

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE MUSTAPHA STAMBOULI DE MASCARA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DÉPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



# **Polycopié de Cours**

## **Théorie du signal**

*Présenté par :*

Dr. MOUFFAK Adnane

Ce cours est destiné aux étudiants de la 2<sup>e</sup> année Licence/spécialités  
Electrotechnique, automatique, Electronique, Télécommunications et  
Génie Biomédical

Algérie  
Février 2022

## Table des matières

<i>Table des matières</i> .....	<i>i</i>
<i>Avant-propos</i> .....	<i>1</i>
<i>Introduction générale</i> .....	<i>2</i>
<b>CHAPITRE I : Généralités sur les signaux</b>	<b>3</b>
<i>I.1 Introduction</i> .....	<i>3</i>
<i>I.2 Définitions et notions de base</i> .....	<i>3</i>
<i>I.3 Classification des signaux</i> .....	<i>5</i>
<i>I.4 Quelques signaux spéciaux</i> .....	<i>10</i>
<i>I.5 Représentation temporelle des Signaux et distributions tempérées</i> .....	<i>12</i>
<b>CHAPITRE II : Analyse de Fourier</b>	<b>19</b>
<i>II.1 Introduction</i> .....	<i>19</i>
<i>II.2 Transformée de Fourier d'une fonction apériodique</i> .....	<i>19</i>
<i>II.3 Série de Fourier d'une fonction périodique</i> .....	<i>26</i>
<i>II.4 Les distributions et transformée de Fourier</i> .....	<i>30</i>
<b>CHAPITRE III : Transformée de Laplace</b>	<b>32</b>
<i>III.1 Transformée de Laplace d'une fonction causal</i> .....	<i>32</i>
<i>III.2 Inversion des transformées de Laplace</i> .....	<i>34</i>
<i>III.3 Théorème de la valeur finale</i> .....	<i>36</i>

<b>CHAPITRE IV : Produit de convolution</b>	37
<b>IV.1 Produit de convolution</b> .....	37
<b>IV.2 Condition d'existence du produit de convolution</b> .....	39
<b>IV.3 Relation avec la transformée de Fourier</b> .....	40
<b>VI.4 Quelques caractéristiques des signaux dans l'espace <math>L_2(\infty)</math></b> .....	41
<b>VI.5 Produit de convolution pour les signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie</b> .....	42
<b>CHAPITRE V : Corrélacion des signaux</b>	43
<b>V.1 Corrélacion des signaux</b> .....	43
<b>V.2 La corrélacion n'est pas commutative</b> .....	43
<b>V.3 Fonction d'autocorrélacion</b> .....	44
<b>V.4 Relation avec la transformée de Fourier dans l'espace <math>L_2(\infty)</math></b> .....	44
<b>V.5 Propriétés de la fonction d'autocorrélacion</b> .....	45
<b>V.6 Corrélacion des signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne finie</b> .....	46
<b>V.7 Autocorrélacion d'un signal à énergie totale infinie et puissance moyenne finie</b> ...	46
<b>V.8 Densité spectrale de puissance d'un signal à énergie totale infinie</b> .....	46
<b>CHAPITRE VI: Echantillonnage et signaux discrets</b>	48
<b>VI.1 Introduction</b> .....	48
<b>VI.2 Définitions et notations</b> .....	49
<b>VI.3 L'échantillonnage idéal</b> .....	50
<b>VI.4 Interpolation ou restitution idéale</b> .....	52
<b>VI.5 Filtre analogique anti-repliement (anti-aliasing) du spectre</b> .....	55

---

<i>VI.6 Echantillonnage réel.....</i>	<i>56</i>
<i>VI.7 Quantification et codage- conversion Analogique/Numérique.....</i>	<i>58</i>
<i>VI.8 Restitution pratique approchée.....</i>	<i>62</i>
<i>VI.9 La transformation en Z.....</i>	<i>63</i>
<i>Bibliographie.....</i>	<i>73</i>

## **Avant-propos**

Le propos de ce polycopié est d'offrir un cours complet au module de la théorie du signal pour les étudiants de la 2<sup>e</sup> année Licence en spécialités de télécommunications, électronique, génie biomédical, automatique et électrotechnique. Nous avons essayé de présenter les notions essentielles d'une manière simple et progressive tout en respectant le programme décrit par le comité pédagogique national du domaine (CPND). Nous avons aussi insisté sur la rigueur mathématique en ce qui concerne le développement des différentes thématiques de ce programme, tout en reliant les principaux résultats obtenus avec la réalité physique.

Ce polycopié présente d'abord les outils classiques de l'analyse d'un signal analogique déterministe, notamment la transformée et série de Fourier, la convolution et la corrélation. Nous introduisons aussi la notion de distributions dans un sens pragmatique en premier lieu, où la distribution de Dirac est considérée comme une limite de certaine fonction particulière. Ensuite, nous abordons les distributions avec le formalisme de Schwartz. Ce dernier outil est indispensable pour modéliser les signaux discrets et échantillonnés. Aussi, nous présentons la transformée de Laplace comme un outil primordial pour l'étude des systèmes causaux. Les notions d'échantillonnage et signaux discrets sont décrites en dernier lieu.

## **Introduction générale**

La théorie du signal constitue les fondements théoriques de la discipline du traitement du signal. Cette discipline s'appuie sur des concepts théoriques, souvent mathématiques tels la théorie de distributions, l'algèbre, l'analyse et l'analyse numérique, l'optimisation, les probabilités et les statistiques.

Le traitement du signal est une discipline actuellement en pleine expansion, dont l'objet principal est l'étude, la conception et la réalisation des systèmes d'exploitation des signaux. Ces derniers peuvent être par exemple, un véhicule d'une information (codage et modulation), récupération d'une information (décodage et démodulation), systèmes de télédétection, systèmes de prospection par satellite de ressources naturelles, systèmes de prévisions météorologiques, ou bien tout simplement diminution de l'effet des parasites (bruits) sur l'information (filtrage, déconvolution, ..., etc.).

Les supports physiques de réalisation de ces systèmes ressortissent en général à l'électronique et/ou à l'informatique, plus rarement à l'optique ou l'acoustique. En effet, les progrès de fabrication des semi-conducteurs et la microélectronique des circuits VLSI (Very Large Scale Integration), permettent le développement de diverses solutions technologiques de réalisation telles que les processeurs de traitement du signal DSP (Digital Signal Processing), les processeurs spécialisés de types ASIC (Application Specific Integrated Circuits) et les FPGA (Field Programmable Gate Array). Parallèlement, les outils de programmation de ces circuits intégrés, notamment les langages évolués et visuels (C++, VHDL, ..., etc.), ont beaucoup facilité la mise en œuvre des algorithmes sophistiqués de traitement des signaux.

Le traitement du signal intéresse des domaines très variés tels que les filières du génie électrique, notamment les télécommunications, l'électronique et le génie biomédical. Il peut toucher aussi d'autres domaines tels que la géophysique, l'astronomie, la physique, la biologie et même l'économie. Ainsi, l'existence et l'importance de cette discipline apparaissent clairement dans la diversité des activités humaines.

Notons qu'il y a des disciplines traitant un objet de même nature, mais dans un contexte différent telles que la robotique, l'automatique centrée sur des problèmes d'identification et de commande, le traitement des données s'adressant plutôt à des ensembles n'ayant pas le caractère de « signaux », la reconnaissance des formes, l'intelligence artificielle et la recherche opérationnelle.

Parmi les tâches importantes rencontrées en traitement du signal, nous pouvons citer : l'étude des signaux engendrés par des phénomènes ou dispositifs physiques et leur modélisation ; l'étude et la conception des systèmes de traitement du signal ; et le développement et la réalisation des systèmes de traitement du signal et en particulier les outils de base tels que les circuits intégrés spécialisés en traitement et acquisition des signaux.

## Chapitre I: Généralités sur les signaux

### *1.1 Introduction*

Dans ce premier chapitre, nous présentons les principaux fondements de la théorie du signal, nous focalisons sur des notions essentielles telles que la définition et la classification des signaux, leur représentation temporelle, les notions d'énergie totale et la puissance moyenne totale, ainsi que les signaux usuels tels que les fonctions porte et échelon unitaire et la distribution de Dirac, et qui peuvent être utilisés en modélisation des phénomènes physiques.

### *1.2 Définitions et notions de base*

#### *1.2.1 Signal*

Un signal est le véhicule ou le support physique porteur d'une information utile à l'observateur. Il représente la manifestation physique d'une grandeur mesurable de nature quelconque (électrique, optique, acoustique, électromagnétique, température, pression,..., etc.). Il peut dépendre d'une ou plusieurs variables souvent indépendantes telles que l'espace, le temps ou la fréquence.

Exemples :

Onde acoustique : propagation de la pression dans un milieu (en air : on parle du son, en océans : océanogramme, en corps humain : échogramme).

Signaux biologiques : signaux d'ElectroEncephaloGramme (EEG), signaux d'ElectroCardioGramme (ECG).

Signaux géophysiques ou sismogramme : vibrations sismiques dans les sous-couches terrestres.

Finances : cours de la bourse.

Multimédias : images, vidéos et parole.

#### *1.2.2 Bruit*

Un bruit est tout phénomène perturbateur pouvant gêner la perception ou l'interprétation d'un signal. La notion du bruit est relative et dépend de l'intérêt de l'utilisateur (ou l'observateur). Par exemple les ondes électromagnétiques astronomiques (infrarouge, ultraviolet, rayons X et rayons Gamma) sont considérés comme bruit en télécommunications, et des signaux utiles en radioastronomie.

### I.2.3 Rapport Signal sur Bruit (Signal Noise Ratio : SNR)

C'est une mesure de la quantité du bruit contenue dans un signal. Il s'exprime par le rapport des puissances respectivement du signal ( $P_s$ ) et du bruit ( $P_N$ ). Il est souvent donné en décibels, tel que :

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \left( \frac{P_s}{P_N} \right) \quad (I.1)$$

### I.2.4 Support d'une fonction ou signal $s(t)$

Le support d'une fonction représentant un signal est la partie de son ensemble de définition sur laquelle se concentre l'information utile de cette fonction ou signal. Autrement dit, c'est la partie du domaine où elle n'est pas nulle.

### I.2.5 La discipline : théorie du signal et traitement du signal

#### I.2.5.1 La Théorie du signal

C'est l'ensemble des théories et outils mathématiques, par exemples : théorie de distribution, algèbre, analyse, méthodes numériques et optimisation, probabilités et statistiques, permettant l'étude et la conception des systèmes d'exploitation des signaux. Nous citons en particulier dans ce contexte, l'analyse des signaux par transformée et série de Fourier, la théorie des systèmes linéaires invariants dans le temps et la transformée de Laplace, la convolution et la déconvolution, la corrélation et l'autocorrélation.

#### I.2.5.2 Le Traitement du signal

Le traitement du signal est une discipline dont l'objet principal est l'étude, la conception et la réalisation des systèmes d'exploitation des signaux. Ces derniers peuvent être par exemple, un système de véhicule d'une information (codage et modulation), récupération d'une information (décodage et démodulation), ou bien tout simplement diminution de l'effet des parasites (bruits) sur l'information (filtrage, déconvolution, ..., etc.).

Des disciplines traitant un objet de même nature dans un contexte différent sont nombreuses telles que la robotique, l'automatique centrée sur les problèmes d'identification et de commande, le traitement des données s'adressant plutôt sur des ensembles n'ayant pas le caractère de « signaux » par exemple les bases de données et les enregistrements, la reconnaissance de formes, la mise en correspondance, l'intelligence artificielle et la recherche opérationnelle [1].

#### I.2.5.2.1 Les supports physiques de réalisation des systèmes d'exploitation des signaux

Les supports physiques de réalisation de ces systèmes ressortissent en général à l'électronique et/ou à l'informatique, plus rarement à l'optique ou l'acoustique. En effet, les progrès de fabrication des semi-conducteurs et la microélectronique des circuits VLSI (Very Large Scale Integration), permettent le développement de diverses solutions technologiques de réalisation telles que les processeurs de traitement du signal DSP (Digital Signal Processing), les processeurs spécialisés de types ASIC (Application Specific Integrated Circuits) et les FPGA (Field Programmable Gate Array). Parallèlement, les outils de

programmation de ces circuits intégrés, notamment les langages évolués et visuels (C++, VHDL,..., etc.), ont beaucoup facilité la mise en œuvre des algorithmes sophistiqués de traitement des signaux.

#### I.2.5.2.2 Les domaines d'application

Les domaines d'application se sont multipliés : les télécommunications, l'image, la parole et les signaux audio, les signaux géophysiques, la prospections minières et pétrolière, les signaux biomédicaux, le radar, le sonar, le guidage et la navigation, les réacteurs nucléaires, la télédétection, la cartographie, l'économie,..., etc.

#### I.2.5.2.3 Les taches importantes

Parmi les taches importantes rencontrées en traitement du signal, nous pouvons citer :

1. L'étude des signaux engendrés par des phénomènes ou dispositifs physiques et leur modélisation.
2. L'étude et la conception des systemes de traitement du signal. Dans la conception de ces systemes, nous pouvons distinguer :
  - La mise au point des moyens de base de traitement du signal, correspondant à des traitements plus ou moins standards applicables à des situations classiques : le filtrage linéaire et invariant dans le temps (LIT), les méthodes de synthèse des filtres analogiques et/ou des filtres numériques, le filtrage de Wiener, le filtrage de Kalman, les transformations rapides, les méthodes d'analyse spectrale, l'échantillonnage, ..., etc.
  - L'étude des systèmes à modélisation stochastique. Une telle étude peut en particulier concerne l'extraction de l'information transportée par un signal lorsque ce dernier est aléatoire ou n'est observable qu'après perturbation aléatoires. Les opérations de base à effectuer sont : la détection, l'estimation, la classification, la déconvolution, le codage, décodage,..., etc.
3. Le développement et la réalisation des systemes de traitement du signal et en particulier les outils de base tels que les circuits intégrés dédiés au traitement du signal (DSP, ASIC,...,etc.).

### ***1.3 Classification des signaux***

Nous pouvons envisager plusieurs critères de classification des signaux selon les caractéristiques considérées. Nous citons :

#### *1.3.1 Classification phénoménologique (statistique)*

Cette classification considère la nature de la description du comportement ou l'évolution du signal en fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes, souvent le temps et/ou l'espace. Celle-ci conduit à deux classes de signaux, à savoir : les signaux déterministes ou certains et les signaux aléatoires ou stochastiques.

##### I.3.1.1 Signaux déterministes

Leur description est unique, prévisible avec certitude et peut être parfaitement modélisée par une fonction ou distribution mathématique de variables indépendantes le temps et/ou l'espace. Ainsi, un signal déterministe peut être reproduit d'une façon rigoureuse et identique. Les signaux déterministes

admettent une représentation unique, généralement du premier ordre : signal temporel  $s(t)$  ou bien spectre fréquentiel  $S(f)$ , contrairement aux signaux aléatoires où leur étude exige une représentation du second ordre telle que la fonction de corrélation et la densité spectrale.

Parmi les signaux déterministes, nous distinguons les sous-classes suivantes :

#### I.3.1.1.1 Signaux périodiques

Leur description ou évolution se reproduit infiniment d'une façon régulière et identique à des intervalles de temps égaux. Ces signaux sont caractérisés par leur période  $T$ , qui est la plus petite durée au bout de laquelle l'évolution du signal peut se reproduire d'une manière similaire et identique. Si le signal périodique de période  $T$  est représenté par une fonction  $s(t)$ , alors nous avons :

$$\forall t \quad s(t+T) = s(t) \quad (\text{I.2})$$

Exemples : Parmi les phénomènes représentés par des signaux périodiques, nous citons :

Les battements du cœur (signal ECG) et le mouvement des planètes autour du soleil.

#### I.3.1.1.2 Signaux aperiodiques ou non périodiques

Ce sont des signaux où il n'existe pas de constante pour laquelle l'expression (1.2) est vérifiée. Leur évolution dans le temps n'est pas reproduite à l'infini.

#### I.3.1.2 Signaux aléatoires ou stochastiques

Leur description n'est pas unique, imprévisible et dépend du hasard. Ainsi, une description complète de leur évolution en fonction du temps et/ou l'espace exige la connaissance de leurs propriétés statistiques qui peuvent être obtenues par une infinité de descriptions élémentaires, chacune d'elles est engendrée par une épreuve ou réalisation. Dans ce cas, à chaque point (instant et/ou coordonnées), la fonction décrivant le signal prend une valeur particulière parmi un ensemble et ceci d'une manière aléatoire (inconnue de l'observateur). En général l'ensemble des valeurs prises par la fonction à un point donné peut être modélisé par une loi de probabilité (uniforme, gaussienne,..., etc.). Ces signaux sont connus aussi sous l'appellation de processus aléatoires ou stochastiques. Dans cette classe, nous distinguons les sous-classes suivantes :

##### I.3.1.2.1 Signaux aléatoires stationnaires

Lorsque leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps.

##### I.3.1.2.2 Signaux aléatoires non stationnaires

Lorsque leurs propriétés statistiques dépendent du temps.

#### I.3.2 Classification énergétique

L'information véhiculée par un signal lors de sa transmission, puis sa réception est liée à une transmission d'énergie. Donc, pour étudier un signal physique, nous pouvons mesurer son énergie ou sa puissance moyenne. Pour un signal  $s(t)$  déterministe, nous définissons les caractéristiques suivantes [2]:

L'énergie totale d'un signal  $s(t)$  :

$$E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\bar{s}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (I.3)$$

L'énergie partielle d'un signal  $s(t)$  jusqu'à l'instant  $t_0$  :

$$E(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s(t)\bar{s}(t)dt = \int_{-\infty}^{t_0} |s(t)|^2 dt \quad (I.4)$$

L'énergie d'un signal  $s(t)$  entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$E(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s(t)\bar{s}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \quad (I.5)$$

La puissance instantanée d'un signal  $s(t)$  :

$$p(t) = \frac{dE}{dt} = s(t)\bar{s}(t) = |s(t)|^2 \quad (I.6)$$

La puissance moyenne d'un signal  $s(t)$  entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{|t_2 - t_1|} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \quad (I.7)$$

La puissance moyenne d'un signal  $s(t)$  sur une durée  $T$  :

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \quad (I.8)$$

La puissance moyenne totale :

$$P_{moy,t} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \quad (I.9)$$

D'après l'énergie totale et la puissance moyenne totale d'un signal, nous pouvons classer les signaux en trois catégories:

### I.3.2.1 Signaux à énergie totale finie

Ces signaux ont une puissance moyenne totale nulle, nous pouvons citer comme exemple, les signaux déterministes aperiodiques et transitoires.

Exemple :

Soit le signal porte  $\Pi(t)$  centré et normalisé, défini par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Ce signal a une énergie totale finie  $E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Pi(t)|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |1|^2 dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} dt$  égale à 1.

Sa puissance moyenne totale est nulle telle que :

$$P_{moy,t} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\Pi(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |1|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} [dt]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} = 0$$

### I.3.2.2 Signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie non nulle

Nous pouvons citer comme exemple les signaux périodiques déterministes ou aléatoires, certains signaux déterministes tels que l'échelon unitaire  $\Upsilon(t)$ , appelée aussi fonction de Heaviside telle que :

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Où : l'énergie totale  $E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Upsilon(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} |1|^2 dt = \int_0^{+\infty} dt$  est infinie

Et la puissance moyenne totale :  $P_{moy,t} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\Upsilon(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |1|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} [dt]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}$

Aussi, nous avons le signe de t :  $\text{sgn}(t)$  tel que:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Où : l'énergie totale  $E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sgn}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^0 |-1|^2 dt + \int_0^{+\infty} |1|^2 dt = +\infty + \infty$  est infinie

Et la puissance moyenne totale :

$$P_{moy,t} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\text{sgn}(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 |-1|^2 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} |1|^2 dt \right] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \left( [dt]_{-\frac{T}{2}}^0 + [dt]_0^{\frac{T}{2}} \right) = 1$$

### I.3.2.2 Signaux à puissance moyenne totale infinie

Ces signaux ont une énergie totale infinie et présentent peu d'intérêt sur le plan pratique. A titre d'exemple, nous citons les signaux aléatoires à bande fréquentielle infinie comme le bruit blanc stationnaire, le signal déterministe  $s(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{\alpha t} \Upsilon(t)$  avec :  $\alpha > 0$

### I.3.3 Classification morphologique

Selon la nature de l'amplitude du signal (continue ou discrète), et la nature de son évolution dans le temps et /ou l'espace (continu ou discret), nous distinguons (Figure I.1):

#### I.3.3.1 Signaux analogiques

Ce sont des signaux naturels qui existent dans cet univers (lumière, température, pression, débit, niveau, tension, courant, charge, concentration, ..., etc.). Ils peuvent avoir une amplitude continue avec une évolution continue dans le temps et/ou l'espace.

#### I.3.3.2 Signaux échantillonnés

Ce sont des signaux analogiques échantillonnés ou mesurés à des intervalles de temps bien définis. Ils ont une amplitude continue ou analogique avec une évolution discrète dans le temps. Donc l'information n'est disponible qu'à des instants déterminés appelés instants d'échantillonnage.

#### I.3.3.3 Signaux discrets ou numériques

Ce sont des signaux où l'amplitude et le temps sont discrets. Donc, l'information n'est disponible qu'à des instants bien définis, et l'amplitude est discrète et quantifiée sous forme de code binaire (numéro en plusieurs chiffres). En pratique ces signaux sont obtenus après l'échantillonnage d'un signal analogique, suivi d'une conversion analogique numérique (CAN) (voir chapitre VI).

#### I.3.3.4 Signaux quantifiés

Ce sont des signaux à temps continu, mais à amplitude discrète. Cette dernière catégorie présente moins d'intérêt dans la pratique.

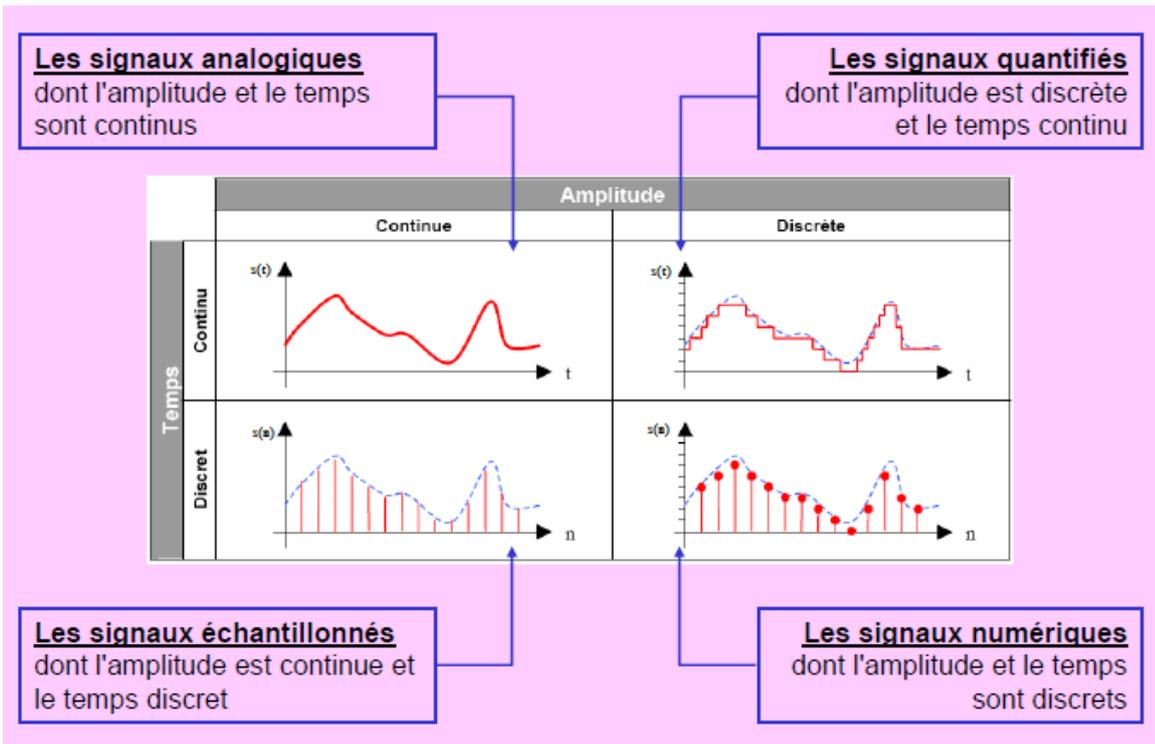


Figure I.1. Classification morphologique des signaux

### 1.4 Quelques signaux spéciaux

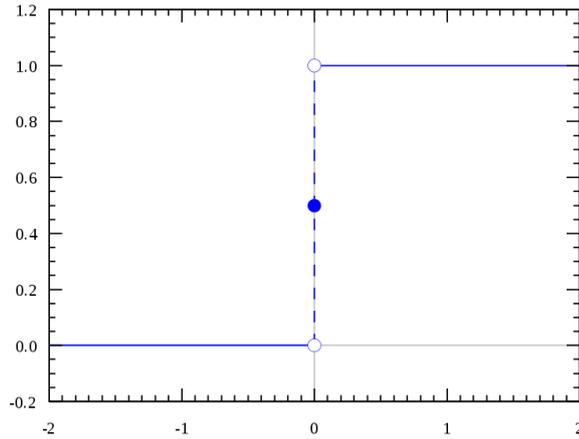
Nous illustrons quelques signaux spéciaux, souvent utilisés comme outil pour modéliser des phénomènes physiques tels que les signaux et les systèmes causaux, l'observation de durée finie d'un phénomène de durée infinie, ... ETC.

#### 1.4.1 Signal échelon unitaire ou fonction de Heaviside

Un signal échelon unitaire ou fonction de Heaviside, désigné par  $\Upsilon(t)$  ou  $H(t)$  (Eq. I.11) et définit tel que:

$$\Upsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Son allure est illustrée à la figure I.2. Ce signal peut être utilisé pour modéliser les signaux et les systèmes causaux.



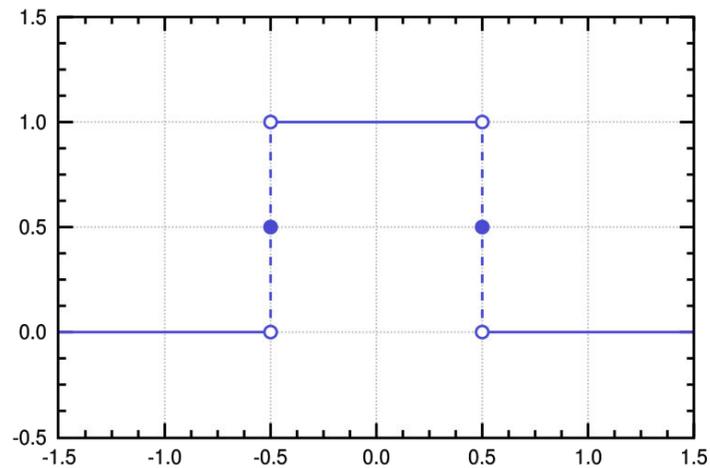
**Figure I.2.** Signal Echelon unitaire ou fonction de Heaviside  $\Upsilon(t)$

#### I.4.2 Signal porte

Un signal porte centré et normalisé, désigné par  $\Pi(t)$  (Eq. I.10) et définit tel que:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Son allure est illustrée à la figure I.3



**Figure I.3.** Signal porte  $\Pi(t)$  centré et normalisé

Le signal porte  $\Pi(t)$  est normalisé du fait que ses dimensions (largeur et hauteur) sont égales à 1, son énergie totale est égale à 1 et aussi sa surface  $S$  est égale à 1. Ainsi nous avons d'une manière générale pour un signal  $s(t)$  :

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt \quad (\text{I.13})$$

Si l'intégrale (I.13) existe alors, nous disons que le signal  $s(t)$  est *absolument sommable ou intégrable*.

Il est clair que le signal porte  $\Pi(t)$  est absolument sommable et que sa surface

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Pi(t)| dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \Pi(t) dt \text{ est égale à } 1.$$

Nous avons aussi la relation entre les deux signaux  $\Pi(t)$  et  $\Upsilon(t)$  telle que:

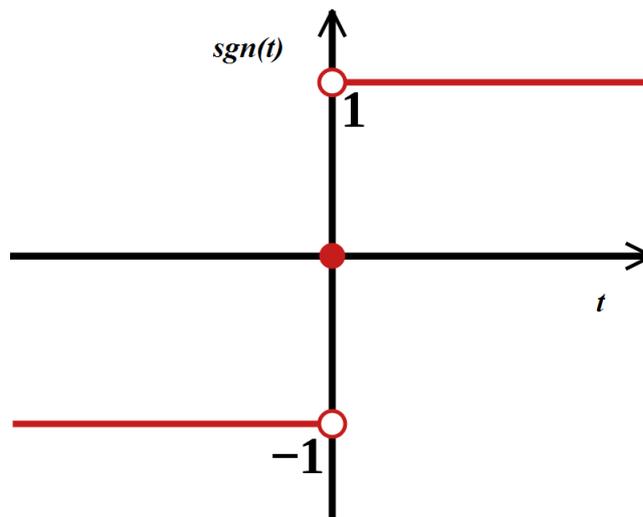
$$\Pi(t) = \Upsilon\left(t + \frac{1}{2}\right) - \Upsilon\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{I. 14})$$

### I.4.3 Signal signe de t

Un signal signe de t, désigné par  $\text{sgn}(t)$  (Eq. I.12) et définit tel que:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ -1 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Son allure est illustrée à la figure I.4



**Figure I.4.** Signal  $\text{sgn}(t)$

## I.5 Représentation temporelle des Signaux et distributions tempérées

### I.5.1 Problématiques de représentation temporelle des signaux

Un signal est souvent représenté par l'évolution de sa puissance ou son amplitude dans le temps et/ou dans l'espace. C'est la représentation la plus naturelle d'un signal, désignée souvent par *la représentation temporelle*. Dans le cas où cette évolution est continue, la représentation temporelle du signal est faisable par une fonction continue d'une variable réelle indépendance. Cependant, dans le cas où cette évolution présente des sauts et des discontinuités, par exemple le cas d'un signal discret, ce

dernier ne peut pas être représenté par une fonction du fait qu'il y a des difficultés pour dériver ou intégrer une fonction discontinue d'une variable réelle indépendante. C'est pour cette raison que le concept de distributions, appelé aussi fonctions généralisées, a été introduit dans le but de palier les imperfections et les difficultés rencontrées lors de la dérivation ou l'intégration d'une fonction discontinue et même en calcul du spectre d'un signal.

En effet, l'analyse spectrale d'un signal déterministe au sens de fonctions nécessite la connaissance au préalable de la nature du signal. Si le signal est périodique par exemple, on a recours à la série de Fourier pour calculer son spectre ; sinon dans le cas d'un signal apériodique à énergie totale finie et puissance moyenne totale nulle, on utilise la transformée de Fourier. Nous verrons que le concept de distributions permet de calculer le spectre d'un signal déterministe sans savoir au préalable sa nature s'il est périodique, apériodique, discret..., ETC. [3]. En plus, ce concept de distributions permet aussi de calculer le spectre des signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne finie comme le cas d'un signal sinusoïdal ou échelon unitaire, et même permet de modéliser certaines opérations sur les signaux comme l'échantillonnage (chapitre VI).

Nous introduisons la notion de distributions dans un sens pragmatique en premier lieu, où la distribution de Dirac par exemple est considérée comme une limite de certaine fonction particulière. Ensuite, nous abordons les distributions avec le formalisme de Schwartz. Ce dernier outil est indispensable pour modéliser les signaux discrets et échantillonnés (voir chapitre VI).

### 1.5.2 Définition de Distribution de Dirac par approche pragmatique

Soit une fonction porte  $\Pi_T(t)$  centrée de largeur  $T$  et surface égale à 1, telle que :

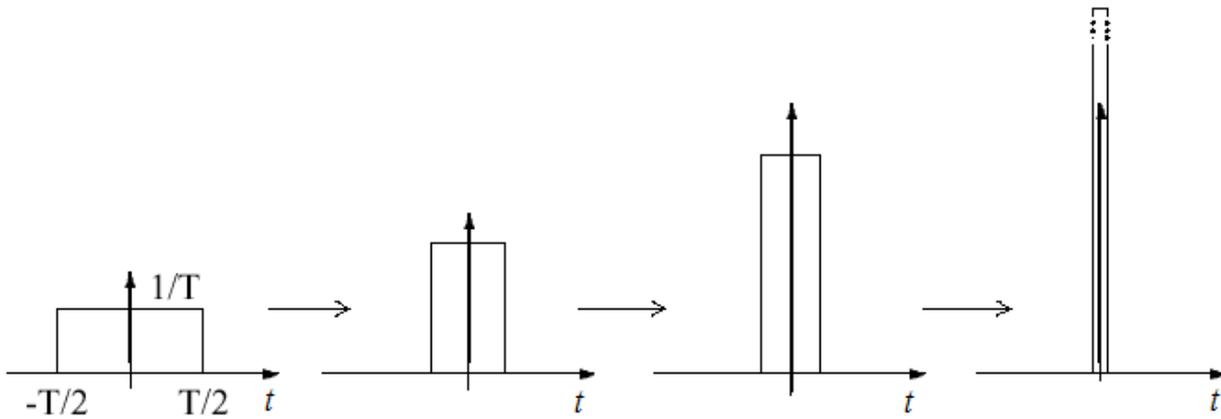
$$\Pi_T(t) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Par approche pragmatique, nous définissons la distribution ou fonction généralisée de Dirac (figure I.5), notée par  $\delta(t)$  telle que:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

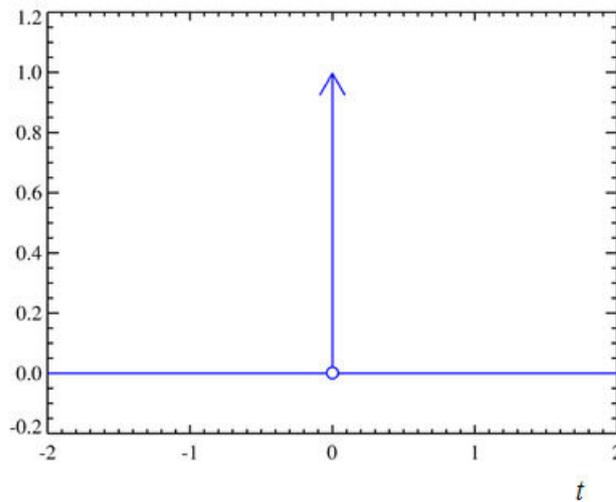
Avec la surface normalisée  $S$  telle que :

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(t) \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow 0} |\Pi_T(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{I.17})$$



**Figure I.5.** Définition de la Distribution de Dirac à partir d'une fonction porte de largeur  $T$

Nous présentons symboliquement la distribution de Dirac à l'origine par une flèche (du fait que sa valeur est infinie) d'amplitude 1 (figure I.6).



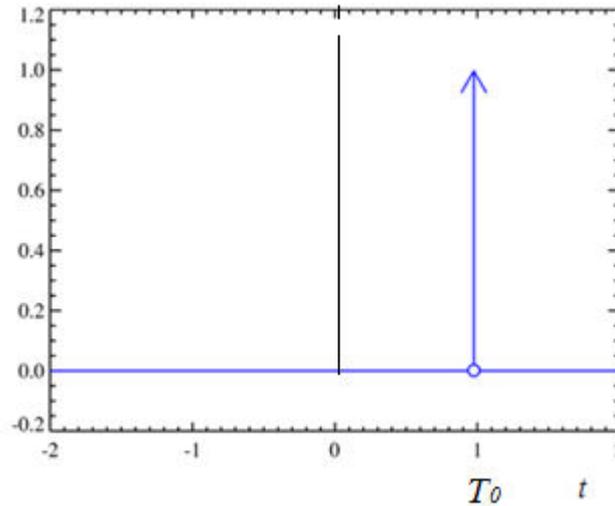
**Figure I.6.** Illustration symbolique utilisée pour représentation graphique d'une distribution de Dirac à l'origine.

Il est clair que  $\delta(t)$  ne peut pas être une fonction, car d'une part sa valeur à  $t=0$  est infinie et son support est presque nul et d'autre part sa surface est égale à 1. L'intégration ne peut pas être effectuée au sens de Riemann mais plutôt au sens de Lebesgue [2].

Nous définissons aussi une distribution de Dirac translatée à  $t = T_0$ , désignée par  $\delta_{T_0}(t)$ , telle que :

$$\delta_{T_0}(t) = \delta(t - T_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = T_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

La distribution traduite  $\delta_{T_0}(t) = \delta(t - T_0)$  peut être illustrée symboliquement par une flèche à  $t = T_0$  d'amplitude 1 (figure I.7).



**Figure I.7.** Illustration symbolique utilisée pour représentation graphique d'une distribution de Dirac traduite à  $t=T$ .

### I.5.3 Propriétés de la distribution de Dirac

#### I.5.3.1 Changement d'échelle et distribution de Dirac

Nous définissons la distribution  $\delta(at)$ , avec  $a \in \mathbb{R}^*$  telle que :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (\text{I.19})$$

#### I.5.3.2 Multiplication de la distribution de Dirac avec une fonction

La multiplication d'une fonction  $\psi(t)$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  par la distribution de Dirac correspond au produit de la valeur de cette fonction à  $t = 0$  par la distribution de Dirac. Nous avons donc :

$$\psi(t)\delta(t) = \psi(0)\delta(t) \quad (\text{I.20})$$

Nous disons que la distribution de Dirac se comporte comme un échantillonneur.

De la même façon, la multiplication d'une fonction  $\psi(t)$  par la distribution  $\delta_{T_0}(t)$  de Dirac traduite à  $t = T_0$  correspond au produit de la valeur de cette fonction à  $t = T_0$  par la distribution  $\delta_{T_0}(t)$ . Nous avons donc :

$$\psi(t)\delta_{T_0}(t) = \psi(t)\delta(t - T_0) = \psi(T_0)\delta(t - T_0) \quad (\text{I.21})$$

## I.5.3.3 Convolution de la distribution de Dirac avec une fonction

Nous verrons au chapitre IV que le produit de convolution d'un signal  $s(t)$  par la distribution de Dirac  $\delta(t)$  correspond au même signal  $s(t)$ . Nous avons donc :

$$s(t) * \delta(t) = s(t) \quad (\text{I.22})$$

Nous disons que la distribution de Dirac  $\delta(t)$  se comporte comme un élément neutre avec l'opérateur de convolution  $*$ .

De la même façon, la produit de convolution d'un signal  $s(t)$  par la distribution  $\delta_{T_0}(t)$  de Dirac tradatée à  $t = T_0$  correspond au signal tradaté  $s(t - T_0)$ . Nous avons donc :

$$s(t) * \delta_{T_0}(t) = s(t) * \delta(t - T_0) = s(t - T_0) \quad (\text{I.23})$$

## I.5.4 Définition rigoureuse de la distribution

Une distribution  $f$  peut être définie comme une fonctionnelle qui associe une fonction  $\varphi(t)$  dans l'espace des fonction indéfiniment dérivable et à décroissance rapide, désigné par  $S$ , à un nombre complexe  $\langle f, \varphi(t) \rangle$ , telle que :

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi(t) &\mapsto \langle f, \varphi(t) \rangle = \int f(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

Nous disons alors que la distribution  $f$  est une *distribution régulière* et tempérée dans l'espace  $S'$ .

Si  $\varphi(t)$  appartient à l'espace des fonctions indéfiniment dérivable et à support borné, désigné par l'espace  $D$ , alors la distribution engendrée est dite distribution régulière non tempérée dans l'espace  $D'$ , elle est définie par l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi(t) &\mapsto \langle f, \varphi(t) \rangle = \int f(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Une distribution dans l'espace  $S'$  ou  $D'$  est dite singulière si elle n'est pas régulière. C'est l'exemple de la distribution de Dirac, nous pouvons ainsi la définir au sens de distributions par :

$$\langle \delta, \varphi(t) \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D \text{ ou } S \quad (\text{I.26})$$

## I.5.5 Operations sur les distributions

## I.5.5.1 Addition, multiplication par scalaire

$f$  et  $g$  étant des distributions. L'addition et la multiplication par un scalaire  $a$  sont respectivement définies par [2]:

$$\langle f + g, \varphi(t) \rangle = \langle f, \varphi(t) \rangle + \langle g, \varphi(t) \rangle \quad (\text{I.27})$$

$$\langle af, \varphi(t) \rangle = a \langle f, \varphi(t) \rangle \quad (\text{I.28})$$

## I.5.5.2 Translation

$$\langle f_T, \varphi(t) \rangle = \langle f(t-T), \varphi(t) \rangle = \langle f, \varphi(t+T) \rangle \quad (\text{I.29})$$

Exemple :

$$\langle \delta_T, \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t-T), \varphi(t) \rangle = \langle \delta, \varphi(t+T) \rangle = \varphi(0+T) = \varphi(T) \quad (\text{I.30})$$

## I.5.5.3 Homothétie ou changement d'échelle

$$\langle f(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle f, \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle \quad (\text{I.31})$$

Exemple :

$$\langle \delta(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \delta, \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0) = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta(t), \varphi(t) \right\rangle \quad (\text{I.32})$$

D'où :  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

## I.5.5.4 Dérivée d'une distribution

$f$  étant une distribution, nous appelons dérivée de la distribution  $f$ , notée par  $\frac{df}{dt}$ , la distribution définie par :

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi(t) \right\rangle = - \left\langle f, \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\rangle \quad (\text{I.33})$$

De la même façon, nous définissons la dérivée d'ordre  $n$  par :

$$\left\langle \frac{d^{(n)}f}{dt^{(n)}}, \varphi(t) \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^{(n)}\varphi(t)}{dt^{(n)}} \right\rangle \quad (\text{I.34})$$

## I.5.5.5 Dérivée d'une fonction discontinue

Une fonction  $f$  qui présente des discontinuités et qui n'est pas dérivable aux points de discontinuités peut être dérivée au sens de distributions telle que chaque fonction  $f$  peut être associée à une distribution  $f$  égale à la fonction aux points continus en additionnant aux points de discontinuités  $t = t_d$ , les écarts  $\sigma_{t_d}$  entre les valeurs à droite et à gauche  $[\sigma_{t_d} = f(t_d^+) - f(t_d^-)]$  et en les multipliant par une distribution échelon unitaire  $\Upsilon(t)$  [2]. Nous avons donc :

$$[f(t)]_{distribution} = [f(t)]_{fonction\ aux\ points\ continus} + [f(t_d^+) - f(t_d^-)]_{points\ discontinus\ t_d} \Upsilon(t) \quad (I.35)$$

Il en découle de (I.35) que la dérivée de  $f$  au sens de distributions peut être définie par :

$$[f'(t)]_{distribution} = [f'(t)]_{fonction\ aux\ points\ continus} + [f(t_d^+) - f(t_d^-)]_{points\ discontinus\ t_d} \delta(t) \quad (I.36)$$

Exemple : la dérivée de la distribution échelon unitaire (Heaviside)  $\Upsilon(t)$

$$[\Upsilon'(t)]_{distribution} = [\Upsilon'(t)]_{fonction\ aux\ points\ continus} + [\Upsilon(0^+) - \Upsilon(0^-)]_{points\ discontinus\ 0} \delta(t)$$

D'où :

$$[\Upsilon'(t)]_{distribution} = 0 + (1 - 0) \delta(t) = \delta(t) \quad (I.37)$$

## Chapitre II: Analyse de Fourier

### II.1 Introduction

Généralement à un signal quelconque correspond deux représentations usuelles :

Une représentation temporelle  $s(t)$ , elle est souvent considérée naturelle, par laquelle l'évolution de l'amplitude du signal  $s(t)$  est décrite en fonction de la variable  $t$  qui traduit le temps qui s'écoule. Dans certain cas, il s'agit de la variable de l'espace  $x$  (les abscisses). Alors, le signal  $s(x)$  est représenté par l'évolution de son amplitude en fonction de la variable de l'espace  $x$ .

Une représentation fréquentielle qui dépend de la fréquence  $f$ , celle-ci est homogène à  $\frac{1}{t}$ . Le passage de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle dépend de la nature du signal s'il est périodique ou apériodique. Il s'agit de deux outils mathématiques, à savoir : la transformée de Fourier et la série de Fourier.

### II.2 Transformée de Fourier d'une fonction apériodique

#### II.2.1 Définition

Soit un signal apériodique définit par sa représentation temporelle sous forme de fonction de la variable indépendante le temps  $t$ , tel que :

$$\square \rightarrow \square$$

$$t \mapsto s(t)$$

Nous appelons transformée de Fourier de la fonction  $s(t)$ , l'intégrale impropre  $S(f)$ , sous condition de convergence, telle que :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad (\text{II.1})$$

Nous écrivons ainsi :  $s(t) \xrightarrow{TF} S(f)$ , ou bien :  $S(f) = F[s(t)]$ . Cette intégrale lorsqu'elle existe est appelée aussi spectre du signal  $s(t)$ .

Exemple 1 :

Soit le signal porte  $\Pi(t)$  centré et normalisé (Eq.I.10), défini par :  $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Ce signal est apériodique à support borné  $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ . Il est absolument sommable et son énergie totale égale à 1. Il est aussi centré par rapport à l'origine. En appliquant la définition de la TF (II.1), nous avons :

$$F[\Pi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2j\pi ft} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2j\pi ft} dt = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(f) \quad (\text{II.2})$$

Dans ce cas, le spectre de  $\Pi(t)$  est une fonction de fréquence appelée sinus cardinal normalisé. Cette normalisation est justifiée par le fait que son énergie égale à 1. La figure II.1 illustre la fonction sinus cardinal normalisé  $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$  (en bleu) et le sinus cardinal non normalisé  $\frac{\sin(f)}{f}$  (en rouge).

Exemple 2 : Soit le signal échelon unitaire (fonction de Heaviside) (Eq.I.11)  $\Upsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$$\text{Nous avons : } F[\Upsilon(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(t) e^{-2j\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2j\pi ft} dt = \left[ -\frac{1}{2j\pi f} e^{-2j\pi ft} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2j\pi f} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2j\pi f} e^{-2j\pi ft} \right)$$

L'intégrale ci-dessus diverge car :

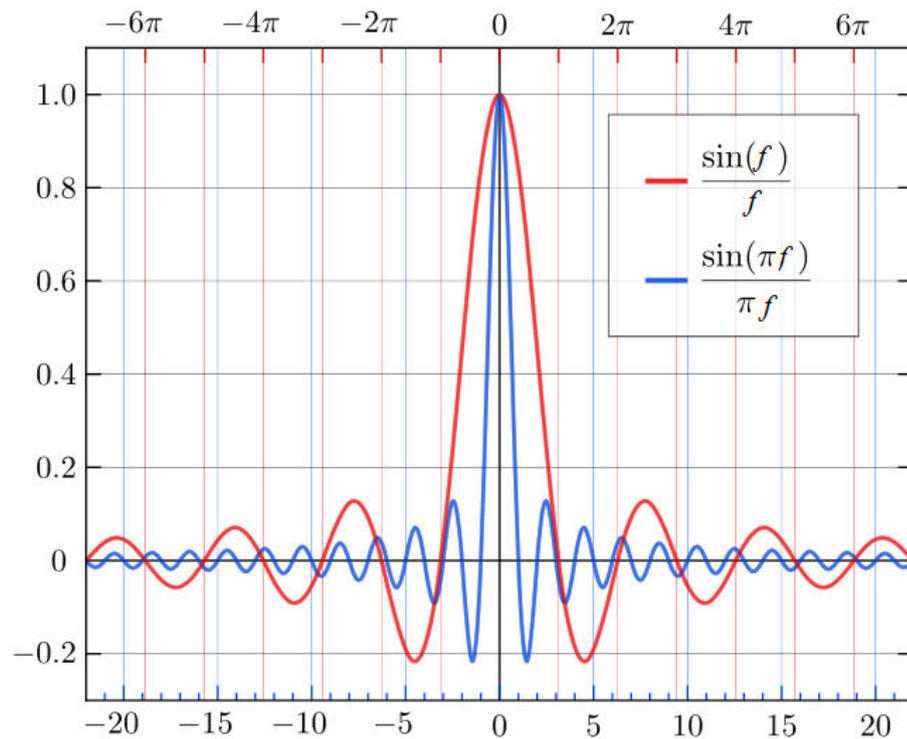
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2j\pi f} e^{-2j\pi ft} \right) = \frac{1}{2j\pi f} \lim_{t \rightarrow +\infty} [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] = \frac{1}{2j\pi f} \left[ \lim_{t \rightarrow +\infty} (\cos(2\pi ft)) - j \lim_{t \rightarrow +\infty} (\sin(2\pi ft)) \right]$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\cos(2\pi ft))$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\sin(2\pi ft))$  ne sont pas uniques et peuvent prendre toute valeur entre  $[-1, +1]$ . D'où les deux limites n'existent pas (la limite doit être unique et finie pour qu'elle existe).

Donc, la transformée de Fourier de  $\Upsilon(t)$  n'existe pas au sens des fonctions, nous verrons qu'elle existe au sens de distribution.

Exemple 3 : Calculez la transformée de Fourier de  $e^{-at}\Upsilon(t)$  avec :  $a > 0$

$$F[e^{-at}\Upsilon(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\Upsilon(t) e^{-2j\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-2j\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2j\pi f)t} dt = \left[ -\frac{1}{a+2j\pi f} e^{-(a+2j\pi f)t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2j\pi f}$$



**Figure II.1.** Illustration du spectre d'une porte : c'est un sinus cardinal normalisé (en bleu)

### II.2.2 Condition de convergence (d'existence)

La transformée de Fourier  $S(f)$  existe si  $s(t)$  est absolument sommable, autrement dit :

$$S = \int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt \text{ existe} \quad (\text{II.3})$$

Compte tenu de l'inégalité :  $\int |s(t)|^2 dt \leq \left[ \int |s(t)| dt \right]^2$ , les signaux aperiodiques à énergie totale finie (à puissance moyenne nulle) ont toujours une transformée de Fourier [3].

II.2.3 Propriétés de la transformée de Fourier (TF)

Les propriétés les plus usuelles sont citées au tableau II.1 ci-dessous:

$s(t)$	$S(f)$	désignation de la propriété
$s_1(t)$	$S_1(f)$	
$s_2(t)$	$S_2(f)$	
$\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$	$\alpha S_1(f) + \beta S_2(f)$	linéarité
$s(t - a), a \in \mathbb{R}$	$e^{-2j\pi fa} S(f)$	translation temporelle
$e^{+2j\pi f_0 t} s(t), f_0 \in \mathbb{R}$	$S(f - f_0)$	translation complexe
$s(at), a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$	Similitude ou changement d'échelle
$\bar{s}(t)$	$\bar{S}(-f)$	parité
$S(t)$	$s(-f)$	symétrie
$s'(t), s(\infty) = 0$	$2j\pi f S(f)$	dérivée
$s^{(n)}(t),$ $s(\infty) = 0, s'(\infty) = 0, \dots, s^{(n-1)}(\infty) = 0$	$(2j\pi f)^n S(f)$	dérivée nième
$(-2j\pi t) s(t)$	$S'(f)$	Dérivée fréquentielle
$(-2j\pi t)^n s(t)$	$S^{(n)}(f)$	dérivée nième fréquentielle
$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(f) S_2(f)$	Convolution (voir §-1.5)
$s_1(t) s_2(t)$	$S_1(f) * S_2(f)$	convolution

**Tableau II.1.** Principales propriétés de la transformée de Fourier

NB : Généralement, lorsqu'un signal  $s(t)$  est à support borné, il est recommandé que le calcul soit direct en appliquant la définition de la transformée de Fourier (TF) (II.1). Cependant, dans le cas d'un signal à support non borné, il est plus facile de déduire la TF par ses propriétés.

Exemple 1 : calcul indirect par propriétés

Calculez la TF du signal  $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Le calcul direct de la TF engendre l'intégrale impropre  $X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} e^{-2j\pi ft} dt$ , ce qui est difficile à effectuer, car  $x(t)$  n'est pas à support borné et les bornes d'intégration demeurent donc de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Cependant, en remarquant la propriété de la symétrie au tableau II.1 et que :  $F[\Pi(t)] = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$ ,

nous avons :  $F\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right] = \Pi(-f) = \Pi(f)$ .

Exemple 2 : Calculez la transformée de Fourier de  $\frac{\sin(t)}{t}$

En considérant que :  $s(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$  et  $F[s(t)] = S(f) = \Pi(f)$

Avec la propriété de similitude, on a :  $F[s(\alpha t)] = F\left[\frac{\sin(\pi(\alpha t))}{\pi(\alpha t)}\right] = \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right) (\alpha > 0)$

Donc on a :  $F\left[\frac{\sin(\pi \alpha t)}{\pi \alpha t}\right] = \frac{1}{\alpha} \Pi\left(\frac{f}{\alpha}\right)$ . Si :  $\pi \alpha = 1$  d'où :  $\frac{1}{\alpha} = \pi$  on a :  $F\left[\frac{\sin(t)}{t}\right] = \pi \Pi(\pi f)$

Exemple 3 : En considérant le résultat de l'exemple 3 (§-II.2.1)  $F[e^{-at} \Upsilon(t)] = \frac{1}{a+2j\pi f}$  ; en déduire la transformée de Fourier de :  $e^{-a|t|}, \forall a > 0, \frac{1}{1+t^2}$  ; ainsi que la valeur de l'intégrale :  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{1+t^2} dt$

Solution :

On a :  $e^{-a|t|} = e^{-at} \Upsilon(t) + e^{at} \Upsilon(-t)$

d'où :  $F[e^{-a|t|}] = F[e^{-at} \Upsilon(t) + e^{at} \Upsilon(-t)] = F[e^{-at} \Upsilon(t)] + F[e^{at} \Upsilon(-t)]$

Si on considère :  $F[e^{-at} \Upsilon(t)] = X(f) = \frac{1}{a+2j\pi f}$  alors on a par propriété de similitude :

$$F[e^{at} \Upsilon(-t)] = F[e^{-a(-t)} \Upsilon(-t)] = \frac{1}{|-1|} X(-f) = X(-f) = \frac{1}{a+2j\pi(-f)} = \frac{1}{a-2j\pi f}$$

d'où :  $F[e^{-a|t|}] = \frac{1}{a+2j\pi f} + \frac{1}{a-2j\pi f} = \frac{2a}{a^2 - (2j\pi f)^2} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$

En considérant la propriété de symétrie, si on a :  $F[x(t)] = X(f)$  alors :  $F[X(t)] = x(-f)$

D'où :  $F\left(\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}\right) = e^{-a|f|} = e^{-a|f|} = S(f)$ , avec :  $s(t) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$

En considérant la propriété de similitude, si on a :  $F[s(t)] = S(f)$  alors :  $F[s(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

D'où :  $F[s(\alpha t)] = F\left[\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 (\alpha t)^2}\right] = F\left(\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \alpha^2 t^2}\right) = \frac{1}{|\alpha|} e^{-a\left|\frac{f}{\alpha}\right|}$

Pour  $\alpha > 0$  on a donc :  $F[s(\alpha t)] = F\left[\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \alpha^2 t^2}\right] = F\left(\frac{\frac{2a}{\alpha}}{1 + \frac{4\pi^2 \alpha^2}{a^2} t^2}\right) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{a}{\alpha}|f|}$

d'où :  $F\left(\frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 \alpha^2}{a^2} t^2}\right) = \frac{a}{2\alpha} e^{-\frac{a}{\alpha}|f|}$

Pour :  $\frac{4\pi^2 \alpha^2}{a^2} = 1$ , on a :  $\frac{a}{2\alpha} = \pi$  et  $\frac{a}{\alpha} = 2\pi$ , d'où :  $F\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \pi e^{-2\pi|f|}$

on a :  $F\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-2j\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \sin(2\pi ft) dt = \pi e^{-2\pi|f|}$

De plus, on a :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \sin(2\pi ft) dt = 0$  (car il s'agit de l'intégrale sur intervalle symétrique d'une fonction impaire)

Et :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \cos(2\pi ft) dt$  (car il s'agit de l'intégrale sur intervalle symétrique d'une fonction paire)

Donc on a :  $F\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{1+t^2} dt = \pi e^{-2\pi|f|}$  d'où le résultat :  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi|f|}$

II.2.4 Théorème de Parseval

L'énergie totale d'un signal est indépendante de sa représentation. Ainsi, nous pouvons la calculer dans le temps par :  $\int_{\square} |s(t)|^2 dt$  et/ou dans le domaine fréquentiel par :  $\int_{\square} |S(f)|^2 df$ . Ce théorème peut être exprimé par la formule :

$$\int_{\square} |s(t)|^2 dt = \int_{\square} |S(f)|^2 df \tag{II.4}$$

II.2.5 Transformée de Fourier de quelques fonctions usuelles (Tableau II.2)

$s(t)$	$S(f)$
$\Pi(t)$ porte centrée et normalisée	$\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$
sinus cardinal normalisé $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	$\Pi(f)$
$\Lambda(t) = (1- t )\Pi(\frac{t}{2}) = \Pi(t) * \Pi(t)$	$\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}$
$\Upsilon(t)$ fonction échelon unitaire (Heaviside)	n'existe pas au sens de fonctions
$\Upsilon(t)e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{a + 2j\pi f}$
$\Upsilon(t)te^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{(a + 2j\pi f)^2}$
$\Upsilon(t)t^n e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{n!}{(a + 2j\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$

Tableau II.2. Transformée de Fourier de quelques fonctions usuelles

## II.2.6 Transformée de Fourier inverse

Nous supposons que nous avons  $S(f)$  et nous cherchons  $s(t)$  au point  $t = t_0$  sous conditions d'existence. Cette transformée s'appelle *transformée de Fourier inverse*. Sous conditions d'existence de Dirichlet, où  $s(t)$  admet un nombre fini de discontinuité, et admet à chaque point  $t = t_0$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche, nous avons:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+2j\pi f t_0} df = \frac{s(t_0^+) + s(t_0^-)}{2} \quad (\text{II.5})$$

Avec :  $s(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} s(t)$  et  $s(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} s(t)$

Si  $s(t)$  est continue au point  $t = t_0$ , nous avons :  $s(t_0^+) = s(t_0^-) = s(t_0)$  ; d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+2j\pi f t_0} df = s(t_0) \quad (\text{II.6})$$

D'une façon générale, au point  $t$ , nous avons donc :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+2j\pi f t} df \quad (\text{II.7})$$

Nous écrivons ainsi :  $F^{-1}[S(f)] = TFI[S(f)] = s(t)$ .

Exemple : Vérifier la transformée de Fourier inverse (T.F.I ou  $F^{-1}$ ) avec la fonction  $\Pi(t)$  au point :

$t_0 = \frac{1}{2}$  ; sachant que :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Solution :

On a :  $F[\Pi(t)] = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$ , ou bien :  $F^{-1}\left[\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right] = \Pi(t)$

d'où pour  $t_0 = \frac{1}{2}$ , on a :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{+2j\pi f t_0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{+j\pi f} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \cos(\pi f) df + j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi f)}{\pi f} df$$

$$\text{donc : } I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \cos(\pi f) df = \int_0^{+\infty} \frac{2\sin(\pi f)}{\pi f} \cos(\pi f) df = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f)}{2\pi f} d(2\pi f)$$

si on a :  $t = 2\pi f$  et sachant que :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ , on a :  $I_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} = \Pi(0)$

## II.3 Série de Fourier d'une fonction périodique

### II.3.1 Définitions

Soit un signal  $T$  périodique  $s_T(t)$ . Nous pouvons ainsi calculer les coefficients de Fourier définies par les formules :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} s_T(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s_T(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s_T(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Notons que les intégrales doivent être calculées sur une longueur égale à  $T$ , les limites des intégrales peuvent être quelconques, par exemple entre :  $0$  et  $T$ , ou bien entre :  $-\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2}$ , et dans le cas générale entre :  $\alpha$  et  $\alpha + T$ , avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ces limites peuvent être choisies selon l'expression du signal périodique  $s(t)$  et sa parité (paire, impaire, ..., etc.).

$\frac{1}{T}$  est appelée la fréquence fondamentale.

Nous appelons *série de Fourier* la série définie par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \quad (\text{II.9})$$

Nous parlons aussi de la forme réelle de la série de Fourier.

Nous disons que le signal  $T$  périodique  $s_T(t)$  est développable en série de Fourier s'il vérifie les conditions de Dirichlet, à savoir :

1.  $s_T(t)$  admet un nombre fini de points de discontinuité.
2.  $s_T(t)$  admet à chaque point  $t$  une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Dans ce cas, nous écrivons :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) = \frac{s_T(t^+) + s_T(t^-)}{2} \quad (\text{II.10})$$

Avec :  $s_T(t^+) = \lim_{x \xrightarrow{>} t} s_T(x)$  et  $s_T(t^-) = \lim_{x \xrightarrow{<} t} s_T(x)$

Si :  $s_T(x)$  est un signal continu au point  $t$ , nous avons :  $s_T(t^+) = s_T(t^-) = s_T(t)$ . Ainsi, le signal  $s_T(x)$  continu au point :  $x = t$ , s'écrit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) = s_T(t) \quad (\text{II.11})$$

Exemple 1: Décomposer en série de Fourier la fonction périodique suivante :

$$x(t) = \begin{cases} -A & \forall t \in [-\pi, 0[ \\ A & \forall t \in [0, \pi[ \end{cases} \text{ et } x(t + 2n\pi) = x(t) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

$$x(t) = \begin{cases} -A & \forall t \in [-\pi, 0[ \\ A & \forall t \in [0, \pi[ \end{cases} x(t + 2n\pi) = x(t) \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z} \text{ Ce qui veut dire que : } x(t) \text{ est } 2\pi -$$

périodique, en plus,  $x(t)$  est une fonction impaire (elle est symétrique par rapport à l'origine O). Il

s'ensuit que les coefficients  $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$  et  $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$  sont nuls. Les coefficients

$b_n$  peuvent être calculés sur une demi-période  $\frac{T}{2} = \pi$ , d'où :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{2}} x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} nt\right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} +A \sin(nt) dt$$

$$\text{D'où : } b_n = \begin{cases} \frac{4A}{\pi n} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sin on} \end{cases}$$

Finalement, il vient pour expression de la décomposition en série de Fourier de  $x(t)$  :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right] = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{4A}{\pi n} \sin(nt)$$

On a :  $n = 2m + 1$  si  $1 \leq n < +\infty$  alors on a :  $1 \leq 2m + 1 < +\infty$  d'où :  $0 \leq m < +\infty$  en substituant la

variable  $n$  par la variable  $m$  on a :  $x(t) = \sum_{m \geq 0} \frac{4A}{\pi(2m+1)} \sin\left[(2m+1)t\right]$  et puisque  $n$  et  $m$  sont des

variables muettes, on peut exprimer  $x(t)$  en fonction de la variable muette de départ  $n$ . On a donc :

$$x(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{4A}{\pi(2n+1)} \sin\left((2n+1)t\right)$$

Il existe une autre forme de la série de Fourier dite *forme complexe*. Celle-ci peut se manifester dans la littérature sous plusieurs définitions, nous nous limiterons à celle permettant de mieux voir les similarités avec la transformée de Fourier. Nous avons donc la forme complexe de la série de Fourier:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\pi \frac{n}{T} t} \quad (\text{II.12})$$

Avec  $c_n$  sont des coefficients complexes, tels que :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.13})$$

Les coefficients  $c_n$  s'écrivent sous la forme intégrale :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} s_T(t) e^{-2j\pi \frac{n}{T} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.14})$$

Exemple 2: Soit  $x_T(t) = t$  pour  $0 \leq t < T$  et  $T$ -périodique

- déterminer l'expression des coefficients de Fourier  $a_0, a_n$  et  $b_n$  en donnant son développement en série de Fourier.
- déterminer les coefficients complexes  $C_n$  en donnant la formule complexe de son développement en série de Fourier.

Solution :

On a :  $x_T(t) = t$  pour  $0 \leq t < T$  et  $T$ -périodique. Les coefficients de son développement en série de Fourier sont :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T t dt = \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = T$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T t \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = \frac{2}{T} \left[ \left[ \frac{T}{2\pi n} t \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right]_0^T - \int_0^T \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \right]$$

(intégration par partie :  $\int f dg = fg - \int g df$  avec :  $f = t$  et  $dg = \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$  d'où :  $df = dt$  et

$$g = \int \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = \frac{T}{2\pi n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right))$$

$$\text{Donc : } a_n = \frac{2}{T} \left[ 0 - \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2 \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right]_0^T \right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T t \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = \frac{2}{T} \left[ \left[ -\frac{T}{2\pi n} t \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right]_0^T - \int_0^T -\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \right]$$

(intégration par partie :  $f = t$  et  $dg = \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$  d'où :  $df = dt$  et

$$g = \int \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt = -\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right))$$

Donc :

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ \left[ -\frac{T}{2\pi n} t \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right]_0^T - \int_0^T -\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \right] = \frac{2}{T} \left[ -\frac{T}{2\pi n} T \cos(2\pi n) + \int_0^T \frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \right]$$

$$b_n = -\frac{T}{\pi n} + \frac{2}{T} \left[ \left(\frac{T}{2\pi n}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right]_0^T = -\frac{T}{\pi n}$$

Le signal  $x_T(t)$  a donc pour développement en série de Fourier :

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) \right] = \frac{T}{2} + \sum_{n \geq 1} \left( -\frac{T}{\pi n} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) = \frac{T}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{T}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right)$$

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & \text{pour } n \neq 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & \text{pour } n = 0 \end{cases} \text{ d'où : } C_n = \begin{cases} -j \frac{T}{2\pi n} & \text{pour } n \neq 0 \\ \frac{T}{2} & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

Le signal  $x_T(t)$  a donc pour développement en série de Fourier en forme complexe :

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+2j\pi \frac{n}{T}t} = \frac{T}{2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(-j \frac{T}{2\pi n}\right) e^{+2j\pi \frac{n}{T}t} = \frac{T}{2} - j \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{T}{2\pi n} e^{+2j\pi \frac{n}{T}t}$$

### II.3.2 Théorème de Parseval pour les signaux périodiques

Nous distinguons les deux formes réelle et complexe :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \int_{(T)} |s(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) & \text{forme réelle} \\ \frac{1}{T} \int_{(T)} |s(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 & \text{forme complexe} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

La puissance moyenne sur une période  $T$  d'un signal  $T$  périodique est indépendante de la représentation.

Ainsi, nous pouvons la calculer dans le temps par :  $\frac{1}{T} \int_{(T)} |s(t)|^2 dt$  et/ou dans le domaine fréquentiel par

$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ , avec les coefficients complexes  $c_n$  ; ou bien par la formule :  $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$ , avec les

coefficients réels  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$ .

Exemple : En considérant l'exemple 2 du §-II.3.1. Dans le cas, où seuls les quarts premières harmoniques sont considérées, donner la représentation du spectre des raies pour  $T = 1$ . Dans ce cas, vérifier la formule de Parseval en calculant la puissance moyenne sur une période dans le domaine temporel et fréquentiel.

Solution :

Le spectre d'amplitude discret  $|X(\frac{1}{T}n)|$  (spectre des raies) a pour expression :

$$|X(\frac{1}{T}n)| = |C_n| = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} & \text{pour } n \neq 0 \\ \left| \frac{a_0}{2} \right| & \text{pour } n = 0 \end{cases} = \begin{cases} \left| \frac{T}{2\pi n} \right| & \text{pour } n \neq 0 \\ \frac{T}{2} & \text{pour } n = 0 \end{cases}. \text{ Pour } T = 1, \text{ on a :}$$

$$|X(\frac{1}{T}n)| = \begin{cases} \frac{1}{2\pi|n|} & \text{pour } n \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

Pour les 04 premières harmoniques on a :  $|X(\frac{1}{T}n)|$  avec:  $n = 4$

La puissance moyenne sur une période  $T$  :  $P_T = \frac{1}{T} \int_0^T |x_T(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T t^2 dt = \frac{T^2}{3}$  (calcul dans le temps)

Pour  $T = 1$ , on a :  $P_T = \frac{1}{3} \approx 0.333$

Avec la formule de Parseval :  $P_T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{T^2}{4} + \sum_{n \geq 1} \frac{T^2}{2\pi^2 n^2}$ . Pour  $T = 1$  et  $n = 4$ , on a :  $P_T \approx \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^4 \frac{1}{2\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi^2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right) \approx 0.322$

II.3.3 Comparaison et similarités avec la transformée de Fourier

série de Fourier	transformée de Fourier
$s(t)$ est un signal $T$ périodique	$s(t)$ est un signal apériodique absolument sommable
$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) e^{-2j\pi ft} dt$ , avec : $f = \frac{n}{T}, n \in \mathbb{Z}$	$S(f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2j\pi ft} dt$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\pi ft}$ , avec : $f = \frac{n}{T}, n \in \mathbb{Z}$	$\int_{\mathbb{R}} S(f) e^{2j\pi ft} dt$
Théorème de Parseval permet le calcul de la puissance moyenne du signal sur une période $T$ $\frac{1}{T} \int_{(T)}  s(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}  c_n ^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$	Théorème de Parseval permet le calcul de l'énergie totale d'un signal $\int_{\mathbb{R}}  s(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}}  S(f) ^2 df$

Tableau II.3. Comparaison et similarités entre série et transformée de Fourier

D'après le tableau II.3, la série de Fourier permet de calculer le spectre discret d'un signal périodique, où les fréquences  $f = \frac{n}{T}$  sont discrètes et multiple de la fréquence fondamentale  $\frac{1}{T}$ . La transformée de Fourier, au sens de fonctions, permet de trouver le spectre continu d'un signal apériodique, absolument sommable.

Le théorème de Parseval pour la série et la transformée de Fourier présente des similarités. Il permet pour les deux cas de calculer respectivement la puissance moyenne d'un signal périodique sur une période  $T$ , ou l'énergie totale d'un signal apériodique, quelque soit la représentation temporelle ou fréquentielle.

II.4 Les distributions et transformée de Fourier

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'analyse spectrale d'un signal déterministe nécessite la connaissance au préalable de la nature du signal. En effet, si le signal est périodique par exemple, nous avons recours à la série de Fourier pour calculer son spectre ; sinon dans le cas d'un signal apériodique à énergie totale finie et puissance moyenne totale nulle, nous utilisons la transformée de Fourier. Dans ce paragraphe, nous abordons le spectre d'un signal au point de vue distributions. Ce concept de Transformée de Fourier au sens de distributions nous permettons de calculer le spectre d'un signal déterministe sans savoir la nature du signal s'il est périodique, apériodique, discret,..., etc [3].

II.4.1 Transformée de Fourier et distribution de Dirac

La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est définie comme une limite de la transformée de Fourier de la fonction porte  $\Pi_T(t)$  lorsque  $T$  tend vers 0.

Nous avons :

$$F[\Pi_T(t)] = F\left[\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \quad (\text{II.16})$$

D'où :

$$F[\delta(t)] = F\left[\lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(t)\right] = \lim_{T \rightarrow 0} \{F[\Pi_T(t)]\} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = 1 \quad (\text{II.17})$$

Nous montrons par la propriété de la symétrie de la transformée de Fourier que :

$$F[1] = \delta(f) \quad (\text{II.18})$$

Avec la propriété de la translation temporelle, nous avons :

$$F[\delta_{T_0}(t)] = F[\delta(t - T_0)] = e^{2j\pi fT_0} \quad (\text{II.19})$$

#### II.4.2 Spectre des fonctions sinusoidales

Le spectre des fonctions sinusoidales cosinus et sinus peut être exprimé en fonction de la distribution de Dirac dans le domaine des fréquences, tel que :

$$F[A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = \frac{A}{2} [e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)] \quad (\text{II.20})$$

Et :

$$F[A\sin(2\pi f_0 t + \varphi)] = \frac{A}{2j} [e^{j\varphi} \delta(f - f_0) - e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)] \quad (\text{II.21})$$

## Chapitre III: Transformée de Laplace

### III.1 Transformée de Laplace d'une fonction causale

#### III.1.1 Définition

Soit un signal causal défini par la fonction:  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto s(t)$

Nous appelons transformée de Laplace de la fonction causale  $s(t)$ , l'intégrale  $S(p)$ , sous condition de convergence telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt \quad (\text{III.1})$$

Avec :  $p = \sigma + 2j\pi f$  est un nombre complexe.

Nous écrivons ainsi :  $s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$ , ou bien :  $S(p) = L[s(t)]$

#### III.1.2 Condition de convergence (d'existence)

L'existence de l'intégrale de Laplace dépend de la valeur de  $\text{Re}(p) = \sigma$

Exemple : soit  $s(t) = \Upsilon(t)$ , nous avons :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} \Upsilon(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[ \frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} \quad (\text{III.2})$$

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est sous la condition :  $\text{Re}(p) = \sigma > 0$ , nous avons ainsi :

$$S(p) = \frac{1}{p} \quad (\text{III.3})$$

III.1.3 Propriétés de la transformée de Laplace

$s(t)$	$S(p)$	Condition de convergence	désignation de la propriété
$s_1(t)$	$S_1(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	
$s_2(t)$	$S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \mu_1$ $\text{Re}(p) > \mu_2$	
$\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$	$\alpha S_1(p) + \beta S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \max(\mu_1, \mu_2)$	linéarité
$s(t-a), a > 0$	$e^{-ap} S(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	translation temporelle
$e^{ct} s(t) \quad c \in \mathbb{C}$	$S(p-c)$	$\text{Re}(p-c) > \mu$	translation complexe
$s(at), a > 0$	$\frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right)$	$\text{Re}(p) > a\mu$	homothétie ou changement d'échelle
$s'(t)$	$pS(p) - s(0^+)$	$\text{Re}(p) > \mu$	dérivée
$s^{(n)}(t)$	$p^n S(p) - p^{n-1} s(0^+) - p^{n-2} s'(0^+) - \dots - s^{(n-1)}(0^+)$	$\text{Re}(p) > \mu$	dérivée nième
$ts(t)$	$-S'(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	multiplication par t
$(-t)^n s(t)$	$S^{(n)}(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	multiplication par $(-t)^n$
$\int_0^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(p)}{p}$	$\text{Re}(p) > \max(\mu, 0)$	intégrale
$\frac{s(t)}{t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{s(t)}{t} \right]$ existe	$\int_p^{+\infty} S(u) du$		division par t
$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(p) S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \max(\mu_1, \mu_2)$	convolution
$s_1(t) s_2(t)$	$\frac{1}{2j\pi} S_1(p) * S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \max(\mu_1, \mu_2)$	convolution

Tableau III.1. Propriétés de la transformée de Laplace

III.1.4 Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

$s(t)$	$S(p)$	condition de convergence
$\Upsilon(t)$	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{p+a}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$\Upsilon(t)te^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$\Upsilon(t)t^n e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$\Upsilon(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}(p) > 0$

Tableau III.2. Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

III.2 Inversion des transformées de Laplace

Soit  $S(p)$  la transformée de Laplace du signal causal  $s(t)$ . C-à-d  $S(p) = L[s(t)]$ . Le chemin inverse qui permet de calculer  $s(t)$  à partir du  $S(p)$  est appelé Transformée de Laplace Inverse. Nous écrivons ainsi:

$$S(p) \xrightarrow{TLI} s(t), \text{ ou bien : } s(t) = L^{-1}[S(p)] \text{ ou } s(t) = TLI[S(p)]$$

D'une manière générale,  $S(p)$  peut être une fonction rationnelle donnée sous la forme de fraction de polynômes en Numérateur et Dénominateur telle que:

$$S(p) = \frac{B_0 p^n + B_1 p^{n-1} + \dots + B_{n-1} p^1 + B_n}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p^1 + a_n} = \frac{N(p)}{D(p)} \tag{III.4}$$

En fonction des pôles de  $S(p)$ , qui sont les racines de  $D(p)$ , nous distinguons plusieurs cas possibles, à savoir :

III.2.1 Pôles distinctes

Quand les pôles de  $S(p)$  sont distincts, le dénominateur  $D(p)$  peut être factorisé de la forme suivante :

$$D(p) = (p - r_1)(p - r_2) \dots (p - r_n) \tag{III.5}$$

L'expansion partielle de  $S(p)$  est de la forme :

$$S(p) = \frac{K_1}{p-r_1} + \frac{K_2}{p-r_2} + \dots + \frac{K_n}{p-r_n} \tag{III.6}$$

Avec,

$$K_i = \lim_{p \rightarrow r_i} [(p - r_i)S(p)] \quad (\text{III.7})$$

La transformée inverse est :

$$s(t) = (K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} + \dots + K_n e^{r_n t})Y(t) \quad (\text{III.8})$$

$Y(t)$  est la fonction causal échelon unitaire, appelée aussi fonction de Heaviside

### III.2.2 Pôles répétés

Si dans le dénominateur  $D(p)$ , il y a des pôles qui se répètent  $q$  fois,  $D(p)$  sera factorisé de la forme suivante :

$$D(p) = (p - r)^q (p - r_1)(p - r_2) \dots (p - r_{n-q}) \quad (\text{III.9})$$

Dans l'Eq. III.9, nous considérons que  $r$  est un pôle multiple de rang  $q$ ,  $r_k$ , avec  $k=1, \dots, n-q$  sont des pôles simples.

Dans ce cas, l'expansion partielle de  $S(p)$  est de la forme :

$$S(p) = \frac{C_q}{(p-r)^q} + \frac{C_{q-1}}{(p-r)^{q-1}} + \dots + \frac{C_1}{p-r} + \frac{K_1}{p-r_1} + \frac{K_2}{p-r_2} + \dots + \frac{K_{n-q}}{p-r_{n-q}} \quad (\text{III.10})$$

Les constantes de ces fractions sont déterminées comme :

$$C_q = \lim_{p \rightarrow r} [(p - r)^q S(p)] \quad (\text{III.11})$$

$$C_{q-1} = \lim_{p \rightarrow r} \left[ \frac{d}{dt} (p - r)^q S(p) \right] \quad (\text{III.12})$$

$$C_{q-k} = \lim_{p \rightarrow r} \left[ \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (p - r)^q S(p) \right] \quad (\text{III.13})$$

La transformation inverse est :

$$s(t) = \left( \left[ \frac{C_q t^{q-1}}{(q-1)!} + \frac{C_{q-1} t^{q-2}}{(q-2)!} + \dots + \frac{C_2 t}{1!} + C_1 \right] e^{rt} + K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} + \dots + K_{n-q} e^{r_{n-q} t} \right) Y(t) \quad (\text{III.14})$$

### III.2.3 Pôles complexes conjugués

S'il y a des pôles complexes conjugués dans le dénominateur,  $D(p)$  est factorisé comme :

$$D(p) = [p - (a + jb)][p - (a - jb)](p - r_1)(p - r_2) \dots (p - r_n) \quad (\text{III.15})$$

Dans l'eq. III.15, nous considérons deux pôles complexes conjugués  $(a + jb)$  et  $a - jb$ , le reste des pôles  $r_k$  avec  $k = 1, \dots, n$  sont des pôles simples.

L'expansion partielle de  $S(p)$  est de la forme :

$$S(p) = \frac{K_c}{p-(a+jb)} + \frac{K_{-c}}{p-(a-jb)} + \frac{K_1}{p-r_1} + \frac{K_2}{p-r_2} + \dots + \frac{K_n}{p-r_n} \quad (\text{III.16})$$

La transformation inverse est :

$$s(t) = \left( \frac{1}{b} |K(a+jb)| e^{at} \sin(bt + \alpha) + K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t} + \dots + K_n e^{r_n t} \right) Y(t) \quad (\text{III.17})$$

Exemple 1 :

$$S(p) = \frac{p+2}{p(p+1)(p+3)}$$

Après décomposition, nous aurons :

$$S(p) = \frac{2}{3p} - \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{6(p+3)}$$

D'où :

$$s(t) = Y(t) \left( \frac{2}{3} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-3t}}{6} \right) \quad Y(t) \text{ est la fonction échelon unitaire.}$$

Exemple 2 :

$$S(p) = \frac{1}{p(p^2 + p + 1)}$$

Après décomposition et mise en forme par rapport aux fonctions usuelles (sin et cos)

$$S(p) = \frac{1}{p} - \frac{p + \frac{1}{2}}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right]}$$

D'où :

$$s(t) = Y(t) \left( 1 - e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right) \right)$$

### III.3 Théorème de la valeur finale

Lorsqu'on ne connaît pas la fonction  $s(t)$ , mais qu'on connaît sa transformée de Laplace  $S(p)$ , on obtient la valeur finale de  $s(t)$  directement à partir de  $S(p)$  par la formule :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} pS(p) \quad (\text{III.18})$$

## Chapitre IV: Produit de convolution

### IV.1 Produit de convolution

Nous définissons le produit de convolution ou simplement convolution de deux fonctions  $u(t)$  et  $v(t)$ , quand il existe, par :

$$h(t) = u(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)v(t-\tau)d\tau \quad (\text{IV.1})$$

Exemple 1 : Calculez le produit de convolution  $h(t) = \Upsilon(t) * \Upsilon(t)$

$$\text{Nous avons : } h(t) = \Upsilon(t) * \Upsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(\tau)\Upsilon(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} \Upsilon(t-\tau)d\tau$$

Soit le changement de variable :  $x = t - \tau$ , d'où :  $dx = d(t - \tau) = -d\tau$

Si :  $0 \leq \tau < +\infty$  alors :  $t \geq t - \tau > -\infty$  d'où :  $t \geq x > -\infty$

$$\text{Nous avons donc : } h(t) = \int_t^{-\infty} \Upsilon(x)(-dx) = \int_{-\infty}^t \Upsilon(x)dx$$

Nous distinguons plusieurs cas selon la valeur de  $t$  :

$$\text{Si } t < 0 \text{ alors : } \Upsilon(x) = 0 \text{ d'où : } h(t) = \int_{-\infty}^t \Upsilon(x)dx = 0$$

$$\text{Si } t \geq 0 \text{ alors : } h(t) = \int_{-\infty}^t \Upsilon(x)dx = \int_{-\infty}^0 \Upsilon(x)dx + \int_0^t \Upsilon(x)dx = \int_0^t dx = t$$

Donc, nous avons en récapitulation :  $h(t) = t\Upsilon(t)$

Exemple 2 : Calculez  $h(t) = \Pi(t) * \Upsilon(t)$

Nous avons : 
$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) \Upsilon(t-\tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Upsilon(t-\tau) d\tau$$

Avec le changement de variable :  $x = t - \tau$ , nous avons :  $dx = -d\tau$

Si :  $-\frac{1}{2} \leq \tau \leq +\frac{1}{2}$  alors :  $t + \frac{1}{2} \geq t - \tau \geq t - \frac{1}{2}$

Nous avons donc : 
$$h(t) = \int_{t+\frac{1}{2}}^{t-\frac{1}{2}} \Upsilon(x) (-d\tau) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x) dx$$

Nous remarquons que :  $t - \frac{1}{2} \leq t + \frac{1}{2}$ , c'est pour cette raison que notre raisonnement se base sur la position de ces deux limites par rapport à 0.

Si la plus grande limite  $t + \frac{1}{2} < 0$ , d'où :  $t < -\frac{1}{2}$  ; dans ce cas nous sommes sûre et certain que la limite

$t - \frac{1}{2}$  est aussi strictement inférieure à 0. Nous avons donc : 
$$h(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x) dx = 0 \text{ car : } \Upsilon(x) = 0$$

Si la plus petite limite  $t - \frac{1}{2} > 0$ , d'où :  $t > \frac{1}{2}$  ; dans ce cas, nous sommes certain que la limite  $t + \frac{1}{2}$  est

strictement supérieure à 0. Nous avons donc : 
$$h(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x) dx = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} d\tau = t + \frac{1}{2} - (t - \frac{1}{2}) = 1$$

Sinon, nous avons :  $t + \frac{1}{2} \geq 0$  et  $t - \frac{1}{2} \leq 0$ , d'où :  $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Nous avons donc :

$$h(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x) dx = \int_{t-\frac{1}{2}}^0 \Upsilon(x) dx + \int_0^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x) dx = \int_0^0 d\tau = t + \frac{1}{2}$$

En récapitulation, nous avons : 
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2} & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

### IV.2 Condition d'existence du produit de convolution

D'une manière générale, nous ne pouvons pas assurer la convergence du produit de convolution, mais pour certaines classes particulières de signaux, cette convergence peut être assurée. A titre d'exemple, nous considérons la classe des signaux à puissance moyenne totale nulle et énergie totale finie  $L_2(\infty)$ . Au point de vu mathématiques, cette classe peut être étudiée dans le cadre d'une structure de l'espace des signaux de Hilbert  $H$  [2].

Nous rappelons qu'un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , est appelé espace de Hilbert s'il est muni :

1. d'un produit scalaire, noté par :  $\langle x, y \rangle$  où :  $x, y \in H$  et  $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$
2. d'une norme définie par :  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , avec :  $x \in H$

Parmi les espaces de Hilbert les plus fréquemment rencontrés, nous citons l'espace des fonctions à carré sommables sur  $\mathbb{R}$ , désigné par  $L_2(\infty)$  et définie par :

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{y}(t) dt, \quad \forall x, y \in L_2(\infty) \quad (\text{IV.2})$$

Nous pouvons donc définir une norme telle que:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{x}(t) dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}, \quad \forall x \in L_2(\infty) \quad (\text{IV.3})$$

Il est clair d'après (IV.3) que les signaux de cet espace  $L_2(\infty)$  ont une énergie totale finie.

Reprenons la définition du produit de convolution (IV.1) des deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  de l'espace  $L_2(\infty)$  où : les énergies totales  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$  sont finies.

$$\text{Nous avons donc : } h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \text{donc : } \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t-\tau)|^2 d\tau}$$

Sachant que la translation n'affecte pas l'énergie d'un signal, nous avons donc :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|^2 d\tau} \quad \text{ce qui prouve la convergence de l'intégrale (IV.1), et}$$

l'existence du produit de convolution dans le cas des signaux dans l'espace  $L_2(\infty)$ .

**IV.3 Relation avec la transformée de Fourier**

Une propriété importante de la transformée de Fourier est de transformer le produit de convolution de deux fonctions dans le temps de l'espace temps  $L_2(\infty)$  à un simple produit dans l'espace des fréquences et vis-versa un simple produit dans l'espace temps est transformer en produit de convolution dans l'espace des fréquences, d'où la propriété ci-dessous au tableau IV.1:

$s(t)$	$S(f)$	<i>désignation de la propriété</i>
$s_1(t)$	$S_1(f)$	
$s_2(t)$	$S_2(f)$	
$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(f)S_2(f)$	Convolution
$s_1(t)s_2(t)$	$S_1(f) * S_2(f)$	convolution

**Tableau IV.1.** Relation entre la transformée de Fourier et le produit de convolution

NB : Généralement, lorsque un des deux signaux  $s_1(t)$  ou  $s_2(t)$  est à support borné, il est recommandé que le calcul de produit de convolution soit direct en appliquant la définition (Eq. IV.1). Cependant, dans le cas où les deux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  à support non borné, il est plus facile de déduire le produit de convolution par l'intermédiaire de la Transformée de Fourier et ses propriétés (chapitre II).

Exemple 1:

Calculez le produit de convolution  $h(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} * \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

Solution :

On a :  $F[h(t)] = F\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} * \frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) = F\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \cdot F\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) = \Pi(f)\Pi(f) = \Pi(f)$

D'où :  $h(t) = F^{-1}[\Pi(f)] = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$

Exemple 2 :

Calculez le produit de convolution  $h(t) = \frac{\sin \pi(t-a)}{\pi(t-a)} * \frac{\sin \pi(t-b)}{\pi(t-b)}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } F[h(t)] = F\left[\frac{\sin \pi(t-a)}{\pi(t-a)} * \frac{\sin \pi(t-b)}{\pi(t-b)}\right] = F\left[\frac{\sin \pi(t-a)}{\pi(t-a)}\right] \cdot F\left[\frac{\sin \pi(t-b)}{\pi(t-b)}\right]$$

$$\text{D'une part, on a : } F\left[\frac{\sin \pi(t-a)}{\pi(t-a)}\right] = \Pi(f) e^{-2j\pi f a}$$

$$\text{D'où : } F\left[\frac{\sin \pi(t-a)}{\pi(t-a)}\right] = \Pi(f) e^{-2j\pi f a} \text{ et } F\left[\frac{\sin \pi(t-b)}{\pi(t-b)}\right] = \Pi(f) e^{-2j\pi f b}$$

Donc :

$$F[h(t)] = F\left[\frac{\sin \pi(t-a)}{\pi(t-a)}\right] \cdot F\left[\frac{\sin \pi(t-b)}{\pi(t-b)}\right] = \Pi(f) e^{-2j\pi f a} \cdot \Pi(f) e^{-2j\pi f b} = \Pi(f) e^{-2j\pi f (a+b)}$$

$$\text{D'où : } h(t) = \frac{\sin \pi(t-a-b)}{\pi(t-a-b)}$$

#### VI.4 Quelques caractéristiques des signaux dans l'espace $L_2(\infty)$

Nous citons quelques caractéristiques des signaux à puissance moyenne totale nulle et énergie totale finie, à savoir [4]:

##### IV.4.1 Durée utile d'un signal et Largeur utile du spectre

La durée utile  $D$  d'un signal réel  $s(t) \in L_2(\infty)$  peut être définie par :

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s^2(t) dt \quad (\text{IV.4})$$

Sachant que  $s(t)$  admet une transformée de Fourier  $S(f)$ , nous pouvons définir la largeur utile  $L$  de ce spectre  $S(f)$  par :

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |S(f)|^2 df \quad (\text{IV.5})$$

##### IV.4.2 Relation d'incertitude de Heisenberg

Pour un signal  $s(t)$ , nous ne pouvons pas déterminer en même temps sa durée utile  $D$  et la largeur utile  $L$  de son spectre. Nous avons :

$$DL \geq \frac{E_t}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (\text{IV.6})$$

### ***VI.5 Produit de convolution pour les signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie***

Le produit de convolution de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie peut être définie à savoir :

$$x(t) * y(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (\text{V.7})$$

## Chapitre V: Corrélation des signaux

### V.1 Corrélation des signaux

La corrélation  $C_{x,y}(t)$  de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  peut être définie à partir du produit de convolution telle que :

$$C_{x,y}(t) = x(t) * \bar{y}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \bar{y}(\tau - t) d\tau \quad (\text{V.1})$$

L'expression (V.1) peut toujours converger dans le cas des signaux dans l'espace de Hilbert  $L_2(\infty)$  (la démonstration est similaire à celle illustrée en chapitre IV §-IV.2). En effet, la corrélation de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  est définie par un produit de convolution de  $x(t)$  et  $\bar{y}(-t)$ . Dans l'espace  $L_2(\infty)$ , si  $y(t)$  est à énergie totale finie alors  $\bar{y}(-t)$  est aussi à énergie totale finie. D'où, l'existence de la corrélation dans le même espace de Hilbert  $L_2(\infty)$ .

La fonction de corrélation représente à chaque instant  $t$ , la valeur du produit scalaire de  $x(\tau)$  par  $y(\tau - t)$ . Il s'ensuit que la corrélation à l'instant  $t$  sera nulle si les deux signaux sont orthogonaux et sera maximale si ces deux signaux ont même direction. **La fonction de corrélation permet donc de mesurer la similitude entre deux signaux, en termes d'orientation et de forme.**

### V.2 La corrélation n'est pas commutative

Il est clair que la fonction de corrélation n'est pas commutative, cependant, on a le résultat suivant :

$$C_{x,y}(t) = \bar{C}_{y,x}(-t) \quad (\text{V.2})$$

### V.3 Fonction d'autocorrélation

Un cas particulier est intéressant lorsque :  $x(t) = y(t)$ . Dans ce cas, il s'agit de la fonction d'autocorrélation  $C_{x,x}(t)$  est défini par :

$$C_{x,x}(t) = x(t) * \bar{x}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \bar{x}(\tau - t) d\tau \tag{V.3}$$

### V.4 Relation avec la transformée de Fourier dans l'espace $L_2(\infty)$

Une propriété importante de la transformée de Fourier est de transformer le produit de convolution de deux fonctions de l'espace temps  $L_2(\infty)$  à un simple produit dans l'espace des fréquences, d'où les deux propriétés de corrélation et l'autocorrélation dans l'espace  $L_2(\infty)$  des signaux à énergie totale finie ci-dessous au tableau V.1:

$x(t)$ $y(t)$	$X(f)$ $Y(f)$	désignation de la propriété
$C_{x,y}(t) = x(t) * \bar{y}(-t)$	$X(f) \bar{Y}(f)$	Corrélation
$C_{x,x}(t) = x(t) * \bar{x}(-t)$	$X(f) \bar{X}(f) =  X(f) ^2$	Autocorrélation/ densité spectrale d'énergie

**Tableau V.1.** Relation entre la transformée de Fourier et la corrélation dans l'espace  $L_2(\infty)$

La transformée de Fourier de l'autocorrélation d'un signal dans l'espace  $L_2(\infty)$  est appelée **Densité Spectrale d'énergie**.

D'où l'écriture :

$$|X(f)|^2 = F[C_{x,x}(t)] \tag{V.4}$$

### V.5 Propriétés de la fonction d'autocorrélation

L'autocorrélation pour un signal réel de l'espace  $L_2(\infty)$ , est **réelle, paire et maximale à l'origine** et sa densité spectrale d'énergie est aussi réelle et paire

Démonstration :

Par transformée de Fourier inverse, on a d'après (V.3) :

$$C_{x,x}(t) = x(t) * \bar{x}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{+2j\pi ft} df \quad (\text{V.5})$$

D'où :

$$|C_{x,x}(t)| \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{+2j\pi ft} df \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = C_{x,x}(0) \quad (\text{V.6})$$

Donc : l'autocorrélation  $C_{x,x}(t)$  est **maximale à l'origine**

Si  $x(t)$  est réel alors  $x(t) = \bar{x}(t)$ , donc, il est clair que  $C_{x,x}(t)$  est **aussi réelle** car :

$$C_{x,x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \bar{x}(\tau - t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x(\tau - t) d\tau$$

D'après le passage de la transformée de Fourier, on a :

$$X(f) = F[x(t)] \text{ et } \bar{X}(-f) = F[\bar{x}(t)]$$

Si  $x(t)$  est réel alors  $x(t) = \bar{x}(t)$  d'où :  $\bar{X}(-f) = X(f)$

Donc :  $|X(f)| = |\bar{X}(-f)| = |X(-f)|$  d'où :  $|X(f)|$  est une fonction paire

De plus :  $|X(f)|^2$  est une fonction paire

Donc : **La densité spectrale d'énergie d'un signal réel dans l'espace  $L_2(\infty)$  est paire.**

D'après (V.4) :

$$C_{x,x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cos(2\pi ft) df + j \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \sin(2\pi ft) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cos(2\pi ft) df$$

Ce qui prouve encore que  $C_{x,x}(t)$  est réelle.

De plus, on a :

$$C_{x,x}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \cos(2\pi ft) df = C_{x,x}(t) \quad (\text{V.7})$$

**Donc l'autocorrélation pour un signal réel dans l'espace de Hilbert  $L_2(\infty)$  est une fonction paire**

### ***V.6 Corrélation des signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne finie***

La corrélation  $C_{x,y}(t)$  de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie peut être définie à partir du produit de convolution telle que :

$$C_{x,y}(t) = x(t) * \bar{y}(-t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(\tau) \bar{y}(\tau - t) d\tau \quad (\text{V.8})$$

### ***V.7 Autocorrélation d'un signal à énergie totale infinie et puissance moyenne finie***

De la même façon, l'autocorrélation  $C_{x,x}(t)$  d'un signal  $x(t)$  à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie peut être définie à partir du produit de convolution telle que :

$$C_{x,x}(t) = x(t) * \bar{x}(-t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(\tau) \bar{x}(\tau - t) d\tau \quad (\text{V.9})$$

### ***V.8 Densité spectrale de puissance d'un signal à énergie totale infinie***

A partir d'un signal  $x(t)$  d'énergie totale infinie et puissance moyenne finie, on définit un signal  $x_T(t)$  dans l'espace  $L_2(\infty)$  des signaux à énergie totale finie tel que :

$$x_T(t) = x(t) \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \quad (\text{V.10})$$

Dans l'espace  $L_2(\infty)$  la transformée de Fourier de  $x_T(t)$  existe et désignée par  $X_T(f)$  telle que :

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-2j\pi ft} dt = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad (\text{V.11})$$

En appliquant la formule de Parseval, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df$$

D'où :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2 df \quad (\text{V.12})$$

On définit dans l'espace des signaux à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie **la densité spectrale de puissance** par :

$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2$  telle que :

$|X_T(f)|^2$  est la densité spectrale d'énergie du signal  $x_T(t) = x(t)\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$

### V.7.1 Théorème

La densité spectrale de puissance d'un signal à énergie totale infinie et puissance moyenne totale finie est la transformée de Fourier de son autocorrélation. C-à-d :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |X_T(f)|^2 = F[C_{x,x}(t)] \quad (\text{V.13})$$

## Chapitre VI: Echantillonnage et signaux discrets

### VI.1 Introduction

L'étude des grandeurs physiques, qui sont de nature analogique, s'effectue presque exclusivement au mode numérique, surtout avec le développement d'une part, de la micro-électronique et les techniques d'acquisition numérique ; et de l'autre part, la mise en œuvre des algorithmes robustes et rapides de traitement numérique du signal exigeants que le signal soit converti en une suite de nombres (codes numériques en 0 et 1) (figure VI.3).

L'échantillonnage est une opération primordiale en amont (figure VI.1), pour transiter du mode analogique au numérique. Elle permet d'observer et mesurer un signal analogique à des instants donnés, appelés instants d'échantillonnage. Elle est schématisée par un simple interrupteur (figure VI.2), qui s'ouvre et se ferme à une période bien définie, appelée période d'échantillonnage  $T_e$ . Généralement, elle est suivie par une numérisation effectuée par des Convertisseurs Analogique/Numérique (CAN), et qui permettent de quantifier et codifier ces différents échantillons analogiques (figure VI.3). Le système électronique permettant cette transition du mode analogique au mode numérique est souvent appelée *chaîne d'acquisition numérique*.

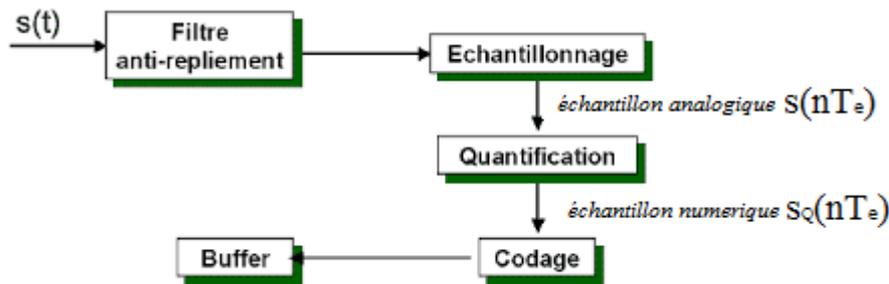


Figure VI.1. Principe d'échantillonnage et numérisation

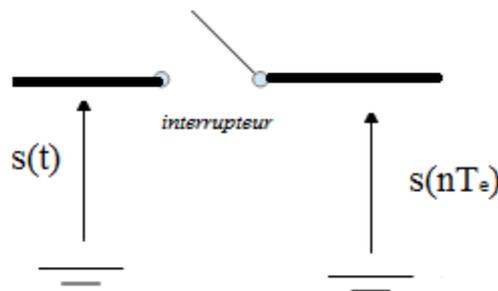
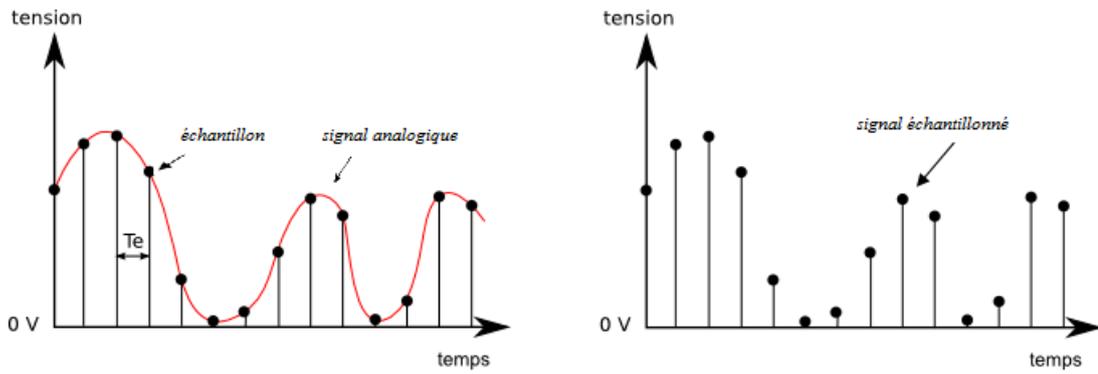
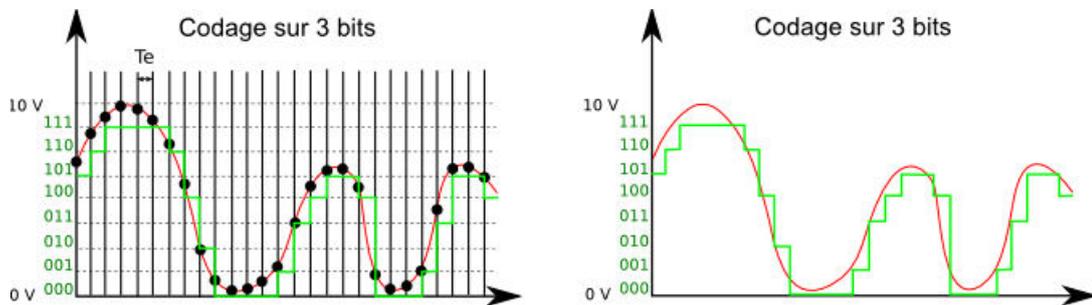


Figure VI.2. Principe d'un échantillonneur



(a)-échantillonnage



(b)- numérisation : quantification et codage

**Figure VI.3.** Illustration des différents signaux engendrés par échantillonnage et numérisation

## VI.2 Définitions et notations

L'échantillonnage est une opération permettant de transformer un signal analogique  $s(t)$  en une suite de valeurs continues (analogiques) et discrètes dans le temps  $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , appelée signal échantillonné (figure VI.3.a). Cette opération peut être réalisée par discrétisation de la variable continue et indépendante le temps  $t$ , en des instants discrets  $\{t_k\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Nous obtenons un ensemble d'échantillons analogiques à temps discrets  $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , où l'amplitude  $s(t_k)$  est toujours analogique et continue.

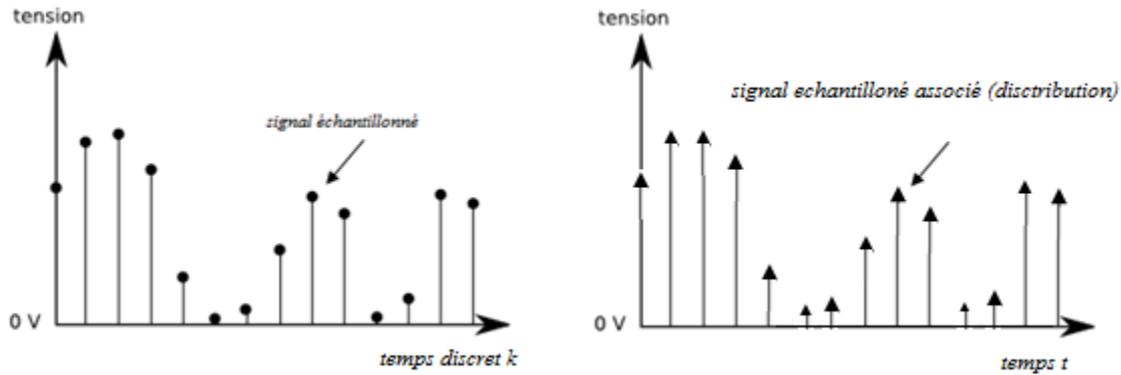
Dans la pratique, l'échantillonnage est souvent suivi par une numérisation (figure VI.1), où ces échantillons analogiques  $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  peuvent être quantifiés et codés (numérisés) par un convertisseur A/N (CAN) (figure VI.3.b). Nous obtenons ainsi le signal numérique  $\{s_Q(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  qui a une amplitude discrète sous forme de code numérique et qui dépend de la précision du convertisseur A/N (CAN) en nombre de bits. Dans ce qui suit, la notation  $s(t_k)$  peut être confondue avec  $s_Q(t_k)$  car au point de vue mathématique l'échantillon analogique et sa valeur numérique sont à temps discret, et vont être traités avec les mêmes outils.

Donc, l'échantillonnage permet de transformer un signal analogique  $s(t)$  en un signal échantillonné  $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Si l'échantillonnage s'effectue avec un pas constant, appelé période d'échantillonnage  $T_e = t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1}$ , nous parlons ainsi de l'échantillonnage équidistant. Nous avons

donc, le signal échantillonné sous forme de suite de valeurs  $\{s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Nous appelons  $f_e = \frac{1}{T_e}$  fréquence ou cadence d'échantillonnage.

### VI.3 L'échantillonnage idéal

Avec l'échantillonnage idéal, l'échantillonneur est considéré comme un simple interrupteur instantané (figure VI.2). Dans ce cas, nous associons le signal échantillonné, qui est une suite de valeurs  $\{s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  à une distribution  $\sum s(kT_e) \delta_{t-kT_e}$  appelée signal échantillonné associé  $s_e(t)$  (figure VI.4).



**Figure VI.4.** Illustration du signal échantillonné (suite de valeur à temps discret k, et le signal échantillonné associé (distribution).

#### VI.3.1 Préambule

Nous démontrons que le spectre d'un peigne de Dirac  $\Psi(t) = \sum \delta(t - k)$  est un peigne de Dirac dans le plan des fréquences  $\Psi(f) = \sum \delta(f - k)$ . Nous avons donc :

$$F[\Psi(t)] = \Psi(f) \tag{VI.1}$$

Avec :

$$\Psi(t) = \sum \delta(t - k) \tag{VI.2}$$

Démonstration

Nous considérons que :

$$X(f) = F[\Psi(t)] = F\left[\sum \delta(t - k)\right] = \sum e^{-2j\pi fk} \tag{VI.3}$$

Nous avons les propriétés suivantes :

- $e^{2j\pi f} X(f) = X(f) = F[\Psi(t)]$

$$\text{Nous avons : } e^{2j\pi f} X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{2j\pi f} e^{-2j\pi fk} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi(k-1)}$$

Si nous mettons le changement de variable:  $n = k - 1$ , nous avons :

$$e^{2j\pi f} X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi fn} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi nk} = X(f) \quad (n \text{ est muette})$$

Donc en récapitulation, nous avons la propriété :

$$e^{2j\pi f} X(f) = X(f) = F[\Psi(t)] \quad (\text{VI.4})$$

2.  $X(f) = F[\Psi(t)]$  est périodique de période 1

Nous avons :

$$X(f+1) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi(f+1)k} \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi fk} = X(f) \quad (\text{VI.5})$$

En considérant l'équation (3.4), nous avons :

$$(e^{2j\pi f} - 1)X(f) = 0 \quad (\text{VI.6})$$

Nous remarquons :

$X(f) = \delta(f - k)$  est une solution de l'équation (VI.6) ; de plus  $a_k \delta(f - k)$  l'est aussi, et la somme  $X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta(f - k)$  est aussi une solution de l'équation (VI.6).

Nous avons d'après la 2<sup>ème</sup> propriété de périodicité :

$$X(f+1) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta(f+1-n) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta[f - (n-1)] = \sum_{\mathbb{Z}} a_{k+1} \delta(f-k) = X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta(f-k) \quad (\text{VI.7})$$

Ce qui est réalisable si les coefficients  $a_k$  soient égaux, donc :

$\forall k \in \mathbb{Z} : a_k = a$ , et la solution  $X(f)$  s'écrit :

$$X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} a \delta(f-k) = a \sum_{\mathbb{Z}} \delta(f-n) \quad (\text{VI.8})$$

Nous avons :

$$\langle X(f), \Pi(f) \rangle = \left\langle a \sum_{\mathbb{Z}} \delta(f-k), \Pi(f) \right\rangle = a \sum_{\mathbb{Z}} \langle \delta(f-k), \Pi(f) \rangle = a \sum_{\mathbb{Z}} \Pi(k) = a \quad (\text{VI.9})$$

D'une autre part :

$$\langle X(f), \Pi(f) \rangle = \left\langle \sum_{\square} e^{-2j\pi fk}, \Pi(f) \right\rangle = \sum_{\square} \langle e^{-2j\pi fk}, \Pi(f) \rangle \quad (\text{VI.10})$$

Donc :

$$\langle X(f), \Pi(f) \rangle = \sum_{\square} \langle e^{-2j\pi fk}, \Pi(f) \rangle = \sum_{\square} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2j\pi fk} df = 1 + \sum_{\square^*} \left[ \frac{e^{-2j\pi fk}}{-2j\pi fk} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{\square^*} \frac{-2j \sin(\pi k)}{-2j\pi k} = 1 \quad (\text{VI.11})$$

De (VI.9) et (VI.11), nous déduisons que :  $a = 1$

Nous concluons donc que :  $X(f) = F[\Psi(t)] = \Psi(f)$

### VI.3.2 Modélisation de l'échantillonnage idéal

La modélisation de l'échantillonnage idéal consiste à trouver un modèle mathématique permettant de construire le signal échantillonné associé  $s_e(t)$  à partir du signal analogique  $s(t)$ . A La base de résultat du §-VI.3.1, nous démontrons par les propriétés de distributions que le signal échantillonné associé  $s_e(t)$  peut être écrit en fonction du signal analogique  $s(t)$ , tel que:

$$s_e(t) = \sum_{\square} s(kT_e) \delta(t - kT_e) = \frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) \quad (\text{VI.12})$$

Le multiplicateur  $\frac{1}{T_e} \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right)$  est appelé *échantillonneur idéal*.

Démonstration

Nous avons :

$$\frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} s(t) \sum_{\square} \delta\left(\frac{t}{T_e} - k\right) = \frac{1}{T_e} s(t) \sum_{\square} \delta\left[\frac{1}{T_e}(t - kT_e)\right] \quad (\text{VI.13})$$

Avec les propriétés de la distribution de Dirac, (VI.13) s'écrit :

$$\frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} s(t) \sum_{\square} T_e \delta(t - kT_e) = \sum_{\square} s(t) \delta(t - kT_e) \quad (\text{VI.14})$$

D'où :

$$s_e(t) = \frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) = \sum_{\square} s(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (\text{VI.15})$$

### VI.4 Interpolation ou restitution idéale

L'interpolation idéale pose le problème inverse de l'échantillonnage. Elle consiste à reconstruire ou restituer, d'une manière exacte, le signal analogique à partir du signal échantillonné  $\{s(kT_e)\}_{k \in \square}$ , ou sa version associé  $s_e(t)$ , sous conditions idéales, et qui sont souvent irréalisables en pratique. Généralement,

les conditions de restitution ne sont pas uniques. Nous présentons dans ce qui suit, celles de Shannon. Nous verrons qu'elles ne peuvent pas être réalisées en pratique.

#### VI.4.1 Conditions de restitution de Shannon [4,6]

Nous posons le problème inverse, où nous avons la suite  $\{s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , ainsi que le signal échantillonné associé  $s_e(t)$ ; et nous essayons de trouver les conditions idéales permettant de restituer exactement le signal analogique  $s(t)$ . Pour que l'interpolation soit exacte, nous imposons que le spectre du signal analogique  $s(t)$  soit à support borné. Donc, son spectre est limité à la bande passante, c'est-à-dire :  $S(f) = F[s(t)]$  est à support borné et  $\text{supp } p[S(f)] = BP = [-f_{\max}, f_{\max}]$ . Avec  $f_{\max}$  est la grande fréquence contenue dans le signal  $s(t)$ .

L'idée de restitution de Shannon est simple, et peut être exacte si les deux signaux  $s(t)$  et  $s_e(t)$  ont le même spectre dans la bande passante  $BP = [-f_{\max}, f_{\max}]$ .

Au départ, nous calculons le spectre du signal échantillonné associé  $s_e(t)$ , nous avons :

$$G(f) = F[s_e(t)] = F\left[\frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right)\right] = \frac{1}{T_e} S(f) * T_e \Psi(T_e f) \quad (\text{VI.16})$$

En appliquant les propriétés de la distribution de Dirac, nous avons :

$$G(f) = F[s_e(t)] = S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \delta(T_e f - k) = S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \delta\left[T_e \left(f - \frac{k}{T_e}\right)\right] = S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{T_e} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \quad (\text{VI.17})$$

D'où :

$$G(f) = F[s_e(t)] = \frac{1}{T_e} S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{\mathbb{Z}} S(f) * \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{\mathbb{Z}} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \quad (\text{VI.18})$$

Donc l'échantillonnage a ainsi pour effet, à un facteur d'amplitude près, de dupliquer à l'infini le spectre du signal continu.

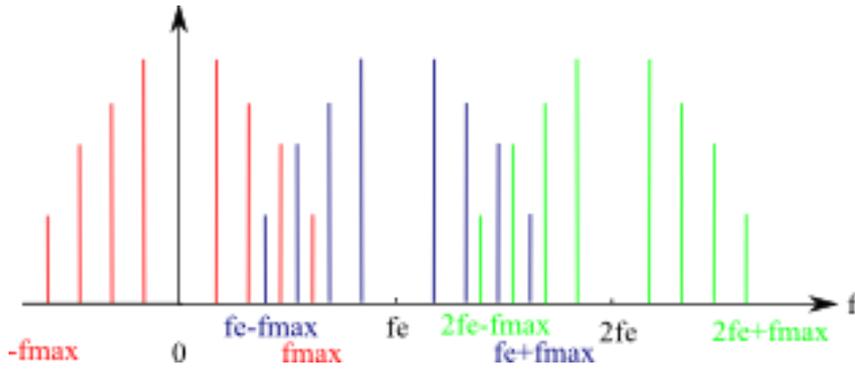
Nous avons donc deux possibilités :

1. Si  $f_{\max} > -f_{\max} + \frac{1}{T_e}$  d'où :  $\frac{1}{T_e} = f_e < 2f_{\max}$  :

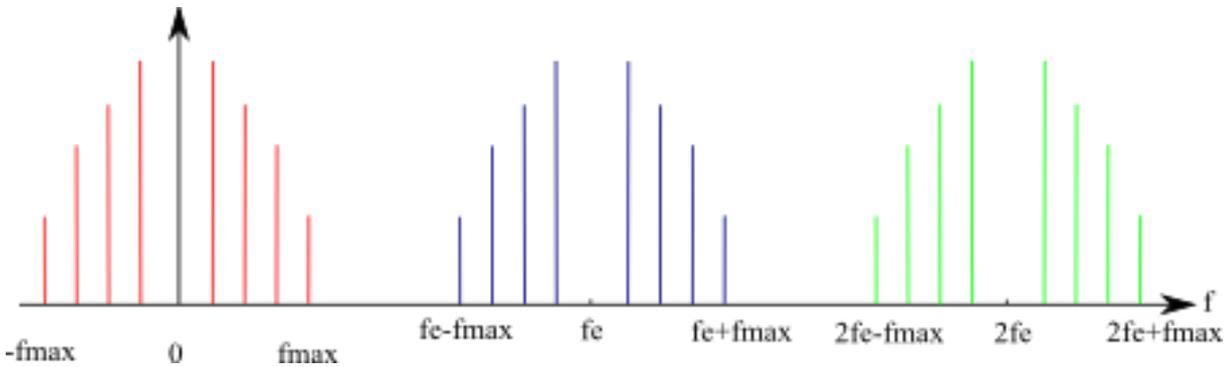
Le recouvrement des spectres latéraux  $S\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$  rend impossible la restitution du spectre initial  $S(f)$ , malgré l'utilisation d'un filtre passe-bas numérique dans le but d'éliminer les spectres latéraux (figure 3.5).

2. Si  $f_{\max} \leq -f_{\max} + \frac{1}{T_e}$  d'où :  $\frac{1}{T_e} = f_e \geq 2f_{\max}$  :

Il est théoriquement possible de restituer le spectre initial  $S(f)$ , en supprimant les spectres latéraux  $S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) (k \in \mathbb{Z}^*)$  à l'aide d'un filtre passe-bas idéal (figure VI.6).



**Figure VI.5.** Illustration du phénomène de recouvrement (repliement) du spectre d'un signal échantillonné. La restitution exacte du spectre du signal analogique n'est pas possible.



**Figure VI.6.** Illustration le cas où la restitution exacte soit possible du spectre du signal analogique à partir du spectre du signal échantillonné.

**Théorème de Shannon**

Lorsque nous échantillons un signal continu, nous ne perdons aucune information si :

1. son spectre est à support borné (limité).
2. la fréquence d'échantillonnage est supérieure au moins au double de la plus haute fréquence contenue ( $f_{\max}$ ) dans ce signal continu.

**VI.4.2 L'expression du signal restitué**

A partir du spectre du signal échantillonné :  $G(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$ , le spectre  $S(f)$  du signal analogique  $s(t)$  peut être restitué par multiplication avec la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure  $f_{\max} \leq f_c \leq -f_{\max} + f_e$  (figure 3.7), nous avons :

$$S(f) = T_e G(f) \Pi\left(\frac{f}{2f_c}\right) \tag{VI.19}$$

Par transformée de Fourier inverse, nous avons :

$$s(t) = F^{-1} \left[ T_e G(f) \Pi \left( \frac{f}{2f_c} \right) \right] = F^{-1} \left\{ \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left( f - \frac{k}{T_e} \right) \right] \Pi \left( \frac{f}{2f_c} \right) \right\} \quad (\text{VI.20})$$

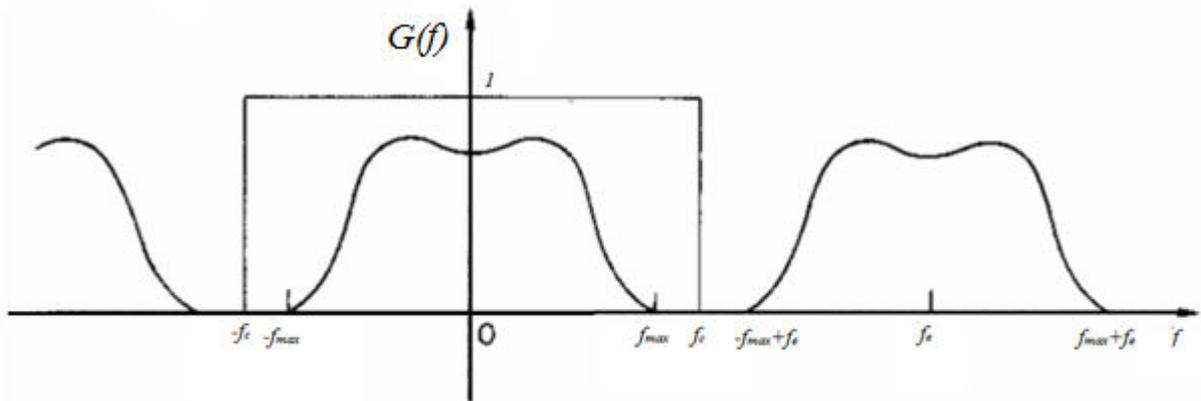
Avec les propriétés de la transformée de Fourier, nous avons:

$$s(t) = s(t) \Psi \left( \frac{t}{T_e} \right) * \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = \left[ s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left( \frac{t}{T_e} - k \right) \right] * \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} \quad (\text{VI.21})$$

D'où :

$$s(t) = T_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_e) \frac{\sin[2\pi f_c (t - kT_e)]}{\pi(t - kT_e)} \quad (\text{VI.22})$$

C'est la formule d'interpolation, permettant de restituer un signal analogique continu  $s(t)$  à partir des échantillons  $s(kT_e)$ . Il est clair que la restitution exacte s'effectue sur un nombre infini d'échantillons. Ce qui justifie encore le caractère idéal de l'interpolation proposée. En pratique, nous limitons l'interpolation sur un nombre fini d'échantillons correspondant à la durée d'observation du signal.



**Figure VI.7.** Illustration la technique de restitution du spectre initial à partir du spectre multiple par filtrage passe-bas idéal (dans le cas de satisfaction des conditions de Shannon).

Notons que l'interpolation exacte de Shannon reste idéale et irréalisable en pratique, car la restitution du spectre  $S(f)$  est effectuée grâce au filtrage du spectre multiple  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left( f - \frac{k}{T_e} \right)$  par un filtre passe-bas idéal (figure 3.7) ; où, nous conservons uniquement le spectre initial  $S(f)$  et nous éliminons les spectres latéraux  $S \left( f - \frac{k}{T_e} \right) \Big|_{k \neq 0}$ . Il est clair que ce filtre passe-bas idéal ne peut pas être réalisé physiquement, car sa réponse impulsionnelle n'est pas causale.

### VI.5 Filtre analogique anti-repliement (anti-aliasing) du spectre

Les conditions de restitution de Shannon restent idéales et ne peuvent pas être réalisées en pratique, car en plus que le filtre analogique passe-bas idéal en aval n'est pas réalisable, le spectre d'un signal continu n'est jamais à support (bande) borné. Par exemple, même dans le cas du spectre borné d'un signal analogique, le fait de limiter sa durée d'observation (pour des raisons pratiques) conduit à une convolution de son spectre avec un sinus cardinal non borné, ainsi le spectre résultant n'est plus à

support borné. Par conséquent, la restitution ne peut pas être exacte et le phénomène de repliement du spectre est inévitable.

En revanche, si l'information contenue dans les composantes de hautes fréquences est supposée peu importante, elles peuvent être négligées et le spectre peut être considéré à support (bande) borné. Afin d'éviter qu'une haute fréquence se replie en bande passante, nous limitons volontairement le spectre du signal analogique par un filtre passe-bas analogique dit anti-repliement ou anti-aliasing, qui s'implémente en amont avant l'échantillonneur (figure VI.1). Ce filtre peut être de type : Butterworth, Tchebychev type-1 ou 2, ou bien elliptique [6].

En pratique, le signal à échantillonner est le plus souvent entaché de bruit, dont le spectre fréquentiel est plus étendu que celui du signal. L'opération d'échantillonnage a pour effet de superposer au spectre basse fréquence du signal utile, certaines parties du spectre du bruit ; en particulier les composantes du bruit au voisinage de  $f_e$  sont repliés sur la fréquence centre du signal utile. Pour éliminer cet effet perturbateur, il est nécessaire d'éliminer la partie hautes fréquences de ce bruit à l'aide d'un filtre passe-bas anti-repliement, où la fréquence de coupure est réglée à la demi-fréquence d'échantillonnage  $\frac{f_e}{2}$ .

La restitution du signal analogique à partir de ses échantillons peut être aussi effectuée par un bloqueur d'ordre zéro, où les valeurs des échantillons sont maintenues constantes durant la période d'échantillonnage  $T_e$  jusqu'à le prochain échantillon. Nous utilisons à nouveau un filtre analogique passe-bas de type Butterworth, Tchebychev type-1 ou 2), ou elliptique. Il est clair que la restitution n'est jamais exacte.

## VI.6 Echantillonnage réel

L'échantillonnage idéal décrit ci-dessus en §-VI.3 est théorique comme nous l'avons expliqué. En effet, les échantillonneurs réels possèdent un certain temps d'ouverture, l'échantillonnage n'est donc pas réalisé avec une impulsion infiniment brève, mais au contraire par une impulsion de largeur finie  $\tau$ , assimilable à une fonction porte  $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ . En pratique, nous citons différentes techniques permettant de tenir compte de cette largeur [3].

### VI.6.1 L'Echantillonneur moyenneur

Dans ce cas, la valeur moyenne de  $s(t)$  est considérée pendant la durée  $\tau$  de l'impulsion. Chaque échantillon  $s(kT_e)$  est alors obtenu par le calcul suivant :

$$s(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} s(t) dt \quad (\text{VI.23})$$

L'équation (VI.23) peut être écrite sous la forme :

$$s(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \Pi\left(\frac{t - kT_e}{\tau}\right) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \Pi\left(\frac{kT_e - t}{\tau}\right) dt = \frac{1}{\tau} \left[ s(t) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]_{t=kT_e} \quad (\text{VI.24})$$

Dans ce cas, le signal échantillonné associé  $s_e(t)$  peut être exprimé sous la forme :

$$s_e^m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\tau} \left[ s(t) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] \delta(t - kT_e) \right\} \quad (\text{VI.25})$$

Ainsi le spectre du signal échantillonné associé s'écrit :

$$G_m(f) = F[s_e^m(t)] = \frac{1}{T_e} \left[ S(f) \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right] * \sum \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \quad (\text{VI.26})$$

Donc, l'échantillonnage ou la restitution par des impulsions de largeur  $\tau$  peut être traité comme un échantillonnage idéal ou une interpolation idéale à condition de multiplier le spectre du signal analogique par le spectre de l'impulsion élémentaire de largeur  $\tau$ .

D'après l'équation (VI.26), la durée de l'échantillonnage  $\tau$  pondère donc l'amplitude du spectre du signal échantillonné. Il est donc important de prendre ce phénomène en compte, et éventuellement de le compenser par filtrage. Si nous intéressons au cas  $\tau = T_e$  ; alors, nous constatons qu'en fréquence de Nyquist  $\frac{f_e}{2}$ , l'affaiblissement est d'environ  $-3.9 \text{ dB}$ . Pour éviter ce genre de désagrément, nous chercherons à prendre une fréquence d'échantillonnage la plus éloignée possible de la fréquence de coupure du filtre anti-repliement. Ainsi l'affaiblissement se ressent beaucoup moins.

### VI.6.2 L'Echantillonneur bloqueur

Il s'agit d'échantillonner le signal  $s(t)$  à l'instant  $t = kT_e$ , et de mettre en mémoire cette valeur pendant une durée  $\tau$  (souvent  $\tau = T_e$ ), pendant cette durée, une numérisation peut être effectuée avec un convertisseur Analogique/ Numérique (CAN).

Dans ce cas, le signal échantillonné associé peut avoir la forme :

$$s_e^h(t) = \left[ \sum s(kT_e) \delta(t - kT_e) \right] * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{T_e} \left[ s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) \right] * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{VI.27})$$

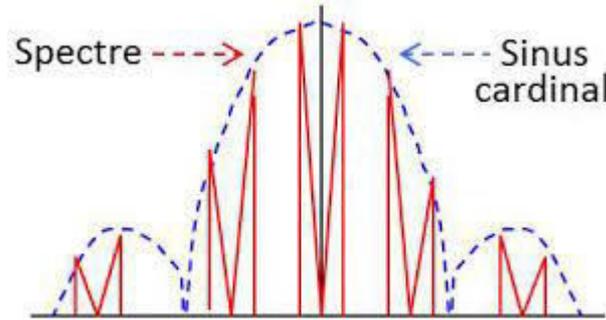
Le spectre  $G_h(f)$  du signal échantillonné associé  $s_e^h(t)$  est donc :

$$G_h(f) = \left[ \frac{1}{T_e} \sum_{\square} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \right] \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \quad (\text{VI.28})$$

L'équation (VI.28) montre que le spectre multiple  $\sum_{\square} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$ , à une constante d'amplification près, est multiplié par une fonction de type sinus cardinal centré, ce qui a l'effet d'un filtre atténuateur des spectres latéraux  $S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \Big|_{k \neq 0}$  (figure VI.8).

Un échantillonneur-bloqueur d'ordre zero (BOZ) a pour action de maintenir constante, et égale à  $s(kT_e)$  l'amplitude de l'impulsion entre les instants  $kT_e$  et  $(k+1)T_e$ . La fonction de transfert d'un tel dispositif est donnée par :

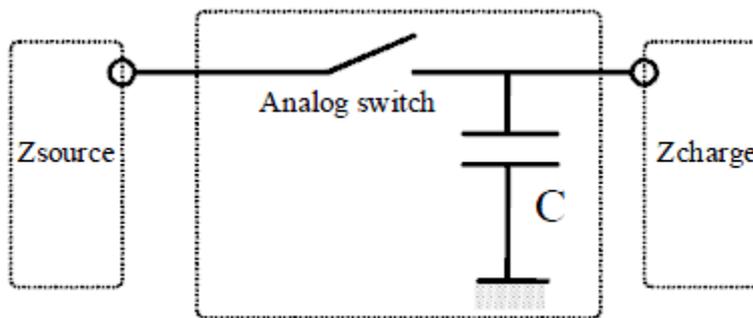
$$F_{BOZ}(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \tag{VI.29}$$



**Figure VI.8.** Illustration de l'effet de l'échantillonneur bloqueur d'ordre zero sur l'atténuation de l'amplitude des spectres latéraux par multiplication avec un sinus cardinal.

VI.6.1 Principe de réalisation

La réalisation d'un échantillonneur bloqueur consiste à associer un interrupteur analogique à une capacité C. La capacité joue le rôle d'élément mémoire, l'interrupteur est là pour réactualiser la valeur mémorisée ou bien l'isoler vis à vis de l'entrée. Le principe de réalisation est illustré en figure VI.9.



**Figure VI.9.** Principe de réalisation d'un échantillonneur bloqueur.

VI.7 Quantification et codage- conversion Analogique/Numérique

L'échantillon  $s(kT_e)$  est une quantité analogique, pour la rendre sous forme de code numérique indépendant de l'aspect analogique, il faut passer par une numérisation qui consiste à effectuer deux opérations d'une manière conjointe à savoir, une quantification et un codage. Le rôle de la numérisation est donc d'associer une image binaire à un signal analogique. Nous avons les associations suivantes :

<i>Mode analogique</i>	<i>Mode numérique</i>
Signal continu	Signal discret
tension	Chiffre (code)

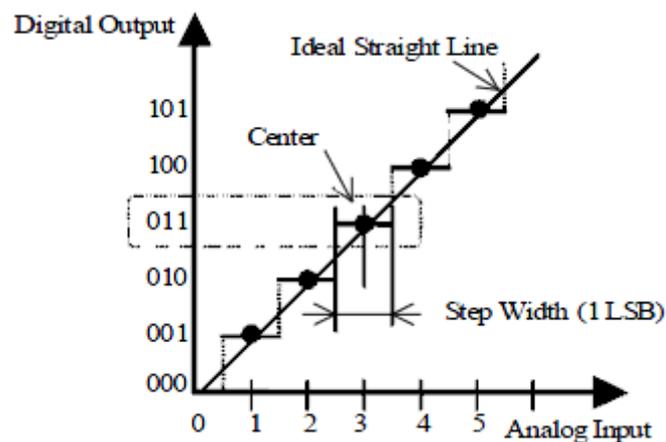
**Tableau VI.1** Comparaison entre les modes analogique et numérique.

Cette opération de numérisation peut être réalisée par un dispositif électronique appelé Convertisseur Analogique/Numérique (CAN), en anglais, nous disons : Analog/Digital Converter : ADC.

### VI.7.1 Principe de quantification

A chaque niveau de tension est associée une valeur binaire codée sur  $N$  bits. Ils vont permettre de distinguer  $2^N$  niveaux de tension repartis de  $-V_m$  à  $V_m$ . Nous avons ainsi un pas de quantification:  $q = \frac{2V_m}{2^N}$ . Le pas de quantification est appelé aussi *quantum*.

La caractéristique d'entrée-sortie d'un CAN est une caractéristique en marche d'escalier (figure 3.10). Chaque palier a une largeur d'un pas de quantification  $q$ . Le passage d'un palier à un autre correspond à une variation de '1' du code à partir du bit le moins significatif (LSB : Least Significant Bit).



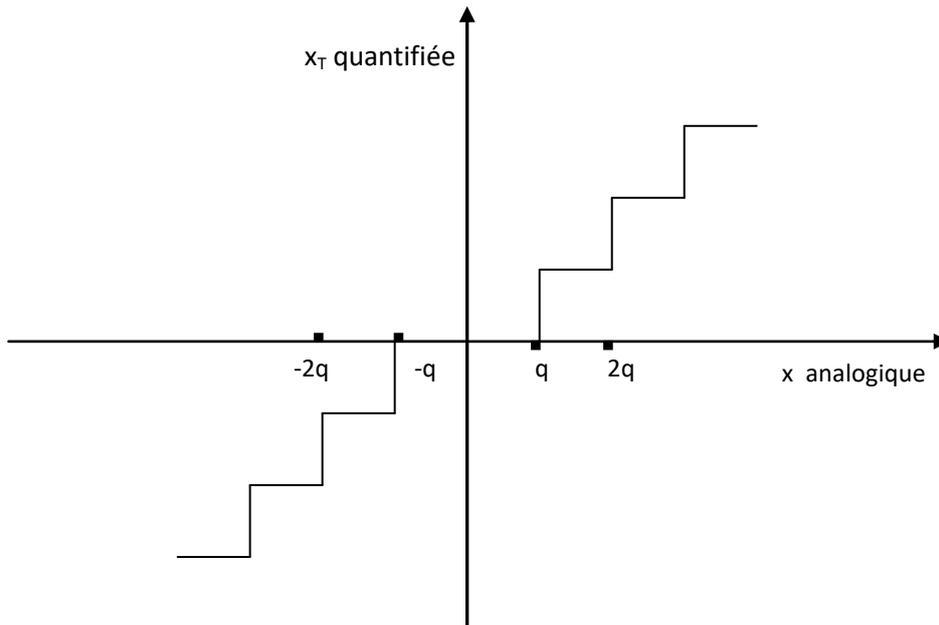
**Figure VI.10** Caractéristique d'entrée-sortie d'un CAN

### VI.7.2 Type de quantification- bruit de quantification

Nous distinguons deux types de quantification à savoir, par troncature et par arrondissement. Selon chacun de ces deux types, nous définissons le bruit de quantification engendré en fonction du pas de quantification (quantum).

#### VI.7.2.1 Quantification par troncature

Nous représentons la valeur analogique 'x' par la valeur discrète et quantifiée 'x<sub>T</sub>' adaptable par troncature à la taille de mot binaire fini. La figure VI.11 illustre la fonction de troncature. Ce type de quantification est appelé aussi *quantification linéaire par défaut*.



**Figure VI.11** représentation de la fonction de troncature

Nous avons :

$$x_T = q.ENT[x/q] \quad (VI.30)$$

Avec : *ENT* désigne la partie entière.

L'erreur ou bruit de troncature est défini par:

$$e_T = x_T - x \quad (VI.31)$$

Nous avons :

$$-q < e_T < +q \quad (VI.32)$$

### VI.7.2.2 Quantification par arrondissement

Nous représentons 'x' par la valeur discrète 'x<sub>A</sub>' adaptable par arrondi à la taille de mot binaire fini. La figure VI.12 illustre la fonction d'arrondi. Ce type de quantification est appelé aussi *quantification linéaire centrée*.

Nous avons:

$$x_A = q.ENT[x/q + 0.5 Sgn(x)] \quad (VI.33)$$

Avec : *Sgn* désigne le signe de x, où :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (VI.34)$$

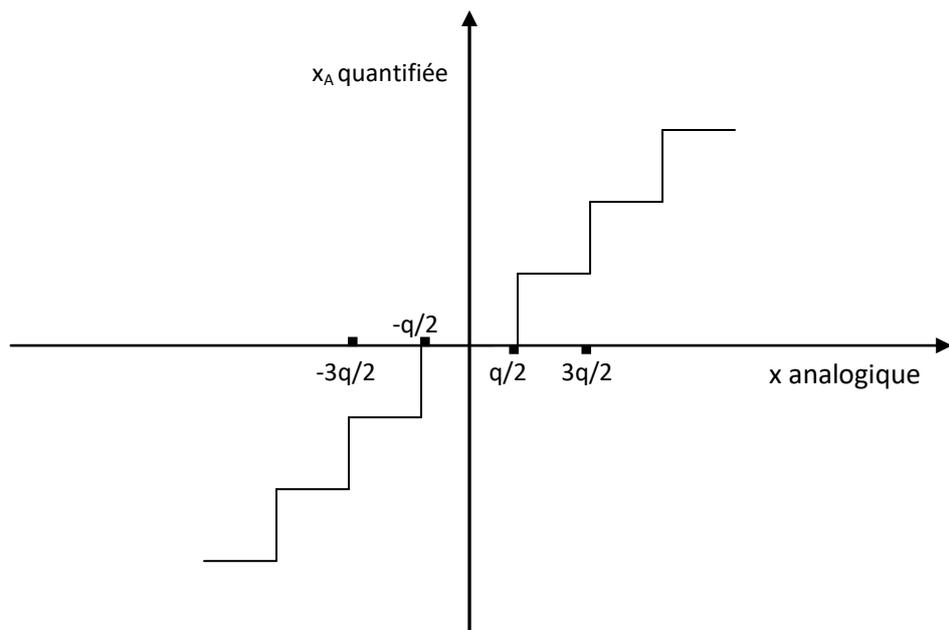
L'erreur ou bruit d'arrondi est défini par:

$$e_A = x_A - x \quad (\text{VI.35})$$

Nous avons donc :

$$-q/2 < e_A < +q/2 \quad (\text{VI.36})$$

Le deuxième type de quantification est le mieux adapté, car il engendre une puissance de bruit la moins faible, et égale à  $\frac{q^2}{12}$ .



**Figure VI.12** représentation de la fonction d'arrondi

### VI.7.3 Choix du nombre de bits de quantification

Le choix du nombre de quantification en bits dépend au rapport signal sur bruit (SNR) défini par :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left( \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right) = 20 \log_{10} \left( \frac{A_{max}}{A_{min}} \right) \quad (\text{VI.37})$$

Telles que :  $P_{signal}$  et  $P_{bruit}$  sont respectivement les puissances du signal et du bruit.

$A_{max}$  et  $A_{min}$  sont respectivement les amplitudes maximale et minimale contenues dans le signal.

Ainsi, le nombre  $N$  de bits peut être calculé par la formule ci-dessous :

$$SNR_{dB} = 6N + 1.76 \text{ dB} \quad (\text{VI.38})$$

Ce qui signifie qu'un bit de code rajoute 6 dB de rapport signal sur bruit.

VI.7.4 Principe du codage

Le codage permet d'établir la correspondance entre la valeur discrète ou quantifiée et sa valeur binaire sous forme de bits en 0 et 1. Nous distinguons deux type de codage : un codage *unipolaire* permettant de représenter les valeurs sans signe, et un codage *bipolaire*, qui permet de représenter les valeurs signées positives et négatives, en utilisant le complément à 2, où le bit le plus significatif (MSB : Most significative Bit) est réservé au signe. La valeur quantifiée  $x_q$  peut être souvent retrouvée à partir du code binaire en utilisant le binaire naturel, tel que :

$$x_q = q(b_{N-1}2^{N-1} + \dots + b_02^0) \tag{VI.39}$$

Si le bit MSB :  $b_{N-1}$  est à 0 la valeur  $x_q$  est positive et calculée directement par (VI.39) à partir du code  $b_{N-1}b_{N-2} \dots b_1b_0$ , sinon elle est négative. Dans ce cas, la valeur n'est calculée par (VI.39) qu'après avoir convertir le code  $b_{N-1}b_{N-2} \dots b_1b_0$  à son équivalent en complément à 2. Le tableau VI.2 illustre respectivement les valeurs discrètes associées aux deux codes en binaire naturel unipolaire et bipolaire.

Code en binaire naturel sur 3 bits	Valeur discrète en code unipolaire	Valeur discrète en code bipolaire avec complément à 2
000	0	0
001	1	1
010	2	2
011	3	3
100	4	-4
101	5	-3
110	6	-2
111	7	-1

**Tableau VI.2** Valeurs discrètes associées aux codes binaires : unipolaire et bipolaire

VI.8 Restitution pratique approchée

La restitution du signal analogique  $s(t)$  à partir des valeurs numériques  $s(kT_e)$  est généralement obtenue à laide d'un convertisseur Numérique/Analogique (CNA) et un filtre appelé bloqueur d'ordre zero (BOZ). Dans certains cas exigeants, il est suivi d'un filtre analogique passe-bas pour mieux atténuer les spectres latéraux dupliqués, ainsi isoler la composante centrale du spectre. Il est généralement de type de Butterworth, Tchebychev-1 et 2 ou elliptique. Le CNA permet de convertir les codes binaires en échantillons analogiques. Ce procéder de reconstruction inverse du signal analogique à partir des valeurs discrètes numériques est souvent assuré par une chaîne électronique dite *chaîne de restitution*.

## VI.9 La transformation en Z

### VI.9.1 Définition de la transformée en Z

La transformée en Z  $U(z)$  de la suite numérique  $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$  est définie par la relation suivante [3]:

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n)z^{-n} \quad (\text{VI.40})$$

Où :  $z$  est une variable complexe.

Nous écrivons, ainsi :  $U(z) = Z\{[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}\}$ , ou bien :  $U(z) = TZ\{[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}\}$ . Dans certaine littérature, nous écrivons sous-entendu que le signal analogique  $u(t)$  est échantillonné et/ou numérisé:  $U(z) = Z[u(t)]$ .

Cette définition est fréquemment appelée transformée en Z bilatérale, par le fait que la sommation s'étend à tous les entiers  $n$  de  $-\infty$  au  $+\infty$ . Dans le cas particulier des systèmes ou des signaux causaux, cette sommation ne s'étend plus par définition qu'aux entiers positifs :

$$U(z) = Z\{[u(n)]_{n \geq 0}\} = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n} \quad (\text{VI.41})$$

Nous parlons alors de la transformée en Z monolatérale ou unilatérale. Généralement, les deux transformées en Z possèdent les mêmes propriétés, sauf la propriété de l'avance.

L'intérêt de la transformée en Z monolatérale est de prendre en compte les conditions initiales d'un système LIT et de faire apparaître les régimes transitoires dans l'étude de la réponse d'un système. D'autre part, elle permet de déterminer à partir de  $U(z)$ , les valeurs extrêmes de la suite  $[u(n)]$ . La valeur initiale  $u(0)$  et la valeur finale  $u(\infty)$  (voir tableau VI.3).

### VI.9.2 Condition d'existence de la transformée en Z

La transformée en Z sous sa forme bilatérale ou monolatérale, introduit une série de Laurent, ce qui implique nécessairement une étude de la convergence de la dite série. L'ensemble des valeurs de  $z$  pour lesquelles la série converge, est appelé région ou domaine de convergence. Il est déterminé en utilisant le critère de Cauchy sur la convergence des séries de puissances. Il s'agit en général d'un anneau centré sur l'origine, de rayons  $R_1$  et  $R_2$  (Figure VI.13) dépendent de la suite  $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ , tels que [3] :

$$R_1 < |z| < R_2 \quad (\text{VI.42})$$

Avec :

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u(n)|^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |u(-n)|^{\frac{1}{n}}} \quad (\text{VI.43})$$

Démonstration

$U(z)$  peut être écrite sous la forme :

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n} = U_1(z) + U_2(z) \tag{VI.44}$$

Avec :

$$U_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u(n)z^{-n} \text{ et } U_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n} \tag{VI.45}$$

En effectuant le changement de variable  $k = -n$  dans  $U_1(z)$  :

$$U_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(-k)z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} u(-n)z^n \text{ (} k \text{ et } n \text{ sont des variables muettes)}$$

L'application du critère de Cauchy conduit à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u(-n)z^n|^{\frac{1}{n}} < 1 \text{ d'où : } |z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |u(-n)|^{\frac{1}{n}}} = R_2$$

De même, l'application du critère de Cauchy à la série  $U_2(z)$  conduit à :

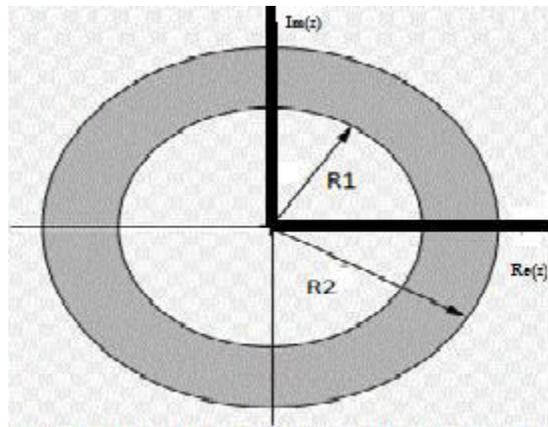
$$|z| > \lim_{n \rightarrow +\infty} |u(n)|^{\frac{1}{n}} = R_1$$

En récapitulation, nous avons la condition de convergence de la série  $U(z)$  :  $R_1 < |z| < R_2$

Remarque :

Dans le cas d'une transformée en Z monolatérale, la condition de convergence conduit à :

$$|z| > R_1 \text{ et la limite } R_2 \text{ s'étale à l'infini} \tag{VI.46}$$



**Figure VI.13.** Anneau de convergence de la transformée en Z.

Exemple :

Soit le signal discret échelon unitaire (Heaviside)  $[Y(n)]$ , tel que :  $Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Nous avons :

$$U(z) = Z\{[Y(n)]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^N z^{-n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - z^{-N-1}}{1 - z^{-1}} \right) \quad (\text{VI.47})$$

D'où :

$$U(z) = Z\{[Y(n)]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (\text{VI.48})$$

Avec la condition de convergence :

$$|z^{-1}| < 1 \text{ d'où : } |z| > 1 \quad (\text{VI.49})$$

### VI.9.3 Relation avec la transformée de Laplace

Nous avons vu qu'une suite discrète  $[u(nT_e)]_{n \in \mathbb{Z}}$  peut être associée à une distribution appelée signal échantillonné associé  $u_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)\delta(t - nT_e)$ , avec  $T_e$  est la période d'échantillonnage.

La transformée de Laplace peut être appliquée au signal  $u_e(t)$  de la variable continue  $t$ , nous avons :

$$L[u_e(t)] = L\left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)\delta(t - nT_e) \right] \quad (\text{VI.50})$$

Les propriétés de linéarité et translation temporelle de la transformée de Laplace permettant d'écrire :

$$L[u_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)L[\delta(t - nT_e)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)e^{-nT_e p} \quad (\text{VI.51})$$

D'où :

$$L[u_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)(e^{T_e p})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)z^{-n} \quad (\text{VI.52})$$

D'après (VI.52), nous avons :

$$z = e^{T_e p} \quad (\text{VI.53})$$

VI.9.4 Calcul de la transformée en Z à partir de la transformée de Laplace

Soit un signal analogique  $u(t)$ , sa transformée de Laplace  $L[u(t)] = F(p)$  et la suite  $[u(nT_e)]$  obtenue par échantillonnage et/ou numérisation du signal analogique  $u(t)$  avec la période d'échantillonnage  $T_e$ .

Nous avons le théorème de résidus permettant le calcul de la transformée en Z  $U(z) = Z\{[u(nT_e)]\}$  à partir de la transformée de Laplace  $F(p)$ , tel que [2] :

$$U(z) = \sum_k \text{sur les poles } p_k \text{ de } F(\zeta) \left[ \text{residus de } \frac{F(\zeta)}{1 - e^{T_e \zeta} z^{-1}} \right] \tag{VI.54}$$

Nous distinguons les cas suivants :

1. Si  $F(\zeta) = \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)}$  admet des pôles  $p_k$  (réel ou complexe) simples et distinctes :

(VI.54) s'écrit sous la forme:

$$U(z) = \sum_{p_k} \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} \frac{1}{1 - e^{T_e p_k} z^{-1}} \tag{VI.55}$$

Avec :  $D'(\zeta) = \frac{dD(\zeta)}{d\zeta}$  (la dérivée).

2. Si  $F(\zeta) = \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)}$  admet un pôle  $p_k$  (réel ou complexe) multiple d'ordre  $n$ , alors le résidu  $r_k$  peut être calculé par :

$$r_k = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{(n-1)}}{d\zeta^{(n-1)}} \left[ (\zeta - p_k)^n \frac{F(\zeta)}{1 - e^{T_e \zeta} z^{-1}} \right] \right\}_{\zeta=p_k} \tag{VI.56}$$

Exemple 1:

$$\text{Soit : } u(t) = e^{-at} Y(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\text{Nous avons : } F(p) = L[u(t)] = \frac{1}{p+a}$$

$F(\zeta)$  admet un seul pole simple  $p = -a$ , le résidu qui lui correspond :

$$r = \frac{N(p)}{D'(p)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Donc : } U(z) = \frac{1}{1 - e^{T_e(-a)} z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

Exemple 2:

$$\text{Soit : } F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

$$\text{Nous avons : } F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}, \text{ avec : } N(p) = 1 \text{ et } D(p) = (p+a)(p+b)$$

$$\text{D'où : } D'(p) = 2p + a + b$$

Nous avons donc :

$$U(z) = \frac{N(-a)}{D'(-a)} \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} + \frac{N(-b)}{D'(-b)} \frac{1}{1 - e^{-bT_e} z^{-1}}$$

D'où :

$$U(z) = \frac{1}{b-a} \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} + \frac{1}{a-b} \frac{1}{1 - e^{-bT_e} z^{-1}}$$

Exemple 3:

$$\text{Soit le signal rompe } R(t) = tY(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous avons  $F(p) = \frac{1}{p^2}$ , elle admet un seul pole double à l'origine. Son résidu peut être calculé par :

$$r = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left[ \zeta^2 \frac{\zeta^{-2}}{1 - e^{T_e \zeta} z^{-1}} \right] \right\}_{\zeta=0} = \left[ \frac{T_e e^{T_e \zeta} z^{-1}}{(1 - e^{T_e \zeta} z^{-1})^2} \right]_{\zeta=0} = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

Puisque nous avons un seul et unique pole multiple, alors la transformée en Z  $U(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$

VI.9.5 Principales propriétés de la transformée en Z

La transformée en Z peut être calculée à partir de ses propriétés [4,5]. Nous citons en premier lieu celles de la transformée en Z bilatérale [5] :

Signal échantillonné ou discret	Transformée en Z bilatérale	
$s(t)$ $[s(nT_e)]$ $[s_1(nT_e)]$ $[s_2(nT_e)]$	$S_L(p) = L[s(t)]$ , $S(z) = Z\{[s(nT_e)]\}$ $S_1(z) = Z\{[s_1(nT_e)]\}$ $S_2(z) = Z\{[s_2(nT_e)]\}$	désignation de la propriété
$\alpha[s_1(nT_e)] + \beta[s_2(nT_e)]$ , $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$	$\alpha S_1(z) + \beta S_2(z)$	linéarité
$s(t - KT_e)$ , $K \in \mathbb{Z}$	$z^{-K} S(z)$	translation temporelle $K > 0$ : retard $K < 0$ : avance
$[e^{-anT_e} s(nT_e)]$ , $a \in \mathbb{C}$	$S(ze^{aT_e})$	translation complexe
$[a^n s(nT_e)]$ , $a \in \mathbb{C}^*$	$S\left(\frac{z}{a}\right)$	Similitude ou changement d'échelle (homothétie)
$[ns(nT_e)]$	$-z \cdot \frac{dS(z)}{dz}$	Multiplication par n
$\sum_{k=0}^n s(kT_e)$	$\frac{z}{z-1} S(z)$	sommation
$\left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(kT_e) s_2(nT_e - kT_e) \right]$	$S_1(z) S_2(z)$	convolution
$\lim_{n \rightarrow 0} s(nT_e) = \lim_{z \rightarrow +\infty} S(z)$		Théorème de la valeur initiale
$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(nT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) S(z)$		Théorème de la valeur finale
$\Gamma_{s_1, s_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k) s_2(k - n)$ , $Z\{[\Gamma_{s_1, s_2}(n)]\} = R_{s_1, s_2}(z)$ Et $\Gamma_{s_2, s_1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_2(k) s_1(k - n)$ , $Z\{[\Gamma_{s_2, s_1}(n)]\} = R_{s_2, s_1}(z)$	$R_{s_1, s_2}(z) = R_{s_2, s_1}(z^{-1})$	Corrélation

Tableau VI.3. Principales propriétés de la transformée en Z

Ces mêmes propriétés sont valables pour la transformée en Z monolatérale, sauf la propriété de l'avance qui s'écrit :

$$Z\{[u(n+K)]\} = z^K U(z) - \sum_{k=0}^{K-1} u(k)z^{K-k}, \text{ avec : } K \in \mathbb{N}^* \quad (\text{VI.57})$$

VI.9.6 Transformée en Z de quelques signaux usuels

$s(t)$	$[s(nT_e)]$	$S_L(p)$	$S(z)$
$\Upsilon(t)$	$[\Upsilon(nT_e)]$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
$\Upsilon(t)e^{-at}$ et $a \in \mathbb{R}$	$[\Upsilon(nT_e)e^{-anT_e}]$ et $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1-e^{aT_e}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$\Upsilon(t)t$	$[T_e n \Upsilon(nT_e)]$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\Upsilon(t)\cos(\omega_0 t)$	$[\Upsilon(nT_e)\cos(\omega_0 nT_e)]$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\frac{(1-z^{-1}\cos\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0 T_e+z^{-2}} = \frac{z(z-\cos\omega_0 T_e)}{z^2-2z\cos\omega_0 T_e+1}$
$\Upsilon(t)\sin(\omega_0 t)$	$[\Upsilon(nT_e)\sin(\omega_0 nT_e)]$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0 T_e}{1-2z^{-1}\cos\omega_0 T_e+z^{-2}} = \frac{z\sin\omega_0 T_e}{z^2-2z\cos\omega_0 T_e+1}$

**Tableau VI.4.** Transformée en Z de quelques signaux usuels.

VI.9.7 Transformée en Z inverse

La transformée en Z possède une transformée inverse, où à partir de  $U(z)$ , nous retrouvons  $[u(nT_e)]$ . Nous écrivons, ainsi :  $[u(n)] = Z^{-1}[U(z)] = TZI[U(z)]$ .

Soit  $\Gamma$  un contour fermé contenant tous les points singuliers, ou pôles de  $U(z)$ , ainsi que l'origine ; nous pouvons écrire d'après le théorème des résidus :

$$u(n) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} z^{n-1} U(z) dz \quad (\text{VI.58})$$

Démonstration :

A partir de la définition de la transformée en Z, nous multiplions les deux membres par  $\frac{z^{k-1}}{2j\pi}$ , et nous intégrons le long d'un contour fermé  $\Gamma$ , entourant l'origine et contenu dans la région de convergence, nous avons :

$$\frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} U(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) z^{-n+k-1} dz \quad (\text{VI.59})$$

L'intégrale étant calculée dans une région de convergence, la série est convergente, ce qui permet d'inverser l'intégration et la sommation :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} U(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2j\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) \oint_{\Gamma} z^{-n+k-1} dz \tag{VI.60}$$

Nous avons d'après le théorème de Cauchy sur l'intégration le long d'un contour fermé dans le plan complexe :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \tag{VI.61}$$

Par conséquent, il vient :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} z^{-n+k-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases} \tag{VI.62}$$

D'où l'équation (VI.58):  $u(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} U(z) z^{n-1} dz$

Généralement, le calcul de  $Z^{-1}$  s'effectue par plusieurs techniques, à savoir :

#### VI.9.7.1 Calcul par développement en éléments simples

Nous décomposons  $U(z)$  en éléments simples dont les transformées en  $Z$  inverse sont connues à l'avance, tout en servant de la propriété de linéarité de la transformée en  $Z$  et sa version inverse. Il existe plusieurs techniques de décomposition, à savoir :

1. Une première méthode consiste à écrire  $U(z)$  en fonction de la variable complexe  $z^{-1}$  sous la forme :

$\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ , où  $N(z^{-1})$  et  $D(z^{-1})$  sont des polynômes en  $z^{-1}$ , généralement le degré  $M$  de  $D(z^{-1})$  est supérieur à celui de  $N(z^{-1})$ .

Sans perte de généralité, nous supposons que  $D(z^{-1})$  admet  $(M - q)$  pôles simples  $p_n$  et un pôle multiple d'ordre  $q$ . Nous avons donc :

$$U(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{M-q} \frac{A_n}{z^{-1} - p_n} + \sum_{m=1}^q \frac{B_m}{(z^{-1} - p_k)^m} \tag{VI.63}$$

Le calcul de  $A_n$  et  $B_m$  peut être effectué par le théorème des résidus, nous avons donc :

$$A_n = \left. (z^{-1} - p_n) \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \right|_{z^{-1}=p_n} \quad (\text{VI.64})$$

$$B_m = \frac{1}{(q-m)!} \frac{d^{(q-m)}}{d(z^{-1})^{(q-m)}} \left[ (z^{-1} - p_k)^q \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \right] \Big|_{z^{-1}=p_k} \quad (\text{VI.65})$$

2. Une deuxième méthode consiste à développer d'abord la fonction  $\frac{U(z)}{z} = \frac{N(z)}{D(z)}$  en fractions élémentaires en fonction de la variable complexe  $z$ . Si  $D(z)$  admet  $(M-q)$  pôles simples  $p_n$  et un pôle multiple d'ordre  $q$ , nous avons :

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{M-q} \frac{A_n}{z - p_n} + \sum_{m=1}^q \frac{B_m}{(z - p_k)^m} \quad (\text{VI.66})$$

Avec :

$$A_n = \left. (z - p_n) \frac{N(z)}{D(z)} \right|_{z^{-1}=p_n} \quad (\text{VI.67})$$

$$B_m = \frac{1}{(q-m)!} \frac{d^{(q-m)}}{dz^{(q-m)}} \left[ (z - p_k)^q \frac{N(z)}{D(z)} \right] \Big|_{z^{-1}=p_k} \quad (\text{VI.68})$$

Enfin la décomposition de  $U(z)$  s'écrit sous la forme :

$$U(z) = \frac{zN(z)}{D(z)} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{M-q} A_n \frac{z}{z - p_n} + \sum_{m=1}^q B_m \frac{z}{(z - p_k)^m} \quad (\text{VI.69})$$

Après décomposition avec les deux méthodes ci-dessus, le calcul des transformée en Z inverse est immédiat, il suffit de consulter la table des fonctions usuelles en servant des propriétés de la transformée en Z et sa version inverse.

#### VI.9.7.2 Calcul par division suivant les puissances croissantes de $z^{-1}$

Si  $U(z)$  s'écrit sous la forme  $\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$  en fonction de la variable complexe  $z^{-1}$ . Le

développement en série selon les puissances croissantes de  $z^{-1}$  en équation (5.6)  $\left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e) z^{-n} \right]$  peut

être obtenu par division en puissances croissantes des deux polynômes  $N(z^{-1})$  sur  $D(z^{-1})$ . Ainsi, la valeur de  $u(nT_e)$  est obtenue immédiatement selon la définition de la transformée en Z.

## VI.9.7.3 Calcul par intégration directe par les résidus

Nous appliquons le théorème des résidus tel que :

$$u(nT_e) = \sum \text{residus de } U(z)z^{n-1} \text{ sur un contour fermé } \Gamma \quad (\text{VI.70})$$

Le calcul des résidus dépend de la nature des pôles simple ou multiple d'ordre  $q$ . Nous avons pour le cas d'un pôle simple  $p_n$  :

$$\text{residu}(p_n) = \lim_{z \rightarrow p_n} [U(z)z^{n-1}(z - p_n)] \quad (\text{VI.71})$$

Pour le cas d'un pôle  $p_k$  multiple d'ordre  $q$  :

$$\text{residu}(p_n) = \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{(q-1)} [U(z)z^{n-1}(z - p_k)^q]}{dz^{(q-1)}} \quad (\text{VI.72})$$

## Bibliographie

- [1] OUAHABI A., *Traitement du signal – théorie du signal – signaux déterministes*, Office des publications universitaires, 1991.
- [2] GUERCHAOUI A., *Traitement du signal – théorie et applications, Partie 1 : Fondements mathématiques*, Office des Publications Universitaires, 2008.
- [3] COURMONTAGNE P., *Traitement du signal – Ingénierie du signal : théorie et pratique*, TECHNOSUP, Editions Ellipses, 2005.
- [4] BEKKA R. E., *Fondements théoriques du traitement du signal*, Office des publications Universitaires, 2005.
- [5] BELLANGER M., *Traitement numérique du signal : Théorie et Pratique*, 4<sup>e</sup> Edition, Masson, 1990.
- [6] OPPENHEIM A. V., SCHAFFER R. W., *Digital Signal Processing*, Printice-Hall Inc, 1975.

**Semestre : S4**

**UEF 2.2.2**

**Matière 2 : Théorie du signal** (VHS: 45h00, Cours : 1h30, TD : 1h30)

**Objectifs de l'enseignement:**

Acquérir les notions de base pour le traitement du signal et des processus aléatoires.

**Connaissances préalables recommandées:**

Cours de mathématiques de base

**Contenu de la matière :**

**Chapitre 1 : Généralités sur les signaux 3 semaines**

Signaux analogiques / discrets, Signaux particuliers, Signaux déterministes et signaux aléatoires, Notions de puissance et d'énergie.

**Chapitre 2 : Analyse de Fourier 2 semaines**

Introduction, Séries de Fourier, Transformée de Fourier, Théorème de Parseval.

**Chapitre 3 : Transformée de Laplace 3 semaines**

Propriétés de la Transformée de Laplace, Analyse temporelle et fréquentielle.

**Chapitre 4 : Produit de Convolution 2 semaines**

Formulation du produit de convolution, Propriétés du produit de convolution, Produit de convolution et impulsion de Dirac, Déconvolution.

**Chapitre 5 : Corrélation des signaux 2 semaines**

Intercorrélation entre les signaux, Autocorrélation, Propriétés de la fonction de corrélation, Cas des signaux périodiques.

**Chapitre 6 : Echantillonnage et Signaux discrets. 3 semaines**

Signaux discrets, Echantillonnage réel, Echantillonnage idéalisé, Théorème d'échantillonnage, Transformée en Z.

**Mode d'évaluation :**

Contrôle continu : 40 % ; Examen final : 60 %.

**Références:**

1- S. Haykin, Signals and systems, John Wiley & sons edition, 2 ed edit, 2003.

2- A.V. Oppenheim, Signals and systems, Prentice-Hall edition, 2004.

3- J. Max, Traitement du signal