *Si y_h est une solution générale de l'équation homogène* (4.9) *et y_p est une solution particulière de l'équation non homogène* (4.8)*, alors, $y_p + y_h$ est une solution générale de* (4.8).

4.4.1 Résolution de l'équation homogène (4.9)

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}, r \in \mathbb{R}$. On a donc $y' = re^{rx} = ry$ et $y'' = r^2e^{rx} = r^2y$, donc l'équation non homogène (4.8) devient

$$y(ar^2 + br + c) = 0.$$

L'équation

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{4.10}$$

est dite équation caractéristique de l'équation différentielle (4.9).

Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :

- ▷ Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique (4.10) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha - i\beta$ et $r_2 = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors la solution générale de (4.9) est de la forme :
$$y(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)e^{\alpha x}.$$
- ▷ Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique (4.10) admet une racine double r alors, la solution générale de (4.9) est de la forme :
$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{rx}.$$
- ▷ Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique (4.10) admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, alors, la solution générale de (4.9) est de la forme :
$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}.$$

Où C_1, C_2 sont deux constantes réelles.

Exemple 4.4.1. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

1) $y'' + 2y' + y = 0$, *l'équation caractéristique est* $r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r + 1)^2 = 0$. *On a :* $\Delta = 0$, *donc cette équation admet une racine double* $r = -1$, *la solution générale est de la forme :*
$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
2) $y'' - 4y' + 3y = 0$, *l'équation caractéristique est* $r^2 - 4r + 3 = 0$. *On a :* $\Delta = 4 > 0$, *donc cette équation admet deux racines distinctes* $r_1 = 1$ *et* $r_2 = 3$, *la solution générale est de la forme :*
$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
3) $y'' + 2y' + 4y = 0$, *l'équation caractéristique est* $r^2 + 2r + 4 = 0$. *On a :* $\Delta = -12 < 0$, *donc cette équation admet deux racines complexes conjuguées* $r_1 = -1 - i\sqrt{3}$ *et* $r_2 = -1 + i\sqrt{3}$, *la solution générale est de la forme :*
$$y(x) = (C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4.4.2 Résolution de l'équation non homogène (4.8)

la solution générale de (4.8) s'écrit sous la forme $y = y_h + y_p$ où y_h est la solution générale de l'équation homogène (4.9) et y_p est une solution particulière de l'équation avec second membre.

- **Le second membre est la somme de deux termes :** une solution particulière de
$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$$
est la somme d'une solution particulière de l'équation
$$ay'' + by' + cy = f_1(x)$$
et d'une solution particulière de l'équation
$$ay'' + by' + cy = f_2(x).$$

- **Le second membre est un polynôme de degré n :** soit à résoudre
$$ay'' + by' + cy = P_n(x)$$
où P_n est un polynôme de degré n. On cherche une solution particulière polynômiale. On distingue deux cas :
▷ Si $c \neq 0$, on cherche y_p sous la forme d'un polynôme de degré n.
▷ Si $c = 0$ et $b \neq 0$, $y_p = xQ_n(x)$ avec Q_n un polynôme de degré n.
Exemple 4.4.2. *Soit à résoudre l'équation suivante :*
$$y'' + 2y' - 3y = x^3 + 2x + 1 \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$
On a : $y_h = C_1e^x + C_2e^{-3x}$, *où* C_1, C_2 *sont deux constantes réelles.*
Comme $c = -3 \neq 0$, *on cherche une solution particulière sous la forme :*
$$y_p = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$
En remplaçant $y_p(x), y_p'(x)$ *et* $y_p''(x)$ *dans* (E) *et en identifiant, on obtient,*
$$a_0 = -\frac{1}{3}, \qquad a_1 = -\frac{2}{3}, \qquad a_2 = -\frac{20}{9}, \qquad a_3 = -\frac{61}{27}.$$
La solution générale est
$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-3x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{9}x + -\frac{61}{27}.$$

- **Le second membre est de la forme e^{mx} (m est une constante) :** dans la recherche d'une solution particulière y_p, il y a lieu de distinguer trois cas selon les valeurs de m.

- ▷ m n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière sous la forme :
$$y_p = Ke^{mx}.$$
- ▷ m est une racine simple de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière sous la forme :
$$y_p = Kxe^{mx}.$$
- ▷ m est une racine double de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière sous la forme :
$$y_p = Kx^2e^{mx}.$$

Exemple 4.4.3.

1) *Soit à résoudre l'équation suivante :*
$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$
On a : $y_h = (C_1x + C_2)e^{2x}$*, où* C_1, C_2 *sont deux constantes réelles. On cherche une solution particulière sous la forme :*
$$y_p = Kx^2e^{2x},$$
car 2 *est une racine double de l'équation caractéristique. En remplaçant* $y_p(x), y_p'(x)$ *et* $y_p''(x)$ *dans* (E) *et en identifiant, on trouve* $K = \frac{1}{2}$*, donc la solution générale est*
$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} = (\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2)e^{2x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) *Soit à résoudre l'équation suivante :*
$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x} \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$
On a : $y_h = C_1e^{2x} + C_1e^{3x}$*, où* C_1, C_2 *sont deux constantes réelles. On cherche une solution particulière* $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ *où* y_{p_1} *est une solution particulière de*
$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} \cdots\cdots\cdots\cdot (E_1)$$
et y_{p_2} *est une solution particulière de*
$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x} \cdots\cdots\cdots\cdot (E_2)$$
sous la forme : $y_{p_1} = K_1xe^{3x}$ *et* $y_{p_2} = K_2e^{4x}$*. En remplaçant* $y_{p_1}(x), y_{p_1}'(x)$ *et* $y_{p_1}''(x)$ *dans* (E_1) *et en identifiant, on trouve* $K_1 = \frac{1}{2}$*, en suite, en remplaçant* $y_{p_2}(x), y_{p_2}'(x)$ *et* $y_{p_2}''(x)$ *dans* $(E_)$ *et en identifiant, on trouve* $K_2 = 2$*. Finalement, la solution générale est*
$$y(x) = C_1e^{2x} + C_1e^{3x} + \frac{1}{2}xe^{3x}2)e^{4x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Le second membre est de la forme** $\sin mx$ **(ou** $\cos mx, m$ **est une constante) :** dans cette situation, il y a lieu de distinguer deux cas dans la recherche d'une solution particulière.
  - ▷ im n'est pas une racine de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière sous la forme :

$$y_p = K_1 \cos mx + K_2 \sin mx$$

  et on détermine les constante K_1 et K_2 par identification.
  - ▷ im est une racine de l'équation caractéristique. On cherche alors une solution particulière sous la forme :

$$y_p = x(K_1 \cos mx + K_2 \sin mx)$$

  et comme au cas précédent, on détermine les constante K_1 et K_2 par identification.

Exemple 4.4.4.

1) *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$y'' + 4y' = \cos x \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$

On a : $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, *où* C_1, C_2 *sont deux constantes réelles et on a :* i *n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc*

$$y_p = K_1 \cos x + K_2 \sin x.$$

En remplaçant $y_p(x), y_p'(x)$ *et* $y_p''(x)$ *dans* (E) *et en identifiant, on trouve* $K_1 = \frac{1}{3}$ *et* $K_2 = 0$. *Finalement, la solution générale est*

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$y'' + 9y' = \sin 3x \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$

On a : $y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$, *où* C_1, C_2 *sont deux constantes réelles et on a :* $3i$ *est une racine de l'équation caractéristique, donc*

$$y_p = x(K_1 \cos x + K_2 \sin x).$$

En remplaçant $y_p(x), y_p'(x)$ *et* $y_p''(x)$ *dans* (E) *et en identifiant, on trouve* $K_1 = -\frac{1}{6}$ *et* $K_2 = 0$. *Finalement, la solution générale est*

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x}{6}\cos x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- **Le second membre est de la forme** $P(x)e^{mx}$ **(où** P **est un polynôme et** m **est une constante) :** on cherche la solution particulière sous la forme :

$$y_p = Q(x)e^{mx}.$$

Où Q est un polynôme. dont on peut préciser le degré :

- ▷ Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors, $deg\ (Q) = deg\ (P)$.
- ▷ Si m est l'une des deux racines de l'équation caractéristique, alors, $deg\ (Q) = deg\ (P) + 1$.
- ▷ Si m est une racine double de l'équation caractéristique, alors, $deg\ (Q) = deg\ (P) + 2$.

Exemple 4.4.5.

1) *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$y'' - 2y' + y = (x+2)e^x \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$

On a : $y_h = (C_1x + C_2)e^x$*, où* C_1, C_2 *sont deux constantes réelles et on a :* $m = 1$ *est une racine double de l'équation caractéristique, donc* $y_p = Q(x)e^x$ *avec* $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*. En remplaçant* $y_p(x), y_p'(x)$ *et* $y_p''(x)$ *dans* (E) *et en identifiant, on trouve* $a = \frac{1}{6}, b = 1$ *et* $c = d = 0$*. Finalement, la solution générale est*

$$y(x) = (\frac{1}{6}x^3 + x^2 + C_1x + C_2)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$y'' - 4y' + 4y = (x^2+1)e^x \cdots\cdots\cdots\cdot (E).$$

On a : $y_h = (C_1x + C_2)e^{2x}$*, où* C_1, C_2 *sont deux constantes réelles et on a :* $m = 1$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc* $y_p = Q(x)e^x$ *avec* $Q(x) = ax^2+bx+c$*. En remplaçant* $y_p(x), y_p'(x)$ *et* $y_p''(x)$ *dans* (E) *et en identifiant, on trouve* $a = 1, b = 4$ *et* $c = 7$*. Finalement, la solution générale est*

$$y(x) = (x^2 + 4x + 7 + C_1x + C_2)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

4.4.3 Solution vérifiant des conditions initiales

Etant donnés deux réels y_0 et y_1. Il existe une et une seule solution y de l'équation différentielle telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_1) = y_1'$.

La condition initiale permet de déterminer la constante exacte de la solution générale y_g de l'équation (4.4), ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution vérifiant la condition initiale.

Remarque 4.4.1. *Il existe une seule solution de l'équation* (4.4) *sur* I *satisfaisant à la condition initiale* $y(x_0) = y_0$*.*

Exemple 4.4.6. *Résourdre* $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = (x^2+1)e^x \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$

La solution générale donneé par :

$$y(x) = (x^2 + 4x + 7 + C_1x + C_2)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 7 + C_2 = 1 \\ C_1 + 11 + C_2 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} C_1 = -5 \\ C_2 = -6. \end{cases}$$

Finalement la solution y qui vérifie la condition initiale est donnée par :

$$y(x) = (x^2 - x + 1)e^x.$$

Exercice 1. *Soit l'équation différentielle du second ordre suivante :*

$$y'' - 2y' + y = (6x + 2)e^x. \tag{4.11}$$

1. *Résoudre l'équation différentielle homogène associée à* (4.11)*.*
2. *Déterminer les constantes α et β pour que $y_p = (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x$ soit une solution particulière de* (4.11)*.*
3. *Déterminer la solution générale de* (4.11)*.*
4. *Trouver la solution de l'équation* (4.11) *vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.*

Solution :

1. Résolution l'équation différentielle homogène associée à (4.11) : $y'' - 2y' + y = 0$ l'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0$. On a : $\Delta = 0$, donc cette équation admet une racine double $r = 11$, la solution homogène est de la forme :
$$y_h(x) = (C_1 x + C_2)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
2. Déterminer les constantes α et β : on a : $y_p = (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x$, alors,
$$y_p' = [\alpha x^3 + (3\alpha + \beta)x^2 + 2\beta x]e^x$$
et
$$y_p'' = [\alpha x^3 + (6\alpha + \beta)x^2 + (6\alpha + 4\beta)x + 2\beta]e^x.$$
En remplaçant $y_p(x), y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ dans l'équation (4.11) et en identifiant, on trouve $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Donc on aura $y_p(x) = (x^3 + x^2)e^x$.
3. Déterminer la solution générale de (4.11) :
$$y_g(x) = y_h(x) + y_p(x) = (x^3 + x^2 + C_1 x + C_2)e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
4. Cherchons la solution de l'équation (4.11) vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$:on a :
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 1 \end{cases}$$
Finalement,
$$y_g(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)e^x.$$

Exercice 2. *Soit f une fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}.$$

1. *Calculer $\int f(x)dx$.*
2. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*
$$y' - y = \frac{e^x}{x(1-x^2)}.$$
3. *Résoudre l'équation différentielle suivante :*
$$y'' - 2y' - 3y = (8x-8)e^x.$$

Solution : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}.$$

1. Calculer $\int f(x)dx$: on a :
$$f(x) = \frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(1-x)} + \frac{c}{(1+x)}.$$
En identifiant dans cette équation les coefficients de même puissances en x (après avoir réduit au même dénominateur), on trouve :
$$a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}.$$
$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x| + c \\ &= \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
2. Résoudre l'équation différentielle suivante :
$$y' - y = \frac{e^x}{x(1-x^2)}. \tag{4.12}$$

- Résolvons l'équation différentielle homogéne : $y' - y = 0$:

$$y' - y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = dx \Longrightarrow \ln|y| = x + c$$
$$\Longrightarrow y_h = ke^x, \qquad k = \pm e^c \in \mathbb{R}$$

- Solution particulière de $y' - y = \dfrac{e^x}{x(1-x^2)}$: on applique la méthode de variation de la constante, alors,

$$y_p = k(x)e^x \Longrightarrow y_p' = k'(x)e^x + k(x)e^x.$$

En remplaçant y_p et y_p' dans (4.12), on trouve :

$$k'(x) = \frac{1}{x(1-x^2)} \Rightarrow k(x) = \int \frac{1}{x(1-x^2)} = \ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Alors, $y_p = \left[\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) + c\right] e^x$.
Finalement, la solution générale de (4.12) est

$$\begin{aligned} y_g &= y_h + y_p = ke^x + \left[\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) + c\right] e^x \\ &= \left[\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{|1-x^2|}}\right) + c'\right] e^x, \qquad c' = k + c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' - 3y = (8x-8)e^x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E)$$

- Résolvons l'équation différentielle homogéne :

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (EH)$$

l'équation caractiréstique donnée par : $r^2 - 2r - 3 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = 3$ donc $y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$, avec c_1 et c_2 sont des constantes réels.
- Solution particulière de l'équation (E) : on cherche une solution particulière $y_p = q(x)e^x$.
On a : $\alpha = 1$ n'est pas racine de (EH), alors dřq $=$ dřp $= 1$.

$$y_p = (ax+b)e^x \Rightarrow y_p' = [ax + (a+b)]e^x \Rightarrow y_p'' = [ax + (2a+b)]e^x.$$

En remplaçant y_p, y_p' et y_p'' dans (E), on trouve :

$$[ax + (2a+b)]e^x - 2[ax + (a+b)]e^x - 3(ax+b)e^x = (8x-8)e^x$$

$$\Rightarrow -4ax - 4b = 8x - 8 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Alors, $y_p = (-2x+2)e^x$.
Finalement, la solution générale de (E) est :

$$y_g = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + (-2x+2)e^x. \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Chapitre 5

Les fonctions à plusieurs variables

5.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$

5.1.1 Norme sur un espace vectoriel

On appelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

▷ $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

▷ $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

▷ $\forall x \in E, \forall y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. (Inégalité triangulaire).

$N(x)$ est souvent notée $||x||$, qui rappelle l'analogie avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

Propriétés 5.1.1.

$$\forall x \in E, \forall y \in E : |||x|| - ||y||| \leq ||x|| + ||y||.$$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ **:** les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ définies pour $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont :

(i) $||X||_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$.

(ii) $||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

(iii) $||X||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

5.1.2 Parties remarquables de $\mathbb{R}^n$

Boules : dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, on appelle :

• boule ouverte de centre $\omega \in \mathbb{R}^n$ et de $r > 0$, l'ensemble

$$B(\omega, r) = \{X \in \mathbb{R}^n, ||X - \omega|| < r\}.$$

- boule fermée de centre $\omega \in \mathbb{R}^n$ et de $r > 0$, l'ensemble

$$B(\omega, r) = \{X \in \mathbb{R}^n, ||X - \omega|| \leq r\}.$$

Parties bornées : une partie D de $\mathbb{R}^n$ est bornée si l'ensemble des réels $||X - Y||$, où X et Y sont des vecteurs quelconques de D est borné.
D est bornée si et seulement si, il existe une boule qui le contient.

5.2 Généralités

Une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, fait correspondre à tout vecteur $X = (x, y)$ de D un réel unique $f(X)$. L'ensemble

$$S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\}$$

est la surface représentative de f, c'est l'analogue de la courbe représentative de f d'une fonction d'une variable.

Exemple 5.2.1.
1) *La fonction* $f(x, y) = x^3 + xy + y^2 + 2$ *est définie sur* $\mathbb{R}^2$.
2) *La fonction* $g(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ *est définie à l'intérieur du cercle* $x^2 + y^2 = 1$.

Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in D$. On appelle fonctions partielles associées à f au point A les fonctions :

$$x_1 \longrightarrow f(x_1, a_1) \qquad et \qquad x_2 \longrightarrow f(x_2, a_2)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a_1 et a_2.

5.3 Limites, continuité d'une fonction

Définissons la notion d'une limite d'une fonction $f(x, y)$ de deux variables. Supposons que la fonction f est définie en tout point $M(x, y)$ suffisamment proche de $M_0(a, b)$.

Définition 5.3.1. *On dit que le nombre ℓ est la limite de $f(x, y)$ lorsque $M(x, y)$ tend vers $M_0(a, b)$ et on écrit*

$$\lim_{x \to a, y \to b} f(x, y) = \ell, \qquad ou \qquad \lim_{M \to M_0} f(x, y) = \ell.$$

Si pour tout ε positif donné il existe un δ positif tel que :

$$||(x, y) - (a, b)|| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque 5.3.1. *L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans $\mathbb{R}^2$. On dit que les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes. Lorsqu'elle existe, la limite est unique.*

Supposons que la fonction $f(x,y)$ est définie au point $M_0(a,b)$ et dans tous les points de $M_0(a,b)$.

Définition 5.3.2. *La fonction $f(x,y)$ est dite continue au point $M_0(a,b)$ si*

$$\lim_{x\to a, y\to b} f(x,y) = f(a,b), \qquad \text{ou} \qquad \lim_{M\to M_0} f(x,y) = f(a,b).$$

- ▷ *Si f est continue en chaque point de D, on dit que f est continue sur D.*
- ▷ *Si f est continue sur D, alors les fonctions partielles associées à f en un point sont continues sur D.*

Opérations algébriques : comme pour les fonctions d'une variable, la somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues sont continues.

Exemple 5.3.1. *Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. La fonction f est définie sur $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(0,0)$ est adhérent à D. On a :*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0.$$

Il y a donc un problème.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (|x|-|y|)^2 \geq 0$ et donc $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, (on doit mémoriser l'inégalité précédente qui est fréquemment utilisée en pratique). Par suite, pour $(x,y) \in D$,

$$|f(x,y)| = |xy|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}|xy|.$$

Maintenant, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|xy| = 0$ car la fonction $g : (x,y) \longrightarrow \dfrac{1}{2}|xy|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc en $(0,0)$ et donc $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. La fonction f a une limite en $(0,0)$ et cette limite est égale à 0.

5.4 Dérivées partielles et différentiabilité d'une fonction

Soit $(x_0,y_0) \in D$. Les dérivées partielles de f en (x_0,y_0) sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}.$$

On dit que f est de classe C^1 sur D si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D.

Le gradient de f en (x_0,y_0) est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières.

Définition 5.4.1. *Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes de f en (x_0, y_0). On les note :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0) \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).$$

De façon analogue, on peut définir les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 par récurrence.

On dit que f est de classe C^k sur D si les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D.

On dit que f est de classe C^1 sur D si les dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues sur D.

Théorème 5.4.1. *Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est continue en (x_0, y_0), alors,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Définition 5.4.2. *On dit que f est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe des constantes réelles A et B telles que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + ||(h, k)||\varepsilon(h, k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0.$

Dans ce cas, on a $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Théorème 5.4.2. *Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f admet des dérivées partielles en (x_0, y_0). Si f est de classe C^1 au voisinage de (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0).*

Les deux réciproques sont fausses.

Exemple 5.4.1. *Si pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$\frac{\partial^f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2+y^2} + x2xe^{x^2+y^2} = (2x^2 + 1)e^{x^2+y^2},$$

et

$$\frac{\partial^f}{\partial y}(x, y) = 2xye^{x^2+y^2}.$$

5.5 Intégrales double, triple

Dans cette section, on donnera uniquement quelques éléments relatifs aux calculs d'intégrales double et triple. Considérons l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

où φ et ψ sont deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors,

$$\int\int_A f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

C'est le théorème de Fubini, qui définit l'intégrale double à l'aide de deux intégrales simples.

Si $f(x, y) = 1$, l'intégrale double $\int\int_A dxdy$ est l'aire de A.

Formule de changement de variables : soit f une fonction continue sur un domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe C^1, $x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$, alors,

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_\Delta f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv.$$

Le déterminant

$$\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

est appelé jacobien.

Cas des coordonnées polaires :

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

De façon analogue, on peut définir l'intégrale triple

$$I = \int\int\int_D f(x, y, z)dxdydz$$

pour une fonction f continue sur un domaine fermé et borné D de $\mathbb{R}^3$ à l'aide d'intégrales simples successives.

Si $f(x, y) = 1$, l'intégrale triple $\int\int_D dxdydz$ est le volume de D.

On peut définir aussi (comme pour les intégrales doubles) les formules de changement de variables.

Cas des coordonnées cylindriques :

$$I = \int\int\int_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz.$$

Bibliographie

[1] K. Allab, Eléments d'Analyse, OPU, 1986.

[2] Hitta Amara, Cours Algèbre et Analyse I. (2008-2009).

[3] J. Dixmier, Cours de mathématiques du 1^{re} cycle, Dunod, 2001.

[4] Marc Hindry, Cours mathématiques premiere année (L1).

[5] Cours et exercices de maths exo7.emath.fr.

[6] M. Mechab, Cours d'algèbre LMD Sciences et Techniques.