

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



UNIVERSITE MUSTAPHA STAMBOULI DE MASCARA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



Polycopié de Cours

Traitement du signal

Présenté par :

Dr. MOUFFAK Adnane

Ce cours est destiné aux étudiants de la 3^e année Licence/spécialité
Télécommunications

Algérie
2018

Avant-propos

Le propos de ce polycopié est d'offrir un cours complet au module de traitement du signal pour les étudiants de la 3^e année Licence en spécialité de télécommunications. Nous avons essayé de présenter les notions essentielles d'une manière simple et progressive tout en respectant le programme décrit par le comité pédagogique national du domaine (CPND). Nous avons aussi insisté sur la rigueur mathématique en ce qui concerne le développement des différentes thématiques de ce programme, tout en reliant les principaux résultats obtenus avec la réalité physique.

Partant des principales notions de la théorie du signal, où les étudiants de la dite spécialité ayant déjà étudiés comme module en 2^e année. Ce polycopié présente d'abord les outils classiques de l'analyse d'un signal analogique déterministe, notamment la transformée et série de Fourier, la convolution et la corrélation. Nous introduisons aussi la notion de distributions dans un sens pragmatique en premier lieu, où la distribution de Dirac est considérée comme une limite de certaine fonction particulière. Ensuite, nous abordons les distributions avec le formalisme de Schwartz. Ce dernier outil est indispensable pour modéliser les signaux discrets et échantillonnés. En chapitre 2, nous abordons les filtres analogiques comme étant des systèmes linéaires et invariants dans le temps. Leurs propriétés, et méthodes d'analyse et de conception sont aussi discutées. Le chapitre 3 portera sur l'échantillonnage et la technique de numérisation. Ces opérations sont primordiales pour transiter du mode analogique au mode numérique. Dans le chapitre 4, nous étudions le spectre d'un signal échantillonné ou discret. Par la suite, la transformée de Fourier discrète est décrite sous les différentes formes rencontrées en littérature. La transformée de Fourier Rapide est aussi expliquée avec la technique d'entrelacement temporel. Les notions des systèmes discrets linéaires et stationnaires sont décrites en chapitre 5, les outils de base pour l'analyse et la réalisation de ces systèmes discrets sont aussi donnés surtout en ce qui concerne la transformée en Z. Le chapitre 6 portera sur les filtres numériques RIF, leurs méthodes de conception et leurs performances. Le chapitre 7 présente les filtres numériques RII, leur méthode de conception basée sur la transformation bilinéaire et les transformations en fréquences. Leurs caractéristiques sont aussi illustrées par des exemples de simulation. En chapitre 8, nous étudions les signaux aléatoires et leurs propriétés statistiques d'ordre 1 et 2, les notions d'ergodisme, et densité spectrale sont aussi abordées.

Nous invitons les lecteurs à nous envoyer leurs remarques, suggestions et critiques afin de pouvoir enrichir d'avantage ce document.

Nous souhaitons vivement contribuer à la formation de nos étudiants au sein de notre université Mustapha Stambouli de Mascara.

Un polycopié dédié aux travaux dirigés (TD) de ce module sera proposé ultérieurement.

Dr. MOUFFAK Adnane
Maitre de Conférences classe « B »
Email: mouffakadn@univ-mascara.dz

Table des matières

<i>Avant-propos</i>	<i>i</i>
<i>Table des matières</i>	<i>iii</i>
<i>Introduction générale</i>	<i>1</i>
CHAPITRE 1 : Rappels des principaux résultats de la théorie du signal	3
<i>1.1 Introduction</i>	<i>3</i>
<i>1.2 Définitions et notions de base</i>	<i>3</i>
<i>1.3 Classification des signaux</i>	<i>5</i>
<i>1.4 Transformée de Fourier d'une fonction apériodique</i>	<i>9</i>
<i>1.5 Convolution et corrélation des signaux</i>	<i>13</i>
<i>1.6 Série de Fourier d'une fonction périodique</i>	<i>16</i>
<i>1.7 Transformée de Laplace d'une fonction causale</i>	<i>18</i>
<i>1.8 Quelques caractéristiques des signaux dans l'espace $L_2(\infty)$</i>	<i>20</i>
<i>1.9 Les distributions et transformée de Fourier</i>	<i>21</i>
CHAPITRE 2 : Analyse et synthèse des filtres analogiques	27
<i>2.1 Notions de base et définitions</i>	<i>27</i>
<i>2.2 Relation d'entrée-sortie pour le cas d'un filtre analogique</i>	<i>29</i>
<i>2.3 Représentation d'un filtre analogique par équations différentielles</i>	<i>30</i>
<i>2.4 Régime permanent et régime transitoire</i>	<i>32</i>

<i>2.5 Représentation d'un filtre analogique par fonction de transfert et réponse fréquentielle</i>	32
<i>2.6 Filtre analogique causal ou physiquement réalisable</i>	34
<i>2.7 Filtre analogique stable</i>	34
<i>2.8 Distorsions linéaires</i>	35
<i>2.9 Filtre analogique idéal</i>	35
<i>2.10 Gabarit d'un filtre analogique réalisable</i>	41
<i>2.11 Transformations de fréquence</i>	42
<i>2.12 Filtres analogiques classiques</i>	44
<i>2.13 Filtres passe-bas analogiques usuels</i>	47
CHAPITRE 3 : Echantillonnage des signaux	55
<i>3.1 Introduction</i>	55
<i>3.2 Définitions et notations</i>	56
<i>3.3 L'échantillonnage idéal</i>	57
<i>3.4 Interpolation ou restitution idéale</i>	59
<i>3.5 Filtre analogique anti-repliement (anti-aliasing) du spectre</i>	62
<i>3.6 Echantillonnage réel</i>	63
<i>3.7 Quantification et codage- conversion Analogique/Numérique</i>	65
<i>3.8 Restitution pratique approchée</i>	69
CHAPITRE 4 : Transformée de Fourier Discrète TFD et Rapide TFR	71
<i>4.1 Introduction</i>	71
<i>4.2 Spectre d'un signal échantillonné ou discret</i>	71
<i>4.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD)</i>	75

4.4 Algorithme de calcul rapide de la TFD.....	79
4.5 Convolution linéaire – convolution circulaire.....	84
CHAPITRE 5 : Filtrage numérique	89
5.1. Introduction.....	89
5.2 Définitions et propriétés.....	89
5.3 La transformation en Z.....	91
5.4 Les systèmes numériques LIT définis par fonction de transfert et réponse fréquentielle	101
5.5 Les systèmes LIT définis par une équation aux différences.....	102
5.6 Structures de réalisation des filtres numériques.....	107
CHAPITRE 6: Filtres numériques à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)	115
6.1 Introduction.....	115
6.2 Condition de linéarité de la phase pour les filtres RIF.....	115
6.3 Synthèse des filtres RIF à phase linéaire.....	118
6.4 Estimation du nombre de coefficients en fonction des spécifications du gabarit de filtre	128
6.5 Conclusion.....	129
CHAPITRE 7: Filtres numériques à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)	131
7.1 Introduction.....	131
7.2 Expressions générales pour les caractéristiques.....	131
7.3 Cellules élémentaires de filtres RII.....	132
7.4 Calcul des coefficients d'un filtre RII par développement analytique.....	143
7.5 Evaluation des performances des filtres numériques LIT.....	147
7.6. Conclusion.....	154

CHAPITRE 8: Processus aléatoires	155
8.1 Introduction	155
8.2 Eléments de probabilités	155
8.3 Processus aléatoire et fonction aléatoire	162
8.4 Processus aléatoire ou fonction aléatoire du second ordre	166
8.5 Stationnarité	166
8.6 Ergodisme	168
8.7 Densité spectrale	169
Bibliographie.....	173

Introduction générale

Le traitement du signal est une discipline actuellement en pleine expansion, dont l'objet principal est l'étude, la conception et la réalisation des systèmes d'exploitation des signaux. Ces derniers peuvent être par exemple, un véhicule d'une information (codage et modulation), récupération d'une information (décodage et démodulation), systèmes de télédétection, systèmes de prospection par satellite de ressources naturelles, systèmes de prévisions météorologiques, ou bien tout simplement diminution de l'effet des parasites (bruits) sur l'information (filtrage, déconvolution, ..., etc.).

Les supports physiques de réalisation de ces systèmes ressortissent en général à l'électronique et/ou à l'informatique, plus rarement à l'optique ou l'acoustique. En effet, les progrès de fabrication des semi-conducteurs et la microélectronique des circuits VLSI (Very Large Scale Integration), permettent le développement de diverses solutions technologiques de réalisation telles que les processeurs de traitement du signal DSP (Digital Signal Processing), les processeurs spécialisés de types ASIC (Application Specific Integrated Circuits) et les FPGA (Field Programmable Gate Array). Parallèlement, les outils de programmation de ces circuits intégrés, notamment les langages évolués et visuels (C++, VHDL, ..., etc.), ont beaucoup facilité la mise en œuvre des algorithmes sophistiqués de traitement des signaux.

Au niveau de l'étude et la conception, le traitement du signal s'appuie sur des concepts théoriques, souvent mathématiques tels la théorie de distributions, l'algèbre, l'analyse et l'analyse numérique, l'optimisation, les probabilités et les statistiques. Dans ce contexte, nous parlons plutôt de la théorie du signal et qui constitue les fondements théoriques de la discipline du traitement du signal.

Le traitement du signal intéresse des domaines très variés tels que les filières du génie électrique, notamment les télécommunications, l'électronique et le génie biomédical. Il peut toucher aussi d'autres domaines tels que la géophysique, l'astronomie, la physique, la biologie et même l'économie. Ainsi, l'existence et l'importance de cette discipline apparaissent clairement dans la diversité des activités humaines.

Notons qu'il y a des disciplines traitant un objet de même nature, mais dans un contexte différent telles que la robotique, l'automatique centrée sur des problèmes d'identification et de commande, le traitement des données s'adressant plutôt à des ensembles n'ayant pas le caractère de « signaux », la reconnaissance des formes, l'intelligence artificielle et la recherche opérationnelle.

Parmi les tâches importantes rencontrées en traitement du signal, nous pouvons citer : l'étude des signaux engendrés par des phénomènes ou dispositifs physiques et leur modélisation ; l'étude et la conception des systèmes de traitement du signal ; et le développement et la réalisation des systèmes de traitement du signal et en particulier les outils de base tels que les circuits intégrés spécialisés en traitement et acquisition des signaux.

Chapitre 1: Rappels des principaux résultats de la théorie du signal

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux résultats de la théorie du signal, un module enseigné auparavant en 2^{ème} année licence en filières telles que : les télécommunications, l'automatique, l'électrotechnique, l'électronique, l'électromécanique et le génie biomédicale. Nous rappelons les notions essentielles telles que la classification des signaux, la représentation des signaux et l'analyse fréquentielle par série et transformée de Fourier, la convolution et la corrélation.

1.2 Définitions et notions de base

1.2.1 Signal

Un signal est le véhicule ou le support physique porteur d'une information utile à l'observateur. Il représente la manifestation physique d'une grandeur mesurable de nature quelconque (électrique, optique, acoustique, électromagnétique, température, pression,..., etc.). Il peut dépendre d'une ou plusieurs variables souvent indépendantes telles que l'espace, le temps ou la fréquence.

Exemples :

Onde acoustique : propagation de la pression dans un milieu (en air : on parle du son, en océans : océanogramme, en corps humain : échogramme).

Signaux biologiques : signaux d'ElectroEncephaloGramme (EEG), signaux d'ElectroCardioGramme (ECG).

Signaux géophysiques ou sismogramme : vibrations sismiques dans les sous-couches terrestres.

Finances : cours de la bourse.

Multimédias : images, vidéos et parole.

1.2.2 Bruit

Un bruit est tout phénomène perturbateur pouvant gêner la perception ou l'interprétation d'un signal. La notion du bruit est relative et dépend de l'intérêt de l'utilisateur (ou l'observateur). Par exemple les ondes électromagnétiques astronomiques (infrarouge, ultraviolet, rayons X et rayons Gamma) sont considérés comme bruit en télécommunications, et des signaux utiles en radioastronomie.

1.2.3 Rapport Signal sur Bruit (Signal Noise Ratio : SNR)

C'est une mesure de la quantité du bruit contenue dans un signal. Il s'exprime par le rapport des puissances respectivement du signal (P_s) et du bruit (P_N). Il est souvent donné en décibels, tel que :

$$SNR(dB) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_N} \right) \quad (1.1)$$

1.2.4 Support d'une fonction ou signal $s(t)$

Le support d'une fonction représentant un signal est la partie de son ensemble de définition sur laquelle se concentre l'information utile de cette fonction ou signal. Autrement dit, c'est la partie du domaine où elle n'est pas nulle.

1.2.5 La discipline : théorie du signal et traitement du signal

1.2.5.1 La Théorie du signal

C'est l'ensemble des théories et outils mathématiques, par exemples : théorie de distribution, algèbre, analyse, méthodes numériques et optimisation, probabilités et statistiques, permettant l'étude et la conception des systèmes d'exploitation des signaux. Nous citons en particulier dans ce contexte, l'analyse des signaux par transformée et série de Fourier, la théorie des systèmes linéaires invariants dans le temps et la transformée de Laplace, la convolution et la déconvolution, la corrélation et l'autocorrélation.

1.2.5.2 Le Traitement du signal

Le traitement du signal est une discipline dont l'objet principal est l'étude, la conception et la réalisation des systèmes d'exploitation des signaux. Ces derniers peuvent être par exemple, un système de véhicule d'une information (codage et modulation), récupération d'une information (décodage et démodulation), ou bien tout simplement diminution de l'effet des parasites (bruits) sur l'information (filtrage, déconvolution, ..., etc.).

Des disciplines traitant un objet de même nature dans un contexte différent sont nombreuses telles que la robotique, l'automatique centrée sur les problèmes d'identification et de commande, le traitement des données s'adressant plutôt sur des ensembles n'ayant pas le caractère de « signaux » par exemple les bases de données et les enregistrements, la reconnaissance de formes, la mise en correspondance, l'intelligence artificielle et la recherche opérationnelle [1].

1.2.5.2.1 Les supports physiques de réalisation des systèmes d'exploitation des signaux

Les supports physiques de réalisation de ces systèmes ressortissent en général à l'électronique et/ou à l'informatique, plus rarement à l'optique ou l'acoustique. En effet, les progrès de fabrication des semi-conducteurs et la microélectronique des circuits VLSI (Very Large Scale Integration), permettent le développement de diverses solutions technologiques de réalisation telles que les processeurs de traitement du signal DSP (Digital Signal Processing), les processeurs spécialisés de types ASIC (Application Specific Integrated Circuits) et les FPGA (Field Programmable Gate Array). Parallèlement, les outils de programmation de ces circuits intégrés, notamment les langages évolués et visuels (C++, VHDL, ..., etc.), ont beaucoup facilité la mise en œuvre des algorithmes sophistiqués de traitement des signaux.

1.2.5.2.2 Les domaines d'application

Les domaines d'application se sont multipliés : les télécommunications, l'image, la parole et les signaux audio, les signaux géophysiques, la prospections minières et pétrolière, les signaux biomédicaux, le radar, le sonar, le guidage et la navigation, les réacteurs nucléaires, la télédétection, la cartographie, l'économie,..., etc.

1.2.5.2.3 Les taches importantes

Parmi les taches importantes rencontrées en traitement du signal, nous pouvons citer :

1. L'étude des signaux engendrés par des phénomènes ou dispositifs physiques et leur modélisation.
2. L'étude et la conception des systèmes de traitement du signal. Dans la conception de ces systèmes, nous pouvons distinguer :
 - La mise au point des moyens de base de traitement du signal, correspondant à des traitements plus ou moins standards applicables à des situations classiques : le filtrage linéaire et invariant dans le temps (LIT), les méthodes de synthèse des filtres analogiques et/ou des filtres numériques, le filtrage de Wiener, le filtrage de Kalman, les transformations rapides, les méthodes d'analyse spectrale, l'échantillonnage, ..., etc.
 - L'étude des systèmes à modélisation stochastique. Une telle étude peut en particulier concerne l'extraction de l'information transportée par un signal lorsque ce dernier est aléatoire ou n'est observable qu'après perturbation aléatoires. Les opérations de base à effectuer sont : la détection, l'estimation, la classification, la déconvolution, le codage, décodage,..., etc.
3. Le développement et la réalisation des systèmes de traitement du signal et en particulier les outils de base tels que les circuits intégrés dédiés au traitement du signal (DSP, ASIC,...,etc.).

1.3 Classification des signaux

Nous pouvons envisager plusieurs critères de classification des signaux selon les caractéristiques considérées. Nous citons :

1.3.1 Classification phénoménologique (statistique)

Cette classification considère la nature de la description du comportement ou l'évolution du signal en fonction d'une ou plusieurs variables indépendantes, souvent le temps et/ou l'espace. Celle-ci conduit à deux classes de signaux, à savoir : les signaux déterministes ou certains et les signaux aléatoires ou stochastiques.

1.3.1.1 Signaux déterministes

Leur description est unique, prévisible avec certitude et peut être parfaitement modélisée par une fonction ou distribution mathématique de variables indépendantes le temps et/ou l'espace. Ainsi, un signal déterministe peut être reproduit d'une façon rigoureuse et identique. Les signaux déterministes admettent une représentation unique, généralement du premier ordre : signal temporel $s(t)$ ou bien

spectre fréquentiel $S(f)$, contrairement aux signaux aléatoires où leur étude exige une représentation du second ordre telle que la fonction de corrélation et la densité spectrale.

Parmi les signaux déterministes, nous distinguons les sous-classes suivantes :

1.3.1.1.1 Signaux périodiques

Leur description ou évolution se reproduit infiniment d'une façon régulière et identique à des intervalles de temps égaux. Ces signaux sont caractérisés par leur période T , qui est la plus petite durée au bout de laquelle l'évolution du signal peut se reproduire d'une manière similaire et identique. Si le signal périodique de période T est représenté par une fonction $s(t)$, alors nous avons :

$$\forall t \quad s(t+T) = s(t) \quad (1.2)$$

Exemples : Parmi les phénomènes représentés par des signaux périodiques, nous citons :

Les battements du cœur (signal ECG) et le mouvement des planètes autour du soleil.

1.3.1.1.2 Signaux apériodiques ou non périodiques

Ce sont des signaux où il n'existe pas de constante pour laquelle l'expression (1.2) est vérifiée. Leur évolution dans le temps n'est pas reproduite à l'infini.

1.3.1.2 Signaux aléatoires ou stochastiques

Leur description n'est pas unique, imprévisible et dépend du hasard. Ainsi, une description complète de leur évolution en fonction du temps et/ou l'espace exige la connaissance de leurs propriétés statistiques qui peuvent être obtenues par une infinité de descriptions élémentaires, chacune d'elles est engendrée par une épreuve ou réalisation. Dans ce cas, à chaque point (instant et/ou coordonnées), la fonction décrivant le signal prend une valeur particulière parmi un ensemble et ceci d'une manière aléatoire (inconnue de l'observateur). En général l'ensemble des valeurs prises par la fonction à un point donné peut être modélisé par une loi de probabilité (uniforme, gaussienne,..., etc.). Ces signaux sont connus aussi sous l'appellation de processus aléatoires ou stochastiques. Dans cette classe, nous distinguons les sous-classes suivantes :

1.3.1.2.1 Signaux aléatoires stationnaires

Lorsque leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps.

1.3.1.2.2 Signaux aléatoires non stationnaires

Lorsque leurs propriétés statistiques dépendent du temps.

1.3.2 Classification énergétique

L'information véhiculée par un signal lors de sa transmission, puis sa réception est liée à une transmission d'énergie. Donc, pour étudier un signal physique, nous pouvons mesurer son énergie ou sa puissance moyenne. Pour un signal $s(t)$ déterministe ou aléatoire stationnaire et ergodique (du second ordre) (voir chapitre 8), nous définissons les caractéristiques suivantes [2]:

L'énergie totale :

$$E_t = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\bar{s}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (1.3)$$

L'énergie partielle jusqu'à l'instant t_0 :

$$E(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} s(t)\bar{s}(t)dt = \int_{-\infty}^{t_0} |s(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

La puissance instantanée :

$$p(t) = \frac{dE}{dt} = s(t)\bar{s}(t) = |s(t)|^2 \quad (1.5)$$

La puissance moyenne sur une durée T :

$$P_T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

La puissance moyenne totale :

$$P_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

D'après la puissance moyenne totale d'un signal, nous pouvons classer les signaux en :

1.3.2.1 Signaux à puissance moyenne totale nulle

Ces signaux ont une énergie totale finie, nous pouvons citer comme exemple, les signaux déterministes aperiodiques et transitoires.

1.3.2.2 Signaux à puissance moyenne totale finie non nulle

Ces signaux ont une énergie totale infinie. Nous pouvons citer comme exemple les signaux périodiques déterministes ou aléatoires, certains signaux déterministes tels que l'échelon unitaire et le signe de t : $\text{sgn}(t)$.

1.3.2.2 Signaux à puissance moyenne totale infinie

Ces signaux ont une énergie totale infinie et présentent peu d'intérêt sur le plan pratique. A titre d'exemple, nous citons les signaux aléatoires à bande fréquentielle infinie comme le bruit blanc stationnaire, le signal déterministe $s(t) = \sin(2\pi f_0 t) e^{\alpha t} \Upsilon(t)$ avec : $\alpha > 0$, $\Upsilon(t)$ est l'échelon unitaire, appelée aussi fonction de Heaviside (voir §.1.4.1)

1.3.3 Classification morphologique

Selon la nature de l'amplitude du signal (continue ou discrète), et la nature de son évolution dans le temps et /ou l'espace (continu ou discret), nous distinguons (Figure 1.1):

1.3.3.1 Signaux analogiques

Ce sont des signaux naturels qui existent dans cet univers (lumière, température, pression, débit, niveau, tension, courant, charge, concentration,..., etc.). Ils peuvent avoir une amplitude continue avec une évolution continue dans le temps et/ou l'espace.

1.3.3.2 Signaux échantillonnés

Ce sont des signaux analogiques échantillonnés ou mesurés à des intervalles de temps bien définis. Ils ont une amplitude continue ou analogique avec une évolution discrète dans le temps. Donc l'information n'est disponible qu'à des instants déterminés appelés instants d'échantillonnage.

1.3.3.3 Signaux discrets ou numériques

Ce sont des signaux où l'amplitude et le temps sont discrets. Donc, l'information n'est disponible qu'à des instants bien définis, et l'amplitude est discrète et quantifiée sous forme de code binaire (numéro en plusieurs chiffres). En pratique ces signaux sont obtenus après l'échantillonnage d'un signal analogique, suivi d'une conversion analogique numérique (CAN) (voir chapitre 3).

1.3.3.4 Signaux quantifiés

Ce sont des signaux à temps continu, mais à amplitude discrète. Cette dernière catégorie présente moins d'intérêt dans la pratique.

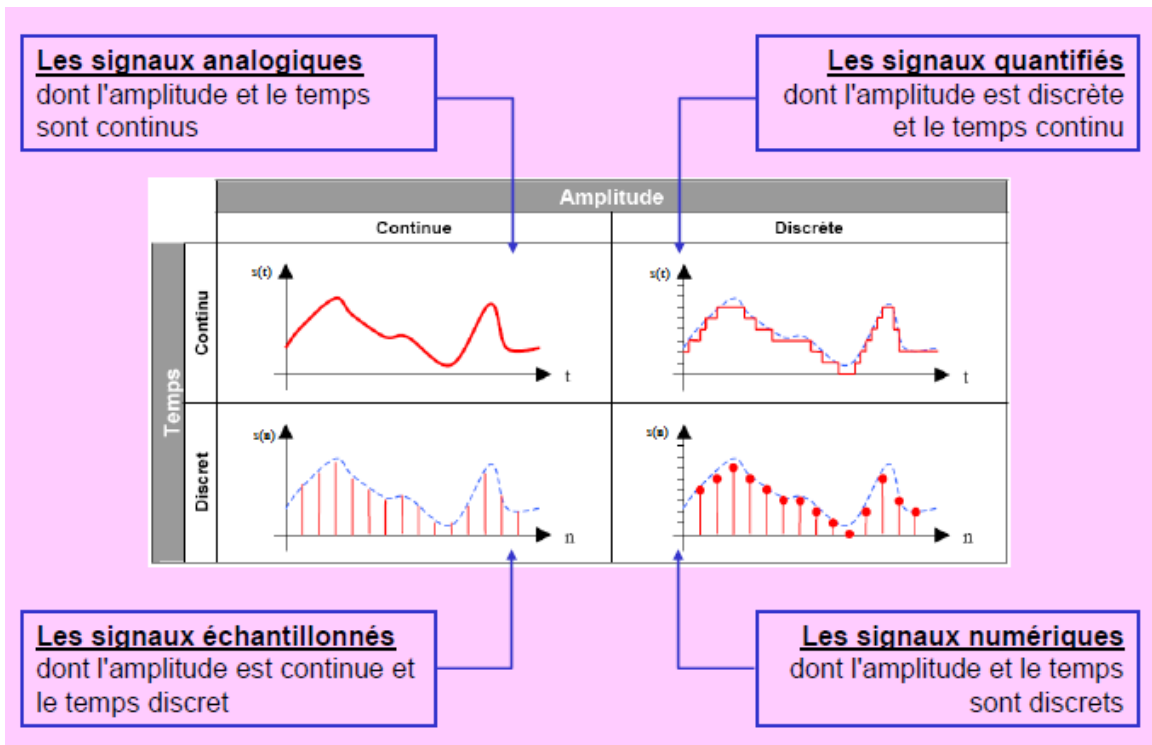


Figure 1.1. Classification morphologique des signaux

1.4 Transformée de Fourier d'une fonction aperiodique

1.4.1 Définition

Soit un signal aperiodique défini par sa représentation temporelle sous forme de fonction de la variable indépendante le temps t , tel que :

$$\begin{aligned} \square &\rightarrow \square \\ t &\mapsto s(t) \end{aligned}$$

Nous appelons transformée de Fourier de la fonction $s(t)$, l'intégrale impropre $S(f)$, sous condition de convergence, telle que :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad (1.8)$$

Nous écrivons ainsi : $s(t) \xrightarrow{TF} S(f)$, ou bien : $S(f) = F[s(t)]$. Cette intégrale lorsqu'elle existe est appelée aussi spectre du signal $s(t)$.

Exemple 1 :

Soit le signal porte $\Pi(t)$ normalisé, défini par : $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Ce signal est aperiodique à support borné $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$. Il est absolument sommable et son énergie totale égale à 1. Il est aussi centré par rapport à l'origine. En appliquant la définition de la TF (1.8), nous avons :

$$F[\Pi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2j\pi ft} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2j\pi ft} dt = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = \text{sinc}(f) \quad (1.9)$$

Dans ce cas, le spectre de $\Pi(t)$ est une fonction de fréquence appelée sinus cardinal normalisé. Cette normalisation est justifiée par le fait que son énergie égale à 1. La figure 1.2 illustre la fonction sinus cardinal normalisé $\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$ (en bleu) et le sinus cardinal non normalisé $\frac{\sin(f)}{f}$ (en rouge).

Exemple 2 : Soit le signal échelon unitaire (fonction de Heaviside) $\Upsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Nous avons : $F[\Upsilon(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(t) e^{-2j\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2j\pi ft} dt = \left[-\frac{1}{2j\pi f} e^{-2j\pi ft} \right]_0^{+\infty}$ diverge

Donc, la transformée de Fourier de $\Upsilon(t)$ n'existe pas au sens des fonctions, nous verrons qu'elle existe au sens de distribution.

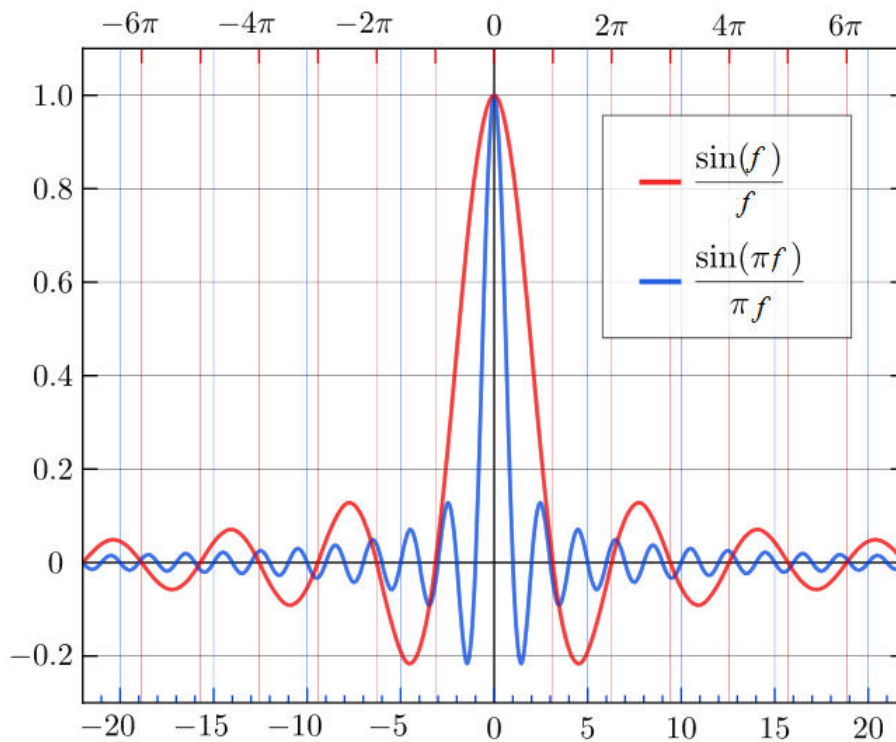


Figure 1.2. Illustration du spectre d'une porte : c'est un sinus cardinal normalisé (en bleu)

1.4.2 Condition de convergence (d'existence)

La transformée de Fourier $S(f)$ existe si $s(t)$ est absolument sommable, autrement dit :

$$\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt \text{ existe} \quad (1.10)$$

Compte tenu de l'inégalité : $\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt \leq \left[\int_{\mathbb{R}} |s(t)| dt \right]^2$, les signaux aperiodiques à énergie totale finie (à puissance moyenne nulle) ont toujours une transformée de Fourier [3].

1.4.3 Propriétés de la transformée de Fourier (TF)

Les propriétés les plus usuelles sont citées au tableau 1.1 ci-dessous:

$s(t)$	$S(f)$	désignation de la propriété
$s_1(t)$	$S_1(f)$	
$s_2(t)$	$S_2(f)$	
$\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$	$\alpha S_1(f) + \beta S_2(f)$	linéarité
$s(t - a), a \in \mathbb{R}$	$e^{-2j\pi fa} S(f)$	translation temporelle
$e^{+2j\pi f_0 t} s(t), f_0 \in \mathbb{R}$	$S(f - f_0)$	translation complexe
$s(at), a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$	Similitude ou changement d'échelle
$\bar{s}(t)$	$\bar{S}(-f)$	parité
$S(t)$	$s(-f)$	symétrie
$s'(t), s(\infty) = 0$	$2j\pi f S(f)$	dérivée
$s^{(n)}(t),$ $s(\infty) = 0, s'(\infty) = 0, \dots, s^{(n-1)}(\infty) = 0$	$(2j\pi f)^n S(f)$	dérivée nième
$(-2j\pi t)s(t)$	$S'(f)$	Dérivée fréquentielle
$(-2j\pi t)^n s(t)$	$S^{(n)}(f)$	dérivée nième fréquentielle
$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(f)S_2(f)$	Convolution (voir §-1.5)
$s_1(t)s_2(t)$	$S_1(f) * S_2(f)$	convolution

Tableau 1.1. Principales propriétés de la transformée de Fourier

NB : Généralement, lorsqu'un signal $s(t)$ est à support borné, il est recommandé que le calcul soit direct en appliquant la définition de la transformée de Fourier (TF) (1.8). Cependant, dans le cas d'un signal à support non borné, il est plus facile de déduire la TF par ses propriétés.

Exemple de calcul indirect par propriétés :

Calculez la TF du signal $x(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Le calcul direct de la TF engendre l'intégrale impropre $X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} e^{-2j\pi ft} dt$, ce qui est difficile à effectuer, car $x(t)$ n'est pas à support borné et les bornes d'intégration demeurent donc de $-\infty$ à $+\infty$. Cependant, en remarquant la propriété de la symétrie au tableau 1.1 et que : $F[\Pi(t)] = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$,

nous avons : $F\left[\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right] = \Pi(-f) = \Pi(f)$.

1.4.4 Théorème de Parseval

L'énergie totale d'un signal est indépendante de sa représentation. Ainsi, nous pouvons la calculer dans le temps par : $\int |s(t)|^2 dt$ et/ou dans le domaine fréquentiel par: $\int |S(f)|^2 df$. Ce théorème peut être exprimé par la formule :

$$\int |s(t)|^2 dt = \int |S(f)|^2 df \tag{1.11}$$

1.4.5 Transformée de Fourier de quelques fonctions usuelles

$s(t)$	$S(f)$
$\Pi(t)$ porte centrée et normalisée	$\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$
sinus cardinal normalisé $\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$	$\Pi(f)$
$\Lambda(t) = (1 - t)\Pi(\frac{t}{2}) = \Pi(t) * \Pi(t)$	$\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2}$
$\Upsilon(t)$ fonction échelon unitaire (Heaviside)	n'existe pas au sens de fonctions
$\Upsilon(t)e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{a + 2j\pi f}$
$\Upsilon(t)te^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{(a + 2j\pi f)^2}$
$\Upsilon(t)t^n e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{n!}{(a + 2j\pi f)^{n+1}}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$

Tableau 1.2. Transformée de Fourier de quelques fonctions usuelles

1.4.6 Transformée de Fourier inverse

Nous supposons que nous avons $S(f)$ et nous cherchons $s(t)$ au point $t = t_0$ sous conditions d'existence. Cette transformée s'appelle *transformée de Fourier inverse*. Sous conditions d'existence de Dirichlet, où $s(t)$ admet un nombre fini de discontinuité, et admet à chaque point $t = t_0$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche, nous avons:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{+2j\pi ft_0} df = \frac{s(t_0^+) + s(t_0^-)}{2} \tag{1.12}$$

Avec : $s(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} s(t)$ et $s(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} s(t)$

Si $s(t)$ est continue au point $t = t_0$, nous avons : $s(t_0^+) = s(t_0^-) = s(t_0)$; d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+2j\pi ft_0} df = s(t_0) \quad (1.13)$$

D'une façon générale, au point t , nous avons donc :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{+2j\pi ft} df \quad (1.14)$$

Nous écrivons ainsi : $F^{-1}[S(f)] = TFI[S(f)] = s(t)$.

1.5 Convolution et corrélation des signaux

1.5.1 Convolution

Nous définissons le produit de convolution ou simplement convolution de deux fonctions $u(t)$ et $v(t)$, quand il existe, par :

$$h(t) = u(t) * v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) v(t - \tau) d\tau \quad (1.15)$$

Exemple 1 : Calculez $h(t) = \Upsilon(t) * \Upsilon(t)$

$$\text{Nous avons : } h(t) = \Upsilon(t) * \Upsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Upsilon(\tau) \Upsilon(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \Upsilon(t - \tau) d\tau$$

Soit le changement de variable : $x = t - \tau$, d'où : $dx = d(t - \tau) = -d\tau$

Si : $0 \leq \tau < +\infty$ alors : $t \geq t - \tau > -\infty$ d'où : $t \geq x > -\infty$

$$\text{Nous avons donc : } h(t) = \int_t^{-\infty} \Upsilon(x) (-dx) = \int_{-\infty}^t \Upsilon(x) dx$$

Nous distinguons plusieurs cas selon la valeur de t :

$$\text{Si } t < 0 \text{ alors : } \Upsilon(x) = 0 \text{ d'où : } h(t) = \int_{-\infty}^t \Upsilon(x) dx = 0$$

$$\text{Si } t \geq 0 \text{ alors : } h(t) = \int_{-\infty}^t \Upsilon(x) dx = \int_{-\infty}^0 \Upsilon(x) dx + \int_0^t \Upsilon(x) dx = \int_0^t dx = t$$

Donc, nous avons en récapitulation : $h(t) = t\Upsilon(t)$

Exemple 2 : Calculez $h(t) = \Pi(t) * \Upsilon(t)$

$$\text{Nous avons : } h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) \Upsilon(t - \tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Upsilon(t - \tau) d\tau$$

Avec le changement de variable : $x = t - \tau$, nous avons : $dx = -d\tau$

Si : $-\frac{1}{2} \leq \tau \leq +\frac{1}{2}$ alors : $t + \frac{1}{2} \geq t - \tau \geq t - \frac{1}{2}$

$$\text{Nous avons donc : } h(t) = \int_{t+\frac{1}{2}}^{t-\frac{1}{2}} \Upsilon(x)(-d\tau) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x)d\tau$$

Nous remarquons que : $t - \frac{1}{2} \leq t + \frac{1}{2}$, c'est pour cette raison que notre raisonnement se base sur la position de ces deux limites par rapport à 0.

Si la plus grande limite $t + \frac{1}{2} < 0$, d'où : $t < -\frac{1}{2}$; dans ce cas nous sommes sûre et certain que la limite

$$t - \frac{1}{2} \text{ est aussi strictement inférieure à 0. Nous avons donc : } h(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x)d\tau = 0 \text{ car : } \Upsilon(x) = 0$$

Si la plus petite limite $t - \frac{1}{2} > 0$, d'où : $t > \frac{1}{2}$; dans ce cas, nous sommes certain que la limite $t + \frac{1}{2}$ est

$$\text{strictement supérieure à 0. Nous avons donc : } h(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x)d\tau = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} d\tau = t + \frac{1}{2} - (t - \frac{1}{2}) = 1$$

Sinon, nous avons : $t + \frac{1}{2} \geq 0$ et $t - \frac{1}{2} \leq 0$, d'où : $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$. Nous avons donc :

$$h(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x)d\tau = \int_{t-\frac{1}{2}}^0 \Upsilon(x)d\tau + \int_0^{t+\frac{1}{2}} \Upsilon(x)d\tau = \int_0^0 d\tau = t + \frac{1}{2}$$

$$\text{En récapitulation, nous avons : } h(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2} & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

1.5.2 Condition d'existence du produit de convolution

D'une manière générale, nous ne pouvons pas assurer la convergence du produit de convolution, mais pour certaines classes particulières de signaux, cette convergence peut être assurée. A titre d'exemple, nous considérons la classe des signaux à puissance moyenne totale nulle et énergie totale finie. Au point de vu mathématiques, cette classe peut être étudiée dans le cadre d'une structure de l'espace des signaux de Hilbert H [2].

Nous rappelons qu'un espace vectoriel sur \mathbb{R} , est appelé espace de Hilbert s'il est muni :

1. d'un produit scalaire, noté par : $\langle x, y \rangle$ où : $x, y \in H$ et $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$
2. d'une norme définie par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, avec : $x \in H$

Parmi les espaces de Hilbert les plus fréquemment rencontrés, nous citons l'espace des fonctions à carré sommables sur \mathbb{R} , désigné par $L_2(\infty)$ et définie par :

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{y}(t) dt, \quad \forall x, y \in L_2(\infty) \quad (1.16)$$

Nous pouvons donc définir une norme telle que:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \bar{x}(t) dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}, \quad \forall x \in L_2(\infty) \quad (1.17)$$

Il est clair d'après (1.17) que les signaux de cet espace $L_2(\infty)$ ont une énergie totale finie.

Reprenons la définition du produit de convolution (1.15) des deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ de l'espace $L_2(\infty)$

où : les énergies totales $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt$ sont finies.

$$\text{Nous avons donc : } h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, nous avons :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \text{ donc : } \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(t-\tau)|^2 d\tau}$$

Sachant que la translation n'affecte pas l'énergie d'un signal, nous avons donc :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2 d\tau} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |y(\tau)|^2 d\tau} \text{ ce qui prouve la convergence de l'intégrale (1.15), et}$$

l'existence du produit de convolution dans le cas des signaux dans l'espace $L_2(\infty)$.

1.5.3 Corrélation des signaux

La corrélation $C_{x,y}(t)$ de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ peut être définie à partir du produit de convolution telle que :

$$C_{x,y}(t) = x(t) * \bar{y}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \bar{y}(\tau-t) d\tau \quad (1.18)$$

L'expression (1.18) peut toujours converger dans le cas des signaux dans l'espace $L_2(\infty)$ (la démonstration est similaire à celle illustrée en §-1.5.2).

La fonction de corrélation représente à chaque instant t , la valeur du produit scalaire de $x(\tau)$ par $y(\tau-t)$. Il s'ensuit que la corrélation à l'instant t sera nulle si les deux signaux sont orthogonaux et sera maximale si ces deux signaux ont même direction. La fonction de corrélation permet donc de mesurer la similitude entre deux signaux, en termes d'orientation et de forme.

1.5.4 Fonction d'autocorrélation

Un cas particulier est intéressant lorsque : $x(t) = y(t)$. Dans ce cas, il s'agit de la fonction d'autocorrélation $C_{x,x}(t)$ est défini par :

$$C_{x,x}(t) = x(t) * \bar{x}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \bar{x}(\tau - t) d\tau \quad (1.19)$$

1.5.5 Propriétés de la fonction d'autocorrélation

L'autocorrélation pour un signal réel de l'espace $L_2(\infty)$, est réelle, paire et maximale à l'origine.

1.6 Série de Fourier d'une fonction périodique

1.6.1 Définitions

Soit un signal T périodique $s_T(t)$. Nous pouvons ainsi calculer les coefficients de Fourier définies par les formules :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} s_T(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s_T(t) \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} s_T(t) \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) dt \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

Notons que les intégrales doivent être calculées sur une longueur égale à T , les limites des intégrales peuvent être quelconques, par exemple entre : 0 et T , ou bien entre : $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$, et dans le cas générale entre : α et $\alpha + T$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ces limites peuvent être choisies selon l'expression du signal périodique $s(t)$ et sa parité (paire, impaire, ..., etc.).

$\frac{1}{T}$ est appelée la fréquence fondamentale.

Nous appelons *série de Fourier* la série définie par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) \quad (1.21)$$

Nous parlons aussi de la forme réelle de la série de Fourier.

Nous disons que le signal T périodique $s_T(t)$ est développable en série de Fourier s'il vérifie les conditions de Dirichlet, à savoir :

1. $s_T(t)$ admet un nombre fini de points de discontinuité.
2. $s_T(t)$ admet à chaque point t une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Dans ce cas, nous écrivons :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) = \frac{s_T(t^+) + s_T(t^-)}{2} \quad (1.22)$$

Avec : $s_T(t^+) = \lim_{x \xrightarrow{>} t} s_T(x)$ et $s_T(t^-) = \lim_{x \xrightarrow{<} t} s_T(x)$

Si : $s_T(x)$ est un signal continu au point t , nous avons : $s_T(t^+) = s_T(t^-) = s_T(t)$. Ainsi, le signal $s_T(x)$ continu au point : $x = t$, s'écrit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) + b_n \sin\left(2\pi \frac{n}{T} t\right) = s_T(t) \quad (1.23)$$

Il existe une autre forme de la série de Fourier dite *forme complexe*. Celle-ci peut se manifester dans la littérature sous plusieurs définitions, nous nous limiterons à celle permettant de mieux voir les similarités avec la transformée de Fourier. Nous avons donc la forme complexe de la série de Fourier :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\pi \frac{n}{T} t} \quad (1.24)$$

Avec c_n sont des coefficients complexes, tels que :

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.25)$$

Les coefficients c_n s'écrivent sous la forme intégrale :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} s_T(t) e^{-2j\pi \frac{n}{T} t} dt, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.26)$$

1.6.2 Théorème de Parseval pour les signaux périodiques

Nous distinguons les deux formes réelle et complexe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{T} \int_{(T)} |s(t)|^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2) \quad \text{forme réelle} \\ \frac{1}{T} \int_{(T)} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad \text{forme complexe} \end{array} \right. \quad (1.27)$$

La puissance moyenne sur une période T d'un signal T périodique est indépendante de la représentation. Ainsi, nous pouvons la calculer dans le temps par : $\frac{1}{T} \int_{(T)} |s(t)|^2 dt$ et/ou dans le domaine fréquentiel par $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$, avec les coefficients complexes c_n ; ou bien par la formule : $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$, avec les coefficients réels a_0 , a_n et b_n .

1.6.3 Comparaison et similarités avec la transformée de Fourier

série de Fourier	transformée de Fourier
$s(t)$ est un signal T périodique	$s(t)$ est un signal apériodique absolument sommable
$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) e^{-2j\pi ft} dt$, avec : $f = \frac{n}{T}, n \in \mathbb{Z}$	$S(f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2j\pi ft} dt$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\pi ft}$, avec : $f = \frac{n}{T}, n \in \mathbb{Z}$	$\int_{\mathbb{R}} S(f) e^{2j\pi ft} df$
Théorème de Parseval permet le calcul de la puissance moyenne du signal sur une période T $\frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n ^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$	Théorème de Parseval permet le calcul de l'énergie totale d'un signal $\int_{\mathbb{R}} s(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} S(f) ^2 df$

Tableau 1.3. Comparaison et similarités entre série et transformée de Fourier

D'après le tableau 1.3, la série de Fourier permet de calculer le spectre discret d'un signal périodique, où les fréquences $f = \frac{n}{T}$ sont discrètes et multiple de la fréquence fondamentale $\frac{1}{T}$. La transformée de Fourier, au sens de fonctions, permet de trouver le spectre continu d'un signal apériodique, absolument sommable.

Le théorème de Parseval pour la série et la transformée de Fourier présente des similarités. Il permet pour les deux cas de calculer respectivement la puissance moyenne d'un signal périodique sur une période T , ou l'énergie totale d'un signal apériodique, quelque soit la représentation temporelle ou fréquentielle.

1.7 Transformée de Laplace d'une fonction causale

1.7.1 Définition

Soit un signal causal défini par la fonction: $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto s(t)$

Nous appelons transformée de Laplace de la fonction causale $s(t)$, l'intégrale $S(p)$, sous condition de convergence telle que :

$$S(p) = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-pt} dt \tag{1.28}$$

Avec : $p = \sigma + 2j\pi f$ est un nombre complexe.

Nous écrivons ainsi : $s(t) \xrightarrow{TL} S(p)$, ou bien : $S(p) = L[s(t)]$

1.7.2 Condition de convergence (d'existence)

L'existence de l'intégrale de Laplace dépend de la valeur de $\text{Re}(p) = \sigma$.

Exemple : soit $s(t) = \Upsilon(t)$, nous avons : $S(p) = \int_0^{+\infty} \Upsilon(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty}$.

Dans ce cas, la convergence de l'intégrale est sous la condition : $\text{Re}(p) = \sigma > 0$, nous avons ainsi :

$$S(p) = \frac{1}{p}$$

1.7.3 Propriétés de la transformée de Laplace

$s(t)$	$S(p)$	Condition de convergence	désignation de la propriété
$s_1(t)$	$S_1(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	
$s_2(t)$	$S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \mu_1$ $\text{Re}(p) > \mu_2$	
$\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$	$\alpha S_1(p) + \beta S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \max(\mu_1, \mu_2)$	linéarité
$s(t-a), a > 0$	$e^{-ap} S(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	translation temporelle
$e^{ct} s(t) \quad c \in \mathbb{C}$	$S(p-c)$	$\text{Re}(p-c) > \mu$	translation complexe
$s(at), a > 0$	$\frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right)$	$\text{Re}(p) > a\mu$	homothétie ou changement d'échelle
$s'(t)$	$pS(p) - s(0^+)$	$\text{Re}(p) > \mu$	dérivée
$s^{(n)}(t)$	$p^n S(p) - p^{n-1} s(0^+) - p^{n-2} s'(0^+) - \dots - s^{(n-1)}(0^+)$	$\text{Re}(p) > \mu$	dérivée nième
$ts(t)$	$-S'(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	multiplication par t
$(-t)^n s(t)$	$S^{(n)}(p)$	$\text{Re}(p) > \mu$	multiplication par $(-t)^n$
$\int_0^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(p)}{p}$	$\text{Re}(p) > \max(\mu, 0)$	intégrale
$\frac{s(t)}{t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{s(t)}{t} \right]$ existe	$\int_p^{+\infty} S(u) du$		division par t
$s_1(t) * s_2(t)$	$S_1(p) S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \max(\mu_1, \mu_2)$	convolution
$s_1(t) s_2(t)$	$\frac{1}{2j\pi} S_1(p) * S_2(p)$	$\text{Re}(p) > \max(\mu_1, \mu_2)$	convolution

Tableau 1.4. Propriétés de la transformée de Laplace

1.7.4 Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

$s(t)$	$S(p)$	condition de convergence
$\Upsilon(t)$	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{p+a}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$\Upsilon(t)te^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$\Upsilon(t)t^n e^{-at}$ et $a > 0$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$\text{Re}(p+a) > 0$
$\Upsilon(t)\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\Upsilon(t)\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\text{Re}(p) > 0$

Tableau 1.5. Transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

1.8 Quelques caractéristiques des signaux dans l'espace $L_2(\infty)$

Nous citons quelques caractéristiques des signaux à puissance moyenne totale nulle et énergie totale finie, à savoir [4]:

1.8.1 Durée utile d'un signal et Largeur utile du spectre

La durée utile D d'un signal réel $s(t) \in L_2(\infty)$ peut être définie par :

$$\left(\frac{D}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 s^2(t) dt \tag{1.29}$$

Sachant que $s(t)$ admet une transformée de Fourier $S(f)$, nous pouvons définir la largeur utile L de ce spectre $S(f)$ par :

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |S(f)|^2 df \tag{1.30}$$

1.8.2 Relation d'incertitude de Heisenberg

Pour un signal $s(t)$, nous ne pouvons pas déterminer en même temps sa durée utile D et la largeur utile L de son spectre. Nous avons :

$$DL \geq \frac{E_t}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \tag{1.31}$$

1.9 Les distributions et transformée de Fourier

Jusqu'à présent, nous avons vu que l'analyse spectrale d'un signal déterministe nécessite la connaissance au préalable de la nature du signal. En effet, si le signal est périodique par exemple, nous avons recours à la série de Fourier pour calculer son spectre ; sinon dans le cas d'un signal apériodique à énergie totale finie et puissance moyenne totale nulle, nous utilisons la transformée de Fourier. Dans ce paragraphe, nous abordons le spectre d'un signal au point de vue distributions. Ce concept de Transformée de Fourier au sens de distributions nous permettons de calculer le spectre d'un signal déterministe sans savoir la nature du signal s'il est périodique, apériodique, discret,...etc [3].

1.9.1 Définition de Distribution de Dirac par approche pragmatique

Soit une fonction porte $\Pi_T(t)$ centrée de largeur T et surface égale à 1, telle que :

$$\Pi_T(t) = \frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.32)$$

Par approche pragmatique, nous définissons la distribution ou fonction généralisée de Dirac (figure 3.1), notée par $\delta(t)$ telle que:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{1}{T} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \right] = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.33)$$

Avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.34)$$

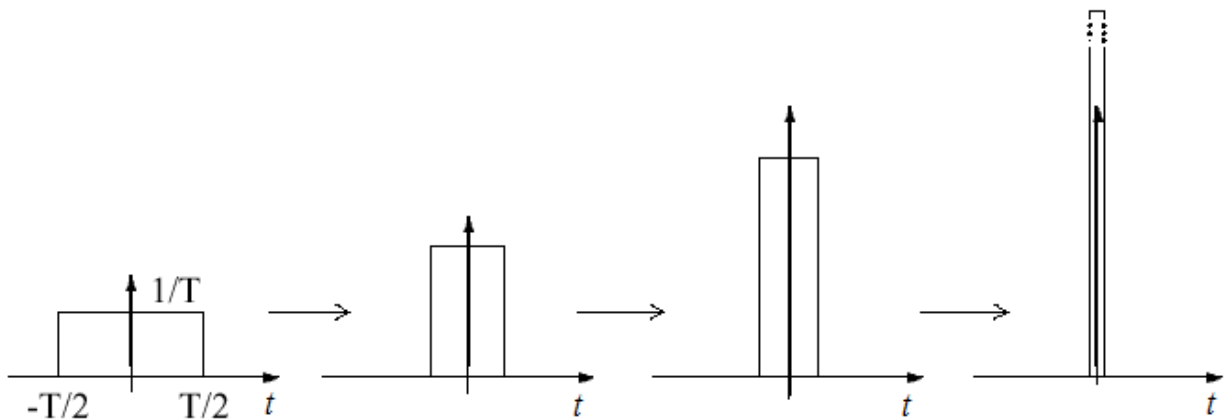


Figure 1.3. Définition de la Distribution de Dirac à partir d'une fonction porte

Nous présentons symboliquement la distribution de Dirac à l'origine par une flèche d'amplitude 1 (figure 1.4).

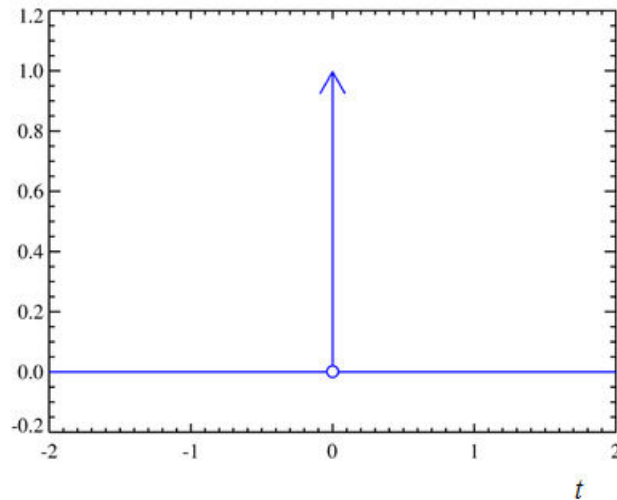


Figure 1.4. Illustration symbolique utilisée pour représentation graphique d'une distribution de Dirac à l'origine.

Nous définissons aussi une distribution de Dirac tradatée à $t = T_0$, désignée par $\delta_{T_0}(t)$, telle que :

$$\delta_{T_0}(t) = \delta(t - T_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = T_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.35)$$

La distribution tradatée $\delta_{T_0}(t) = \delta(t - T_0)$ peut être illustrée symboliquement par une flèche à $t = T_0$ d'amplitude 1 (figure 1.5).

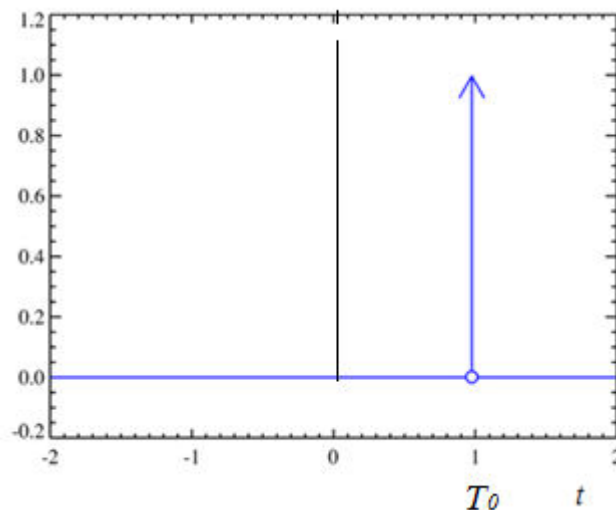


Figure 1.5. Illustration symbolique utilisée pour représentation graphique d'une distribution de Dirac tradatée à $t = T$.

1.9.2 Propriétés de la distribution de Dirac

1.9.2.1 Transformée de Fourier et distribution de Dirac

La transformée de Fourier de la distribution de Dirac est définie comme une limite de la transformée de Fourier de la fonction porte $\Pi_T(t)$ lorsque T tend vers 0.

Nous avons :

$$F[\Pi_T(t)] = F\left[\frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right] = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \quad (1.36)$$

D'où :

$$F[\delta(t)] = F\left[\lim_{T \rightarrow 0} \Pi_T(t)\right] = \lim_{T \rightarrow 0} \{F[\Pi_T(t)]\} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = 1 \quad (1.37)$$

Nous montrons par la propriété de la symétrie de la transformée de Fourier que :

$$F[1] = \delta(f) \quad (1.38)$$

Avec la propriété de la translation temporelle, nous avons :

$$F[\delta_{T_0}(t)] = F[\delta(t - T_0)] = e^{2j\pi fT_0} \quad (1.39)$$

1.9.2.2 Changement d'échelle et distribution de Dirac

Nous définissons la distribution $\delta(at)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ telle que :

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1.40)$$

1.9.2.3 Multiplication avec une fonction

La multiplication d'une fonction $\psi(t)$ à valeur dans \mathbb{R} par la distribution de Dirac correspond au produit de la valeur de cette fonction à $t = 0$ par la distribution de Dirac. Nous avons donc :

$$\psi(t)\delta(t) = \psi(0)\delta(t) \quad (1.41)$$

Nous disons que la distribution de Dirac se comporte comme un échantillonneur.

De la même façon, la multiplication d'une fonction $\psi(t)$ par la distribution $\delta_{T_0}(t)$ de Dirac traduite à $t = T_0$ correspond au produit de la valeur de cette fonction à $t = T_0$ par la distribution $\delta_{T_0}(t)$. Nous avons donc :

$$\psi(t)\delta_{T_0}(t) = \psi(t)\delta(t - T_0) = \psi(T_0)\delta(t - T_0) \quad (1.42)$$

1.9.2.4 Convolution et distribution de Dirac

La convolution d'une fonction $x(t)$ à valeurs dans \square par une distribution de Dirac conduit à la même fonction $x(t)$. Nous avons donc :

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t) \quad (1.43)$$

De plus, nous avons :

$$x(t) * \delta_{T_0}(t) = \delta_{T_0}(t) * x(t) = x(t - T_0) \quad (1.44)$$

Donc la convolution avec $\delta_{T_0}(t)$ engendre un retard de T_0 du signal $x(t)$.

1.9.3 Spectre des fonctions sinusoïdales

Le spectre des fonctions sinusoïdales cosinus et sinus peut être exprimé en fonction de la distribution de Dirac dans le domaine des fréquences, tel que :

$$F[A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = \frac{A}{2} [e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)] \quad (1.45)$$

Et :

$$F[A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)] = \frac{A}{2j} [e^{j\varphi} \delta(f - f_0) - e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)] \quad (1.46)$$

1.9.4 Définition rigoureuse de la distribution

Une distribution f peut être définie comme une fonctionnelle qui associe une fonction $\varphi(t)$ dans l'espace des fonction indéfiniment dérivable et à décroissance rapide, désigné par S , à un nombre complexe $\langle f, \varphi(t) \rangle$, telle que :

$$\begin{aligned} f : S &\rightarrow \square \\ \varphi(t) &\mapsto \langle f, \varphi(t) \rangle = \int f(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (1.47)$$

Nous disons alors que la distribution f est une *distribution régulière* et tempérée dans l'espace S' .

Si $\varphi(t)$ appartient à l'espace des fonctions indéfiniment dérivable et à support borné, désigné par l'espace D , alors la distribution engendrée est dite *distribution régulière non tempérée* dans l'espace D' , elle est définie par l'expression ci-dessous :

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \square \\ \varphi(t) &\mapsto \langle f, \varphi(t) \rangle = \int f(t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (1.48)$$

Une distribution dans l'espace S' ou D' est dite singulière si elle n'est pas régulière. C'est l'exemple de la distribution de Dirac, nous pouvons ainsi la définir au sens de distributions par :

$$\langle \delta, \varphi(t) \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D \text{ ou } S \quad (1.49)$$

1.9.5 Operations sur les distributions

1.9.5.1 Addition, multiplication par scalaire

f et g étant des distributions. L'addition et la multiplication par un scalaire a sont respectivement définies par [2]:

$$\langle f + g, \varphi(t) \rangle = \langle f, \varphi(t) \rangle + \langle g, \varphi(t) \rangle \quad (1.50)$$

$$\langle af, \varphi(t) \rangle = a \langle f, \varphi(t) \rangle \quad (1.51)$$

1.9.5.2 Translation

$$\langle f_T, \varphi(t) \rangle = \langle f(t-T), \varphi(t) \rangle = \langle f, \varphi(t+T) \rangle \quad (1.52)$$

Exemple :

$$\langle \delta_T, \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t-T), \varphi(t) \rangle = \langle \delta, \varphi(t+T) \rangle = \varphi(0+T) = \varphi(T) \quad (1.53)$$

1.9.5.3 Homothétie ou changement d'échelle

$$\langle f(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle f, \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle \quad (1.54)$$

Exemple :

$$\langle \delta(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \langle \delta, \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0) = \left\langle \frac{1}{|a|} \delta(t), \varphi(t) \right\rangle \quad (1.55)$$

D'où : $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

1.9.5.4 Dérivée d'une distribution

f étant une distribution, nous appelons dérivée de la distribution f , notée par $\frac{df}{dt}$, la distribution définie par :

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi(t) \right\rangle = - \left\langle f, \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\rangle \quad (1.56)$$

De la même façon, nous définissons la dérivée d'ordre n par :

$$\left\langle \frac{d^{(n)} f}{dt^{(n)}}, \varphi(t) \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^{(n)} \varphi(t)}{dt^{(n)}} \right\rangle \quad (1.57)$$

1.9.5.5 Dérivée d'une fonction discontinue

Une fonction f qui présente des discontinuités et qui n'est pas dérivable aux points de discontinuités peut être dérivée au sens de distributions telle que chaque fonction f peut être associée à une distribution f égale à la fonction aux points continus en additionnant aux points de discontinuités $t = t_d$, les écarts σ_{t_d} entre les valeurs à droite et à gauche $[\sigma_{t_d} = f(t_d^+) - f(t_d^-)]$ et en les multipliant par une distribution échelon unitaire $\Upsilon(t)$ [2]. Nous avons donc :

$$[f(t)]_{distribution} = [f(t)]_{fonction\ aux\ points\ continus} + [f(t_d^+) - f(t_d^-)]_{points\ discontinus\ t_d} \Upsilon(t) \quad (1.58)$$

Il en découle de (1.58) que la dérivée de f au sens de distributions peut être définie par :

$$[f'(t)]_{distribution} = [f'(t)]_{fonction\ aux\ points\ continus} + [f(t_d^+) - f(t_d^-)]_{points\ discontinus\ t_d} \delta(t) \quad (1.59)$$

Chapitre 2: Analyse et synthèse des filtres analogiques

2.1 Notions de base et définitions

2.1.1 Système

D'une manière générale, un système est un ensemble ou une collection d'objets reliés ou branchés les uns aux autres de façon à former une entité ou un tout. Il permet de convertir un signal d'entrée $u(t)$, appelé *signal d'excitation* en un signal de sortie $v(t)$ appelé *réponse* du système.

Par exemple, un canal de transmission peut être considéré comme un système, où le signal émis est l'excitation, et sa réponse est le signal reçu.

D'une façon abstraite, nous considérons tout opérateur mathématique θ , provoquant des transformations du signal d'excitation en signal de sortie comme système. Nous pouvons le schématiser par la figure 2.1. Nous écrivons ainsi la relation d'entrée-sortie:

$$v(t) = \theta[u(t)] \quad (2.1)$$

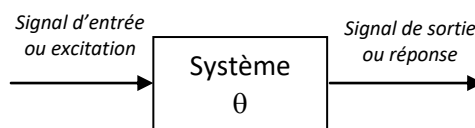


Figure 2.1. Schématisation d'un système d'entrée/sortie

2.1.2 Système continu

Mathématiquement, un système θ est dit *continu*, si et seulement si, nous avons des suites de signaux $u_n(t)$ et $v_n(t)$, telles que :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) = u(t) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(t) = v(t) \end{cases} \text{ et } v_n(t) = \theta[u_n(t)] \text{ alors : } v(t) = \theta[u(t)] \quad (2.2)$$

Autrement dit, nous avons :

$$\theta \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(t) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta[u_n(t)] \quad (2.3)$$

Donc pour un système continu, l'opérateur θ est *commutatif* avec la limite à l'infini.

En sciences de l'ingénieur, un système continu est appelé aussi *système analogique*, car il est souvent constitué par des éléments intrinsèques analogiques (par exemples des résistances, capacités, inductances,..., etc.). Il admet des signaux d'entrées de nature analogique et délivre souvent en sortie des signaux analogiques.

2.1.3 Système linéaire

Un system θ est dit *linéaire*, ou relève du *principe de superposition* si et seulement si :

1. A la somme de deux entrées quelconques correspond la somme des deux sorties correspondantes, c.à.d:

$$\text{si } \begin{cases} v_1(t) = \theta[u_1(t)] \\ v_2(t) = \theta[u_2(t)] \end{cases} \text{ alors : } v_1(t) + v_2(t) = \theta[u_1(t) + u_2(t)] \quad (2.4)$$

2. A un multiple (amplification) d'une entrée quelconque correspond le même multiple de la sortie correspondante, c.à.d:

$$\text{Si } v(t) = \theta[u(t)] \text{ alors : } Kv(t) = \theta[Ku(t)] \quad (2.5)$$

où K est un scalaire, appelé *gain d'amplification*.

Nous pouvons réunir les deux conditions (2.4) et (2.5) en une seule, et définir la linéarité d'un système d'entrée-sortie par :

$$\text{Si nous avons : } \begin{cases} v_1(t) = \theta[u_1(t)] \\ v_2(t) = \theta[u_2(t)] \end{cases} \text{ alors : } \alpha v_1(t) + \beta v_2(t) = \theta[\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)] \quad (2.6)$$

où : α, β sont des scalaires quelconques.

En pratique, nous intéressons aux systèmes linéaires car en régime permanent, la réponse forcée est de la même forme que l'excitation. Ainsi, si en entrée nous avons une excitation de type sinusoïdale, alors pour un système linéaire, la sortie est forcément une sinusoïde avec un certain gain d'amplification (multiplication par un scalaire) et un déphasage (retard). C'est le principe de l'analyse fréquentielle que nous étudierons dans les séquences qui suivent.

2.1.4 Système stationnaire

Un système θ est dit *invariant dans le temps* ou *stationnaire*, si et seulement si :

$$v(t) = \theta[u(t)] \text{ alors } v(t-t_0) = \theta[u(t-t_0)] \quad (2.7)$$

où t_0 est un retard quelconque.

Si nous considérons l'opérateur τ de translation par t_0 , nous avons donc: $u(t-t_0) = \tau[u(t)]$ et $v(t-t_0) = \tau[v(t)]$.

Le système θ considéré est stationnaire, si et seulement si, nous avons:

$$\tau\{\theta[v(t)]\} = \theta\{\tau[u(t)]\} \quad (2.8)$$

Nous disons alors que le système est stationnaire si et seulement si les deux operateurs θ et τ sont *commutatifs*.

Exemples :

Soit un système d'entrée-sortie amplificateur (Figure 2.2), tel que : $y(t) = \theta[x(t)] = Kx(t)$

Ce système d'amplificateur est linéaire et invariant dans le temps.

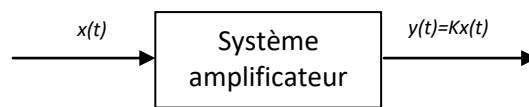


Figure 2.2. Système d'amplificateur par un gain constant K

Le système d'entrée-sortie défini par : $y(t) = \theta[x(t)] = x^2(t)$ n'est pas linéaire.

Le système d'entrée-sortie défini par : $y(t) = \theta[x(t)] = tx(t)$ n'est pas stationnaire.

2.1.5 Filtre analogique

Un filtre analogique est un système continu, linéaire et invariant dans le temps.

2.1.6 Système réel

Un système θ est dit réel, si pour tout signal d'entrée $u(t)$ réel, le signal de sortie $v(t)$ est réel. Nous avons donc :

$$\text{Si } u(t) \in \mathbb{R} \text{ alors } v(t) = \theta[u(t)] \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

2.1.7 Réponse impulsionnelle

Si l'excitation du filtre analogique est une distribution de Dirac $\delta(t)$, la réponse du système est appelée *réponse impulsionnelle*. Elle est désignée par $h(t)$. Nous avons, donc :

$$h(t) = \theta[\delta(t)] \quad (2.10)$$

2.2 Relation d'entrée-sortie pour le cas d'un filtre analogique

Soit un filtre analogique, défini par la relation d'entrée-sortie (2.1): $v(t) = \theta[u(t)]$.

Si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, nous avons l'équation (2.10): $h(t) = \theta[\delta(t)]$

Puisque $\delta(t)$ est un élément neutre pour l'opération de convolution, nous avons donc :

$$h(t) = h(t) * \delta(t) = \int_{\square} h(\tau) \delta(t - \tau) d\tau .$$

De l'autre part, la relation d'entrée-sortie (2.1) peut être exprimée par :

$$v(t) = \theta[u(t)] = \theta[u(t) * \delta(t)] = \theta \left[\int u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right]$$

$$\text{Puisque } \theta \text{ est linéaire, nous avons : } v(t) = \int_{\square} u(\tau) \theta[\delta(t - \tau)] d\tau$$

De plus, θ est stationnaire, donc avec un retard de τ , nous avons selon (2.10): $h(t - \tau) = \theta[\delta(t - \tau)]$, et la réponse du filtre analogique s'écrit :

$$v(t) = \int_{\square} u(\tau) h(t - \tau) d\tau = u(t) * h(t) \quad (2.11)$$

Où : * : est l'opération de convolution.

Il est clair que l'opérateur mathématique θ est un convolveur pour un filtre analogique. C.à.d. :

$$\exists h : v(t) = h(t) * u(t) = \int_{\square} h(\tau) u(t - \tau) d\tau .$$

Un filtre analogique est donc complètement défini par $h(t)$, car dès que le signal d'excitation $u(t)$ est connu, la réponse $v(t)$ du filtre l'est aussi [2].

Il découle de l'expression (2.11) et la définition (2.9) que si la réponse impulsionnelle $h(t)$ est réelle alors le système θ est réel.

2.3 Représentation d'un filtre analogique par équations différentielles

Une classe importante des filtres analogiques est celle où les signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $v(t)$ sont liés par des équations différentielles linéaires et à coefficients constants. Les équations de ce type permettent la description d'une grande variété de filtres analogiques.

Sans perte de généralités, une équation différentielle, linéaire et à coefficients constants d'ordre N est de la forme [4]:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^{(k)}v(t)}{dt^k} = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^{(m)}u(t)}{dt^m} \quad (2.12)$$

Avec généralement, $M \leq N$.

L'ordre N est celui de la dérivée la plus élevée du signal de sortie $v(t)$. La solution de cette équation différentielle (2.12) est une superposition entre une solution sans second membre dite *réponse au régime*

libre, désignée par $v_L(t)$, et une solution avec second membre, dite *réponse au régime forcé*, désigné par $v_F(t)$.

La réponse au régime libre $v_L(t)$ est la solution de l'équation :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^{(k)}v(t)}{dt^k} = 0 \quad (2.13)$$

La résolution de l'équation sans second membre (2.12) exige dans le cas général des conditions initiales à

$t = t_0$, et qui correspondent aux valeurs : $v(t_0)$, $\left[\frac{dv(t)}{dt} \right]_{t=t_0}$, $\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2} \right]_{t=t_0}$, ..., $\left[\frac{d^k v(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}$, ...,

$\left[\frac{d^{(N-1)}v(t)}{dt^{(N-1)}} \right]_{t=t_0}$. Généralement, elles sont nulles au repos. Nous avons donc : $v(0) = 0$, $\left[\frac{dv(t)}{dt} \right]_{t=0} = 0$,

$\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = 0$, ..., $\left[\frac{d^k v(t)}{dt^k} \right]_{t=0} = 0$, ..., $\left[\frac{d^{(N-1)}v(t)}{dt^{(N-1)}} \right]_{t=0} = 0$.

La solution générale de l'équation (2.13) est obtenue en considérant une solution de la forme :

$$v_L(t) = e^{Kt} \quad (2.14)$$

Où : K est une constante complexe.

Nous avons après substitutions des différentes dérivées :

$$a_0 + a_1 K + \dots + a_N K^N = 0 \quad (2.15)$$

Ce polynôme en K est appelé *équation caractéristique*. Le nombre de solutions possibles est égal au degré N de l'équation caractéristique. La solution de l'équation caractéristique K_i ne dépend que de la nature de ses racines (réelle, complexes, double, ..., etc.). si nous avons par exemples : une racine K_m multiples d'ordre q et $(N-q)$ racines distinctes $K_1, K_2, \dots, K_{(N-q)}$. Alors, la solution libre $v_L(t)$ peut être écrite sous la forme :

$$v_L(t) = \left[\frac{r_q t^{q-1}}{(q-1)!} + \frac{r_{q-1} t^{q-2}}{(q-2)!} + \dots + r_2 t + r_1 \right] e^{K_m t} + C_1 e^{K_1 t} + \dots + C_{(N-q)} e^{K_{(N-q)} t} \quad (2.16)$$

Où les coefficients $r_1, \dots, r_q, C_1, \dots, C_{(N-q)}$ peuvent être calculés par les conditions initiales.

La solution du régime forcé $v_F(t)$ est de la même forme que le second membre $\sum_{m=0}^M b_m \frac{d^{(m)}u(t)}{dt^m}$.

2.4 Régime permanent et régime transitoire

Comme nous l'avons expliqué auparavant, la réponse d'un système peut être composée d'une réponse libre $v_L(t)$, qui dépend des éléments intrinsèques du système et les conditions initiales de fonctionnement (généralement au repos), et la réponse forcée $v_F(t)$ qui dépend de l'excitation $u(t)$ et ses dérivées. D'après l'équation (2.16), la réponse libre $v_L(t)$ est une réponse courte; car $\lim_{t \rightarrow \infty} v_L(t) = 0$. Nous parlons alors du *régime transitoire* ; contrairement à la réponse forcée $v_F(t)$ qui présente un régime permanent.

2.5 Représentation d'un filtre analogique par fonction de transfert et réponse fréquentielle

2.5.1 Définitions : fonction de transfert et réponse fréquentielle

Nous considérons un filtre analogique défini par la relation d'entrée-sortie (2.10): $v(t) = h(t) * u(t)$. Nous désignons respectivement par: $U(p)$, $V(p)$ et $H(p)$ les transformées de Laplace des signaux : $u(t)$, $v(t)$ et $h(t)$. Aussi, nous désignons respectivement leur transformée de Fourier par : $U(f)$, $V(f)$ et $H(f)$.

Nous avons en appliquant respectivement les transformées de Laplace et Fourier:

$$H(p) = \frac{V(p)}{U(p)} \quad (2.17)$$

Et

$$H(f) = \frac{V(f)}{U(f)} \quad (2.18)$$

Les équations (2.17) et (2.18) sont appelées respectivement *fonction de transfert* et *réponse fréquentielle* du filtre analogique.

La fonction de transfert $H(p)$ caractérise le filtre analogique dans le domaine complexe p . La réponse fréquentielle le caractérise dans le domaine des fréquences f .

Notons que la notation usuelle $U(f)$, $V(f)$ et $H(f)$ n'est qu'une écriture simplifiée de $U(2j\pi f)$, $V(2j\pi f)$ et $H(2j\pi f)$; où la variable complexe p intervenant dans la transformée de Laplace est substituée par $2j\pi f$. Ceci, reste un cas particulier lorsqu'il s'agit des signaux représentés par des fonctions causales.

2.5.2 Amplitude et phase d'une réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle $H(f)$ est une fonction complexe, qui peut être exprimée en fonction de son amplitude $A(f)$ et sa phase $\varphi(f)$ telle que :

$$H(f) = A(f)e^{j\varphi(f)} \quad (2.19)$$

$$A(f) = |H(f)| \quad (2.20)$$

$$\varphi(f) = \text{Arg}[H(f)] \quad (2.21)$$

Si $H(f)$ est exprimée en parties réelle $\text{Re}(f)$ et imaginaire $\text{Im}(f)$ telle que :

$$H(f) = \text{Re}(f) + j\text{Im}(f) \quad (2.22)$$

Alors, nous avons :

$$|H(f)| = \sqrt{\text{Re}^2(f) + \text{Im}^2(f)} \quad (2.23)$$

Et

$$\varphi(f) = \text{Arctg} \left[\frac{\text{Im}(f)}{\text{Re}(f)} \right] \quad (2.24)$$

2.5.3 Propriétés d'une réponse fréquentielle pour un système réel

Notons pour le cas d'une réponse impulsionnelle $h(t)$ réelle, nous avons une amplitude $A(f) = |H(f)|$ paire et une phase $\varphi(f)$ impaire:

$$\begin{cases} |H(f)| = |H(-f)| \\ \varphi(f) = -\varphi(-f) \end{cases} \quad (2.25)$$

2.5.4 Représentation graphique d'une réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle $H(f)$ peut être représentée par trois manières différentes, à savoir :

2.5.4.1 Le diagramme de Bode

Il consiste en deux tracés indépendants, l'un pour le module (l'amplitude), l'autre pour la phase. Le module est exprimé en dB ($A(f)(dB) = 20\text{Log}_{10}[|H(f)|]$), l'axe des abscisses est souvent en échelle logarithmique.

2.5.4.2 Le diagramme de Nyquist

Il consiste en un seul tracé dans le plan complexe de l'affixe $H(2j\pi f)$ pour f variant de 0 à l'infini. Ce diagramme permet d'obtenir indifféremment à l'aide d'une courbe unique le module et l'argument de $H(2j\pi f)$, ou encore ses parties réelle et imaginaire.

2.5.4.3 Le diagramme de Black

Il consiste en un seul tracé dans le plan défini par une échelle en abscisse par l'argument et en ordonné par le module en dB.

2.5.5 Temps de propagation de groupe

Dans certains cas, il est préférable de parler du temps de propagation de groupe τ_g que de parler de la phase $\varphi(f)$, il est exprimé par la formule :

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df} \quad (2.26)$$

2.5.6 Expression de la fonction de transfert et la réponse fréquentielle d'un filtre analogique

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle et à coefficients constants (2.11), nous avons :

$$H(p) = \frac{V(p)}{U(p)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m p^m}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} \quad (2.27)$$

Si les coefficients a_k et b_m sont réels, avec : $(0 \leq k \leq N)$ et $(0 \leq m \leq M)$ alors la fonction de transfert $H(p)$ est une fraction rationnelle à coefficients réels.

Nous appelons zéros les racines du polynôme $N(p) = \sum_{m=0}^M b_m p^m$, et pôles celles du polynôme

$$D(p) = \sum_{k=0}^N a_k p^k.$$

Si $p = 2j\pi f$, nous avons la l'expression de la réponse fréquentielle :

$$H(2j\pi f) = \frac{V(2j\pi f)}{U(2j\pi f)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m (2j\pi f)^m}{\sum_{k=0}^N a_k (2j\pi f)^k} \quad (2.28)$$

2.6 Filtre analogique causal ou physiquement réalisable

Nous disons qu'un filtre analogique est *physiquement réalisable* ou *causal* si et seulement si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est causal. Nous avons donc : $h(t) = 0$ pour $t < 0$.

2.7 Filtre analogique stable

Un filtre analogique est dit *stable* si à tout entrée bornée correspond une sortie bornée.

2.7.1 Théorème

Nous disons qu'un filtre analogique défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est stable si et seulement si : $h(t)$ est absolument sommable. C.-à-d. : $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ existe.

2.7.2 Autre condition de stabilité

Si la fonction de transfert d'un filtre analogique est exprimée en fraction rationnelle à coefficients réels

$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m p^m}{\sum_{k=0}^N a_k p^k}$, alors une condition de stabilité est que ses pôles soient à partie réelle strictement négative.

2.8 Distorsions linéaires

Un filtre analogique est *sans distorsion linéaire* lorsque la réponse $v(t)$ a la même forme que le signal d'entrée $u(t)$; autrement dit, nous avons :

$$v(t) = \theta[u(t)] = Ku(t - t_0) \quad (2.29)$$

Où : K est un scalaire, c'est le gain du filtre ; et t_0 est un déphasage (translation temporelle).

Les propriétés d'un filtre analogique sans distorsion linéaire sont facilement déterminées en examinant le spectre de sortie :

$$V(f) = KU(f)e^{-2j\pi ft_0} \quad (2.30)$$

Nous avons donc, la réponse fréquentielle :

$$H(f) = \frac{V(f)}{U(f)} = Ke^{-2j\pi ft_0} \quad (2.31)$$

D'une façon générale, si la bande des fréquences est limitée en bande dite *passante BP*, et si l'amplitude est constante et égale à K ($A(f) = |H(f)| = K$), nous parlons alors d'un filtre *sans distorsion d'amplitude*. Si la phase est une fonction décroissante et linéaire, telle que : $\varphi(f) = -2\pi ft_0$ alors le filtre est *sans distorsion de phase* [4].

NB : Ces distorsions sont dites linéaires pour les distinguer des distorsions dues à la non linéarité des systèmes.

2.9 Filtre analogique idéal

Un filtre analogique idéal est système continu, linéaire et stationnaire, qui transmet sans distorsion toutes les fréquences d'un signal d'entrée comprises dans un intervalle appelé « bande passante », et rejette complètement les fréquences situées en dehors de cet intervalle de fréquences,

appelé « bande coupée » ou « bande d'atténuation ». Donc c'est un filtre analogique ayant une réponse fréquentielle d'amplitude constante, de préférence avec un gain égal à 1 dans la bande passante, et nulle dans la bande coupée. Le déphase souhaité par ce filtre idéal est nul. Cependant, un déphasage linéaire engendrant un retard constant peut être toléré. Ces filtres idéaux peuvent être classés en quatre types à savoir : *passé bas* (figure 2.3), *passé haut* (figure 2.4), *passé bande* (figure 2.5) et *coupe bande* (figure 2.6). Nous pouvons aussi ajouter le cas de filtre *passé-tout* (figure 2.7), où son effet se réduit à un simple décalage du signal [4].

2.9.1 Caractéristiques fréquentielles d'amplitude et de phase des filtres analogiques idéaux

Si nous désignons f_c la limite supérieure de la bande passante BP d'un filtre idéal, appelée aussi fréquence de coupure. Nous avons donc pour un filtre analogique réel une bande passante $BP = [-f_c, f_c]$ en considérant les fréquences négatives engendrées par les propriétés de parité (§-2.5.3).

2.9.1.1 Filtre passe-bas idéal

Un filtre passe bas idéal peut être défini par sa réponse fréquentielle $H(f)$ telle que :

$$H(f) = \begin{cases} e^{-2j\pi f t_0} & \text{si } f \in BP = [-f_c, f_c] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.31)$$

Où, t_0 est un décalage temporel toléré.

L'expression (2.31) peut être exprimée en amplitude $|H(f)|$ et phase $\varphi(f)$ telle que :

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in BP = [-f_c, f_c] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.32)$$

Et

$$\varphi(f) = \begin{cases} -2\pi f t_0 & \text{si } f \in BP = [-f_c, f_c] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.33)$$

2.9.1.2 Filtre passe-haut idéal

Par le même raisonnement, nous pouvons définir un filtre analogique idéal passe-haut par sa réponse fréquentielle $H(f)$ telle que :

$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \in BP = [-f_c, f_c] \\ e^{-2j\pi f t_0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.34)$$

Ou bien en forme d'amplitude $|H(f)|$ et de phase $\varphi(f)$ telle que :

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{si } f \in BP = [-f_c, f_c] \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.35)$$

Et

$$\varphi(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \in BP = [-f_c, f_c] \\ -2\pi f t_0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.36)$$

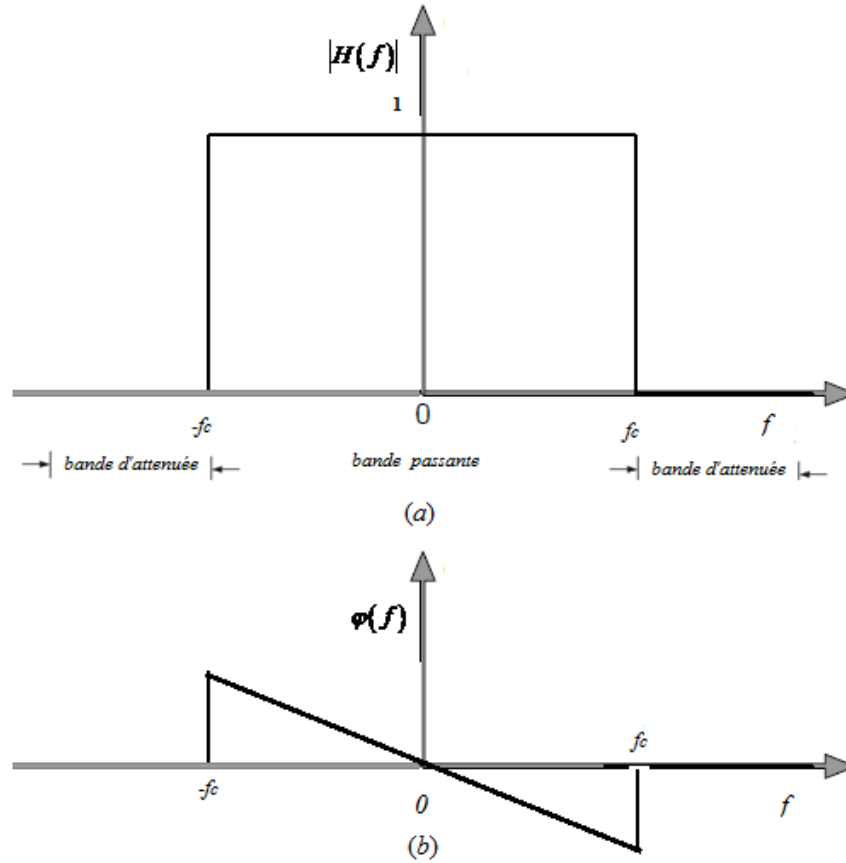


Figure 2.3. Caractéristiques fréquentielles du filtre passe-bas idéal.
(a) : réponse en amplitude (b) : réponse en phase

2.9.1.3 Filtre passe-bande idéal

Pour un filtre passe-bande idéal, nous définissons deux limites de la bande passante BP : une limite inférieure f_{c_1} et une limite supérieure f_{c_2} . Dans ce cas, $BP = [-f_{c_2}, -f_{c_1}] \cup [f_{c_1}, f_{c_2}]$. Cette nouvelle bande peut être ramenée à la bande passante d'un filtre passe-bas idéal $[-f_c, f_c]$, telle que :

$$f_c = f_{c_2} - f_{c_1} \quad (2.37)$$

Le filtre passe bande idéal est défini alors par sa réponse fréquentielle $H(f)$ telle que :

$$H(f) = \begin{cases} e^{-2j\pi f t_0} & \text{si } f \in BP = [-f_{c_2}, -f_{c_1}] \cup [f_{c_1}, f_{c_2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.38)$$

Ou bien en forme d'amplitude $|H(f)|$ et de phase $\varphi(f)$ telle que :

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in BP = [-f_{c_2}, -f_{c_1}] \cup [f_{c_1}, f_{c_2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.39)$$

Et

$$\varphi(f) = \begin{cases} e^{-2j\pi f t_0} & \text{si } f \in BP = [-f_{c_2}, -f_{c_1}] \cup [f_{c_1}, f_{c_2}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.40)$$

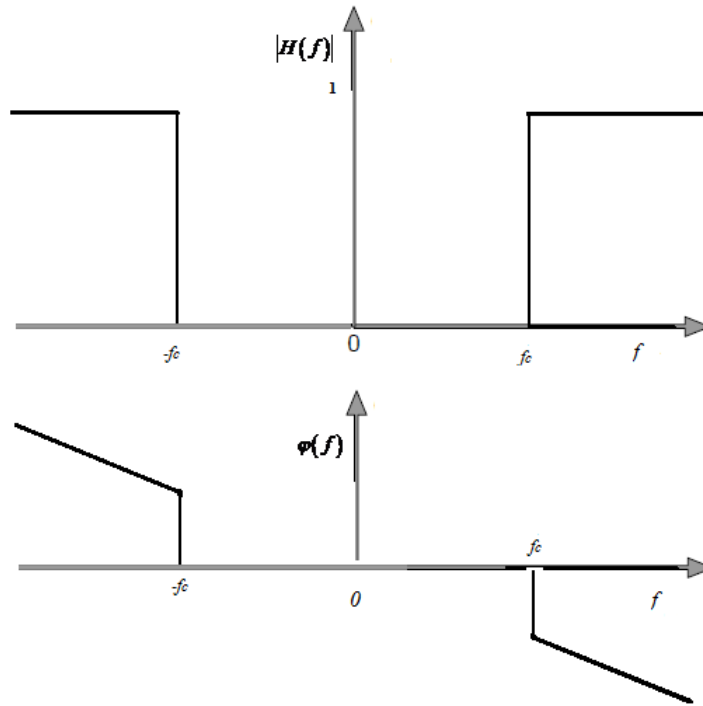


Figure 2.4. Caractéristiques fréquentielles du filtre passe-haut idéal

2.9.1.4 Filtre coupe-bande idéal

Par le même raisonnement, un filtre analogique idéal coupe-bande peut être défini par sa réponse fréquentielle $H(f)$ telle que :

$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \in BP = [-f_{c_2}, -f_{c_1}] \cup [f_{c_1}, f_{c_2}] \\ e^{-2j\pi f t_0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.41)$$

Ou bien en forme d'amplitude $|H(f)|$ et de phase $\varphi(f)$ telle que :

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & \text{si } f \in BP = [-f_{c_2}, -f_{c_1}] \cup [f_{c_1}, f_{c_2}] \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.42)$$

Et

$$\varphi(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \in BP = [-f_{c2}, -f_{c1}] \cup [f_{c1}, f_{c2}] \\ e^{-2j\pi f t_0} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.43)$$

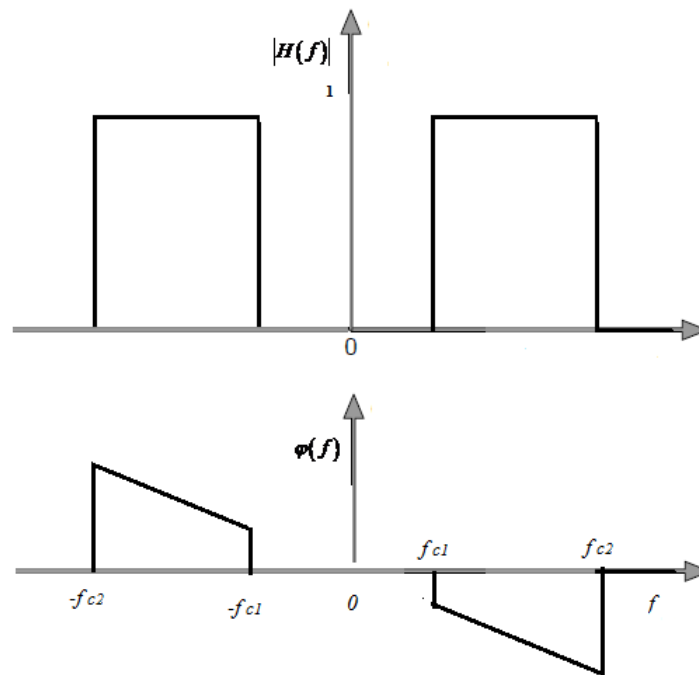


Figure 2.5. Caractéristiques fréquentielles du filtre passe-bande idéal

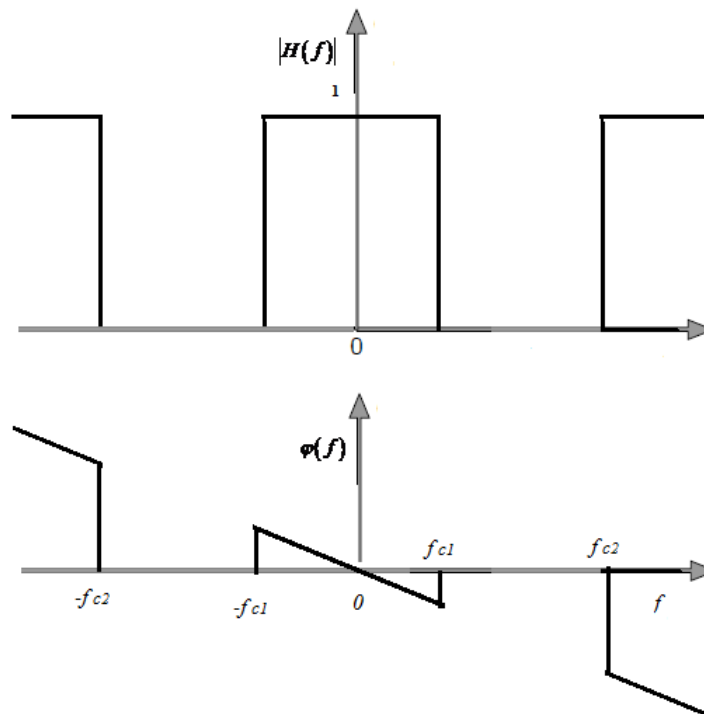


Figure 2.6. Caractéristiques fréquentielles du filtre coupe-bande idéal

2.9.1.5 Filtre passe-tout idéal

Un filtre passe tout idéal se réduit à un simple décalage temporel de t_0 , et peut être défini par sa réponse fréquentielle $H(f)$ telle que [2]:

$$H(f) = e^{-2j\pi ft_0} \tag{2.44}$$

L'expression (2.44) peut être exprimée en amplitude $|H(f)|$ et phase $\varphi(f)$ telle que :

$$|H(f)| = 1 \tag{2.45}$$

Et

$$\varphi(f) = -2\pi ft_0 \tag{2.46}$$

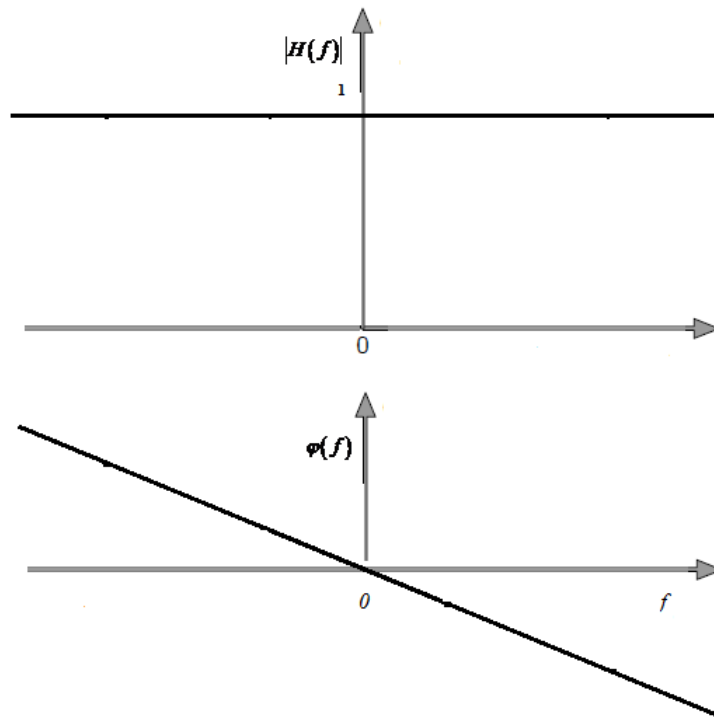


Figure 2.7. Caractéristiques fréquentielles du filtre passe-tout idéal

2.9.2 Caractéristiques temporelles des filtres analogiques

Sans perte de généralité, la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal peut être calculée par la transformée de Fourier inverse. Nous avons ainsi :

$$h(t) = 2f_c \frac{\sin[2\pi f_c (t-t_0)]}{2\pi f_c (t-t_0)} \tag{2.47}$$

Il est clair que cette réponse impulsionnelle n'est pas causale, car elle n'est pas nulle pour $t < 0$. Donc, ce filtre n'est pas réalisable, car l'effet ne peut précéder la cause. Ainsi, les filtres idéaux ne sont pas

physiquement réalisables, et ne peuvent servir qu'à des modèles pour approximer les caractéristiques souhaitées.

2.10 Gabarit d'un filtre analogique réalisable

Bien que les filtres idéaux soient des systèmes irréalisables, les filtres réalisables doivent être conçus de manière à approcher les caractéristiques des filtres idéaux. Cependant, quel que soit l'art du concepteur, les filtres réalisables possèdent une réponse fréquentielle d'amplitude avec distorsion, où une tolérance maximale de δ_p est permise en bande passante *BP* ; et une tolérance maximale de δ_a est imposée en bande coupée (ou atténuée) *BA*. La transition entre les deux bandes : passante et coupée n'est pas raide, ce qui impose aussi une bande de transition ou intermédiaire. Les spécifications d'un filtre réalisable peuvent être illustrées par un schéma imposé par un cahier de charge, appelé gabarit (Figure 2.8).

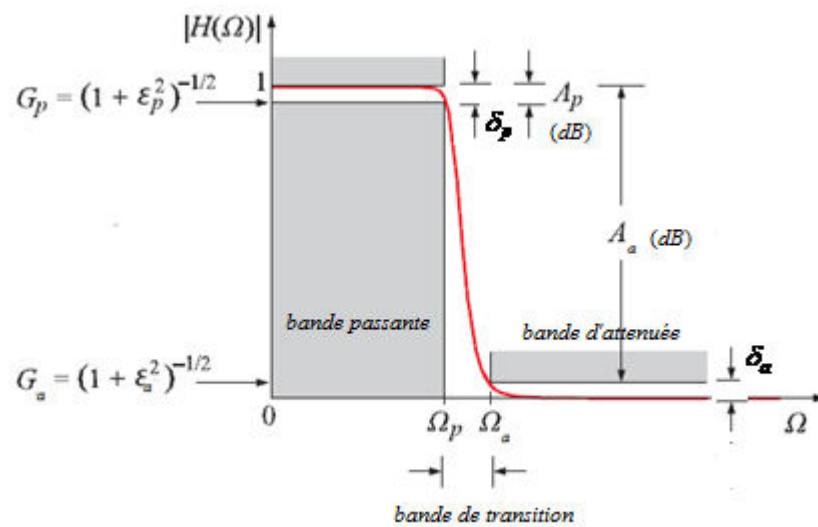


Figure 2.8. Gabarit d'un filtre analogique réalisable

Dans certains cahiers de charge, ce gabarit est exprimé en atténuation, nous distinguons A_p et A_a respectivement les atténuations en bande passante *BP* et en bande d'atténuée *BA*. La relation entre A_p , A_a et δ_p , δ_a peut être exprimée par :

$$A_p = -20 \text{Log}_{10}(1 - \delta_p) \quad (2.48)$$

et

$$A_a = -20 \text{Log}_{10}(\delta_a) \quad (2.49)$$

Nous définissons aussi les gains G_p et G_a respectivement en bandes passante *BP* et atténuée *BA* en fonction des paramètres d'ondulations ε_p et ε_a tels que :

$$G_p = 10^{-A_p/20} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_p^2}} \quad (2.50)$$

$$G_a = 10^{-A_a/20} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_a^2}} \quad (2.51)$$

NB :

Par définition, la fréquence de coupure f_c correspond à une diminution de la puissance du signal d'entrée de 50%, ce qui correspond à une atténuation de 3 dB. Dans certain cahier de charge pour la conception des filtres physiquement réalisables, les performances sont beaucoup plus exigées, et la limite de la bande passante peut être décalée à une limite $f_p \leq f_c$. Dans ce qui suit, la limite de la bande passante est désignée par f_p .

Nous définissons les paramètres de conception k et k_1 respectivement la sélectivité et la discrimination tels que :

$$k = \frac{f_p}{f_a} = \frac{2\pi f_p}{2\pi f_a} = \frac{\Omega_p}{\Omega_a} \quad (2.52)$$

Et

$$k_1 = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_a} \quad (2.53)$$

Notons qu'une bande de transition étroite implique $k \approx 1$, cependant, une atténuation importante correspond à $k_1 \gg 1$.

Nous pouvons aussi mesurer la raideur de coupure R_c d'un filtre analogique telle que [6]:

$$R_c = \frac{f_p + f_a}{2(f_a - f_p)} \quad (2.54)$$

2.11 Transformations de fréquence

La plupart des filtres analogiques sont conçus à la base du filtre passe-bas. Les autres types de filtres passe haut (highpass : HP), passe bande (bandpass : BP) et coupe bande (bandstop : BS) s'appuient sur la transposition des résultats de calcul d'un filtre passe bas par transformation dans le domaine fréquentiel.

Supposons que p' est la variable complexe équivalente lorsque nous transformons un filtre de type quelconque à un filtre passe-bas, telle que [5,8,9]:

$$\hat{p} = f(p) \quad (2.55)$$

Les spécifications des filtres passe haut, passe bande et coupe bande peuvent être ramenées aux spécifications d'un filtre passe-bas équivalent $\{\Omega'_p, \Omega'_a, A_p, A_a\}$ (figure 2.9), nous avons :

1. Pour un filtre passe-haut

$$p' = \frac{1}{p}, \Omega'_p = \frac{1}{\Omega_p} \text{ et } \Omega'_a = \frac{1}{\Omega_a} \quad (2.56)$$

2. Pour un filtre passe-bande, avec les spécifications :

$$BP = [\Omega_{p1} \Omega_{p2}] , \Delta\Omega = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} \text{ et } \Omega_0 = [\Omega_{p1} \Omega_{p2}]^{\frac{1}{2}} \quad (2.57)$$

Nous avons la transformation :

$$p' = p + \frac{\Omega_0^2}{p}, \Omega'_p = \Delta\Omega \text{ et } \Omega'_a = \min(|\Omega_{a1}|, |\Omega_{a2}|) \quad (2.58)$$

Avec :

$$\Omega_{a1} = \Omega_{a1} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{a1}} \text{ et } \Omega_{a2} = \Omega_{a2} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{a2}} \quad (2.59)$$

3. Pour un coupe bande avec les spécifications :

$$\Delta\Omega = \Omega_{a2} - \Omega_{a1} \text{ et } \Omega_0 = [\Omega_{a1} \Omega_{a2}]^{\frac{1}{2}} \quad (2.60)$$

Nous avons la transformation suivante :

$$p' = \frac{1}{p + \frac{\Omega_0^2}{p}}, \Omega'_p = \max(|\Omega_{p1}|, |\Omega_{p2}|) \text{ et } \Omega'_a = \frac{1}{\Delta\Omega} \quad (2.61)$$

Et :

$$\Omega_{p1} = \frac{1}{\Omega_{p1} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p1}}} \text{ et } \Omega_{a2} = \frac{1}{\Omega_{a2} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{a2}}} \quad (2.62)$$

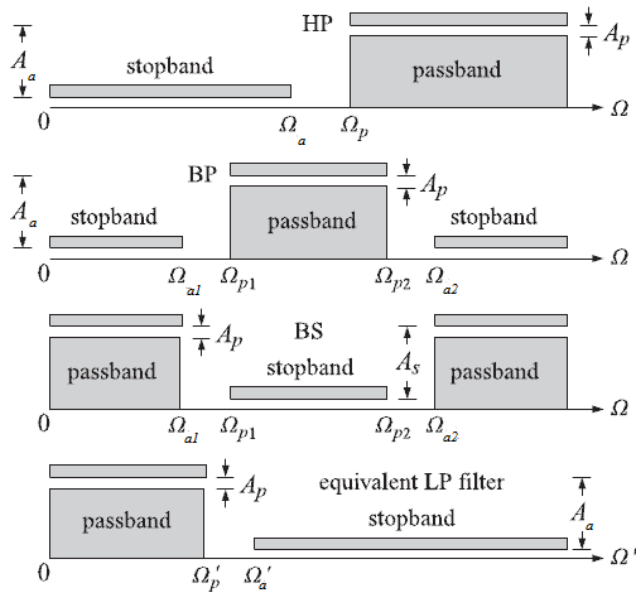


Figure 2.9. Spécifications équivalentes des filtres passe haut, passe bande et coupe bande en filtre passe-bas.

2.12 Filtres analogiques classiques

L'approximation des caractéristiques du filtre idéal par un filtre réel montre qu'en matière de réalisation, il convient de fixer un compromis entre les différentes performances du filtre. Ainsi, selon que nous portons intérêt à une réponse en fréquence plate, raide à la cassure, à déphasage linéaire, ..., etc. nous trouvons des filtres spécifiques mieux adaptés que nous présentons ci-dessous [5].

2.12.1 Les filtres du 1^e et 2^e ordre

Les filtres du 1^e et 2^e ordre sont les plus simples à mettre en œuvre. Aux performances moyennes, ils présentent l'avantage d'être des filtres de références.

2.12.1.1 Filtre du 1^e ordre

Il s'agit d'un filtre de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \tag{2.63}$$

Où : K et τ désignent respectivement le gain statique et la constante de temps.

L'interprétation des coefficients K et τ est simple. Le gain statique K correspond à la valeur finale pour une entrée de type échelon unitaire. La constante de temps τ est le temps nécessaire pour aboutir à 67% de la valeur finale. Nous avons 3τ est le temps nécessaire pour avoir 95% de la valeur finale.

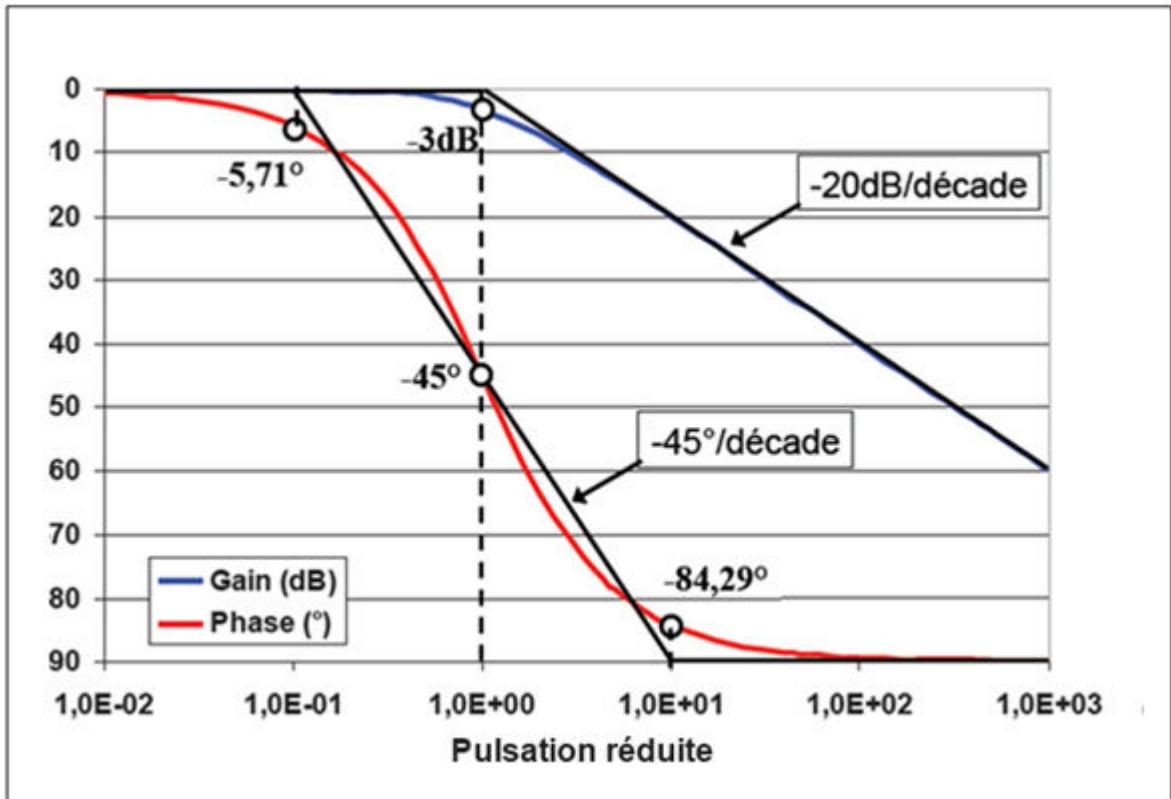


Figure 2.10. Diagramme de Bode d'un filtre passe-bas du 1^e ordre

2.12.1.2 Filtre du 2^e ordre

Il s'agit d'un filtre de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (2.63)$$

Où : K , m et ω_0 désignent respectivement le gain statique, le facteur d'amortissement et la pulsation propre non amortie..

Le gain statique K correspond à la valeur finale de la réponse du filtre à une entrée de type échelon unitaire. ω_0 est la pulsation qui correspond à un comportement oscillatoire non amorti.

Si $0 < m < 1$ le filtre se comporte oscillatoire sous-amorti. La pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$ correspond à la valeur maximale de la réponse fréquentielle. La pulsation propre du filtre est $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$. Si $0.7 < m < 1$, les oscillations sont presque invisibles.

Sinon pour $m > 1$, le filtre a une réponse plate, sans dépassement de la valeur finale de la réponse d'un échelon unitaire.

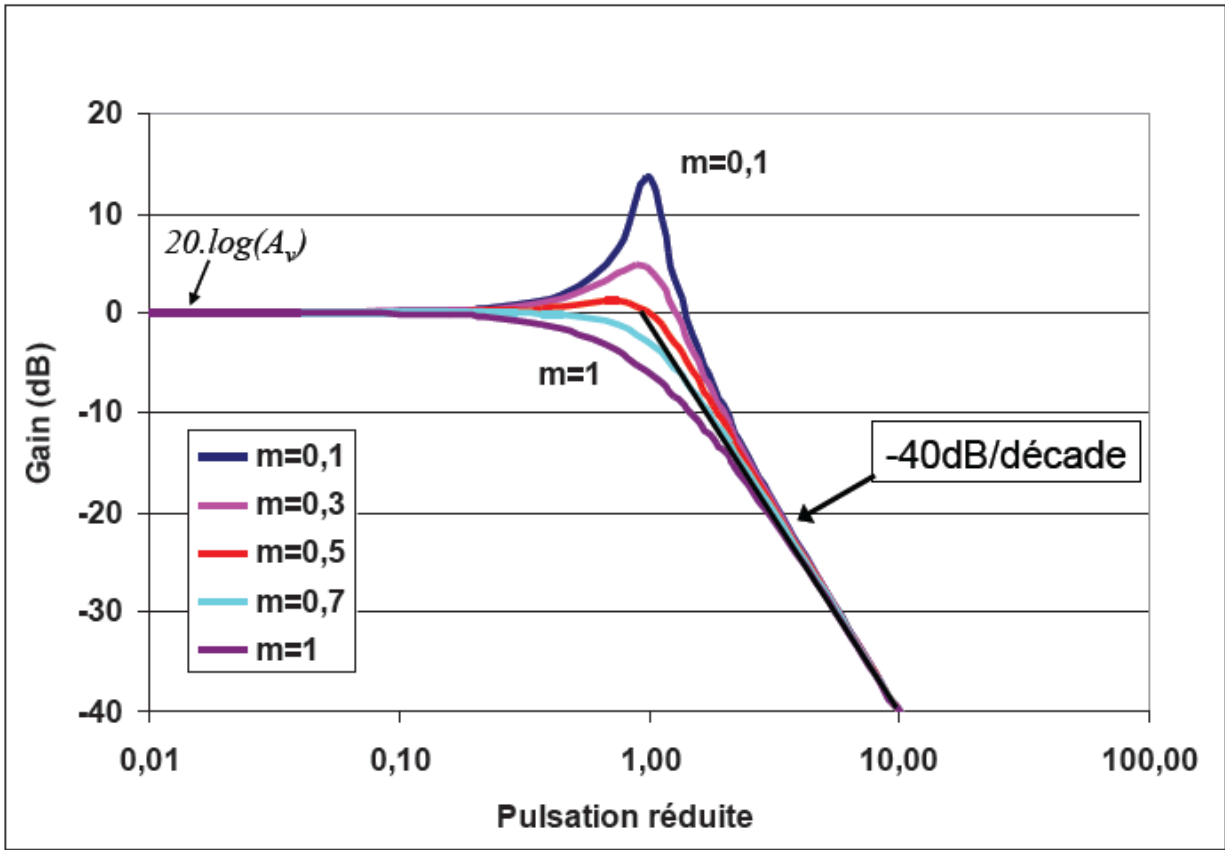


Figure 2.11. Diagramme de gain d'un filtre passe-bas du 2^e ordre

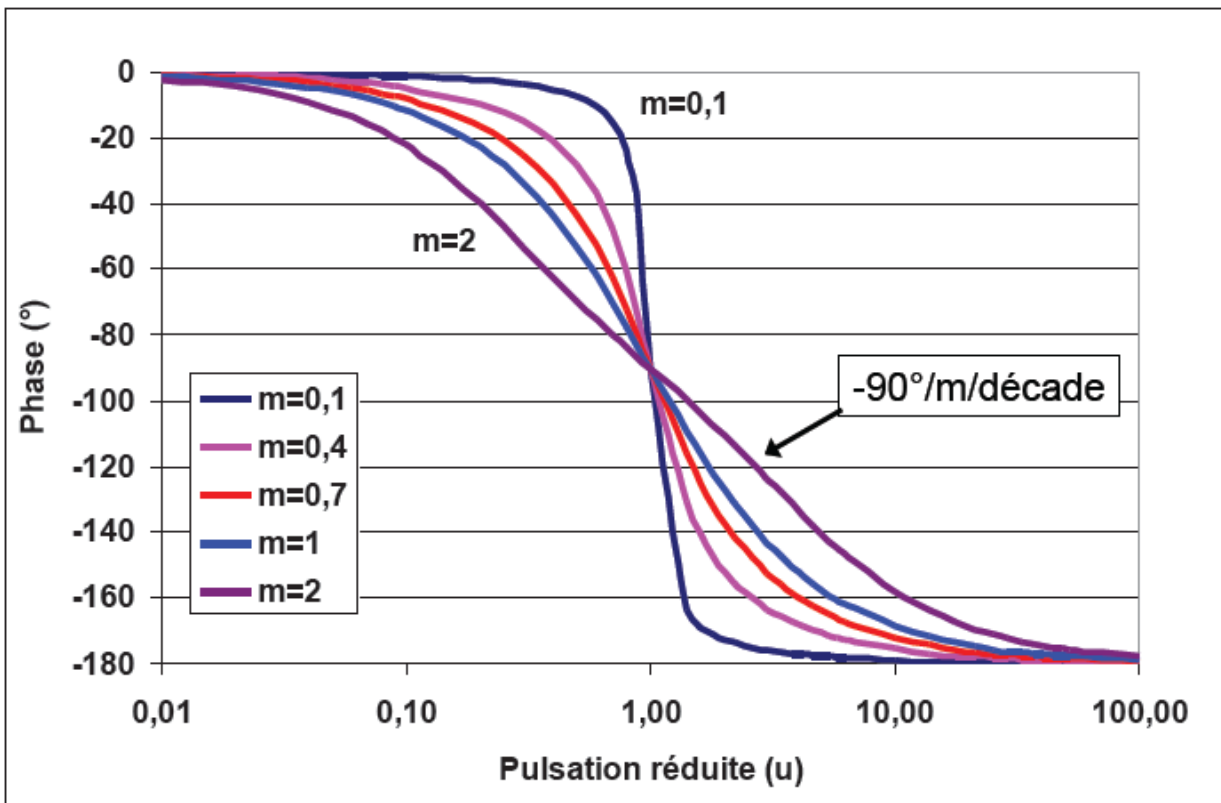


Figure 2.12. Diagramme de phase d'un filtre passe-bas du 2^e ordre

2.13 Filtres passe-bas analogiques usuels

Les filtres analogiques les plus courants sont les filtres polynomiaux, où leur fonction de transfert se ramène à l'inverse d'un polynôme en variable complexe p . Parmi ces filtres, nous distinguons les filtres passe-bas de Butterworth et de Tchebychev (type I et II). Les filtres elliptiques de Caer appartiennent à la famille des filtres non polynomiaux, où ils possèdent des zéros. Ils présentent l'avantage d'avoir la pente la plus raide et l'ordre le plus petit pour les mêmes spécifications en amplitude [8,9]. Pour ces différents filtres, les procédures de conception sont parfaitement connues et intégrés dans la plupart des logiciels de conception, notamment le Matlab. Nous pouvons recourir aux formules de transformations en fréquence pour retrouver les autres types de filtres (passe-haut, passe-bande et coupe-bande).

2.13.1 Formulation mathématiques

Soit $|H(\Omega)|$ la réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre analogique passe-bas, qui peut être de type Butterworth, Tchebychev ou elliptique telle que :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N^2(w)}, \quad w = \frac{\Omega}{\Omega_p} \quad (2.64)$$

Avec :

N est l'ordre du filtre analogique, Ω est la pulsation analogique en radian par second et $F_N(w)$ est une fonction de la pulsation normalisée w donnée par :

$$F_N(w) = \begin{cases} w^N & \text{Butterworth} \\ C_N(w) & \text{Tchebychev type - 1} \\ [k_1 C_N(k^{-1}w^{-1})]^{-1} & \text{Tchebychev type - 2} \\ cd(NuK_1, k_1), w = cd(uK, k) & \text{Elliptique} \end{cases} \quad (2.65)$$

Où : $C_N(x)$ est un polynôme de Tchebychev d'ordre N , tel que :

$$C_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x) \quad (2.66)$$

Et : $cd(x, k)$ est la fonction Jacobéenne elliptique cd avec un module k et un quarts de période K [???].

Nous notons que :

$$k^{-1}w^{-1} = (\Omega_a/\Omega_p)(\Omega_p/\Omega) = \Omega_a/\Omega \text{ et } \varepsilon_a = \varepsilon_p k_1^{-1} \quad (2.67)$$

D'où pour le cas de Tchebychev type-2 :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 k_1^{-2} / C_N^2(k^{-1}w^{-1})} = \frac{1}{1 + \varepsilon_a^2 / C_N^2(\Omega_a/\Omega)} \quad (2.68)$$

La pulsation normalisée $w=1$ correspond à la pulsation de la bande passante $\Omega = \Omega_p$, tandis que $w_a = \frac{\Omega_a}{\Omega_p} = \frac{1}{k}$ correspond à la pulsation de la bande atténuée $\Omega = \Omega_a$. Selon le gabarit imposé en figure 2.8, nous avons les conditions suivantes :

$$\begin{cases} |H(\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N^2(1)} = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2} \Rightarrow F_N(1) = 1 \\ |H(\Omega_a)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N^2(k^{-1})} = \frac{1}{1 + \varepsilon_a^2} \Rightarrow F_N(k^{-1}) = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_p} = \frac{1}{k_1} \end{cases} \quad (2.69)$$

Donc pour les quatre types de filtres analogiques, le degré de la fonction normalisée $F_N(w)$ peut être calculé par l'équation suivante :

$$F_N(k^{-1}) = k_1^{-1} \quad (2.70)$$

Par la suite, le degré N sera arrondi à la valeur entière la plus grande. Nous distinguons trois cas selon le type de filtres analogiques :

1. Pour le filtre de Butterworth, nous avons :

$$k^{-N} = k_1^{-1} \Rightarrow N = \frac{\ln(k_1^{-1})}{\ln(k^{-1})} = \frac{\ln(\varepsilon_a/\varepsilon_p)}{\ln(\Omega_a/\Omega_p)} \quad (2.71)$$

2. Pour le cas des filtres de Tchebychev type-1 et 2 :

$$C_N(k^{-1}) = k_1^{-1} \Rightarrow N = \frac{a \cosh(k_1^{-1})}{a \cosh(k^{-1})} = \frac{a \cosh(\varepsilon_a/\varepsilon_p)}{a \cosh(\Omega_a/\Omega_p)} \quad (2.72)$$

Le filtre de Tchebychev type-1 conduit à des ondulations équidistantes en bande passante, tandis que le filtre de Tchebychev type-2 conduit à des ondulations équidistantes en bande atténuée. Ceci peut être interpréter par (2.65) en remplaçant $C_N(w)$ par $\frac{1}{k_1 C_N(k^{-1}w^{-1})}$. Ainsi, un filtre de Tchebychev type 1 est transformé en type-2 et vis versa.

3. Si nous tolérons à la fois des ondulations en bandes passante et atténuée, nous obtenons un degré le plus petit, et qui correspond au cas de *filtre elliptique*. Dans ce cas, nous avons :

$$F_N(w) = \frac{1}{k_1 F_N(k^{-1}w^{-1})} \quad (2.73)$$

Ceci est équivalent à la formule :

$$\varepsilon_p F_N(\Omega/\Omega_p) = \varepsilon_a / F_N(\Omega_a/\Omega) \quad (2.74)$$

Où la réponse fréquentielle peut être écrite par l'équation suivante :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 F_N^2(\Omega/\Omega_p)} = \frac{1}{1 + \varepsilon_a^2 / F_N^2(\Omega_a/\Omega)} \quad (2.75)$$

Le calcul du degré N au cas d'un filtre elliptique est relativement complexe, et fait appel à la fonction Jacobéenne cd . Si nous considérons la fonction caractéristique d'un filtre analogique de type elliptique $F_N(w)$ telle que :

$$F_N(w) = cd(NuK_1, k_1) \quad (2.76)$$

Et

$$w = cd(uK, k) \quad (2.77)$$

Nous avons d'après (2.77) :

$$k^{-1}w^{-1} = \frac{1}{kcd(uK, k)} = cd(uK + jK', k) = cd\left(\left(u + j\frac{K'}{K}\right)K, k\right) \quad (2.78)$$

De plus, en considérant l'équation (2.76), nous avons :

$$F_N(k^{-1}w^{-1}) = cd\left(N\left(u + j\frac{K'}{K}\right)K_1, k_1\right) = cd\left(NuK_1 + j\frac{NKK_1}{K}, k_1\right) \quad (2.79)$$

D'autre part d'après (2.77), nous avons:

$$\frac{1}{k_1 F_N(w)} = \frac{1}{k_1 cd(NuK_1, k_1)} = cd(NuK_1 + jK_1', k_1) \quad (2.80)$$

D'après l'équation (2.70) qui calcul le degré N en cas de filtre elliptique, nous avons :

$$cd\left(NuK_1 + j\frac{NKK_1}{K}, k_1\right) = cd(NuK_1 + jK_1', k_1)$$

D'où l'équation de degré:

$$N \frac{KK_1}{K} = K_1' \quad (2.81)$$

2.13.2 Caractéristiques fréquentielles

Les figures 2.13-16 illustrent les réponses fréquentielles respectivement des filtres analogiques de Cauer, Tchebychev I, Tchebychev II et Butterworth. Les spécifications en amplitude sont, à savoir : l'atténuation en bande passante $A_p=10 \text{ dB}$, l'atténuation en bande atténuée $A_a=35 \text{ dB}$, $w_p=1$, et $w_a=1.2027$. Un filtre de Butterworth engendre un degré $N=16$, le plus grand avec une réponse plate et monotone en bande passante et atténuée. En revanche, un filtre elliptique conduit au degré le plus petit ($N=4$), donc optimal ; en tolérant une réponse fréquentielle avec des ondulations en bandes passante et atténuée. Les filtres de Tchebychev type I et II conduisent à un degré $N=6$. Le filtre de Tchebychev I engendre une réponse avec des ondulations uniquement en bande passante. Un filtre de Tchebychev II a

une réponse plate en bande passante avec des ondulations en bande atténuée. Le filtre de Butterworth a la phase la plus régulière en bande passante par rapport aux autres types de filtres.

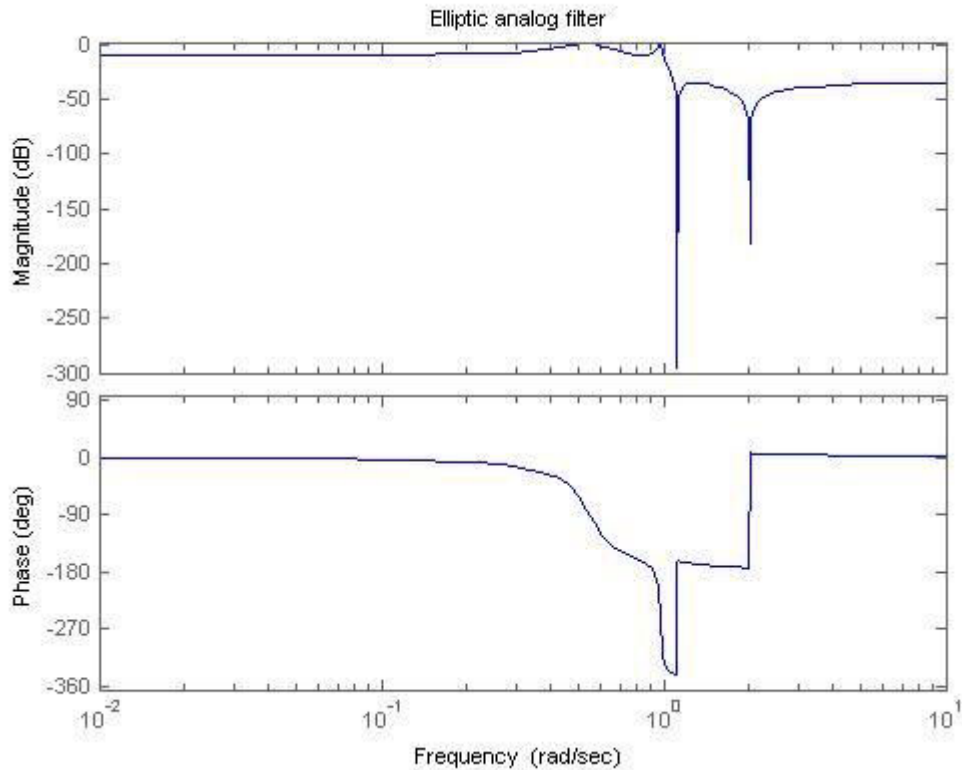


Figure 2.13. Caractéristiques fréquentielles d'un filtre elliptique d'ordre 4, avec les spécifications : $A_p=10$ dB, $A_a=35$ dB, $w_p=1$, et $w_a= 1.2027$.

En récapitulation, nous avons :

2.13.2.1 Filtre de Butterworth

La réponse fréquentielle d'un filtre de Butterworth présente les caractéristiques suivantes :

- décroissance monotone en fonction de w (pulsation normalisée), d'où l'absence d'oscillation.
- valeur maximale atteinte pour $w = 0$ et correspond à 0 dB.
- atténuation asymptotique de $20N$ dB/décade.
- un temps de propagation régulier.
- un ordre du filtre le plus important pour les mêmes spécifications en amplitude.

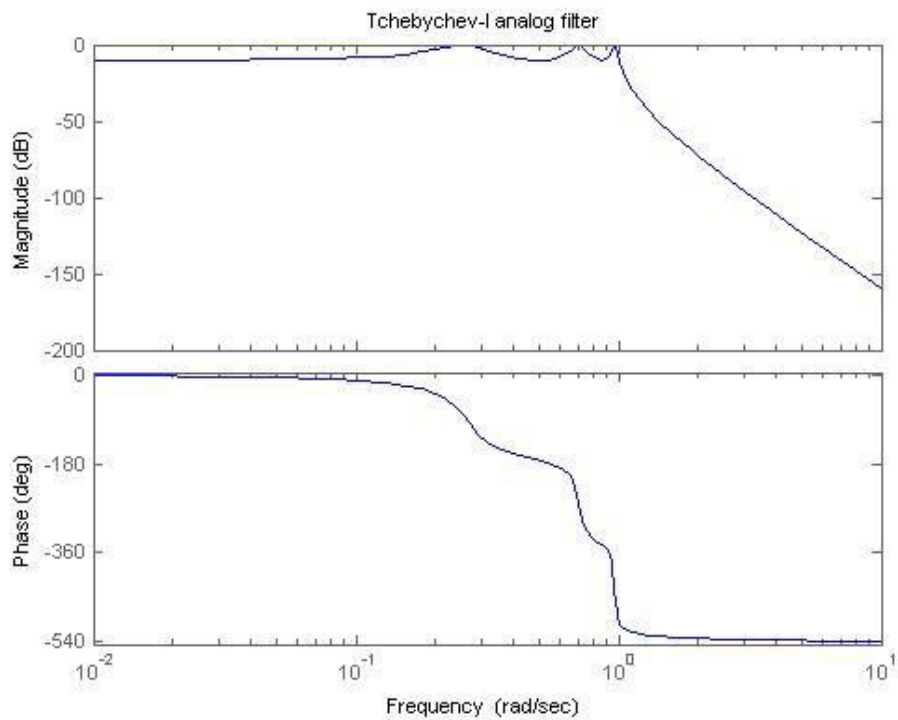


Figure 2.14. Caractéristiques fréquentielles d'un filtre de Tchebychev type I, d'ordre 6, avec les mêmes spécifications : $A_p=10$ dB, $A_a=35$ dB, $w_p=1$, et $w_a= 1.2027$.

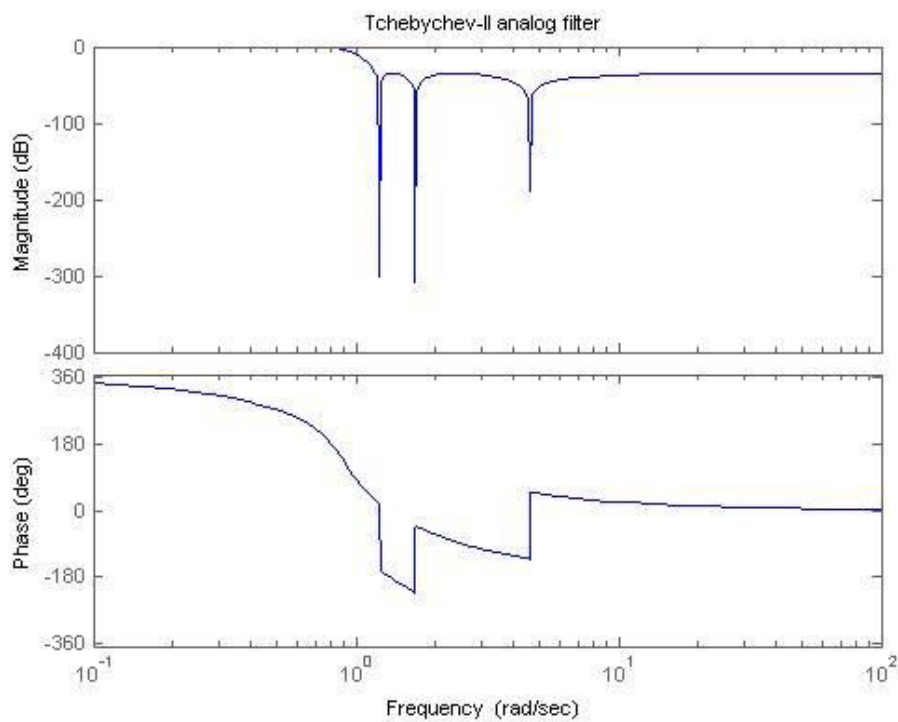


Figure 2.15. Caractéristiques fréquentielles d'un filtre de Tchebychev type II, d'ordre 6, avec les mêmes spécifications : $A_p=10$ dB, $A_a=35$ dB, $w_p=1$, et $w_a= 1.2027$.

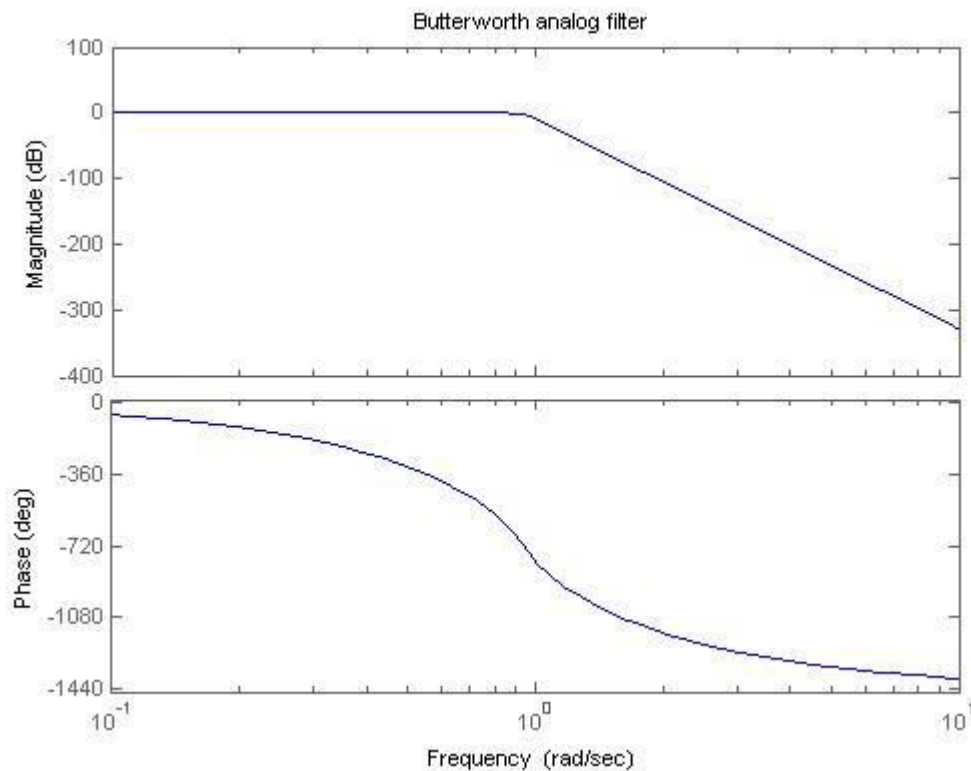


Figure 2.16. Caractéristiques fréquentielles d'un filtre de Butterworth, d'ordre 16, avec les mêmes spécifications : $A_p=10$ dB, $A_a=35$ dB, $w_p=1$, et $w_a= 1.2027$.

2.13.2.2 Filtre de Tchebychev type-1

Sa réponse fréquentielle présente les caractéristiques suivantes :

- présence d'oscillation en bande passante, la fréquence d'oscillation augmente avec l'ordre du filtre.
- décroissance monotone en bande d'atténuée.
- atténuation asymptotique de $20N$ dB/décade, comme le cas de filtre de Butterworth.
- un temps de propagation peu constant.
- un ordre de filtre intermédiaire pour les mêmes spécifications en amplitude.

2.13.2.3 Filtre de Tchebychev type-2 (inversé)

Sa réponse fréquentielle présente les caractéristiques suivantes :

- présence d'oscillation en bande d'atténuée
- réponse plate en bande passante.
- décroissance rapide en bande d'atténuée.

- un temps de propagation peu constant.

-l'ordre de filtre égal à celui d'un filtre de Tchebychev type -1 pour les mêmes spécifications en amplitude.

2.13.2.4 Filtre elliptique de Cauer

Sa réponse fréquentielle présente les caractéristiques suivantes :

-présence d'ondulation à la fois en bandes passante et atténuée.

-décroissance avec une pente la plus raide.

-un temps de propagation de groupe le plus médiocre.

Chapitre 3: Echantillonnage des signaux

3.1 Introduction

L'étude des grandeurs physiques, qui sont de nature analogique, s'effectue presque exclusivement au mode numérique, surtout avec le développement d'une part, de la micro-électronique et les techniques d'acquisition numérique ; et de l'autre part, la mise en œuvre des algorithmes robustes et rapides de traitement numérique du signal exigeants que le signal soit converti en une suite de nombres (codes numériques en 0 et 1) (figure 3.3).

L'échantillonnage est une opération primordiale en amont (figure 3.1), pour transiter du mode analogique au numérique. Elle permet d'observer et mesurer un signal analogique à des instants donnés, appelés instants d'échantillonnage. Elle est schématisée par un simple interrupteur (figure 3.2), qui s'ouvre et se ferme à une période bien définie, appelée période d'échantillonnage T_e . Généralement, elle est suivie par une numérisation effectuée par des Convertisseurs Analogique/Numérique (CAN), et qui permettent de quantifier et codifier ces différents échantillons analogiques (figure 3.3). Le système électronique permettant cette transition du mode analogique au mode numérique est souvent appelée *chaîne d'acquisition numérique*.

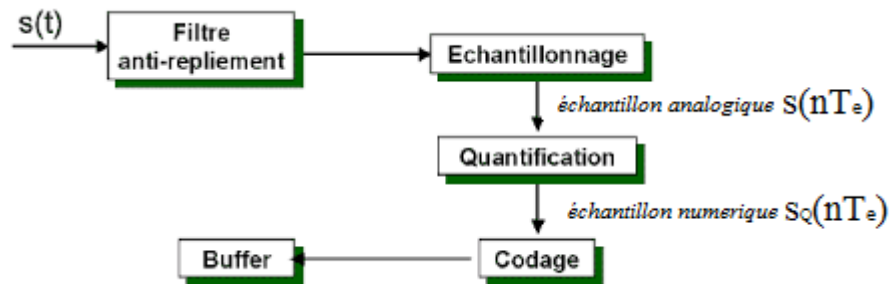


Figure 3.1. Principe d'échantillonnage et numérisation

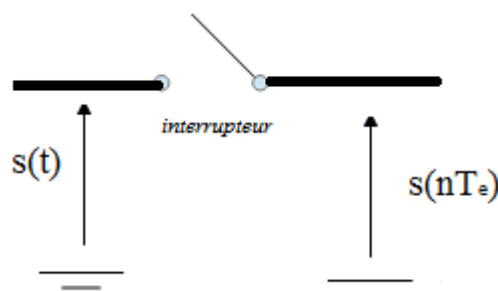


Figure 3.2. Principe d'un échantillonneur

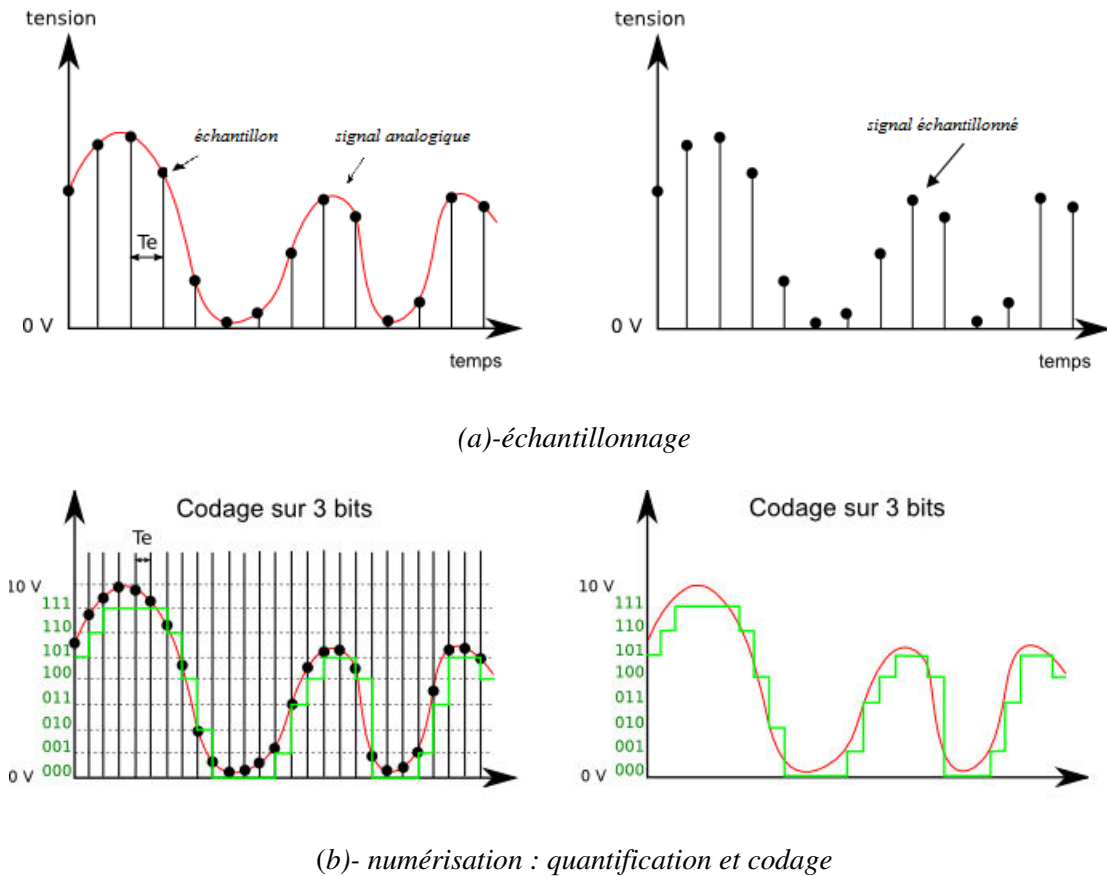


Figure 3.3. Illustration des différents signaux engendrés par échantillonnage et numérisation

3.2 Définitions et notations

L'échantillonnage est une opération permettant de transformer un signal analogique $s(t)$ en une suite de valeurs continues (analogiques) et discrètes dans le temps $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, appelée signal échantillonné (figure 3.3.a). Cette opération peut être réalisée par discrétisation de la variable continue et indépendante le temps t , en des instants discrets $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Nous obtenons un ensemble d'échantillons analogiques à temps discrets $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, où l'amplitude $s(t_k)$ est toujours analogique et continue.

Dans la pratique, l'échantillonnage est souvent suivi par une numérisation (figure 3.1), où ces échantillons analogiques $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ peuvent être quantifiés et codés (numérisés) par un convertisseur A/N (CAN) (figure 3.3.b). Nous obtenons ainsi le signal numérique $\{s_Q(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ qui a une amplitude discrète sous forme de code numérique et qui dépend de la précision du convertisseur A/N (CAN) en nombre de bits. Dans ce qui suit, la notation $s(t_k)$ peut être confondue avec $s_Q(t_k)$ car au point de vu mathématique l'échantillon analogique et sa valeur numérique sont à temps discret, et vont être traités avec les mêmes outils.

Donc, l'échantillonnage permet de transformer un signal analogique $s(t)$ en un signal échantillonné $\{s(t_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Si l'échantillonnage s'effectue avec un pas constant, appelé période d'échantillonnage $T_e = t_{k+1} - t_k = t_k - t_{k-1}$, nous parlons ainsi de l'échantillonnage équidistant. Nous avons

donc, le signal échantillonné sous forme de suite de valeurs $\{s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Nous appelons $f_e = \frac{1}{T_e}$ fréquence ou cadence d'échantillonnage.

3.3 L'échantillonnage idéal

Avec l'échantillonnage idéal, l'échantillonneur est considéré comme un simple interrupteur instantané (figure 3.2). Dans ce cas, nous associons le signal échantillonné, qui est une suite de valeurs $\{s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ à une distribution $\sum s(kT_e)\delta_{t-kT_e}$ appelée signal échantillonné associé $s_e(t)$ (figure 3.4).

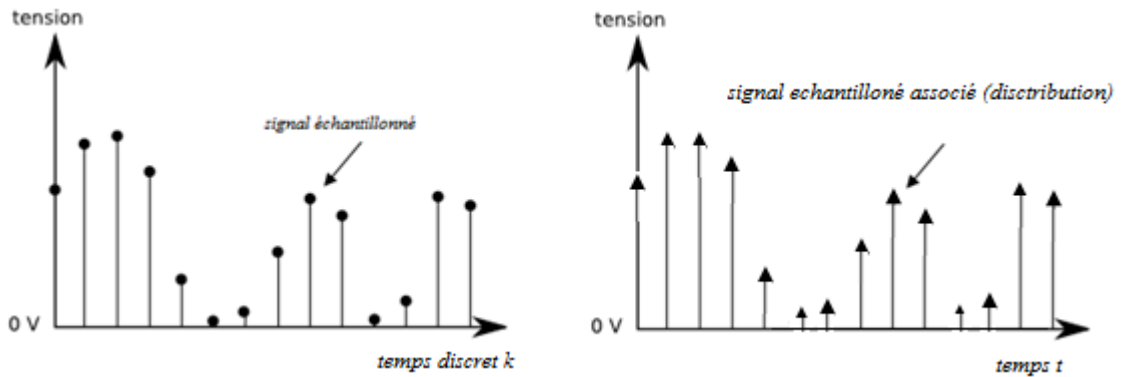


Figure 3.4. Illustration du signal échantillonné (suite de valeur à temps discret k , et le signal échantillonné associé (distribution).

3.3.1 Préambule

Nous démontrons que le spectre d'un peigne de Dirac $\Psi(t) = \sum \delta(t-k)$ est un peigne de Dirac dans le plan des fréquences $\Psi(f) = \sum \delta(f-k)$. Nous avons donc :

$$F[\Psi(t)] = \Psi(f) \quad (3.1)$$

Avec :

$$\Psi(t) = \sum \delta(t-k) \quad (3.2)$$

Démonstration

Nous considérons que :

$$X(f) = F[\Psi(t)] = F\left[\sum \delta(t-k)\right] = \sum e^{-2j\pi fk} \quad (3.3)$$

Nous avons les propriétés suivantes :

- $e^{2j\pi f} X(f) = X(f) = F[\Psi(t)]$

Nous avons :
$$e^{2j\pi f} X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{2j\pi f} e^{-2j\pi fk} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi(k-1)}$$

Si nous mettons le changement de variable: $n = k - 1$, nous avons :

$$e^{2j\pi f} X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi fn} = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi fk} = X(f) \quad (n \text{ est muette})$$

Donc en récapitulation, nous avons la propriété :

$$e^{2j\pi f} X(f) = X(f) = F[\Psi(t)] \tag{3.4}$$

2. $X(f) = F[\Psi(t)]$ est périodique de période 1

Nous avons :

$$X(f + 1) = \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi(f+1)k} \sum_{\mathbb{Z}} e^{-2j\pi fk} = X(f) \tag{3.5}$$

En considérant l'équation (3.4), nous avons :

$$(e^{2j\pi f} - 1)X(f) = 0 \tag{3.6}$$

Nous remarquons :

$X(f) = \delta(f - k)$ est une solution de l'équation (3.6) ; de plus $a_k \delta(f - k)$ l'est aussi, et la somme $X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta(f - k)$ est aussi une solution de l'équation (3.6).

Nous avons d'après la 2^{ème} propriété de périodicité :

$$X(f + 1) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta(f + 1 - n) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta[f - (n - 1)] = \sum_{\mathbb{Z}} a_{k+1} \delta(f - k) = X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} a_k \delta(f - k) \tag{3.7}$$

Ce qui est réalisable si les coefficients a_k soient égaux, donc :

$\forall k \in \mathbb{Z} : a_k = a$, et la solution $X(f)$ s'écrit :

$$X(f) = \sum_{\mathbb{Z}} a \delta(f - k) = a \sum_{\mathbb{Z}} \delta(f - n) \tag{3.8}$$

Nous avons :

$$\langle X(f), \Pi(f) \rangle = \left\langle a \sum_{\mathbb{Z}} \delta(f - k), \Pi(f) \right\rangle = a \sum_{\mathbb{Z}} \langle \delta(f - k), \Pi(f) \rangle = a \sum_{\mathbb{Z}} \Pi(k) = a \tag{3.9}$$

D'une autre part :

$$\langle X(f), \Pi(f) \rangle = \left\langle \sum_{\square} e^{-2j\pi fk}, \Pi(f) \right\rangle = \sum_{\square} \langle e^{-2j\pi fk}, \Pi(f) \rangle \quad (3.10)$$

Donc :

$$\langle X(f), \Pi(f) \rangle = \sum_{\square} \langle e^{-2j\pi fk}, \Pi(f) \rangle = \sum_{\square} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2j\pi fk} df = 1 + \sum_{\square^*} \left[\frac{e^{-2j\pi fk}}{-2j\pi k} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{\square^*} \frac{-2j \sin(\pi k)}{-2j\pi k} = 1 \quad (3.11)$$

De (3.9) et (3.11), nous déduisons que : $a = 1$

Nous concluons donc que : $X(f) = F[\Psi(t)] = \Psi(f)$

3.3.2 Modélisation de l'échantillonnage idéal

La modélisation de l'échantillonnage idéal consiste à trouver un modèle mathématique permettant de construire le signal échantillonné associé $s_e(t)$ à partir du signal analogique $s(t)$. A La base de résultat du §-3.3.1, nous démontrons par les propriétés de distributions que le signal échantillonné associé $s_e(t)$ peut être écrit en fonction du signal analogique $s(t)$, tel que:

$$s_e(t) = \sum_{\square} s(kT_e) \delta(t - kT_e) = \frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) \quad (3.12)$$

Le multiplicateur $\frac{1}{T_e} \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right)$ est appelé *échantillonneur idéal*.

Démonstration

Nous avons :

$$\frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} s(t) \sum_{\square} \delta\left(\frac{t}{T_e} - k\right) = \frac{1}{T_e} s(t) \sum_{\square} \delta\left[\frac{1}{T_e}(t - kT_e)\right] \quad (3.13)$$

Avec les propriétés de la distribution de Dirac, (3.13) s'écrit :

$$\frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} s(t) \sum_{\square} T_e \delta(t - kT_e) = \sum_{\square} s(t) \delta(t - kT_e) \quad (3.14)$$

D'où :

$$s_e(t) = \frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) = \sum_{\square} s(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (3.15)$$

3.4 Interpolation ou restitution idéale

L'interpolation idéale pose le problème inverse de l'échantillonnage. Elle consiste à reconstruire ou restituer, d'une manière exacte, le signal analogique à partir du signal échantillonné $\{s(kT_e)\}_{k \in \square}$, ou sa version associée $s_e(t)$, sous conditions idéales, et qui sont souvent irréalisables en pratique. Généralement,

les conditions de restitution ne sont pas uniques. Nous présentons dans ce qui suit, celles de Shannon. Nous verrons qu'elles ne peuvent pas être réalisées en pratique.

3.4.1 Conditions de restitution de Shannon

Nous posons le problème inverse, où nous avons la suite $\{s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, ainsi que le signal échantillonné associé $s_e(t)$; et nous essayons de trouver les conditions idéales permettant de restituer exactement le signal analogique $s(t)$. Pour que l'interpolation soit exacte, nous imposons que le spectre du signal analogique $s(t)$ soit à support borné. Donc, son spectre est limité à la bande passante, c'est-à-dire : $S(f) = F[s(t)]$ est à support borné et $\text{supp } p[S(f)] = BP = [-f_{\max}, f_{\max}]$. Avec f_{\max} est la grande fréquence contenue dans le signal $s(t)$.

L'idée de restitution de Shannon est simple, et peut être exacte si les deux signaux $s(t)$ et $s_e(t)$ ont le même spectre dans la bande passante $BP = [-f_{\max}, f_{\max}]$.

Au départ, nous calculons le spectre du signal échantillonné associé $s_e(t)$, nous avons :

$$G(f) = F[s_e(t)] = F\left[\frac{1}{T_e} s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right)\right] = \frac{1}{T_e} S(f) * T_e \Psi(T_e f) \quad (3.16)$$

En appliquant les propriétés de la distribution de Dirac, nous avons :

$$G(f) = F[s_e(t)] = S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \delta(T_e f - k) = S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \delta\left[T_e \left(f - \frac{k}{T_e}\right)\right] = S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{T_e} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \quad (3.17)$$

D'où :

$$G(f) = F[s_e(t)] = \frac{1}{T_e} S(f) * \sum_{\mathbb{Z}} \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{\mathbb{Z}} S(f) * \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} \sum_{\mathbb{Z}} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \quad (3.18)$$

Donc l'échantillonnage a ainsi pour effet, à un facteur d'amplitude près, de dupliquer à l'infini le spectre du signal continu.

Nous avons donc deux possibilités :

1. Si $f_{\max} > -f_{\max} + \frac{1}{T_e}$ d'où : $\frac{1}{T_e} = f_e < 2f_{\max}$:

Le recouvrement des spectres latéraux $S\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$ rend impossible la restitution du spectre initial $S(f)$, malgré l'utilisation d'un filtre passe-bas numérique dans le but d'éliminer les spectres latéraux (figure 3.5).

2. Si $f_{\max} \leq -f_{\max} + \frac{1}{T_e}$ d'où : $\frac{1}{T_e} = f_e \geq 2f_{\max}$:

Il est théoriquement possible de restituer le spectre initial $S(f)$, en supprimant les spectres latéraux $S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) (k \in \mathbb{Z}^*)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal (figure 3.6).

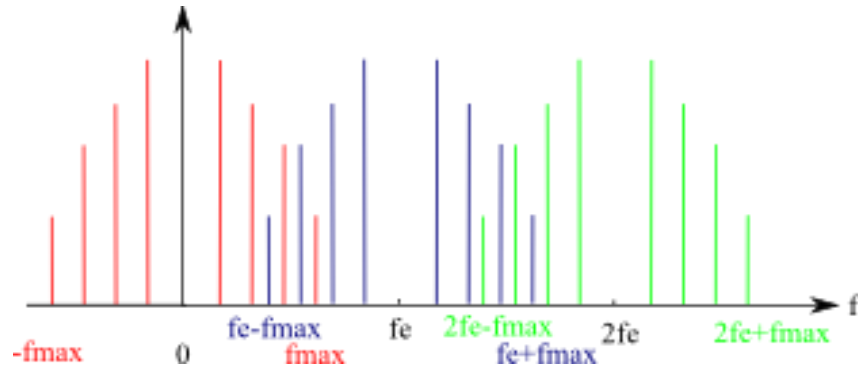


Figure 3.5. Illustration du phénomène de recouvrement (repliement) du spectre d'un signal échantillonné. La restitution exacte du spectre du signal analogique n'est pas possible.

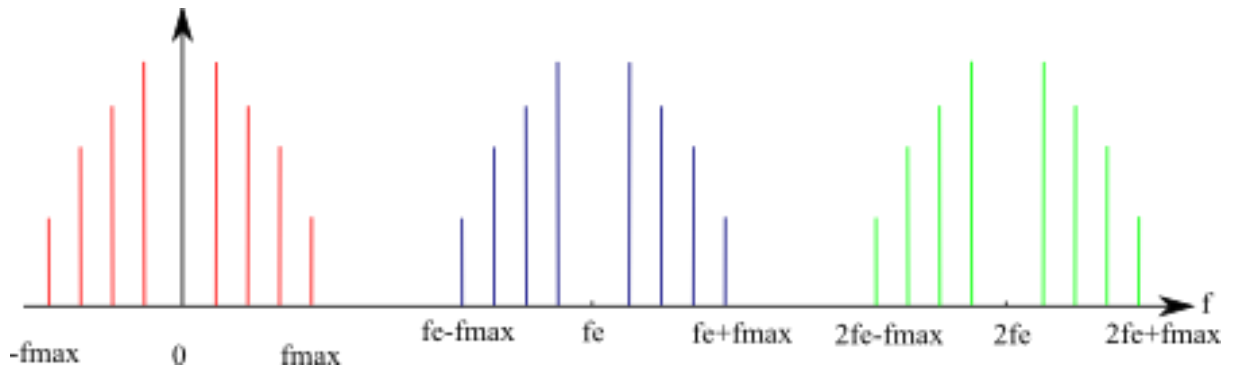


Figure 3.6. Illustration le cas où la restitution exacte soit possible du spectre du signal analogique à partir du spectre du signal échantillonné.

Théorème de Shannon

Lorsque nous échantillonnons un signal continu, nous ne perdons aucune information si :

1. son spectre est à support borné (limité).
2. la fréquence d'échantillonnage est supérieure au moins au double de la plus haute fréquence contenue (f_{\max}) dans ce signal continu.

3.4.2 L'expression du signal restitué

A partir du spectre du signal échantillonné : $G(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$, le spectre $S(f)$ du signal analogique $s(t)$ peut être restitué par multiplication avec la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_{\max} \leq f_c \leq -f_{\max} + f_e$ (figure 3.7), nous avons :

$$S(f) = T_e G(f) \Pi\left(\frac{f}{2f_c}\right) \quad (3.19)$$

Par transformée de Fourier inverse, nous avons :

$$s(t) = F^{-1} \left[T_e G(f) \Pi \left(\frac{f}{2f_c} \right) \right] = F^{-1} \left\{ \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(f - \frac{k}{T_e} \right) \right] \Pi \left(\frac{f}{2f_c} \right) \right\} \quad (3.20)$$

Avec les propriétés de la transformée de Fourier, nous avons:

$$s(t) = s(t) \Psi \left(\frac{t}{T_e} \right) * \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} = \left[s(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{t}{T_e} - k \right) \right] * \frac{\sin(2\pi f_c t)}{\pi t} \quad (3.21)$$

D'où :

$$s(t) = T_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(kT_e) \frac{\sin[2\pi f_c(t-kT_e)]}{\pi(t-kT_e)} \quad (3.22)$$

C'est la formule d'interpolation, permettant de restituer un signal analogique continu $s(t)$ à partir des échantillons $s(kT_e)$. Il est clair que la restitution exacte s'effectue sur un nombre infini d'échantillons. Ce qui justifie encore le caractère idéal de l'interpolation proposée. En pratique, nous limitons l'interpolation sur un nombre fini d'échantillons correspondant à la durée d'observation du signal.

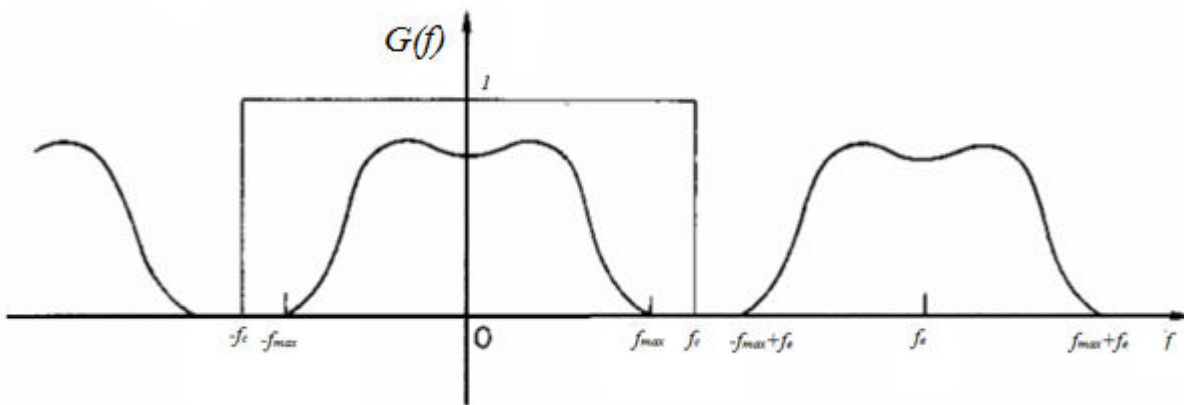


Figure 3.7. Illustration la technique de restitution du spectre initial à partir du spectre multiple par filtrage passe-bas idéal (dans le cas de satisfaction des conditions de Shannon).

Notons que l'interpolation exacte de Shannon reste idéale et irréalisable en pratique, car la restitution du spectre $S(f)$ est effectuée grâce au filtrage du spectre multiple $\sum_{k=-\infty}^{\infty} S \left(f - \frac{k}{T_e} \right)$ par un filtre passe-bas idéal (figure 3.7) ; où, nous conservons uniquement le spectre initial $S(f)$ et nous éliminons les spectres latéraux $S \left(f - \frac{k}{T_e} \right) \Big|_{k \neq 0}$. Il est clair que ce filtre passe-bas idéal ne peut pas être réalisé physiquement, car sa réponse impulsionnelle n'est pas causale (plus de détails ont été exposées en §-2.9.2).

3.5 Filtre analogique anti-repliement (anti-aliasing) du spectre

Les conditions de restitution de Shannon restent idéales et ne peuvent pas être réalisées en pratique, car en plus que le filtre analogique passe-bas idéal en aval n'est pas réalisable, le spectre d'un signal continu n'est jamais à support (bande) borné. Par exemple, même dans le cas du spectre borné d'un signal analogique, le fait de limiter sa durée d'observation (pour des raisons pratiques) conduit à

une convolution de son spectre avec un sinus cardinal non borné, ainsi le spectre résultant n'est plus à support borné. Par conséquent, la restitution ne peut pas être exacte et le phénomène de repliement du spectre est inévitable.

En revanche, si l'information contenue dans les composantes de hautes fréquences est supposée peu importante, elles peuvent être négligées et le spectre peut être considéré à support (bande) borné. Afin d'éviter qu'une haute fréquence se replie en bande passante, nous limitons volontairement le spectre du signal analogique par un filtre passe-bas analogique dit anti-repliement ou anti-aliasing, qui s'implémente en amont avant l'échantillonneur (figure 3.1). Ce filtre peut être de type : Butterworth, Tchebychev type-1 ou 2, ou bien elliptique.

En pratique, le signal à échantillonner est le plus souvent entaché de bruit, dont le spectre fréquentiel est plus étendu que celui du signal. L'opération d'échantillonnage a pour effet de superposer au spectre basse fréquence du signal utile, certaines parties du spectre du bruit ; en particulier les composantes du bruit au voisinage de f_e sont repliés sur la fréquence centre du signal utile. Pour éliminer cet effet perturbateur, il est nécessaire d'éliminer la partie hautes fréquences de ce bruit à l'aide d'un filtre passe-bas anti-repliement, où la fréquence de coupure est réglée à la demi-fréquence d'échantillonnage $\frac{f_e}{2}$.

La restitution du signal analogique à partir de ses échantillons peut être aussi effectuée par un bloqueur d'ordre zéro, où les valeurs des échantillons sont maintenues constantes durant la période d'échantillonnage T_e jusqu'à le prochain échantillon. Nous utilisons à nouveau un filtre analogique passe-bas de type Butterworth, Tchebychev type-1 ou 2, ou elliptique. Il est clair que la restitution n'est jamais exacte.

3.6 Echantillonnage réel

L'échantillonnage idéal décrit ci-dessus en §-3.3 est théorique comme nous l'avons expliqué. En effet, les échantillonneurs réels possèdent un certain temps d'ouverture, l'échantillonnage n'est donc pas réalisé avec une impulsion infiniment brève, mais au contraire par une impulsion de largeur finie τ , assimilable à une fonction porte $\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$. En pratique, nous citons différentes techniques permettant de tenir compte de cette largeur [3].

3.6.1 L'Echantillonneur moyenneur

Dans ce cas, la valeur moyenne de $s(t)$ est considérée pendant la durée τ de l'impulsion. Chaque échantillon $s(kT_e)$ est alors obtenu par le calcul suivant :

$$s(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{kT_e - \frac{\tau}{2}}^{kT_e + \frac{\tau}{2}} s(t) dt \quad (3.23)$$

L'équation (3.23) peut être écrite sous la forme :

$$s(kT_e) = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \Pi\left(\frac{t-kT_e}{\tau}\right) dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \Pi\left(\frac{kT_e-t}{\tau}\right) dt = \frac{1}{\tau} \left[s(t) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right]_{t=kT_e} \quad (3.24)$$

Dans ce cas, le signal échantillonné associé $s_e(t)$ peut être exprimé sous la forme :

$$s_e^m(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\tau} \left[s(t) * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right] \delta(t-kT_e) \right\} \quad (3.25)$$

Ainsi le spectre du signal échantillonné associé s'écrit :

$$G_m(f) = F[s_e^m(t)] = \frac{1}{T_e} \left[S(f) \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right] * \sum \delta\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \quad (3.26)$$

Donc, l'échantillonnage ou la restitution par des impulsions de largeur τ peut être traité comme un échantillonnage idéal ou une interpolation idéale à condition de multiplier le spectre du signal analogique par le spectre de l'impulsion élémentaire de largeur τ .

D'après l'équation (3.26), la durée de l'échantillonnage τ pondère donc l'amplitude du spectre du signal échantillonné. Il est donc important de prendre ce phénomène en compte, et éventuellement de le compenser par filtrage. Si nous intéressons au cas $\tau = T_e$; alors, nous constatons qu'en fréquence de Nyquist $\frac{f_e}{2}$, l'affaiblissement est d'environ -3.9 dB . Pour éviter ce genre de désagrément, nous chercherons à prendre une fréquence d'échantillonnage la plus éloignée possible de la fréquence de coupure du filtre anti-repliement. Ainsi l'affaiblissement se ressent beaucoup moins.

3.6.2 L'Echantillonneur bloqueur

Il s'agit d'échantillonner le signal $s(t)$ à l'instant $t = kT_e$, et de mettre en mémoire cette valeur pendant une durée τ (souvent $\tau = T_e$), pendant cette durée, une numérisation peut être effectuée avec un convertisseur Analogique/ Numérique (CAN).

Dans ce cas, le signal échantillonné associé peut avoir la forme :

$$s_e^h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \delta(t-kT_e) \right] * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{T_e} \left[s(t) \Psi\left(\frac{t}{T_e}\right) \right] * \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.27)$$

Le spectre $G_h(f)$ du signal échantillonné associé $s_e^h(t)$ est donc :

$$G_h(f) = \left[\frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \right] \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \quad (3.28)$$

L'équation (3.28) montre que le spectre multiple $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{k}{T_e}\right)$, à une constante d'amplification près, est multiplié par une fonction de type sinus cardinal centré, ce qui a l'effet d'un filtre atténuateur des spectres latéraux $S\left(f - \frac{k}{T_e}\right) \Big|_{k \neq 0}$ (figure 3.8).

Un échantillonneur-bloqueur d'ordre zero (BOZ) a pour action de maintenir constante, et égale à $s(kT_e)$ l'amplitude de l'impulsion entre les instants kT_e et $(k+1)T_e$. La fonction de transfert d'un tel dispositif est donnée par :

$$F_{BOZ}(p) = \frac{1 - e^{-T_e p}}{p} \quad (3.29)$$

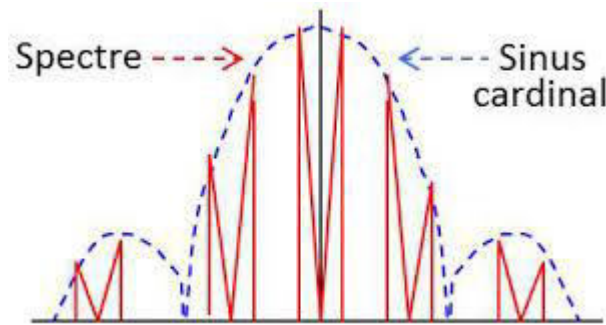


Figure 3.8. Illustration de l'effet de l'échantillonneur bloqueur d'ordre zero sur l'atténuation de l'amplitude des spectres latéraux par multiplication avec un sinus cardinal.

3.6.1 Principe de réalisation

La réalisation d'un échantillonneur bloqueur consiste à associer un interrupteur analogique à une capacité C. La capacité joue le rôle d'élément mémoire, l'interrupteur est là pour réactualiser la valeur mémorisée ou bien l'isoler vis à vis de l'entrée. Le principe de réalisation est illustré en figure 3.9.

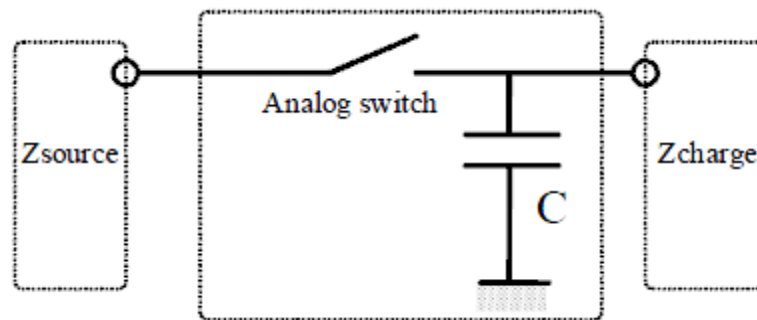


Figure 3.9. Principe de réalisation d'un échantillonneur bloqueur.

3.7 Quantification et codage- conversion Analogique/Numérique

L'échantillon $s(kT_e)$ est une quantité analogique, pour la rendre sous forme de code numérique indépendant de l'aspect analogique, il faut passer par une numérisation qui consiste à effectuer deux opérations d'une manière conjointe à savoir, une quantification et un codage. Le rôle de la numérisation est donc d'associer une image binaire à un signal analogique. Nous avons les associations suivantes :

<i>Mode analogique</i>	<i>Mode numérique</i>
Signal continu	Signal discret
tension	Chiffre (code)

Tableau 3.1 Comparaison entre les modes analogique et numérique.

Cette opération de numérisation peut être réalisée par un dispositif électronique appelé Convertisseur Analogique/Numérique (CAN), en anglais, nous disons : Analog/Digital Converter : ADC.

3.7.1 Principe de quantification

A chaque niveau de tension est associé une valeur binaire codée sur N bits. Ils vont permettre de distinguer 2^N niveaux de tension repartis de $-V_m$ à V_m . Nous avons ainsi un pas de quantification: $q = \frac{2V_m}{2^N}$. Le pas de quantification est appelé aussi *quantum*.

La caractéristique d'entrée-sortie d'un CAN est une caractéristique en marche d'escalier (figure 3.10). Chaque palier a une largeur d'un pas de quantification q . Le passage d'un palier à un autre correspond à une variation de '1' du code à partir du bit le moins significatif (LSB : Least Significant Bit).

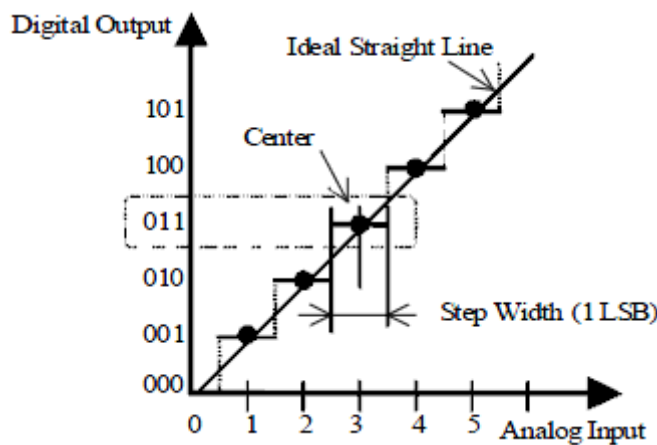


Figure 3.10 Caractéristique d'entrée-sortie d'un CAN

3.7.2 Type de quantification- bruit de quantification

Nous distinguons deux types de quantification à savoir, par troncature et par arrondissement. Selon chacun de ces deux types, nous définissons le bruit de quantification engendré en fonction du pas de quantification (quantum).

3.7.2.1 Quantification par troncature

Nous représentons la valeur analogique 'x' par la valeur discrète et quantifiée 'x_T' adaptable par troncature à la taille de mot binaire fini. La figure 3.11 illustre la fonction de troncature. Ce type de quantification est appelé aussi *quantification linéaire par défaut*.

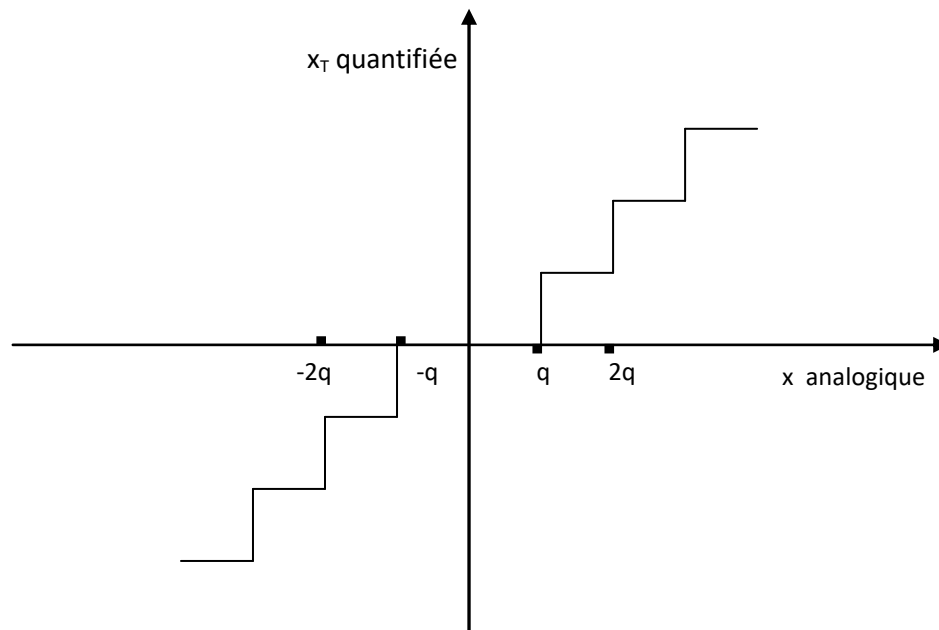


Figure 3.11 représentation de la fonction de troncature

Nous avons :

$$x_T = q.ENT[x/q] \quad (3.30)$$

Avec : *ENT* désigne la partie entière.

L'erreur ou bruit de troncature est défini par:

$$e_T = x_T - x \quad (3.31)$$

Nous avons :

$$-q < e_T < +q \quad (3.32)$$

3.7.2.2 Quantification par arrondissement

Nous représentons 'x' par la valeur discrète 'x_A' adaptable par arrondi à la taille de mot binaire fini. La figure 3.12 illustre la fonction d'arrondie. Ce type de quantification est appelé aussi *quantification linéaire centrée*.

Nous avons:

$$x_A = q.ENT[x/q + 0.5 Sgn(x)] \quad (3.33)$$

Avec : *Sgn* désigne le signe de x, où :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

L'erreur ou bruit d'arrondie est défini par:

$$e_A = x_A - x \tag{3.35}$$

Nous avons donc :

$$-q/2 < e_A < +q/2 \tag{3.36}$$

Le deuxième type de quantification est le mieux adapté, car il engendre une puissance de bruit la moins faible, et égale à $\frac{q^2}{12}$.

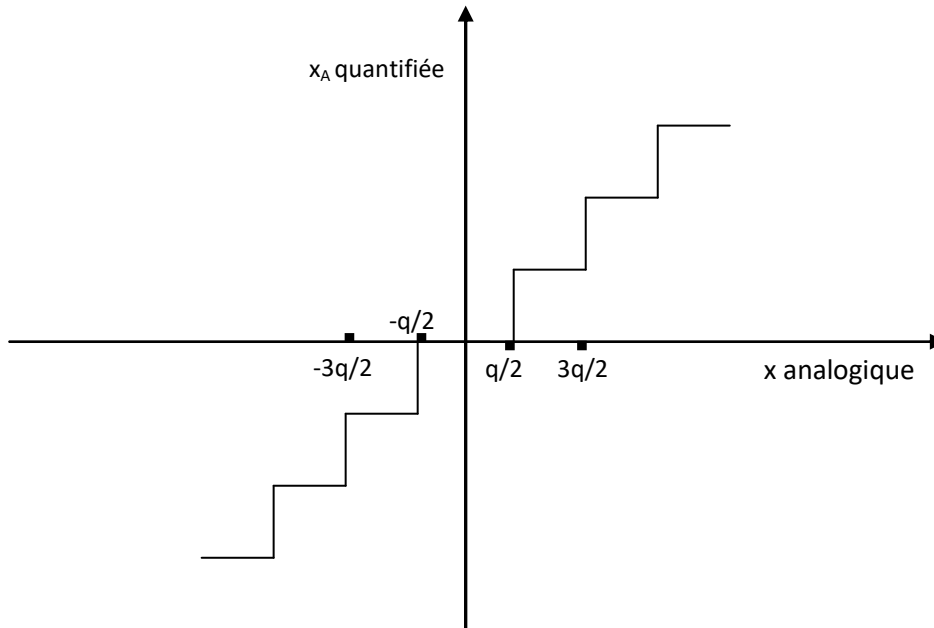


Figure 3.12 représentation de la fonction d'arrondie

3.7.3 Choix du nombre de bits de quantification

Le choix du nombre de quantification en bits dépend au rapport signal sur bruit (SNR) défini par :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{max}}{A_{min}} \right) \tag{3.37}$$

Telles que : P_{signal} et P_{bruit} sont respectivement les puissances du signal et du bruit.

A_{max} et A_{min} sont respectivement les amplitudes maximale et minimale contenues dans le signal.

Ainsi, le nombre N de bits peut être calculé par la formule ci-dessous :

$$SNR_{dB} = 6N + 1.76 \text{ dB} \tag{3.38}$$

Ce qui signifie qu'un bit de code rajoute 6 dB de rapport signal sur bruit.

3.7.4 Principe du codage

Le codage permet d'établir la correspondance entre la valeur discrète ou quantifiée et sa valeur binaire sous forme de bits en 0 et 1. Nous distinguons deux type de codage : un codage *unipolaire* permettant de représenter les valeurs sans signe, et un codage *bipolaire*, qui permet de représenter les valeurs signées positives et négatives, en utilisant le complément à 2, où le bit le plus significatif (MSB : Most significative Bit) est réservé au signe. La valeur quantifiée x_q peut être souvent retrouvée à partir du code binaire en utilisant le binaire naturel, tel que :

$$x_q = q(b_{N-1}2^{N-1} + \dots + b_02^0) \quad (3.39)$$

Si le bit MSB : b_{N-1} est à 0 la valeur x_q est positive et calculée directement par (3.39) à partir du code $b_{N-1}b_{N-2}\dots b_1b_0$, sinon elle est négative. Dans ce cas, la valeur n'est calculée par (3.39) qu'après avoir converti le code $b_{N-1}b_{N-2}\dots b_1b_0$ à son équivalent en complément à 2. Le tableau 3.2 illustre respectivement les valeurs discrètes associées aux deux codes en binaire naturel unipolaire et bipolaire.

Code en binaire naturel sur 3 bits	Valeur discrète en code unipolaire	Valeur discrète en code bipolaire avec complément à 2
000	0	0
001	1	1
010	2	2
011	3	3
100	4	-4
101	5	-3
110	6	-2
111	7	-1

Tableau 3.2 Valeurs discrètes associées aux codes binaires : unipolaire et bipolaire

3.8 Restitution pratique approchée

La restitution du signal analogique $s(t)$ à partir des valeurs numériques $s(kT_e)$ est généralement obtenue à l'aide d'un convertisseur Numérique/Analogique (CNA) et un filtre appelé bloqueur d'ordre zero (BOZ). Dans certains cas exigeants, il est suivi d'un filtre analogique passe-bas pour mieux atténuer les spectres latéraux dupliqués, ainsi isoler la composante centrale du spectre. Il est généralement de type de Butterworth, Tchebychev-1 et 2 ou elliptique. Le CNA permet de convertir les codes binaires en échantillons analogiques. Ce procédé de reconstruction inverse du signal analogique à partir des valeurs discrètes numériques est souvent assuré par une chaîne électronique dite *chaîne de restitution*.

Chapitre 4: Transformées de Fourier Discrète DFT et Rapide TFR

4.1 Introduction

La Transformée de Fourier Discrète, désignée par TFD. En anglais nous disons : Discrete Fourier Transform : DFT, s'introduit quand il s'agit de calculer la transformée de Fourier d'une fonction à l'aide d'un calculateur numérique. Nous abordons en premier lieu la transformée de Fourier d'un signal échantillonné ou discret apériodique. Ensuite, nous étudions la série de Fourier pour un signal échantillonné ou discret périodique. Par la suite, nous présentons la TFD et sa version rapide : transformée de Fourier Rapide (TFR). Nous étudions aussi les notions engendrées par la discrétisation du temps, telles que la convolution linéaire des suites numériques et la convolution circulaire.

4.2 Spectre d'un signal échantillonné ou discret

Jusqu'à présent, nous avons calculé le spectre d'un signal échantillonné ou discret (numérique) $\left[s(kT_e) \right]_{k \in \mathbb{Z}}$ à l'aide de la transformée de Fourier au sens de distributions et en considérant le signal échantillonné associé, qui est une distribution telle que : $s_e(t) = \sum s(kT_e) \delta(t - kT_e)$. Pour des raisons pratiques, lorsqu'il s'agit des fonctions d'une variable discrète, nous préférons des outils mathématiques propres à cette discrétisation dans le temps, au lieu de recourir à la théorie de distribution. Dans ce contexte, nous présentons la transformée de Fourier Numérique (TFN), comme un outil mathématique permettant le calcul de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné ou numérique apériodique. Nous verrons, dans le cas des signaux périodiques (échantillonnés ou discrets) que le calcul du spectre peut être effectué par la série de Fourier. Dans ce qui suit, les signaux $\left[s(kT_e) \right]_{k \in \mathbb{Z}}$ échantillonnés ou discrets sont confondus et traités de la même façon.

4.2.1 Transformée de Fourier numérique (TFN)

Soit un signal discret ou numérique $\left[s(kT_e) \right]_{k \in \mathbb{Z}}$ apériodique. La transformée de Fourier numérique $S_N(f)$ d'un signal échantillonné ou numérique $\left[s(kT_e) \right]_{k \in \mathbb{Z}}$ est définie, sous condition de convergence, par [3]:

$$S_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-2j\pi f k T_e} \quad (4.1)$$

Dans le cas d'un signal $[s(kT_e)]$ observé sur une durée limitée T . C.-à-d., nous avons, la suite à support borné : $\{s(0), s(T_e), \dots, s[(N-1)T_e]\}$, avec : $(N-1)T_e = T$. L'expression (4.1) est toujours convergente, et s'écrit :

$$S_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e) e^{-2j\pi f k T_e} \quad (4.2)$$

Exemple : transformée de Fourier d'un signal porte $[x(k)]_{-m \leq k \leq m}$ de longueur $N = 2m + 1$, où :

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \forall -m \leq k \leq m \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.3)$$

Nous avons :

$$S_N(f) = \sum_{k=-m}^{+m} x(k) e^{-2j\pi f k} = \sum_{k=-m}^m e^{-2j\pi f k} = \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)} = \frac{\sin[\pi f (2m+1)]}{\sin(\pi f)} \quad (4.4)$$

4.2.2 Conditions d'existence

La transformée de Fourier numérique $S_N(f)$ d'un signal échantillonné ou discret $[s(kT_e)]_{k \in \mathbb{Z}}$ existe si la série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-2j\pi f k T_e}$ converge [4].

Nous avons :

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-2j\pi f k T_e} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(kT_e) e^{-2j\pi f k T_e}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(kT_e)| |e^{-2j\pi f k T_e}| \quad (4.5)$$

Comme le module du terme $e^{-2j\pi f k T_e}$ est égal à 1, nous avons :

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-2j\pi f k T_e} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(kT_e)| \quad (4.6)$$

Donc, la condition suffisante pour que $S_N(f)$ existe si la suite $[s(kT_e)]_{k \in \mathbb{Z}}$ soit absolument sommable. C.-à-d.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |s(kT_e)| < +\infty \quad (4.7)$$

Sachant que :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |s(kT_e)|^2 < \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |s(kT_e)| \right]^2 < +\infty \quad (4.8)$$

Nous déduisons que les signaux échantillonnés ou discrets apériodiques à *énergie totale finie* constituent une classe importante de signaux qui vérifient la condition d'existence (4.7).

4.2.3 Propriété de périodicité

La propriété majeure de la transformée de Fourier numérique d'un signal échantillonné ou discret $S_N(f)$ est sa périodicité. C'est une fonction de la variable continue f . Elle est périodique, de période $F_e = \frac{1}{T_e}$. Cette propriété découle directement de la définition ci-dessus (4.1). Ainsi, nous avons :

$$S_N(f + F_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-2j\pi(f+F_e)kT_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-2j\pi(f+\frac{1}{T_e})kT_e} \quad (4.9)$$

D'où :

$$S_N(f + F_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) e^{-2j\pi f k T_e} = S_N(f) \quad (4.10)$$

Puisque $S_N(f)$ est F_e -périodique, tout intervalle de longueur F_e est suffisant pour décrire complètement cette fonction. Nous utilisons, souvent l'intervalle $\left[-\frac{F_e}{2}, +\frac{F_e}{2}\right]$, appelé intervalle principal ou période principale.

4.2.4 Relation de la transformée de Fourier numérique avec la série de Fourier

Comme toute fonction périodique, il est possible de développer $S_N(f)$ en série de Fourier sur l'intervalle $\left[-\frac{F_e}{2}, +\frac{F_e}{2}\right]$. Dans ce cas, les coefficients de Fourier C_k sont calculés avec l'équation :

$$C_k = \frac{1}{F_e} \int_{-\frac{F_e}{2}}^{+\frac{F_e}{2}} S_N(f) e^{+2j\pi f \frac{k}{F_e}} df \quad (4.11)$$

De plus, sous conditions de convergence de Dirichlet, $S_N(f)$ est développable en série de Fourier, telle que :

$$S_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-2j\pi f k T_e} \quad (4.12)$$

En comparaison avec la définition de la transformée de Fourier numérique $S_N(f)$ (4.1), nous remarquons que ce développement est la définition elle-même de la transformée de Fourier numérique. Ceci revient donc à considérer les coefficients en série de Fourier C_k comme les échantillons $s(kT_e)$ du signal numérique. Nous avons donc :

$$s(kT_e) = C_k = T_e \int_{-\frac{1}{2T_e}}^{+\frac{1}{2T_e}} S_N(f) e^{+2j\pi f k T_e} df = \frac{1}{F_e} \int_{-\frac{F_e}{2}}^{+\frac{F_e}{2}} S_N(f) e^{+2j\pi \frac{f}{F_e} k} df \quad (4.13)$$

Celle-ci est la formule de la *transformée de Fourier numérique inverse* [3].

Avec le cas particulier, où $T_e = 1$, nous avons :

$$s(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_N(f) e^{+2j\pi fk} df \quad (4.14)$$

Et :

$$S_N(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(k) e^{-2j\pi fk} \quad (4.15)$$

4.2.2 Transformée de Fourier d'un signal périodique échantillonné

Un signal échantillonné ou discret $\{s(kT_e)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est dit périodique de période T , s'il vérifie la condition suivante [4] :

$$s(kT_e) = s(kT_e + T) \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.16)$$

Nous remarquons que l'ensemble des exponentielles complexes défini par :

$$\psi_n(k) = e^{2j\pi n \frac{1}{N} k T_e} = e^{2j\pi n \frac{1}{N} k} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.17)$$

sont tous périodiques de période N .

Par analogie avec les signaux périodiques continus, cet ensemble constitue les fonctions de base pour la représentation en série de Fourier des signaux périodiques discrets ou échantillonnés. Par conséquent, le développement en série de Fourier d'une suite périodique de période N est donné par [4] :

$$s(kT_e) = \sum_n S_n e^{2j\pi n \frac{1}{N} k} \quad (4.18)$$

Où : S_n sont les coefficients de série de Fourier.

Dans l'équation (4.18), les limites de sommation sont obtenues en remarquant que les fonctions de base $\psi_n(k)$ sont périodiques, donc, nous considérons uniquement les distinctes N valeurs successives, car nous avons :

$$\psi_n(k) = \psi_{n+N}(k) \quad (4.19)$$

D'où :

$$s(kT_e) = \sum_{n[N]} S_n e^{2j\pi n \frac{1}{N} k} \quad (4.20)$$

Les coefficients S_n sont obtenus en multipliant les deux membres de l'équation (4.20) par $e^{-2j\pi m \frac{1}{N} k}$ et en sommant par rapport à k sur un intervalle $[N]$ qui s'étend par exemple de 0 à $(N-1)$, nous avons donc :

$$\sum_{k[N]} s(kT_e) e^{-2j\pi m \frac{1}{N} k} = \sum_{k[N]} e^{-2j\pi m \frac{1}{N} k} \sum_{n[N]} S_n e^{2j\pi n \frac{1}{N} k} = \sum_{n[N]} S_n \sum_{k[N]} e^{2j\pi(n-m) \frac{1}{N} k} \quad (4.21)$$

Le terme $\sum_{k[N]} e^{2j\pi(n-m) \frac{1}{N} k}$ est une somme d'une suite géométrique d'argument : $r = e^{2j\pi(n-m) \frac{1}{N}}$, nous avons donc :

$$\sum_{k[N]} e^{2j\pi(n-m) \frac{1}{N} k} = \begin{cases} N & \text{si } r = 1 \\ \frac{1-r^N}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} N & \text{si } (n-m) = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ \frac{1-e^{2j\pi(n-m) \frac{1}{N} N}}{1-e^{2j\pi(n-m) \frac{1}{N}}} & \text{sin on} \end{cases} \quad (4.22)$$

Finalement, nous avons :

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k[N]} s(kT_e) e^{-2j\pi n \frac{1}{N} k} \quad (4.23)$$

C'est la formule calculant les coefficients S_n pour un signal échantillonné ou discret périodique.

Remarque :

La position du facteur d'échelle $\frac{1}{N}$ a été choisie d'une manière que les S_n soient les coefficients du développement en série de Fourier de la suite $\{s(kT_e)\}_{k \in NT_e}$ périodique [4]. Nous pouvons considérer le contraire, où $\left[S\left(\frac{n}{NT_e}\right) \right]$ soit périodique de période $\frac{1}{T_e}$ et donc développable en série de Fourier. Les $s(kT_e)$ soient donc les coefficients du développement en série de Fourier, nous avons ce cas :

$$S_n = \sum_{k[N]} s(kT_e) e^{-2j\pi n \frac{1}{N} k} \quad (4.24)$$

Et :

$$s(kT_e) = \frac{1}{N} \sum_{n[N]} S_n e^{2j\pi n \frac{1}{N} k} \quad (4.25)$$

4.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Nous avons vu que la transformée de Fourier d'un signal discret ou numérique, sous conditions existence, est une fonction complexe F_e -périodique de la variable continue f . Ceci, présente une difficulté intrinsèque dans la mesure où le spectre est calculé avec un système de traitement numérique. Dans ce cas, la variable continue f peut être discrétiser sur une période F_e , où la transformée de Fourier numérique est échantillonné sur un nombre entier N de points. Nous obtenons ainsi, la Transformée de Fourier Discrète (TFD) ; en anglais est appelée Discrete Fourier Transform : DFT.

Le remplacement de la variable continue f par une variable discrète n peut s'écrire de la manière suivante :

$$f = n\Delta f \tag{4.26}$$

Où : Δf est le pas d'échantillonnage de la transformée de Fourier numérique $S_N(f)$, appelée aussi finesse d'analyse. Il est nécessaire de respecter les conditions de Shannon, tel que : $\frac{1}{\Delta f}$ soit supérieur à la longueur du support borné $[0, (N-1)T_e]$ du signal échantillonné ou numérique $[s(kT_e)]_{k \in [0, (N-1)T_e]}$ et qui correspond à la durée d'observation du signal T . Il faut donc choisir une finesse d'analyse Δf , telle que [3]:

$$\frac{1}{\Delta f} > (N-1)T_e = \frac{N-1}{F_e} \tag{4.27}$$

Un choix simple consiste à prendre : $\frac{1}{\Delta f} = NT_e = \frac{N}{F_e}$, d'où :

$$\Delta f = \frac{1}{NT_e} = \frac{F_e}{N} \tag{4.28}$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier discrète de N-uplet $[s(kT_e)]_{0 \leq k < NT_e}$ correspond au N-uplet $[S(\frac{n}{NT_e})]_{0 \leq n < \frac{N-1}{NT_e}}$, telle qu'elle est définie par [2,3,7]:

$$S_N\left(\frac{n}{NT_e}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} s(kT_e) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}}, \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, N-1 \tag{4.29}$$

A partir de l'équation (4.13) de la transformée de Fourier numérique inverse, nous avons après discrétisation :

$$s(kT_e) = \frac{1}{F_e} \sum_{n=0}^{N-1} S_N\left(n \frac{F_e}{N}\right) e^{2j\pi \frac{n}{N} k} \frac{F_e}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_N\left(\frac{n}{NT_e}\right) e^{2j\pi \frac{nk}{N}} \text{ avec : } k = 0, 1, \dots, N-1 \tag{4.30}$$

Si nous notons $s(kT_e)$ et $S_N\left(\frac{n}{NT_e}\right)$ respectivement par $s(k)$ et $S(n)$, nous avons ainsi :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}}, \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, N-1 \tag{4.31}$$

Et :

$$s(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_N(n) e^{2j\pi \frac{nk}{N}}, \text{ avec : } k = 0, 1, \dots, N-1 \tag{4.32}$$

Remarque :

Le facteur d'échelle $\frac{1}{N}$ est mis pour assurer l'identité : $TF^{-1}[TF(\cdot)] = (\cdot)$ [2]. Dans d'autre littérature [4,6], ce facteur $\frac{1}{N}$ peut être associé à $S(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}}$, avec : $s(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{2j\pi \frac{nk}{N}}$; ou bien réparti d'une façon équitable entre les deux formules, avec : $S(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}}$ et $s(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{2j\pi \frac{nk}{N}}$, avec : $n=0,1,\dots,N-1$, $k=0,1,\dots,N-1$ [2].

4.3.1 Propriété de la TFD

La plupart des propriétés de la transformée de Fourier des signaux analogiques examinées en chapitre 1 ont leur équivalent dans la transformée de Fourier Discrète. Les principales propriétés sont examinées ci-dessous :

4.3.1.1 Périodicité

Nous avons considéré jusqu'à présent que le nombre d'échantillons N contenu dans un signal $[s(k)]_{0 \leq k < N}$ est égal à celui contenu dans son spectre $[S(n)]_{0 \leq n < N}$. Nous avons vu que la discrétisation dans le domaine temporel conduit à un spectre périodique dans le domaine des fréquences. De la même façon, une discrétisation dans le domaine des fréquences conduit à un signal périodique dans le domaine temporel. Ainsi, les suites d'échantillons $[s(k)]_{0 \leq k < N}$ et $[S(n)]_{0 \leq n < N}$ sont périodiques de période N .

Nous avons ainsi :

$$s(k + N) = s(k) \text{ pour } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.33)$$

$$S(n + N) = S(n) \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.34)$$

Démonstration :

Nous avons :

$$s(k + N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{2j\pi \frac{n(k+N)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{2j\pi \frac{nk}{N}} = s(k) \quad (4.35)$$

Et :

$$S(n + N) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2j\pi \frac{(n+N)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}} = S(n) \quad (4.36)$$

D'où la périodicité pour les deux expressions (4.35) et (4.36) ci-dessus.

4.3.1.2 Linéarité

La TFD est une transformation linéaire. Ainsi, si nous avons :

Si $[s_i(k)] \xleftrightarrow{TFD} [S_i(n)] \quad i = 0, 1, \dots, L$ alors : $\sum_{i=0}^L \alpha_i s_i(k) \xleftrightarrow{TFD} \sum_{i=0}^L \alpha_i S_i(n)$, où : α_i sont des coefficients constants.

Notons que si N_i est le support borné (durée) de chaque signal $[s_i(k)]_{0 \leq k < N_i}$ alors sa TFD $[S_i(n)]$ doit être calculée sur nombre de points $N = \max[N_i] \quad i = 0, 1, \dots, L$. Dans ce cas chaque signal $[s_i(k)]$ de durée $N_i < N$ doit être prolongé par $N - N_i$ échantillons nuls avant de procéder au calcul de la TFD.

4.3.1.3 Décalage cyclique temporel (translation)

Un décalage cyclique est réalisé lorsque le signal $[s(k)]_{0 \leq k \leq N-1}$ de durée N , est considéré comme étant une extension d'un signal N-périodique. Dans ce cas, un décalage temporel de k_0 échantillons respectivement à droite (ou à gauche), implique k_0 échantillons respectivement de la période précédente ($N - 1$) (ou de la future période ($N + 1$)).

Nous avons donc :

Si : $[s(k)] \xleftrightarrow{TFD} [S(n)]$ alors : $[s(k - k_0)] \xleftrightarrow{TFD} [e^{-2j\pi k \frac{k_0}{N}} S(n)]$

4.3.1.3 Décalage cyclique fréquentiel

Etant donné que la suite $[S(n)]_{0 \leq n \leq N-1}$ est N-périodique, nous pouvons aussi réaliser un décalage cyclique dans les fréquences n , de n_0 échantillons, nous avons donc l'équivalence dans les temps k sous la forme de modulation du signal d'entrée $[s(k)]$ par l'exponentielle $e^{2j\pi \frac{n_0}{N} k}$:

$$\left[e^{2j\pi \frac{n_0}{N} k} s(k) \right] \xleftrightarrow{TFD} [S(n - n_0)]$$

4.3.1.4 Symétrie

Si $[s(k)]$ est une suite réelle, alors : $S(n) = \bar{S}(N - n)$ pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Dans ce cas, les échantillons $S(n)$ sont symétriques par rapport à $\frac{N}{2}$. Ainsi, les suites $\{\text{Re}[S(n)]\}$ et $\{\text{Im}[S(n)]\}$ sont respectivement paire et impaire par rapport à $\frac{N}{2}$. Cette propriété permet d'éviter la moitié des calculs de la TFD.

4.3.1.5 Théorème de Parseval

Si : $[s(k)] \xleftrightarrow{TFD} [S(n)]$ alors : $\sum_{k=0}^{N-1} |s(k)|^2 \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |S(n)|^2$

4.4 Algorithme de calcul rapide de la TFD

En 1965, J.W. Cooley et J. W. Turkey ont révolutionné le domaine du traitement numérique du signal avec l’algorithme de calcul rapide de la TFD appelé Transformée de Fourier Rapide (TFR), plus connu sous l’appellation anglaise Fast Fourier Transform (FFT).

Nous Considérons l’expression (4.31) de la TFD, telle que :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-2j\pi \frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} s(k) W_N^{kn} \tag{4.37}$$

avec : $W_N^{kn} = e^{-2j\pi \frac{kn}{N}}$, $n=0,1,\dots,N-1$ (4.38)

L’expression (4.37) peut être écrite sous forme matricielle telle que [4]:

$$S = W_N s \tag{4.39}$$

Avec :

$$S = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(1) \\ \vdots \\ S(N-1) \end{bmatrix}, s = \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix} \text{ et } W_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

Dans ce qui suit, nous considérons le cas de FFT avec entrelacement temporel, l’algorithme FFT avec entrelacement fréquentiel n’est pas abordé dans ce chapitre.

4.4.1 L’algorithme FFT avec entrelacement temporel

Pour simplification, nous supposons que le nombre N est pair et une puissance de 2, car il conduit à des algorithmes peu complexes et qui sont généralement efficaces. En cas contraire de nombre N impair ou un nombre pair qui n’est pas une puissance de 2, nous pouvons ajouter un nombre suffisant d’échantillons nul (0) de telle façon que le nombre total des échantillons soit pair et une puissance de 2.

Dans le cas considéré où N est une puissance 2, tel que : $N = 2^L$, la suite $[s(k)]_{0 \leq k < N}$ peut être décomposée en deux suites entrelacées, celle des échantillons d’indice paire $[s(2m)]_{0 \leq m < \frac{N}{2}}$ et celle des échantillons d’indice impaire $[s(2m+1)]_{0 \leq m < \frac{N}{2}}$, telle que :

$$S(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2m)W_N^{2mn} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2m+1)W_N^{(2m+1)n} \quad \text{avec : } n=0,1,\dots,N-1 \quad (4.41)$$

Nous avons la propriété suivante :

$$W_N^{2m} = e^{-2j\pi\frac{2m}{N}} = e^{-2j\pi\frac{m}{N/2}} = W_{\frac{N}{2}}^m \quad (4.42)$$

Donc l'équation (4.41) peut être écrite sous la forme :

$$S(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2m)W_{\frac{N}{2}}^{mn} + W_N^n \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} s(2m+1)W_{\frac{N}{2}}^{mn} \quad \text{avec : } n=0,1,\dots,N-1 \quad (4.43)$$

Si nous posons :

$$s_1(m) = s(2m) \text{ et } s_2(m) = s(2m+1) \quad \text{avec : } m=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1 \quad (4.44)$$

$$S(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} s_1(m)W_{\frac{N}{2}}^{mn} + W_N^n \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} s_2(m)W_{\frac{N}{2}}^{mn} \quad \text{avec : } n=0,1,\dots,N-1 \quad (4.45)$$

m est une variable muette, nous pouvons ainsi écrire (4.45) sous la forme :

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_1(k)W_{\frac{N}{2}}^{kn} + W_N^n \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_2(k)W_{\frac{N}{2}}^{kn} \quad \text{avec : } n=0,1,\dots,N-1 \quad (4.46)$$

Nous avons donc :

$$S(n) = S_1(n) + W_N^n S_2(n) , \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (4.47)$$

Avec :

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_1(k)W_{\frac{N}{2}}^{kn} \quad (4.48)$$

$$S_2(n) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_2(k)W_{\frac{N}{2}}^{kn} \quad (4.49)$$

L'équation (4.47) montre que le calcul d'une TFD d'ordre N revient au calcul de deux TFD d'ordre $\frac{N}{2}$ chacune.

Pour déterminer les éléments $S(n)$ d'indice supérieur ou égal à $\frac{N}{2}$, nous exploitons la périodicité des suites $[S_1(n)]$ et $[S_2(n)]$, nous avons :

$$S\left(n + \frac{N}{2}\right) = S_1(n) + W_N^{n+\frac{N}{2}} S_2(n) \quad \text{avec : } n=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1 \quad (4.50)$$

Sachant que nous avons la propriété suivante :

$$W_N^{n+\frac{N}{2}} = e^{-2j\pi\frac{n+\frac{N}{2}}{N}} = -e^{-2j\pi\frac{n}{N}} = -W_N^n \quad (4.51)$$

Nous avons donc :

$$S\left(n + \frac{N}{2}\right) = S_1(n) - W_N^n S_2(n) \quad \text{avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4.52)$$

En résumé, les échantillons $S(n)$ sont déterminés par la paire d'équations suivantes :

$$\begin{cases} S(n) = S_1(n) + W_N^n S_2(n) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ S\left(n + \frac{N}{2}\right) = S_1(n) - W_N^n S_2(n) & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{cases} \quad (4.53)$$

La figure 4.1 illustre le diagramme de fluence correspondant à la transformation (4.53). Cette structure de base est appelée une opération papillon. Les deux nœuds à droite appelés nœuds sources, et représentent les échantillons $S_1(n)$ et $S_2(n)$, et les deux nœuds à gauche, appelés nœuds puits sont sollicités par les nœuds sources à travers deux branches. Chaque branche est munie d'un coefficient multiplicatif (W_N^n , $-W_N^n$ et 1), l'absence du coefficient signifie que sa valeur est unitaire. Comme ce diagramme de fluence découle directement des relations (4.53), le calcul intervenant dans une opération papillon exige deux multiplications et deux additions complexes. Il faut remarquer aussi que le produit $W_N^n S_2(n)$ est calculé deux fois.

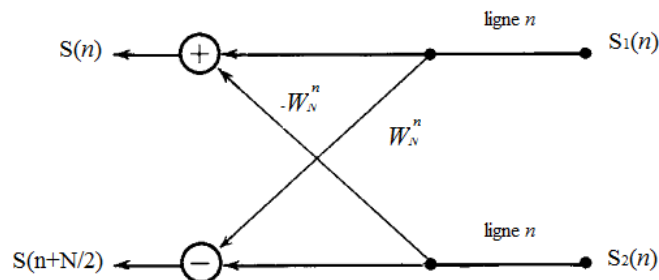


Figure 4.1. Diagramme de fluence correspondant à la transformation (4.53)

Ce diagramme de fluence peut être modifié et optimisé afin d'éviter d'effectuer la multiplication $W_N^n S_2(n)$ deux fois (figure 4.2). Cette nouvelle structure nécessite uniquement une multiplication complexe et deux additions complexes, réduisant ainsi le nombre de multiplications complexes de moitié.

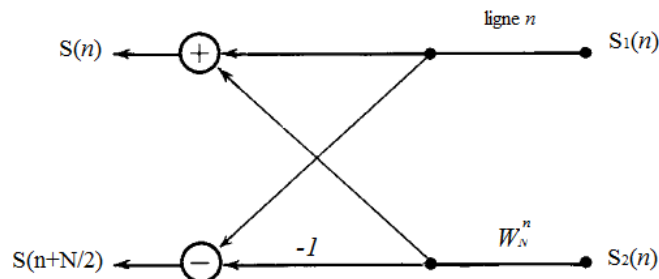


Figure 4.2. Diagramme de fluence optimisé pour effectuer à la transformation (4.53)

La paire d'équations (4.53) permettent de calculer la TFD de $[s(k)]_{0 \leq k < N}$ à partir des TFD des suites $[s_1(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{2}}$ et $[s_2(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{2}}$. Elle constitue la base de l'algorithme de calcul de la TFR en base double. En effet, si $\frac{N}{2}$ est aussi pair, le procédé de calcul peut être réitéré et nous pouvons ainsi décomposer chacune des suites $[s_1(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{2}}$ et $[s_2(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{2}}$ en deux autres suites de $\frac{N}{4}$ échantillons respectivement $[s_{11}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$, $[s_{12}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$ et $[s_{21}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$, $[s_{22}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$; et ainsi de suite tant que le nombre d'échantillons reste pair.

En effet, en faisant la décomposition sur la suite $[s_1(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{2}}$ en $[s_{11}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$ et $[s_{12}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$, nous avons :

$$S_1(n) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s_1(n) W_{\frac{N}{2}}^{nk} = \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m) W_{\frac{N}{2}}^{2mk} + W_{\frac{N}{2}}^{2mk} \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m+1) W_{\frac{N}{2}}^{2mk} \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4.54)$$

Sachant que :

$$W_{\frac{N}{2}}^{2m} = W_{\frac{N}{4}}^m \quad (4.55)$$

L'équation (4.54) s'écrit :

$$S_1(n) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m) W_{\frac{N}{4}}^{mk} + W_{\frac{N}{4}}^{mk} \sum_{m=0}^{\frac{N}{4}-1} s_1(2m+1) W_{\frac{N}{4}}^{mk} \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4.56)$$

En revenant à la variable n , nous avons :

$$S_1(n) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} s_{11}(n) W_{\frac{N}{4}}^{nk} + W_{\frac{N}{4}}^{nk} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} s_{12}(n) W_{\frac{N}{4}}^{nk}, \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4.57)$$

Avec :

$$W_{\frac{N}{2}}^n = W_N^{2n} \quad (4.58)$$

Nous avons donc :

$$S_1(n) = S_{11}(n) + W_N^{2n} S_{12}(n), \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (4.59)$$

Nous avons aussi, en analogie avec (4.50), (4.51) et (4.52) :

$$S_1\left(n + \frac{N}{4}\right) = S_{11}(n) - W_N^{2n} S_{12}(n), \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (4.60)$$

En récapitulation, les calculs intervenant dans la première opération papillon sont donnés par :

$$\begin{cases} S_1(n) = S_{11}(n) + W_N^{2n} S_{12}(n) \\ S_1(n + \frac{N}{4}) = S_{11}(n) - W_N^{2n} S_{12}(n) \end{cases} \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (4.61)$$

En faisant la même décomposition sur la suite $[s_2(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{2}}$ en $[s_{21}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$ et $[s_{22}(k)]_{0 \leq k < \frac{N}{4}}$, nous avons :

$$\begin{cases} S_2(n) = S_{21}(n) + W_N^{2n} S_{22}(n) \\ S_2(n + \frac{N}{4}) = S_{21}(n) - W_N^{2n} S_{22}(n) \end{cases} \text{ avec : } n = 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (4.62)$$

Si $N = 2^L$, nous pouvons répéter L fois le procédé de calcul de la TFD, jusqu'à où chaque suite d'échantillons contient un seul échantillon. Le diagramme de fluence de la troisième décomposition est illustré en figure 4.3 pour $N=8$.

Nous remarquons aussi dans ce traitement que les $S(n)$ apparaissent dans l'ordre naturel des indices alors que les $s(k)$ se présentent dans un ordre permuté. Cette permutation est due aux entrelacements successifs et se traduit par un retournement ou inversion de la représentation des indices. Si le rangement initial est codé en binaire naturel sur L bits, le rangement final est obtenu en inversant ce codage. Cette méthode est dite : méthode du bit inversé. Le tableau 4.1 illustre le cas où $N = 8$ [2,4,6].

$s(k)$ pour $L=1$	$s(k)$ pour $L=2$	$s(k)$ pour $L=3$	indices naturels en décimal	indices naturels en binaire	indices inversés en binaire	indices inversés en décimal
$s(0)$	$s(0)$	$s(0)$	0	000	000	0
$s(1)$	$s(2)$	$s(4)$	1	001	100	4
$s(2)$	$s(4)$	$s(2)$	2	010	010	2
$s(3)$	$s(6)$	$s(6)$	3	011	110	6
$s(4)$	$s(1)$	$s(1)$	4	100	001	1
$s(5)$	$s(5)$	$s(5)$	5	101	101	5
$s(6)$	$s(5)$	$s(3)$	6	110	011	3
$s(7)$	$s(7)$	$s(7)$	7	111	111	7

Tableau 4.1. Dédoublément temporel pour $N=8, L=3$

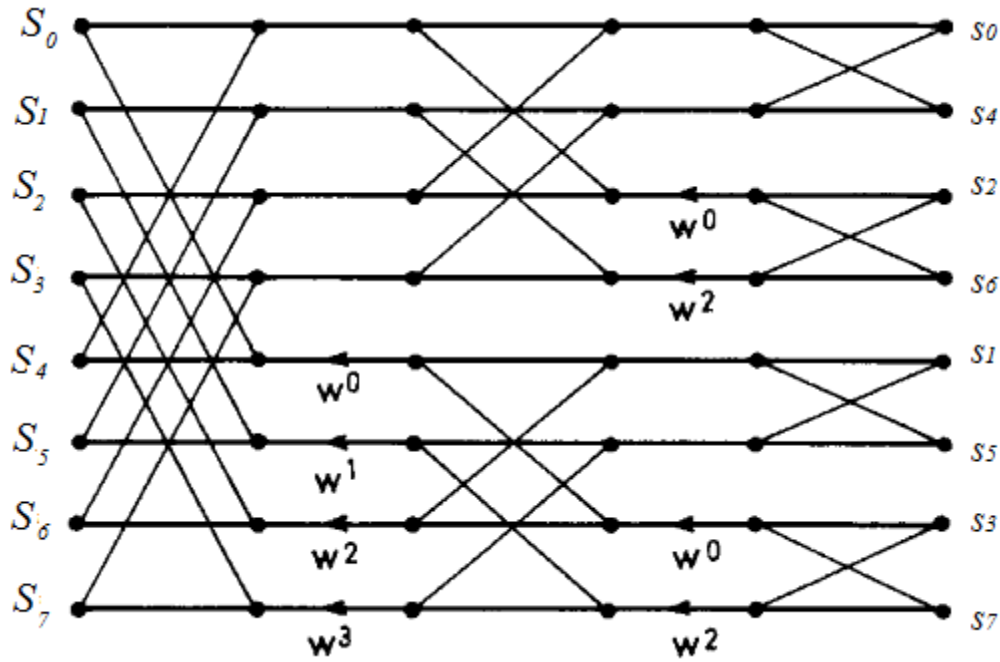


Figure 4.3. Diagramme de fluence de la troisième décomposition (L=3) de la FFT d'une suite de N=8 échantillons, avec entrelacement temporel.

4.5 Convolution linéaire – convolution circulaire

4.5.1 Convolution linéaire des séquences de longueur finie

La convolution linéaire dite aussi aperiodique s'applique aux signaux numériques à énergie finie. Dans ce qui suit, nous intéressons au cas particulier des séquences de longueur finie. Soient deux signaux $[u(n)]_{0 \leq n \leq N-1}$ et $[h(n)]_{0 \leq n \leq M-1}$ de tailles respectives N et M ; nous définissons leur convolution linéaire par la séquence $[y(n)]_{0 \leq n \leq N+M-2}$ de longueur $N + M - 1$, telle que son terme général $y(n)$ s'écrit:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n u(k)h(n-k) \tag{4.63}$$

Il est facile d'implémenter l'expression (4.63) sur machine ; cependant pour un calcul manuel à titre illustratif, il est préférable d'utiliser des techniques plus simples et pratiques, nous parlons de deux méthodes, à savoir : le ruban glissant et la somme de colonnes.

4.5.1.1 Méthode de ruban glissant

Considérons l'exemple de signaux: $[u(n)] = (1, 2, 2, 3)$ et $[h(n)] = (2, -1, 3)$, nous gardons la séquence $[u(n)]$ dans le sens direct, et nous déplaçons la version inversée de la deuxième séquence $[h(-n)] = (3, -1, 2)$ dans le même sens ; en suite, nous ne calculons que la somme des produits des échantillons du même indice et qui se chevauchent; nous avons donc le résultat: $[y(n)] = (2, 3, 5, 10, 3, 9)$. Le détail des combinaisons de calcul est cité au tableau 4.2, en gras nous illustrons les échantillons qui se chevauchent :

<i>indice</i>	-2	-1	0	1	2	3
<i>u(n)</i>			1	2	2	3
<i>h(-n)</i>	3	-1	2			
<i>produit des échantillons chevauchés</i>			2			
<i>la somme y(0)</i>			2			

<i>indice</i>	-2	-1	0	1	2	3
<i>u(n)</i>			1	2	2	3
<i>h(-n)</i>		3	-1	2		
<i>produit des échantillons chevauchés</i>			-1	4		
<i>la somme y(1)</i>			-1+4			

<i>indice</i>	-2	-1	0	1	2	3
<i>u(n)</i>			1	2	2	3
<i>h(-n)</i>			3	-1	2	
<i>produit des échantillons chevauchés</i>			3	-2	4	
<i>la somme y(2)</i>			3-2+4			

<i>indice</i>	-2	-1	0	1	2	3
<i>u(n)</i>			1	2	2	3
<i>h(-n)</i>				3	-1	2
<i>produit des échantillons chevauchés</i>				6	-2	6
<i>la somme y(3)</i>				6-2+6		

<i>indice</i>	-2	-1	0	1	2	3
<i>u(n)</i>	1	2	2	3		
<i>h(-n)</i>			3	-1	2	
<i>produit des échantillons chevauchés</i>			6	-3		
<i>la somme y(4)</i>			6-3			

<i>indice</i>	-2	-1	0	1	2	3
<i>u(n)</i>	1	2	2	3		
<i>h(-n)</i>				3	-1	2
<i>produit des échantillons chevauchés</i>				9		
<i>la somme y(5)</i>				9		

Tableau 4.2. Calcul manuel de la convolution linéaire par la méthode de ruban glissant.

4.5.1.1 Méthode de somme de colonnes

Elle ressemble à une multiplication à la main, sauf quelle est effectuée de gauche à droite, où les résultats de multiplications sont sommés pour chaque colonne, en considérant le même exemple cité ci-dessus, le calcul de convolution s’effectue en détail au tableau 4.3.

indice	0	1	2	3	4	5
u(n)	1	2	2	3		
h(n)	2	-1	3			
	2	4	4	6		
		-1	-2	-2	-3	
			3	6	6	9
Somme des colonnes	2	3	5	10	3	9

Tableau 4.3. Calcul manuel de la convolution linéaire par la méthode de somme des colonnes.

4.5.2 Convolution des séquences périodiques

Il est clair que la convolution linéaire de deux signaux périodiques $[u_p(n)]_{[N]}$ et $[h_p(n)]_{[N]}$ de la même période N n'existe pas, du fait que leurs énergie est infinie ; cependant leur puissance moyenne finie, nous permet de définir une convolution périodique $[y_p(n)]_{[N]}$ de la même période N , où son terme général $y_p(n)$ se calcul sur une période N tel que :

$$y_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} u_p(k)h_p(n-k) \tag{4.64}$$

Ainsi, nous écrivons pour la convolution périodique:

$$[y_p(n)]_{[N]} = [u_p(n)]_{[N]} \otimes [h_p(n)]_{[N]} \tag{4.65}$$

Son calcul sur une période N peut être simplifié par la procédure suivante :

1. Nous calculons la convolution linéaire des deux séquences $[u_p(n)]_{[N]}$ et $[h_p(n)]_{[N]}$ en les considérants comme des séquences de longueur finie N .
2. La réponse est de $(2N-1)$ échantillons ; alors, nous ajoutons un zéro à la fin de la séquence pour avoir $2N$ échantillons.
3. Nous coupons cette réponse en deux segments de N échantillons.
4. Nous calculons la somme des deux segments sur N échantillons.

Afin de mieux illustré le calcul de la convolution périodique, nous considérons l'exemple des signaux périodiques: $[u_p(n)]_{[N]} = (1,2,2,3)$ et $[h_p(n)]_{[N]} = (2,-1,3,0)$, nous avons le résultat $[y_p(n)]_{[N]} = (5,12,5,10)$ illustré en détail sur tableau 4.4 où la convolution linéaire est calculée par la méthode de la somme des colonnes :

<i>indice</i>	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_p(n)$	1	2	2	3	1	2	2	3
$h_p(n)$	2	-1	3	0	2	-1	3	0
	2	4	4	6				
		-1	-2	-2	-3			
			3	6	6	9		
			0	0	0	0		
réponse de la convolution linéaire	2	3	5	10	3	9	0	0
	3	9	0	0				
résultat de la convolution circulaire	5	12	5	10	5	12	5	10

Tableau 4.4. Calcul manuel de la convolution périodique sur 4 échantillons.

4.5.3 Convolution circulaire

Il est possible de calculer la convolution linéaire $[y(n)]_{0 \leq n \leq N+M-2}$ des deux signaux apériodiques $[u(n)]_{0 \leq n \leq N-1}$ et $[h(n)]_{0 \leq n \leq M-1}$ de longueurs finies respectivement N et M en servant de la convolution périodique, il suffit de considérer ces deux séquences comme périodiques sur $N_C > N + M - 1$ échantillons, en ajoutant des zéros au delà de leurs supports respectifs N et M . Nous avons donc les deux signaux périodiques $[u_p(n)]_{0 \leq n \leq N_C-1}$ et $[h_p(n)]_{0 \leq n \leq N_C-1}$ tels que :

$$u_p(n) = \begin{cases} u(n) & \text{pour } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{pour } N \leq n \leq N_C-1 \end{cases} \text{ et } h_p(n) = \begin{cases} h(n) & \text{pour } 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{pour } M \leq n \leq N_C-1 \end{cases} \quad (4.66)$$

Ainsi, la convolution linéaire $[y(n)]_{0 \leq n \leq N+M-2}$ coïncide avec la convolution périodique $[y_p(n)]_{[N_C]}$ sur ces $(N + M - 1)$ échantillons. Nous avons donc :

$$y(n) = \begin{cases} y_p(n) & \text{pour } 0 \leq n \leq N + M - 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.67)$$

Nous désignons par *convolution circulaire* la démarche permettant un calcul de la convolution linéaire des signaux apériodiques de longueur finie, en servant de la convolution périodique et la transformée de Fourier discrète (TFD). En effet, cette dernière transforme le produit de convolution périodique en produit direct. Il en découle que la convolution linéaire des deux séquences $[u(n)]_{0 \leq n \leq N-1}$ et $[h(n)]_{0 \leq n \leq M-1}$ peut être calculée par la transformée de Fourier discrète (TFD) en servant de l'algorithme de la transformée de Fourier Rapide (TFR) en anglais FFT : Fast Fourier Transform, telle que :

$$[u(n)]_{0 \leq n \leq N-1} * [h(n)]_{0 \leq n \leq M-1} = FFT^{-1} \left\{ FFT \left\{ [u_p(n)]_{[N_C]} \right\} . FFT \left\{ [h_p(n)]_{[N_C]} \right\} \right\} \quad (4.68)$$

L'intérêt de la convolution circulaire est l'accélération de calcul de la convolution linéaire lorsque $N + M - 1$ est considérable ; ainsi, le nombre de multiplication est de $\frac{\log_2(2N_c)}{1 - \frac{N + M - 2}{N_c}}$ au lieu de

$N + M - 1$. Bien que la convolution circulaire est valable pour des signaux apériodiques d'énergie finie ; généralement, les deux convolutions périodique et circulaire sont confondues, car les deux convolutions engendrent le même résultat de calcul sur une durée d'observation de $N + M - 1$ échantillons.

Chapitre 5: Filtrage numérique

5.1. Introduction

Les systèmes de traitement des signaux peuvent être classés de la même manière que les signaux. Ainsi, des systèmes opérants sur des signaux analogiques sont des systèmes continus ou analogiques et fournissent en sortie des signaux analogiques. Les systèmes agissant sur des signaux échantillonnés décrivent des systèmes échantillonnés et produisent des signaux échantillonnés. De la même façon, des systèmes numériques ou discrets opèrent sur des signaux numériques et délivrent en sortie des signaux numériques (discrets).

Les systèmes linéaires discrets invariants dans le temps (LIT) constituent un domaine très important du traitement numérique du signal, qui est celui des filtres numériques à coefficients fixes. Ces systèmes se caractérisent par le fait que leur fonctionnement est régi par une équation de convolution. L'analyse de leurs propriétés se fait à l'aide de la transformation en Z, qui joue pour les systèmes discrets le même rôle que la transformée de Laplace ou de Fourier pour les systèmes analogiques.

5.2 Définitions et propriétés

Un système *discret* ou *numérique* est un système dont toutes les grandeurs variables sont à double discrétisation à la fois en temps appelée échantillonnage et en amplitude appelée quantification ; et qui convertit une suite de données d'entrée $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$, appelée *signal d'excitation* en une suite de sortie $[v(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ appelée *réponse* du système. Dans ce cas précis, les échantillons $u(n)$ et $v(n)$ peuvent avoir des valeurs limitées et discrètes à cause de la discrétisation en amplitude (quantification).

Notons qu'un système échantillonné est un système où les grandeurs variables sont en temps discret ; cependant, les amplitudes sont analogiques et peuvent être associées à des valeurs d'une manière continue et infinie.

Au point de vue mathématiques, ces deux systèmes (discrets et/ou échantillonnés) sont étudiés par les mêmes outils mathématiques (transformée en Z). Ils sont souvent décrits par un opérateur mathématique (fonctionnel) appelé θ , qui agit sur un signal d'entrée $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ et le transforme en un signal de sortie $[v(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$. Formellement, il vient :

$$[v(n)] = \theta\{[u(n)]\} \quad (5.1)$$

Généralement, l'échantillonnage est suivi systématiquement par une quantification des amplitudes, et un codage ; donc dans ce qui suit, nous confondons entre les systèmes (et/ou signaux) échantillonnés et ceux discrets ou numériques.

Un système discret est dit *linéaire* si la propriété de superposition des effets de l'excitation sur la réponse du système soit valable.

Ainsi, si nous avons par le système discret θ :

$$[v_1(n)] = \theta\{[u_1(n)]\} \text{ et } [v_2(n)] = \theta\{[u_2(n)]\}$$

$$\text{alors : } \theta\{\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)\} = \alpha\theta\{[u_1(n)]\} + \beta\theta\{[u_2(n)]\} = \alpha[v_1(n)] + \beta[v_2(n)]$$

Avec : $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (des scalaires).

Un système discret est dit invariant dans le temps si la translation temporelle du signal d'excitation implique la même translation dans le temps de la réponse obtenue par ce système.

$$\text{Donc, si nous avons : } [v(n)] = \theta\{[u(n)]\} \text{ alors : } [v(n - n_0)] = \theta\{[u(n - n_0)]\}$$

Avec : $n_0 \in \mathbb{Z}$.

D'une manière générale, un filtre numérique est un système discret linéaire et invariant dans le temps, d'où la confusion entre les deux appellations filtre numérique et système discret LIT.

Soit $[\delta(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite de Dirac définie par l'équation :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Toute suite $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ peut se décomposer en une somme de suites de Dirac convenablement décalées, telle que :

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)\delta(n-m) \quad (5.3)$$

D'autres part, soit $[h(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ la réponse du système à une suite de Dirac $[\delta(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$.

En raison de l'invariance temporelle, à la suite de Dirac décalée $[\delta(n-m)]_{n \in \mathbb{Z}}$ correspond la réponse $[h(n-m)]_{n \in \mathbb{Z}}$.

D'après la linéarité, la relation d'entrée/sortie (5.1) peut être exprimée en fonction des termes généraux, telle que:

$$v(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)u(n-m) \quad (5.4)$$

(5.4) s'écrit sous la forme condensée :

$$[v(n)]_{n \in \mathbb{Z}} = [h(n)]_{n \in \mathbb{Z}} * [u(n)]_{n \in \mathbb{Z}} \quad (5.5)$$

C'est l'équation de convolution qui caractérise le système linéaire invariant dans le temps (LIT). Un tel système est donc complètement défini par la donnée de la suite $[h(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$, qui est appelée *réponse impulsionnelle* du système. Nous parlons ainsi, de *filtre numérique convolutif*.

Un système possède la propriété de causalité, appelé aussi système *causal* si la sortie à l'indice $n = n_0$ ne dépend que des entrées aux indices $n \leq n_0$.

Cette propriété implique que la réponse impulsionnelle soit causale ; c'est-à-dire que $h(n) = 0$ pour $n < 0$. Dans ce cas, la sortie $[v(n)]_{n \geq 0}$ est donnée par son terme général suivant :

$$v(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h(m)u(n-m) \quad \text{pour } n \geq 0 \quad (5.6)$$

Dans ce cas l'échantillon $v(n_0)$ peut être calculée en temps réel, puisqu'il dépend uniquement des valeurs d'indice inférieur à n_0 . Nous disons alors que le système LIT est *réalisable en temps réel*. Dans le cas contraire, où la réponse impulsionnelle n'est pas causale, nous disons que le système est en *temps différé* ou *système non causal*.

Un système LIT est *stable* si à toute entrée d'amplitude bornée correspond une sortie bornée. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité est donnée par l'inégalité :

$$\sum_n |h(n)| < \infty \quad (5.7)$$

Les caractéristiques des systèmes discrets LIT dans le plan complexe sont étudiées à l'aide de la transformation en Z.

5.3 La transformation en Z

5.3.1 Définition de la transformée en Z

La transformée en Z $U(z)$ de la suite numérique $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie par la relation suivante [3]:

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n)z^{-n} \quad (5.8)$$

Où : z est une variable complexe.

Nous écrivons, ainsi : $U(z) = Z\{[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}\}$, ou bien : $U(z) = TZ\{[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}\}$. Dans certaine littérature, nous écrivons sous-entendu que le signal analogique $u(t)$ est échantillonné et/ou numérisé : $U(z) = Z[u(t)]$.

Cette définition est fréquemment appelée transformée en Z bilatérale, par le fait que la sommation s'étend à tous les entiers n de $-\infty$ au $+\infty$. Dans le cas particulier des systèmes ou des signaux causaux, cette sommation ne s'étend plus par définition qu'aux entiers positifs :

$$U(z) = Z\{[u(n)]_{n \geq 0}\} = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n} \tag{5.9}$$

Nous parlons alors de la transformée en Z monolatérale ou unilatérale. Généralement, les deux transformées en Z possèdent les mêmes propriétés, sauf la propriété de l'avance.

L'intérêt de la transformée en Z monolatérale est de prendre en compte les conditions initiales d'un système LIT et de faire apparaître les régimes transitoires dans l'étude de la réponse d'un système. D'autre part, elle permet de déterminer à partir de $U(z)$, les valeurs extrêmes de la suite $[u(n)]$. La valeur initiale $u(0)$ et la valeur finale $u(\infty)$ (voir tableau 5.1).

5.3.2 Condition d'existence de la transformée en Z

La transformée en Z sous sa forme bilatérale ou monolatérale, introduit une série de Laurent, ce qui implique nécessairement une étude de la convergence de la dite série. L'ensemble des valeurs de z pour lesquelles la série converge, est appelé région ou domaine de convergence. Il est déterminé en utilisant le critère de Cauchy sur la convergence des séries de puissances. Il s'agit en général d'un anneau centré sur l'origine, de rayons R_1 et R_2 (Figure 5.1) dépendent de la suite $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$, tels que [3] :

$$R_1 < |z| < R_2 \tag{5.10}$$

Avec :

$$R_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u(n)|^{\frac{1}{n}} \text{ et } R_2 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |u(-n)|^{\frac{1}{n}}} \tag{5.11}$$

Démonstration

$U(z)$ peut être écrite sous la forme :

$$U(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n} = U_1(z) + U_2(z) \tag{5.12}$$

Avec :

$$U_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u(n)z^{-n} \text{ et } U_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)z^{-n} \tag{5.13}$$

En effectuant le changement de variable $k = -n$ dans $U_1(z)$:

$$U_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(-k)z^k = \sum_{n=0}^{+\infty} u(-n)z^n \quad (k \text{ et } n \text{ sont des variables muettes})$$

L'application du critère de Cauchy conduit à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u(-n)z^n|^{\frac{1}{n}} < 1 \text{ d'où : } |z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} |u(-n)|^{\frac{1}{n}}} = R_2$$

De même, l'application du critère de Cauchy à la série $U_2(z)$ conduit à :

$$|z| > \lim_{n \rightarrow +\infty} |u(n)|^{\frac{1}{n}} = R_1$$

En récapitulation, nous avons la condition de convergence de la série $U(z)$: $R_1 < |z| < R_2$

Remarque :

Dans le cas d'une transformée en Z monolatérale, la condition de convergence conduit à :

$$|z| > R_1 \text{ et la limite } R_2 \text{ s'étale à l'infini} \tag{5.14}$$

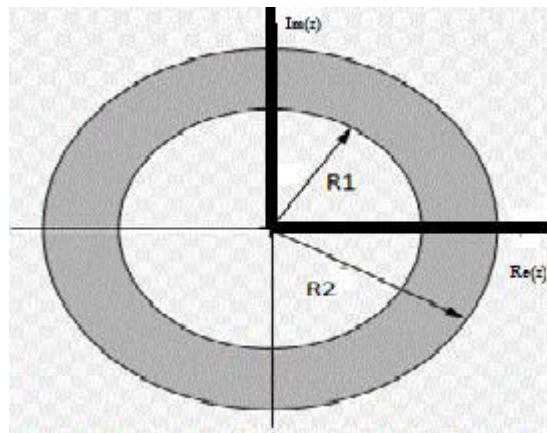


Figure 5.1. Anneau de convergence de la transformée en Z.

Exemple :

Soit le signal discret échelon unitaire (Heaviside) $[Y(n)]$, tel que : $Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Nous avons :

$$U(z) = Z\{[Y(n)]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N z^{-n} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - z^{-N-1}}{1 - z^{-1}} \right) \tag{5.15}$$

D'où :

$$U(z) = Z\{[Y(n)]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (5.16)$$

Avec la condition de convergence :

$$|z^{-1}| < 1 \text{ d'où : } |z| > 1 \quad (5.17)$$

5.3.3 Relation avec la transformée de Laplace

Nous avons vu qu'une suite discrète $[u(nT_e)]_{n \in \mathbb{Z}}$ peut être associée à une distribution appelée signal échantillonné associé $u_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)\delta(t-nT_e)$, avec T_e est la période d'échantillonnage.

La transformée de Laplace peut être appliquée au signal $u_e(t)$ de la variable continue t , nous avons :

$$L[u_e(t)] = L\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)\delta(t-nT_e)\right] \quad (5.18)$$

Les propriétés de linéarité et translation temporelle de la transformée de Laplace permettant d'écrire :

$$L[u_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)L[\delta(t-nT_e)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)e^{-nT_e p} \quad (5.19)$$

D'où :

$$L[u_e(t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)(e^{T_e p})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e)z^{-n} \quad (5.20)$$

D'après (5.20), nous avons :

$$z = e^{T_e p} \quad (5.21)$$

5.3.4 Calcul de la transformée en Z à partir de la transformée de Laplace

Soit un signal analogique $u(t)$, sa transformée de Laplace $L[u(t)] = F(p)$ et la suite $[u(nT_e)]$ obtenue par échantillonnage et/ou numérisation du signal analogique $u(t)$ avec la période d'échantillonnage T_e .

Nous avons le théorème de résidus permettant le calcul de la transformée en Z $U(z) = Z\{[u(nT_e)]\}$ à partir de la transformée de Laplace $F(p)$, tel que [2] :

$$U(z) = \sum_k \text{sur les poles } p_k \text{ de } F(\zeta) \left[\text{residus de } \frac{F(\zeta)}{1 - e^{T_e \zeta} z^{-1}} \right] \quad (5.22)$$

Nous distinguons les cas suivants :

1. Si $F(\zeta) = \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)}$ admet des pôles p_k (réel ou complexe) simples et distinctes :

(5.22) s'écrit sous la forme:

$$U(z) = \sum_{p_k} \frac{N(p_k)}{D'(p_k)} \frac{1}{1 - e^{T_e p_k} z^{-1}} \quad (5.23)$$

Avec : $D'(\zeta) = \frac{dD(\zeta)}{d\zeta}$ (la dérivée).

2. Si $F(\zeta) = \frac{N(\zeta)}{D(\zeta)}$ admet un pôle p_k (réel ou complexe) multiple d'ordre n , alors le résidu r_k peut être

calculé par :

$$r_k = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{(n-1)}}{d\zeta^{(n-1)}} \left[(\zeta - p_k)^n \frac{F(\zeta)}{1 - e^{T_e \zeta} z^{-1}} \right] \right\}_{\zeta=p_k} \quad (5.24)$$

Exemple 1:

Soit : $u(t) = e^{-at} Y(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

Nous avons : $F(p) = L[u(t)] = \frac{1}{p+a}$

$F(\zeta)$ admet un seul pôle simple $p = -a$, le résidu qui lui correspond :

$$r = \frac{N(p)}{D'(p)} = \frac{1}{1} = 1$$

Donc : $U(z) = \frac{1}{1 - e^{T_e(-a)} z^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$

Exemple 2:

$$\text{Soit : } F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

$$\text{Nous avons : } F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}, \text{ avec : } N(p) = 1 \text{ et } D(p) = (p+a)(p+b)$$

$$\text{D'où : } D'(p) = 2p + a + b$$

Nous avons donc :

$$U(z) = \frac{N(-a)}{D'(-a)} \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} + \frac{N(-b)}{D'(-b)} \frac{1}{1 - e^{-bT_e} z^{-1}}$$

D'où :

$$U(z) = \frac{1}{b-a} \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}} + \frac{1}{a-b} \frac{1}{1 - e^{-bT_e} z^{-1}}$$

Exemple 3:

$$\text{Soit le signal rompe } R(t) = tY(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous avons $F(p) = \frac{1}{p^2}$, elle admet un seul pôle double à l'origine. Son résidu peut être calculé par :

$$r = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{d\zeta} \left[\zeta^2 \frac{\zeta^{-2}}{1 - e^{T_e \zeta} z^{-1}} \right] \right\}_{\zeta=0} = \left[\frac{T_e e^{T_e \zeta} z^{-1}}{(1 - e^{T_e \zeta} z^{-1})^2} \right]_{\zeta=0} = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

Puisque nous avons un seul et unique pôle multiple, alors la transformée en Z $U(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$

5.3.5 Principales propriétés de la transformée en Z

La transformée en Z peut être calculée à partir de ses propriétés. Nous citons en premier lieu celles de la transformée en Z bilatérale :

Signal échantillonné ou discret	Transformée en Z bilatérale	désignation de la propriété
$s(t)$ $[s(nT_e)]$ $[s_1(nT_e)]$ $[s_2(nT_e)]$	$S_L(p) = L[s(t)],$ $S(z) = Z\{[s(nT_e)]\}$ $S_1(z) = Z\{[s_1(nT_e)]\}$ $S_2(z) = Z\{[s_2(nT_e)]\}$	
$\alpha[s_1(nT_e)] + \beta[s_2(nT_e)], \alpha, \beta \in \mathbb{C}$	$\alpha S_1(z) + \beta S_2(z)$	linéarité
$s(t - KT_e), K \in \mathbb{Z}$	$z^{-K} S(z)$	translation temporelle $K > 0$: retard $K < 0$: avance
$[e^{-anT_e} s(nT_e)], a \in \mathbb{C}$	$S(ze^{aT_e})$	translation complexe
$[a^n s(nT_e)], a \in \mathbb{C}^*$	$S\left(\frac{z}{a}\right)$	Similitude ou changement d'échelle (homothétie)
$[ns(nT_e)]$	$-z \cdot \frac{dS(z)}{dz}$	Multiplication par n
$\sum_{k=0}^n s(kT_e)$	$\frac{z}{z-1} S(z)$	sommation
$\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(kT_e) s_2(nT_e - kT_e) \right]$	$S_1(z) S_2(z)$	convolution
$\lim_{n \rightarrow 0} s(nT_e) = \lim_{z \rightarrow +\infty} S(z)$		Théorème de la valeur initiale
$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(nT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) S(z)$		Théorème de la valeur finale
$\Gamma_{s_1, s_2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(k) s_2(k-n),$ $Z\{[\Gamma_{s_1, s_2}(n)]\} = R_{s_1, s_2}(z)$ Et $\Gamma_{s_2, s_1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_2(k) s_1(k-n),$ $Z\{[\Gamma_{s_2, s_1}(n)]\} = R_{s_2, s_1}(z)$	$R_{s_1, s_2}(z) = R_{s_2, s_1}(z^{-1})$	Corrélation

Tableau 5.1. Principales propriétés de la transformée en Z

Ces mêmes propriétés sont valables pour la transformée en Z monolatérale, sauf la propriété de l'avance qui s'écrit :

$$Z\{[u(n+K)]\} = z^K U(z) - \sum_{k=0}^{K-1} u(k) z^{K-k}, \text{ avec : } K \in \mathbb{Z}^* \tag{5.25}$$

5.3.6 Transformée en Z de quelques signaux usuels

$s(t)$	$[s(nT_e)]$	$S_L(p)$	$S(z)$
$Y(t)$	$[Y(nT_e)]$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
$Y(t)e^{-at}$ et $a \in \mathbb{R}$	$[Y(nT_e)e^{-anT_e}]$ et $a \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1-e^{aT_e}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$Y(t)t$	$[T_e n Y(nT_e)]$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$Y(t)\cos(\omega_0 t)$	$[Y(nT_e)\cos(\omega_0 nT_e)]$	$\frac{p}{p^2+\omega_0^2}$	$\frac{(1-z^{-1}\cos\omega_0 T_e)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0 T_e+z^{-2}} = \frac{z(z-\cos\omega_0 T_e)}{z^2-2z\cos\omega_0 T_e+1}$
$Y(t)\sin(\omega_0 t)$	$[Y(nT_e)\sin(\omega_0 nT_e)]$	$\frac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2}$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0 T_e}{1-2z^{-1}\cos\omega_0 T_e+z^{-2}} = \frac{z\sin\omega_0 T_e}{z^2-2z\cos\omega_0 T_e+1}$

Tableau 5.2. Transformée en Z de quelques signaux usuels.

5.3.7 Transformée en Z inverse

La transformée en Z possède une transformée inverse, où à partir de $U(z)$, nous retrouvons $[u(nT_e)]$. Nous écrivons, ainsi : $[u(n)] = Z^{-1}[U(z)] = TZI[U(z)]$.

Soit Γ un contour fermé contenant tous les points singuliers, ou pôles de $U(z)$, ainsi que l'origine ; nous pouvons écrire d'après le théorème des résidus :

$$u(n) = \frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} z^{n-1} U(z) dz \tag{5.26}$$

Démonstration :

A partir de la définition de la transformée en Z, nous multiplions les deux membres par $\frac{z^{k-1}}{2j\pi}$, et nous intégrons le long d'un contour fermé Γ , entourant l'origine et contenu dans la région de convergence, nous avons :

$$\frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} U(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2j\pi} \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) z^{-n+k-1} dz \tag{5.27}$$

L'intégrale étant calculée dans une région de convergence, la série est convergence, ce qui permet d'invertir l'intégration et la sommation :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} U(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2j\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) \oint_{\Gamma} z^{-n+k-1} dz \quad (5.28)$$

Nous avons d'après le théorème de Cauchy sur l'intégration le long d'un contour fermé dans le plan complexe :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

Par conséquent, il vient :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} z^{-n+k-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases} \quad (5.30)$$

D'où l'équation (5.26): $u(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} U(z) z^{n-1} dz$

Généralement, le calcul de Z^{-1} s'effectue par plusieurs techniques, à savoir :

5.3.7.1 Calcul par développement en éléments simples

Nous décomposons $U(z)$ en éléments simples dont les transformées en Z inverse sont connues à l'avance, tout en servant de la propriété de linéarité de la transformée en Z et sa version inverse. Il existe plusieurs techniques de décomposition, à savoir :

1. Une première méthode consiste à écrire $U(z)$ en fonction de la variable complexe z^{-1} sous la forme :

$\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$, où $N(z^{-1})$ et $D(z^{-1})$ sont des polynômes en z^{-1} , généralement le degré M de $D(z^{-1})$ est supérieur à celui de $N(z^{-1})$.

Sans perte de généralité, nous supposons que $D(z^{-1})$ admet $(M - q)$ pôles simples p_n et un pôle multiple d'ordre q . Nous avons donc :

$$U(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{M-q} \frac{A_n}{z^{-1} - p_n} + \sum_{m=1}^q \frac{B_m}{(z^{-1} - p_k)^m} \quad (5.31)$$

Le calcul de A_n et B_m peut être effectué par le théorème des résidus, nous avons donc :

$$A_n = (z^{-1} - p_n) \left. \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \right|_{z^{-1}=p_n} \quad (5.32)$$

$$B_m = \frac{1}{(q-m)!} \frac{d^{(q-m)}}{d(z^{-1})^{(q-m)}} \left[(z^{-1} - p_k)^q \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \right] \Bigg|_{z^{-1}=p_k} \quad (5.33)$$

2. Une deuxième méthode consiste à développer d'abord la fonction $\frac{U(z)}{z} = \frac{N(z)}{D(z)}$ en fractions élémentaires en fonction de la variable complexe z . Si $D(z)$ admet $(M - q)$ pôles simples p_n et un pole multiple d'ordre q , nous avons :

$$\frac{U(z)}{z} = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{M-q} \frac{A_n}{z - p_n} + \sum_{m=1}^q \frac{B_m}{(z - p_k)^m} \quad (5.34)$$

Avec :

$$A_n = (z - p_n) \frac{N(z)}{D(z)} \Bigg|_{z^{-1}=p_n} \quad (5.35)$$

$$B_m = \frac{1}{(q-m)!} \frac{d^{(q-m)}}{dz^{(q-m)}} \left[(z - p_k)^q \frac{N(z)}{D(z)} \right] \Bigg|_{z^{-1}=p_k} \quad (5.36)$$

Enfin la décomposition de $U(z)$ s'écrit sous la forme :

$$U(z) = \frac{zN(z)}{D(z)} = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{M-q} A_n \frac{z}{z - p_n} + \sum_{m=1}^q B_m \frac{z}{(z - p_k)^m} \quad (5.37)$$

Après décomposition avec les deux méthodes ci-dessus, le calcul des transformée en Z inverse est immédiat, il suffit de consulter la table des fonctions usuelles en servant des propriétés de la transformée en Z et sa version inverse.

5.3.7.2 Calcul par division suivant les puissances croissantes de z^{-1}

Si $U(z)$ s'écrit sous la forme $\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$ en fonction de la variable complexe z^{-1} . Le

développement en série selon les puissances croissantes de z^{-1} en équation (5.6) $\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT_e) z^{-n} \right]$ peut être obtenu par division en puissances croissantes des deux polynômes $N(z^{-1})$ sur $D(z^{-1})$. Ainsi, la valeur de $u(nT_e)$ est obtenue immédiatement selon la définition de la transformée en Z.

5.3.7.3 Calcul par intégration directe par les résidus

Nous appliquons le théorème des résidus tel que :

$$u(nT_e) = \sum \text{residus de } U(z)z^{n-1} \text{ sur un contour fermé } \Gamma \quad (5.38)$$

Le calcul des résidus dépend de la nature des pôles simple ou multiple d'ordre q . Nous avons pour le cas d'un pôle simple p_n :

$$\text{residu}(p_n) = \lim_{z \rightarrow p_n} \left[U(z)z^{n-1}(z-p_n) \right] \quad (5.39)$$

Pour le cas d'un pôle p_k multiple d'ordre q :

$$\text{residu}(p_n) = \lim_{z \rightarrow p_n} \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{(q-1)} \left[U(z)z^{n-1}(z-p_k)^q \right]}{dz^{(q-1)}} \quad (5.40)$$

5.4 Les systèmes numériques LIT définis par fonction de transfert et réponse fréquentielle

Soit $U(z)$, $V(z)$ et $H(z)$ les transformées en Z des suites d'entrée $[u(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$, de sortie $[v(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ et de la réponse impulsionnelle $[h(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ respectivement.

En calculant la transformée en Z des deux membres de l'équation de convolution (5.6), il vient :

$$V(z) = U(z) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)z^{-m} = H(z)U(z) \quad (5.41)$$

Par suite, la transformée en Z d'un produit de convolution est le produit des transformées. La fonction $H(z)$ de la variable complexe z est appelée *fonction de transfert* ou *transmittance en z* du système LIT considéré.

Si la suite $[h(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ représente des échantillons prélevés avec une période d'échantillonnage T_e , la transformée de Fourier de cette suite s'écrit :

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-2j\pi fnT_e} \quad (5.42)$$

Ainsi, pour $z = e^{2j\pi fT_e}$ la transformée en Z de la suite $[h(n)]_{n \in \mathbb{Z}}$ coïncide avec sa transformée de Fourier. C'est-à-dire que l'analyse d'un système discret peut se faire avec la transformée en Z , et pour connaître la réponse en fréquence, il suffit de remplacer z par $e^{2j\pi fT_e}$. En raison de la périodicité des réponses fréquentielles des systèmes discrets LIT, il suffit de les étudier sur la plage des fréquences $\left[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e} \right]$.

La réponse fréquentielle sera notée par l'équation suivante :

$$H(f) = A(f)e^{j\varphi(f)} \quad (5.43)$$

Où $A(f)$ est la fonction d'amplitude et $\varphi(f)$ est la phase. Dans certain cas, il est préférable de parler du temps de propagation de groupe $\tau_g(f)$ au lieu de la phase $\varphi(f)$, tel que :

$$\tau_g(f) = -\frac{d\varphi(f)}{2\pi df} \quad (5.44)$$

La réponse fréquentielle peut être exprimée en pulsations normalisées (en radian) $\omega = 2\pi fT_e$, nous avons :

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\omega n} \text{ avec } -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (5.45)$$

Les équations (5.43) et (5.44) peuvent être exprimées respectivement en fonction de la pulsation normalisée ω , nous avons :

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (5.46)$$

$$\tau_g(\omega) = -T_e \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (5.47)$$

Puisque le calcul de la transformé de Fourier se fait sur des machines numériques en utilisant la transformée de Fourier discrète (TFD), la formule (5.47) doit être discrétisée en approximant la dérivée continue. En pratique, il existe une autre formule plus courante pour calculer le temps de propagation de groupe en servant de la réponse impulsionnelle $[h(n)]$ et l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform), qui calcul la transformée de Fourier discrète, telle que :

$$\tau_g(\omega) = \text{Re} \left[\frac{\text{FFT} \{ [nh(n)] \}}{\text{FFT} \{ [h(n)] \}} \right] \quad (5.48)$$

Nous décrivons dans ce qui suit, les différentes représentations des systèmes LIT : l'équation aux différences et représentation par les vecteurs d'états.

5.5 Les systèmes LIT définis par une équation aux différences

5.5.1 Définitions

Les systèmes LIT les plus intéressants sont ceux où les deux suites d'entrée $[u(n)]$ et de sortie $[v(n)]$ sont liées par une équation aux différences linéaire à coefficients réel et constants. Il s'agit des filtres numériques causaux à coefficients fixes. En effet, d'une part ils correspondent à des réalisations simples, et d'autre part ils constituent une excellente modélisation de nombreux systèmes naturels.

Soit un système LIT d'ordre M défini par la relation suivante :

$$v(n) = \sum_{i=0}^L a_i u(n-i) - \sum_{k=1}^M b_k v(n-k) \quad (5.49)$$

Les a_i et b_k sont les coefficients du système, certains coefficients peuvent être nuls ; l'ordre M du système est égal au nombre de conditions initiales nécessaire pour calculer $v(n)$. Cette équation aux différences exprime en général chaque échantillon de sortie $v(n)$ en une combinaison linéaire des échantillons présents et passés du signal d'entrée $[u(n)]$, ainsi que des échantillons passés du signal de sortie. La réponse impulsionnelle est de durée infinie, d'où l'appellation Réponse Impulsionnelle Infinie (RII). Nous parlons aussi de filtre Auto Régressif à Moyenne Ajustée (ARMA) [6].

En appliquant la transformée en Z aux deux membres de l'équation (5.49), et en désignant respectivement par $V(z)$ et $U(z)$ les transformée en Z des suites $[v(n)]$ et $[u(n)]$, nous obtenons :

$$V(z) = \sum_{i=0}^L a_i z^{-i} U(z) - \sum_{k=1}^M b_k z^{-k} V(z) \quad (5.50)$$

Soit :

$$V(z) = H(z)U(z) \quad (5.51)$$

Avec :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-L}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}} \quad (5.52)$$

La fonction de transfert $H(z)$ du système est une fraction rationnelle à coefficients réels. Nous observons que les fonctions $A(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ (5.46) sont respectivement paire et impaire. Dans ce cas précis, la réponse fréquentielle peut être étudiée uniquement sur l'intervalle des pulsations normalisées $[0, \pi]$ ou bien $\left[0, \frac{1}{2T_e}\right]$ sur l'intervalle des fréquences en Hz.

Lorsque le numérateur de cette fonction de transfert (5.52) est constant, le système discret LIT du type RII est appelé filtre numérique Auto Régressif (AR).

Un cas particulier est intéressant lorsque tous les coefficients b_k de l'équation aux différences (5.49) sont nuls, nous avons simplement :

$$v(n) = \sum_{i=0}^L a_i u(n-i) \quad (5.53)$$

Et

$$H(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-L} \quad (5.54)$$

La fonction de transfert $H(z)$ ainsi obtenue est un polynôme en z^{-1} , et la réponse impulsionnelle est de durée finie L. Un système LIT dont la fonction de transfert est de la forme (5.54) est appelé filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF). Nous parlons aussi de filtre à Moyenne Ajustée (MA).

5.5.2 Formulations en fonction de cellules élémentaires du 1^e et 2^e ordre

Un cas intéressant où la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit sous forme d'un quotient de deux polynômes $N(z)$ et $D(z)$ de même degré N, avec comme racines Z_k (zéros) et P_k (pôles) ($1 \leq k \leq N$) respectivement. En mettant en évidence ces racines, une autre expression de $H(z)$ apparaît :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = a_0 \frac{\prod_{k=1}^N (1 - Z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - P_k z^{-1})} \tag{5.55}$$

Où a_0 est un facteur d'échelle ; nous pouvons écrire :

$$H(z) = a_0 \frac{\prod_{k=1}^N (z - Z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - P_k)} \tag{5.56}$$

La position des zéros Z_k et des pôles P_k permet d'analyser la stabilité du système LIT. Elle est assurée lorsque les pôles P_k en z ont un module inférieur à l'unité ; d'où :

$$|P_k| < 1, \forall k \text{ et } (1 \leq k \leq N) \tag{5.57}$$

La fonction de transfert $H(z)$ (5.55) du filtre RII de type ARMA peut être exprimée à partir de cellules élémentaires du 1^e et 2^e ordre, tel que :

$$H(z) = a_0 \prod_{k=1}^Q \frac{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}} = a_0 \prod_{k=1}^Q H_k(z) \tag{5.58}$$

Avec :

$$H_k(z) = \frac{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}} \tag{5.59}$$

Où : $Q = \frac{N}{2}$ si N est pair ; $Q = \frac{N}{2} + 1$ si N est impair.

Si $a_{ik}, b_{ik} \neq 0$ ($i=1,2$), $H_k(z)$ représente une cellule élémentaire elliptique de 2^e ordre (biquadratique), regroupant les zéros et les pôles en paires complexes conjuguées, tel que :

$$H_k(z) = \frac{(1 - Z_k z^{-1})(1 - \bar{Z}_k z^{-1})}{(1 - P_k z^{-1})(1 - \bar{P}_k z^{-1})} = \frac{1 - 2\operatorname{Re}(Z_k)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\operatorname{Re}(P_k)z^{-1} + |P_k|^2 z^{-2}} \quad (5.60)$$

Avec :

$$P_k = -\frac{b_{1k}}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{4b_{2k} - b_{1k}^2}, \quad Z_k = -\frac{a_{1k}}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{4a_{2k} - a_{1k}^2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 4b_{2k} - b_{1k}^2 > 0 \\ 4a_{2k} - a_{1k}^2 > 0 \end{cases} \quad (5.61)$$

Le filtrage fréquentielle conduit à des cellules biquadratiques avec des zeros situés sur le cercle unitaire, d'où la condition : $|Z_k|^2 = 1$, ce qui aboutira à : $a_{2k} = 1$.

Si $a_{1k}, a_{2k}, b_{2k} = 0$, $H_k(z)$ représente une cellule élémentaire de 1e ordre, avec un zéro et un pole réels, tel que :

$$H_k(z) = \frac{1}{1 + b_{1k}z^{-1}} = \frac{z}{z + b_{1k}} \quad (5.62)$$

$$Z_k = 0 \quad \text{et} \quad P_k = -b_{1k} \quad (5.63)$$

L'expression (5.58) permet la réalisation des filtres RII avec des structures les plus immunisées aux bruits de quantifications et à l'arithmétique en virgule fixe (plus de détails voir chapitre 7).

Ainsi, Le carré du module de la réponse fréquentielle $H(\omega)$ est égale au produit des carrés du module des fonctions élémentaires $H_k(\omega)$; le temps de propagation de groupe $\tau_g(\omega)$ est la somme de contributions des cellules élémentaires $\tau_{g_k}(\omega)$.

$$|H(\omega)|^2 = a_0 \prod_{k=1}^Q |H_k(\omega)|^2 \quad (5.64)$$

Et :

$$\tau_g(\omega) = \sum_{k=1}^Q \tau_{g_k}(\omega) \quad (5.65)$$

5.5.3 Interprétation graphique de la fonction de transfert et réponse fréquentielle

Dans le plan complexe, z est l'affixe d'un point courant M , P_k et Z_k ($1 \leq k \leq N$) sont les affixes des pôles et des zéros de la fonction de transfert $H(z)$. Nous pouvons écrire :

$$z - Z_k = MZ_k e^{j\theta_k} \quad \text{et} \quad z - P_k = MP_k e^{j\phi_k} \quad (5.66)$$

Ainsi, la fonction de transfert $H(z)$ s'exprime aussi par :

$$H(z) = a_0 \prod_{k=1}^N \frac{MZ_k}{MP_k} e^{j \sum_{k=1}^N (\theta_k - \varphi_k)} \tag{5.67}$$

Il en résulte une interprétation graphique dans le plan complexe. La réponse en fréquence du système est obtenue quand le point courant M parcourt le cercle unité (Figure 5.2). Le module de la réponse en fréquence est ainsi égal au quotient du produit des distances du point courant M aux zéros Z_k par le produit des distances de M aux pôles P_k . La phase est égale à la différence entre la somme des angles que font les vecteurs $\vec{P_k M}$ avec l'axe réel et la somme des angles que font les vecteurs $\vec{Z_k M}$ avec l'axe réel. La position des zéros Z_k et des pôles P_k permet d'analyser la stabilité du système LIT. Elle est assurée lorsque les pôles en $z P_k$ ont un module inférieur à l'unité. C'est-à-dire :

$$|P_k| < 1, \forall k \text{ et } (1 \leq k \leq N) \tag{5.68}$$

Cette interprétation graphique offre une visualisation très simple de la forme de la réponse fréquentielle du filtre numérique. En effet, l'analyse d'un système par sa réponse en fréquence correspond à un fonctionnement au régime permanent ; elle est suffisante dans la mesure où les phénomènes transitoires peuvent être négligés. Si ce n'est pas le cas, il faut introduire les conditions initiales, traduisant par exemple l'état de contenu de ses mémoires à la mise en sous tension.

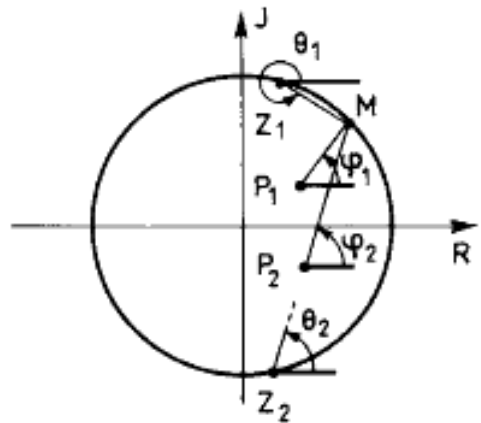


Figure 5.2. Interprétation graphique de la réponse fréquentielle.

Soit à étudier pour les valeurs de l'indice $n \geq 0$, le comportement du système défini par l'équation aux différences (5.49), auquel est appliquée la suite causale $[u(n)]$, nulle pour $n < 0$. La réponse temporelle $[v(n)]$ est complètement déterminée si les valeurs $v(-k)$ avec $(1 \leq k \leq N)$ sont parfaitement connues. Ces dernières correspondent aux conditions initiales, et pour les introduire, il faut faire appel à la transformation en Z monolatérale (équation 5.9).

En tenant compte l'équation aux différences (5.49), nous aurons :

$$V(z) = H(z)U(z) - \frac{\sum_{k=1}^N b_k \sum_{i=1}^k v(-i)z^{-(k-i)}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} \quad (5.69)$$

La réponse du système à l'indice n , est obtenue par transformation en Z inverse. Les valeurs $v(-k)$ représentent l'état du système à la mise en fonctionnement.

Une étude approfondie des filtres numériques à coefficients fixes RIF et RII va être exposée dans les deux chapitres 6 et 7, où un intérêt particulier portera sur les méthodes de calcul de la fonction de transfert, désigné souvent par le problème d'approximation. La résolution de ce problème ne préjuge en rien de la façon dont le filtre sera réalisé et de l'arithmétique qui sera utilisée. La fonction de transfert est obtenue avec une précision en principe infinie, nettement supérieure à celle qui sera nécessaire lors de la réalisation du filtre. Dans le paragraphe §-5.6, nous présentons en détails les structures de réalisation des filtres numériques.

5.6 Structures de réalisation des filtres numériques

Une fois la synthèse du filtre numérique a été effectuée, en calculant ses coefficients, il faut choisir une structure de réalisation, c'est-à-dire l'organisation des calculs, qui a en effet une grande importance. Nous pouvons distinguer selon la mise en œuvre, les filtres numériques récursifs (RII) et non récursifs (RIF), qui conduisent à des difficultés de natures différentes. En ce qui concerne les filtres non récursifs l'effort principal porte sur la réduction du temps de calcul. Pour les filtres récursifs le problème est de minimiser la propagation des erreurs.

Dans le cas où nous opérons en précision infinie, c'est-à-dire le cas où il n'y a pas d'erreur de quantification, toutes les structures donneront le même résultat. En revanche, les erreurs de quantification et le codage des différents paramètres sur des processeurs opérant en virgule fixe, par exemple, feront que les différentes structures n'aboutiront pas au même résultat de filtrage. Ainsi, un filtre RII supposé être stable peu conduire lors de son implémentation à des filtres instables si nous n'avons pas choisi une structure de réalisation appropriée. Cela provient du fait que les structures n'ont pas la même sensibilité aux erreurs de quantification, de troncature et d'arrondi [6,7].

5.6.1 Notion de base

Les composants élémentaires des filtres numériques sont l'additionneur, le multiplieur par une constante et l'élément à délai ou élément à mémoire. Leur représentation symbolique est donnée à la figure 5.3. La réalisation physique de ces composants dépend du mode de représentation des signaux. Elle peut être implémentée par logique câblée, plus facilement en logique programmée sur architectures autour d'un processeur tels que les DSP, FPGA ou ASIC. Une interconnexion quelconque de ces composants définit une structure de filtre numérique, qui est en effet un graphe de fluence. A une structure donnée doit correspondre un programme de calcul qui effectue dans un certain ordre toutes les opérations quelle implique et cela pendant chaque période d'échantillonnage.

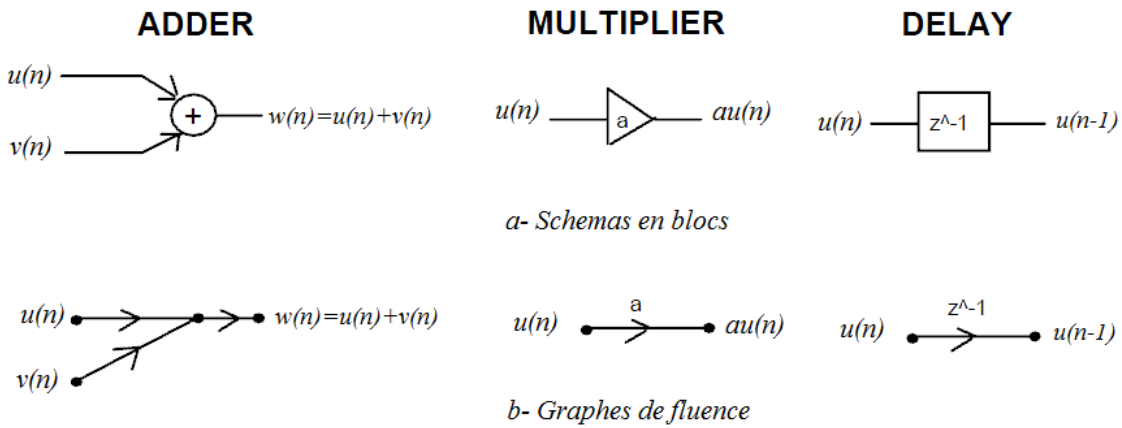


Figure 5.3. *Eléments de base pour la réalisation d'un filtre numérique.*

5.6.1.1 Structure calculable

Une structure est dite *calculable*, si et seulement si le graphe de fluence associé à cette structure ne contient aucune boucle exempte de délai. En effet, une variable associée à un nœud appartenant à une boucle sans délai serait fonction de sa valeur présente, ce qui rend impossible un programme de calcul. Cette contrainte est typique des systèmes à temps discret.

5.6.1.2 Structure canonique

Une structure est dite *canonique* lorsqu'elle comporte le nombre de composants strictement nécessaire ; il peut arriver quelle soit canonique en operateurs arithmétiques mais pas en éléments de mémoire (de délai).

5.6.1.3 Transposition d'une structure

La transposition d'une structure est une opération qui engendre une structure différente, mais qui laisse invariante la fonction de transfert entre deux nœuds donnés. Nous pouvons observer qu'une structure contient deux sortes de nœuds : les nœuds de sommation et les nœuds de dispersion. La transposition consiste à :

1. remplacer chaque nœud de sommation par un nœud de dispersion et réciproquement.
2. changer l'orientation de chaque branche.
3. permuter entrée et sortie.

La figure 5.4 présente une réalisation d'une cellule biquadratique RII en structure dite directe canonique, nommée aussi structure 1D, ou encore D-N car les opérations sur le dénominateur de la transmittance en Z sont effectuées d'abord. Sa structure transposée est illustrée en figure 5.5, désignée aussi structure 2D, ou encore N-D pour la même raison citée en structure D-N. Nous avons plus de détails sur ces structures de réalisations des filtres RII en paragraphe §- 5.6.2.

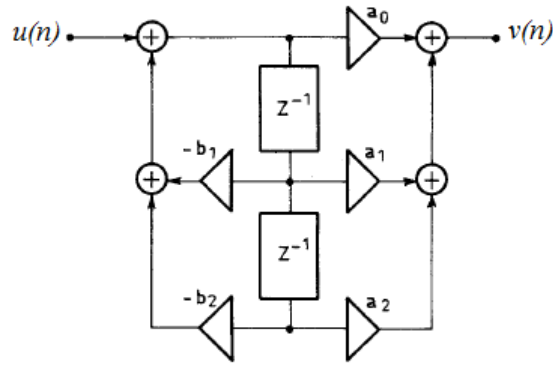


Figure 5.4. Structure de réalisation directe canonique (1D ou D-N).

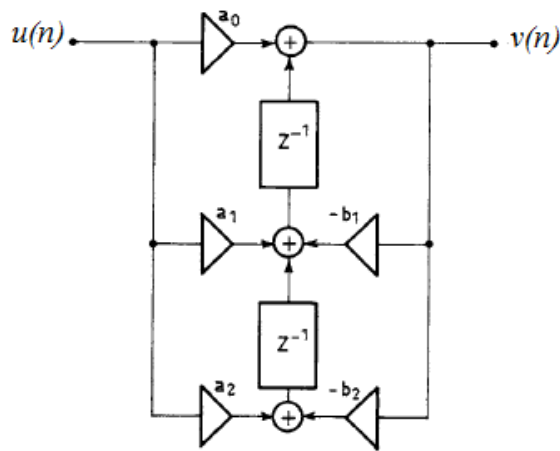


Figure 5.5. Structure de réalisation directe transposée (2D ou N-D).

5.6.2 Structures de réalisation pour les filtres RII

5.6.2.1 Structures immédiates et structures directes

Ces structures correspondent à une réalisation globale de la transmittance en Z. La configuration immédiate, nommée aussi structure 3D ou structure directe I (figure 5.6) est obéit à l'équation de récurrence (5.49) : $v(n) = \sum_{l=0}^L a_l u(n-l) - \sum_{k=1}^K b_k v(n-k)$. Cette structure exige $(K + L + 1)$ multiplieurs, $(K + L)$ additionneurs et $(K + L)$ éléments à délais. La configuration directe canonique (1D), désignée aussi par structure directe II, n'exige que le $Max(K, L)$ éléments à délais (figure 5.7). Lorsque $K = 0$ (le cas de filtres RIF), les deux structures directe canonique (1D) et immédiate (3D) sont identiques.

La structure immédiate est canonique en multiplieurs et en additionneurs, mais pas en éléments de mémoire. Les deux structures directe 1D et sa transposée (2D) (figures 5.7 et 5.8) sont complètement canoniques.

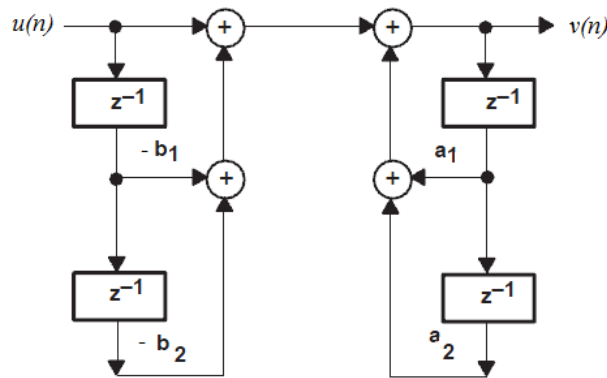


Figure 5.6. Structure de réalisation immédiate (3D).

La réalisation physique de ces structures pose un problème de sensibilité des caractéristiques aux erreurs de quantifications des coefficients, et ne peuvent pas utilisées lorsque le degré du filtre est supérieur à 2. Ainsi, nous serons amenés à abandonner les configurations directes et immédiates. Nous préférons d'utiliser des structures constituées par des connexions en cascade ou en parallèle de cellules du second degré. Nous spéculons sur le fait qu'une fonction rationnelle de degré élevé est mieux représentée par ses pôles et par ses zéros plutôt que par ses coefficients. Nous abordons ces structures au paragraphe suivant.

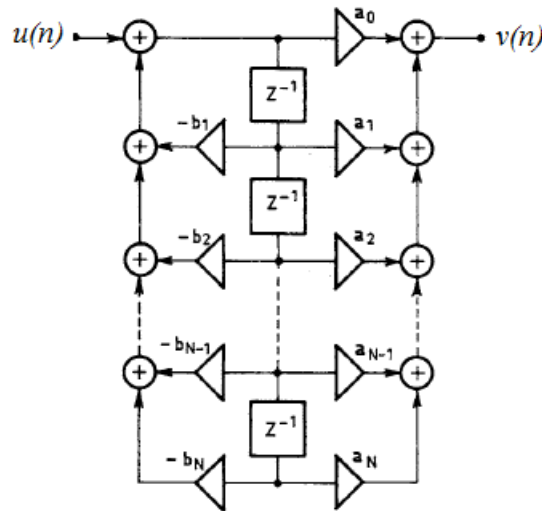


Figure 5.7. Structure directe canonique (1D dite aussi D-N) pour un filtre RII général d'ordre N.

5.6.2.2 Structure en cascade et structure parallèle

Nous avons vu que les pôles et les zéros d'une fonction de transfert $H(z)$ sont réels ou apparaissent en paires complexes conjuguées ; donc cette transmittance peut être écrite sous forme factorisée de cellules biquadratiques (5.58) : $H(z) = a_0 \prod_{k=1}^L \frac{1 + a_1^k z^{-1} + a_2^k z^{-2}}{1 + b_1^k z^{-1} + b_2^k z^{-2}}$. Pour ces cellules, nous

pouvons adopter une des structures (1D, 2D ou 3D) ; elles présentent la même sensibilité, mais leurs performances de bruits sont en général différentes. La figure 5.9 illustre le cas d'une structure en cascade

de cellules du second ordre ; il faut aussi éviter toute possibilité de dépassement : des coefficients d'échelle doivent être insérés judicieusement.

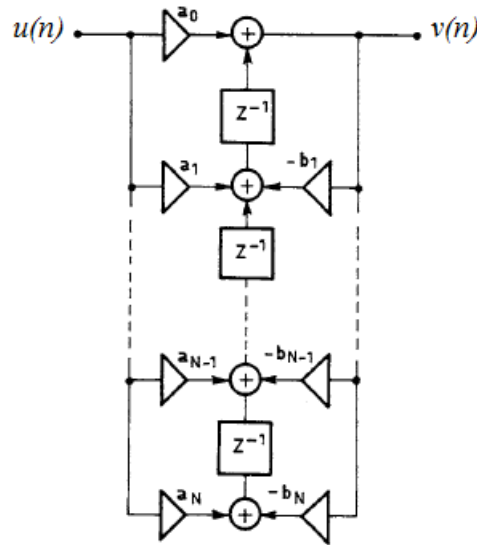


Figure 5.8. Structure directe transposée (2D dite aussi N-D) pour un filtre RII général d'ordre N.

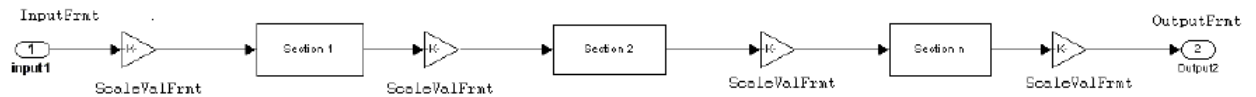


Figure 5.9. Structure de réalisation en cascade de filtre RII.

La forme développée en somme de fractions simples conduit à une configuration en parallèle (figure 5.10), à savoir :

$$H(z) = a + \sum_{k=1}^L \frac{c_0^k + c_1^k z^{-1}}{1 + b_1^k z^{-1} + b_2^k z^{-2}} = a + \sum_{k=1}^L H_k(z) \quad (5.70)$$

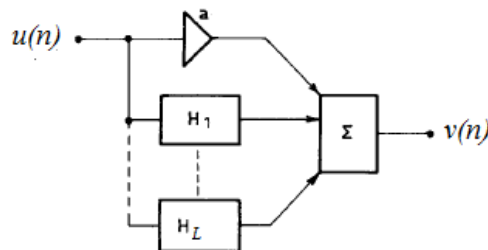


Figure 5.10. Structure de réalisation en parallèle de filtre RII.

Cette structure n'est jamais utilisée pour un filtre quelque peu sélectif. La structure en parallèle exige un nombre de bits beaucoup plus élevé que la structure en cascade pour satisfaire les mêmes exigences en performances. Dans la pratique, nous optons pour la structure de réalisation en cascade.

5.6.3 Considérations pratiques lors de l'implémentation des filtres RII

5.6.3.1 Contraintes liées au caractère fini d'une arithmétique à point fixe

En fonctionnement normal où les signaux aléatoires ont de grande amplitude, les erreurs de calcul constituent des sources de bruit interne. Pour une transmittance (fonction de transfert) donnée, le choix de la structure peut influencer très fort les performances de bruit à la sortie.

Il faut aussi éviter toute possibilité de dépassement : des coefficients d'échelle doivent être insérés judicieusement.

Pour une entrée nulle, il peut se produire des cycles limites : certaines structures en sont exemptes sous certaines conditions.

Il faut en outre se préoccuper des effets liés à la quantification des coefficients : c'est le problème de la sensibilité, nous considérons essentiellement la distorsion de l'affaiblissement du filtre. Plus rarement celle de la phase.

5.6.3.2 Contraintes liées au caractère fini d'une arithmétique en virgule flottante

Toutes les considérations développées dans le paragraphe ci-dessus sont valables pour une réalisation en virgule flottante, sauf une seule, étant donné la très grande dynamique de ce mode de représentation avec les formats courants, le danger de dépassement est souvent négligeable. Aucun coefficient d'échelle ne doit être inséré, en fait la mise à l'échelle s'opère d'une façon automatique dans l'unité arithmétique.

5.6.4 Structures de réalisations des filtres RIF

La mise en œuvre des filtres RIF est assurée par la structure directe (1D) (figure 5.11.a) ou sa structure transposée (2D) (figure 5.11.b). Ces deux structures exigent pour un filtre RIF d'ordre N : N multiplications et $N-1$ additions et N éléments de mémoires.

Il est clair que la réalisation d'un filtre RIF ne présente pas de problème important lié à la sensibilité, quel que soit son degré, de plus que les cycles limites sont absents. Un filtre RIF à phase linéaire peut être implémenté par une structure de la figure 5.12, ce qui permet une économie de multiplieurs ; cependant, il aura un doublement de nœuds de sommation, ceci rend la structure peu intéressante pour une architecture autour de processeurs où une addition est autant plus coûteuse qu'une multiplication.

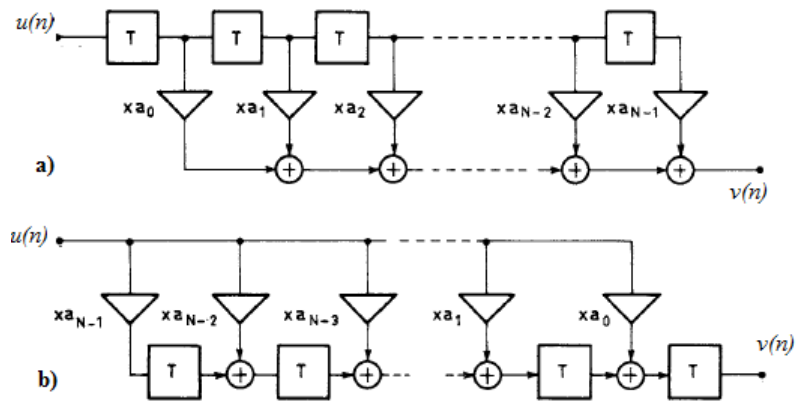


Figure 5.11. Réalisations des filtres RIF

- (a) Structure directe canonique (1D)
- (b) Structure directe transposée (2D)

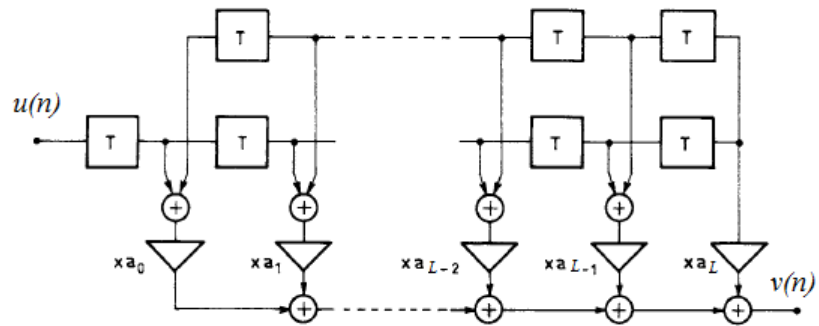


Figure 5.12. Structure de réalisation d'un filtre RIF à phase linéaire d'ordre $N=2L+1$.

Chapitre 6 : Filtres numériques à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

6.1 Introduction

Les filtres RIF présentent une réponse impulsionnelle de durée finie. Ils se caractérisent par une fonction de transfert polynomiale ; donc, ils sont toujours stables. Nous montrons qu'ils peuvent être calculés de façon à présenter une phase strictement linéaire. Ces filtres sont du type « à mémoire finie », c'est-à-dire qu'ils déterminent leur sortie en fonction d'information d'entrée d'ancienneté limitée. Ils sont fréquemment désignés par filtres non récurrents, en raison de leurs structures de mise en œuvre, car ils ne nécessitent pas obligatoirement de boucle de réaction dans leur réalisation. Dans le présent chapitre, nous abordons la synthèse des filtres RIF à phase linéaire. Ceci consiste à approximer au mieux la réponse fréquentielle d'un filtre ; nous nous limiterons aux filtres RIF à phase linéaire de Parks et McClellan optimaux au sens de Tchebychev [6].

6.2 Condition de linéarité de la phase pour les filtres RIF

Soit un filtre numérique de réponse impulsionnelle causale $[h(n)]_{0 \leq n < N}$ de N échantillons réels. Sa fonction de transfert $H(z)$ est un polynôme en z^{-1} tel que [6,7]:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (6.1)$$

La réponse fréquentielle en pulsations normalisées qui lui correspond est un polynôme trigonométrique périodique de période 2π telle que :

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad (6.2)$$

Si nous imposons une phase $\varphi(\omega)$ exactement linéaire, nous avons :

$$\varphi(\omega) = -m\omega + \varphi_0 \text{ avec } -\pi \leq \omega \leq \pi \text{ et } m \in \mathbb{Z} \quad (6.3)$$

Ainsi, la réponse fréquentielle peut être écrite sous la forme :

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j(-m\omega + \varphi_0)} \quad (6.4)$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = A(\omega)e^{j(-m\omega+\varphi_0)} \quad (6.5)$$

La résolution de l'équation (6.5) aboutie à deux solutions distinctes :

Soit :

$$\begin{cases} m = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \quad , \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Pour chaque valeur de N , une seule valeur de m assure une phase strictement linéaire dont la réponse impulsionnelle est symétrique. Lorsque N est impair, m est un nombre entier. Le temps de propagation de groupe est un nombre entier d'échantillons et le centre de symétrie de la réponse impulsionnelle coïncide avec un échantillon. Si N est pair, m n'est pas entier et le centre de symétrie est situé entre deux échantillons (figure 6.1).

D'autre part, nous avons comme deuxième solution :

$$\begin{cases} m = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \quad , \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (6.7)$$

La réponse impulsionnelle est alors antisymétrique (figure 6.2). La réponse impulsionnelle est symétrique par rapport à l'origine. Si N est impair, le point de symétrie coïncide avec un échantillon, sinon, il est situé entre deux échantillons.

En résumé, selon la valeur de N et le type de symétrie de la réponse impulsionnelle, nous avons des filtres RIF avec une phase exactement linéaire. Nous distinguons les quatre types possibles:

Cas I : N est impair ($N = 2L + 1$), avec une réponse impulsionnelle symétrique (figure 6.1.a). Le filtre RIF a un temps de propagation de groupe $\tau = LT_e$ et un déphasage $\varphi(\omega) = e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}$.

Cas II : N est pair ($N = 2L$), avec une réponse impulsionnelle symétrique (figure 6.1.b). Le filtre RIF a un temps de propagation de groupe $\tau = \left(L - \frac{1}{2}\right)T_e$ et un déphasage $\varphi(\omega) = e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}$.

Cas III : N est impair ($N = 2L + 1$), avec une réponse impulsionnelle antisymétrique (figure 6.1.c). Le filtre RIF a un temps de propagation de groupe $\tau = LT_e$ et un déphasage $\varphi(\omega) = e^{-j\left(\omega \frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}$.

Cas IV: N est pair ($N = 2L$), avec une réponse impulsionnelle antisymétrique (figure 6.1.d). Le filtre RIF a un temps de propagation de groupe $\tau = \left(L - \frac{1}{2}\right)T_e$ et un déphasage $\varphi(\omega) = e^{-j\left(\omega\tau + \frac{\pi}{2}\right)}$.

A partir des conditions de symétrie des filtres RIF à phase linéaire (équations 6.6 et 6.7), nous pouvons localiser les zéros de leur fonction de transfert $H(z)$. En effet par la transformée en Z , nous avons la relation :

$$H(z^{-1}) = \pm z^{N-1} H(z) \tag{6.8}$$

Cette dernière montre que les zéros de $H(z)$ sont aussi les zéros de $H(z^{-1})$. C'est-à-dire qu'ils se présentent par paires opposées et conjuguées. En résumé, ils sont soit situés sur le cercle unité ($\rho_k = |Z_k| = 1$), Ou ils se présentent en symétrie quadrantale ($\rho_k \neq 1$) (Figure 6.2).

Notons que les figures 6.1a, 6.1b, 6.1c et 6.1d sont obtenues par la méthode de Parks et McClellan avec les spécifications suivantes: fréquence de coupure $f_c = 50\text{Hz}$, fréquence atténuée $f_a = 70\text{Hz}$, fréquence d'échantillonnage $f_e = 200\text{Hz}$, atténuation en bande passante : $A_p = 0.02 \text{ dB}$, et atténuation en bande atténuée $A_a = 50 \text{ dB}$.

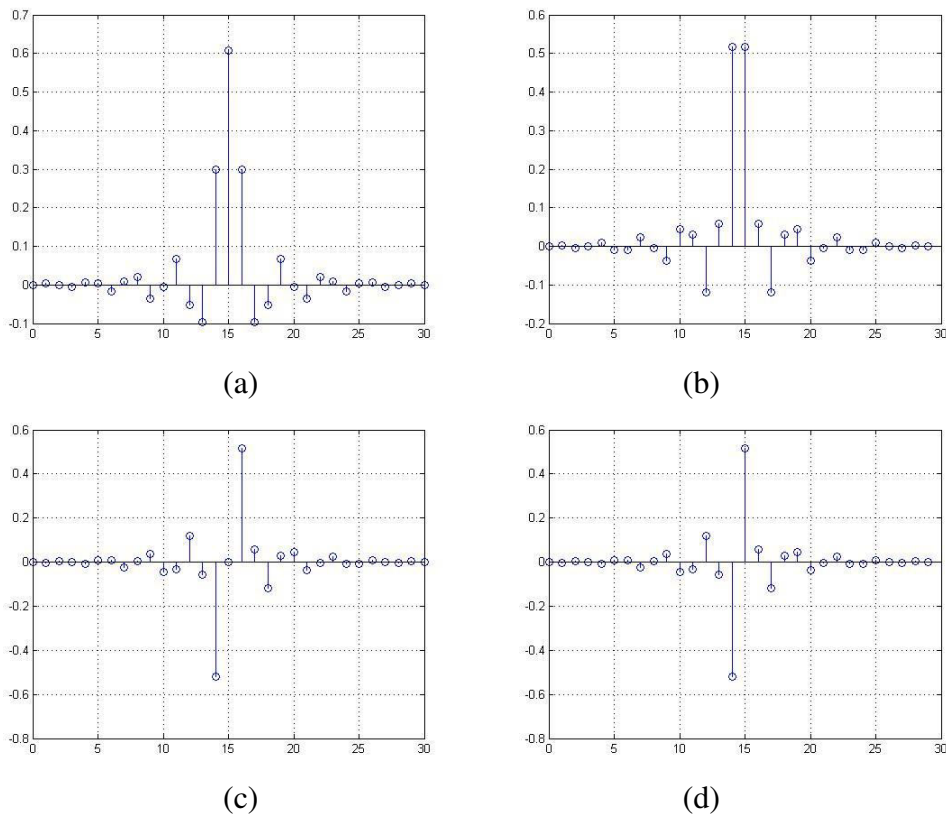


Figure 6.1. Réponses impulsionnelles symétriques et antisymétriques des filtres RIF à phase linéaire (a) Type I ($N=31$), (b) Type II ($N=30$), (c) Type III ($N=31$) et (d) Type IV ($N=30$)

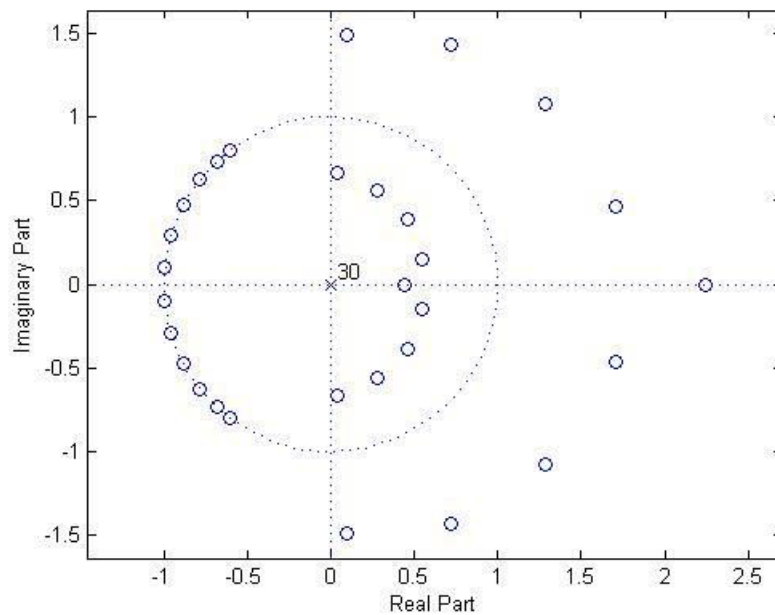


Figure 6.2. Interprétation graphique de placement des zéros des filtres RIF à phase linéaire.

6.3 Synthèse des filtres RIF à phase linéaire

Le problème de synthèse consiste à calculer les coefficients $h(n)$ de filtres de telle façon à mieux approximer la réponse fréquentielle à un gabarit donné. Dans le cadre de la synthèse des filtres RIF à phase linéaire, nous intéressons aux méthodes suivantes :

1. La méthode de calcul par fenêtres (Rectangulaire, Triangulaire, Hanning, Hamming, Blackman).
2. La méthode optimale de Parks et Maclellan.

Nous verrons que la méthode optimale de Parks et McClellan délivre un filtre avec un ordre nettement inférieur par rapport aux deux premières méthodes de synthèses par fenêtres et par échantillonnage en fréquence. De plus, les ondulations dans la bande passante BP et l'affaiblissement minimal dans la bande d'atténuation BA sont configurables séparément. Comparativement à la méthode d'optimisation au sens des moindres carrés, la méthode de Parks et McClellan reste privilégiée car la bande de transition est beaucoup plus étroite et la raideur de coupure est plus large.

Cette méthode est une variante de l'algorithme de Remez. Les ondulations sur l'ensemble de la bande passante BP et la bande atténuée BA sont distribuées uniformément. La recherche des coefficients de pondération $h(n)$ s'effectue itérativement. Les coefficients obtenus sont optimaux au sens de Tchebychev. Le maximum de l'erreur est minimisé sur l'ensemble des bandes passantes BP et atténuées BA.

6.3.1 Spécifications de gabarit et terminologie

Les spécifications de calcul de filtre RIF sont imposées uniquement en amplitude. La linéarité de la phase est obtenue systématiquement si les conditions de symétrie (cas I et II) ou antisymétrie (cas III et IV) soient respectées. Les bandes passante $BP = [0, f_p]$ et atténuée $BA = [f_a, \frac{1}{2T_e}]$ peuvent être définies par les fréquences limites f_p et f_a en Hz. Nous pouvons aussi les exprimer en fonction des fréquences ou pulsations normalisées. Nous distinguons deux types de normalisation de fréquences, celle par rapport à la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T_e}$, nous avons donc : $BP = [0, f_{np}]$ et $BA = [f_{na}, 0.5]$, avec :

$$f_{np} = f_p T_e \text{ et } f_{na} = f_a T_e \tag{6.9}$$

ou bien celle par rapport à la fréquence de Nyquist $f_{Nyquist} = \frac{1}{2T_e}$, nous avons donc : $BP = [0, \psi_p]$ et $BA = [\psi_a, 1]$, où :

$$\psi_p = 2f_p T_e \text{ et } \psi_a = 2f_a T_e \tag{6.10}$$

Avec les pulsations normalisées ω_p et ω_a , nous avons : $BP = [0, \omega_p]$ et $BA = [\omega_a, \pi]$ où :

$$\omega_p = 2\pi f_p T_e \text{ et } \omega_a = 2\pi f_a T_e \tag{6.11}$$

δ_p est l'erreur permise dans la bande passante BP et δ_a est l'erreur tolérée en bande atténuée BA , dite aussi bande d'affaiblissement. A_p et A_a sont les affaiblissements en dB respectivement en bande passante et atténuée.

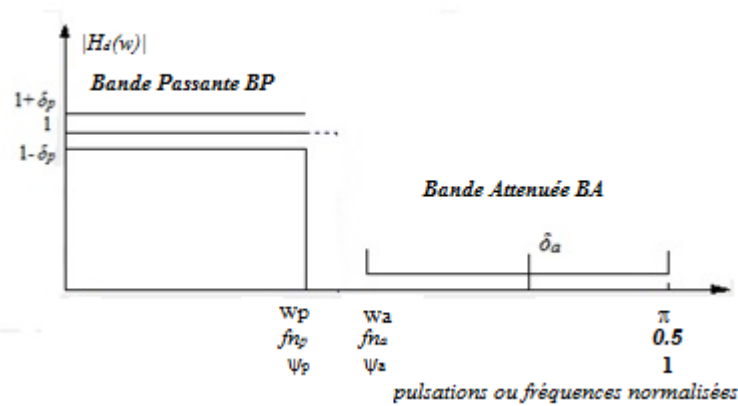


Figure 6.3. Gabarit d'un filtre numérique.

Sans perte de généralité, nous considérons un gabarit d'un filtre passe-bas ; où $H_d(\omega)$ est sa réponse fréquentielle idéale (figure 6.3). L'intervalle $\Delta\omega = \omega_a - \omega_p$ est appelé bande de transition. La raideur de coupure est désignée par le paramètre R_c tel que :

$$R_c = \frac{\omega_p + \omega_a}{2\Delta\omega} \quad (6.12)$$

Le calcul des coefficients des autres types de filtres (passe-bande, passe-haut et coupe bande) peut être effectué par l'intermédiaire des transformations en fréquences (voir chapitre 2).

6.3.2 Synthèse des filtres RIF par fenêtres

Cette méthode est dite aussi par développement en série de Fourier. En effet, le spectre d'un signal échantillonné ou discret est périodique. Ainsi, les coefficients $h_d(n)$ peuvent être obtenus par développement en série de Fourier de la fonction idéale $H_d(\omega)$ 2π périodique à approcher. Il vient alors :

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{-jn\omega} d\omega \quad (6.13)$$

Avec : $-\infty < n < +\infty$.

Il est clair que $[h_d(n)]$ est une réponse impulsionnelle infinie. Pour que nous avons une réponse impulsionnelle $[h(n)]$ d'un filtre RIF, il suffit de tronquer $[h_d(n)]$ par une fenêtre rectangulaire $[w(n)]$, telle que :

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.14)$$

Et :

$$h(n) = w(n)h_d(n) \quad (6.15)$$

La réponse fréquentielle $H(\omega)$ du filtre RIF peut être calculée par une convolution de la réponse fréquentielle du filtre idéale $H_d(\omega)$ et le spectre de la fenêtre de troncation $W(\omega)$, telle que :

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\zeta) W(\omega - \zeta) d\zeta \quad (6.16)$$

Pour une fenetre rectangulaire, nous avons :

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} = e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (6.17)$$

L'impact de troncation est visible sous forme d'ondulation aux extrémités du filtre à cause de la convolution avec le spectre de la fenêtre de pondération $W(\omega)$. Ce phénomène est connu par le *phénomène de Gibbs*, et peut être traduit par l'importance des ondulations des lobes secondaires par

rapport à lobe principal (centrale). Cet effet peut être atténué si nous faisons tendre $[w(n)]$ graduellement vers 0 à chaque extrémité de la fenêtre, où l'importance des lobes secondaires est diminuée par rapport à lobe central. Cependant, cette diminution est au détriment de la largeur de ce lobe qui devient plus large. Les fenêtres les plus utilisées sont exposées ci-dessous. Leurs caractéristiques sont illustrées au tableau 6.1 [7].

6.3.2.1 Fenêtre de Bartlett

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \text{si } \frac{N-1}{2} < n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.18)$$

6.3.2.2 fenêtre de Hanning

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right] & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.19)$$

6.3.2.2 fenêtre de Hamming

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.20)$$

6.3.2.2 fenêtre de Blackman

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4n\pi}{N-1}\right) & \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6.21)$$

<i>fenêtres</i>	<i>Rapport des amplitudes du lobe principal et secondaire</i>	<i>Largeur du lobe principal</i>	<i>Affaiblissement maximal en bande atténuée</i>
Rectangulaire	-13	$\frac{4\pi}{N}$	21
Bartlett	-25	$\frac{8\pi}{N}$	25
Hanning	-31	$\frac{8\pi}{N}$	44
Hamming	-41	$\frac{8\pi}{N}$	53
Blackman	-57	$\frac{12\pi}{N}$	74

Tableau 6.1. Etude comparative des fenêtres de troncation

L'utilisation de ces fenêtres pour l'approximation du filtre RIF montre aussi que l'affaiblissement obtenu dans la bande d'atténuée est indépendant de N , à l'opposé de la largeur de transition.

L'approximation des filtres RIF par l'utilisation des fenêtres, quoique simple de principe. Elle présente en fait certaines difficultés, où le calcul des coefficients $h_d(n)$ de la série de Fourier est délicat lorsque $H_d(\omega)$ est une fonction compliquée ou lorsqu'elle n'est pas donnée sous une forme analytique. L'utilisation d'une fonction fenêtre n'offre aucune garantie sur le caractère optimal du degré de la fonction de transfert selon les spécifications du cahier de charge.

6.3.3 Synthèse des filtres RIF à phase linéaire par approximation de Tchebychev

Cette méthode est connue sous le nom de Parks et Maclellan. Elle permet le calcul des coefficients d'un filtre RIF à phase linéaire par une méthode itérative basée sur l'algorithme de Remez. La présente méthode est optimale au sens de l'erreur de Tchebychev [6,7].

6.3.3.1 Formulations mathématiques et algorithme de calcul

Soient $H_d(\omega)$ la réponse en pulsations normalisées désirée pour un filtre passe-bas idéal et $W(\omega)$ une fonction de poids sur l'erreur, tel que :

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \omega \in BP = [0, \omega_p] \\ 0 & \text{pour } \omega \in BA = [\omega_a, \pi] \end{cases} \quad (6.22)$$

Avec :

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{\delta_a}{\delta_p} & \text{pour } \omega \in BP \\ 1 & \text{pour } \omega \in BA \end{cases} \quad (6.23)$$

Par facilité d'écriture de la réponse fréquentielle de filtre RIF à phase linéaire, nous considérons uniquement la réponse fréquentielle $H_0(\omega)$ à phase nulle sans déphasage, et qui sera mise sous la forme :

$$H_0(\omega) = P(\omega)Q(\omega) \quad (6.24)$$

Où $P(\omega)$ est une somme de cosinus dépendant de pulsation normalisée et n ; et $Q(\omega)$ est une fonction fixée de ω . Il suffira ensuite de multiplier $H_0(\omega)$ par la fonction de transfert de déphaseur pur $\varphi(\omega)$ pour rendre le filtre causal. Nous détaillons la réponse fréquentielle $H_0(\omega)$ pour chacun de quatre cas possibles cités au paragraphe §-6.2 :

Cas 1 : N est impair ($N = 2L + 1$), avec une réponse impulsionnelle symétrique. Nous avons :

$$Q(\omega) = 1 \text{ et } P(\omega) = \sum_{n=0}^L a(n) \cos(n\omega) \quad (6.25)$$

$$a(n) = \begin{cases} h(L) & \text{pour } n=0 \\ 2h(L-n) & \text{pour } n=1, \dots, L \end{cases} \quad (6.26)$$

Cas 2 : N est pair ($N = 2L$), avec une réponse impulsionnelle symétrique. Nous avons :

$$Q(\omega) = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ et } P(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} b(n)\cos(n\omega) \quad (6.27)$$

$$b(n) = 2h(L-n-1) \quad n=0, \dots, L-1 \quad (6.28)$$

Cas 3 : N est impair ($N = 2L+1$), avec une réponse impulsionnelle antisymétrique. Nous avons :

$$Q(\omega) = \sin(\omega) \text{ et } P(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} c(n)\cos(n\omega) \quad (6.29)$$

$$c(n) = 2h(L-n-1) \quad n=0, \dots, L-1 \quad (6.30)$$

Cas 4 : N est pair ($N = 2L$), avec une réponse impulsionnelle antisymétrique. Nous avons :

$$Q(\omega) = \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ et } P(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} d(n)\cos(n\omega) \quad (6.31)$$

$$d(n) = 2h(L-n-1) \quad n=0, \dots, L-1 \quad (6.32)$$

L'erreur pondérée s'écrit :

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H_0(\omega)] = W(\omega)[H_d(\omega) - P(\omega)Q(\omega)] \quad (6.33)$$

D'où :

$$E(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \left[\frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)} - P(\omega) \right] \quad (6.34)$$

La relation (6.34) est valable pour n'importe quelle ω sauf éventuellement en 0 et/ou en π lorsque $Q(\omega)$ est nul ; en définissant $H_{dn}(\omega)$ et $W_n(\omega)$ par :

$$\begin{cases} H_{dn}(\omega) = \frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)} \\ W_n(\omega) = W(\omega)Q(\omega) \end{cases} \quad (6.35)$$

L'erreur s'écrit :

$$E(\omega) = W_n(\omega)[H_{dn}(\omega) - P(\omega)] \quad (6.36)$$

Ainsi, le problème d'approximation consiste à trouver un ensemble de coefficients $[h(n)]$ qui minimisent le maximum de la valeur absolue de l'erreur $E(\omega)$ sur le domaine des pulsations normalisées $\omega \in \Omega = BP \cup BA$. En résumé, le problème d'approximation peut être écrit sous la forme condensée :

$$\|E(\omega)\|_{\infty} = \min_{coeff} \max_{\omega} [W_n(\omega) |H_{dn}(\omega) - P(\omega)|] \quad (6.37)$$

Comme il n'est pas possible de fixer indépendamment tous les paramètres $[\delta_p, \delta_a, \omega_p, \omega_a]$, ainsi que le degré du filtre N ; plusieurs approches ont été envisagées. L'algorithme de calcul de Parks et Maclellan présente les principales étapes suivantes :

1. Spécifications de la réponse en fréquence désirée $H_d(\omega)$, la fonction de pondération $W(\omega)$ et le degré du filtre N .

2. Détermination du problème d'approximation équivalent par calcul de $H_{dn}(\omega)$, $W_n(\omega)$ et $P(\omega)$

Solution du problème d'approximation (6.37) par l'utilisation d'un algorithme d'échange de Remez que nous expliquant ci-dessous.

3. Calcul des coefficients du filtre par transformée de Fourier Rapide.

6.3.3.2 L'algorithme d'échange de Remez

L'algorithme d'échange de Remez (figure 6.4), consiste à choisir en première étape le degré par l'utilisateur; cette procédure pourrait être facilement remplacée par une estimation du degré nécessaire suivie par une recherche automatique de degré optimal, ainsi ce degré peut être augmenté ou diminué en fonction des résultats intermédiaires de l'algorithme de calcul. Le domaine de fréquences considéré est décomposé en un ensemble de points sur lequel nous devons trouver $L+1$ extrema qui vérifient le théorème d'alternance. Dans cet ensemble un choix initial de $L+1$ fréquences $[\omega_k]$ est fait et nous imposons à l'erreur $E(\omega)$ d'y prendre la valeur δ avec des signes alternés; nous devons donc résoudre le système d'équations :

$$W_n(\omega_k) [H_{dn}(\omega_k) - P(\omega_k)] = (-1)^k \delta \quad k=0, \dots, L \quad (6.38)$$

La méthode de Parks et McClellan est valable pour les quatre types de filtres RIF à phase linéaire, et capable de calculer tous les filtres multi-bandes (passe bande, coupe bande, passe bas, passe haut, ... , etc.). Sans perte de généralité, si nous considérons la réponse impulsionnelle de type I: où

$P(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} a(n) \cos(n\omega)$; ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega_0) & \cdots & \cos[(L-1)\omega_0] & \frac{1}{W_n(\omega_0)} \\ 1 & \cos(\omega_1) & \cdots & \cos[(L-1)\omega_1] & \frac{-1}{W_n(\omega_1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega_L) & \cdots & \cos[(L-1)\omega_L] & \frac{(-1)^L}{W_n(\omega_L)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{dn}(\omega_0) \\ H_{dn}(\omega_1) \\ \vdots \\ H_{dn}(\omega_L) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

La résolution directe de (3.39) est difficile, cependant, il est plus efficace de calculer analytiquement δ par la règle de Kramer, nous obtenons :

$$\delta = \frac{\sum_{k=0}^L \alpha(k) H_{dn}(\omega_k)}{\sum_{k=0}^L (-1)^k \frac{\alpha(k)}{W_n(\omega_k)}} \quad (6.40)$$

Où :

$$\alpha_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^L \frac{1}{(x_k - x_i)} \quad \text{et } x_k = \cos(\omega_k) \quad (6.41)$$

Nous calculons ensuite $P(\omega_k)$ par la forme barycentrique de l'interpolation de Lagrange sur les L points $[\omega_0, \dots, \omega_{L-1}]$, avec les valeurs :

$$\beta_k = H_{dn}(\omega_k) - (-1)^k \frac{\delta}{W_n(\omega_k)} \quad k=0, \dots, L-1 \quad (6.42)$$

$$\gamma_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{L-1} \frac{1}{x_k - x_i} \quad (6.43)$$

Nous obtenons, ainsi :

$$P(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{L-1} \frac{\gamma_k}{x - x_k} \beta_k}{\sum_{k=0}^{L-1} \frac{\gamma_k}{x - x_k}} \quad \text{et } x = \cos(\omega) \quad (6.44)$$

Nous recherchons ensuite les extrema de $E(\omega)$ sur l'ensemble discret de points envisagés $\Omega = [\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_L \omega_{L+1}]$; si ceux-ci est inferieur à $\delta (E(\omega) \leq \delta)$ alors nous avons trouvé la solution optimale ; sinon nous définissons un nouvel ensemble de $L+1$ fréquences d'extrema qui sont les fréquences où l'erreur atteint ses maxima et nous calculons la nouvelle valeur de δ par (6.40). Nous obligeons de cette façon δ à croître à chaque itération et à converger ainsi vers sa limite supérieure qui correspond à la solution du problème. S'il y a plus de $(L+1)$ extrema pour $E(\omega)$ dans une itération, nous choisisant les $(L+1)$ fréquences pour lesquelles le module $|E(\omega)|$ est le plus grand.

Dans la dernière phase, nous calculons les coefficients du filtre par la transformée de Fourier Discrète (DFT) à partir de la réponse fréquentielle $P(\omega)$ sur un nombre de fréquences discrètes supérieur à N .

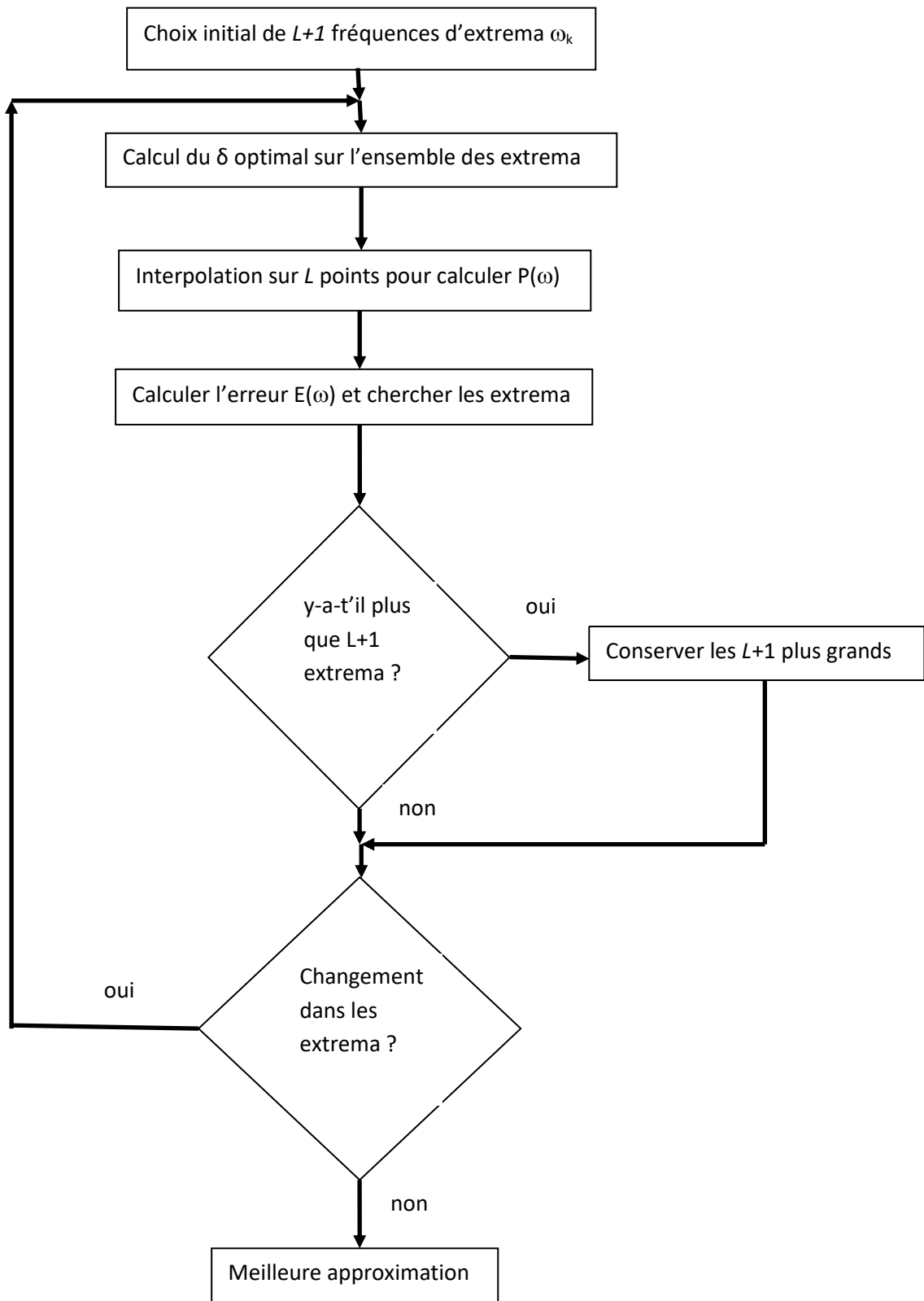


Figure 6.4. Organigramme de la méthode d'Echange de Remez

6.3.3.2 Exemple de conception

Soit à concevoir un filtre numérique passe-bas avec des spécifications sévères en amplitude telles que : les atténuations en bandes passante BP et atténuée BA sont respectivement: $A_p=0.01$ dB, $A_a=70$ dB ; et les limites des bandes en fréquences normalisées par rapport à $\frac{1}{2T_e}$ sont: $\psi_p = 0.60$ et $\psi_a = 0.65$. La méthode de conception des filtres RIF à phase linéaire de Parks et McClellan conduit à un ordre de 150. Les figures 6.5 et 6.6 illustrent les performances en amplitude, en phase et en temps de propagation de groupe ainsi obtenues.

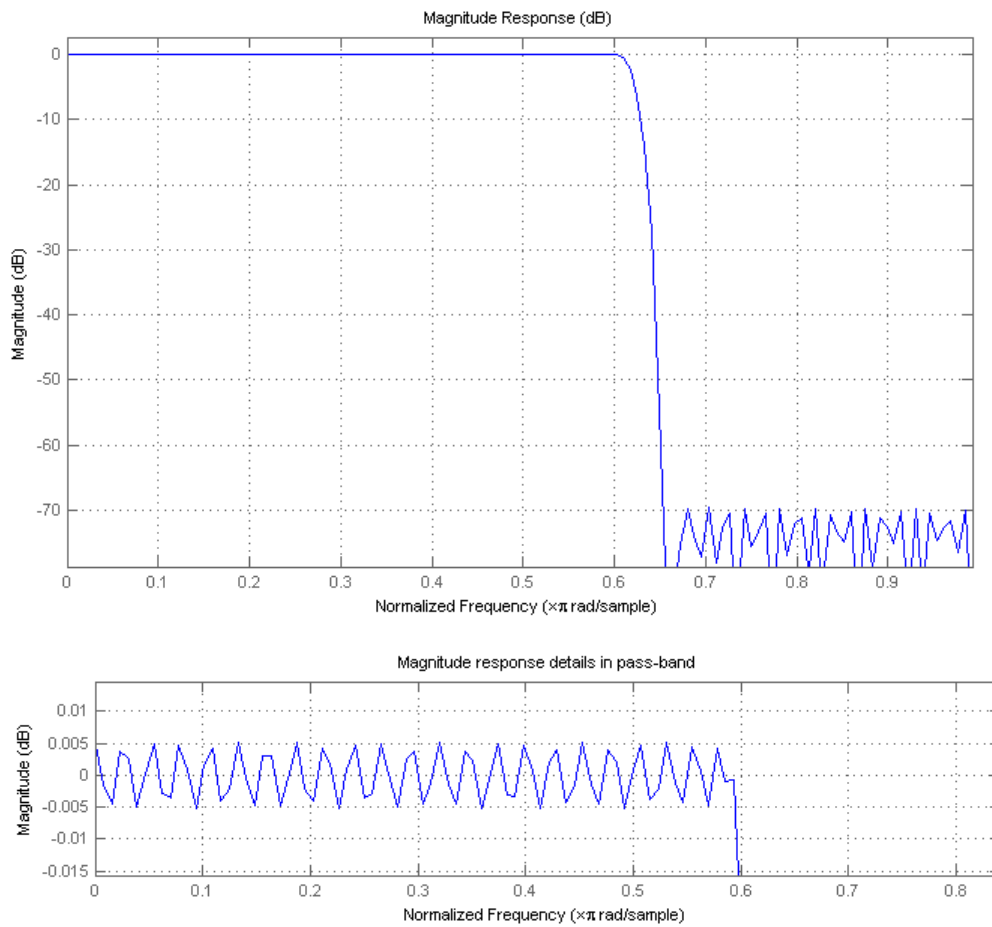


Figure 6.5. Performances en amplitude d'un filtre RIF à phase linéaire de Parks et McClellan d'ordre 150, avec les spécifications de cahier de charge : $\psi_p = 0.6$ et $\psi_a = 0.65$ et $A_p=0.01$ dB, $A_a=70$ dB.

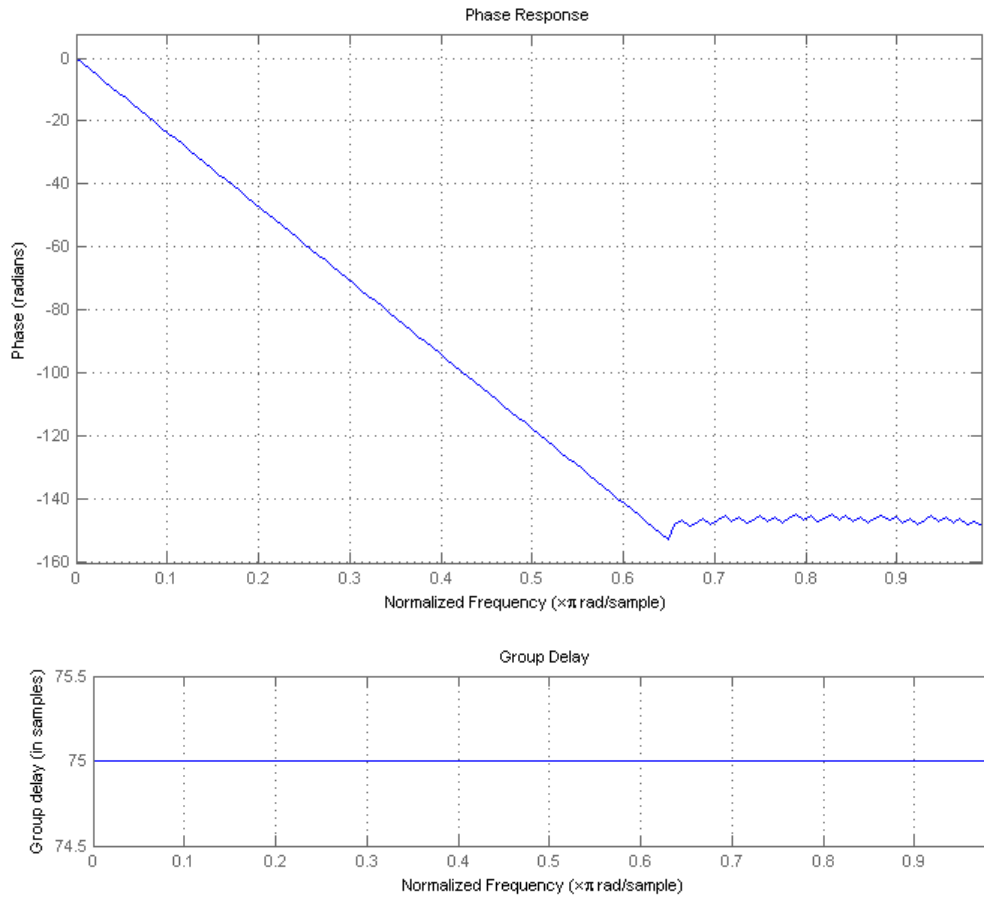


Figure 6.6. Performances en phase et en temps de propagation de groupe d'un filtre RIF à phase linéaire de Parks et McClellan d'ordre 150, avec les spécifications de cahier de charge : $\psi_p = 0.6$ et $\psi_a = 0.65$ et $A_p = 0.01$ dB, $A_a = 70$ dB. La phase est exactement linéaire, et le retard de groupe est constant de 75 échantillons.

6.4 Estimation du nombre de coefficients en fonction des spécifications du gabarit de filtre

Dans la technique de calcul qui a été exposée, le nombre de coefficients N du filtre a été supposé donné à priori. Or dans la pratique, N est un paramètre important, à titre d'exemple dans les projets où il faut évaluer la capacité de calcul nécessaire à la mise en œuvre d'un filtre numérique satisfaisant à un gabarit donné.

En analysant les résultats de calcul d'un grand nombre de filtres avec des spécifications très variées, nous constatons qu'en première approximation, le nombre de coefficients d'un filtre RIF est proportionnel au logarithme de $\frac{1}{\delta_p}$ et $\frac{1}{\delta_a}$, ainsi qu'au rapport de la fréquence d'échantillonnage f_e et à la bande de transition Δf . Par ajustage des paramètres, nous obtenons alors [6]:

$$N_e = \frac{2}{3} \log \left[\frac{1}{10\delta_p\delta_a} \right] \frac{f_e}{\Delta f} = \frac{4\pi}{3\Delta\omega} \log \left[\frac{1}{10\delta_p\delta_a} \right] \quad (6.45)$$

Cette estimation particulièrement simple est suffisante dans la plupart des cas rencontrés en pratique. Elle met en évidence l'importance relative des paramètres. La bande de transition $\Delta f = \frac{f_e}{2\pi} \Delta\omega$ est le facteur le plus sensible ; les ondulations en bandes passante et affaiblie ont une contribution secondaire, par exemple une division par deux de l'une des valeurs de δ_p ou δ_a entraîne seulement une augmentation de 10% de l'ordre de filtre. De plus, il est remarquable de constater que selon cette évaluation, la complexité du filtre ne dépend pas de la largeur de la bande passante.

Cependant, il faut noter que des écarts non négligeables peuvent apparaître entre la valeur N réellement nécessaire et la valeur estimée N_e , quand les limites de la bande de transition approchent les valeurs 0 et 0.5 ou encore quand N prend des valeurs de quelques unités. Une formule plus élaborée est illustrée ci-dessous [7] :

$$N_e = \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_a)}{\Delta\omega} - g(\delta_p, \delta_a)\Delta\omega + 1 \quad (6.46)$$

Avec :

$$D_\infty(\delta_p, \delta_a) = \left[0.005309(\log \delta_p)^2 + 0.07114 \log \delta_p - 0.4761 \right] \log \delta_a - \left[0.00266(\log \delta_p)^2 + 0.5941 \log \delta_p + 0.4278 \right] \quad (6.47)$$

Et

$$g(\delta_p, \delta_a) = 0.51244 \log \left(\frac{\delta_p}{\delta_a} \right) + 11.01 \quad (6.48)$$

L'expérience montre que l'estimation (6.46) fournit des degrés dont la valeur N_e est très voisine de la valeur exacte N . Nous pouvons donc utiliser N_e comme valeur de départ du degré dans un programme itératif.

6.5 Conclusion

Les filtres RIF présentent de nombreux avantages :

1. Ils peuvent avoir une phase exactement linéaire.
2. Ils sont toujours stables.

En revanche, ils présentent les inconvénients suivants :

1. Leur implémentation est complexe.
2. Il est nécessaire d'avoir recours à des filtres d'ordre élevé pour obtenir des performances similaires à celles des filtres RII.
3. Ils génèrent des retards importants.

Chapitre 7: Filtrés numériques à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)

7.1 Introduction

Les filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie sont des systèmes linéaires discrets invariants dans le temps dont le fonctionnement est régi par une équation de convolution portant sur une infinité de termes. En principe, ils conservent une trace des signaux qui ont été appliqués pendant une durée infinie, ils sont à mémoire infinie. Une telle mémoire est réalisée par une boucle de réaction de la sortie sur l'entrée, d'où la dénomination courante de *filtrés récurrents*. Chaque échantillon de la sortie est calculé par sommation pondérée d'un certain nombre d'échantillons d'entrée et d'un certain nombre d'éléments précédents de la sortie.

Le fait d'avoir une réponse impulsionnelle infinie permet d'obtenir en général des fonctions de filtrage beaucoup *plus sélectives* que celles des filtres RIF à quantité de calculs équivalente. Cependant, la boucle de réaction complique l'étude des propriétés et la conception de ces filtres et amène des phénomènes parasites lors de leurs mises en œuvre sur une machine dédiée au traitement du signal.

L'étude des cellules de filtres RII élémentaires du premier et du second ordre est donnée en premier lieu. L'intérêt de ces structures simples va bien au-delà d'une introduction aux propriétés des filtres RII, car elles constituent la forme de réalisation la plus courante et la plus immune aux bruits de quantification et de calculs, notamment lorsqu'il s'agit d'une arithmétique en virgule fixe [6].

7.2 Expressions générales pour les caractéristiques

Un filtre RII général est un système qui, à la suite de données $[u(n)]$ fait correspondre la suite $[v(n)]$ telle que :

$$v(n) = \sum_{l=0}^L a_l u(n-l) - \sum_{k=1}^K b_k v(n-k) \quad (7.1)$$

La fonction de transfert en Z de ce système s'écrit :

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^L a_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^K b_k z^{-k}} \quad (7.2)$$

C'est un quotient de deux polynômes en z , qui sont souvent de même degré. Les coefficients a_l et b_k étant des nombres réels. $H(z)$ est un nombre complexe tel que :

$$\bar{H}(z) = H(\bar{z}) \quad (7.3)$$

La réponse fréquentielle du filtre s'écrit en fonction des pulsations normalisées ω :

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (7.4)$$

Le module et la phase s'expriment à partir de $H(z)$ par les expressions suivantes :

$$|H(\omega)|^2 = \left[H(z) H(z^{-1}) \right]_{z=e^{j\omega}} \quad (7.5)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right]_{z=e^{j\omega}} \quad (7.6)$$

En dérivant la fonction $\varphi(z)$ par rapport à la variable complexe z , nous obtenons :

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{2j} \left[\frac{H'(z)}{H(z)} + \frac{1}{z^2} \frac{H'(z^{-1})}{H(z^{-1})} \right] \quad (7.7)$$

D'où l'expression du temps de propagation de groupe pour $z = e^{j\omega}$:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{d\varphi}{dz} jz = \operatorname{Re} \left\{ z \frac{d}{dz} \ln [H(z)] \right\}_{z=e^{j\omega}} \quad (7.8)$$

Les expressions (7.5), (7.6) et (7.8) constituent les équations qui calculent les principales caractéristiques des filtres RII d'ordre quelconque.

7.3 Cellules élémentaires de filtres RII

7.3.1 Cellule du premier ordre

Une cellule élémentaire de filtrage récursif du premier ordre est régie par une équation aux différences de premier ordre de la forme :

$$v(n) = u(n) + bv(n-1) \quad (7.9)$$

Où $[u(n)]$ et $[v(n)]$ sont respectivement l'entrée et la sortie du système ; b est une constante réelle.

La réponse impulsionnelle causale de tel système s'écrit :

$$h(n) = \begin{cases} b^n & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (7.10)$$

D'où la condition de stabilité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b|^n < +\infty \quad (7.11)$$

Et qui converge pour $|b| < 1$.

La fonction de transfert en Z, qui lui correspond s'écrit :

$$H(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b} \quad (7.12)$$

C'est une fraction rationnelle dont le dénominateur est polynôme en z du premier ordre.

En excitant cette cellule par une suite causale échelon unitaire $[Y(n)]$ telle que :

$$Y(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$$

Nous obtenons la réponse $[v(n)]$ définie par :

$$v(n) = \begin{cases} \frac{1-b^{n+1}}{1-b} & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

Cette réponse est plate (Figure 7.1) et similaire à celle d'un système de premier ordre analogique défini par sa constante de temps τ , et échantillonnée avec la période T_e , telle que :

$$v_{a,T}(n) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}(n+1)} & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

Par comparaison entre les équations (7.13) et (7.14), il vient que:

$$b = e^{-\frac{T_e}{\tau}} \quad (7.15)$$

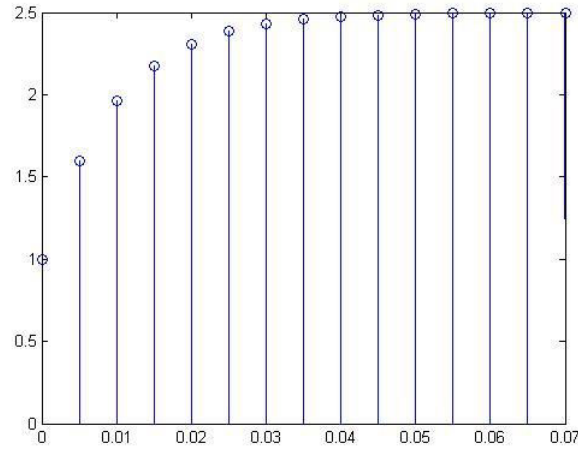


Figure 7.1. Réponse indicielle d’une cellule RII du premier ordre ($b=0.3$).

La réponse fréquentielle $H(\omega)$ qui correspond à $z = e^{2j\pi fT} = e^{j\omega}$, s’écrit :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - be^{-j\omega}} \tag{7.16}$$

Où ω présente la pulsation normalisée.

Le module, la phase et le temps de groupe peuvent être calculés par:

$$\begin{cases} |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 - 2b \cos \omega + b^2} \\ \varphi(\omega) = \text{Arctg} \frac{b \sin \omega}{1 - b \cos \omega} \\ \tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\frac{b \cos \omega - b^2}{1 - 2b \cos \omega + b^2} \end{cases} \tag{7.17}$$

A titre d’exemple, le module en dB et la phase en degré d’une cellule de premier ordre sont illustrés en figure 7.2. Il est clair que la cellule du premier ordre offre des possibilités restreintes car elle ne possède qu’un pôle, qui doit être réel pour que le filtre soit à coefficients réels, et sa réponse en fréquence est une fonction monotone. La cellule du second ordre offre des possibilités beaucoup plus variées. C’est la structure la plus utilisée en filtrage numérique en raison de la modularité qu’elle apporte dans la réalisation des filtres même les plus complexes avec la contrainte de limitation du nombre de bits des coefficients et la réduction du bruit de calcul en virgule fixe.

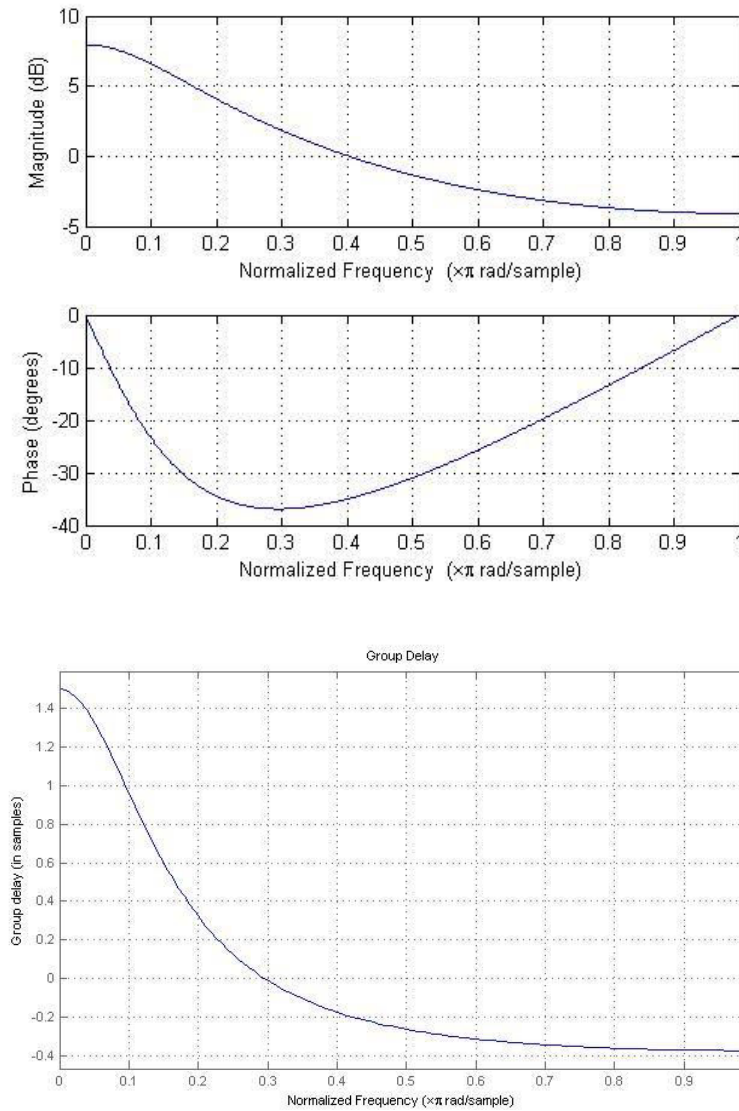


Figure 7.2. Module en dB, phase en degré et temps de propagation de groupe pour une cellule RII de premier ordre ($b=0.3$).

7.3.2 Cellule du second ordre purement réursive

Une cellule du second ordre purement réursive est régie par une équation aux différences de la forme :

$$v(n) = u(n) - b_1v(n-1) - b_2v(n-2) \quad (7.18)$$

Où : b_1 et b_2 sont des constantes réelles.

La fonction de transfert $H(z)$ correspondante s'écrit :

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + b_1z + b_2} \quad (7.19)$$

Cette fonction possède un zéro double à l'origine et deux pôles P_1 et P_2 , tels que :

$$P_{1,2} = -\frac{b_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{b_1^2 - 4b_2} \quad (7.20)$$

Deux cas se présentent alors suivant le signe de $b_1^2 - 4b_2$:

1. Si $b_1^2 \geq 4b_2$: les deux pôles sont situés sur l'axe réel du plan complexe ; la fonction de transfert est simplement le produit de deux fonctions du premier ordre à coefficients réels. La cellule du filtre correspondante est la mise en cascade de deux cellules du premier ordre et ses propriétés s'en déduisent. Les amplitudes se multiplient et les phases s'ajoutent. La réponse à l'échelon unitaire en sortie de la seconde cellule s'écrit :

$$v(n) = \frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)} \left[1 - b_2^{n+1} - (1-b_2) \frac{b_1^{n+1} - b_2^{n+1}}{b_1 - b_2} \right] \quad (7.21)$$

2. Si $b_1^2 < 4b_2$: Dans ce cas la cellule est dite de 2^e ordre sous-amorti. Les deux pôles sont complexes conjugués; ils s'écrivent P et \bar{P} , avec :

$$P = -\frac{b_1}{2} + j \frac{1}{2} \sqrt{4b_2 - b_1^2} \quad (7.22)$$

La relation entre la position des pôles et les coefficients du filtre apparait très simplement (figure 7.3) :

$$\begin{cases} b_1 = -2 \operatorname{Re}(P) \\ b_2 = |OP|^2 \end{cases} \quad (7.23)$$

La réponse fréquentielle se déduit de la fonction de transfert $H(z)$ en faisant $z = e^{j\omega}$, il vient :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1+b_2)\cos\omega + 2b_2\cos 2\omega} \quad (7.24)$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{Arctg} \left[\frac{b_1 \sin \omega + b_2 \sin 2\omega}{1 + b_1 \cos \omega + b_2 \cos 2\omega} \right] \quad (7.25)$$

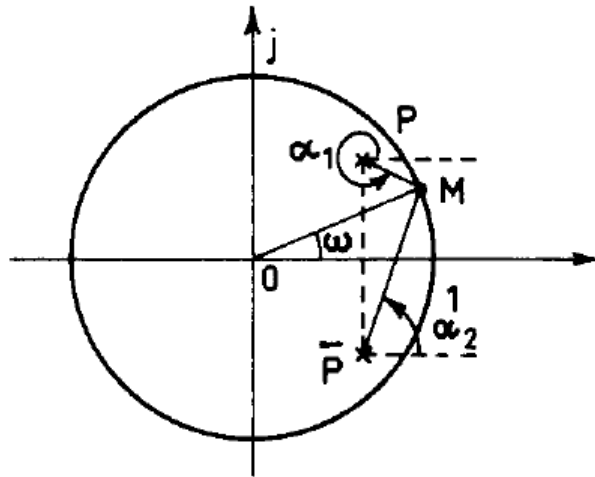


Figure 7.3. Représentation graphique de la fonction de transfert d'une cellule de 2^e ordre à pôles complexes.

Une forme élégante pour exprimer le module et la phase de la réponse en fréquence avec une représentation des pôles en coordonnées polaires, $P = \rho e^{j\theta}$, à partir d'une expression de $H(z)$ en produit de facteurs tel que :

$$H(z) = \frac{1}{(1 - Pz^{-1})(1 - \bar{P}z^{-1})} \quad (7.26)$$

Les relations avec les coefficients b_1 et b_2 sont les suivantes :

$$b_1 = -2\rho \cos \theta \text{ et } b_2 = \rho^2 \quad (7.27)$$

Nous obtenons :

$$H(\omega) = \frac{1}{[1 - \rho e^{j(\theta - \omega)}][1 - \rho e^{-j(\theta - \omega)}]} \quad (7.28)$$

Il vient alors :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \omega)][1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta + \omega)]} \quad (7.29)$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arctg} \left[\frac{\rho \sin(\theta + \omega)}{1 - \rho \cos(\theta + \omega)} \right] - \text{Arctg} \left[\frac{\rho \sin(\theta - \omega)}{1 - \rho \cos(\theta - \omega)} \right] \quad (7.30)$$

Nous pouvons vérifier que $|H(\omega)|$ est une fonction paire, et $\varphi(\omega)$ est une fonction impaire de la variable normalisée ω . Les valeurs qui correspondent à des extrema de $|H(\omega)|$ sont les racines de l'équation (7.31), obtenue en dérivant l'expression (7.29) par rapport à ω .

$$\sin \omega [b_1(1+b_2) + 4b_2 \cos \omega] = 0 \quad (7.31)$$

Les fréquences 0 et 0.5 sont des fréquences extrémales en raison de la symétrie et de la périodicité de la réponse. Une autre fréquence extrême f_m existe si la condition (7.32) est remplie :

$$\left| \frac{b_1(1+b_2)}{4b_2} \right| < 1 \quad (7.32)$$

Ou encore en coordonnées polaires :

$$\cos \theta < \frac{2\rho}{1+\rho^2} \quad (7.33)$$

Dans ce cas, il vient :

$$\cos(2\pi f_m T_e) = \cos \omega_m = -\frac{b_1(1+b_2)}{4b_2} \quad (7.34)$$

La fréquence f_m et/ou la pulsation normalisée ω_m s'appelle respectivement fréquence et/ou pulsation de résonance de la cellule. L'amplitude à la fréquence de résonance s'écrit :

$$H_m = \frac{1}{1-b_2} \sqrt{\frac{4b_2}{4b_2 - b_1^2}} \quad (7.35)$$

Ou encore en coordonnées polaires :

$$H_m = \frac{1}{1-\rho} \frac{1}{(1+\rho)\sin \theta} \quad (7.36)$$

Il apparait ainsi que la réponse en fréquence à la résonance est inversement proportionnelle à la distance du pôle au cercle unité. Nous définissons la largeur de bande à 3 décibels, et nous la désignons par B3, telle que :

$$\begin{cases} B_3 = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi T} \\ |H(\omega_1)|^2 = |H(\omega_2)|^2 = \frac{1}{2} H_m^2 \end{cases} \quad (7.37)$$

Le temps de groupe défini par (7.38) passe par un maximum au voisinage de la fréquence de résonance

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = -\frac{\rho[\cos(\theta+\omega)-\rho]}{1-2\rho\cos(\theta+\omega)+\rho^2} - \frac{\rho[\cos(\theta-\omega)-\rho]}{1-2\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2} \quad (7.38)$$

L'étude de la cellule purement réursive du 2^e ordre a été faite dans le plan fréquentielle. Dans le domaine temporelle, cette cellule possède une réponse impulsionnelle $[h(n)]$ que l'on détermine directement en excitant la cellule par une suite de Dirac, ou bien en calculant la transformée en Z inverse de la fonction de transfert $H(z)$, il vient alors :

$$h(n) = \begin{cases} \rho^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (7.39)$$

Les réponses impulsionnelle et indicielle d'une cellule de 2^e ordre purement réursive sont illustrés en figure 7.4. Le module, la phase et le temps de propagation de groupe sont exposés en figure 7.5. Dans le paragraphe §-7.3.3, les résultats obtenus pour la cellule du second ordre purement réursive s'étendent à la cellule du second ordre générale.

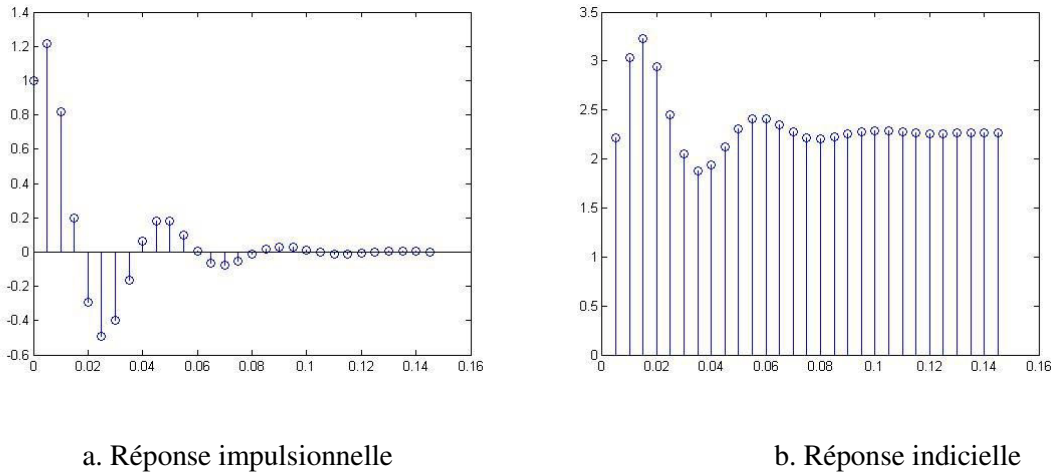


Figure 7.4. Réponse impulsionnelle et indicielle d'une cellule purement réursive du 2^e ordre ($b_1 = -1.2146$ et $b_2 = 0.6556$).

7.3.3 Cellule du second ordre générale

Une cellule du second ordre la plus générale fait intervenir dans le calcul d'une sortie $v(n)$, l'entrée actuel $u(n)$ et les données aux instants précédents $u(n-1)$, $v(n-1)$ et $u(n-2)$, $v(n-2)$. Son équation aux différences s'écrit :

$$v(n) = a_0u(n) + a_1u(n-1) + a_2u(n-2) - b_1v(n-1) - b_2v(n-2) \quad (7.40)$$

$$a_0, a_n \text{ et } b_n \in \mathbb{L}, (n=1,2)$$

Il en résulte la fonction de transfert en Z suivante :

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}} \quad (7.41)$$

Cette fonction de transfert comporte en plus des deux pôles, deux zéros réels ou complexes conjugués. La position de ces zéros, notés Z_0 et \bar{Z}_0 est assez particulière. En effet, nous rencontrons deux cas d'utilisation de la cellule du second ordre générale. D'abord dans la réalisation d'un élément de filtrage, alors les zéros sont presque toujours placés sur le cercle unité ; d'une part pour optimiser les caractéristiques d'affaiblissement du filtre par l'introduction d'une fréquence d'affaiblissement infini et d'autre part parce que dans ces conditions une symétrie des coefficients apparait et les calculs peuvent se

simplifier. Ensuite dans la réalisation de circuits déphaseurs purs, alors les zéros sont conjugués harmoniques des pôles.

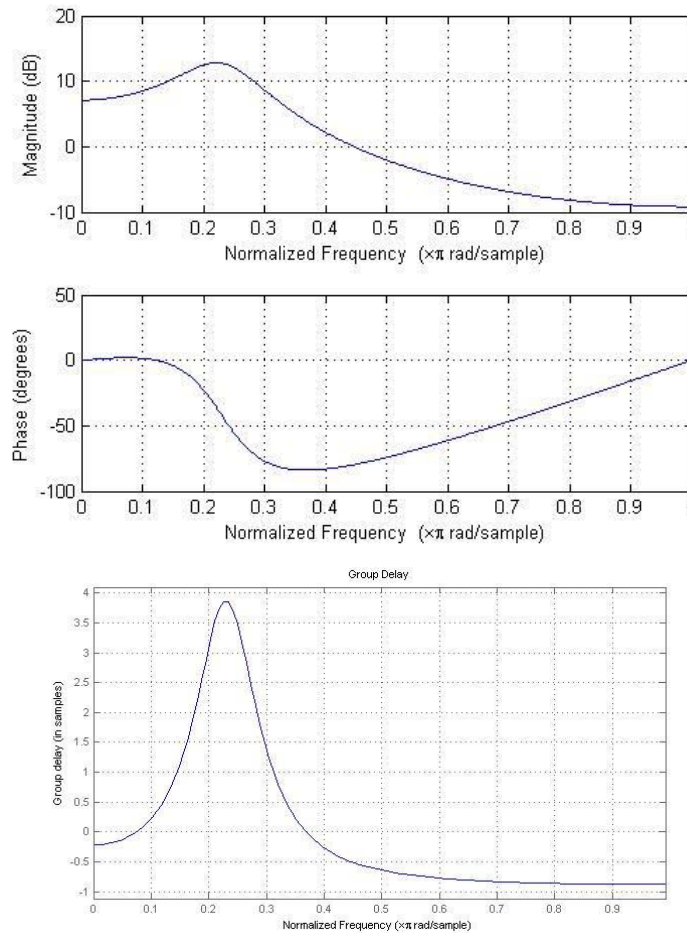


Figure 7.5. Module en dB, phase en degré et temps de propagation de groupe pour la même cellule purement réursive du 2^e ordre ($b_1 = -1.2146$ et $b_2 = 0.6556$).

7.3.3.1 Cellule du second ordre générale pour filtrage (cellules biquadratiques)

Dans ce cas la cellule est appelée cellule du *second ordre elliptique*, la fonction de transfert peut avoir la forme :

$$H(z) = \frac{a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{-2} \right)}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = a_0 \frac{(z - Z_0)(z - \bar{Z}_0)}{(z - P)(z - \bar{P})} \tag{7.42}$$

Ou encore :

$$H(z) = a_0 \frac{1 - 2 \operatorname{Re}(Z_0) z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2 \operatorname{Re}(P) z^{-1} + |P|^2 z^{-2}} \tag{7.43}$$

Le module de la réponse fréquentielle s’exprime par :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(a_0 + b_2)\cos\omega + 2a_0a_2\cos 2\omega}{1 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1(1 + b_2)\cos\omega + 2b_2\cos 2\omega} \quad (7.44)$$

Une telle cellule peut être considérée comme la mise en cascade d'une cellule de filtre RII purement récurrente et d'une autre cellule de type RIF à phase linéaire. Par suite les caractéristiques de phase et de temps de groupe peuvent être déduites par la somme des caractéristiques de chacune des cellules élémentaires. C'est-à-dire :

$$\varphi(\omega) = \omega - \text{Arctg} \left[\frac{\rho \sin(\theta + \omega)}{1 - \rho \cos(\theta + \omega)} \right] - \text{Arctg} \left[\frac{\rho \sin(\theta - \omega)}{1 - \rho \cos(\theta - \omega)} \right] \quad (7.45)$$

$$\tau_g(\omega) = -1 - \frac{\rho [\cos(\theta + \omega) - \rho]}{1 - 2\rho \cos(\theta + \omega) + \rho^2} - \frac{\rho [\cos(\theta - \omega) - \rho]}{1 - 2\rho \cos(\theta - \omega) + \rho^2} \quad (7.46)$$

Nous illustrons à la figure 7.6 la réponse fréquentielle d'une cellule elliptique de 2^e ordre. Le placement des pôles et des zéros sur le cercle unitaire est présenté en figure 7.7.

Il est clair que les performances en amplitude sont plus sélectives pour une cellule elliptique qu'une cellule purement récurrente du même degré 2.

7.3.3.2 Cellule déphaseur pur

La deuxième catégorie de cellules du second ordre générales est celle de déphaseur pur. Elle est caractérisée par le fait que le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert ont les mêmes coefficients mais dans l'ordre inverse :

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (7.47)$$

En fonction des pôles et des zéros, la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = \frac{(P - z^{-1})(\bar{P} - z^{-1})}{(1 - Pz^{-1})(1 - \bar{P}z^{-1})} \quad (7.48)$$

Il apparaît que les pôles et les zéros sont conjugués harmoniques (figure 7.8).

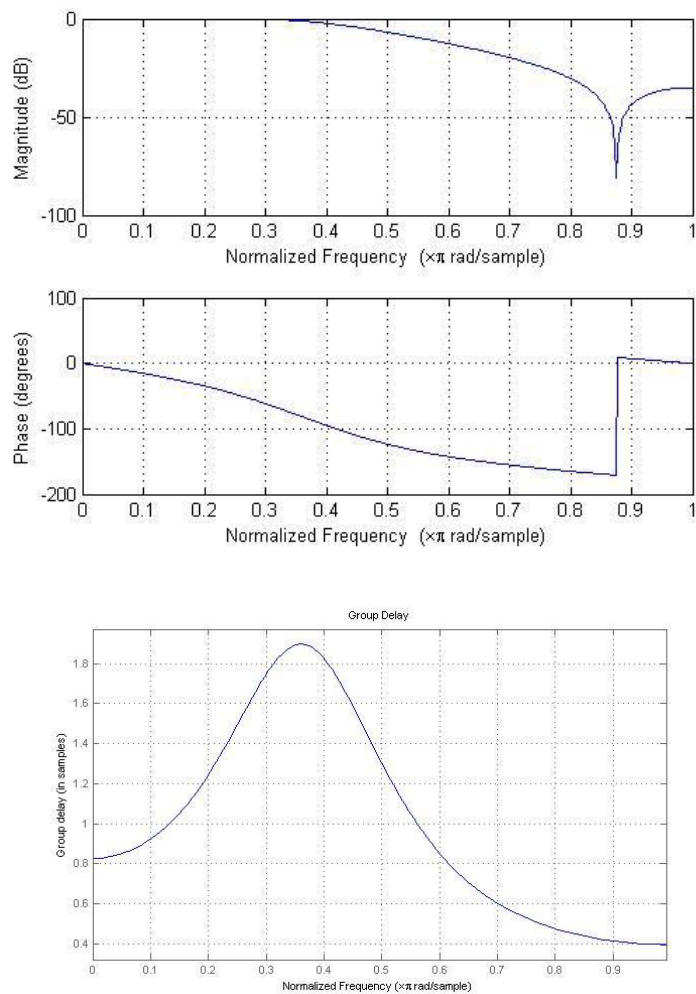


Figure 7.6. Réponse fréquentielle d'une cellule elliptique
 $[a_0 \ a_1 \ a_2] = [0.2069 \ 0.3824 \ 0.2069]$, $[b_1 \ b_2] = [-0.4597 \ 0.3031]$

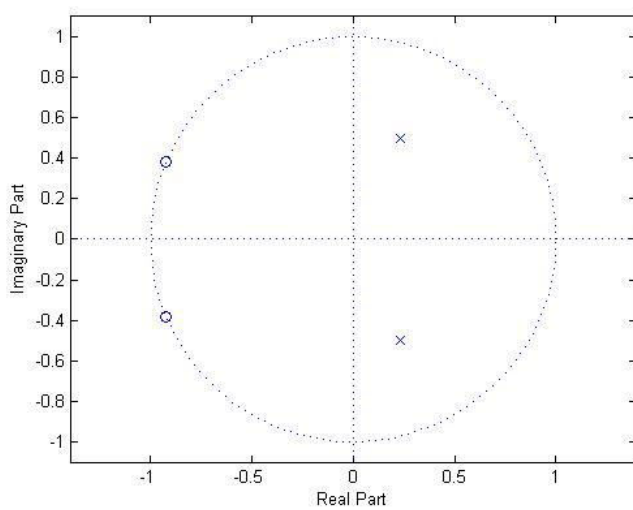


Figure 7.7. Placement des pôles et des zéros pour une cellule elliptique de 2^e ordre

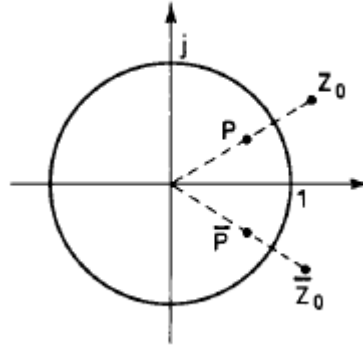


Figure 7.8. Placement des pôles et des zéros d'une cellule de déphaseur.

Le calcul de la phase et du temps de propagation de groupe de cette cellule se déduit à partir des expressions (I.99), (I.104) et (I.112) obtenues pour une cellule purement récurrente. En effet nous pouvons écrire :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{z^{-2}D(z^{-1})}{D(z)} \quad (7.49)$$

Comme d'autre part pour une cellule du second ordre purement récurrente:

$$|D(\omega)| = |D(-\omega)|; \text{Arg}[D(\omega)] = -\text{Arg}[D(-\omega)] \quad (7.50)$$

Il vient :

$$\varphi(\omega) = 2\text{Arg}[D(\omega)] + 2\omega \quad (7.51)$$

Il en découle que :

$$\tau_g(\omega) = -\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\omega)+\rho^2} - \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta+\omega)+\rho^2} \quad (7.52)$$

Il est facile de vérifier que lorsque ω varie de 0 à π , la phase de déphaseur varie de 0 à 2π .

7.4 Calcul des coefficients d'un filtre RII par développement analytique

Les filtres récurrents ont des propriétés qui se rapprochent de celles des filtres analogiques ; et les techniques utilisées pour calculer leurs coefficients sont déduites de celles qui servent à déterminer les paramètres des filtres analogiques. Ainsi, nous considérons dans notre démarche une méthode de conception des filtres numériques RII qui consiste à transposer les résultats de calcul des filtres analogiques par transformation bilinéaire. Un intérêt particulier se focalise sur les filtres elliptiques conçus selon le critère de Tchebychev, car d'une part, ils ont un ordre optimal en tolérant des ondulations à la fois en bande passante et atténuée ; de plus, ils ont une pente raide et une bande de transition étroite par rapport aux autres types de filtres pour le même ordre. En revanche, leur temps de propagation de groupe est médiocre en bande passante. Pour un filtre passe-bas par exemple, il est possible de calculer la transmittance $H(z)$ par développement analytique pour autant que les spécifications soient suffisamment

simples. Les autres types de filtres passe-haut et passe-bande, ...etc. peuvent être dérivés du filtre passe-bas par application de transformation de fréquences que nous avons abordé en chapitre 5.

7.4.1 Transformation bilinéaire

Comme les fonctions de transferts $H_a(p)$ et $H(z)$ des filtres respectivement analogique et numérique s'obtiennent en faisant décrire p sur l'axe imaginaire du plan P et z sur le cercle unitaire du plan Z , une transformation dite bilinéaire permettant de transposer les résultats de calcul d'un filtre analogique à la conception du filtre numérique équivalent, cette transformation est peut être formulée par :

$$p = g(z) \quad (7.53)$$

Nous avons donc :

$$H(z) = H_a(p) \Big|_{p=g(z)} = H_a[g(z)] \quad (7.54)$$

Si nous considérons que : $p = j\Omega$ et $z = e^{j\omega}$; avec : Ω et ω sont respectivement la pulsation analogique et la pulsation normalisée. Nous distinguons :

1. Pour un filtre passe-bas (Low Pass : LP)

$$p = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{ et } \Omega = \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (7.55)$$

2. Pour un filtre passe-haut (High Pass : HP)

$$p = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \text{ et } \Omega = -\cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (7.56)$$

3. Pour un filtre passe bande (Band Pass : BP)

$$p = \frac{1-2c_0z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}} \text{ et } \Omega = \frac{c_0 - \cos \omega}{\sin \omega} \quad (7.57)$$

4. Pour un filtre coupe bande (Band Stop: BS)

$$p = \frac{1-z^{-2}}{1-2c_0z^{-1}+z^{-2}} \text{ et } \Omega = \frac{\sin \omega}{c_0 - \cos \omega} \quad (7.58)$$

Avec : $c_0 = \cos \omega_0$ où ω_0 est le centre des filtres passe bande ou coupe bande.

7.4.2. Transformation des spécifications fréquentielles

Généralement, les spécifications fréquentielles sont données pour le cas de filtres numériques. Nous serons obligés de transformer ces spécifications en ses équivalents pour un filtre analogique. Nous distinguons les cas (figure 7.9) [5,8]:

1. Pour le cas d'un filtre passe-bas, nous avons :

$$f_{pass} < f_{stop} < \frac{f_s}{2} \text{ et les pulsations normalisées : } \omega_{pass} = 2\pi \frac{f_{pass}}{f_s}, \omega_{stop} = 2\pi \frac{f_{stop}}{f_s}$$

Et :

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_{pass}}{2}\right) \text{ et } \Omega_a = \tan\left(\frac{\omega_{stop}}{2}\right) \tag{7.59}$$

2. Pour le cas d'un filtre passe-haut, nous avons :

$$f_{stop} < f_{pass} < \frac{f_s}{2} \text{ et les pulsations normalisées : } \omega_{pass} = 2\pi \frac{f_{pass}}{f_s}, \omega_{stop} = 2\pi \frac{f_{stop}}{f_s}$$

Et :

$$\Omega_p = \cot\left(\frac{\omega_{pass}}{2}\right) \text{ et } \Omega_a = \cot\left(\frac{\omega_{stop}}{2}\right) \tag{7.60}$$

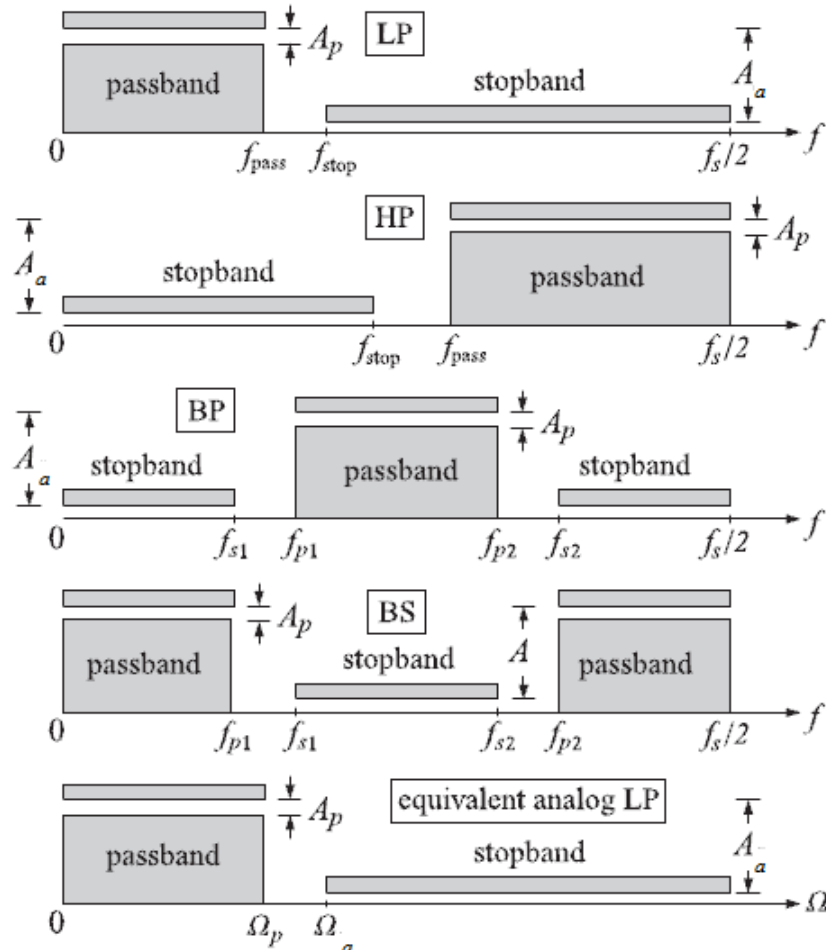


Figure 7.9. Spécifications fréquentielles des filtres numériques et leurs équivalents en filtre passe-bas analogique

3. Pour le cas d'un filtre passe bande, avec les spécifications en bande passante $[f_{p1} f_{p2}]$ et celles en bande atténuée $[f_{a1} f_{a2}]$; nous aurons :

Les pulsations normalisées : $\omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_s}$, $\omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_s}$, $\omega_{a1} = 2\pi \frac{f_{a1}}{f_s}$ et $\omega_{a2} = 2\pi \frac{f_{a2}}{f_s}$

Nous pouvons nous baser sur les spécifications en bande passante, nous aurons :

$$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_{p1} + \omega_{p2})}{\sin\omega_{p1} + \sin\omega_{p2}}, \Omega_{a1} = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{a1}}{\sin\omega_{a1}}, \Omega_{a2} = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{a2}}{\sin\omega_{a2}} \quad (7.61)$$

Et :

$$\Omega_p = \tan\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right), \Omega_a = \min(|\Omega_{a1}|, |\Omega_{a2}|) \quad (7.62)$$

Un deuxième choix peut se faire sur les spécifications en bande atténuée, nous aurons :

$$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_{a1} + \omega_{a2})}{\sin\omega_{a1} + \sin\omega_{a2}}, \Omega_{p1} = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{p1}}{\sin\omega_{p1}}, \Omega_{p2} = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{p2}}{\sin\omega_{p2}} \quad (7.63)$$

Et :

$$\Omega_a = \tan\left(\frac{\omega_{a2} - \omega_{a1}}{2}\right), \Omega_p = \max(|\Omega_{p1}|, |\Omega_{p2}|) \quad (7.64)$$

4. Pour le cas d'un filtre coupe bande, avec les spécifications en bande atténuée $[f_{a1} f_{a2}]$, et en bande passante $[f_{p1} f_{p2}]$; nous aurons :

Les pulsations normalisées : $\omega_{p1} = 2\pi \frac{f_{p1}}{f_s}$, $\omega_{p2} = 2\pi \frac{f_{p2}}{f_s}$, $\omega_{a1} = 2\pi \frac{f_{a1}}{f_s}$ et $\omega_{a2} = 2\pi \frac{f_{a2}}{f_s}$

Nous pouvons nous baser sur les spécifications en bande passante, nous aurons :

$$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_{p1} + \omega_{p2})}{\sin\omega_{p1} + \sin\omega_{p2}}, \Omega_{a1} = \left[\frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{a1}}{\sin\omega_{a1}}\right]^{-1}, \Omega_{a2} = \left[\frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{a2}}{\sin\omega_{a2}}\right]^{-1} \quad (7.65)$$

Et :

$$\Omega_p = \cot\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right), \Omega_a = \min(|\Omega_{a1}|, |\Omega_{a2}|) \quad (7.66)$$

Un deuxième choix peut se faire sur les spécifications en bande atténuée, nous aurons :

$$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_{a1} + \omega_{a2})}{\sin\omega_{a1} + \sin\omega_{a2}}, \Omega_{p1} = \left[\frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{p1}}{\sin\omega_{p1}}\right]^{-1}, \Omega_{p2} = \left[\frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{p2}}{\sin\omega_{p2}}\right]^{-1} \quad (7.67)$$

Et :

$$\Omega_a = \cot\left(\frac{\omega_{a2} - \omega_{a1}}{2}\right), \Omega_p = \max(|\Omega_{p1}|, |\Omega_{p2}|) \quad (7.68)$$

7.5 Evaluation des performances des filtres numériques LIT

Afin d'évaluer les performances des filtres numériques LIT, et en particuliers les filtres RIF à phase linéaire de Parks et McClellan, et les filtres RII de type elliptique ; nous proposons une conception avec les spécifications en amplitude suivantes: l'atténuation en bande passante $A_p=0.1$ dB, l'atténuation en bande atténuée $A_a=60$ dB, les fréquences normalisées : $f_p=0.3$, et $f_a=0.35$. Nous aurons pour le cas de filtre RIF à phase linéaire, un ordre de filtre $N=100$, la réponse fréquentielle est illustrée en figure 7.10. Il est clair que la phase est exactement linéaire en bande passante. Ce résultat est confirmé par la courbe de retard de groupe (figure 7.11). Cependant, les exigences en amplitude demandent un ordre relativement important ($N=100$), ce qui rend l'implémentation relativement couteuse (figure 7.12), à savoir : 101 multiplications, 100 additions et 100 éléments de retard, avec une implémentation type directe II (1D) qui coïncide dans ce cas avec l'implémentation de type directe I (immédiate ou 3D).

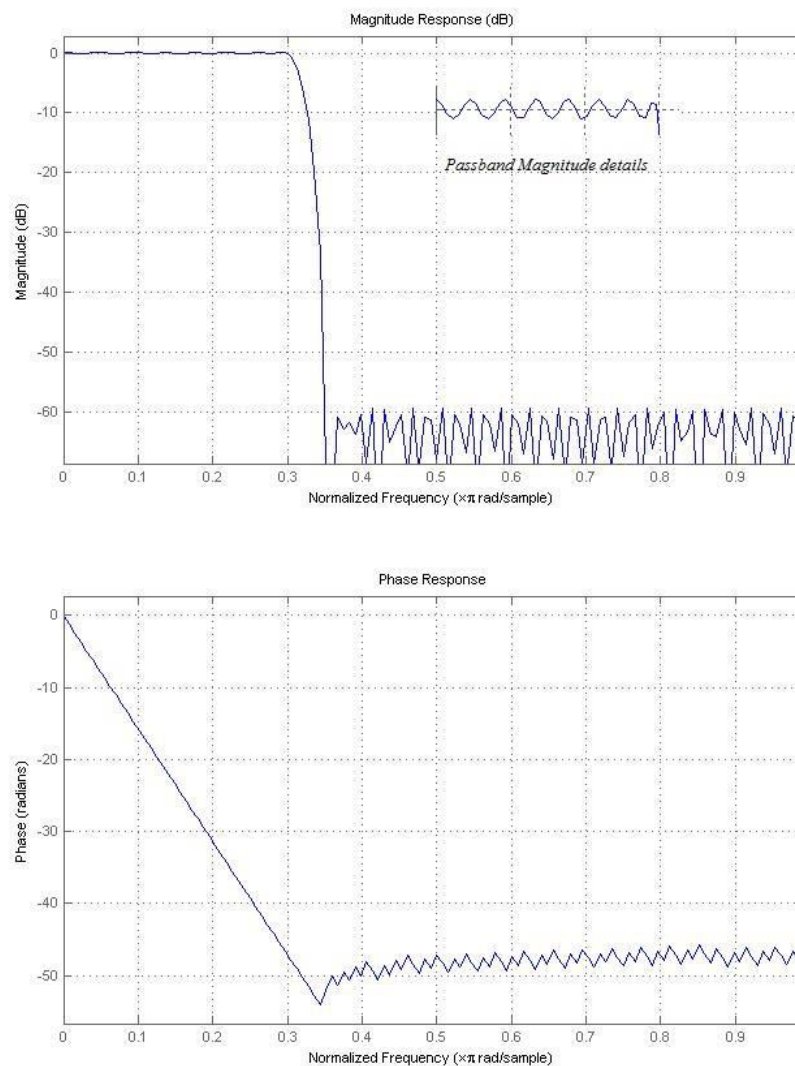


Figure 7.10. Réponse fréquentielle d'un filtre RIF à phase linéaire de Parks et McClellan
L'ordre de filtre $N=100$.

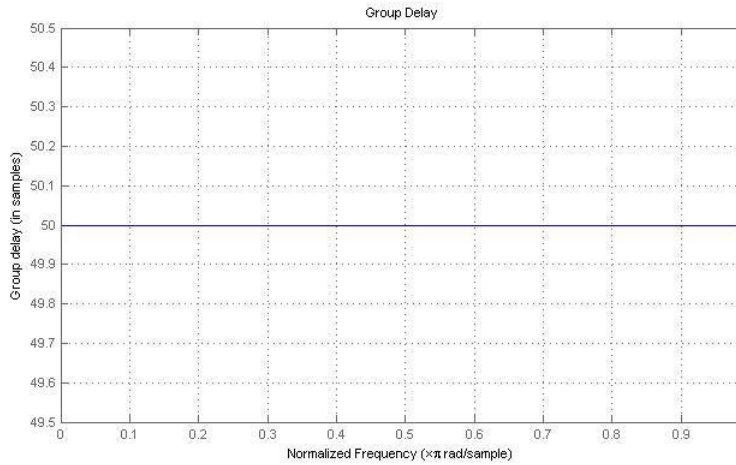


Figure 7.11. Temps de propagation de groupe résultant

```

Discrete-Time FIR Filter (real)
-----
Filter Structure      : Direct-Form II
Numerator Length    : 101
Denominator Length   : 1
Stable               : Yes
Linear Phase         : Yes (Type 1)

Implementation Cost
Number of Multipliers : 101
Number of Adders      : 100
Number of States      : 100
MultPerInputSample   : 101
AddPerInputSample     : 100
    
```

Figure 7.12. Détails et coût de l'implémentation

Nous proposons en deuxième lieu une conception de filtre numérique elliptique, avec les mêmes spécifications citées ci-dessus. Nous aurons un filtre d'ordre $N=8$, la réponse fréquentielle est illustrée en figure 7.13. Nous constatons que la phase n'est pas linéaire, en bande passante, ce qui est confirmé par la courbe de temps de propagation de groupe (figure 7.14), elle engendre un pique à la limite de la bande passante en fréquence normalisée égale à 0.3. La réalisation est obtenue d'une façon indirecte par cascade de 04 cellules biquadratiques, où chacune est implémentée en structure directe canonique (1D). Nous remarquons qu'avec un cout drastiquement réduit en nombre de multiplications (17/101), additions (16/100) et éléments de retard (8/100) (figure 7.15), nous avons des performances en amplitude similaire par rapport à celles du filtre RIF à phase linéaire d'ordre 100 (figures 7.10 et 7.13).

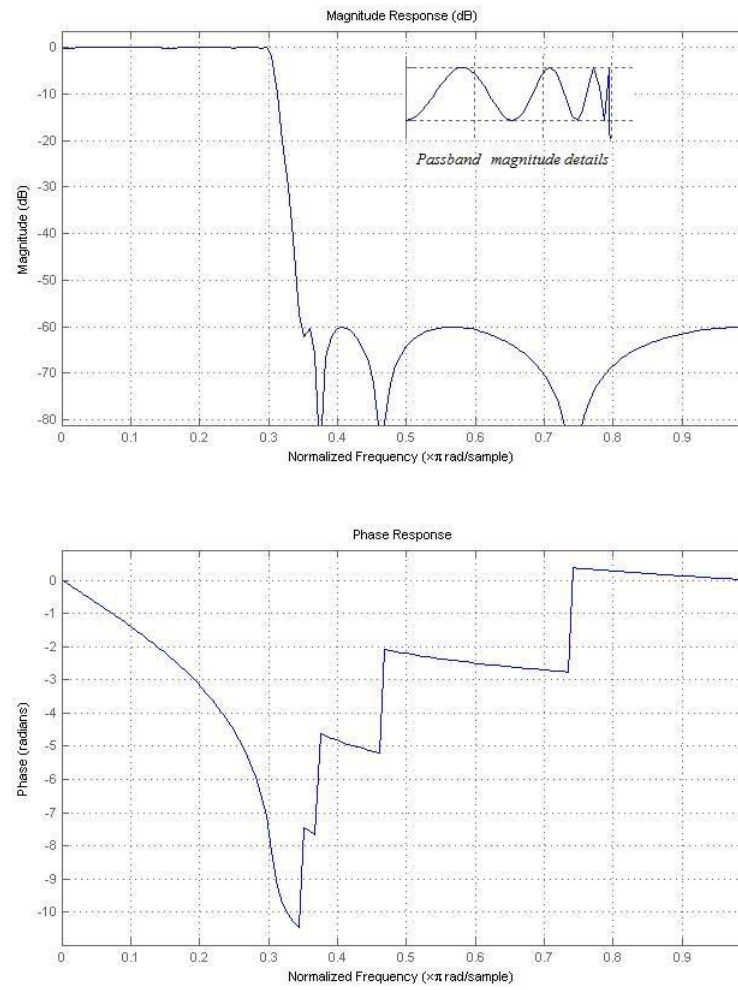


Figure 7.13. Réponse fréquentielle pour un filtre elliptique numérique d'ordre $N=8$

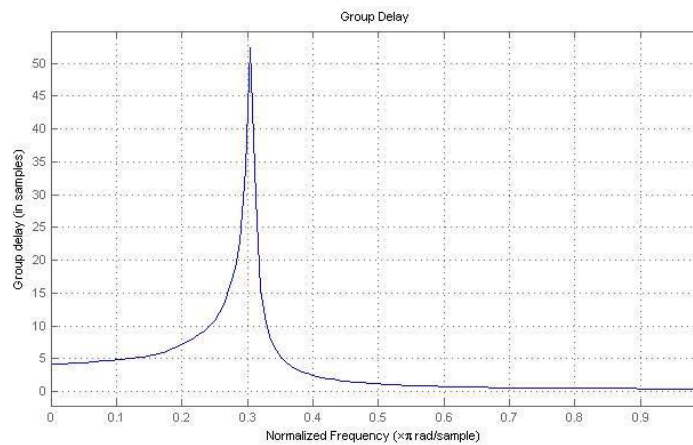


Figure 7.14. Temps de propagation de groupe engendré pour le même filtre numérique elliptique d'ordre $N=8$

```

Discrete-Time IIR Filter (real)
-----
Filter Structure      : Direct-Form II, Second-Order Sections
Number of Sections   : 4
Stable                : Yes
Linear Phase         : No

Implementation Cost
Number of Multipliers : 17
Number of Adders     : 16
Number of States     : 8
MultPerInputSample   : 17
AddPerInputSample    : 16
    
```

Figure 7.15. Détail et coût de l'implémentation du filtre RII elliptique.

A titre indicatif et afin de démontrer l'efficacité des filtre numériques elliptiques en sélectivité (caractéristiques d'amplitude par rapport au coût de réalisation), nous illustrons les réponses fréquentielles des filtres de types Tchebychev I, Tchebychev II et Butterworth. Les résultats sont illustrés en figures 7.16, 7.17, 7.18, 7.19 et 7.21. Nous remarquons que la caractéristique d'amplitude présentant la pente la plus raide en bande de transition, est celle de filtre de Caue par rapport aux deux filtres RII de Tchebychev I et II. De plus que le cout d'implémentation est le plus réduit (figures 7.15, 7.20 et 7.22). Le filtre de Butterworth engendre la performance en amplitude la moins bonne (pente moins raide en bande de transition) (figure 7.21) et la plus couteuse au point de vue réalisation (figure 7.22) parmi les quatre types de filtres RII. Cependant, il présente une phase acceptable (approximativement linéaire) en bande passante.

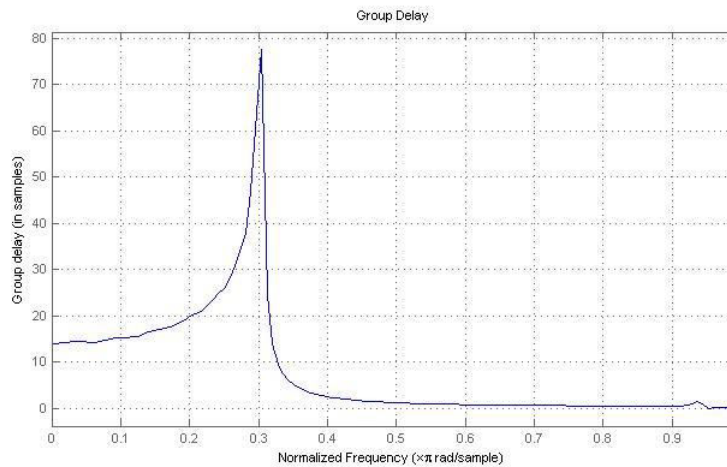


Figure 7.16. Temps de propagation de groupe pour un filtre numérique de type Tchebychev I d'ordre $N=16$

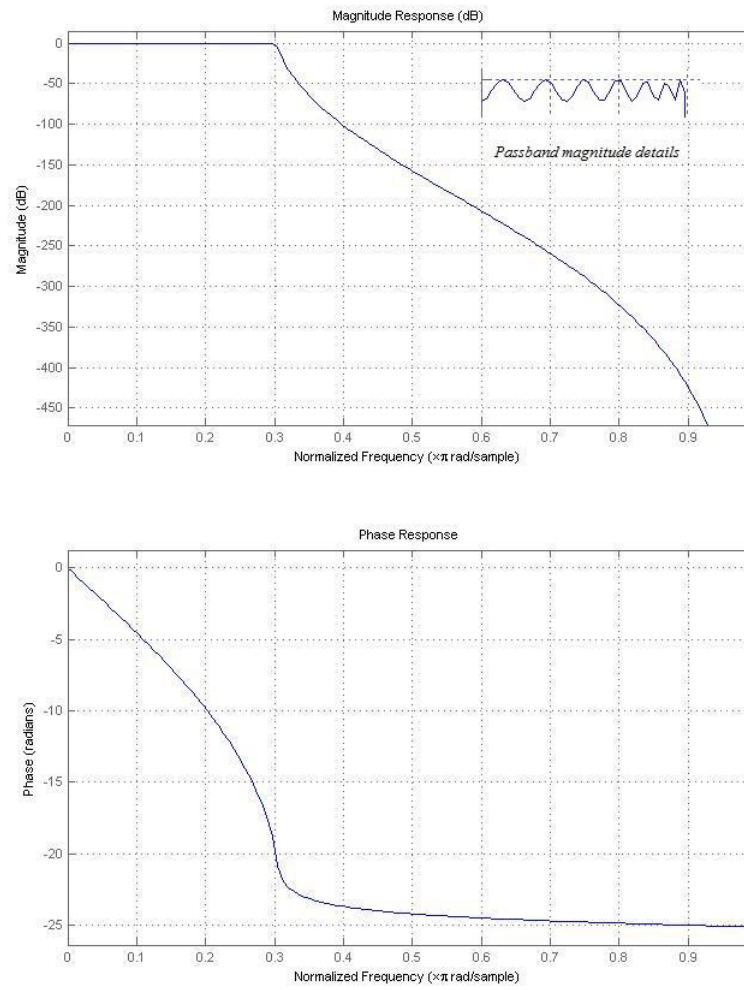


Figure 7.17. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique de type Tchebychev I d'ordre $N=16$

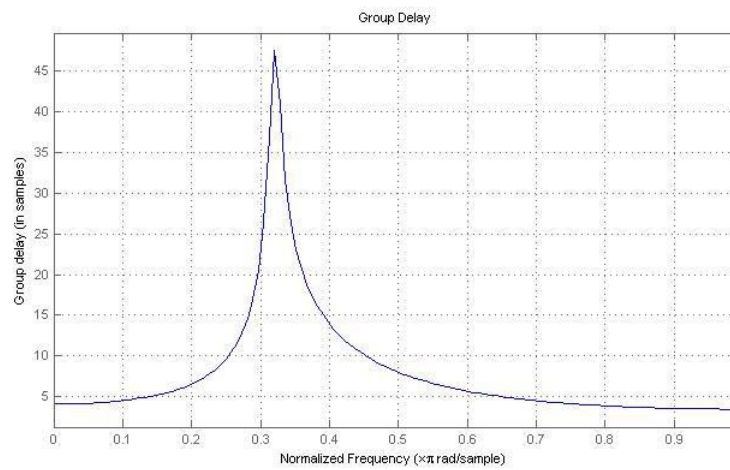


Figure 7.18. Temps de propagation de groupe pour un filtre numérique de type Tchebychev II d'ordre $N=16$

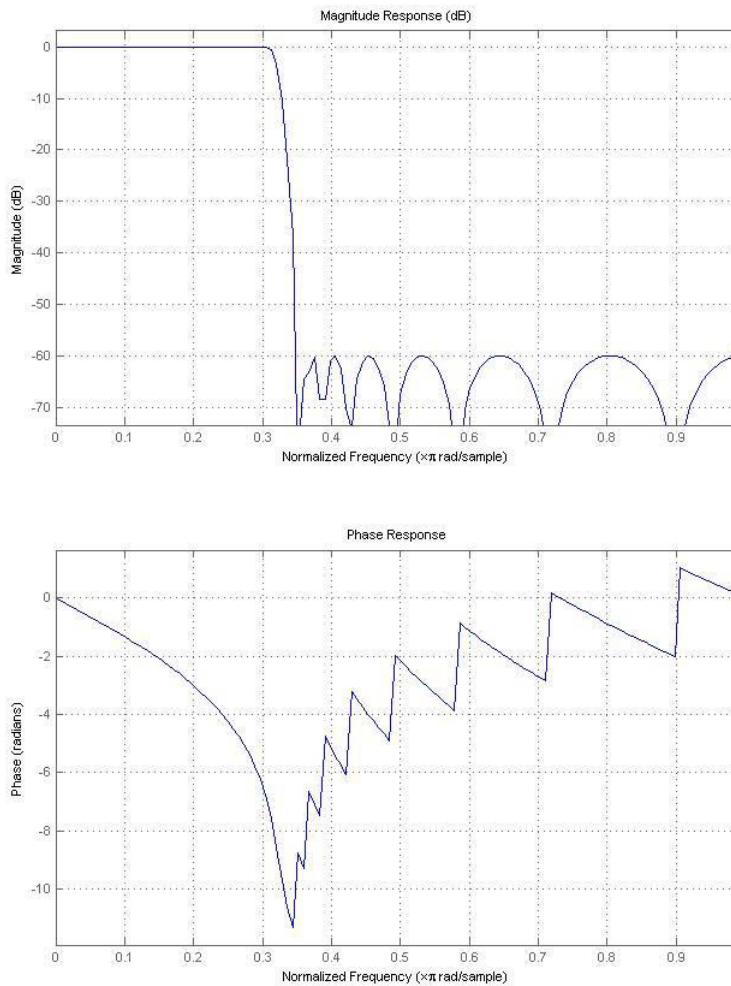


Figure 7.19. Réponse fréquentielle d'un filtre numérique de type Tchebychev II d'ordre $N=16$

```

Discrete-Time IIR Filter (real)
-----
Filter Structure      : Direct-Form II, Second-Order Sections
Number of Sections   : 8
Stable                : Yes
Linear Phase         : No

Implementation Cost
Number of Multipliers : 33
Number of Adders      : 32
Number of States      : 16
MultPerInputSample    : 33
AddPerInputSample     : 32
  
```

Figure 7.20. Détails et coûts de réalisations des filtres de Tchebychev I et II

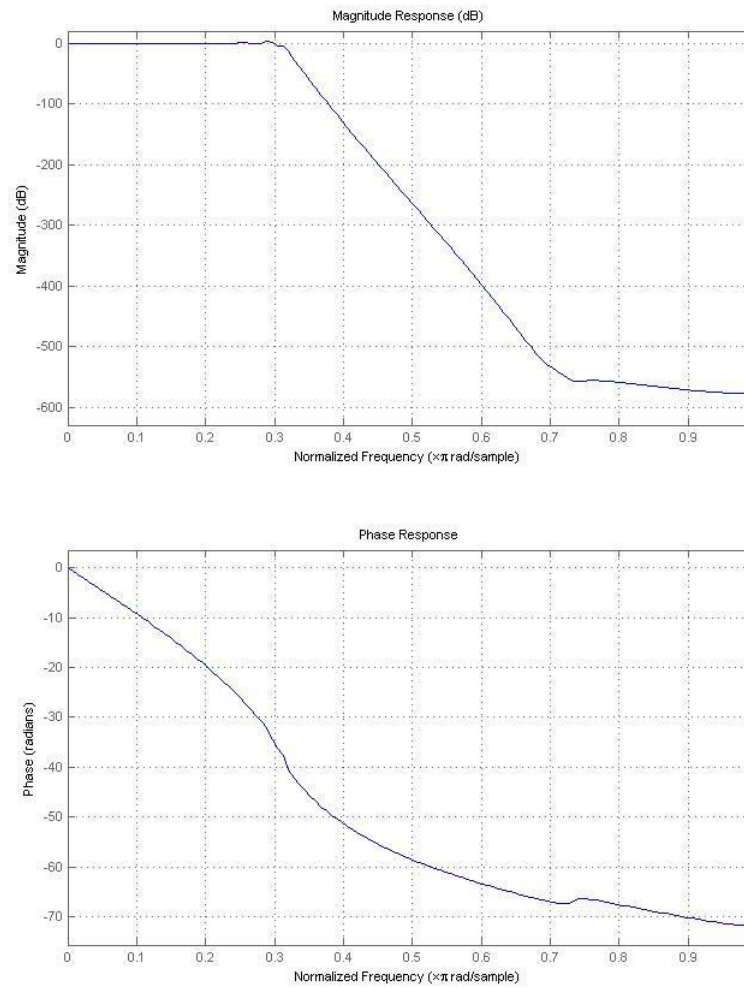


Figure 7.21. Réponse fréquentielle de filtre numérique de type Butterworth d'ordre $N=48$

```

Discrete-Time IIR Filter (real)
-----
Filter Structure      : Direct-Form II, Second-Order Sections
Number of Sections   : 24
Stable                : Yes
Linear Phase         : No

Implementation Cost
Number of Multipliers : 97
Number of Adders      : 96
Number of States      : 48
MultPerInputSample    : 97
AddPerInputSample     : 96
    
```

Figure 7.22. Détails et coût de réalisation de filtre numériques RII de type Butterworth d'ordre $N=48$

7.6. Conclusion

Les filtres RII présentent les avantages suivants :

1. Construction facile par transformation simple de filtres analogiques connus.
2. complexité de calcul faible par rapport aux filtres RIF.
3. Ils peuvent être très sélectifs surtout pour les filtres elliptiques.

En revanche, ils présentent les inconvénients suivants :

1. Pas de phase linéaire.
2. Moins flexibles que les filtres RIF dans le cas de réponses fréquentielles non standards.

Chapitre 8 : Processus Aléatoires

8.1 Introduction

Nous avons vu qu'un signal peut être représenté par une fonction ou distribution dans le cas des signaux parfaitement prédictibles ou déterministes. Cependant, ces derniers ne peuvent pas décrire certains phénomènes de nature complexe, rencontrés en traitement du signal tels que l'agitation thermique des électrons dans les résistances ; où la description des signaux mesurés dépend d'une certaine manière aux lois du hasard. Ils ne possèdent pas d'une représentation analytique. Ils peuvent toutefois être caractérisés par des formalistes de probabilités et statistiques, où la notion de *variable aléatoire* est primordiale pour décrire toute expérience ou mesure aléatoire et aboutit à *la fonction aléatoire* comme expression permettant de décrire ce phénomène. Dans ce cas, à chaque point (instant et/ou coordonnées), la fonction décrivant le signal prend une valeur particulière parmi un ensemble et ceci d'une manière aléatoire (inconnue de l'observateur). En général l'ensemble des valeurs prises par la fonction à un point donné peut être modélisé par une loi de probabilité (uniforme, gaussienne,..., etc.). Ces signaux sont connus aussi sous l'appellation *de processus aléatoires ou stochastiques* [4].

8.2 Eléments de probabilités

8.2.1 Notions de base et définitions

8.2.1.1 Expérience aléatoire

Nous appelons *expérience aléatoire* ou *épreuve*, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard, lorsque nous répétons l'expérience dans les mêmes conditions [10].

8.2.1.2 Espace des événements

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une épreuve ou expérience aléatoire est dit *espace des événements* ou *espace des épreuves*, désigné par Ω . Un *événement* est un ensemble de Ω contenant certains résultats possibles d'une épreuve. Nous avons, donc : $A \subset \Omega$.

8.2.1.3 Réalisation d'un événement

Considérons une expérience aléatoire d'espace d'événement Ω . Soit A un événement quelconque lié à cette expérience ($A \subset \Omega$). Lorsque l'issue, notée par w de cette expérience appartient à A ($w \in A$), nous disons que l'événement A s'est réalisé. Dans le cas contraire ($w \notin A$), nous disons que l'événement A ne s'est pas réalisé.

8.2.1.4 Opérations sur les événements

8.2.1.4.1 Union

Nous appelons *union de deux événements* A et B , noté par $A \cup B$, s'il est réalisé lorsqu'au moins un des événements A ou B s'est réalisé.

8.2.1.4.2 Intersection

Nous appelons *intersection de deux événements* A et B , noté par $A \cap B$, s'il est réalisé lorsque les événements A et B sont réalisés simultanément.

8.2.1.4 Événements incompatibles

Nous disons que deux événements A et B sont incompatibles ou disjoints ou mutuellement exclusifs si la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre ou encore leur intersection est l'événement impossible, qui ne contient aucun résultat possible. Nous avons donc :

$$A \text{ et } B \text{ disjoints} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \quad (8.1)$$

8.2.1.5 Système complet

Soit Ω l'espace des événements associé à une expérience aléatoire. Les événements A_k $k = 1, \dots, n$ liés à cette épreuve forment un *système complet* de Ω si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $A_k \neq \emptyset$
2. $A_k \cap A_i = \emptyset \quad \forall i \neq k, i \text{ et } k = 1, \dots, n$
3. $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$

8.2.1.6 Algèbre, σ -algèbre (Tribu) d'événements

L'espace Ω défini comme ensemble des résultats possible d'une expérience aléatoire peut être :

- 1- fini : contient un nombre fini d'éléments.
- 2- infini dénombrable : par l'exemple le cas de l'ensemble des entiers naturels \square
- 3- continu non dénombrable : par exemple le cas de toute partie bornée l'ensemble des nombre réels \square

En fonction de la nature de Ω , nous définissons deux classes importantes : l'algèbre pour le cas fini et σ -algèbre dans les autres cas.

Nous appelons algèbre sur un espace Ω , que nous désignons par Δ , une famille d'événements vérifiant les conditions :

1. $\Omega \in \Delta$

2. Stabilité par complémentarité

$$A \in \Delta \Rightarrow \bar{A} \in \Delta$$

3. Stabilité par union finie

$$\text{si } A_k \in \Delta \text{ alors } \bigcup_{k=1}^n A_k \in \Delta \quad k = 1, \dots, n$$

Aussi, nous appelons σ -algèbre ou tribu sur un espace d'événements Ω , que nous désignons par T , une famille d'événements vérifiant les conditions :

$$1. \Omega \in T$$

2. Stabilité par complémentarité

$$A \in T \Rightarrow \bar{A} \in T$$

3. Stabilité par union dénombrable

$$\text{si } A_k \in T \text{ alors } \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in T \quad k = 1, \dots, +\infty$$

8.2.1.7 Tribu de Borel

Considérons sur l'ensemble des nombres réels, les intervalles de la forme : $]-\infty, a]$, avec a fini. La famille des intervalles de cette forme n'est pas stable par complémentarité. Elle n'est donc pas une tribu, mais elle engendre une tribu que nous désignons B , appelé tribu de Borel ou tribu Borélienne. Cette tribu contient également : - les points, les intervalles ouverts ou fermés, et les unions d'une infinité dénombrable d'ouverts.

8.2.1.8 Espace de probabilité

Soit un espace d'événements Ω munit d'une tribu T . Nous obtenons ainsi un espace probabiliste (Ω, T) . Nous appelons probabilité sur (Ω, T) , toute application notée P de (Ω, T) dans l'intervalle $[0, 1]$ telle que :

$$1. P(\Omega) = 1$$

$$2. \text{ si } A_k \text{ sont deux à deux disjoints ou incompatibles alors : } P\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k P(A_k).$$

L'espace (Ω, T, P) est dit espace de probabilité.

8.2.1.9 Probabilité conjointe

La probabilité pour que deux événements A et B soient réalisés simultanément s'appelle probabilité conjointe et notée par :

$$P(A \cap B) = P(A, B).$$

8.2.1.10 Probabilité conditionnelle

Etant donnés deux événements distincts non vides A et B . Nous définissons la *probabilité conditionnelle* d'occurrence de A , B étant supposé réalisé par :

$$P(A/B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

8.2.1.11 Indépendance statistique

Deux événements A et B sont dits *statistiquement indépendants*, si la probabilité conditionnelle de l'un, est égale sa probabilité d'occurrence. Nous avons donc :

$$P(A/B) = P(A) \text{ ou } P(B, A) = P(A) \tag{8.2}$$

8.2.1.12 Variables aléatoires réelle à une dimension

Soit un espace de probabilité (Ω, T, P) associé à une expérience aléatoire. Notons par X l'application de Ω dans \mathbb{R} , telle que :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto X(w) \end{aligned} \tag{8.3}$$

Soit A_x l'image réciproque de l'intervalle $]-\infty, x]$, c'est-à-dire : $\{w \in \Omega / X(w) \leq x\}$. Dans ce cas, X est appelée variable aléatoire réelle sur l'espace (Ω, T) .

Nous pouvons étendre cette définition pour n'importe quelle intervalle $]b, a]$ de \mathbb{R} muni de la tribu de Borel, où l'image réciproque par X est un événement de T .

8.2.1.13 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

X étant une variable aléatoire sur \mathbb{R} . Nous appelons fonction de répartition de X , l'application :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto F(x) = P(-\infty < X \leq x) \end{aligned} \tag{8.4}$$

$F(x)$ est généralement notée $P(X \leq x)$ et représente une probabilité cumulée.

8.2.1.14 Variable aléatoire absolument continue

Une variable aléatoire est dite absolument continue si sa fonction de répartition $F(x)$ est continue (à droite et à gauche) ; et admet une dérivée à droite et à gauche, généralement égales.

8.2.1.15 Densité de probabilité

Nous appelons fonction densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue, la dérivée de la fonction de répartition, notée f , telle que :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (8.5)$$

Ou encore :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau \quad (8.6)$$

La fonction densité satisfait deux conditions :

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

8.2.1.16 Esperance mathématique d'une variable aléatoire

C'est la valeur que nous s'attendons à trouver, en moyenne, si nous répétons un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Théoriquement, c'est une somme des valeurs pondéré avec la fonction de densité de probabilité.

8.2.1.17 Moment d'ordre k d'une variable aléatoire

Nous appelons moment d'ordre k d'une variable aléatoire X , noté par m_k tel que :

$$m_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) \quad (8.7)$$

Il en découle de (8.7), plusieurs définitions, à savoir :

Le moment d'ordre 1 dit aussi moyenne statistique ou espérance mathématique de la variable aléatoire X , tel que :

$$m_1 = \mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \quad (8.8)$$

Si $m_1 = \mu = 0$, X est dite centrée. Dans le cas général, centrer une variable aléatoire X consiste à considérer la variable aléatoire Y telle que : $Y = X - \mu$.

Le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire centrée est dit variance tel que :

$$m_2 = \sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 dF(x) \quad (8.9)$$

Nous avons la relation entre la moyenne statistique et la variance :

$$\sigma_X^2 = m_2 - \mu^2 \tag{8.10}$$

L'écart type est défini par :

$$\sigma_X = \sqrt{m_2 - \mu^2} \tag{8.11}$$

8.2.1.18 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

La fonction $\Phi_X(\mu)$ est dite caractéristique de la variable aléatoire X si :

$$\Phi_X(\mu) = E(e^{j\mu X}) \tag{8.12}$$

8.2.1.19 Fonction de variable aléatoire

ψ étant une fonction, nous appelons fonction de la variable aléatoire X , la variable aléatoire Y , notée par $\psi(X)$ telle que :

$$x = X(w) \quad \forall w \in A \Rightarrow \psi(x) = \psi[X(w)] = Y(w) \tag{8.13}$$

Où w est l'issue d'une expérience aléatoire, A est un événement de l'espace Ω .

8.2.1.20 Variable aléatoire à plusieurs dimensions

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires définies respectivement sur les espaces probabilisés (Ω_1, T_1, P_1) et (Ω_2, T_2, P_2) ; Si $A_1(w_1) \in T_1$ est un événement relatif à l'expérience aléatoire 1 avec l'issue w_1 , et une probabilité $P_1[A_1(w_1)]$; et $A_2(w_2) \in T_2$ est un événement relatif à l'expérience aléatoire 2 avec l'issue w_2 , et une probabilité $P_2[A_2(w_2)]$; le couple $X = (X_1, X_2)$ définit une variable sur l'espace $(\Omega, T, P) = (\Omega_1 \times \Omega_2, T_1 \times T_2, P_1 \times P_2)$, dite à deux dimensions telle que [2] :

$$P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1)P_2(A_2) \tag{8.14}$$

La nouvelle variable aléatoire X est caractérisée par une fonction de répartition dite conjointe, telle que :

$$F_{x_1, x_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \tag{8.15}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto F(x_1, x_2) = P(-\infty < X_1 \leq x_1, -\infty < X_2 \leq x_2)$$

Nous pouvons ainsi, définir une fonction de densité de probabilité à deux dimensions telle que :

$$f_{x_1, x_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \tag{8.16}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Et :

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (8.17)$$

Aussi, nous pouvons définir une fonction caractéristique de la variable aléatoire à deux dimensions, telle que :

$$\Phi_{X_1, X_2}(\mu_1, \mu_2) = E\left[e^{j(\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2)}\right] \quad (8.18)$$

Le moment croisé ou conjoint d'ordre 2 est défini par :

$$E(X_1 X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (8.19)$$

La covariance ou moment conjoint d'ordre 2 centré est définie par :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = E\left\{\left[X_1 - E(X_1)\right]\left[X_2 - E(X_2)\right]\right\} = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2) \quad (8.20)$$

Le coefficient de corrélation ou covariance normalisée est défini par :

$$r = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (8.21)$$

8.2.2 Variables aléatoires indépendantes, corrélation et orthogonalité

8.2.2.1 Variables aléatoires indépendantes

Par analogie avec l'indépendance statistique des événements, nous disons que deux variables aléatoires X_1 et X_2 , sont indépendantes si leurs lois obéissent à la propriété :

Avec la fonction densité de probabilité :

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \quad (8.22)$$

Avec la fonction de répartition :

$$F_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = F_{x_1}(x_1) F_{x_2}(x_2) \quad (8.23)$$

Avec la fonction caractéristique :

$$\Phi_{x_1 x_2}(\mu_1, \mu_2) = \Phi_{x_1}(\mu_1) \Phi_{x_2}(\mu_2) \quad (8.24)$$

Avec le moment croisé d'ordre 2 :

$$E(X_1 X_2) = E(X_1)E(X_2) \quad (8.25)$$

8.2.2.2 Variables aléatoires non corrélées

Deux variables aléatoires X_1 et X_2 , sont non corrélées, dites aussi décorrelées si :

$$\text{cov}(X_1, X_2) = 0 \quad (8.26)$$

Il en découle des propriétés (8.25) et (8.26) que si les deux variables aléatoires X_1 et X_2 , sont indépendantes alors leur covariance est nulle (elles sont non corrélées). La réciproque n'est pas vraie que pour le cas des variables aléatoires gaussiennes.

8.2.2.3 Variables aléatoires orthogonales

Deux variables aléatoires sont dites orthogonales si :

$$E(X_1 X_2) = 0 \quad (8.27)$$

8.3 Processus aléatoire et fonction aléatoire

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) muni d'une tribu de Borel. Nous appelons fonction aléatoire, une application X , telle que [2] :

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{I} \\ (w, t) &\mapsto X(w, t) \end{aligned} \quad (8.28)$$

Pour t fixé, $X(w, t)$ est une variable aléatoire, notée $X(t)$. Pour w réalisé, $X(w, t)$ est une fonction ordinaire de t . Cette fonction peut être continue ou discrète. (figure 8.1).

Exemple : Soit

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathbb{I} &\rightarrow \mathbb{I} \\ (w, t) &\mapsto X(w, t) = a \cos(2\pi ft + \varphi) \end{aligned} \quad (8.29)$$

Où l'amplitude a et la fréquence linéaire f de la sinusoïde sont les deux constantes et la phase φ est aléatoire de loi donnée.

Il est clair que pour chaque valeur de $t = t_k$ ($k = 0, 1, \dots, +\infty$) donnée, $X(w, t_k) = a \cos(2\pi ft_k + \varphi)$ est une variable aléatoire fonction de φ , notée $X(t_k)$.

Pour chaque issue ou épreuve w_i , nous avons une phase φ_i , le résultat est une fonction sinusoïdale de la variable t , appelé *réalisation de la fonction aléatoire* X .

Un signal aléatoire représente la notion physique d'une fonction aléatoire. Lorsque la variable d'étude représente le temps, le signal est appelé processus aléatoire ou stochastique.

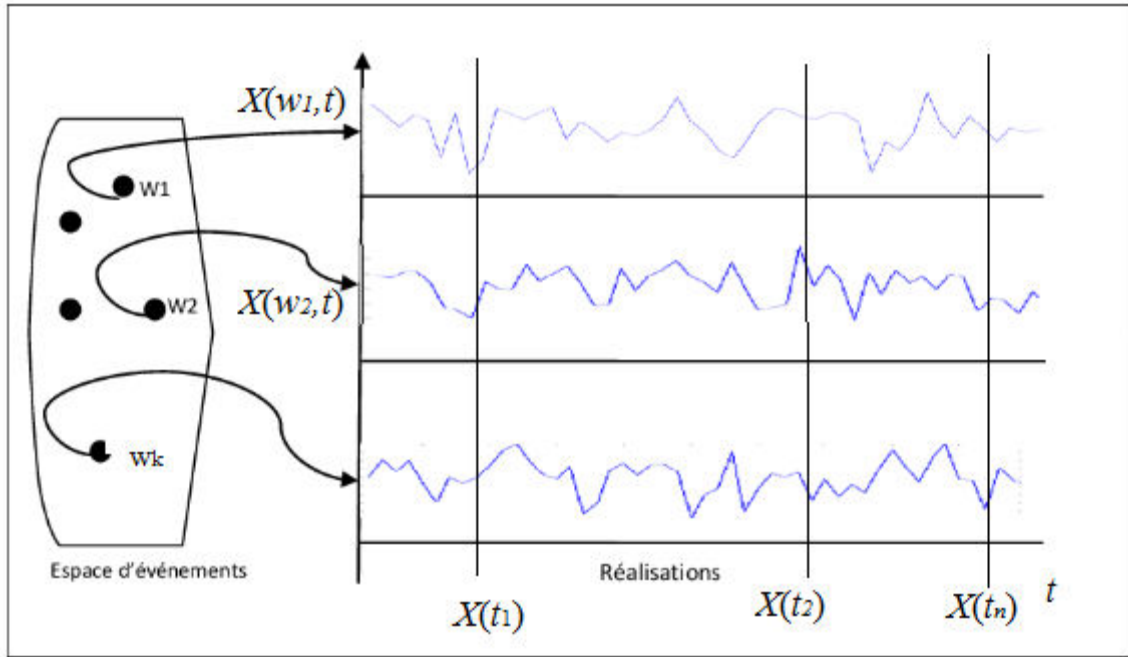


Figure 8.1. Illustration d'un processus aléatoire.

8.3.1 Caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire

Nous avons vu qu'une variable aléatoire est peut être décrite par ses caractéristiques statistiques telles que : fonction de répartition, densité de probabilité, fonction caractéristique, ...,etc. Par analogie avec ces notions une fonction aléatoire peut être décrite par un ensemble de variables aléatoires induites séparément ou conjointement. Pour cela, il est nécessaire de connaître quelque soit la suite : t_1, t_2, \dots, t_n , et quel que soit la valeur de n la densité de probabilité : $f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$.

L'ensemble dénombrable de ces lois s'appelle loi temporelle de la fonction aléatoire X , et nécessite pour sa connaissance, une description des n variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$; ainsi que leur dépendance statistique.

8.3.1.1 Caractéristiques statistiques d'ordre 1

Si nous considérons que t est fixé, $X(t)$ est une variable aléatoire réalisation de la fonction aléatoire $X(t)$. Ainsi, nous pouvons la caractérisée par :

1. une fonction de répartition

$$F_1(x, t) = P[X(t) \leq x] \tag{8.30}$$

Dans ce cas, x est un seuil appartenant au domaine de variation de la variable aléatoire $X(t)$, avec un valeur fixée de t .

2. une fonction densité de probabilité

$$f_1(x, t) = \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} \quad (8.31)$$

3. des moments instantanés d'ordre k

$$m_k(t) = E[X^k(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k(t) f_1(x, t) dx \quad (8.32)$$

4. une espérance mathématique

$$\mu(t) = m(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) f_1(x, t) dx \quad (8.33)$$

5. un moment d'ordre 2

$$m_2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) f(x, t) dx \quad (8.34)$$

6. une variance

$$\sigma_x^2(t) = E\left\{[X(t) - \mu(t)]^2\right\} = E[X^2(t)] - \mu^2(t) \quad (8.35)$$

Dans le cas d'une fonction aléatoire complexe $Z(t)$, nous pouvons définir les parties réelle $X(t)$ et imaginaire $Y(t)$ telle que :

$$Z(t) = X(t) + jY(t) \quad (8.36)$$

-la moyenne de $Z(t)$ s'écrit :

$$E[Z(t)] = E[X(t)] + jE[Y(t)] \quad (8.37)$$

$$m_2(t) = E[|Z(t)|^2] = E[X^2(t)] + E[Y^2(t)] \quad (8.38)$$

8.3.1.2 Caractéristiques statistiques d'ordre 2

t_1 et t_2 étant fixés, les deux réalisations $X(t_1)$ et $X(t_2)$ définissent une variable aléatoire à deux dimensions $[X(t_1), X(t_2)]$ caractérisée par :

1. une fonction de répartition conjointe

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P[X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2] \quad (8.39)$$

2. une densité de probabilité conjointe

$$f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (8.40)$$

3. une espérance mathématique

$$\mu(t_1, t_2) = m(t_1, t_2) = E\left\{\left[X(t_1), X(t_2)\right]^T\right\} = \left[E\{X(t_1)\}, E\{X(t_2)\}\right]^T = [\mu(t_1), \mu(t_2)]^T \quad (8.41)$$

4. un moment d'ordre 2 croisé ou covariance

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)f_2(x_1, x_2, t_1, t_2)dx_1dx_2 \quad (8.42)$$

Dans le cas d'une fonction aléatoire complexe la covariance s'écrit :

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)\bar{X}(t_2)] \quad (8.43)$$

Elle est désignée aussi par l'*autocorrélation*.

Avec : $\bar{X}(t_2)$ est le conjugué de $X(t_2)$.

La covariance $R_X(t_1, t_2)$ permet de mesurer la dépendance statistique des réalisations $X(t_1)$ et $X(t_2)$ de la fonction aléatoire aux instants t_1 et t_2 . Généralement, nous préférons mesurer cette dépendance en utilisant le coefficient de corrélation ou covariance normalisée tel que :

$$r_X = \frac{R_X^c(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} \quad (8.44)$$

Avec :

$$R_X^c(t_1, t_2) = E\left\{\left[X(t_1) - E[X(t_1)]\right]\left[X(t_2) - E[X(t_2)]\right]\right\} = R_X(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) \quad (8.45)$$

$R_X^c(t_1, t_2)$ désigne la covariance centrée et $\sigma_X(t_1)$ et $\sigma_X(t_2)$ les écarts respectifs des variable aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$.

8.3.2 Propriétés de l'autocorrélation

8.3.2.1 Symétrie

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2, t_1) \quad (8.46)$$

$$R_X(t, t) = E[X^2(t)] \quad (8.47)$$

Dans le cas d'une fonction aléatoire complexe, les expressions (8.46) et (8.47) s'écrivent respectivement ::

$$R_X(t_1, t_2) = \bar{R}_X(t_2, t_1) \tag{8.48}$$

$$R_X(t, t) = E\left[|X(t)|^2\right] \tag{8.49}$$

8.4 Processus aléatoire ou fonction aléatoire du second ordre

Une fonction aléatoire $X(t)$ est dite du second ordre si son moment d'ordre 2 $E\left[|X(t)|^2\right]$ existe.

Nous avons donc [2]:

$$E\left[|X(t)|^2\right] < +\infty \quad \forall t \tag{8.50}$$

Il en découle de (8.56) que :

$$E[X(t)] < +\infty \quad \forall t \tag{8.51}$$

$$R_X(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)\bar{X}(t_2)\right] < +\infty \quad \forall t_1, t_2 \tag{8.52}$$

8.5 Stationnarité

Un signal aléatoire est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine de temps. C'est-à-dire si sa loi temporelle est invariante par translation dans le temps. Nous avons avec la fonction densité de probabilité [2,4]:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 - \tau, t_2 - \tau, \dots, t_n - \tau) \quad \forall \tau \tag{8.53}$$

Cette stationnarité est dite d'ordre infini et reste idéale. Par ailleurs, la stationnarité des signaux aléatoires implique celle de tout moment simple ou croisé, en particulier la moyenne et le moment d'ordre 2, à savoir :

8.4.1 Stationnarité d'ordre 1

Elle est définie par :

$$f_1(x, t) = f_1(x, t - \tau) = f_1(x) \tag{8.54}$$

Elle est caractérisée par une espérance mathématique constante par rapport à t , d'où :

$$E[X(t)] = E[X(0)] = \mu = \text{constante} \tag{8.55}$$

8.4.1 Stationnarité d'ordre 2

Dans le cas, où la stationnarité d'ordre 1 est vérifiée, nous pouvons aller à la stationnarité d'ordre 2 défini par :

$$f_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2, \tau), \text{ avec : } \tau = t_1 - t_2 \quad (8.56)$$

Elle est caractérisée par une fonction de covariance qui ne dépend qu'un seul paramètre τ , dit délai. Cette fonction de covariance est désignée dans ce cas par la fonction de l'autocorrélation. Nous avons ainsi :

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)\bar{X}(t_2)] = E[X(t)\bar{X}(t-\tau)] = R_X(\tau), \text{ avec : } \tau = t_1 - t_2 \quad (8.57)$$

Dans le cas de stationnarité d'ordre 2, la fonction d'autocorrélation vérifie les propriétés suivantes :

Si $X(t)$ est réelle alors, nous avons :

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(-\tau) \quad (8.58)$$

Donc, la fonction d'autocorrélation est paire et réelle et maximale à l'origine, d'où :

$$R_X(0) = E[X^2(t)] = E[X^2(0)] \quad (8.59)$$

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0) \quad \forall \tau \quad (8.60)$$

Par conséquent, la fonction d'autocorrélation admet un maximum absolu à l'origine, égal au moment d'ordre 2.

Pour des délais τ grands, les variables aléatoires $X(t)$ et $X(t-\tau)$ tendent, en général, à devenir indépendantes, ou au moins décorrélées, ce qui donne :

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} E[X(t)]E[X(t-\tau)] = \mu^2 \quad (8.61)$$

Si $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont deux fonction aléatoires réelles et conjointement stationnaires, la fonction de covariance conjointe est appelée fonction intercorrélation. Elle s'écrit :

$$R_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E[X_1(t_1)X_2(t_2)] = E[X_1(t)X_2(t-\tau)] = R_{X_1 X_2}(\tau), \text{ avec : } \tau = t_1 - t_2 \quad (8.62)$$

Nous avons aussi :

$$R_{X_1 X_2}(\tau) = R_{X_2 X_1}(-\tau) \quad (8.63)$$

$$|R_{X_1 X_2}(\tau)|^2 \leq R_{X_1}(0)R_{X_2}(0) \quad (8.64)$$

Si $X(t)$ est complexe, nous avons :

$$R_X(\tau) = E[X(t)\bar{X}(t-\tau)] = E[X(t)\bar{X}(t+\tau)] = \bar{R}_X(-\tau) \quad (8.65)$$

$$R_X(0) = E[|X(t)|^2] = E[|X(0)|^2] \quad (8.66)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} E[X(t)]E[\bar{X}(t-\tau)] = |\mu|^2 \quad (8.67)$$

La fonction d'intercorrélation s'écrit :

$$R_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E[X_1(t_1)\bar{X}_2(t_2)] = E[X_1(t)\bar{X}_2(t-\tau)] = R_{X_1 X_2}(\tau), \text{ avec : } \tau = t_1 - t_2 \quad (8.68)$$

Nous avons aussi :

$$R_{X_1 X_2}(\tau) = \bar{R}_{X_2 X_1}(-\tau) \quad (8.69)$$

8.6 Ergodisme

La notion d'ergodisme concerne les relations entre les moyennes statistiques et les moyennes temporelles. En général, les moyennes statistiques sont des fonctions du temps et ne dépendent pas de la réalisation w ; cependant, les moyennes temporelles sont des variables aléatoires dépendants de la réalisation w et indépendantes du temps [2].

8.6.1 Ergodisme strict

Un signal stationnaire est dit ergodique au sens strict si toutes ses moyennes d'ensemble sont égales aux moyennes temporelles. C'est l'ergodisme de la loi ou ergodisme d'ordre infini. Par conséquent, toutes les propriétés statistiques de processus peuvent être décrites à partir d'une seule réalisation.

8.6.2 Ergodisme fort

En pratique, la propriété d'ergodisme étant difficile à vérifier. Ans ce cas, nous limitons l'étude à l'ergodisme d'ordre n , appelé ergodime fort d'ordre n , où tous les moments jusqu'à l'ordre n sont supposés stationnaires, et plus particulièrement à l'ergodisme fort, nous avons :

8.6.2.1 Ergodisme de la moyenne (d'ordre 1)

Il est vérifié si pour presque toutes les réalisations $X(w, t)$, la moyenne temporelle existe et reste constante :

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = E[X(t)] = \mu \quad (8.70)$$

8.6.2.2 Ergodisme de la fonction d'autocorrélation (d'ordre 2)

Il est vérifié si pour presque toutes les réalisations $X(w, t)$, la moyenne temporelle d'ordre 2 existe et égale à la fonction d'autocorrélation.

$$\langle x(t), \bar{x}(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \bar{x}(t-\tau) dt = E[X(t) \bar{X}(t-\tau)] = R_X(\tau) \quad (8.71)$$

8.6.3 Ergodisme faible

La notion d'ergodisme faible des processus aléatoires d'ordre 2 n'est pas liée à la condition de stationnarité. L'ergodisme faible est évalué en fonction des caractéristiques centrées telles que la variance et la covariance centrée. Nous distinguons :

8.6.3.1 Ergodisme faible d'ordre 1

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sigma^2(x_T) = 0, \text{ avec : } x_T(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_c(t) \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{x(t) - E[X(t)]\right\} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) d\tau \quad (8.72)$$

8.6.3.1 Ergodisme faible d'ordre 2

Un processus aléatoire $X(t)$ est faiblement ergodique d'ordre 2, si la variable aléatoire $Y(t)$ telle que : $Y(t) = X(t)X(t-\tau)$, (τ quelconque) est faiblement ergodique d'ordre 1. C'est-à-dire si :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sigma^2(y_T) = 0, \text{ avec : } y_T(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y_c(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left\{E\left[|X(t)X(t-\tau)|^2 - R_{X^2}(0)\right] \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right)\right\} d\tau \quad (8.73)$$

8.7 Densité spectrale

Nous avons vu aux chapitres précédents que la transformée de Fourier joue un rôle important dans l'étude et l'analyse des processus déterministes. Cependant, nous ne pouvons pas appliquer directement l'analyse de Fourier aux processus aléatoires. Wiener et Khintchine ont développé les bases théoriques pour le traitement des processus aléatoires en montrant que la densité spectrale est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation pour un processus aléatoire stationnaire et ergodique du second ordre.

L'une des conditions de l'existence de la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ déterministe est qu'il soit absolument sommable. Les processus aléatoires sont des signaux à puissance moyenne finie non nulle et par conséquent, ils ne sont pas absolument intégrables. Il ne possèdent donc pas de transformée de Fourier à l'exception de certain cas de processus périodiques, constants, ..., etc., où la transformée de Fourier n'existe qu'au sens des distributions. La densité spectrale d'un processus aléatoire peut être obtenue par l'approche suivante. Considérons une réalisation $x(t)$ d'un processus aléatoire réel $X(w, t)$. Pour obtenir la densité spectrale de puissance via la transformée de Fourier, nous considérons une version tronquée de cette réalisation $x_T(t)$, telle que [4] :

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (8.74)$$

Et :

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} x_T(t) \tag{8.75}$$

La réalisation en version tronquée $x_T(t)$ est absolument sommable, et possède une transformée de Fourier $X_T(f)$ telle que :

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-2j\pi ft} dt \tag{8.76}$$

La densité spectrale est obtenue en utilisant le théorème de Parseval , nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df \tag{8.77}$$

D'où :

$$P_T = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(f)|^2 df \tag{8.78}$$

Remarquons que P_T est une variable aléatoire, ainsi nous pouvons calculer la moyenne $E(P_T)$, où elle joue le même rôle que l'énergie pour les signaux déterministes. Nous avons :

$$E(P) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E(P_T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} E[x^2(t)] dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} E[|X_T(f)|^2] df \tag{8.79}$$

D'où :

$$E(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E[|X_T(f)|^2] df \tag{8.80}$$

Le terme :

$$DSP(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E[|X_T(f)|^2] \tag{8.81}$$

est appelé densité spectrale de puissance.

8.7.1 Théorème de Wiener Khintchine

La relation entre la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocorrélation d'un processus aleatoire stationnaire d'ordre 2 est donnée par :

$$DSP(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \tag{8.82}$$

Avec :

$$R_X(\tau) = E[X_T(t) \bar{X}_T(t-\tau)] \tag{8.83}$$

8.7.2 Propriétés de la densité spectrale de puissance

D'après (8.82), la densité spectrale de puissance est réelle et positive. En effet, nous avons :

$$DSP(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (8.84)$$

D'où :

$$DSP(f) \geq 0 \text{ et réelle}$$

A partir de la transformée de Fourier inverse, nous avons :

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} DSP(f) e^{+2j\pi f\tau} df \quad (8.85)$$

La fonction d'autocorrélation évaluée à $\tau = 0$ fournit la puissance moyenne du processus aléatoire stationnaire, telle que :

$$R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} DSP(f) df \quad (8.86)$$

Bibliographie

- [1] OUAHABI A., *Traitement du signal – théorie du signal – signaux déterministes*, Office des publications universitaires, 1991.
- [2] GUERCHAOUI A., *Traitement du signal – théorie et applications, Partie 1 : Fondements mathématiques*, Office des Publications Universitaires, 2008.
- [3] COURMONTAGNE P., *Traitement du signal – Ingénierie du signal : théorie et pratique*, TECHNOSUP, Editions Ellipses, 2005.
- [4] BEKKA R. E., *Fondements théoriques du traitement du signal*, Office des publications Universitaires, 2005.
- [5] LABARRERE M., KRIEF J. P., GIMONET B., *Le filtrage et ses applications*, Ecole Nationale Supérieure de L'Aéronautique et de L'Espace SUP'AERO, Cepadues Editions, 1993.
- [6] BELLANGER M., *Traitement numérique du signal : Théorie et Pratique*, 4^e Edition, Masson, 1990.
- [7] BOITE R., LEICH H., *Les filtres numériques : analyse et synthèse des filtres unidimensionnels*, 3^e Edition Masson, Paris, 1990.
- [8] OPPENHEIM A. V., SCHAFER R. W., *Digital Signal Processing*, Printice-Hall Inc, 1975.
- [9] RABINER L. R., GOLD B., *Theory and Application Of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Inc, 1975.
- [10] REDJDAL K., *Cours de probabilités*, Office des publications universitaires, 1990.