



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITE MUSTAPHA STAMBOULI DE MASCARA
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

Polycopié de Cours

Systemes asservis échantillonnés

Présenté par :

Dr. CHEKROUN Soufyane

Ce cours est destiné aux étudiants de troisième année Licence
Automatique

Algérie
2021

Avant Propos

Ce polycopié est considéré comme support cours pour les systèmes asservis échantillonnés. Il permet aux étudiants de connaître les techniques d'échantillonnage et de reconstruction des signaux, d'être capable d'étudier la stabilité et d'évaluer la précision d'un système asservis échantillonné, et d'appliquer quelques méthodes d'analyse et de synthèse des systèmes asservis échantillonnés. Il s'adresse aux étudiants de la troisième année licence automatique, il suppose connu les enseignements de la deuxième année licence automatique en matières : systèmes asservis linéaires continus et les mathématiques de base (Algèbre, analyse, ...).

La structure de cet ouvrage est conforme aux programmes officiels du canevas de l'offre de formation licence automatique, filière automatique, domaine sciences et technologies (Annexe C).

Mascara, le 02 janvier 2021.

Table des matières

Avant Propos	i
Résumé	v
Mots-clés	v
Notations et Abréviations	vi
Introduction	1
Chapitre 1 Structure d'un système de commande numérique	2
1.1 <i>Historique</i>	2
1.2 <i>Avantages et inconvénients de la commande numérique</i>	4
1.3 <i>Structure générale d'un système de commande numérique</i>	4
1.4 <i>Conversions (A/N et N/A), Echantillonneurs-Bloqueurs</i>	5
1.4.1 <i>Conversions (A/N et N/A)</i>	5
1.4.2 <i>Echantillonneur- Bloqueur</i>	5
Chapitre 2 Echantillonnage des signaux	7
2.1 <i>Modélisation des convertisseurs A/N et N/A</i>	7
2.1.1 <i>Convertisseur Analogique Numérique (CAN)</i>	7
2.1.2 <i>Convertisseur Numérique Analogique (CNA)</i>	8
2.2 <i>Echantillonnage des signaux continus</i>	8
2.3 <i>Reconstruction approchée des signaux</i>	11
2.3.1 <i>Bloqueur d'ordre zéro</i>	11
2.3.2 <i>Réponse fréquentielle du Bloqueur d'ordre zéro</i>	12
2.4 <i>Choix de la période d'échantillonnage</i>	13
2.4.1 <i>Théorème de Shannon</i>	14
2.4.2 <i>Considérations pratiques</i>	14
2.5 <i>Exercices</i>	15
Chapitre 3 Représentation des systèmes échantillonnés	17
3.1 <i>Transformée en Z</i>	17
3.1.1 <i>Définition de la transformée en Z</i>	17
3.1.2 <i>Propriétés de la transformée en Z</i>	18
3.2 <i>Système à temps discret</i>	20
3.2.1 <i>Equation aux différences</i>	20
3.2.2 <i>Fonction de transfert en z</i>	20
3.2.2.1 <i>Diagramme des pôles/zéros</i>	22
3.2.2.2 <i>Réponse impulsionnelle et indicielle</i>	23
3.2.2.3 <i>Combinaisons de transmittances (simplification des blocs)</i>	24

3.3	Systèmes échantillonnés	24
3.3.1	Introduction	24
3.3.2	Fonction de transfert d'un système échantillonné.....	25
3.4	Transformée en z inverse	25
3.4.1	Décomposition en éléments simples	26
3.4.2	Division polynomiale	26
3.5	Exercices	28
Chapitre 4	Analyse des systèmes échantillonnés	30
4.1	Stabilité des systèmes discrets	30
4.1.1	Définition de la stabilité.....	30
4.1.2	Condition fondamentale de stabilité	30
4.2	Critères de stabilité	33
4.2.1	Critères algébriques.....	33
4.2.1.1	Critère de Schur-Cohn.....	33
4.2.1.2	Critère de Jury.....	34
4.2.1.3	Critère de Routh-Hurwitz.....	35
4.2.2	Critères géométriques.....	38
4.2.2.1	Critère de Nyquist.....	38
4.2.2.2	Lieu d'Evans (ou lieu des racines).....	40
4.3	Exercices	43
Chapitre 5	Synthèse des systèmes échantillonnés	45
5.1	Rapidité des systèmes échantillonnés	45
5.2	Précision statique des systèmes échantillonnés	46
5.2.1	Erreur de position	47
5.2.2	Erreur de vitesse	47
5.2.3	Erreur d'accélération	47
5.3	Correction des systèmes échantillonnés asservis	48
5.3.1	Rôle du correcteur	48
5.3.2	Correction numérique par discrétisation d'un correcteur continu	49
5.3.2.1	Discrétisation avant	49
5.3.2.2	Discrétisation arrière.....	49
5.3.2.3	Approximation de Tustin.....	50
5.4	Régulateurs standards	50
5.4.1	Choix des régulateurs	52
5.5	Régulateurs PID numériques	53
5.5.1	Structure PID numérique série	53

5.5.2	<i>Structure PID numérique parallèle</i>	54
5.5.3	<i>Structure PID numérique mixte</i>	55
5.6	<i>Synthèse d'un correcteur numérique par méthode polynomiale</i>	56
5.7	<i>Implémentation pratique des correcteurs</i>	58
5.8	<i>Exercices</i>	60
Chapitre 6	Contrôleur RST	62
6.1	<i>Correcteurs RST</i>	62
6.2	<i>Synthèse du correcteur RST</i>	63
6.3	<i>Implémentation d'un correcteur RST</i>	65
Références		69
Annexes		71

Résumé

Ce polycopié décrit les notions de base des systèmes asservis linéaires échantillonnés. Un bref historique ainsi que la structure d'un système de commande numérique seront présentés. Puis nous montrons en détail les méthodes d'échantillonnage et de reconstruction des signaux (Echantillonnage et bloqueur d'ordre zéro) avec une présentation des différentes représentations des systèmes à temps discret. Les techniques d'analyse des systèmes échantillonnés étudiées dans ce polycopié permettent d'établir les conditions de stabilité des systèmes échantillonnés en boucle ouverte et en boucle fermée. En plus de l'analyse des systèmes échantillonnés, la synthèse des systèmes échantillonnés sera étudiée. Nous présentons quelques notions de précision et rapidité des systèmes à temps discret. Aussi, nous élaborons la correction des systèmes échantillonnés asservis, les différentes structures des régulateurs standards (*PI*, *PD* et *PID*) et la synthèse d'un correcteur numérique par la méthode polynomiale. Nous terminerons par une description des structures ainsi que la méthode d'analyse du régulateur *RST*. Enfin plusieurs exemples et exercices sont proposés afin d'unifier les notions étudiées dans les différents chapitres.

Mots-clés : Commande numérique, Echantillonnage, Conversions A/N et N/A, Représentation des systèmes échantillonnés, Critères de stabilité (Schur-Cohn, Jury, Routh-Hurwitz, Nyquist discret, Lieu d'Evans Discret), Rapidité, Précision statique, Régulateurs standard PID, Contrôleur RST.

Notations et Abréviations

$x(t), s(t), e(t)$: Signaux continus
s_n, e_n	: Signaux numériques
$\delta_{T_e}(t)$: Peigne de dirac
$\delta(t)$: Impulsion de dirac
$u(k)$: Echelon unitaire
$r(k)$: Rampe
T_e	: Période d'échantillonnage
f_e	: Fréquence d'échantillonnage
f_H	: Fréquence maximale présente dans un signal
p	: Variable complexe de Laplace
w	: Plan
p_i	: Pôles
z_i	: Zéros
$G(z), F(z)$: Fonctions de transfert en z
$R(z), R(z)$: Polynômes du correcteur <i>RST</i>
$T(z), P(z)$	
$D(z)$: Polynôme caractéristique
$\mathcal{E}(z)$: Fonctions de transfert de l'erreur
$Bo(p)$: Bloqueur d'ordre zéro
K	: Gain du système
K_p	: Gain proportionnel
T_i	: Gain intégral
T_d	: Gain dérive
T_r	: Temps de réponse
n	: Ordre du numérateur
m	: Ordre du dénominateur
ε_p	: Erreur de position
ε_v	: Erreur de vitesse
ε_a	: Erreur d'accélération
t_m	: Temps de montée
ω_n	: Pulsation propre du système
ξ	: Coefficient d'amortissement
TL	: Transformée de Laplace
TZ	: Transformée en z
Z^{-1}	: Transformée en z inverse
SC	: Matrice de Schur-Cohn
CN	: Commande Numérique
MIT	: Massachusetts Institute of Technology
IBM	: International Business Machines

<i>DNC</i>	: Direct Numerical Control
<i>CNC</i>	: Computer Numerical Control)
<i>BOZ</i>	: Bloqueur d'ordre zéro
<i>CAN</i>	: Convertisseur Analogique Numérique
<i>CNA</i>	: Convertisseur Numérique Analogique
<i>CI</i>	: Conditions initiales
<i>BIBO</i>	: Bounded Input-Bounded Output
<i>PI</i>	: Régulateurs à action proportionnel et intégral
<i>PD</i>	: Régulateurs à action proportionnel et dérive
<i>PID</i>	: Régulateurs à action proportionnel, intégral et dérivé
<i>RST</i>	: Correcteur à deux degrés de liberté

Introduction

Dans le cadre de mettre en œuvre les asservissements en milieu industriel, l'usage d'outils informatiques comme organes de contrôle des processus asservis est essentiel. Depuis l'apparition et le développement des systèmes informatiques (microprocesseurs, micro-ordinateurs, micro-contrôleurs) qui peuvent assumer des fonctions de calculateurs numériques, leur utilisation en commande et régulation des systèmes industriels ne cesse de s'accroître [1]. Le calcul numérique est étroitement lié à l'histoire de l'informatique, les ordinateurs ayant été conçus pour faciliter l'exécution de calculs complexes. Il intervient dans de nombreux domaines scientifiques et industriels, pour simuler, étudier, anticiper toutes sortes de phénomènes.

En effet, dans le traitement des informations imposé par un calculateur numérique, le temps ne peut pas s'écouler de façon continue telle qu'on le perçoit dans le monde physique. Le temps se définit sur un ensemble discret (ensemble dénombrable, isomorphe à l'ensemble des entiers) d'instantanés : les instantanés d'échantillonnage, séparés par un intervalle de temps régulier : la période d'échantillonnage [2].

Il est donc nécessaire de définir les outils mathématiques, adaptés au temps discret, pour représenter ces signaux et systèmes échantillonnés, puis d'adapter les outils et méthodes de l'automatique analogique (à temps continu) à la conception des régulateurs numériques.

Le polycopié est structuré en six chapitres, le premier chapitre est consacré à l'étude de la structure d'un système de commande numérique. Le deuxième chapitre montre la modélisation des convertisseurs Analogique Numérique et Numérique Analogique ainsi que le principe d'échantillonnage des signaux. Le troisième chapitre présente les transformées en z et en z inverse et ses propriétés ainsi que les différentes techniques de représentation des systèmes échantillonnés. Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse des systèmes échantillonnés par l'établissement de la condition fondamentale de stabilité des systèmes discrets. Les critères algébriques de Schur-Cohn, Jury et de Routh-Hurwitz, ainsi que les critères géométriques de Nyquist et le lieu d'Evans (lieu des racines) seront exposés. Le cinquième chapitre présente la synthèse des systèmes échantillonnés. Nous élaborons Les notions de précision, rapidité, correction des systèmes échantillonnés asservis, les différentes structures des régulateurs standards (*PI*, *PD* et *PID*), la synthèse d'un correcteur numérique par la méthode polynomiale et l'implémentation pratique des correcteurs. Le dernier chapitre contient la partie structure, méthode de synthèse et implémentation du régulateur *RST*.

L'utilisation des calculateurs numériques en temps réel pour commander, piloter, guider...des procédés ou systèmes physiques ont donné naissance aux systèmes de commande numérique.

Le système physique est par nature analogique (dans la quasi-totalité des cas). Il est perçu via des signaux analogiques (son, ondes visuelles, etc.) qui peuvent être traités par des systèmes analogiques. Le recours au numérique permet en effet un stockage aisé de l'information, une excellente reproductibilité des traitements, la possibilité de développer relativement aisément des fonctionnalités complexes, une réduction des coûts de production, etc [3].

Pour transformer un signal continu en une suite de nombres compatible avec un système de traitement numérique, on a recours à deux opérations successives : l'échantillonnage qui consiste à prélever, à intervalles de temps réguliers, des valeurs discrètes du signal, puis, la conversion analogique numérique qui transforme ces échantillons en nombres, généralement codés sous forme binaire (figure 1.1). L'échantillonnage réalise donc une discrétisation dans le temps, tandis que la conversion analogique numérique réalise une discrétisation en amplitude [4]. Dans ce chapitre nous allons présenter la structure générale d'un système de commande numérique.

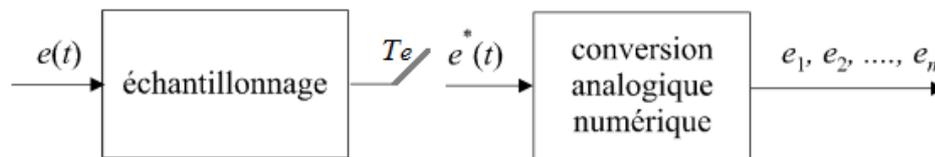


Figure 1.1 Schéma de transformation d'un signal continu en une suite de nombres

1.1 Historique

L'idée de la programmation est née en 1728 par Jean-Philippe Falcon qui a montré qu'il était possible de commander les mouvements d'une machine à partir d'informations transmises par un carton perforé (figure 1.2). Il a créé le premier métier à tisser programmable par cartons perforés.



Figure 1.2 Cartes perforées

En **1801** Joseph-Marie Jacquard réalise le célèbre métier à tisser automatique programmable (figure 1.3). Le métier à tisser "Jacquard" joue un rôle essentiel dans la révolution industrielle. Il permet de produire plus rapidement des tissus à motifs. Il peut être considéré comme l'ancêtre de la commande numérique (CN).



Figure 1.3 *Métier à tisser programmable de Joseph-Marie Jacquard*

Il faut cependant rattacher l'exploitation industrielle de la Commande Numérique au développement de l'électronique.

1947 : l'américain John T. Parsons conçoit un système de contrôle qui mesure les différents points successivement

Il faut encore attendre quelques années de vastes fonds de l'US Air Force et l'appui des chercheurs du Massachusetts Institute of Technology (MIT) pour rendre la première Machine-outil à commande numérique (MOCN) réellement opérationnelle [5].

1951 : le Massachusetts Institute of Technology (MIT) de Boston complète le système développé par John T. Parsons avec un ordinateur

1957 : les premières machines à Contrôle Numérique sont construites par IBM.

1959 : apparition de la CN en Europe (foire de Hanovre). Le MIT annonce la création du langage de programmation APT (Automatic Programed Tools).

1960 : apparition du système DNC (Direct Numerical Control)

1964 : en France, la Télémécanique Électrique lance la CN NUM 100 conçue à base de relais Téléstatic.

1968 : la CN adopte les circuits intégrés ; elle devient plus compacte et plus puissante.

1972 : les minicalculateurs remplacent les logiques câblées ; la CN devient commande numérique par calculateur CNC (computer numerical control).

1976 : développement des CN à microprocesseurs.

1984 : apparition de fonctions graphiques évoluées et du mode de programmation conversationnel, début de l'ère de la fabrication assistée par ordinateur.

1986 : les CN s'intègrent dans les réseaux de communication, début de l'ère de la fabrication flexible (CIM : computer integrated manufacturing).

1990 : développement des CN à microprocesseurs 32 bits.

1.2 Avantages et inconvénients de la commande numérique

Les avantages sont nombreux et peuvent être énumérés sommairement de la façon suivante [5] :

- Définir aisément des conditions opératoires optimales puisqu'elle offre la possibilité de faire varier en continu les vitesses et ainsi d'accroître la durée de vie des outils ;
- Atténuer le facteur humain et d'apporter ainsi la répétitivité et une plus grande précision d'exécution, ce qui entraîne une diminution des tâches de contrôle ;
- de parvenir à la flexibilité du fait des facilités offertes par l'évolution technique en matière de modes de chargement des programmes et de stockage des données : tous les directeurs de commande offrent la possibilité de se connecter directement à un ordinateur et ainsi de parvenir à une continuité de traitement des données ;
- Fourni une grande précision, résoudre le problème de complexité (grand nombre de paramètres), augmente les rendements, améliore les performances.

En revanche, les inconvénients de la commande numérique sont [6] :

- La boucle est ouverte en dehors des instants d'échantillonnage (oscillations non observées) ;
- Discrétisation de la mesure ;
- Choix de la période d'échantillonnage surtout pour le cas des systèmes rapides (Shannon) ;

1.3 Structure générale d'un système de commande numérique

La structure générale d'un système de commande numérique est représentée par la figure I.4. Elle est composée des objets fondamentaux suivants [1] :

- un **comparateur** : celui-ci fournit un signal d'écart ε_n qui réalise la différence entre le signal numérique de référence e_n et le signal numérique de mesure m_n .
- un **CAN** : celui-ci fonctionne à la période d'échantillonnage $T_e > 0$. Il fournit à sa sortie le signal numérique de référence e_n et le signal numérique de mesure m_n .
- un **algorithme de commande** : celui-ci manipule des suites de nombres et a pour fonction d'élaborer la loi de commande. Il délivre donc le signal numérique de commande u_n .
- un **CNA** : celui-ci fonctionne à la période d'échantillonnage $T_e > 0$. Il transforme le signal numérique de commande issu du calculateur en signal analogique de commande correspondant.
- des **transmittances** $H(p)$ et $C(p)$: représentant respectivement la dynamique du système et celle du capteur.

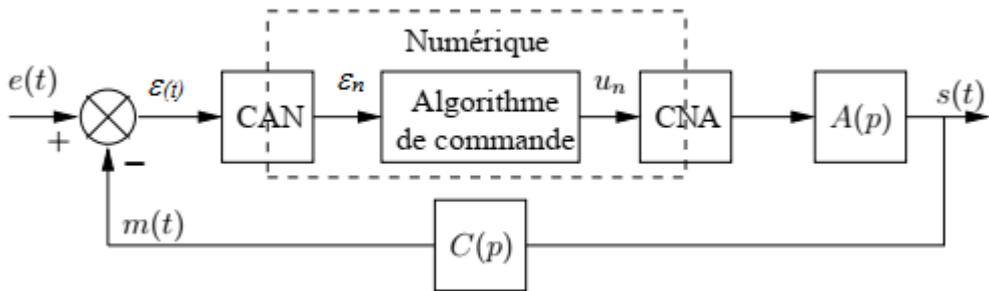


Figure 1.4 Structure générale d'un système de commande numérique

Dans toute structure d'asservissement est inséré un calculateur numérique réalisant, entre autre, les tâches de l'algorithme de commande.

1.4 Conversions (A/N et N/A), Echantillonneurs-Bloqueurs

1.4.1 Conversions (A/N et N/A)

La conversion analogique-numérique (A/N) consiste à transformer une grandeur électrique représentée par un signal en une grandeur numérique exprimée sur N bits après échantillonnage et quantification du signal. En revanche, la conversion numérique-analogique (N/A) consiste à transformer une valeur numérique (codée sur plusieurs bits) en une valeur analogique proportionnelle à la valeur numérique codée. La figure 1.5 représente le schéma des conversions A/N et N/A

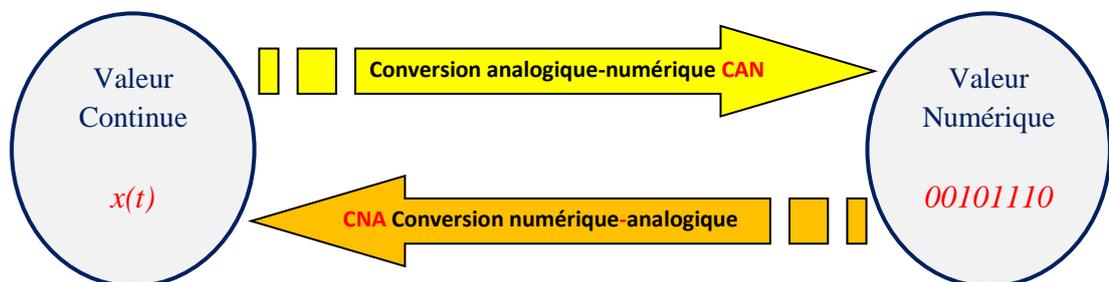


Figure 1.5 Conversions A/N et N/A.

1.4.2 Echantillonneur- Bloqueur

L'échantillonneur-bloqueur est un circuit électronique constitué dans sa forme la plus simple d'un interrupteur commandé. La figure 1.6 représente le Schéma simplifié d'un échantillonneur-bloqueur. L'entrée du signal analogique est notée $x(t)$, le signal de commande de l'interrupteur est noté T_e , la sortie du signal échantillonné est notée X .

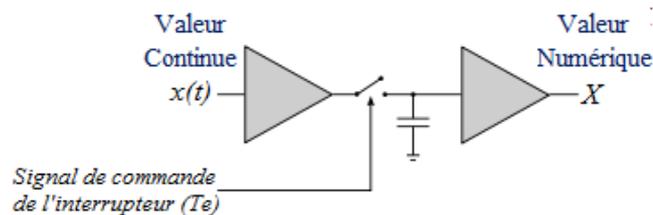


Figure 1.6 Schéma simplifié d'un échantillonneur-bloqueur

Il prélève régulièrement une valeur du signal analogique puis il maintient ou bloque cette valeur constante jusqu'à l'échantillon suivant comme le montre la figure 1.7.

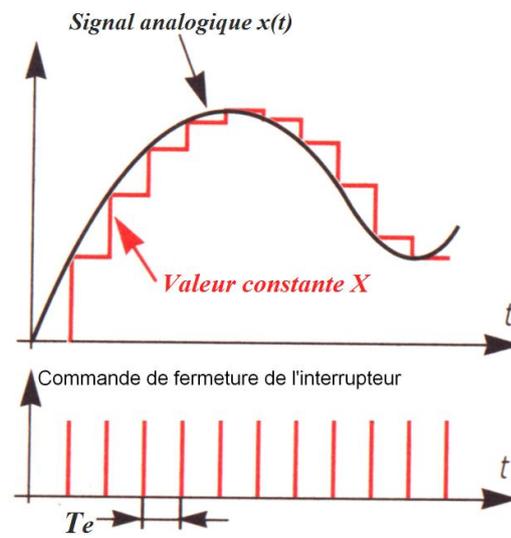


Figure 1.7 Constitution d'un échantillonneur-bloqueur

Chapitre 2

Echantillonnage des signaux

L'échantillonnage d'un signal continu est l'opération qui consiste à prélever des échantillons du signal pour obtenir un signal discret, c'est-à-dire une suite de nombres représentant le signal, dans le but de mémoriser, transmettre, ou traiter le signal [7].

Dans ce chapitre nous allons présenter la modélisation des convertisseurs Analogique Numérique et Numérique Analogique ainsi que l'échantillonnage d'un signal continu. Nous montrerons aussi, comment se fait la reconstruction d'un signal continu à partir des échantillons. On verra aussi le théorème de l'échantillonnage de Shannon, qui permet de choisir la fréquence d'échantillonnage d'un signal afin de ne pas perdre l'information du signal.

2.1 Modélisation des convertisseurs A/N et N/A

Le Convertisseur Analogique Numérique noté CAN, et le Convertisseur Numérique Analogique noté CNA entourent le calculateur numérique. Ce sont ces objets qui réalisent l'interface entre le monde du numérique avec celui de l'analogique [1],[8].

2.1.1 Convertisseur Analogique Numérique (CAN)

La figure 2.1 représente le schéma de fonctionnement du CAN, La conversion analogique-numérique est caractérisée par deux discrétisations :

La première concerne le temps et porte le nom d'**échantillonnage** : cela consiste à prendre des échantillons du signal analogique à des instants régulièrement espacés. L'échantillonnage est schématisé par un interrupteur dont l'ouverture et la fermeture sont cadencées à la période d'échantillonnage par l'horloge du calculateur.

La deuxième concerne l'amplitude et porte le nom de **quantification** : cela consiste à coder l'amplitude du signal sur un nombre fini de valeur dans un intervalle de nombres entiers $[0, 1, \dots, 2^M - 1]$ sous forme binaire, où M est nombre entier caractérisant le nombre de bits utilisés pour quantifier le signal analogique. Le nombre entier issu du quantificateur est alors associé par le *codeur* à un autre nombre binaire mais dont la valeur a un sens au regard des coefficients programmés dans le calculateur.

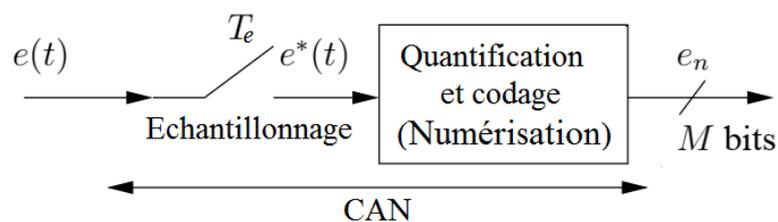


Figure 2.1 Schéma de fonctionnement du Convertisseur Analogique Numérique CAN

D'un point de vue modélisation, il ne sera jamais tenu compte de l'étape de quantification. Nous considérons que le fonctionnement du CAN se résume à celui d'un simple échantillonneur représenté par le schéma de la figure 2.2.

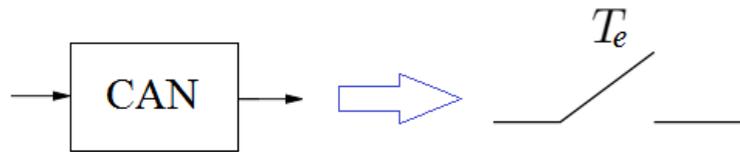


Figure 2.2 Représentation usuelle du CAN.

2.1.2 Convertisseur Numérique Analogique (CNA)

La figure 2.3 représente le schéma de fonctionnement du CNA. Le calculateur fournit une valeur codée puis le codeur transforme ce nombre en un autre nombre binaire "lisible" par le quantificateur qui le transforme à son tour en un signal analogique échantillonné. Ce signal est généralement maintenu constant durant toute la période d'échantillonnage. On retrouve ainsi un bloqueur d'ordre zéro (BOZ) après le quantificateur.

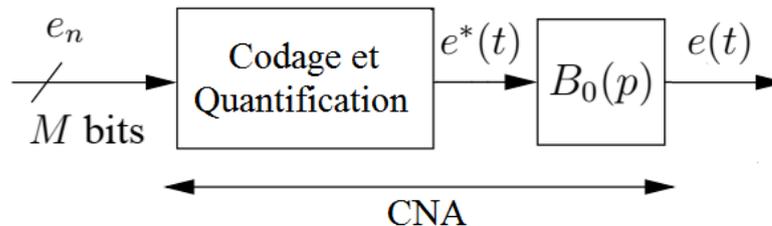


Figure 2.3 Schéma de fonctionnement du Convertisseur Numérique Analogique CNA

Le modèle mathématique que l'on associe alors à la conversion numérique analogique est le bloqueur d'ordre zéro dont la fonction de transfert $B_0(p)$ représenté par le schéma illustré en figure 2.4.

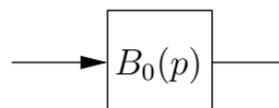


Figure 2.4 Représentation usuelle du CNA.

2.2 Echantillonnage des signaux continus

L'échantillonnage d'un signal continu consiste à relever les informations prises par un signal continu à intervalle de temps régulier, appelé période d'échantillonnage. On parle alors de signal échantillonné. La figure 2.5 représente l'échantillonnage d'un signal quelconque $x(t)$.

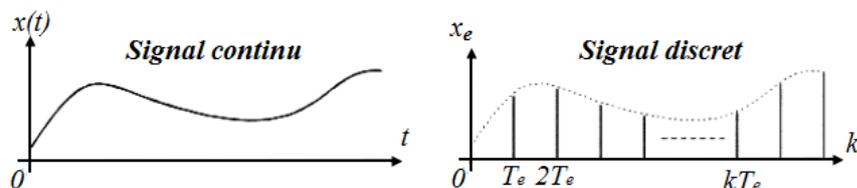


Figure 2.5 Echantillonnage d'un signal quelconque $x(t)$

$x_e(t)$ est le signal $x(t)$ échantillonné aux instants kT_e (T_e : temps d'échantillonnage) définie par l'équation suivante :

$$x_e(t) = x(t)\delta_{T_e}(t) \quad (2-1)$$

ou $\delta_{T_e}(t)$ est la fonction peigne de Dirac.

L'opération d'échantillonnage peut être assimilée à la modulation du signal continu $x(t)$ par un train d'impulsions unitaires de période T_e noté $\delta_{T_e}(t)$. Comme il est montré par la figure 2.6, la fonction peigne de Dirac est une fonction non causale, périodique de période T_e et composée d'un nombre infini des fonctions impulsion de Dirac décalées dans le temps [9]:

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \quad (2-2)$$

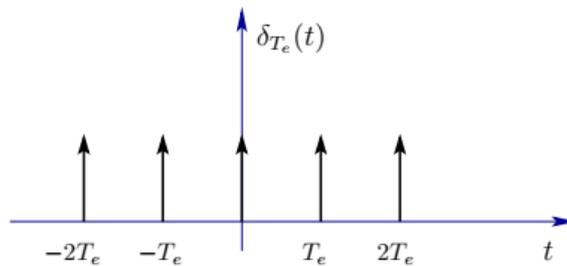


Figure 2.6 Fonction peigne de Dirac

L'équation (2-1) s'écrit :

$$x_e(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (2-3)$$

Exemple 2.1 : Exemple de signaux usuels échantillonnés [10], [11]

A. Impulsion de Dirac

La fonction impulsion de dirac de la figure 2.7 est définie par l'équation suivante :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

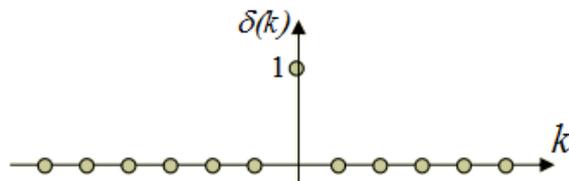


Figure 2.7 Fonction Impulsion de Dirac

B. Echelon unitaire

La fonction echelon unitaire de la figure 2.8 est définie par l'équation suivante :

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (2-5)$$

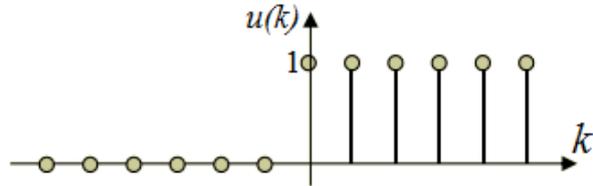


Figure 2.8 Fonction Echelon unitaire

C. Rampe ou échelon de vitesse

La fonction rampe ou échelon de vitesse de la figure 2.9 est définie par l'équation suivante :

$$r(k) = \begin{cases} 0 & k \geq 0 \\ kT_e & k < 0 \end{cases} \quad (2-6)$$

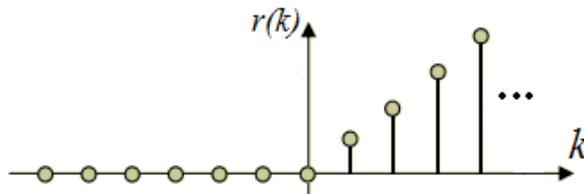


Figure 2.9 Fonction Rampe ou échelon de vitesse

A. Exponentiel

La fonction exponentielle de la figure 2.10 est définie par l'équation suivante :

$$x(k) = \alpha^k u(k) \quad (2-7)$$

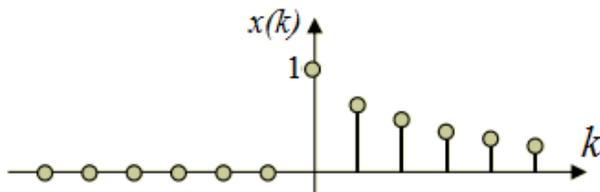


Figure 2.10 Fonction Exponentielle

Exemple 2.2 : La figure 2.11 représente un exemple d'échantillonnage d'un signal sinusoïdal continu de fréquence 2Hz en bleu, est échantillonnée avec une période d'échantillonnage de 0.1s. Le signal échantillonné en vert est le produit du signal sinusoïde continu avec un peigne de Dirac de période 0.1s.

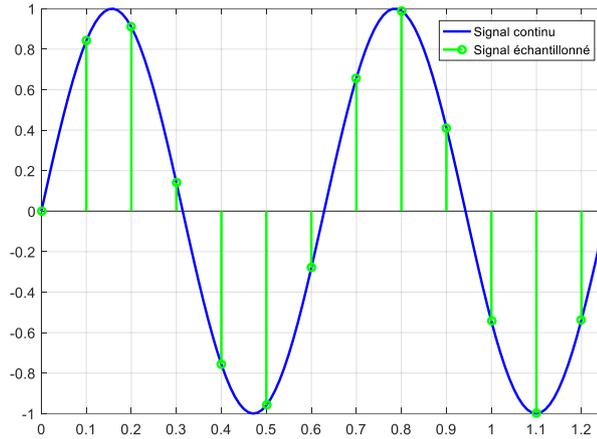


Figure 2.11 Echantillonnage d'un signal sinusoïdal

2.3 Reconstruction approchée des signaux

La reconstruction du signal se fait lors de la conversion numérique-analogique. L'objectif est de reconstruire un signal continu (analogique) le plus proche possible du signal. La reconstruction approchée utilise un bloqueur d'ordre zéro (BOZ). Le bloqueur d'ordre zéro maintient à sa sortie la valeur de l'échantillon d'entrée, durant la période d'échantillonnage qui sépare deux échantillons consécutifs comme le montre la figure 2.12 [9].

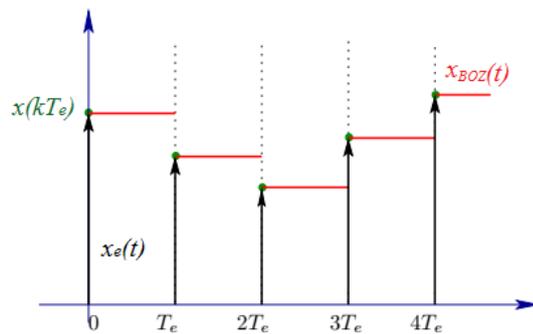


Figure 2.12 Reconstruction approchée par Bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

Soit $x(kT_e)$ le signal numérique à l'entrée du BOZ. Alors, le signal bloqué qui se trouve à la sortie du bloqueur s'écrit :

$$x_{BOZ}(t) = x(kT_e) \quad \text{pour } t \in [kT_e, (k+1)T_e] \quad (2-8)$$

2.3.1 Bloqueur d'ordre zéro

Le bloqueur d'ordre zéro (BOZ) maintient le signal continu à une valeur constante, égale à la valeur de l'échantillon durant un intervalle d'échantillonnage. Le signal ainsi obtenu est donc constant par morceaux. Si on applique une commande discrète impulsionnelle à un BOZ il va maintenir la commande à 1 pendant la durée T_e puis revenir à zéro (Figure 2.13) [12].

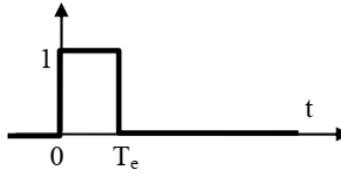


Figure 2.13 Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre 0

La réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro ($b_0(t)$) est composée d'un échelon unitaire $u(t)$ suivi d'un échelon unitaire de signe opposé et décalé d'un temps T_e ($-u(t-T_e)$). Donc, la réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro est :

$$b_0(t) = u(t) - u(t - T_e) \quad (2-9)$$

La transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du BOZ est donnée par la formule suivante :

$$B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT_e}}{p} \quad (2-10)$$

On déduit la fonction de transfert du BOZ :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} \quad (2-11)$$

Exemple 2.3 : La figure 2.14 représente un exemple d'un signal sinusoidal échantillonné-Bloqué d'une période d'échantillonnage de 0.1s en rouge, et le signal continu d'une fréquence de 0.16Hz en bleu.

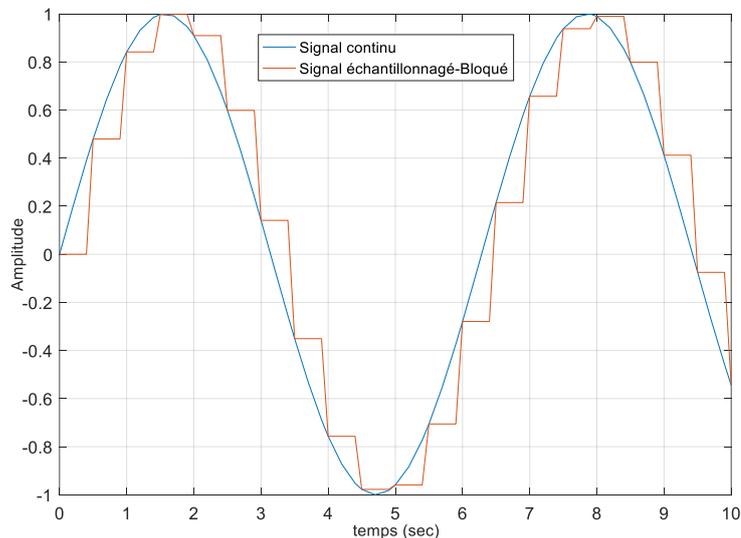


Figure 2.14 Exemple d'un Signal sinusoidal échantillonné et bloqué

2.3.2 Réponse fréquentielle du bloqueur d'ordre zéro

Pour trouver la réponse fréquentielle du bloqueur d'ordre zéro, on remplace p par $j\omega$ ($p=j\omega$) dans l'équation (2-11). Donc, la réponse fréquentielle du bloqueur d'ordre zéro est :

$$B_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} = e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \frac{e^{+j\omega \frac{T_e}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_e}{2}}}{j\omega} \quad (2-12)$$

On obtient:

$$B_0(j\omega) = T_e \frac{\sin\left(\omega \frac{T_e}{2}\right)}{\omega \frac{T_e}{2}} e^{-j\omega \frac{T_e}{2}} \quad (2-13)$$

Il résulte de cette dernière expression que la réponse harmonique du signal bloqué se déduit de celle du signal à temps continu initial par :

- une atténuation du signal, liée au sinus cardinal (Annexe D);
- un retard de phase égal à $(\omega T_e)/2$ c'est-à-dire un retard pur d'une demi période d'échantillonnage.

2.4 Choix de la période d'échantillonnage

Le choix de la période d'échantillonnage dépend du type de procédé et des possibilités offertes par les outils numériques. Elle ne doit pas être trop grande pour que le calculateur ne manque pas des informations importantes en provenance du signal, mais aussi, elle ne doit pas être trop petite pour ne pas réduire l'efficacité de la rétroaction face aux perturbations. La Figure 2.15 illustre les différents choix de la période d'échantillonnage d'un signal sinusoïdal.

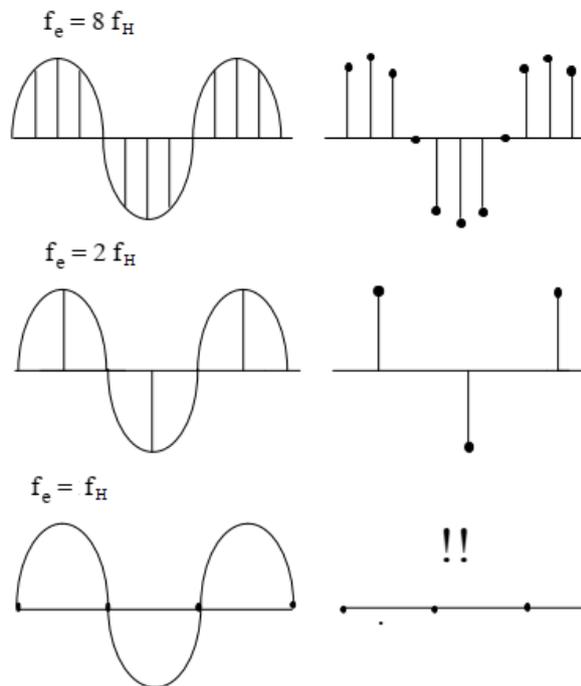


Figure 2.15 Différents choix de la période d'échantillonnage d'un signal sinusoïdal

Pour trouver la période d'échantillonnage convenable, et par conséquent pour avoir un bon échantillonnage, on utilise le théorème de Shannon. Ce théorème fournit les règles qui permettent de garantir un minimum de pertes d'informations dues à l'échantillonnage [13].

2.4.1 Théorème de Shannon

Le théorème de Shannon propose implicitement un moyen de retrouver, après l'échantillonnage, l'information originale du signal analogique échantillonné. Pour que l'observation échantillonnée d'un signal soit significative, il est nécessaire que l'échantillonnage soit effectué à une fréquence (f_e) minimum à la fréquence maximale (f_H) présente dans le signal.

Le théorème de Shannon précise que la fréquence d'échantillonnage ($f_e=1/T_e$) doit être au moins égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal que l'on veut échantillonner ($f_e \geq 2 f_H$) [14].

$$f_e \geq 2f_H \quad (2-14)$$

2.4.2 Considérations pratiques

Le choix de la période d'échantillonnage tel que préconisé par le théorème de Shannon ne peut s'utiliser en pratique, notamment dans le cas des systèmes qui fonctionnent en temps réel. Donc, pour satisfaire à la condition de Shannon avec une bonne marge de sécurité, il est recommandé de prendre une fréquence 5 à 25 fois supérieure à la fréquence maximale (f_H) présente dans le signal soit [15] :

$$\frac{T_H}{25} < T_e < \frac{T_H}{5} \quad \text{soit} \quad 5f_H < f_e < 25f_H \quad (2-15)$$

Avec : $f_H = 1/T_H$ la fréquence la plus haute à considérer dans un signal.

Exemple 2.4 : Le tableau 2.1 donne le choix de la période d'échantillonnage pour plusieurs types de variables (valeurs indicatives) [13].

Type de variable (ou procédé)	Période d'échantillonnage (sec)
Débit	$1 < T_e < 3$
Niveau	$5 < T_e < 10$
Pression	$1 < T_e < 5$
Température	$10 < T_e < 180$
Distillation	$10 < T_e < 180$
Asservissements	$0.001 < T_e < 0.05$
Réacteurs catalytiques	$10 < T_e < 45$
Cimenterie	$20 < T_e < 45$
Séchage	$20 < T_e < 45$

Tableau 2.1 Choix de la période d'échantillonnage

2.5 Exercices

Exercice n°1 :

Soit le signal $x(t)$ suivant :

$$x(t) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot t) \quad (2-16)$$

1. Tracez $x(t)$ sur 3 périodes T au moins.
2. Echantillonner $x(t)$ pour :
 - a- $T_e = T/4$.
 - b- $T_e = T/2$.
 - c- $T_e = 3T/4$.

Exercice n°2 :

Echantillonner graphiquement les signaux de la figure 2.16 :

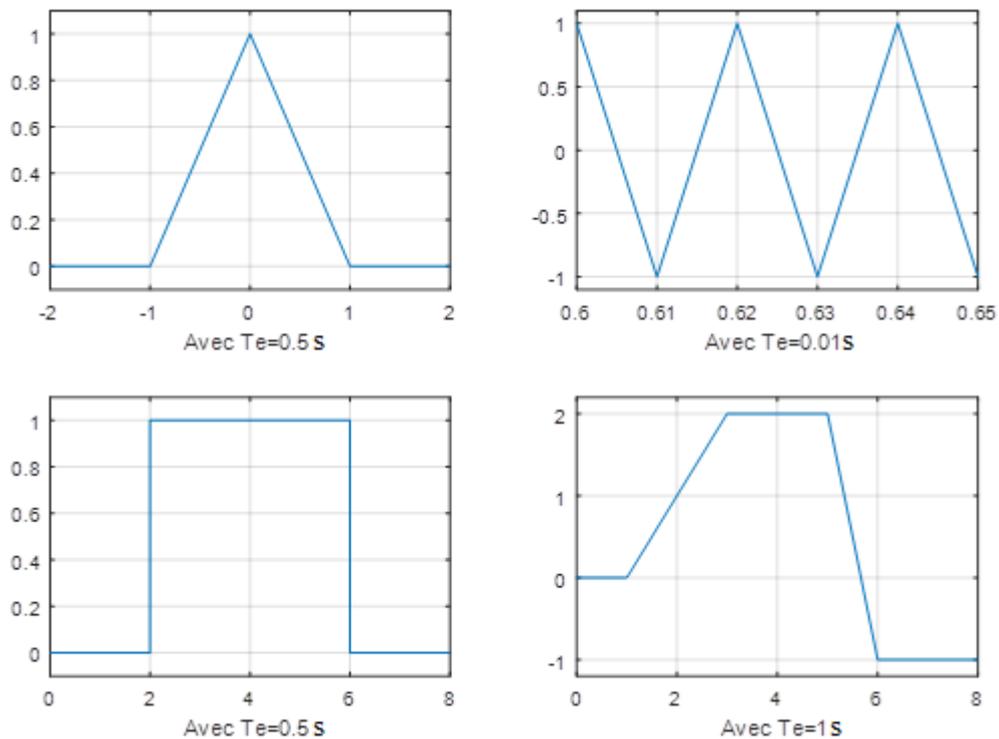


Figure 2.16 Signaux continus de l'exercice n°2

Exercice n°3 :

Soit le signal déterministe suivant :

$$x(t) = 2e^{-2t} \text{ pour } t \geq 0 \quad (2-17)$$

On échantillonne le signal $x(t)$ par un échantillonneur idéal avec une période d'échantillonnage $T_e = 1s$.

1. Donner le modèle générale de cet échantillonneur.
2. Donner la formule générale de cet échantillonneur.

Exercice n°4 :

Utiliser le bloqueur d'ordre zéro (BOZ) pour la reconstruction des signaux suivants :

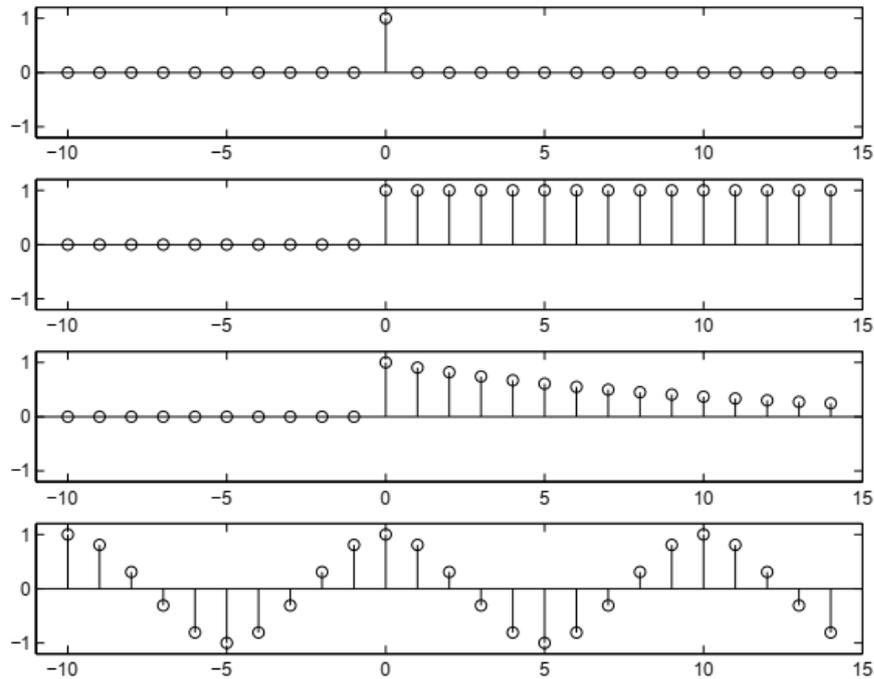


Figure 2.17 Signaux de l'exercice n°4

Exercice n°5 :

Soit le signal $x(t)$ suivant :

$$x(t) = 2 \cos(100.\pi.t) + 5 \sin\left(250.\pi.t + \frac{\pi}{6}\right) - 4 \cos(380.\pi.t) + 16 \sin\left(600.\pi.t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (2-18)$$

En utilisant le théorème de Shannon, déterminer la fréquence d'échantillonnage f_e .

Chapitre 3

Représentation des systèmes échantillonnés

Depuis l'apparition et le développement des systèmes informatiques (microprocesseurs, micro-ordinateurs, micro-contrôleurs), leur utilisation en commande et régulation des systèmes industriels ne cesse de s'accroître. Cependant, Il est donc nécessaire de définir des outils mathématiques, adaptés au temps discret, pour représenter ces signaux et systèmes échantillonnés [2], [9].

Dans ce chapitre nous allons présenter la transformée en z et ses propriétés ainsi que les différentes représentations des systèmes à temps discret. Nous élaborons aussi, la représentation et la composition des systèmes échantillonnés. Nous achèverons ce chapitre par une définition de la transformée en z inverse ainsi que nous montrerons les différentes techniques de calcul de la transformée en z inverse.

3.1 Transformée en Z

3.1.1 Définition de la transformée en Z

Le signal échantillonné est matérialisé, à l'intérieur du système informatique, par une suite de nombres c'est-à-dire par une séquence numérique $x_e(kT_e)$.

$$x_e(kT_e) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\} \quad (3-1)$$

L'équation (2-3) s'écrit :

$$x_e(t) = x_0\delta(t) + x_1\delta(t - T_e) + x_2\delta(t - 2T_e) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k\delta(t - kT_e) \quad (3-2)$$

La transformée de Laplace de $x_e(t)$ est :

$$X(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k TL\{\delta(t - kT_e)\} \quad (3-3)$$

Par définition :

$$TL\{\delta(t - kT_e)\} = \int_0^{+\infty} \delta(t - kT_e) e^{-pt} dt \quad (3-3)$$

En appliquant le théorème du retard la transformée de Laplace de l'équation (3-3) s'écrit:

$$TL\{\delta(t - kT_e)\} = \Delta(p) e^{-pkT_e} \quad (3-4)$$

avec :

$$\Delta(p) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = 1 \quad (3-5)$$

Il vient alors :

$$TL\{\delta(t - kT_e)\} = e^{-pkT_e} \quad (3-6)$$

D'où :

$$X(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k e^{-pkT_e} \quad (3-7)$$

En posant $z = e^{-pT_e}$, on définit la transformée en z du signal $x(t)$ par :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k} \quad (3-8)$$

Exemple 3.1 :

- A. Soit le signal $\delta(k)$ du type impulsion de dirac de la figure 2.7, défini par l'équation (2-4). Sa transformée en z est :

$$\delta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k z^{-k} = \delta_0 z^0 = 1$$

- B. La transformée en z du signal $x(t)$ représentée par le graphique de la figure 3.1 pour $T_e=1s$ est :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k} = x_0 z^0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + x_3 z^{-3} + x_4 z^{-4} + x_5 z^{-5} + x_6 z^{-6} = z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6}$$

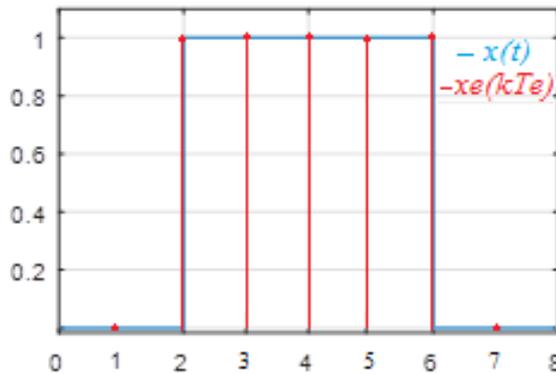


Figure 3.1. Exemple de calcul de la transformée en z d'un signal $x(t)$

3.1.2 Propriétés de la transformée en Z

La transformée en z est une simple variante de la transformée de Laplace. La plus part de ces propriétés peuvent se déduire de celles de la transformée de Laplace avec le changement de variable $z = e^{-pT_e}$.

Considérons deux signaux à temps discret $f(k)$ et $g(k)$. On note $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z respectives. a et b sont des réels quelconques. Voici les principales propriétés [16], [9] :

- **Linéarité :**

$$TZ\{af(k) + bg(k)\} = aF(z) + bG(z), \quad \forall a, b \in \mathfrak{R} \quad (3-9)$$

- **Changement d'échelle :**

$$TZ\{a^k f(k)\} = F\left(\frac{z}{a}\right), \quad \forall a \in \mathfrak{R} \quad (3-10)$$

▪ **Retard :**

Dans le cas des signaux causaux, le théorème du retard s'énonce comme suit :

$$TZ\{f(k-n)\} = z^{-n}F(z), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3-11)$$

▪ **Avance :**

$$TZ\{f(k+n)\} = z^n F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k)z^{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3-12)$$

▪ **Théorème de la sommation :**

$$TZ\left\{\sum_{j=0}^k f_j\right\} = \frac{z}{z-1} F(z) \quad (3-13)$$

▪ **Multiplication par une exponentielle :**

$$TZ\{e^{-ak} f(k)\} = F(ze^a) \quad (3-14)$$

▪ **Théorème de la valeur initiale :**

La valeur initiale d'un signal à temps discrète est donnée par :

$$f(0) = \lim_{k \rightarrow 0} f(k) = \lim_{z \rightarrow +\infty} F(z) \quad (3-15)$$

▪ **Théorème de la valeur finale :**

Lorsque la valeur finale existe alors cette valeur peut être calculée comme :

$$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) \quad (3-16)$$

▪ **Convolution discrète :**

Le produit de convolution des signaux causaux est défini par :

$$(f * g)(k) = F(z)G(z) \quad (3-17)$$

Exemple 3.2 : Soit le signal $u(k)$ du type échelon unitaire de la figure 2.8, défini par l'équation (2-5).

D'après le théorème de la sommation, la transformée en z de $u(k)$ est :

$$Z\{u(k)\} = Z\left\{\sum_{j=0}^k \delta(k)\right\} = \frac{z}{z-1} \underbrace{Z\{\delta_k\}}_{=1} = \frac{z}{z-1} \quad (3-18)$$

3.2 Système à temps discret

Un système à temps discret est défini comme un opérateur entre deux signaux à temps discret. La figure 3.2 représente un système à temps discret, où $e(k)$ et $s(k)$ représentent respectivement la séquence d'entrée et la séquence de sortie. L'outil mathématique exploitée pour faciliter son analyse est la transformée en Z. Il peut être décrit par [17]:

- Equation aux différences.
- Fonction de transfert en z.

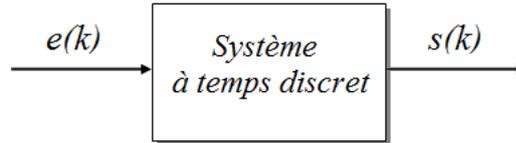


Figure 3.2. Système à temps discret

3.2.1 Equations aux différences

La forme générale d'une équation aux différences (ou équation récurrente) à coefficients constants d'un système à temps discret est donnée par :

$$a_0s(k) + a_1s(k-1) + \dots + a_ns(k-n) = b_0e(k) + b_1e(k-1) + \dots + b_me(k-m) \quad (3-19)$$

On peut aussi l'écrire :

$$a_0s(k) = -a_1s(k-1) - \dots - a_ns(k-n) + b_0e(k) + b_1e(k-1) + \dots + b_me(k-m) \quad (3-20)$$

n est appelé *l'ordre du système*.

Le système est dit causal si les sorties dépendent uniquement des événements passés. Pour cela il doit obligatoirement vérifier la condition : $m \leq n$. Cette formulation de l'équation aux différences est bien adaptée au calcul numérique.

Exemple 3.3 : Exemples des équations aux différences à coefficients constants des systèmes à temps discrets :

$$\begin{aligned} 5s(k) + 3s(k-1) + 2s(k-2) &= e(k) + 4e(k-1) \\ s(k) + s(k-1) + 2s(k-2) &= e(k) \\ 2s(k) &= -3s(k-1) + 2s(k-2) + e(k) + e(k-1) \end{aligned}$$

3.2.2 Fonction de transfert en Z

De la même manière que l'on associe à un système à temps continu, une fonction de transfert, par application de la transformation de Laplace à son équation différentielle, on peut associer à un système à temps discret, une fonction de transfert en z, par application de la transformation en z à son équation récurrente [14].

En utilisant le théorème du retard (on suppose que les conditions initiales (CI) nulles), la transformée en z de l'équation récurrente (3-19) s'écrit :

$$(a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n)S(z) = (b_0 + b_1z^1 + \dots + b_mz^m)E(z) \quad (3-21)$$

Soit encore :

$$S(z) = \frac{N(z)}{D(z)} E(z) \quad (3-22)$$

Avec :

$$\frac{N(z)}{D(z)} = F(z) = \frac{b_0 + b_1z^1 + \dots + b_mz^m}{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n} \quad (3-23)$$

$F(z)$ est définie comme la **fonction de transfert** en z du système (figure 3.3).

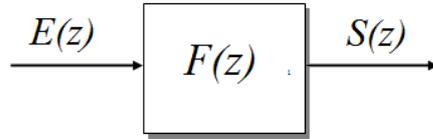


Figure 3.3. Fonction de transfert en z d'un système à temps discret

Dans la pratique, on utilise le tableau 3.1 de transformation (t, p, kT_e, z) pour déterminer la fonction de transfert en z d'un système [14].

$f(t)$	$F(s)$	$f(kT_e)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	$\delta(k)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	kT_e	$\frac{zT_e}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2}(kT_e)^2$	$\frac{T_e^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	c^k avec : $c = e^{-aT_e}$	$\frac{z}{z-c}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$kT_e c^k$ avec : $c = e^{-aT_e}$	$\frac{cT_e z}{(z-c)^2}$
$(1 - e^{-at})$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$(1 - c^k)$ avec : $c = e^{-aT_e}$	$\frac{z(1-c)}{(z-1)(z-c)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega kT_e)$	$\frac{z \sin(\omega T_e)}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega kT_e)$	$\frac{z[z - \cos(\omega T_e)]}{z^2 - 2z \cos(\omega T_e) + 1}$

Table 3.1 Tableau de transformation (t, p, kT_e, z)

Exemple 3.4 : Exemple de lien entre la fonction de transfert et l'équation aux différences d'un système numérique.

Soit la fonction de transfert du système $F(z)$ suivante :

$$F(z) = \frac{2z}{z-3} \quad (3-24)$$

On exprime $F(z)$ en puissance négative de z : $F(z^{-1}) = \frac{2z}{z-3} \left(\frac{z^{-1}}{z^{-1}} \right) = \frac{2}{1-3z^{-1}}$

Par définition : $F(z^{-1}) = \frac{S(z^{-1})}{E(z^{-1})} = \frac{2}{1-3z^{-1}} \Rightarrow S(z^{-1})[1-3z^{-1}] = 2E(z^{-1}) \Rightarrow S(z^{-1}) - 3z^{-1}S(z^{-1}) = 2E(z^{-1})$

La transformée inverse s'obtient directement par application des transformées ($z \Rightarrow kT_e$) du tableau 3.1 :

$$s(k) - 3s(k-1) = 2e(k) \Rightarrow s(k) = 3s(k-1) + 2e(k)$$

3.2.2.1 Diagramme des pôles/zéros

La factorisation du numérateur et du dénominateur dans la fonction de transfert en z de $F(z)$ conduit à la forme pôles, zéros, gain suivante :

$$F(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{a_n (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)} \quad (3-25)$$

$K = b_m/a_n$: est le gain du système.

$\lambda_{n=1, \dots, n}$: sont les pôles du système (racines du polynôme dénominateur $D(z)=0$).

$z_{m=1, \dots, m}$: sont les zéros du système (racines du polynôme numérateur $N(z)=0$).

Exemple 3.5 : Soit la fonction de transfert $F(z)$ suivante :

$$F(z) = \frac{2}{1+0.5z^{-1}} = \frac{2z}{z+0.5} \quad (3-26)$$

Racines du polynôme dénominateur : $D(z) = z + 0.5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0.5$ (un pôle)

Racines du polynôme numérateur : $N(z) = 2z = 0 \Rightarrow z_1 = 0$ (un zéro)

Gain du système : $K=2$.

Le diagramme des pôles/ zéros du système $F(z)$ est représenté par la figure 3.4.

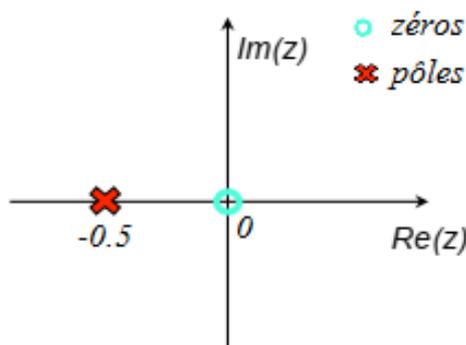


Figure 3.4. Diagramme des pôles/ zéros de l'exemple 3.5

3.2.2.2 Réponse impulsionnelle et indicielle

Un système à temps discret peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle $s(k)$ et indicielle $u(k)$ comme le montre la Figure 3.5. La réponse impulsionnelle correspond à la réponse obtenue lorsque l'entrée est une impulsion discrète $\delta(k)$. Pour le cas de la réponse indicielle, elle est obtenue lorsque l'entrée est un échelon unitaire discret $u(k)$.

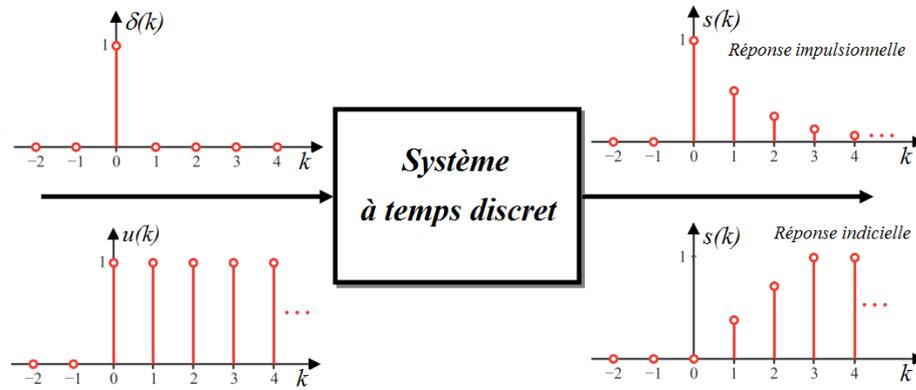


Figure 3.5. Réponse impulsionnelle et indicielle d'un système à temps discret

Exemple 3.6 : Soit la fonction de transfert du système $F(z)$ suivante :

$$F(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \quad (3-27)$$

avec: $F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \Rightarrow S(z) = E(z) \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$

On applique une entrée impulsionnelle $e(k) = \delta(k)$.

La transformée en z du signal impulsionnel $\delta(k)$ est $E(z) = 1$.

Alors : $S(z) = E(z) \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \Rightarrow S(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$

La décomposition en éléments simples de $S(z)/z$ est :

$$\frac{S(z)}{z} = \frac{1}{z(z^2 - 3z + 2)} = \frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

On obtient :

$$S(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

La transformée inverse s'obtient directement par application des transformées du tableau 3.1 :

$$s(k) = z^{-1} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} \right\} = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} 2^k - 1^k = \frac{1}{2} \delta_k + 2^{k-1} - 1$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned}
s(0) &= \frac{1}{2} + 2^{-1} - 1 = 0 \\
s(1) &= 2^0 - 1 = 0 \\
s(2) &= 2^1 - 1 = 1 \\
s(3) &= 2^2 - 1 = 3 \\
s(4) &= 2^3 - 1 = 7 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

3.2.2.3 Combinaisons de transmittances (simplification des blocs)

L'association des systèmes discrets en série, parallèle et en rétroaction est représentée par des schémas blocs dans la figure 3.6 [13],[2].

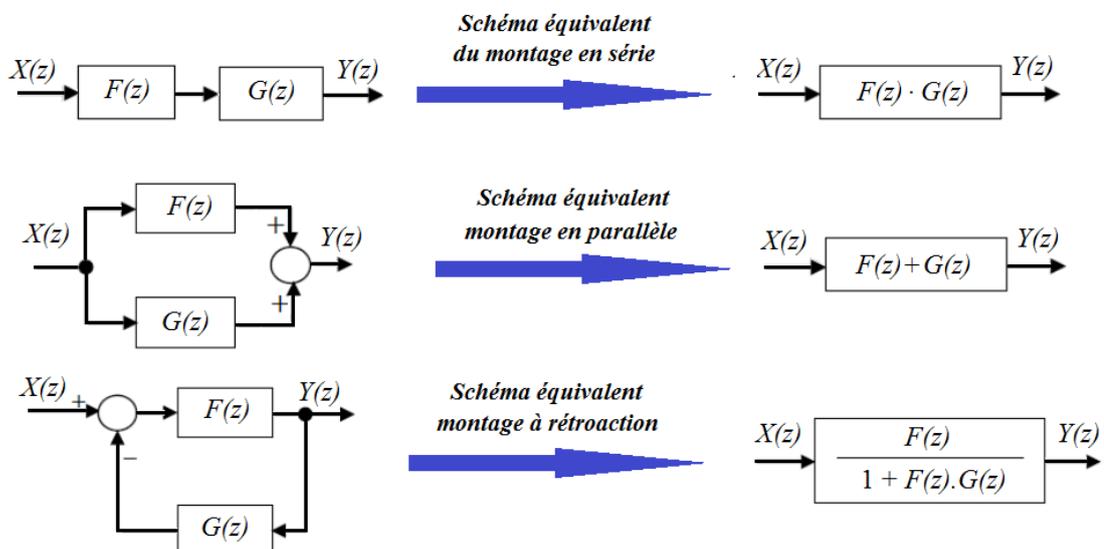


Figure 3.6. Combinaisons série, parallèle et en rétroaction des systèmes discrets

Les règles de transformations des schémas blocs sont illustrés en annexe A.

3.3 Systèmes échantillonnés

3.3.1 Introduction

Un système échantillonné est composé d'un bloqueur d'ordre zéro ($B_0(p)$), d'un système à temps continu ($F(p)$) et d'un échantillonneur, selon le schéma de la figure 3.7. Les signaux d'entrée/sortie du système échantillonné sont deux signaux à temps discret [17].

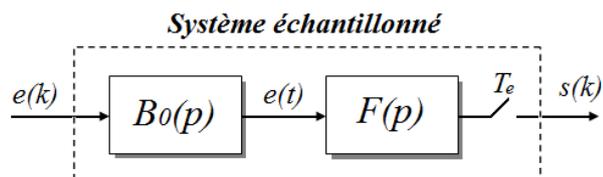


Figure 3.7. Schéma bloc d'un système échantillonné

3.3.2 Fonction de transfert d'un système échantillonné

La fonction de transfert d'un système échantillonné est obtenue par échantillonnage de la fonction de transfert du système à temps continu. Elle se résume au théorème suivant [14]:

Théorème

Soit un système à temps continu modélisé par sa fonction de transfert de Laplace $F(p)$. Ce système échantillonné admet comme fonction de transfert en z .

$$F(z) = Z[F(p)B_0(p)] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{F(p)}{p}\right] = (1-z^{-1})Z\left[\frac{F(p)}{p}\right] \quad (3-28)$$

Exemple 3.7 : Soit la fonction de transfert $F(p)$ suivante :

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1)} \quad (3-29)$$

La fonction de transfert échantillonnée $F(z)$ est donnée par:

$$F(z) = Z[F(p)B_0(p)] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{F(p)}{p}\right] = \frac{z-1}{z} Z\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right]$$

La décomposition en éléments simples de $F(p)/p$ donne :

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

En utilisant le tableau 3.1 ($p \Rightarrow z$), il vient:

$$F(z) = \frac{z-1}{z} \left[-\frac{z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T_e}} \right]$$

Pour $T_e=1s$, la fonction de transfert échantillonnée de $F(z)$ est :

$$F(z) = \frac{0.3679z + 0.2643}{z^2 - 1.368z + 0.3679}$$

3.4 Transformée en z inverse

La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal. La définition de la transformée en z inverse est [17]:

$$f(k) = Z^{-1}\{F(z)\} \quad (3-30)$$

Le calcul de la transformée en z inverse peut se faire à l'aide des tables de transformations. La transformée en z inverse peut être calculée par plusieurs méthodes. Les méthodes souvent utilisées sont :

- décomposition en éléments simples,
- division polynomiale (selon les puissances croissantes de z^{-1}).

3.4.1 Décomposition en éléments simples

Cette méthode est la plus simple. Le principe de cette méthode est décrit comme suit :

- Formuler la fonction $F(z)$ sous la forme :

$$F(z) = z \frac{N(z)}{D(z)} = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \frac{z}{z - p_i} \quad (3-31)$$

Avec $p_{i(i=1, \dots, n)}$: pôles de $F(z)$.

- Déterminer les échantillons $f(k)$ en utilisant la table 3.1 de la transformée en z sous la forme :

$$f(k) = \delta(k) + \sum_{i=1}^n A_i p_i^k u(k) \quad (3-32)$$

Cette méthode peut également s'utiliser lorsque la fonction $F(z)$ a des pôles complexes et/ou des pôles multiples.

Exemple 3.8 : Soit la fonction de transfert $F(z)$ suivante :

$$F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^2(z-2)} \quad (3-33)$$

La décomposition en éléments simples de $F(z)/z$ s'écrit :

$$\frac{F(z)}{z} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-2}$$

En utilisant la table de la transformée en z , on obtient :

$$f(k) = (-1 - k + 2^{k+1})u(k)$$

3.4.2 Division polynomiale [9]

Pour utiliser cette technique, il faut :

- écrire la fonction $F(z)$ sous la forme :

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad (3-34)$$

- La division selon les puissances croissantes de z^{-l} de $N(z)$ par $D(z)$ se fait par une simple division:

$$\frac{b_0 + \frac{b_1 z^{-1} + \dots}{a_0}}{0 + \left(b_1 - \frac{b_0 a_1}{a_0}\right) z^{-1} + \dots} \left| \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots}{\underbrace{\frac{b_0}{a_0}}_{c_0} + \underbrace{\left(\frac{b_1 a_0 - b_0 a_1}{a_0^2}\right)}_{c_1} z^{-1} + \dots} \right. \quad (3-35)$$

$$F(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots \quad (3-36)$$

➤ D'après la propriété du retard de la transformée en z , on déduit de l'équation précédente que :

$$f(k) = c_0 \delta(k) + c_1 \delta(k-1) + c_2 \delta(k-2) + \dots \quad (3-37)$$

➤ ce qui conduit aux valeurs :

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 \\ f(1) &= c_1 \\ f(2) &= c_2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (3-38)$$

Exemple 3.9 : Soit la fonction de transfert $F(z)$ suivante :

$$F(z) = \frac{-z + z^2}{2 + 3z + z^2} \quad (3-39)$$

Pour calculer la transformée en z inverse de $F(z)$, on écrit $F(z)$ comme une fraction rationnelle en z^{-1} :

$$F(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

La division selon les puissances croissantes de z^{-1} de $N(z)$ par $D(z)$ est :

$$\begin{array}{r|l} 1 - z^{-1} & \frac{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 4z^{-1} + 10z^{-2} - 22z^{-3} + \dots} \\ - (1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}) & \\ \hline -4z^{-1} - 2z^{-2} & \\ - (-4z^{-1} - 12z^{-2} - 8z^{-3}) & \\ \hline 10z^{-2} + 8z^{-3} & \\ - (10z^{-2} + 30z^{-3} + 20z^{-4}) & \\ \hline -22z^{-3} - 20z^{-4} & \\ \dots & \end{array}$$

On déduit :

$$f(k) = 1\delta(k) - 4\delta(k-1) + 10\delta(k-3) - 22\delta(k-4) + \dots$$

Avec :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= -4 \\ f(2) &= 10 \\ f(3) &= -22 \\ &\dots \end{aligned}$$

3.5 Exercices

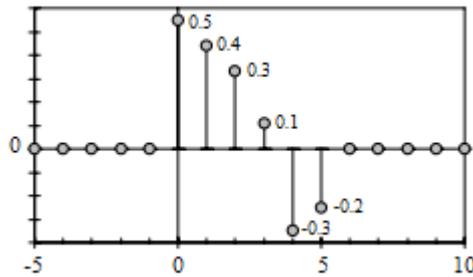
Exercice n°1 :

Calculer la transformée en z de la fonction suivante :

$$f(k) = (0.5)^k u(k) \quad (3-40)$$

Exercice n°2 :

1. Donner la transformée en z de la fonction numérique discrète $f(k)$ représentée par le graphique suivant :



2. Calculer la transformée en z de la fonction $f(k)$ suivante :

k	0	1	2	3	4	5... ∞
$f(k)$	2	4	3	5	1	0...0

Exercice n°3 :

Soit un système défini par son équation de récurrence :

$$s(k+1) - 0.5s(k) = e(k) \quad (3-41)$$

Avec comme conditions initiales : $s(0) = 0$ et l'entrée est un échelon unitaire.

- Calculer la sortie de $s(k)$.

Exercice n°4 :

On considère la suite s , causale, définie par l'équation aux différences suivante :

$$s(k) = \frac{5}{6}s(k-1) - \frac{1}{6}s(k-2) + 3e(k) \quad (3-42)$$

1. Calculer les premiers termes $s(0)$, $s(1)$ et $s(2)$ sachant que $e(0)=1$ et $e(k)=0$ pour $k \neq 0$

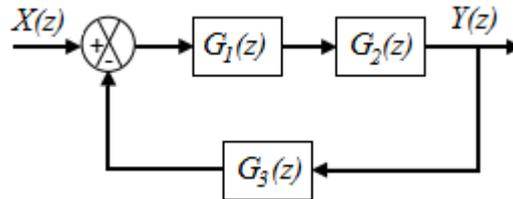
2. Appliquer la transformée en z à l'équation aux différences et isoler $S(z)$.

3. Décomposer $S(z)/z$ en éléments simples.

4. En déduire $s(k)$ par lecture de la table des transformées usuelles.

Exercice n 5 :

Trouver la fonction de transfert $G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ du schéma bloc suivant :



Exercice n 6 :

Calculer la transformée en z inverse par division suivant la puissance croissante de z^{-1} .

a) $F(z) = \frac{3z}{3z^2 - 2z - 1}$

b) $F(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^2(z-2)}$

Chapitre 4

Analyse des systèmes échantillonnés

Tout comme les systèmes continus, l'analyse des systèmes échantillonnés consiste à étudier la stabilité en boucle ouverte et fermée. Dans le cas des systèmes linéaires, la stabilité est donc une propriété intrinsèque, dépendant exclusivement des paramètres et de la structure du système.

Ce chapitre porte sur l'analyse et l'étude de la stabilité des systèmes échantillonnés. Le premier point étudié consiste à établir la condition fondamentale de stabilité des systèmes discrets. Ensuite, plusieurs critères de stabilité des systèmes échantillonnés ont été exposés. On y trouve, les critères algébriques de Schur-Cohn, Jury et de Routh-Hurwitz, ainsi que les critères géométriques de Nyquist et le lieu d'Evans (lieu des racines).

4.1 Stabilité des systèmes discrets

Nous présentons la notion de stabilité "entrée bornée-sortie bornée" (en anglais bounded input-bounded output ou BIBO) pour les systèmes à temps discrets.

4.1.1 Définition de la stabilité

Dans le cadre du cours de Systèmes asservis échantillonnés, la définition suivante de la stabilité avait été adoptée [18]:

Un système dynamique linéaire est stable si et seulement si, écarté de sa position d'équilibre par une sollicitation extérieure, le système revient à cette position lorsque la sollicitation a cessé.

4.1.2 Condition fondamentale de stabilité

Pour tester la stabilité d'un système dynamique linéaire discret, il faut appliquer à son entrée une impulsion-unité discrète $e(k)=\delta(k)$ (figure 4.1). Afin de juger la stabilité du système, il suffit d'examiner le signal de sortie $y(k)$. Si la sortie $y(k)$ tend vers 0, on peut dire que le système dynamique linéaire discret est stable.

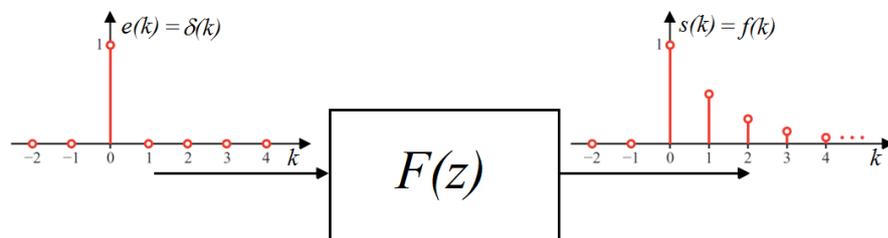


Figure 4.1. Test de la stabilité d'un système dynamique linéaire discret $F(z)$ par application d'une impulsion-unité discrète $\delta(k)$

Mathématiquement, le système dynamique linéaire discret est décrit par l'équation (3-22). Puisque $e(k)$ est une impulsion-unité discrète ($E(z)=1$), on obtient [18]:

$$S(z) = F(z)E(z) = F(z) \quad (4-1)$$

Si les pôles de $F(z)$ sont simples, la décomposition de la fonction $F(z)/z$ en éléments simples peut s'écrire :

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i \cdot z}{z - \lambda_i} \quad (4-2)$$

Les p_i sont les pôles de la fonction de transfert $F(z)$.

On a alors :

$$S(z) = F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i \cdot z}{z - \lambda_i} \quad (4-3)$$

La transformée inverse de $F(z)$ est :

$$s(k) = f(k) = \sum_{i=1}^n C_i \lambda_i^k \quad (4-4)$$

Pour faire tendre $s(k)$ vers 0, il faut bien évidemment que tous les pôles p_i soient inférieurs à 1, c'est-à-dire que les modules des pôles p_i (réels ou complexes) doivent être strictement inférieurs à 1. C'est la condition fondamentale de stabilité. Généralisons donc ce résultat :

Un système dynamique linéaire discret est stable, si et seulement si, tous les pôles de sa fonction de transfert sont situés à l'intérieur du disque unité (Figure 4.2), tels que :

$$|\lambda_i| < 1 \quad (4-5)$$

La figure 4.2 représente la correspondance entre stabilité en temps continu et stabilité en temps discret.

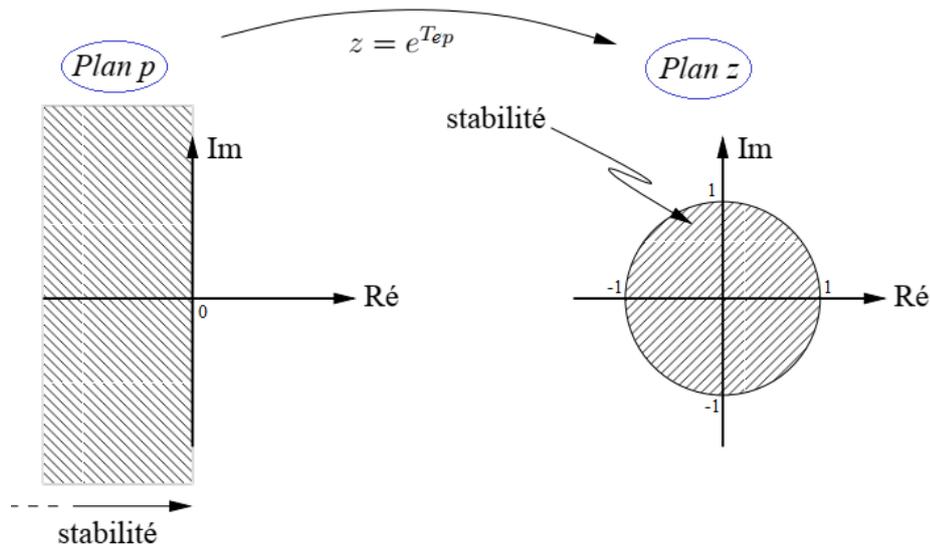


Figure 4.2. Correspondance entre stabilité en temps continu et stabilité en temps discret

Remarque :

- Lorsqu'un ou plusieurs pôles sont à l'extérieur du cercle-unité, le système est instable car sa réponse impulsionnelle diverge.

- Pour des pôles situés exactement sur cercle-unité, le système est à stabilité marginale.

Exemple 4.1 : Soit le système $F(z)$ caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$F(z) = \frac{0.25z}{(z-0.5)(z-0.25)} \quad (4-6)$$

Les pôles sont de module inférieur à 1. Donc, le système est **stable**.

La réponse impulsionnelle du système $F(z)$ (Figure 4.3) confirme la stabilité du système.

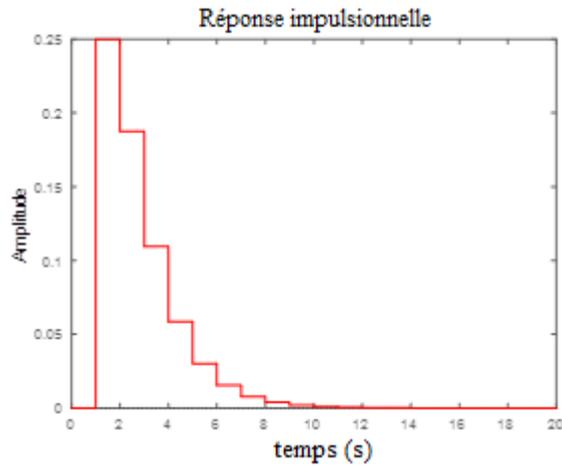


Figure 4.3. Réponse impulsionnelle du système $F(z)$ (Exemple 4.1)

Exemple 4.2 : Soit le système $G(z)$ caractérisé par la fonction de transfert suivante :

$$G(z) = \frac{z}{(z+2)(z-0.5)} \quad (4-7)$$

L'un des pôles est de module supérieur à 1 ($|-2| > 1$). Donc, le système est **instable**.

La réponse impulsionnelle du système $G(z)$ (Figure 4.4) confirme l'instabilité du système.

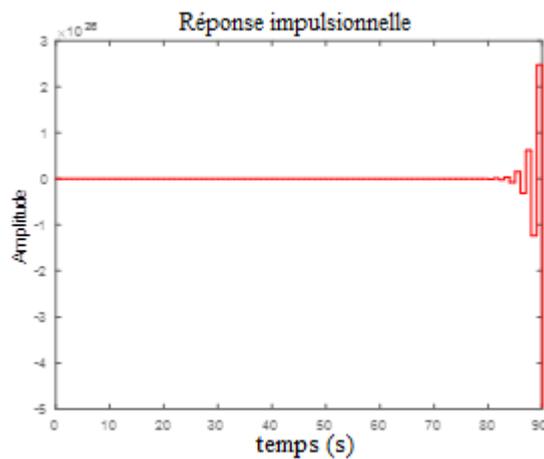


Figure 4.4. Réponse impulsionnelle du système $G(z)$ (Exemple 4.2)

4.2 Critères de stabilité

Les critères de stabilité sont utilisés lorsqu'on ne peut pas calculer les pôles par une méthode numérique.

4.2.1 Critères algébriques

4.2.1.1 Critère de Schur-Cohn

Le critère de Schur-Cohn est utilisable quel que soit l'ordre du système. Il permet de savoir si toutes les racines de l'équation caractéristique sont de module inférieur à 1. L'équation caractéristique de la fonction de transfert (4-8) est obtenue en annulant le dénominateur de cette fonction de transfert soit [1] :

$$D(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0 \quad (4-8)$$

Notons :

$$SC_1 = \begin{bmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{bmatrix}; \quad SC_2 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & 0 & a_n \\ a_n & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & a_0 \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

La matrice de Schur-Cohn s'écrit, en fonction des coefficients du polynôme de l'équation caractéristique $D(z)$.

$$SC_k = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} \\ a_2 & a_1 & a_n & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & a_{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & a_0 & \dots & a_{k-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & a_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n-k+1} & a_{n-k+2} & a_{n-k+3} & \dots & a_n & \vdots & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

L'analyse de la stabilité passe par le calcul du déterminant de la matrice de Schur-Cohn.

Notons :

$$\Delta_k = \det(SC_k) \quad (4-11)$$

Le critère de stabilité de Schur-Cohn s'énonce ainsi :

Le système échantillonné sera stable, si pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$ on a :

$$(-1)^k \Delta_k > 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (4-12)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Delta_k < 0, & \text{ pour } k \text{ impair} \\ \Delta_k > 0, & \text{ pour } k \text{ pair} \end{aligned} \quad (4-13)$$

Exemple 4.3 : Soit la fonction de transfert suivante :

$$F(z) = \frac{1.5}{z + 0.5} \quad (4-14)$$

On a : $D(z) = 0.5 + z = a_0 + a_1 z$, $n=1$ et $1 \leq k \leq n \rightarrow k=1$

La matrice de Schur-Cohn s'écrit :

$$SC_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = -0.75$$

$k=1$ impair et $\Delta_1 = -0.75 < 0 \Rightarrow$ le système est stable.

4.2.1.2 Critère de Jury

Le critère de Jury permet de diagnostiquer la stabilité d'un système linéaire à temps discret à partir de la connaissance du polynôme caractéristique et sans avoir à calculer ses pôles. Lorsque les coefficients de $D(z)$ sont réels, le critère de Jury permet de conclure sur la stabilité du système sans calculer les racines du dénominateur ou du polynôme caractéristique $D(z)$.

À partir de l'expression de $D(z)$, on construit le Tableau 4.1 de la manière suivante [4]:

- ❖ On place toute la suite de coefficients a_n dans un tableau, sur une première ligne, dans l'ordre des puissances de z décroissantes.
- ❖ Sur une deuxième ligne, on place les mêmes coefficients mais en sens inverse.
- ❖ On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire de $n-1$ valeurs c_j , avec :

$$c_j = a_0 a_j - a_n a_{n-j} \quad (4-15)$$

- ❖ On dispose alors d'un tableau de trois lignes et on crée aussitôt une quatrième ligne avec la même suite de coefficients c_j , mais placée en sens inverse.
- ❖ On itère le processus de calcul jusqu'à ce qu'il ne reste que 3 termes sur une ligne (q_0 , q_1 et q_2).
- ❖ Le tableau définitif doit comporter $2n-3$ lignes. Le système est stable si toutes les conditions suivantes sont réunies simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(1) > 0 \\ D(-1) > 0 \text{ si } n \text{ est pair, } D(-1) < 0 \text{ si } n \text{ est impair} \\ |a_0| < |a_n| \\ |c_0| < |c_{n-1}| \\ \vdots \\ |q_0| < |q_2| \end{array} \right. \quad (4-16)$$

N° ligne						
1	a_0	a_1	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
3	c_0	c_1	...	c_{n-1}	c_n	
4	c_n	c_{n-1}		c_1	c_0	
...		
...		
$2n-3$	q_0	q_1	q_2			

Table 4.1 Construction de la table de Jury

Exemple 4.4 : Soit le système dont le polynôme caractéristique s'écrit :

$$D(z) = z^2 + z + 0.5 \quad (4-17)$$

Dan ce cas, le tableau de Jury a $2n-3=1$ ligne ($n=2$).

D'après le critère de Jury, le système est stable si et seulement si toutes les conditions suivantes sont respectées :

$$\left\{ \begin{array}{l} D(1) = 1 + 1 + 0.5 = 2.5 > 0 \\ D(-1) = 1 - 1 + 0.5 = 0.5 > 0 \\ |a_0| = 0.5 < |a_2| = 1 \end{array} \right.$$

Les trois conditions sont satisfaites, le système associé est stable.

4.2.1.3 Critère de Routh-Hurwitz

Pour pouvoir exploiter le critère de Routh, très utilisé pour l'étude de la stabilité des systèmes linéaires continus, on utilise la transformée en w . La figure 4.5 représente le passage du plan z au plan w [1].

Pour le passage du plan z au plan w , cette transformation se définit en posant :

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (4-18)$$

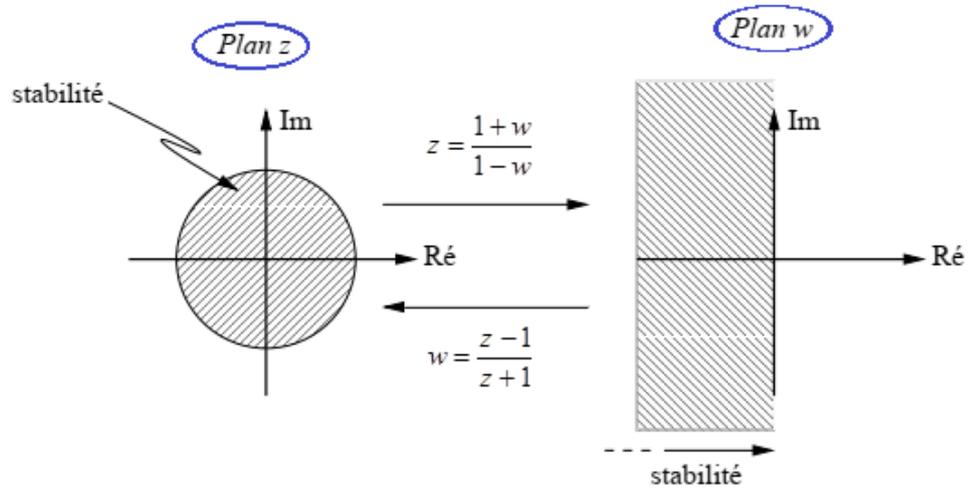


Figure 4.5. Passage du plan z au plan w

Le critère de Routh s'énonce comme suit :

1- Déterminer l'équation caractéristique en w ($D(w)$)

L'équation caractéristique en w ($D(w)$) est obtenue en remplaçant la variable z par son expression

$$z = \frac{1+w}{1-w} \text{ dans } D(z).$$

$$D(w) = \alpha_n w^n + \alpha_{n-1} w^{n-1} + \dots + \alpha_1 w + \alpha_0 \quad (4-19)$$

2- Construire le tableau de Routh-Hurwitz.

Le tableau de Routh-Hurwitz (Table 4.2) est formulé à partir des coefficients de l'équation caractéristique $D(w)$.

w^n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	...
w^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	α_{n-5}	...
w^{n-2}	x_{n-2}	x_{n-3}	x_{n-4}	...
w^{n-3}	y_{n-3}	y_{n-4}	...	
...		
...		
w^0	...			

Table 4.2 Construction de la table de Routh-Hurwitz

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2} - \alpha_n\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}} \\ x_{n-3} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4} - \alpha_n\alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}} \\ \vdots \end{array} \right.$$

et la ligne suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n-3} = \frac{x_{n-2}\alpha_{n-3} - x_{n-3}\alpha_{n-1}}{x_{n-2}} \\ \vdots \end{array} \right.$$

3- Appliquer les conditions suivantes :

A- Condition nécessaire de stabilité :

Si les racines de l'équation caractéristique en w sont toutes à partie réelle négative alors tous les coefficients de ce polynôme α_k sont de même signe.

B- Condition nécessaire et suffisante de stabilité :

Les racines de l'équation caractéristique en w sont toutes à partie réelle strictement négative. Si et seulement si les coefficients de la première colonne du tableau de Routh sont tous de même signe.

Exemple 4.5 : Soit le système dont le polynôme caractéristique s'écrit :

$$D(z) = z^3 + (K - 0.75)z - 0.25 \quad (4-20)$$

Par passage du plan z au plan w ($z = \frac{1+w}{1-w}$), il vient le polynôme :

$$D(w) = w^3(K + 0.5) + w^2(3 - K) + w(4.5 - K) + K$$

La table de Routh correspondante s'écrit :

w^3	$K+0.5$	$4.5-K$	0
w^2	$3-K$	K	0
w^1	$\frac{-8K+13,5}{3-K}$	0	
w^0	K		

Le polynôme en w aura toutes ses racines à partie réelle négative (et par conséquent, le polynôme $D(z)$ aura ses racines de module inférieur à 1) si tous ses coefficients sont de même signe et si les éléments de la première colonne de la table de Routh sont de même signe. Ceci conduit à la satisfaction simultanée de l'ensemble de conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K + 0.5 > 0 \\ 3 - K > 0 \\ 4.5 - K > 0 \\ K > 0 \\ -8K + 13.5 > 0 \end{array} \right.$$

Donc, le système associé est stable pour $0 < K < 1.6875$.

4.2.2 Critères géométriques

Les critères géométriques sont très souvent utilisés dans l'étude de la stabilité des systèmes asservis car, en plus de l'information "stable" ou "instable", ils permettent d'avoir une mesure du degré de stabilité des systèmes asservis via la marge de gain et la marge de phase.

4.2.2.1 Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist permet de déduire la stabilité de la boucle fermée à partir du tracé du lieu de la boucle ouverte. Celle-ci pouvant être obtenue expérimentalement, le critère de Nyquist présente un grand intérêt pratique [18].

Soit le système bouclé de la figure 4.6.

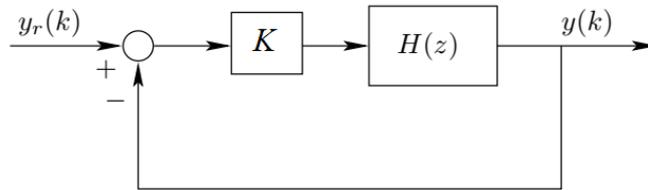


Figure 4.6. Système bouclé en boucle fermée

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$F_{BF}(z) = \frac{K \cdot H(z)}{1 + K \cdot H(z)} \quad (4-21)$$

Les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les racines d'une équation caractéristique pouvant être mise sous la forme :

$$1 + K \cdot H(z) = 0 \quad (4-22)$$

où K est un scalaire positif.

Le critère de Nyquist permet de savoir si les racines d'une expression de la forme (4-22) avec $K=1$ fixé, sont à partie réelle négative en raisonnant sur le lieu de Nyquist de la fonction de transfert échantillonnée.

A. Méthode pour le tracé du lieu de Nyquist

A partir de la fonction de transfert en w de $H(z)$. Appelons $\tilde{H}(w)$ cette fonction de transfert. On a la relation [1]:

$$\tilde{H}(w) = H(z) \quad (4-23)$$

Où :

$$z = \frac{w-1}{w+1} \quad (4-24)$$

En remplaçant z par $e^{j\omega T}$ dans (4-24), on montre que :

$$w = j \tan\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (4-25)$$

Or, lorsque w varie de 0 à $\frac{\pi}{T}$, $\tan\left(\frac{wT}{2}\right)$ varie de 0 à $+\infty$. On pose alors $w = j\tilde{w}$:

$$\tilde{w} = \tan\left(\frac{wT}{2}\right) \quad (4-26)$$

On voit qu'en posant $w = j\tilde{w}$, où \tilde{w} varie de 0 à $+\infty$, on obtient un changement de variable analogue au cas des systèmes continus lorsque l'on trace leur lieu de Nyquist.

La correspondance inverse de w est :

$$w = \frac{2}{T} \arctan(\tilde{w}) \quad (4-27)$$

Pour tracer le lieu de Nyquist de la fonction de transfert $\tilde{H}(w)$, on procède suivant la démarche suivante :

Etape 1: Construit le tableau 4.2 avec en première colonne, un certain nombre de valeurs de \tilde{w} qui soient significatives pour le tracé. Dans une deuxième colonne, reporter la vraie pulsation w correspondante. Sur une troisième colonne, reporter le calcul de la partie réelle de $\tilde{H}(j\tilde{w})$ pour chacune des valeurs de w et en dernière colonne, la partie imaginaire de $\tilde{H}(j\tilde{w})$.

\tilde{w}	w	$R_e \tilde{H}(j\tilde{w})$	$I_m \tilde{H}(j\tilde{w})$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Table 4.2 Tableau pour tracer le lieu de Nyquist

Etape 2: Reporter sur un graphique représentant le plan complexe, la fonction $I_m \tilde{H}(j\tilde{w}) = f(R_e \tilde{H}(j\tilde{w}))$ point par point en précisant chaque valeur de \tilde{w} , et en reliant ces points dans le sens des \tilde{w} croissants.

Etape 3: Placer le point critique d'affixe $-1+0j$.

B. Théorème du Critère de Nyquist

Si le système en boucle ouverte est stable alors le système bouclé est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de la boucle ouverte n'encercle pas le point -1.

Ce critère est également connu sous le nom du *critère du revers*.

Exemple 4.6 : La figure 4.7 représente des exemples d'utilisation du critère de Nyquist pour l'étude de la stabilité des systèmes.

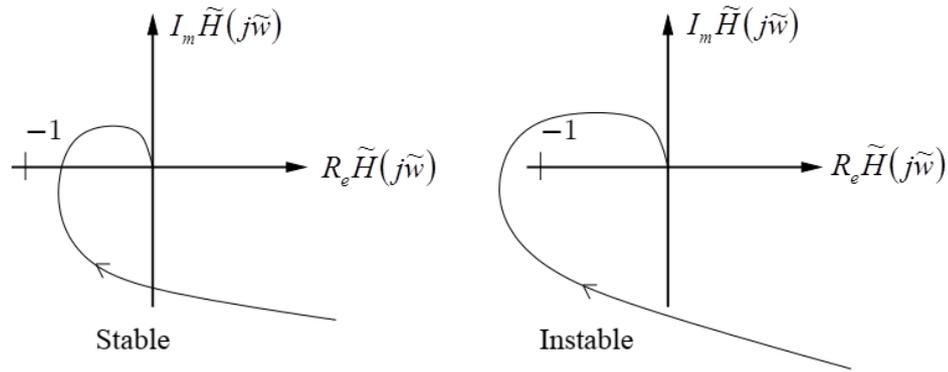


Figure 4.7. Exemple d'études de la stabilité des systèmes par critère de Nyquist

Les marges de stabilité (marge de gain et marge de phase) se déduisent alors du lieu de Nyquist comme dans le cas des systèmes continus.

4.2.2.2 Lieu d'Evans (ou lieu des racines)

Le lieu d'Evans appelé aussi le lieu des racines constitue une deuxième méthode géométrique pour l'étude de la stabilité d'un système. Il représente l'ensemble des points du plan complexe qui sont solutions de l'équation caractéristique lorsqu'on fait varier un facteur (gain K). Plus précisément, Les courbes d'écrites par les pôles du système lorsque K varie correspondent aux courbes d'écrites par les racines de l'équation caractéristique lorsque K varie. Comme le domaine de stabilité est le cercle unité centré à l'origine, on déduit facilement du tracé du lieu des racines la valeur de K à la limite de stabilité ou les valeurs de K pour que le système bouclé reste stable [9],[14].

Pour ce faire, on écrit la fonction de transfert en boucle fermée (4-21) représenté par la Figure 4.6 sous la forme suivante :

$$F_{BF}(z) = \frac{K \frac{N(z)}{D(z)}}{1 + K \frac{N(z)}{D(z)}} = \frac{K \cdot N(z)}{D(z) + K \cdot N(z)} \quad (4-28)$$

L'équation caractéristique est :

$$D_c(z) = D(z) + K \cdot N(z) = 0 \quad (4-29)$$

On trace dans le plan complexe l'ensemble des points représentant les solutions possibles de l'équation caractéristique $D_c(z)$ en faisant varier $k=0$ à $k=\infty$ (Voir exemple 4.7) et on cherche les valeurs de k pour lesquelles les racines de l'équation caractéristique sont à l'intérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon unité.

Le plus souvent le lieu d'Evans est tracé à l'aide de logiciels comme par exemple MATLAB. Dans le Control Toolbox de MATLAB, la fonction qui permet de tracer le lieu d'Evans est **rlocus**.

Exemple 4.7 : Soit la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$F(z) = K \frac{z}{z^3 - 0.75z - 0.25} \quad (4-30)$$

L'équation caractéristique est : $D_c(z) = z^3 + (K - 0.75)z - 0.25 = 0$

La figure 4.8 représente le lieu des racines de l'équation caractéristique $D_c(z)$, en fonction du paramètre K , lorsque K varie de 0 à ∞ (tracé obtenu avec Matlab).

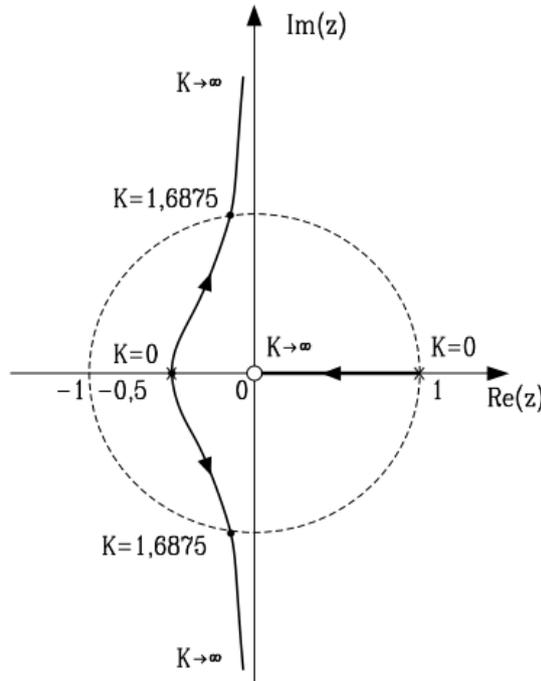


Figure 4.8. Lieu d'Evans de $F(z)$ (Exemple 4.7)

On remarque, qu'à partir de la valeur $K=1.6875$ les pôles de la boucle fermée sortent du disque unité.

On déduit, qu'en boucle fermée le système est stable si $0 < K < 1.6875$.

A. Règles de construction du lieu d'Evans

Nous donnons quelques règles de construction du lieu d'Evans sans en détailler les preuves. Ces règles se basent uniquement sur la fonction de transfert en boucle ouverte $F(z)$ [9].

Règle 1 : Le nombre de branches du lieu est identique au nombre de pôles de la boucle ouverte (n branches).

Règle 2 : Le point de départ est les n branches partent, pour $K=0$, des n pôles de $F(z)$.

Règle 3 : Les points d'arrivée est les n branches aboutissent, pour $K \rightarrow \infty$, aux m zéros et aux $n-m$ zéros à l'infini de $F(z)$.

Règle 4 : Le lieu des racines est *symétrique* par rapport à l'axe réel.

Règle 5 : Branches du lieu appartenant à l'axe réel c'est-à-dire un point M de l'axe réel appartient au lieu si le nombre de pôles et zéros réels de la boucle ouverte, comptes avec leur ordre de multiplicité, et situés à la droite du point M , est impair.

Règle 6 : Les $n-m$ asymptotes des branches partant à l'infini font avec l'axe réel des angles :

$$\alpha_\lambda = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{n - m}, \lambda = 0, 1, \dots, (n - m - 1) \quad (4-31)$$

Ces $n-m$ asymptotes se coupent sur l'axe réel au point :

$$x_0 = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \quad (4-32)$$

Règle 7 : Les Points de séparation correspondent à l'intersection du lieu avec l'axe réel. Un point de séparation sur l'axe réel traduit l'existence d'une racine réelle multiple qui a la propriété d'annuler la dérivée de $F(z)$:

$$\frac{dF(z)}{dz} = 0 \quad (4-33)$$

Si N branches du lieu d'Evans se coupent en un point de séparation alors l'angle des branches au point de séparation entre deux demi-branches voisines est égal à π/N .

Règle 8 : La valeur de K , en tout point M , d'affixe z_M , du lieu d'Evans se calcule en utilisant l'équation caractéristique (4-29).

Exemple 4.8 : Soit la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$F(z) = K \frac{z + 0.5}{(z - 1)(z - 0.5)} \quad (4-34)$$

L'équation caractéristique est : $D_c(z) = z^2 + (K - 1.5)z + 0.5(1 + K) = 0$

Les règles du lieu des racines s'appliquent comme suit.

Règles 1, 2 et 3 :

Nombre des branches : $n = 2$ branches;

Points de départ : les pôles de la boucle ouverte $\{1; 0,5\}$;

Points d'arrivée : le zéro de la boucle ouverte $\{-0,5\}$ et le zéros à l'infini $\Rightarrow 1$ branche à l'infini.

Règles 5 : Branches du lieu appartenant à l'axe réel : tout point M d'abscisse z_M

avec $z_M \in [0,5 \ 1] \cup]-\infty \ -0,5]$.

Règle 6 : Asymptote de la branches à l'infini : $\alpha_0 = \pi$;

Règle 7 : Points de séparation :

$$\frac{dF_{BO}(z)}{dz} = 0 \Rightarrow z_1 = 0,72 \text{ et } z_2 = -1,72$$

Les angles des branches aux points de séparations sont $\pm \frac{\pi}{2}$.

Règle 8 : On considère l'équation caractéristique dans laquelle on remplace z par $x+iy$:

$$D_c(z) = z^2 + (K - 1.5)z + 0.5(1 + K) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x(K - 1.5) + 0.5(1 + K) = 0 & (4-35) \\ (2x + K - 1.5)y = 0 & (4-36) \end{cases}$$

A partir de l'équation (4-36), on déduit que:

$$K = 1.5 - 2x$$

En remplaçant K dans l'équation (4-35), on obtient :

$$(x + 0.5)^2 + y^2 = 1.5$$

Donc la deuxième branche du lieu des racines décrit un cercle de centre $(-0.5; 0)$ et de rayon $r = \sqrt{1.5} = 1.23$.

La figure 4.9 représente le lieu des racines de l'exemple 4.8.

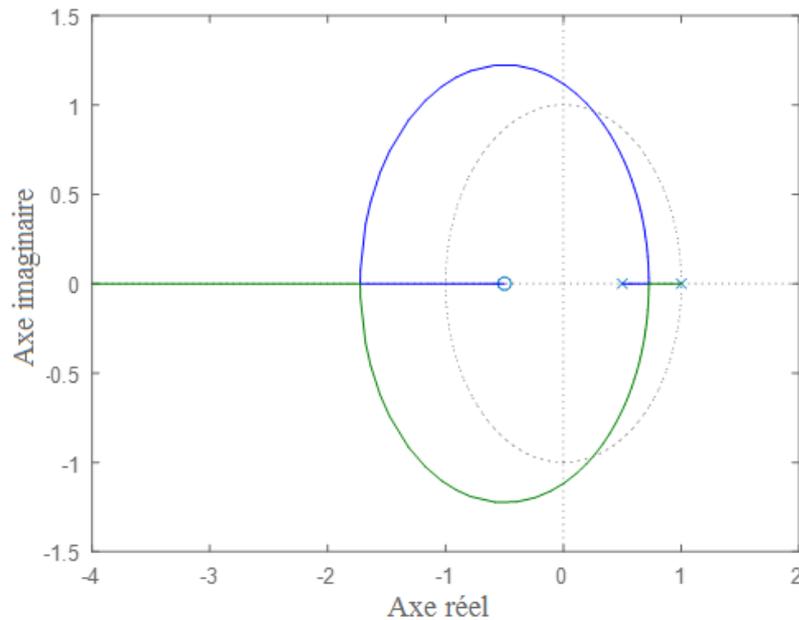


Figure 4.9. Lieu des racines de l'exemple 4.8

4.3 Exercices

Exercice n°1 :

Considérons le système échantillonné représenté sur la Figure 4.10.



Figure 4.10. Système échantillonné

On donne:

$$G(s) = \frac{1}{s+10} \quad (4-37)$$

1. Calculer $G(z)$ en boucle ouverte et en boucle fermé (A.N: $T_e = 1s$).
2. Etudier la stabilité du système en boucle ouverte et en boucle fermé.

Exercice n 2 :

Soit le système $F(z)$ suivant :

$$F(z) = \frac{4z - 2}{4z^3 + (4K - 8)z^2 + (5 - 4K)z + (3K - 1)} \quad (4-38)$$

Etudier la stabilité de $F(z)$ en fonction du paramètre K à l'aide des critères de Jury et Routh-Hurwitz.

Exercice n 3 :

Soit le système $F(z)$ suivant :

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z-0.9)} \quad (4-39)$$

Etudier la stabilité de $G(z)$ bouclé par une rétroaction K à l'aide de critère de Nyquist et du lieu d'Evans.

Chapitre 5

Synthèse des systèmes échantillonnés

En plus de l'analyse des systèmes échantillonnés, un système asservi doit présenter d'autres qualités lui permettant d'assurer des performances satisfaisantes. Tout comme l'étude des systèmes à temps continu conduit à mettre en évidence des performances en boucle fermée telles que rapidité, précision et limitation du dépassement, nous allons à présent nous intéresser à ces performances dynamiques dans le cas d'asservissement (correction) des systèmes à temps discret.

Dans ce chapitre, la synthèse des systèmes échantillonnés sera étudiée. Nous commencerons par une présentation de quelques notions de précision et rapidité des systèmes à temps discret. Puis nous élaborons la correction des systèmes échantillonnés asservis ainsi que les différentes structures des régulateurs standards (*PI*, *PD* et *PID*). On terminera ce chapitre par la synthèse d'un correcteur numérique par la méthode polynomiale.

5.1 Rapidité des systèmes échantillonnés

La rapidité d'un système échantillonné est liée au temps de réponse donc à l'étendue de sa bande passante. Pour tester la rapidité d'un système échantillonné, on procède tout à fait comme pour les systèmes continus [19]:

- Signal-test : par un échelon-unité (réponses indicielles)

- Temps de réponse à $\pm 5\%$ de la réponse permanente :

- La fonction de transfert à prendre en considération est $F(z)$ si on a affaire à un système isolé ou en chaîne ouverte, $F_{BF}(z)$ si on étudie le cas d'un système bouclé.

Les réponses indicielles de deux systèmes échantillonnés se présentent sous la forme des signaux donnés par la figure 5.1.

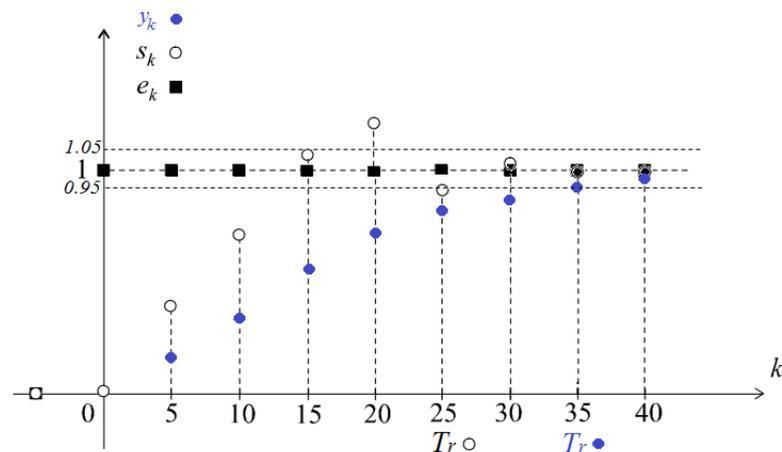


Figure 5.1. Réponses indicielles des systèmes échantillonnés

La réponse du système n'existant qu'aux instants d'échantillonnage (suite d'impulsions de Dirac), le temps de réponse (T_r) ne peut s'évaluer qu'en un nombre entier (n) de périodes (T_e) :

$$T_r = nT_e \quad (5-1)$$

Exemple 5.1 : Sur la figure 5.2, le système dont la réponse est en rouge est plus rapide que le système dont la réponse est en bleu.

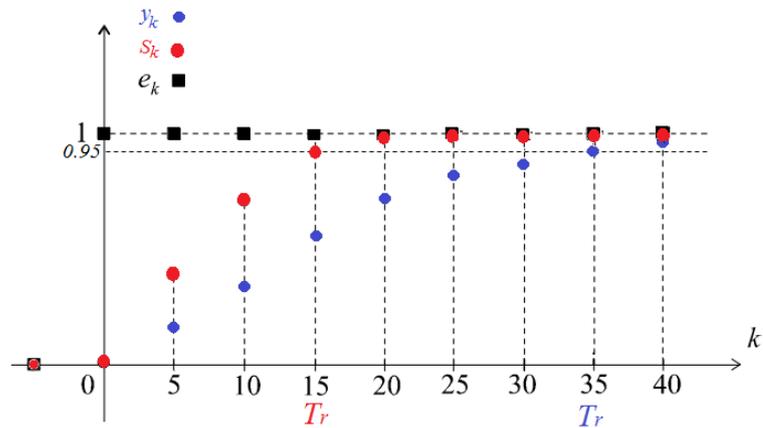


Figure 5.2. Exemple de réponses indicielles de deux systèmes échantillonnés

5.2 Précision statique des systèmes échantillonnés

La précision est la capacité d'un système à suivre un ensemble de consignes particulières avec une erreur acceptable par le cahier des charges. On définit, pour les systèmes à temps discret, les mêmes performances que pour les systèmes à temps continu. Il en est ainsi de la précision des systèmes qui est ici, toujours définie par les notions d'erreurs de position, de vitesse et d'accélération [1],[20].

Considérons un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $F(z)$, placé dans une boucle à retour unitaire et représenté sur la figure 5.3.

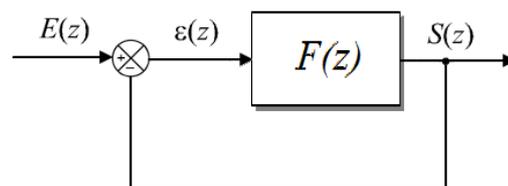


Figure 5.3. Schéma d'un asservissement échantillonné à retour unitaire.

L'erreur $\varepsilon(z)$ est liée à l'entrée $E(z)$ aux instants d'échantillonnage, soit $E(z)$, par la relation :

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z) - F(z)\varepsilon(z) \quad (5-2)$$

d'où :

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1 + F(z)} \quad (5-3)$$

Le système bouclé étant stable, le théorème de la valeur finale peut s'appliquer et permet d'obtenir l'erreur statique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+F(z)} \right] \quad (5-4)$$

5.2.1 Erreur de position

L'erreur de position ε_p est définie comme l'erreur statique de l'équation (5-4) correspondant à une entrée en échelon. L'erreur de position ε_p est :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+F(z)} \right] \quad (5-5)$$

Comme le signal d'entrée est un échelon unité, on a :

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow \varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1+F(z)} \right] \quad (5-6)$$

5.2.2 Erreur de vitesse

L'erreur de vitesse ε_v est définie comme l'erreur statique de l'équation (5-4) correspondant à une entrée en rampe. On définit également l'erreur de vitesse ε_v par :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+F(z)} \right] \quad (5-7)$$

avec cette fois le signal d'entrée est une rampe, on a :

$$E(z) = \frac{T_e z}{(z-1)^2} \Rightarrow \varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z-1) \cdot [1+F(z)]} \right] \quad (5-8)$$

5.2.3 Erreur d'accélération

L'erreur d'accélération ε_a est définie comme l'erreur statique de l'équation (5-4) correspondant à une entrée en parabole. On définit également l'erreur d'accélération ε_a par :

$$\varepsilon_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{E(z)}{1+F(z)} \right] \quad (5-9)$$

avec cette fois le signal d'entrée est une parabole, on a :

$$E(z) = \frac{T_e^2 (z+1)}{2(z-1)^3} \Rightarrow \varepsilon_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e^2 (z+1)}{2z(z-1)^2 \cdot [1+F(z)]} \right] \quad (5-10)$$

Exemple 5.2 : On considère un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $F(z)$ placé dans une boucle à retour unitaire (figure 5.3), avec :

$$F(z) = \frac{z}{z-0.5} \quad (5-11)$$

Le système est stable en boucle fermée.

L'erreur de position de ce système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + F(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1 + \frac{z}{z - 0.5}} \right] \Rightarrow \varepsilon_p = \frac{1}{3}$$

L'erreur de vitesse du système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_v = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e}{(z - 1) \cdot \left[1 + \frac{z}{z - 0.5} \right]} \right] \rightarrow \infty$$

Donc, l'erreur de vitesse du système asservi est infinie.

L'erreur d'accélération du système asservi a pour expression :

$$\varepsilon_a = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{T_e^2(z + 1)}{2z(z - 1)^2 \cdot \left[1 + \frac{z}{z - 0.5} \right]} \right] \rightarrow \infty$$

Aussi, l'erreur d'accélération du système asservi est infinie.

5.3 Correction des systèmes échantillonnés asservis

Les systèmes échantillonnés comme les systèmes à temps continu, doivent en général satisfaire à un cahier des charges qui impose, en boucle fermée, un certain nombre de performances (qui d'ailleurs sont les mêmes qu'en temps continu) : précision, rapidité, marge de stabilité et limitation du dépassement [20].

5.3.1 Rôle du correcteur

Le correcteur est un dispositif supplémentaire de fonction de transfert $C(z)$, son rôle consiste à modifier les performances du système initial (figure 5.4).

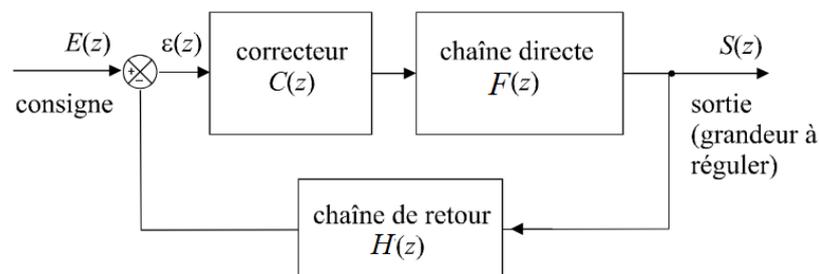


Figure 5.4. Schéma général d'un système échantillonné asservi et corrigé.

Tout l'art de la correction des systèmes échantillonnés consiste à choisir la bonne fonction de transfert $C(z)$ pour ce correcteur numérique de manière à régler chaque performance sur sa valeur requise, sans

perturber, bien sûr, le fonctionnement du système. Ces corrections sont en général assurées par un calculateur.

5.3.2 Correction numérique par discrétisation d'un correcteur continu

Les techniques de correction des systèmes analogiques sont bien connues. Une possibilité de synthèse d'un correcteur numérique $C(z)$ est de concevoir d'abord un correcteur satisfaisant dans le domaine continu $C(p)$ et d'effectuer ensuite une transformation $p \rightarrow z$ de ce dernier. Cette transformation se fait à l'aide d'une approximation de la variable p , selon le schéma de la figure 5.5. Un bloqueur doit être intercalé entre le correcteur numérique et le système à commander.

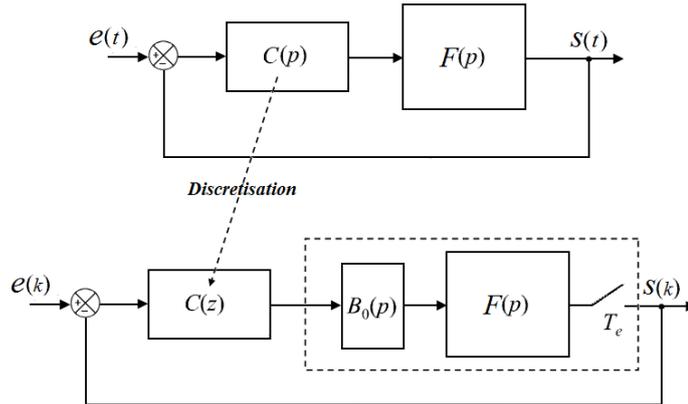


Figure 5.5. Schéma de discrétisation d'un correcteur analogique

Il existe différentes méthodes d'approximation présentant chacune des avantages et des inconvénients quant à leur précision, leur efficacité ou leur mise en œuvre. Le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes est susceptible d'influencer la validité des résultats en termes de réponse temporelle ou fréquentielle. Les approximations les plus utilisées sont les suivantes :

5.3.2.1 Discrétisation avant

Elle résulte de l'approximation de la dérivée d'une fonction entre deux instants d'échantillonnage par la méthode d'Euler :

$$TL^{-1}[pX(p)] = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t+T) - x(t)}{T} = Z^{-1} \left[\frac{z-1}{T} X(z) \right] \quad (5-12)$$

Ce qui revient à dire qu'une discrétisation avant, se traduisant par : $p \rightarrow \frac{z-1}{T_e}$.

5.3.2.2 Discrétisation arrière

Elle résulte de l'approximation suivante de la dérivée d'une fonction entre deux instants d'échantillonnage :

$$TL^{-1}[pX(p)] = \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-T)}{T} = Z^{-1} \left[\frac{z-1}{zT} X(z) \right] \quad (5-13)$$

Ce qui revient à dire qu'une discrétisation arrière, se traduisant par : $p \rightarrow \frac{z-1}{zT_e}$.

5.3.2.3 Approximation de Tustin

Soit la fonction intégrale suivante :

$$y(t) = \int_0^t x(t) dt \quad (5-14)$$

Prise entre deux instants d'échantillonnages données, en utilisant l'approximation par la méthode des trapèzes :

$$y(k) - y(k-1) \approx \frac{T}{2} [x(k-1) + x(k)] \quad (5-15)$$

La transformée en z inverse de l'équation (5-15) est :

$$(1 - z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2} (z^{-1} + 1)X(z) \quad (5-16)$$

La fonction de transfert en z associée est donc :

$$Y(z) = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1} X(z) \quad (5-17)$$

Ce qui revient à dire que l'approximation de Tustin, se traduisant par : $p \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$.

Exemple 5.3 : Soit le correcteur $C(p)$ (sous forme de fonctions de transfert en p) suivant :

$$C(p) = \frac{1 + 0.5p}{1 + 0.2p} \quad (5-18)$$

Les correcteurs numériques $C(z)$, obtenus par les différentes approximations pour une période d'échantillonnage $T_e = 1s$ sont donnés ci-après :

Par discrétisation avant avec : $p = \frac{z-1}{T_e}$, il vient : $C(z) = \frac{1+z}{1.6+0.4z}$

Par discrétisation arrière avec : $p = \frac{z-1}{zT_e}$, il vient : $C(z) = \frac{3z-1}{2.4z-0.4}$

Par approximation de Tustin : $p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$, il vient : $C(z) = \frac{2z}{1.4z+0.6}$

5.4 Régulateurs standards

Comme en régulation analogique, la forme des régulateurs standards les plus couramment rencontrés dans l'industrie sont les régulateurs à action proportionnel intégral (PI), proportionnel dérive (PD) et

proportionnel intégral dérivé (*PID*) [16]. La structure de ces régulateurs standards fait apparaître trois actions :

Action P: augmente la bande passante, donc la rapidité ; améliore la précision et dégrade la stabilité.

Action I: ralentit le système ; améliore la précision en augmentant la classe du système et peut dégrader la stabilité. De plus, peu robuste aux perturbations basses-fréquences sur le signal de consigne.

Action D: augmente la bande passante du système donc sa rapidité, permet d'améliorer la stabilité mais amplifie les bruits de mesure hautes fréquences.

Le tableau 5.1 donne la forme analogique et la forme numérique de ces régulateurs obtenues par discrétisation avant (méthode d'Euler $p \rightarrow \frac{z-1}{T_e z}$).

Type de régulation	Continu	Numérique
<i>P</i>	$C(s) = K_p$	$C(z) = K_p$
<i>PI idéal</i>	$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$	$C(z) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e z}{z-1} \right)$
<i>PD idéal</i>	$C(s) = K_p (1 + T_d p)$	$C(z) = K_p \left(1 + \frac{T_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \right)$
<i>PD réel</i>	$C(s) = K_p \left(1 + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right)$	$C(z) = K_p \left(1 + \frac{N(z-1)}{\left(1 + \frac{NT_e}{T_d} \right) z - 1} \right)$
<i>PID idéal</i>	$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$	$C(z) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e z}{z-1} + \frac{T_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \right)$
<i>PID réel</i>	$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p} \right)$	$C(z) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \frac{T_e z}{z-1} + \frac{N(z-1)}{\left(1 + \frac{NT_e}{T_d} \right) z - 1} \right)$

Table 5.1 Formes classiques des correcteurs standards numériques obtenus par discrétisation avant

Le terme dérivé incorporé dans le contrôleur *PID* est $T_d p$. En fait, cette fonction de transfert est irréalisable physiquement car non causale. Dans la pratique, la dérivée est réalisée sous forme filtrée : $\frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{N} p}$

avec $1 \leq N \leq 100$. Cependant, après discrétisation avant, la dérivée devient sous la forme filtrée suivante : $\frac{N(z-1)}{\left(1 + \frac{NT_e}{T_d} \right) z - 1}$.

5.4.1 Choix des régulateurs

Le choix des régulateurs standards dépend des quatres performances : précision, rapidité, marge de stabilité et limitation du dépassement imposé par le cahier des charges de la boucle de régulation.

Le régulateur P : améliore la précision sans changer la classe du système.

Le régulateur PI : augmente la classe du système et donc améliore la précision.

Le régulateur PID : augmente la classe du système et donc améliore la précision, mais aussi la rapidité et la stabilité.

Exemple 5.4 : Soit le système continu de fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{2}{1+5p} \quad (5-19)$$

On souhaite contrôler le système par un correcteur PI numérique (Figure 5.6).

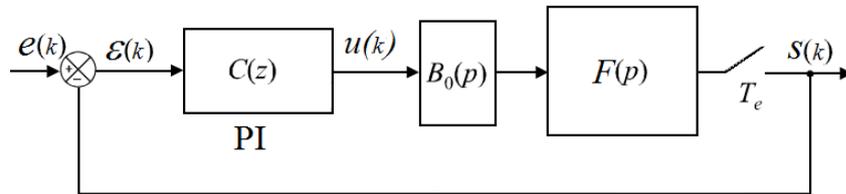


Figure 5.6. Asservissement continu commandé et corrigé par un correcteur PI numérique

Le cahier des charges stipule une précision statique parfaite vis-à-vis d'une consigne constante assortie d'un temps de réponse n'excédant pas 3s, un choix classique de $T_i = 5s$ et une période d'échantillonnage de $T_e = 0.1s$.

Le régulateur PI continu:

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

Le choix classique $T_i = 5s$ conduit à la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$C(p) \cdot F(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right) \cdot \frac{2}{1+5p} = \frac{2K_p}{5p} = \frac{0.4K_p}{p}$$

Le temps de réponse à 5% est lié à K_p par la relation : $T_r, 5\% = \frac{3}{0.4K_p}$

Il s'ensuit que pour avoir ce temps de réponse égal à 3 s, il convient alors de choisir :

$$\frac{3}{0.4K_p} = 3 \Rightarrow K_p = 2.5$$

D'où la fonction de transfert du régulateur :

$$C(p) = 2.5 \left(1 + \frac{1}{5p} \right)$$

Il s'agit à présent de transformer le régulateur continu en régulateur numérique. Pour ce faire, on opte pour discrétiser le régulateur continu de choisir l'une des méthodes d'approximation pour passer de p à z .

Soit par exemple la méthode d'Euler $p \rightarrow \frac{z-1}{T_e z}$:

$$\text{On obtient: } C(p) = 2.5 \left(1 + \frac{1}{5 \frac{z-1}{0.1z}} \right) = 2.55 \frac{z-0.98}{z-1}$$

5.5 Régulateurs PID numériques

Le régulateur PID numérique est une combinaison d'un régulateur P, un régulateur I et un régulateur D. Il existe plusieurs structures du contrôleur PID possibles pour combiner les trois actions (série, parallèle ou mixte) [2], [13].

5.5.1 Structure PID numérique série

La structure série du contrôleur PID numérique sous forme de schéma bloc est représentée par la figure 5.7.

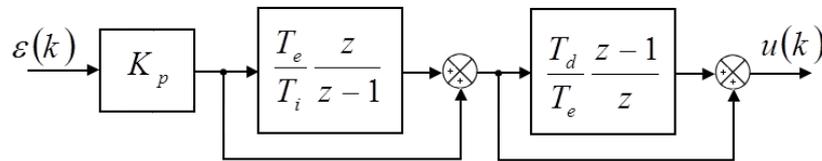


Figure 5.7. Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique série

Elle est définie par la fonction de transfert suivante :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{z}{z-1} \right) \left(1 + \frac{T_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \right) \quad (5-20)$$

La fonction de transfert (5-20) peut être écrite sous la forme :

$$C(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (5-21)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} c_0 = K_p^* \frac{T_e^2 + T_e T_i^* + T_d^* T_i^*}{T_e T_i^*} \\ c_1 = -K_p^* \frac{T_e + 2T_d^*}{T_e} \\ c_2 = \frac{K_p^* T_d^*}{T_i} \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} K_p^* = K_p \frac{T_i + T_d}{T_i} \\ T_i^* = T_i + T_d \\ T_d^* = \frac{T_i T_d}{T_i + T_d} \end{cases}$$

5.5.2 Structure PID numérique parallèle

La structure parallèle du contrôleur PID numérique sous forme de schéma bloc est représentée par la figure 5.8.

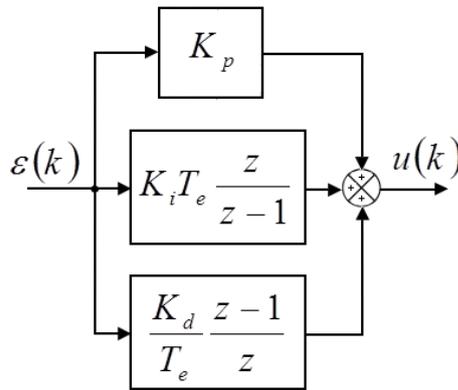


Figure 5.8. Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique parallèle

Comme la structure série, la fonction de transfert de la structure parallèle est définie par :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = K_p + K_i T_e \frac{z}{z-1} + \frac{K_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \quad (5-22)$$

Aussi, sous la forme :

$$C(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (5-23)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} c_0 = \frac{T_e K_p + K_d}{T_e} \\ c_1 = \frac{T_e^2 K_i - T_e K_p - 2K_d}{T_e} \\ c_2 = \frac{K_d}{T_e} \end{cases}$$

5.5.3 Structure PID numérique mixte

Les formes des régulateurs PID numériques mixtes (idéal et réel) ont été données dans le tableau 5.1. Le tableau 5.2 montre la deuxième forme d'écriture des régulateurs PID numériques mixtes idéal et réel ainsi que leurs schémas fonctionnels.

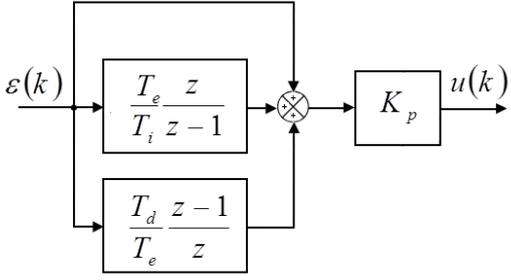
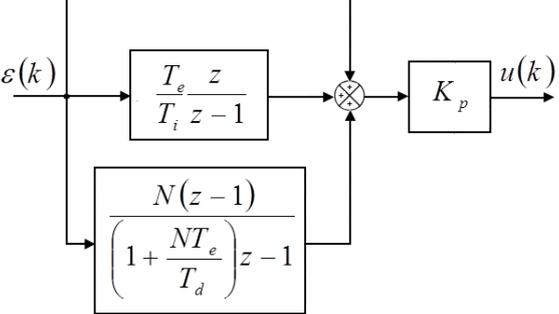
Type de régulation	Fonction de transfert en z	Schéma fonctionnel
PID idéal	$C(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$ <p>avec :</p> $\begin{cases} c_0 = K_p \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) \\ c_1 = -K_p \left(1 + 2 \frac{T_d}{T_e} \right) \\ c_2 = K_p \frac{T_d}{T_e} \end{cases}$	
PID réel (filtré)	$C(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + \alpha z^{-1})}$ <p>avec :</p> $\begin{cases} c_0 = K_p \left(1 + \frac{T_e}{T_i} - N\alpha \right) \\ c_1 = K_p \left(\alpha \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + 2N \right) - 1 \right) \\ c_2 = -K_p \alpha (1 + N) \\ \alpha = -\frac{T_d}{T_d + NT_e} \end{cases}$	

Table 5.2 Formes des régulateurs PID numériques mixtes idéal et réel

C'est sous la forme réelle que généralement le régulateur PID numérique est implémenté,

- car elle limite le nombre de calculs par rapport à une expression brutale de la loi de commande.
- elle permet de traiter séparément le terme dérivé et le terme intégral.

Exemple 5.5 : Soit le régulateur PID analogique mixte réel (filtré) suivant :

$$C_{PID}(p) = 0.202 \left(1 + \frac{1}{60.74 p} + \frac{7.20 p}{1 + 9.255 p} \right) \quad (5-24)$$

En utilisant la discrétisation avant, la version discrète de $C_{PID}(p)$ pour $T_e = 10s$ est obtenue comme suit :

$$C_{PID}(z) = C_{PID}(p) \Big|_{\substack{z-1 \\ T_e z}} = 0.202 \left(1 + \frac{1}{60.74 \left(\frac{z-1}{10z} \right)} + \frac{7.20 \left(\frac{z-1}{10z} \right)}{1 + 9.255 \left(\frac{z-1}{10z} \right)} \right)$$

d'où :

$$C_{PID}(z) = 0.202 \left(1 + \frac{z}{6.074z - 6.074} + \frac{0.778z - 0.778}{2.0806z - 1} \right)$$

L'expression en fonction de z^{-1} est obtenue comme suit:

$$C_{PID}(z) = 0.202 \left(1 + \frac{z}{6.074z - 6.074} + \frac{0.778z - 0.778}{2.0806z - 1} \right) \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

Le régulateur PID numérique aura alors pour expression :

$$C_{PID}(z) = \frac{0.3108 - 0.4661z^{-1} + 0.1726z^{-2}}{1 - 1.4806z^{-1} + 0.4806z^{-2}}$$

Ce régulateur PID numérique est représenté schématiquement dans la figure 5.9 :

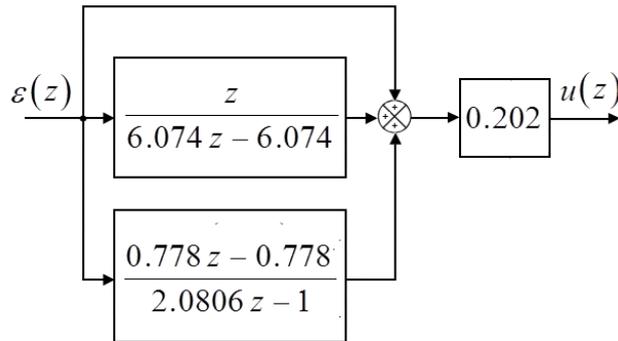


Figure 5.9. Schéma fonctionnel du contrôleur PID numérique mixte de l'exemple 5.5

5.6 Synthèse d'un correcteur numérique par méthode polynomiale

Les méthodes polynomiales figurent parmi les méthodes de synthèse de correcteurs numériques les plus utilisées. Elles sont en effet très souples et relativement simples à mettre en œuvre.

Soit la boucle d'asservissement de la figure 5.10 constituée d'un système échantillonné $F(z)$ avec un correcteur $C(z)$ que l'on cherche à déterminer pour conférer au système complet $G(z)$, en boucle fermée, des performances dictées par un cahier des charges : précision, amortissement, rapidité, marge de stabilité [4].

$$G(z) = C(z)F(z) \quad (5-25)$$

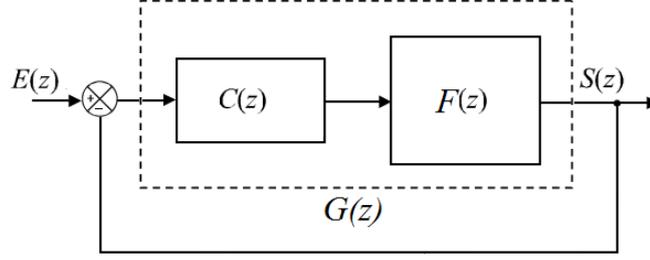


Figure 5.10. Boucle d'asservissement échantillonné avec correcteur.

La technique de la synthèse par méthode polynomiale consiste à corriger le système de sorte que $G(z)$ corresponde à un système du second ordre, de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{K \left(1 + e^{-2\xi\omega_n T_e} - 2e^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos \omega_n T_e \sqrt{1 - \xi^2} + e^{-2\xi\omega_n T_e}} \quad (5-26)$$

Aussi, la fonction de transfert en boucle fermée $G_{BF}(z)$ est aussi une fonction du second ordre :

$$G_{BF}(z) = \frac{K_{BF} \left(1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} - 2e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} \cos \omega_{nBF} T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e} \cos \omega_{nBF} T_e \sqrt{1 - \xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF} T_e}} \quad (5-27)$$

Nous savons que les performances en boucle fermée, pour un tel système, se traduisent par des conditions sur ω_{nBF} pour la rapidité et sur ξ_{BF} pour la marge de stabilité et le dépassement. En effet :

$$t_m \approx \frac{3}{\omega_{c0}} \approx \frac{3}{\omega_{nBF}} \quad \text{et} \quad \xi_{BF} \approx \frac{\Delta\varphi^0}{100} \quad (5-28)$$

En ce qui concerne la précision, il suffit que $G(z)$ possède un pôle égal à 1 pour que l'erreur de position soit nulle :

$$G(z) = \frac{a}{(z-1)(z-b)}, \quad a \text{ et } b \in \mathfrak{R} \quad (5-29)$$

Toutes ces considérations nous permettent donc de déterminer les fonctions $G_{BF}(z)$ et $G(z)$ idéales, du second ordre, qui possèdent les performances requises. Pour que notre boucle d'asservissement initiale de la figure 5.10 possède elle-même ces performances, il suffit d'utiliser l'équation (5-25) et donc, de placer dans la chaîne directe, le correcteur de fonction de transfert :

$$C(z) = \frac{G(z)}{F(z)} \quad (5-30)$$

Exemple 5.6 : Considérons le système échantillonné à une période $T_e = 0,2$ s de fonction de transfert :

$$F(z) = \frac{z + 0.3}{z - 0.8} \quad (5-31)$$

On souhaite placer ce système dans une boucle à retour unitaire et on veut que le système possède, en boucle fermée, les performances suivantes : $\epsilon_p = 0$, $t_m = 0,8$ s et $\xi_{BF} = 0,45$ (marge de phase d'un système continu équivalent égale à 45° et dépassement de l'ordre de 20%).

A partir de l'équation 5-29, on construit la fonction $G(z)$ suivante :

$$G(z) = \frac{a}{(z-1)(z-b)}$$

d'où :

$$G_{BF}(z) = \frac{a}{(z-1)(z-b)+a} = \frac{a}{z^2 - (1+b)z + a+b} \quad (5-32)$$

Or nous devons, avoir, pour garantir les performances exigées (5-27) :

$$G_{BF}(z) = \frac{K_{BF} \left(1 + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} - 2e^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1-\xi_{BF}^2} \right)}{z^2 - 2ze^{-\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e} \cos \omega_{nBF}T_e \sqrt{1-\xi_{BF}^2} + e^{-2\xi_{BF}\omega_{nBF}T_e}}$$

avec : $\omega_{nBF} = \frac{3}{t_m} = 3.75 \text{ rad/s}$ et $\xi_{BF} = 0.45$

On obtient :

$$G_{BF}(z) = \frac{0.39K_{BF}}{z^2 - 1.12z + 0.51} \quad (5-33)$$

Par identification des deux fonctions de transfert en boucle fermée (5-32) et (5-33), on trouve :

$$\begin{cases} 1+b = 1.12 \\ a+b = 0.51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0.12 \\ a = 0.39 \end{cases}$$

Le gain statique en boucle fermée est bien sûr égal à 1 ($K_{BF}=1$) puisque l'erreur de position est nulle.

On a alors : $G(z) = \frac{0.39}{(z-1)(z-0.12)}$

d'où : $C(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{0.39(z-0.8)}{(z-1)(z-0.12)(z+0.3)}$

5.7 Implémentation pratique des correcteurs

En pratique, pour implanter un correcteur sur un calculateur numérique, il faut exprimer une relation entre la sortie du correcteur et son entrée (l'écart entre consigne et mesure), c'est-à-dire nous avons besoin de la loi de commande qui fournit la commande à envoyer au procédé au pas d'échantillonnage courant en fonction des consignes et mesures courantes et précédentes ainsi que des commandes passées [21], [16].

On rappelle que la fonction de transfert numérique du correcteur peut être mise sous la forme générale suivante :

$$C(z) = \frac{c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_m}{z^n + d_1 z^{n-1} + \dots + d_n} = \frac{\sum_{j=0}^m c_j z^{m-j}}{z^n + \sum_{i=1}^n d_i z^{n-i}} = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} \quad (5-34)$$

On souhaite obtenir la relation qui donne la valeur de la commande à appliquer à l'instant k , en fonction des données aux instants présent et passés : $u_k = f(u_i, \varepsilon_j)$.

Procédure de calcul de la loi de commande $u(k)$:

Etape 1 : Multiplier le numérateur et le dénominateur de $C(z)$ par z^n pour obtenir une fonction de transfert discrète en puissances négatives de z , d'où :

$$C(z) = \frac{c_0 z^{m-n} + c_1 z^{m-1-n} + \dots + c_m z^{-n}}{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}} = \frac{\sum_{j=0}^m c_j z^{m-n-j}}{1 + \sum_{i=1}^n d_i z^{-i}} = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} \quad (5-35)$$

En faisant le produit en croix, on obtient :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^n d_i z^{-i}\right) U(z) = \sum_{j=0}^m c_j \mathcal{E}(z) z^{m-n-j} \quad (5-36)$$

Etape 2 : En faisant la transformée en z inverse de chaque terme, et en utilisant le théorème du retard on aboutit à :

$$u(k) + d_1 u(k-1) + \dots + d_n u(k-n) = c_0 \varepsilon(k+m-n) + c_1 \varepsilon(k+m-n-1) + \dots + c_m \varepsilon(k-n) \quad (5-37)$$

Etape 3 : en isolant $u(k)$, on obtient la loi de commande suivante :

$$u(k) = -d_1 u(k-1) - \dots - d_n u(k-n) + c_0 \varepsilon(k+m-n) + c_1 \varepsilon(k+m-n-1) + \dots + c_m \varepsilon(k-n) \quad (5-38)$$

Cette loi de commande s'implémente pratiquement en stockant dans des tableaux les consignes, mesures et commandes passées.

Exemple 5.7 : Considérons la fonction de transfert du correcteur $C(z)$ de l'exemple 5.6 :

$$C(z) = \frac{0.39(z-0.8)}{(z-1)(z-0.12)(z+0.3)} = \frac{0.39z - 0.312}{z^3 - 0.82z^2 - 0.216z + 0.036} \quad (5-39)$$

Calcul de la loi de commande $u(k)$:

Etape 1 : En multipliant le numérateur et le dénominateur de $C(z)$ par z^n on obtient :

$$C(z) = \frac{0.39z^{-2} - 0.312z^{-3}}{1 - 0.82z^{-1} - 0.216z^{-2} + 0.036z^{-3}}$$

En faisant le produit en croix, on obtient :

$$(1 - 0.82z^{-1} - 0.216z^{-2} + 0.036z^{-3})U(z) = (0.39z^{-2} - 0.312z^{-3})\varepsilon(z)$$

Etape 2 : La transformée en z inverse de chaque terme est :

$$u(k) - 0.82u(k-1) - 0.216u(k-2) + 0.036u(k-3) = 0.39u(k-2) - 0.312\varepsilon(k-3)$$

Etape 3 : La loi de commande $u(k)$:

$$u(k) = 0.82u(k-1) + 0.216u(k-2) - 0.036u(k-3) + 0.39u(k-2) - 0.312\varepsilon(k-3)$$

5.8 Exercices

Exercice n°1 :

Soit un système échantillonné de fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$:

$$G(z) = \frac{1}{z - 0.5} \quad (5-40)$$

La période d'échantillonnage est : $T_e = 0,1s$.

1. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée et déterminer la condition de stabilité du système en boucle fermée.
2. Déterminer, en boucle fermée : l'erreur de position et l'équation de récurrence.
3. Calculer, puis tracer, les premiers éléments de la suite des échantillons de sortie lorsque l'entrée est un échelon unitaire. En déduire la valeur du temps de montée en boucle fermée.

Exercice n°2 :

Soit la boucle d'asservissement continu de la figure 5.11.

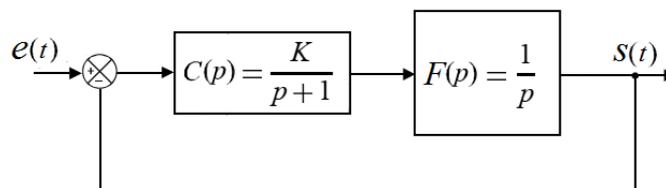


Figure 5.11. Asservissement continu avec correcteur

1. En prenant une période d'échantillonnage de $T_e=1s$, discrétiser le régulateur continu en utilisant les discrétisations avant et arrière et l'approximation de Tustin.
2. En utilisant le critère de Jury, étudier en fonction de K la stabilité du système d'échantillonné avec un bloqueur d'ordre zéro (BOZ), en présence de ces différents régulateurs discrets.

Exercice n° 3 :

On considère un système échantillonné (période $T_e=0,2s$) de fonction de transfert :

$$F(z) = \frac{z + 0.7}{z - 0.7} \quad (5-41)$$

Ce système étant placé dans une boucle à retour unitaire, on souhaite qu'il soit caractérisé par les performances suivantes : $\varepsilon_p=0$, $t_m=0,4s$ et $\xi_{BF}=0,6$ (marge de phase d'un système continu équivalent égale à 60° et dépassement de l'ordre de 10 %).

1. Calculer l'expression de la fonction de transfert du correcteur à temps discret qu'il faut introduire dans la chaîne directe pour satisfaire le cahier des charges.
2. Déterminer la valeur de la commande $u(k)$.

Chapitre 6 Contrôleur RST

La boucle d'asservissement échantillonné avec correcteur série (*PID, PI,..*) ne donne pas toujours de bonnes performances sur le processus commandé. A cet effet, nous allons introduire une nouvelle structure de correction appelée : le contrôleur *RST*, qui donne de bonnes performances par rapport à la correction série classique vue au chapitre 5. Le contrôleur *RST* est un correcteur très général contenant plus de degrés de liberté que le correcteur série. Les correcteurs série peuvent être considérés comme des cas particuliers des correcteurs *RST* [1], [16], [19]. Dans ce chapitre nous présentons la structure du correcteur numérique *RST*. Nous élaborons aussi, la méthode de synthèse ainsi que l'implémentation de ce type de correcteur.

6.1 Correcteurs RST

Reprenons le schéma classique d'un système asservi numérique avec correcteur représenté par la figure 6.1.

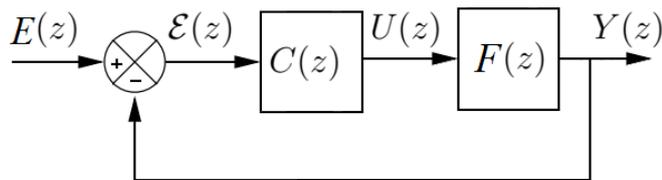


Figure 6.1. Structure d'asservissement échantillonné

Les fonctions de transfert du correcteur $C(z)$ et du processus $F(z)$ peuvent se mettre sous la forme de fonctions rationnelles en z :

$$C(z) = \frac{R(z)}{S(z)} \quad \text{et} \quad F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (6-1)$$

La fonction de transfert en boucle fermée est donc :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{C(z)F(z)}{1 + C(z)F(z)} = \frac{B(z)R(z)}{A(z)S(z) + R(z)B(z)} \quad (6-2)$$

On définit le polynôme caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée comme suit:

$$P(z) = A(z)S(z) + R(z)B(z) \quad (6-3)$$

Par ailleurs :

$$U(z) = \varepsilon(z)C(z) = [E(z) - Y(z)] \frac{R(z)}{S(z)} \quad (6-4)$$

Soit :

$$S(z)U(z) = R(z)[E(z) - Y(z)] \quad (6-5)$$

Le fondement du correcteur *RST* consiste à introduire un degré de liberté supplémentaire $T(z)$ dans l'équation (6-5) afin de traiter différemment les signaux $Q(z)$ et $Y(z)$ [1] :

$$S(z)U(z) = T(z)E(z) - R(z)Y(z) \quad (6-6)$$

L'équation (6-6) fait apparaître plusieurs structures du correcteur *RST*, qui sont représentées dans le tableau 6.1.

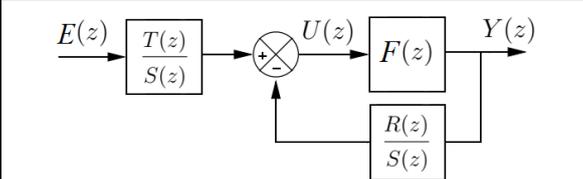
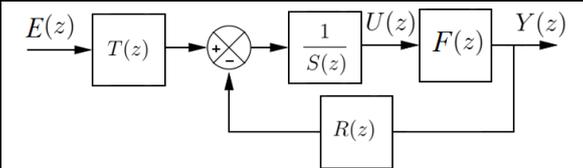
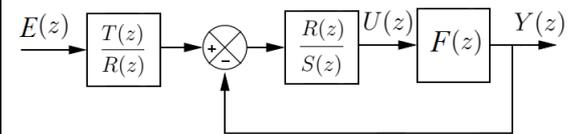
<i>Structure du correcteur RST</i>	<i>Equation du correcteur RST</i>	<i>Schéma bloc du correcteur RST</i>
<i>Première structure</i>	$U(z) = \frac{T(z)}{S(z)}E(z) - \frac{R(z)}{S(z)}Y(z)$	
<i>Deuxième structure</i>	$U(z) = \frac{1}{S(z)}[T(z)E(z) - R(z)Y(z)]$	
<i>Troisième structure</i>	$U(z) = \frac{R(z)}{S(z)}\left[\frac{T(z)}{R(z)}E(z) - Y(z)\right]$	

Table 6.1 Différentes structures du correcteur *RST*

Symboliquement, on représente également le processus complété du correcteur *RST* par le diagramme fonctionnel simplifié de la figure 6.2.

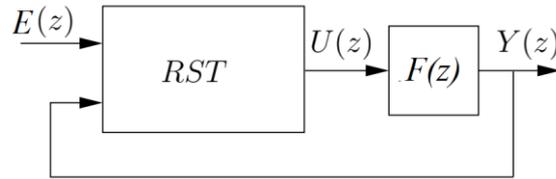


Figure 6.2. Structure équivalente du correcteur *RST*

Les polynômes $R(z)$, $S(z)$ et $T(z)$ sont respectivement choisis de degrés : a , b et p :

$$\begin{aligned} R(z) &= r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_a z^{-a} \\ S(z) &= s_0 + s_1 z^{-1} + \dots + s_b z^{-b} \\ T(z) &= t_0 + t_1 z^{-1} + \dots + t_p z^{-p} \end{aligned} \quad (6-7)$$

6.2 Synthèse du correcteur *RST*

La synthèse du régulateur polynomial *RST* est basée sur la stratégie de placement de pôles en boucle fermée [13], [19]. En général, le but de la synthèse *RST* est d'élaborer une sortie $Y(z)$ image de

l'entrée $E(z)$. Celle-ci est donnée par modèle de référence ($F_m(z)$) comme le montre la figure 6.3. Dans le cas des systèmes linéaires on a :

$$F_m(z) = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (6-8)$$

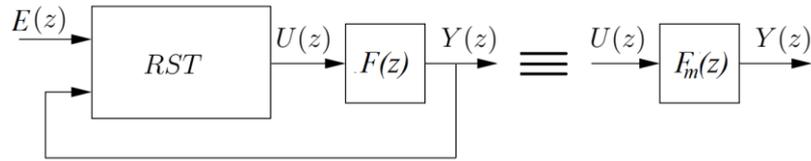


Figure 6.3. *Modèle de référence*

Les pôles du polynôme $A_m(z)$ sont choisis tous contenus à l'intérieur du cercle de rayon-unité, afin d'assurer la stabilité de système asservis.

Les zéros de $B_m(z)$ peuvent eux aussi être positionnés dans le plan complexe, selon les désirs du concepteur.

Le polynôme caractéristique $P(z)$ définit les performances et la dynamique du correcteur RST.

$$P(z) = A(z)S(z) + R(z)B(z) = 1 + p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_lz^{-l} = P_D(z)P_A(z) \quad (6-9)$$

Cette méthode consiste à choisir un polynôme $P(z)$ stable, c'est-à-dire, les racines de $P(z)$ appartiennent au disque unité. Le polynôme $P(z)$ est composé de deux polynômes : polynôme dominants $P_D(z)$ et polynôme auxiliaire $P_A(z)$.

Aussi, Les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ doivent être choisis de degrés compatibles avec le degré recherché pour le polynôme $P(z)$. Afin que le régulateur soit propre, on impose :

$$\text{Deg}(P) = 2 \times \text{deg}(A-1) \text{ et } \text{deg}(S) = \text{deg}(R) = \text{deg}(A-1).$$

On pose ainsi :

$$\begin{cases} R(z) = R^*(z)H_R(z) \\ S(z) = S^*(z)H_S(z) \end{cases} \quad (6-10)$$

Selon le type d'entrée, les choix des parties fixes $H_R(z)$ et $H_S(z)$ peuvent être déterminés par le tableau 6.2.

Type d'entrée	Choix de la valeur de $H_S(z)$ ou $H_R(z)$
Impulsion	$H_S(z) = 1$
Echelon	$H_S(z) = 1 - z^{-1}$
Rampe	$H_S(z) = (1 - z^{-1})^2$
Harmonique	$H_S(z) = 1 + \alpha z^{-1} + z^{-2}$

Table 6.2 Différentes choix des parties fixes $H_R(z)$ et $H_S(z)$

Les polynômes $R(z)$ et $S(z)$ sont déterminés par l'identification entre le polynôme choisi (équation (6-9)) et de l'équation (6-3) :

$$A(z)S(z) + R(z)B(z) = P_D(z)P_A(z) \quad (6-11)$$

L'équation (6-11) est une équation de Bézout ou diophantienne, R et S sont les inconnues. La méthode de résolution est expliquée dans l'annexe B.

D'autre part, le polynôme $T(z)$ peut être choisi comme suit :

$$T(z) = G(z)P(z) \quad (6-12)$$

avec:

$$G(z) = \begin{cases} \frac{1}{B(1)} & \text{si } B(1) \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6-13)$$

6.3 Implémentation d'un correcteur RST

En pratique un correcteur RST s'implémente de façon identique à un correcteur série [16]. En introduisant l'équation (6-7) dans l'équation (6-6), on trouve :

$$U(z)(s_0 + s_1z^{-1} + \dots + s_bz^{-b}) = (t_0 + t_1z^{-1} + \dots + t_pz^{-p})E(z) - (r_0 + r_1z^{-1} + \dots + r_az^{-a})Y(z) \quad (6-14)$$

Soit:

$$\sum_{i=0}^b s_i z^{-i} U(z) = \sum_{j=0}^p t_j z^{-j} E(z) - \sum_{l=0}^a r_l z^{-l} Y(z) \quad (6-15)$$

En faisant la transformée en z inverse de chaque terme, et en utilisant le théorème du retard on aboutit à :

$$\sum_{i=0}^b s_i u(k-i) = \sum_{j=0}^p t_j e(k-j) - \sum_{l=0}^a r_l y(k-j) \quad (6-16)$$

En exprimant la dernière commande $u(k)$, on obtient la loi de commande suivante :

$$u(k) = \frac{1}{s_0} \left(- \sum_{i=1}^b s_i u(k-i) + \sum_{j=0}^p t_j e(k-j) - \sum_{l=0}^a r_l y(k-j) \right) \quad (6-17)$$

Comme pour le cas des correcteurs séries, cette loi de commande s'implémente en stockant dans des tableaux les consignes, mesures et commandes passées.

Exemple 6.1 : Exemple de synthèse d'un régulateur RST (Moteur à courant continu)

Afin de montrer l'efficacité de la méthodologie RST, nous nous appuyons sur un exemple de commande en vitesse d'un moteur à courant continu alimenté au travers d'un hacheur commandé par MLI (Figure 6.4).

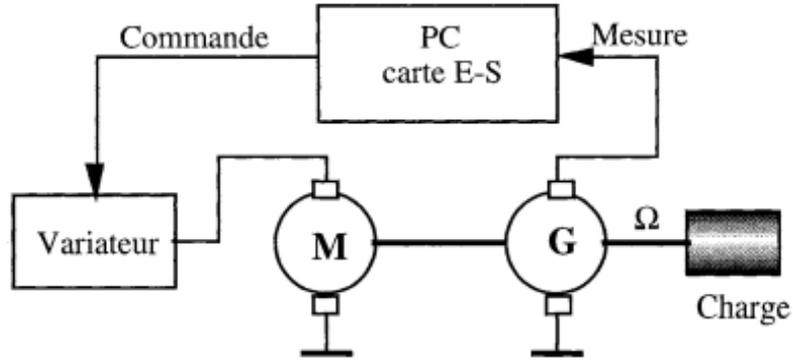


Figure 6.4. Commande en vitesse d'un moteur à courant continu

La vitesse de rotation est mesurée par une génératrice tachymétrique G. Sur le banc d'essais utilisé, un frein électromagnétique permet d'appliquer des perturbations sur la sortie (W) (figure 6.5). Dans ce cas (paragraphes 6.1 et 6.2), on peut écrire :

$$Y(z) = \frac{1}{P(z)} [B(z)T(z)E(z) + B(z)S(z)W(z)]$$

Ou: $P(z) = A(z)S(z) + B(z)R(z)$

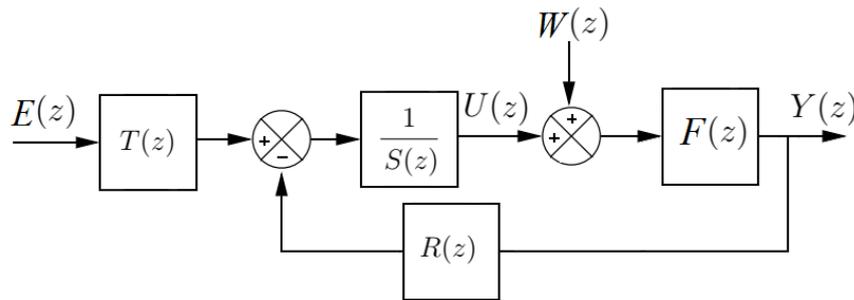


Figure 6.5. Schéma bloc de la commande en vitesse du moteur à courant continu

Le processus a été identifié, pour une période d'échantillonnage $T_e=0,2s$, par une fonction de transfert du second ordre :

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.9259z^{-1} - 0.8194z^{-2}}{1 - 1.026z^{-1} + 0.1393z^{-2}}$$

Ce système possède un zéro inférieur à l'unité ($z=0,885$) et deux pôles réels stables ($\lambda_1=0,865$ et $\lambda_2=0,161$). Notons que le modèle continu correspondant présente une pulsation propre non-amortie de 6,48 rad/s et un coefficient d'amortissement réduit de 0,76.

On peut décrire le processus sous la forme :

$$F(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.9259z^{-1}(1 - 0.885z^{-1})}{(1 - 0.865z^{-1})(1 - 0.161z^{-1})}$$

Afin d'améliorer les performances de cet ensemble de commande, on désire effectuer la synthèse d'un correcteur RST en imposant au processus :

- 1- une erreur statique nulle en sortie.
- 2- un abaissement de son ordre (en z^{-1}).
- 3- un comportement en régulation du type premier ordre, avec un pôle de 0,8.

Pour satisfaire les deux premières conditions, on peut proposer que le terme $S(z)$ du correcteur, placé en cascade avec le procédé $H'(z)$, soit :

$$S(z) = (1 - z^{-1})(1 - 0.885z^{-1})$$

de telle façon qu'il introduise une intégration (qui permet d'annuler l'erreur statique à une commande en échelon de position) et une compensation totale du zéro du polynôme $B(z)$.

La troisième condition peut être satisfaite en proposant que le polynôme $P(z)$, dénominateur des fonctions de transfert Asservissement et Régulation, soit :

$$P(z) = (1 - 0.8z^{-1})A(z)$$

En effet, le processus n'ayant pas de zéro supérieur à l'unité on peut, sans risqué de provoquer une instabilité, simplifier sa fonction de transfert en boucle fermée par celui-ci.

D'une façon générale, l'équation :

$$A(z)S(z) + B(z)R(z) = P(z)$$

ou : $A(z)$ et $B(z)$ sont connus,

$P(z)$ est choisi au regard des performances à atteindre,

$S(z)$, $R(z)$ sont inconnus,

est appelée équation de Diophante ou identité de Bézout.

Les divers polynômes de cette équation doivent être tels que l'on puisse, en regroupant les termes de même degré, identifier les coefficients inhérents à chacun d'eux de telle façon que l'égalité de Diophante soit satisfaite.

Dans notre exemple, on a :

$$A(z) = (1 - 0.865z^{-1})(1 - 0.161z^{-1})$$

$$B(z) = 0.9259z^{-1}(1 - 0.885z^{-1})$$

$$P(z) = (1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.865z^{-1})(1 - 0.161z^{-1})$$

$$S(z) = (1 - z^{-1})(1 - 0.885z^{-1})$$

$$R(z) \text{ reste inconnu.}$$

Pour que l'égalité régissant l'équation de Diophante soit convenablement respectée, il faut que le polynôme $R(z)$ soit de degré 2 et que le terme en z^4 de $B(z)R(z)$ soit égal et opposé à celui équivalent de $A(z)S(z)$

On posera donc :

$$R(z) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$$

La résolution de l'équation de Diophante conduit par identification à :

$$R(z) = 1.1718 - 1.1211 z^{-1} + 0.1504 z^{-2}$$

Pour compléter le régulateur RST, on pourra choisir par exemple le polynôme $T(z)$ égal au polynôme $P(z)$:

$$T(z) = P(z) = (1 - 0.8z^{-1})A(z) = 1 - 1.826z^{-1} + 0.9601z^{-2} - 0.1114z^{-3}$$

Donc, on a :

$$\begin{cases} S(z) = 1 - 1.885z^{-1} + 0.885z^{-2} \\ R(z) = 1.1718 - 1.1211z^{-1} + 0.1504z^{-2} \\ T(z) = 1 - 1.826z^{-1} + 0.9601z^{-2} - 0.1114z^{-3} \end{cases}$$

Dans ce cas la fonction de transfert en asservissement du procédé [vis-à-vis de la commande $U(z)$] se réduit à $B(z)$, soit :

$$B(z) = 0.9259z^{-1} - 0.8194z^{-2}$$

et sa réponse impulsionnelle (figure 6.6) est :

$$h(k) = b^*(k) = 0.9259\delta(k - T_e) - 0.8194\delta(k - 2T_e)$$

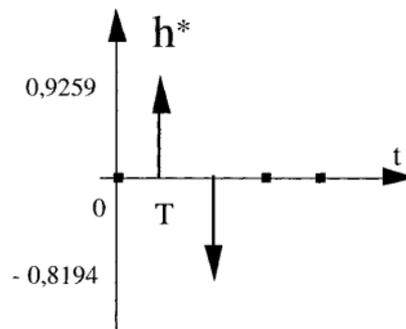


Figure 6.6. Réponse impulsionnelle de $B(z)$

Références

- [1] S. TLIBA, M. JUNGERS, Y. CHITOU, Commande des Processus, Asservissements Numériques, Polycopié de cours, Université Paris-Sud XI - ENS de Cachan, 2005.
- [2] B. BERGEON, Systèmes linéaires numériques, Polycopié de Cours, IUT Bordeaux 1, GEII, 2014.
- [3] J-M. DUTERTRE, Conception avancées des circuits intégrés analogiques : Convertisseurs A/N et N/A, polycopié de cours, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2009.
- [4] Y. GRANJON, Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, Livre, Dunod, Paris, 2010.
- [5] F. ASMA, Introduction à la commande numérique, Notes de cours, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2007.
- [6] A. MEGHEBBAR, Commande Numérique, Notes de cours, Université Aboubekr Belkaid de Tlemcen.
- [7] R. REYNAUD, Traitement du Signal, note de cours, Université Paris-Sud, 2011.
- [8] H. GARNIER, Théorie de l'échantillonnage, de l'analogique au numérique", Notes de cours, Ecole Polytech Nancy, 2018.
- [9] I. BARA, B. BAYLE ET J. GANGLOFF, Commande numérique des systèmes, Polycopié de cours. Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, 2010.
- [10] G. CORMIER, Signaux et systèmes discrets, Notes de cours, Université de Moncton, 2013.
- [11] V. MEGHDADI, Traitement du signal, Notes de cours, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges, 2012.
- [12] Y. BRIERE, Commande des systèmes par ordinateur, Notes de cours, Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace de Toulouse, 2007.
- [13] L. KHARROUBI, Eléments de Régulation Numérique, Polycopié de cours, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran, 2018.
- [14] D. PEAUCELLE, Systèmes à temps discret : Commande numérique des procédés, Ecole Nationale des Sciences Appliquées d'Agadir, 2003.
- [15] H. SLIMENE, Systèmes échantillonnés, Polycopié de travaux pratiques, Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Sousse.
- [16] F. NAGEOTTE, Analyse et Commande des Systèmes Numériques, Polycopié de cours, Université de Strasbourg, 2018.
- [17] H. GARNIER, Systèmes à temps discret, Notes de cours, Ecole Polytech Nancy, 2018.

- [18] M. ETIQUE, Régulation Numérique, Polycopié de cours, Ecole d'Ingénieurs du Canton de Vaud, 2011.
- [19] A. JUTARD M. BETEMPS, AUTOMATIQUE : Systèmes asservis linéaires échantillonnées, Polycopié de cours, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1998.
- [20] Y. GUETTAF, Y. M-S. BENDELHOUM, Asservissements échantillonnées et régulation numérique, Polycopié de cours, Centre Universitaire Nour Bachir El Bayadh, 2016.
- [21] J-M. BOURGEOT, Régulation en temps discret, Notes de cours, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Brest, 2008.

Annexes

Dans cette annexe, nous rappelons les principaux outils mathématiques nécessaires aux notions introduites dans ce polycopié.

A. Règles de transformations des schémas blocs :

Les règles de transformation demeurent les mêmes que pour le cas du système continu. Voici quelques règles de transformations des schémas blocs :

<i>Transformation</i>	<i>Equation</i>	<i>Schéma fonctionnel</i>	<i>Schéma fonctionnel équivalent</i>
<i>Retrait d'un élément d'une chaîne d'action</i>	$Y = G_1 X \pm G_2 X$		
<i>Retrait d'un élément d'une boucle de retour</i>	$Y = G_1 (X \pm G_2 Y)$		
<i>Redisposition des comparateurs Cas a</i>	$Z = W \pm X \pm Y$		
<i>Redisposition des comparateurs Cas b</i>	$Z = W \pm X \pm Y$		
<i>Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément</i>	$Z = GX \pm Y$		
<i>Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément</i>	$Y = GX$		
<i>Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément</i>	$Y = GX$		
<i>Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un comparateur</i>	$Z = X \pm Y$		

Table A.1 Règles de transformations des schémas blocs

B. Méthode de résolution de l'équation diophantienne

L'équation de Bézout ou diophantienne est de la forme :

$$AS + RB = P$$

Afin de résoudre cette équation dont les inconnues sont les coefficients de R et S , on exprime l'équation sous forme matricielle :

$$M\phi = P$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \\ 0 & a_n & \cdots & \vdots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_{r-1} \\ r_0 \\ \vdots \\ r_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{r-1} \\ p_n \\ \vdots \\ p_{2n-1} \end{bmatrix}$$

M est la matrice de Sylvester, ϕ est le vecteur définissant les paramètres de réglage et P est le vecteur définissant les coefficients du polynôme imposé.

Pour que la matrice de Sylvester soit inversible, il faut que B et A soient premiers entre eux.

Il vient :

$$\phi = M^{-1}P$$

C. Fonction sinus cardinal discrète

La fonction sinus cardinal est définie par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

La fonction sinus cardinal discrète est définie par :

$$\text{sinc}(nT_e) = \frac{\sin(\pi nT_e)}{\pi nT_e}$$

Le programme suivant trace les fonctions sinus cardinaux continu et discrète sous Matlab (figure D.1)

```
clear all;
close all;
clc;
fs=1000;
%t=-5:1/fs:5;
x=linspace(-6,6,50);
y=sinc(x);
subplot(2,1,1);
plot(x,y);
axis([-6 6 -0.5 1.2]);
xlabel('(t)');
ylabel('Amplitude');
title('Sinc continu');
subplot(2,1,2);
stem(x,y);
axis([-6 6 -0.5 1.2]);
xlabel('(kTe)');
ylabel('Amplitude');
title('Sinc discrète');
```

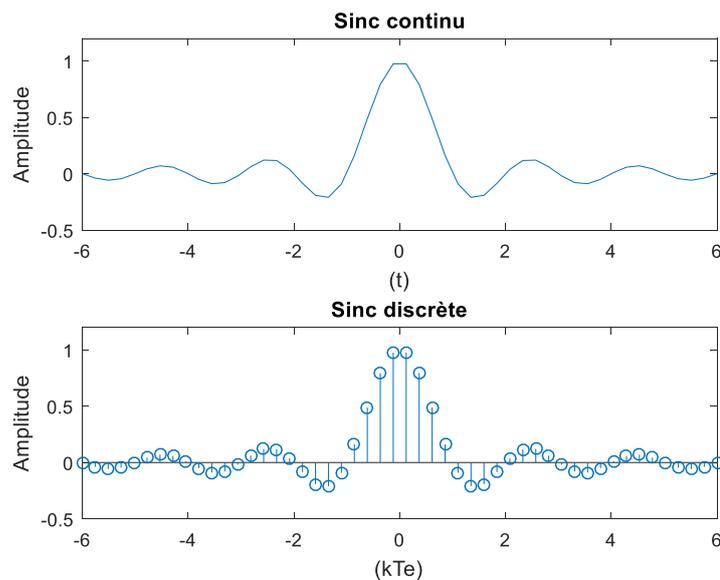


Figure D.1. *Représentation des sinus cardinaux continu et discrète*