République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignant Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université de Mustapha Stambouli de Mascara

Polycopie de cours

Géométrie

Présenté par :   ***ZAGANE Abdelkader***

Ce cours est destine aux étudiants de deuxième année LMD

Spécialité Mathématiques

2021-2022

Table des matières

Avant-propos

Ce cours est destiné aux étudiants de la deuxième année licence de mathématiques, ainsi qu'aux étudiants des sciences de technologie, l'objet de ce cours est ce qu'on appelle la géométrie élémentaire, c'est à dire celle qui manipule des notions (points, droites, plans, distances, angles,orthogonalité, parallélisme, etc.) dont on acquiert l'intuition de base très jeune ce qui ne veut pas dire, loin de là, que raisonner dessus soit toujours évident.

Vous avez tous compris très tôt, et sans difficulté, ce qu'était un point ; et seulement bien plus tard, et avec davantage d'efforts, ce qu'était le vecteur joignant deux points données. Mais lorsqu'on établit proprement les fondements de la géométrie, il s'avère plus simple d'inverser le processus : on introduit tout d'abord les vecteurs, ou plus exactement les espaces vectoriels, que vous avez abondamment pratiques depuis que vous êtes à université, et dont les éléments sont appelés vecteurs ; et on ne définit qu'ensuite les espaces affines, dont les éléments sont appelés points, et dans lesquels deux points définissent un vecteur au sens des espaces vectoriels.

Le cours est traité en détail avec de nombreux exemples. La plupart des théorèmes et des propositions sont démontrés à quelques exceptions près où nous renvoyons le lecteur aux références correspondantes.

À la fin de chaque chapitre nous proposons une liste d'exercices corrigés dans le dernier chapitre.

Quatre chapitres composent cet cours :

Le premier chapitre nous avons étudié la géométrie des courbes planes et gauches paramétrées : paramétrisation,la longueur d'un arc la courbure,la torsion, le repère de Frenet et représentation de quelque exemples, les surfaces paramétrisation paramétrique et implicite la surface dans l'espace représentation de quelque exemples.

Dans le deuxième chapitre nous donnons les principale définitions et propriétés de l'espace euclidien comme la norme,produit scalaire,orthogonalité, forme linéaire,l' hyperplan vectoriel et le groupe des endomorphismes orthogonaux.

Le troisième chapitre traite la structure euclidienne affine sur un espace vectoriel de dimension finie, barycentre,les droites les plans affines, les applications affines le groupe des isométries affines et quelques exemples.

Dans le quatrième Chapitre on prendre le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ comme un exemple pour

étudie la structure euclidien et la structure affine .
Finalement dans le dernier chapitre nous avons donné les solutions de les exercices des chapitre de cours.
Les pré-requis : Ce cours supposera connues les notions de base d'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, images, noyaux, familles libres et génératrices, bases, théorie de la dimension, valeurs propres et vecteurs propres) dont nous nous servirons sans le moindre rappel. Nous utiliserons également la théorie des espaces vectoriels euclidiens, dont nous redonnerons les résultats principaux assez rapidement et sans démonstration ; Une certaine familiarité avec ceux-ci est donc préférable.

1

Paramétrisation des courbes et des surfaces

1.1 Paramétrisation des courbes planes et exemples

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1.1. ***Courbe plane***
Une courbe est dite plane lorsqu'elle est entièrement continue dans un plan.
Une courbe paramétrée s'identifie à la donnée d'une application

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^2 \, : \, t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x(t), y(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans la toute la suite).

Exemple 1.1.1.1. *Une droite d'équation cartésienne $y = ax + b$ on peut paramétrée*

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \, : \, t \mapsto \gamma(t) = (t, at + b)$$

où a et b sont constants des réels.

Définition 1.1.1.2. ***Régularité***
On dit qu'une courbe plane paramétrée est régulière en un point $\gamma(t_0)$ ou bien $\gamma(t_0)$ est un point régulier pour cette courbes, si $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$.
Elle est dite régulière sur I si pour tout t dans I ,$\gamma'(t) \neq (0, 0)$.
Un pont t_0 tel que $\gamma'(t_0) = (0, 0)$. est appelé point singulier pour la courbe.

Définition 1.1.1.3. ***vecteur vitesse***
Pour tout $t \in I$, le vecteur $\gamma'(t)$ est souvent appelé vecteur vitesse de la courbe au point $\gamma(t)$.

Remarque 1.1.1.1. .
La courbe est régulière au point $\gamma(t)$ si et seulement si elle possède une vitesse non nulle en ce point.

Exemple 1.1.1.2. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \, : \, t \mapsto \gamma(t) = (t, at + b)$ *le vecteur vitesse est* $\gamma'(t) = (1, a) \neq (0, 0)$.

Définition 1.1.1.4. ***Reparamétrisation***
Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, J un autre intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire dérivable et sa dérivé est continue sur J) telle que $h'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$.
Alors

$$\alpha = \gamma \circ h : J \to \mathbb{R}^2 \,:\, s \mapsto \gamma(h(s))$$

est appelée une reparamétrisation de γ.

Remarque 1.1.1.2. .
Si $h'(s) > 0$ pour tout $s \in J$,on parle reparamétrisation positive :orientation (le sens des vecteurs vitesses) de la courbe est conservée.
Si $h'(s) < 0$ pour tout $s \in J$,on parle reparamétrisation négative :orientation (le sens des vecteurs vitesses) de la courbe est inversée.

Exemple 1.1.1.3. *Soit le cercle d'unité $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \,:\, t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$*
Si $h(s) = 2s$ alors $\alpha(s) = (\cos 2s, \sin 2s)$ avec $s \in J = [0, \pi]$ est une reparamétrisation positive.
Si $h(s) = -s$ alors $\alpha(s) = (\cos, -\sin s)$ avec $s \in J = [-2\pi, 0]$ est une reparamétrisation négative.

Définition 1.1.1.5. ***Longueur d'un arc***
Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $[a, b] \subset I$. La longueur de l'arc de courbe compris entre les points $A = \gamma(a)$ et $B = \gamma(b)$ est donnée par

$$L(A, B) = \int_a^b \parallel \gamma'(t) \parallel dt.$$

Exemple 1.1.1.4. *Soit le cercle d'unité $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \,:\, t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.*
Longueur de demi cercle de $A = (1, 0) = \gamma(0)$ et $B = (-1, 0) = \gamma(\pi)$ est

$$L(A, B) = \int_0^\pi \parallel \gamma'(t) \parallel dt = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}.dt = \int_0^\pi dt = t|_0^\pi = \pi$$

Remarque 1.1.1.3. *La longueur est bien définie : elle est est invariante par reparamétrisation.*

Définition 1.1.1.6. ***Abscisse curviligne***
Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$, l'abscisse curviligne d'origine $\gamma(t_0)$ de γ est la fonction :

$$s : I \to \mathbb{R} \,:\, t \mapsto \int_{t_0}^t \parallel \gamma'(\theta) \parallel d\theta.$$

Remarque 1.1.1.4. *Si γ est une paramétrisation régulière, alors on peut la reparamétrée à l'aide de l'abscisse curviligne*

$$I \to \mathbb{R}^2 \,:\, t \mapsto \gamma(s^{-1}(t)).$$

On parle de paramétrisation par l'abscisse curviligne; Le vecteur de vitesse est alors unitaire en tout point.

1.1.2 Courbure des courbes planes paramétrées

Définition 1.1.2.1. ***Repère de Frenet***
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière.Pour tout $t \in I$, on appelle repère de Frenet de la courbe au point $\gamma(t)$ le repère $(\tau(t), \eta(t))$ tels que

- *$\tau(t)$ est le vecteur tangent unitaire, $\tau(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\| \gamma'(t) \|}$ et*
- *$\eta(t)$ est l'unique vecteur unitaire normal à $\tau(t)$ tel que le repère $(\tau(t), \eta(t))$ soit direct, (c'est à dire $\det(\tau(t), \eta(t)) = +1$*

Définition 1.1.2.2. ***Courbure***
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne. Alors pour tout $t \in I$ le vecteur accélération $\gamma''(t)$ est perpendiculaire au vecteur tangent $\tau(t)$ c'est à dire $\tau(t) \cdot \gamma''(t) = 0$.
La courbure au point $P = \gamma(t)$, notée $\kappa(P) \in \mathbb{R}$ est définie par l'égalité

$$\gamma''(t) = \tau'(t) = \kappa(P)\eta(t).$$

Si $\kappa(P) \neq 0$ alors la quantité $\rho(P) = \frac{1}{|\kappa(P)|}$ est appelée le rayon de courbure au point P (par convention, on pose $\rho(P) = +\infty$ si $\kappa(P) = 0$).

Remarque 1.1.2.1. *Noter que la signe de la courbure est sensible au changement d'orientation.*

Théorème 1.1.2.1. *Soit κ une fonction continue sur intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soient $t_0 \in I$, P un point et v un vecteur unitaire dans le plan.*
Alors,il existe une unique courbe de classe $\mathcal{C}^2$ paramétré par son abscisse curviligne $t \mapsto \gamma(t)$ tel que $\kappa(t)$ soit la courbure de la courbe au point $\gamma(t)$ pour tout $t \in I$, $\gamma(t_0) = P$ et $\gamma'(t_0) = v$

Formule générale de la courbure

Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière. Sa courbure au point $P = \gamma(t)$ est donnée par la formule :

$$\kappa(P) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t)}{\| \gamma'(t) \|^3}.$$

Exemple 1.1.2.1. *Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $\gamma(t) = (\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2})$ est une paramétrisation du cercle d'unité.*
On calcule abscisse curviligne, on a $\gamma'(t) = (\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2})$ alors $\| \gamma'(t) \| = \dfrac{2}{1+t^2}$ on obtient

$$s(t) = \int_0^t \| \gamma'(t) \| .dt = \int_0^t \frac{2}{1+t^2}.dt = 2\arctan t \,|_0^t = 2\arctan t$$

donc $t = \tan\dfrac{s}{2}$ d'où paramétrisation par l'abscisse curviligne est $\gamma(s) = (\cos(s), \sin(s))$.
D'où $\tau(s) = \gamma'(s) = (-\sin(s), cos(s))$ on prendre $\eta(t) = (-\cos(s), -\sin(s))$.
Alors $\gamma''(s) = \tau'(s) = (-\cos(s), -\sin(s)) = 1.\eta(t)$
donc $\kappa(P) = 1$ pour tout point du cercle d'unité.

1.2 Paramétrisation des courbes gauches et exemples

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1.1. ***Courbe gauche***
On appelle courbe gauche paramétrée la donnée d'une application

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3 \,:\, t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans la toute la suite).

Remarque 1.2.1.1. *Les notions de régularité, de reparamétrisation, de longueur d'arc et d'abscisse curviligne se définissent exactement comme pour les courbes planes et possède les mêmes propriétés.*

Définition 1.2.1.2. ***Courbure***
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne.On note $\tau(t) = \gamma'(t)$ le vecteur tangent unitaire à la courbe.
La courbure de la courbe γ au point $P = \gamma(t)$ est la quantité $\kappa(P) = \parallel \tau'(t) \parallel = \parallel \gamma''(t) \parallel$ elle est toujours positive.

Remarque 1.2.1.2. *Un point où la courbure s'annule est appelé un point d'inflexion.*

Repère de Frenet

Soit toujours $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par son abscisse curviligne. Pour tout point $\gamma(t)$ qui n'est pas un point d'inflexion on définit le vecteur normal unitaire à la courbe par

$$\eta(t) = \frac{\gamma''(t)}{\parallel \gamma''(t) \parallel} = \frac{\gamma''(t)}{\kappa(t)}.$$

Afin obtenir un plan normal à la courbe, on introduit un troisième vecteur unitaire, appelé vecteur bi-normal unitaire

$$b(t) = \tau(t) \wedge \eta(t).$$

Définition 1.2.1.3. ***Repère de Frenet***
Le repère mobile directe $(\tau(t), \eta(t), b(t))$ centré au point $\gamma(t)$ est appelé le repère de Frenet de la courbe γ au point $P = \gamma(t)$.

Soit encore $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par son abscisse curviligne. Si $\gamma(t)$ n'est pas un point d'inflexion alors on montre que les vecteurs $b'(t)$ et $\eta(t)$ sont colinéaires et on pose la

Définition 1.2.1.4. ***La torsion***
Si $\gamma(t)$ n'est pas un point d'inflexion, la torsion de la courbe γ au point $P = \gamma(t)$ notée $\theta(\gamma(t))$ est définie par

$$b'(t) = -\theta(\gamma(t))\eta(t).$$

Formules de Serret-Frenet

Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par son abscisse curviligne et $\gamma(t)$ un point qui n'est pas un point d'inflexion.
Alors on a les relations suivantes

$$\begin{pmatrix} \tau'(t) \\ \eta'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(\gamma(t)) & 0 \\ -\kappa(\gamma(t)) & 0 & \theta(\gamma(t)) \\ 0 & -\theta(\gamma(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ \eta(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Formulation générale pour une paramétrisation quelconque

Soient $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.
On pose

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\| \gamma'(t) \|}, \ b(t) = \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\| \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \|}, \ \eta(t) = b(t) \wedge \tau(t)$$

et alors

$$\kappa(\gamma(t)) = \frac{\| \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \|}{\| \gamma'(t) \|^3}, \ \theta(\gamma(t)) = \frac{(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\| \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \|^2} = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t)), \gamma'''(t))}{\| \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \|^2}.$$

1.3 Paramétrisation des surfaces

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1.1. ***Surface***
Une partie X de $\mathbb{R}^3$ est une surface (lisse) de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ si pour tout $P \in X$ il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^3$ de P, un plan Π et un difféomorphisme $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^3$, V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, tel que $\phi(U \cap X) = V \cap \Pi$.

Une telle définition des surfaces par redressement sur un espace affine est difficile à manipuler en pratique. Mais elle fournit deux types de représentations des surfaces qui sont couramment utilisées : les représentations implicites et paramétrées.

Définition 1.3.1.2. ***Représentation implicite***
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ telle que pour tout point $P \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(P) = 0$ la différentielle $d_P f$ est non nulle. Alors l'ensemble $f^{-1}(0)$ est une surface $\mathcal{C}^k$.

Exemple 1.3.1.1. *On considère $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ donc $d_P f = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$, alors pour tout $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = 0$ c'est à dire $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ est une surface appelée la sphere d'unité notée $\mathbb{S}^2$.*

Définition 1.3.1.3. ***Représentation paramétrée***
Soit $(u, v) \to X(u, v)$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1$ définie sur voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Si $\dfrac{\partial X}{\partial u}(0)$ et $\dfrac{\partial X}{\partial v}(0)$ sont linéairement indépendants alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant l'origine et tel que $X(U)$ est une surface $\mathcal{C}^k$.

Exemple 1.3.1.2. $\begin{cases} x = \cos u \sin v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos v \end{cases}$

est une représentation paramétrée de la sphere d'unité $\mathbb{S}^2$, tel que $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Définition 1.3.1.4. ***Aire d'une surface paramétrée***
Soit $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée. On note $\partial_u X$ et $\partial_v X$ les dérivées partielles de X respectivement par à rapport la première et par à rapport la deuxième composante des éléments de U.
L'aire $\mathbf{A}_X(U)$ de la surface paramétrée X est donnée par

$$\mathbf{A}_X(U) = \int\int_U \| \partial_u X \wedge \partial_v X \| \, dudv.$$

Si $D \subset U$ est un domaine d'intégration de $\mathbb{R}^2$, l'aire $\mathbf{A}_X(D)$ de la restriction de X à D est donnée par

$$\mathbf{A}_X(D) = \int\int_D \| \partial_u X \wedge \partial_v X \| \, dudv.$$

1.4 Exemples des courbes et des surfaces

1.4.1 Exemples des courbes planes

Astroïde :

Soit a un réel fixe strictement positive .

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$

• Les applications $x(t), y(t)$ sont $2\pi-$ périodiques, on obtient donc toute la courbe en faisant varier t dans un intervalle de longueur 2π.

• $x(t)$ est paire, $y(t)$ est impaire,on fera donc varier $t \in [0,\pi]$, puis on effectuera la symétrie par rapport à xx'.

• Comme $\forall t \in [0,\pi]$ $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = y(t) \end{cases}$

on fera varier t dans $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, puis on effectuera la symétrie par rapport à yy'.

• Enfin, puisque $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ on a $\begin{cases} x(\dfrac{\pi}{2} - t) = y(t) \\ y(\dfrac{\pi}{2} - t) = x(t) \end{cases}$ on fera varier t dans $[0, \dfrac{\pi}{4}]$ puis on effectuera la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Les applications $x(t), y(t)$ sont dérivables $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$ $\begin{cases} x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t \\ y(t) = 3a\sin^2 t\cos t \end{cases}$

On déduit le tableau des variations de $x(t)$ et $y(t)$

• Étude en 0

$\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t \to 0$ quand $t \to 0$ donc Γ admet xx' pour tangente en point $(a, 0)$

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$x'(t)$	0	$-$	$\frac{-3a}{2\sqrt{2}}$
$x(t)$	0	$\searrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
$y'(t)$	0	$+$	$\frac{3a}{2\sqrt{2}}$

• Étude en 0

$\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t \to 0$ quand $t \to 0$ donc Γ admet xx' pour tangente en point $(a, 0)$

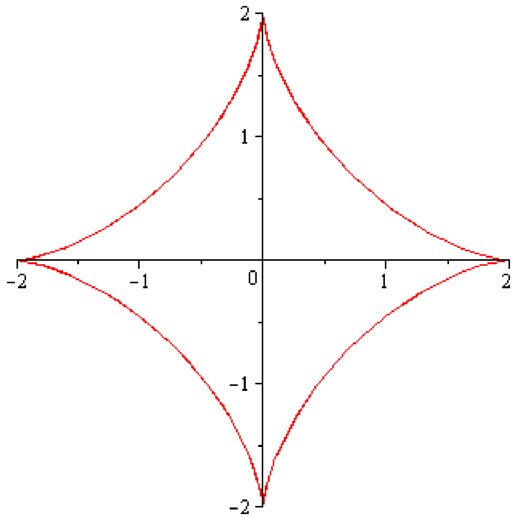

FIGURE 1.1 – Astroïde pour $a = 2$

Lemniscate de Bernoulli

a désigne un réel fixe positive strictement.

Soit Γ la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$

• $x(t)$ et $y(t)$ sont impaires, on fera donc varier t dans $[0, +\infty[$ puis on effectuera la symétrie par rapport à l'origine O

• On a pour tout t de $[0, +\infty[$: $\begin{cases} x(\dfrac{1}{t}) = y(t) \\ y(\dfrac{1}{t}) = x(t) \end{cases}$

on fera donc varier t dans $[0, 1]$ puis on effectuera la symétrie par rapport à la première bissectrice.

Les applications $x(t), y(t)$ sont dérivables $\forall t \in [0, 1]$ $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \\ y'(t) = \dfrac{t^2(1-3t^4)}{(1+t^4)^2} \end{cases}$

On déduit le tableau des variations de $x(t)$ et $y(t)$

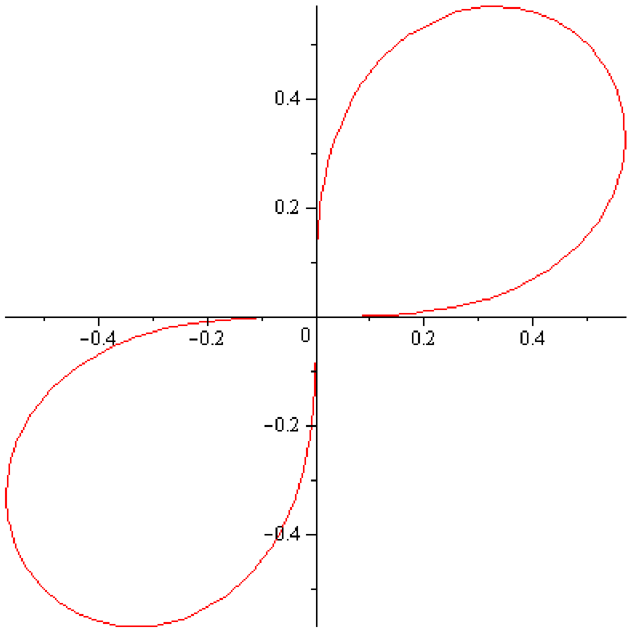

FIGURE 1.2 – Lemniscate de Bernoulli pour

t	0		$\frac{-1}{\sqrt{\sqrt{3}}}$		1
$x'(t)$	1	$+$	0	$-$	$\frac{-1}{2}$
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
$y'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\frac{1}{2}$

1.4.2 Exemples des courbes gauches

Définition 1.4.2.1. *On appelle* ***hélice*** *toute courbe γ de $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$, régulière telle qu'il existe un vecteur unitaire fixe $\vec{K}$ où l'angle $(\vec{K}, \vec{T})$ soit de mesure constante (modulo 2π) avec* $\vec{T} = \dfrac{\gamma'(t)}{\| \gamma'(t) \|}$)

Hélice circulaire à pas constant

.

• Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ et Γ de représentation
$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \\ z(t) = ht \end{cases}$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x'(t) = -r\sin t \\ y(t) = r\cos t \\ z(t) = h \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé le produit scalaire de $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}(x'(t), y'(t), z'(t))$ et $\vec{k}$, $\vec{k}.\vec{T} = \dfrac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$ est constant alors, l'angle $(\vec{k}.\vec{T})$ est constant,Γ est une hélice appelée hélice circulaire à pas constant, trace sur le cylindre de rayon r d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = r^2$ $z \in \mathbb{R}$.

• Soit Γ une courbe gauche de représentation $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\cos t \\ y(t) = e^{-t}\sin t \\ z(t) = e^{-t} \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

On a $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\cos t - \sin t, \cos t - \sin t, -1)$ alors on obtient $\vec{k}.\vec{T} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$ est constant, donc l'angle $(\vec{k}.\vec{T})$ est constante,Γ est une hélice trace sur le cone d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

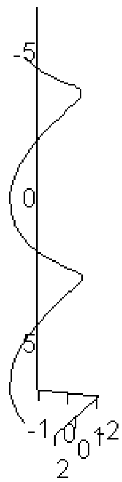

FIGURE 1.3 – Hélice circulaire à pas constant pour $r = 2$ et $h = 1$

1.4.3 Exemples des surfaces

Cylindres

Définition 1.4.3.1. ***Cylindre***
Soient Λ une droite et Γ une courbe.
On appelle cylindre (ou surface cylindrique) de directrice Γ et de génératrice Λ la réunion S des droites de $\mathbb{R}^3$ de direction Λ et rencontrant Γ.

• Une représentation de cylindre de directrice $\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

et à génératrice parallèle à vecteur $(2, -1, 3)$ est

$$S : \begin{cases} x(t) = t + 2\lambda \\ y(t) = t^2 - \lambda \quad \text{avec } (t, \lambda) \in \mathbb{R}^{\nvDash} \\ z(t) = t^3 + 3\lambda \end{cases}$$

• La surface S d'équation cartésienne $e^{x^2+y^2+z^2} - (x+z)e^{-2xz} = 0$ est un cylindre, en notant $u = x + z$ et $v = y$ alors S admet pour équation cartésienne $e^{u^2+v^2} - u = 0$ les génératrice de S est $u = 0$ $v = 0$ d'où $x = -z$ $y = 0$ et donc sont parallèle à vecteur $\vec{i} - \vec{k}$.

Cônes

Définition 1.4.3.2. ***Cône***
Soient Ω un point fixe de $\mathbb{R}^3$ et Γ une courbe. On appelle cone S de sommet Ω et directrice Γ la réunion des droites passant par Ω rencontrant Γ.
Pour tout point M de S sauf Ω, la droite (ΩM) est appelée génératrice de M sur S.

• Le cône S de sommet $\Omega(1, 2, -3)$ et de directrice
$\Gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
admet pour représentation
$S : \begin{cases} x(t) = 1 + (t-1)\lambda \\ y(t) = 2 + (t^2 - 2)\lambda \\ z(t) = -3 + (t^3 + 3)\lambda \end{cases}$ avec $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$
• Considère la surface S d'équation cartésienne $z^2 - xy - 2z + 1 = 0$ il est clair que cette équation on peut s'écrire $(z-1)^2 = xy$
Si $z \neq 1$ alors l'équation devient $\frac{-x}{z-1}\frac{y}{z-1} + 1 = 0$ on pose $U = x$,$V = y$ et $W = z - 1$ on obtient $\frac{-U}{W}.\frac{V}{W} + 1 = 0$ alors $f : (u, v) \mapsto 1 - uv$ alors
1)le sommet de S est $(U = 0, V = 0, W = 0)$ donc $\Omega = (0, 0, 1)$
2)La directrice de S : $f(u, v) = 0$ donc $uv = xy = 0$ avec $z \neq 1$ on choisit la courbe $\Gamma : \begin{cases} xy = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Surfaces de révolution

Définition 1.4.3.3. *On appelle surface de révolution la surface S obtenue on faisant tourner une courbe Γ autour un droite Δ*
On dit Δ est l'axe de S
On appelle méridienne ou (demi-méridienne) de S l'intersection de S avec un demi-plan limite par Δ.
On appelle parallèles de S les cercles d'axe Δ et rencontrant Γ.

• **Le tore** est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite du plan de ce cercle.
Considérons dans $\mathbb{R}^3$ le cercle C d'équation : $\begin{cases} x = 0 \\ (y-a)^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$ avec $(a, r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.
On obtient une représentation du tore S :
$\begin{cases} x - a\cos\theta = r\cos\theta\cos\alpha \\ y - a\sin\theta = r\sin\theta\cos\alpha \\ z = r\sin\alpha \end{cases}$ avec $(\theta, \alpha) \in ([-\pi, \pi])^2$ (ou $\mathbb{R}^2$.)
on peut obtenir équation cartésienne

$$((x^2 + y^2 + z^2)^2 - (a^2 + r^2))^2 + 4a^2z^2 = 4a^2r^2.$$

Quadriques

Définition 1.4.3.4. *On appelle quadrique toute surface d'équation cartésienne* $P(x, y, z) = 0$ *où* P *est un polynôme de degré total* 2.

Remarque 1.4.3.1. *Une quadrique admit une équation cartésienne de la forme* $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + 2c_1x + 2c_2y + 2c_3z + d = 0$ *tel que* $a_1, ..., d \in \mathbb{R}$

Quadriques à centre

Soient a, b, c sont des réels fixes non nuls.

Exemple 1.4.3.1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

est singleton $O = (0, 0, 0)$.

Exemple 1.4.3.2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

est appelée cône (du second degré) de sommet $O = (0, 0, 0)$.

$$\text{Paramétrisation :} \begin{cases} x = a\cos u \sin v \\ y = b\sin u \sin v \quad \text{avec } (u, v) \in ([-\pi, \pi])^2 \\ z = c\sin v \end{cases}$$

Exemple 1.4.3.3.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

est l'ensemble vide $\varnothing$.

Exemple 1.4.3.4.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est appelée ellipsoïde.

$$\text{Paramétrisation :} \begin{cases} x = a\cos u \cos v \\ y = b\sin u \cos v \quad \text{avec } (u, v) \in ([-\pi, \pi])^2 \\ z = c\sin v \end{cases}$$

Exemple 1.4.3.5.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est appelée hyperboloïde à une nappe H_1.

$$\text{Paramétrisation :} \begin{cases} x = a\cos u \cosh v \\ y = b\sin u \cosh v \quad \text{avec } (u, v) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \\ z = c\sinh v \end{cases}$$

Exemple 1.4.3.6.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

est appelée hyperboloïde à deux nappe H_2.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = a\cos u \sinh v \\ y = b \sin u \sinh v \\ z = c\cosh v \end{cases}$ *avec* $(u,v)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$

Quadriques quelconques

Soient a, b, c, ρ sont des réels fixes non nuls et $c > 0$ et $\rho > 0$.

Exemple 1.4.3.7.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$$

est appelée paraboloïde elliptique.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = av\cos u \\ y = bv \sin u \\ z = \frac{1}{2}cv^2 \end{cases}$ *avec* $(u,v)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$

Exemple 1.4.3.8.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$$

est appelée paraboloïde hyperbolique.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = av\cosh u \\ y = bv \sinh u \\ z = \frac{1}{2}cv^2 \end{cases}$ *avec* $(u,v)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$

Exemple 1.4.3.9.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

est l'ensemble vide $\varnothing$.

Exemple 1.4.3.10.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

est appelée cylindre elliptique.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = a\cos u \\ y = b \sin u \\ z = v \end{cases}$ *avec* $(u,v)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$

Exemple 1.4.3.11.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

est appelée cylindre hyperbolique.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = a\cosh u \\ y = b \sinh u \\ z = v \end{cases}$ *avec* $(u,v)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$

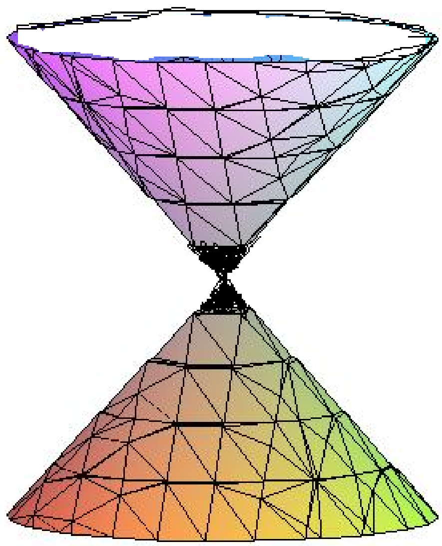

FIGURE 1.4 – Cône du second degré de sommet $O = (0, 0, 0)$.

Exemple 1.4.3.12.

$$x^2 = 2cy$$

est appelée cylindre parabolique.

Paramétrisation : $\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{u^2}{2\rho} \quad \textit{avec } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \\ z = v \end{cases}$

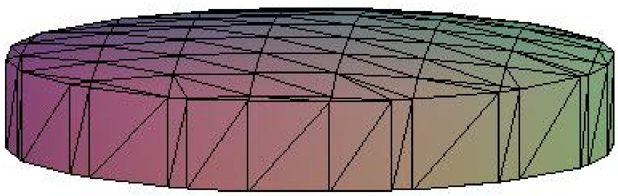

FIGURE 1.5 – Ellipsoide

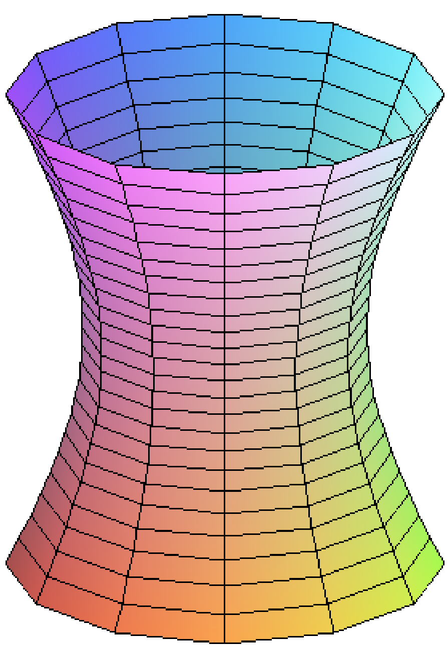

FIGURE 1.6 – Hyperboloïde à une nappe H_1.

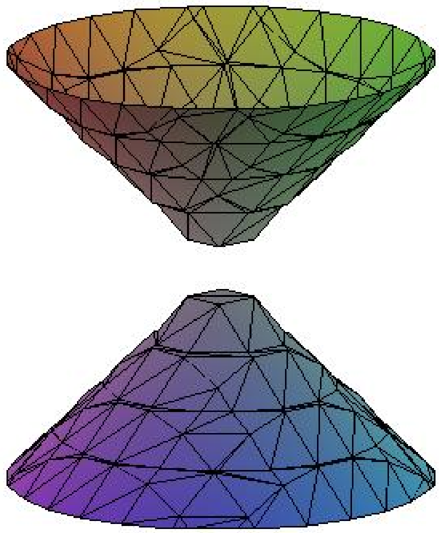

FIGURE 1.7 – Hyperboloïde à deux nappe H_2.

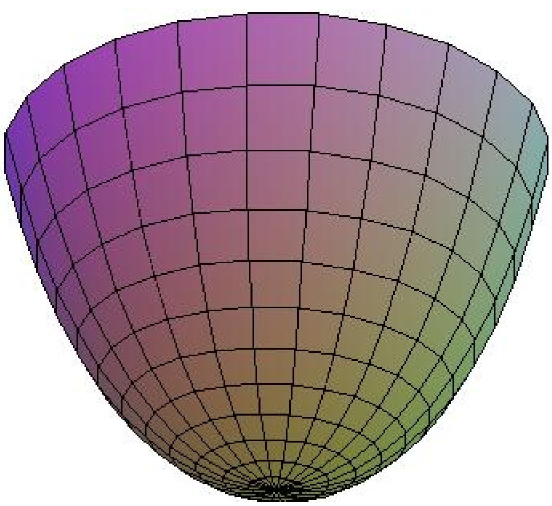

FIGURE 1.8 – Paraboloïde elliptique

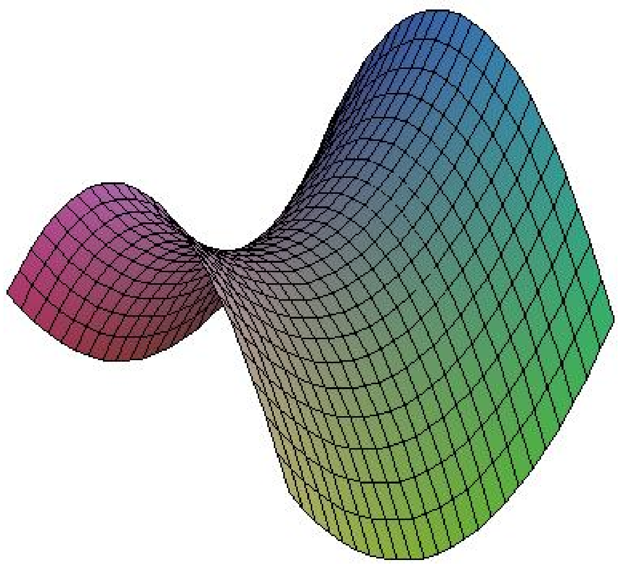

FIGURE 1.9 – Paraboloïde hyperbolique

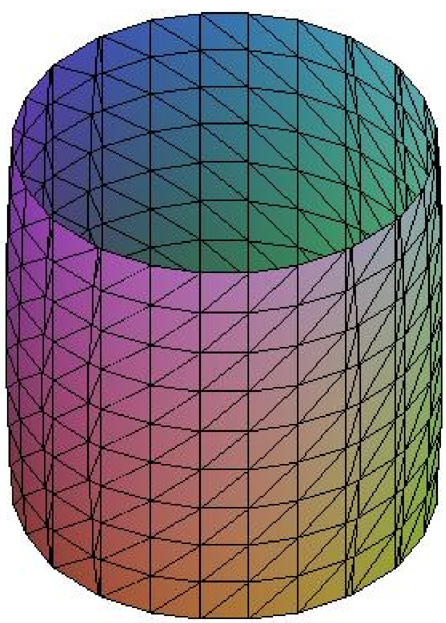

FIGURE 1.10 – Cylindre elliptique

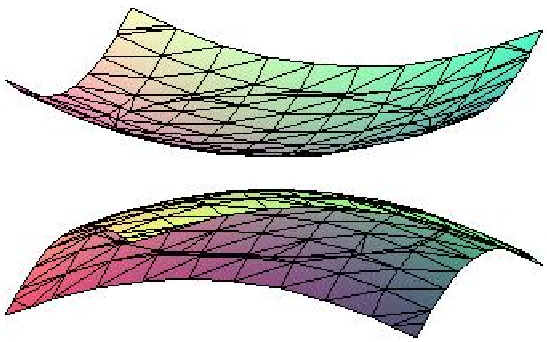

Figure 1.11 – Cylindre hyperbolique

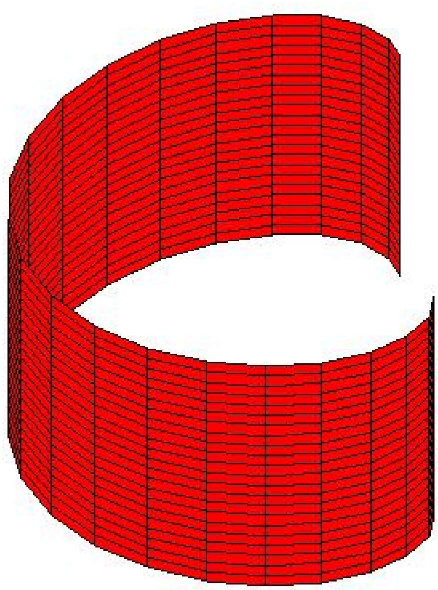

Figure 1.12 – Cylindre parabolique

1.5 Exercices

Exercice 1

Soit γ la courbe paramétrée définie
$\gamma : [0.T] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (at + b, ct + d)$
avec T, a, b, c, d sont des réels tels que $a \neq 0$ $c \neq 0$ et $T > 0$
1) Déterminer la nature de la courbe γ.
2) Calculer sa longueur.

Exercice 2

Calculer les longueurs des courbes paramétrées suivantes :
1) Le cercle $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2})$.
2)Arche de la cycloïde $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.
3) Parabole semi-cubique $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (t^2, t^3)$.

Exercice 3

1) Soit f une fonction réelle de régularité $\mathbf{C}^1$ définie sur intervalle compact $[a, b]$
Donner un paramétrage simple du graphe Γ de f et déduire la formule générale de la longueur de Γ.
2) Rappeler la définition de l'expression de la fonction $\arccos x$ (domaine de définition et sa dérivée.)
3)Soient deux réels a, b tels que $-1 < a < b < 1$, Calculer la longueur du graphe de la fonction réelle définie sur $[a, b]$ par la formule $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 4 .
Soient une courbe plane $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathbf{C}^1$ et une changement de paramétrisation $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ bijective de classe $\mathbf{C}^1$
Posons $\alpha = \gamma \circ \varphi$ 1) Prouver que les courbes paramétrées γ et α ont la même image dans $\mathbb{R}^2$.
2) Prouver que les courbes paramétrées γ et α ont la même longueur (on pourra distinguer les cas d'un changement paramétrage direct et indirecte c'est à dire les cas φ croissante,et φ décroissante).

Exercice 6

Soit la courbe gauche définie par

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \alpha(t) = \frac{1}{2}(\cosh t, t, \sinh t)$$

1)Déterminer le repère de Frenet de la courbe α.
2)Calculer la courbure et la torsion de la courbe α.

3)Calculer la longueur de l'arc compris entre $t = 0$ et $t = \ln 2$.
Remarque $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Exercice 7

Montrer que les seules courbes paramétrées régulières, de courbure identiquement nulle sont les droites (ou segments de droites).On pensera a prendre des paramétrisation par l'abscisse curviligne.

Exercice 8

On considère la courbe gauche $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ par $\gamma(t) = (\exp t, \exp -t, t\sqrt{2})$
1) Montrer que la courbe γ est régulière.
2) Montrer que la courbe γ est bi-régulière et déterminer la courbure κ de γ.
3) Montrer que la courbe γ est tri-régulière, et déterminer la torsion $\theta(\gamma(t))$ de γ .
4) Calculer le rapport $\frac{\theta}{\kappa}$.

Exercice 9

Soient a, b deux nombres réels.On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$$

1)Discuter suivant les valeurs de a et b, la régularité de la courbe γ.
2) On se place dans le cas où γ régulière. Déterminer la courbure κ de γ.
3) Pour quelles les valeurs de a et b, la courbe γ est elle bi-régulière ?
4) Lorsque γ est bi-régulière,en déterminer la torsion τ.

Exercice 10 .
On considère la surface

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \mapsto (y\cos x, y\sin x, x)$$

Étudier la régularité de la surface X.

Exercice 11

On considère la surface

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto ((1 - u\cos\frac{v}{2})\cos v, (1 - u\cos\frac{v}{2})\sin v, u\cos\frac{v}{2}).$$

cette surface est connue sous le non de **ruban de Mӧebius**.
Montrer que X est une paramétrisation régulière.

Exercice 12

Soit la surface

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2)$$

Soit la domaine $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ calculer $\mathbf{A}_X(D)$

Exercice 13

1)Déterminer l'aire de la surface $\mathcal{S}$ définie par :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z \leqslant 1 \end{cases}$$

2)Soit $]a, b[$ intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^3 \qquad s \mapsto (\rho(s), 0, \varphi(s))$ une paramétrisation de $\mathcal{C}^\infty$ de la courbe Γ de $\mathbb{R}^3$ telle que, pour tout s dans $]a, b[, \| \gamma'(s) \| = 1$ et $\rho(s) > 0$. La courbe donc est incluse dans le demi-plan $\begin{cases} y = 0 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$

Posons $e_3 = (0, 0, 1)$, on remarque $\rho(s) = \| \gamma(s) - (\gamma(s).e_3)e_3 \|$ est la distance euclidienne entre $\gamma(s)$ et l'axe zz'.

Soit Σ la surface de revolution de $\mathbb{R}^3$, obtenue en faisant tourner la courbe autour de l'axe zz'.

a) Montrer que l'aire de Σ est donnée par :

$$2\pi \int_a^b \rho(s) ds.$$

b) Calculer l'aire de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ définie par $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

c) Calculer l'aire du tore correspondant à unité Γ définie par $(x - 2)^2 + z^2 = 1, \; y = 0$.

2

Espace euclidien

2.1 Structure d'espace euclidien

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

2.1.1 Produit scalaire

Définition 2.1.1.1. *L'application $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite produit scalaire si*
• *f bilinéaire :*
a)$f(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y)$ $\forall x_1, x_2, y \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
b)$f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha f(x, y_1) + \beta f(x, y_2)$ $\forall x, y_1, y_2 \in E$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
• *f symétrique :* $f(x, y) = f(y, x)$ $\forall x, y \in E$
• *f positive :* $\forall x \in E$ $f(x, x) =\geqslant 0$
• *f définie :* $\forall x \in E$ $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Exemple 2.1.1.1. *Soit* $E = \mathbb{R}^n$ *avec* $n \geqslant 1$ *on pose* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
et $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
L'application $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ *avec* $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est appelé le produit scalaire usuel.

Exemple 2.1.1.2. *Soit* $E = \mathcal{C}([a, b), \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle* $[a, b] \in \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.
L'application $<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ *avec* $< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt$
est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b), \mathbb{R})$.

Proposition 2.1.1.1. *Inégalité de Cauchy-Schwartz*
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $<,>$ alors

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad < u, v >^2 \leqslant < u, u >< v, v >$$

Cette inégalité est connue sous le non de inégalité de Cauchy-Schwartz.

Preuve . Exercice ∎

Définition 2.1.1.2. ***Espace euclidien***
Un espace euclidien est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie et muni d'un produit scalaire.

Exemple 2.1.1.3. *Dans l'exemple (2.1.1.1) $(\mathbb{R}^n, <,>)$ est un espace euclidien, mais dans l'exemple (2.1.1.2) $(\mathcal{C}([a,b),\mathbb{R}), <,>)$ n'est pas un espace euclidien puisque* $\dim \mathcal{C}([a,b),\mathbb{R}) = +\infty$.

Définition 2.1.1.3. ***Norme***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
L'application

$$\begin{aligned} \|\ \|: E &\to \mathbb{R}_+ \\ U &\mapsto \| U \| \end{aligned}$$

est dite norme sur E si
- $\forall U \in E \qquad \| U \| = 0 \Leftrightarrow U = 0_E$.
- $\forall U \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \| \lambda U \| = |\lambda| \, \| U \|$.
- *Inégalité triangulaire* $\forall\, U, V \in E \qquad \| U + V \| \leqslant \| U \| + \| V \|$.

Proposition 2.1.1.2. *Soit E un espace euclidien muni de produit scalaire $<,>$ alors l'application :*

$$\|\ \|: \quad \begin{aligned} E &\to \mathbb{R} \\ U &\mapsto \| U \| = \sqrt{< U, U >} \end{aligned}$$

est une norme sur E.

Preuve . Exercice. ■

Définition 2.1.1.4. ***Distance ou métrique***
Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel.
L'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) \end{aligned}$$

est dite distance sur E si
- *Symétrisation* $\forall x, y \in E \; d(x,y) = d(y,x)$
- *Séparation* $\forall x, y \in E \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in E \qquad d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Proposition 2.1.1.3. *Soit E un espace euclidien muni de produit scalaire $<,>$ alors l'application :*

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (U,V) &\mapsto d(U,V) = \| U - V \| \end{aligned}$$

est une distance sur E.

Preuve . Exercice. ■

Proposition 2.1.1.4. *Soit E un $\mathbb{R}-$espace euclidien muni de produit scalaire $<,>$ alors*

$$\forall (U,V) \in E^2 \qquad \| U + V \|^2 + \| U - V \|^2 = 2(\| U \|^2 + \| V \|^2)$$

cette égalité est connue sous le nom ***identité de parallélogramme.***

Preuve . Exercice. ■

2.1.2 Orthogonalité

Soit E un $\mathbb{R}-$espace euclidien muni de produit scalaire $<,>$ et de norme associée $\|,\|$.

Définition 2.1.2.1. *Un vecteur U de E est dit unitaire si $\| U \|= 1$.*

Définition 2.1.2.2. *Deux vecteur U, V de E sont dits orthogonaux si $< U, V >= 0$.*

Remarques 2.1.2.1. • *Ces notions précédentes dépends évidement du produit scalaire utilisé sur E.*
• *Si U un vecteur non nul de E alors les vecteur $\dfrac{U}{\| U \|}$ et $\dfrac{-U}{\| U \|}$ sont unitaires.*
• *Le vecteur nul c'est le seul vecteur qui orthogonal à lui même.*
• *Le vecteur nul c'est le seul vecteur qui orthogonal à tous les vecteurs de E.*

Définition 2.1.2.3. ***Famille orthogonale, famille orthonormale***
On dit qu'une famille $(U_i)_{i\in I}$ des vecteurs de E est dit orthogonale si les U_i sont orthogonaux deux à deux.
De plus si les U_i sont unitaire alors la famille $(U_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale.

Exemple 2.1.2.1. *L'espace euclidienne $\mathbb{R}^2$ muni de produit scalaire usuel.*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ alors la famille $\{(\cos\theta, \sin\theta), (\sin\theta, -\cos\theta)\}$ est orthonormale.

Définition 2.1.2.4. ***Base orthogonale, orthonormale***
Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, muni d'un produit scalaire de dimension n finie
et $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ une base de E est dite une base orthogonale si les e_i sont orthogonaux deux à deux.
De plus si les e_i sont unitaire alors la base $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ est dite orthonormale .

Remarque 2.1.2.1. *Si E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire note $<,>$,*
et $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormale de E alors $< e_i, e_j >= \delta_i^j$ avec $\delta_i^j = 1$ si $i = j$ et $\delta_i^j = 0$ si non.

Propriété 2.1.2.1. *E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire*
• *Si $\{u_i\}_{i=1}^n$ une famille orthogonale alors $\| \sum_{i=1}^n u_i \|^2 = \sum_{i=1}^n \| u_i \|^2$*
la réciproque n'est pas toujours vraie.

Preuve . Exercice. ■

Proposition 2.1.2.1. ***Expression des coordonnées dans une base orthonormale***
Soient E un espace euclidien de dimension n, muni d'un produit scalaire note $<,>$,
et $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormale de E,
alors pour tout $U \in E$ on a $U = \sum_{i=1}^n < u, e_i > e_i$;
Les réels $< u, e_i >$ sont appelés les coordonnées de U suivant la base $\mathbf{B}$.

Preuve . Exercice. ■

Définition 2.1.2.5. ***Orthogonale d'une partie***
Soient E un espace euclidien muni d'un produit scalaire note $<,>$,
et A une partie non vide de E.
L'orthogonale de A note $A^\perp$ est

$$A^\perp = \{u \in E / < u, a >= 0 \ \ \forall a \in A\}$$

Proposition 2.1.2.2. *Soient E un espace euclidien muni d'un produit scalaire note $<,>$ A, B deux parties non vides de E. alors :*
• $A^\perp = \{u \in E / < u, a >= 0 \ \forall a \in A\}$ *est un sous espace vectoriel de E.*
• $E^\perp = \{0_E\}$
• *Si A une partie de E alors $A \subset (A^\perp)^\perp$.*
• *Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.*

Preuve . Exercice. ■

Proposition 2.1.2.3. *Soient E un espace euclidien, si F un sous espace vectoriel de E alors $E = F \oplus F^\perp$, le sous espace $F^\perp$ est appelé le supplémentaire de F.*

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 2.1.2.4. *Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire note $<,>$ alors existe une base orthonormale de E.*
Plus précisément si $\{e_i\}_i^n$ une base de E alors il existe une et une seule base orthonormale $\{\xi_i\}_i^n$ telle que :
• $forallk \in \{1, ..., n\}$ *Vect*$\{\xi_1, .., \xi_k\}$=*Vect*$\{e_1, .., e_k\}$
• $forallk \in \{1, ..., n\} < \xi_k, e_k >> 0$
Cette base $\{\xi_i\}_i^n$ est obtenue de Procédé de Gram-schmidt suivant
1) $\xi_1 = \dfrac{e_1}{\| e_1 \|}$
2) Pour $k \geq 2$ on a $\xi_k = \dfrac{u_i}{\| u_i \|}$ *où* $u_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} < \xi_j, e_k > \xi_j$.

Exemple 2.1.2.2. *Soit $\{e_1(1, -1), e_2(2, 1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ muni produit scalaire usuel*
$\xi_1 = \dfrac{e_1}{\| e_1 \|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, -1) = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$
et $u_2 = e_2 - < \xi_1, e_2 > \xi_1$ *en effet* $< \xi_1, e_2 >= 2.\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1.\dfrac{-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *alors*
$u_2 = (2, 1) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = (2, 1) - (\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}) = (\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2})$ *donc*
$\| u_2 \| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
d'où $\xi_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}) = (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$.
Alors $\{(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}), (\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})\}$ *base orthonormale de $\mathbb{R}^2$.*

2.2 Hyperplans et applications dans l'espace euclidien

2.2.1 Hyperplans

Définition 2.2.1.1. ***Forme linéaire***
Soit E un espace euclidien, l'application $f : E \to \mathbb{R}$ est dite forme linéaire si :

$$\forall u, v \in E \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2.1.1. *Une forme linéaire soit nulle , soit surjective.*

Proposition 2.2.1.1. ***Représentation de forme linéaire***
Soient E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $<,>$, et a un vecteur fixe non nul de E
L'application

$$\begin{gathered} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto < a, u > \end{gathered}$$

est une forme linéaire.

Preuve . Exercice ■

Définition 2.2.1.2. ***Hyperplan***
Soit E un espace euclidien, et $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire ; On appelle hyperplan de E note H le noyau de f c'est à dire

$$H = \ker f = \{u \in E / \, f(u) = 0\}.$$

Remarque 2.2.1.2. *Si H un hyperplan de E alors H un sous espace vectoriel de dimension* $\dim E - 1$.

Exemple 2.2.1.1. *Soient a, b, c avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ des réels fixes*
$\begin{gathered} f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto ax + by + cz \end{gathered}$ *est un forme linéaire,*
le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz = 0$ est un hyperplan de dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque 2.2.1.3. *Soit E un espace euclidien.*
• *Si $E = \mathbb{R}^3$ les hyperplans de E sont les plans vectoriels d'équation cartésienne de forme $ax + by + cz = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$*
• *Si $E = \mathbb{R}^2$ les hyperplans de E sont les droites vectoriels d'équation cartésienne de forme $ax + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$*

Proposition 2.2.1.2. ***Vecteur normal***
Soient E un espace euclidien de dimension n et H un hyperplan de E alors $\dim H = n - 1$ *donc il existe un sous espace F supplémentaire de H de dimension 1 d'où il existe un vecteur $N \in E$ telle que F est engendrée par N;*
Ce vecteur N est appelé le vecteur normal à H.

Remarque 2.2.1.4. *D'après La proposition (2.2.1.1) donc* $N \in H \perp$ *c'est à dire* $\mathbb{R}N$ *et* H *sont orthogonaux.*

Proposition 2.2.1.3. ***Équation d'un hyperplan*** *Soient* E *un espace euclidien de dimension* n, $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^{n}$ *une base de* E *et* H *un hyperplan de* E, *alors il existe un vecteur normal* N *tel que* $N = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ *donc* $\forall U \in H$ *on a* $< N, U >= 0$ *on suppose que* $U = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *alors*

$$< N, U >= 0 \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

L'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ *est appelée equation cartésienne de* H.

Exemple 2.2.1.2. *Si* $E = \mathbb{R}^3$ *le plan d'équation cartésienne* $3x+2y-z = 0$ *est un hyperplan de vecteur normal* $N = (3, 2, -1)$

2.2.2 Applications dans l'espace euclidien

Définition 2.2.2.1. ***Application orthogonale,application symétrique***
Soit E *un espace euclidien muni du produit scalaire* $<,>$ *et sa norme associée* $\| \ \|$.
Soit f *une application linéaire de* E *dans* E *est dite :*
- *orthogonale si* $\forall U \in E$ *on a* $\| f(U) \| = \| U \|$
- *symétrique si* $\forall U, V \in E$ *on a* $< f(U), V >=< U, f(V) >$.

Projection orthogonale

Définition 2.2.2.2. ***Projection orthogonale***
Soit E *un espace euclidien et* F *un sous espace de* E *de dimension* $p \leq n$
La projection sur F *parallèlement* $F^{\perp}$ *est appelée la projection orthogonale sur* F *notée* P_F.
Si $\{e_i\}_{i=1}^{p}$ *une base de* F *alors pour tout* $U \in E$ *on a* $P_F(U) = \sum_{k=1}^{p} < U, e_k > e_k$

Remarques 2.2.2.1. *Soit* E *un espace euclidien et* F *un sous espace de* E.
- *Si* P_F *la projection orthogonale sur* F, *celle sur* $F^{\perp}$ *est* $Id_E - P_F$
- *Si* $a \neq 0_E$ *la projection sur* $\mathbb{R}a$ *est*

$$P_a : U \mapsto P_a(U) = \frac{< a, U >}{\| a \|^2} a$$

évidement si a *unitaire alors* $P_a(U) =< a, U > a$.

Proposition 2.2.2.1. ***Caractérisation projection orthogonale***
Soit P *une projection vectorielle dans l'espace euclidien* E *alors les propositions sont équivalentes :*
- *La projection* P *est une projection orthogonale*
- *Pour tout* U, V *de* E *on a* $< P(U), V >=< U, P(V) >$ *c'est à dire* P *est symétrie.*
- *La matrice de* P *dans toute base orthonormale de* E *est symétrique.*

Proposition 2.2.2.2. ***Autre caractérisation projection orthogonale***
Soit P *une projection vectorielle dans l'espace euclidien* E *alors*
P *est orthogonale si seulement si pour tout* $U \in E$ *on a* $\| P(U) \| \leq \| U \|$.

Propriété 2.2.2.1. *Soit E un espace euclidien et F un sous espace de E.*
Si P_F la projection orthogonale sur F alors
• $P_F \circ P_F = P_F$, $\ker P_F = F^{\perp}$ *et* $ImP_F = F$
• $\forall u \in E$ *on a* $\| u - P_F(u) \| \leq \| u - v \| \qquad \forall v \in F$.

Preuve . Exercice. ■

Symétrie orthogonale

Définition 2.2.2.3. ***Symétrie orthogonale***
Soient E un espace euclidien et F un sous espace propre de E comme $E = F \oplus F^{\perp}$ donc pour tout $u \in E$ il existe un unique vecteur $u^{\top} \in F$ et un unique vecteur $u^{\perp} \in F^{\perp}$ tel que $U = u^{\top} + u^{\perp}$
L'application $S_F : \ F \oplus F^{\perp} \to E$ tel que pour tout $u \in E$ on a

$$S_F(u^{\top} + u^{\perp}) = u^{\top} - u^{\perp}$$

est appelée la symétrie orthogonale par à rapport F.

Propriété 2.2.2.2. *Soit E un espace euclidien et F un sous espace de E.*
Si S_F la symétrie orthogonale par à rapport F alors
• *S_F est involutive c'est à dire $S_F \circ S_F = Id_E$.*
• *Pour tout $U \in F$ donc $S_F(U) = U$ et pour tout $U \in F$on a $S_F(V) = -V$.*
• *S_F est isomorphisme orthogonal symétrique.*

Preuve . Exercice. ■

Remarque 2.2.2.1. *Si F un hyperplan de E la symétrie orthogonale par à rapport F est appelée réflexion par à rapport F.*

2.2.3 Isométries

Dans ce paragraphe E et F désignent des espaces euclidiens de même dimension.

Définition 2.2.3.1. ***Isométrie*** *Un homomorphisme $\varphi : \ E \to F$ est dit isométrie si*

$$\forall x \in E \qquad \| \varphi(x) \|_F = \| x \|_E$$

Remarque 2.2.3.1. *Si $E = F$ alors*

$$\forall x \in E \qquad \| \varphi(x) \| = \| x \|$$

donc φ appelée endomorphisme orthogonale

Proposition 2.2.3.1. *Soit $\varphi : E \to F$ un isométrie alors :*
• $\forall\, x, y \in E \ < \varphi(x), \varphi(y) >_F = < x, y >_E$.
• *φ est isomorphisme.*
• *φ transforme une base orthonormale de E à une base orthonormale de F.*
• *La composée deux isométries , et l'inverse d'une isométrie sont des isométries.*

Preuve . Exercice. ■

Proposition 2.2.3.2. *Si $\varphi : E \to F$ application linéaire entre deux espace euclidien E et F de même dimension et s'il existe une base orthonormale de E transformer par φ en un base orthonormale de F alors φ est un isométrie.*

Preuve . Exercice. ■

Définition 2.2.3.2. *Soit A une matrice réelle carrée est dite orthogonale si $A^tA = I$ tels que A^t est matrice transposée de A et I la matrice identité.*

Propriété 2.2.3.1. *A une matrice réelle carrée.*
• *Si A orthogonale alors* $\det A = \pm 1$.
• *Toute matrice orthogonale est inversible et $A^{-1} = A^t$.*
• *Le produit deux matrices orthogonales et l'inverse d'une matrice orthogonale sont des matrices orthogonales.*

Preuve . • Si A orthogonale alors $A^tA = I$ alors $\det(A^tA) = 1$ et comme $\det A^t = \det A$ donc $(\det A)^2 = 1$ d'où $\det A = \pm 1$.
• Si A orthogonale alors $A^tA = I$ alors $A^{-1} = A^t$.
• Soient A, B deux matrices orthogonales $(AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^tIB = B^tB = I$ donc AB est orthogonale.
Soit A une matrice orthogonale donc A est inversible alors A^{-1} existe
et on a $A^{-1} = A^t \Leftrightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^t \Leftrightarrow (A^{-1})^t = A = (A^{-1})^{-1}$. ■

2.3 Exercices

Exercice 1

On définit dans $\mathbb{R}^3$ la forme $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto (x + y - z)(x' + y' - z') + yy' + 2zz'$$

• Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
• Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
• Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}^3$ suivant φ.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré égal ou inférieur de n à coefficients réels.
On définit la forme $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

• Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
• Orthonormaliser la base $\{1, X, X^2\}$ de sous espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ par le procède d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
• Calculer la distance entre X^3 et F.
• Montrer que l'application $\psi : E \to E \qquad P(X) \mapsto P(-X)$ est une symétrie orthogonale sur sous espace H que l'on précisera.

Exercice 3

Prouver la proposition (2.1.1.1).

Exercice 4

Prouver la proposition (2.1.1.2).

Exercice 5

Prouver la proposition (2.1.1.3).

Exercice 6

Prouver la proposition (2.1.1.4).

Exercice 7

Prouver les propriétés (2.1.2.1).

Exercice 8

Prouver la proposition (2.1.2.1).

Exercice 9

preuve de la proposition (2.1.2.2).

Exercice 10

Prouver la proposition (2.2.1.1)

Exercice 11

Prouver proposition (2.2.2.1).

Exercice 12

preuve de la proposition (2.2.2.2).

Exercice 13

Prouver la proposition (2.2.3.1).

Exercice 14

Prouver la proposition (2.2.3.2).

Exercice 15

Soit $\mathbf{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles.
Soient $\mathbf{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sous espace vectoriel des fonctions réelles paires, et $\mathbf{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sous espace vectoriel des fonctions réelles impaires
• Montrer que $\mathbf{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbf{P}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathbf{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
• Montrer que $\mathbf{P}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathbf{I}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des hyperplans de $\mathbf{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 16

Soit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre $n \geq 2$.
On définit la forme

$$\phi : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad A \mapsto trA$$

• Montrer que ϕ est une forme linéaire et déduire que $\mathbf{H} = \{M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})/trM = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17

Soit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre $n \geq 2$.
On définit la forme

$$<,>: \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad (A,B) \mapsto trAB^t$$

• Montrer que $<,>$ est un produit scalaire.
• Calculer $\parallel I_n \parallel$.

Exercice 18

Soit $E = \mathbf{C}([0,1],\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions complexes continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.
On définit sur E le produit scalaire $<,>$ par :

$$\forall f,g \in E \qquad < f,g >= \int_0^1 f(t)\bar{g}(t)dt.$$

Montrer que la famille $B = \{e_n(t) = e^{2nit\pi} / \, n \in \mathbb{Z}\}$ (avec $t \in [0,1]$ et $i^2 = -1$) est orthonormée.

Exercice 19

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie.
On appelle projecteur toute application linéaire p tel que $p \circ p = p$
• Montrer que p est un projecteur si seulement si $Id_E - p$ est un projecteur
1)Soit p un projecteur de E
• Montrer que $Im(Id_E - p) = \ker p$ et $\ker(Id_E - p) = Imp$
• Montrer que $E = \ker p \oplus Imp$
2)Soit p un projecteur de E et u un endomorphisme de E, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) $p \circ u = u \circ p$
(ii) $\ker p$ et Imp sont stables par u.

Exercice 20

Nous supposons que $V = F \oplus F^{\perp}$, p et q sont les projecteurs associés, Soit f un endomorphisme de V.
Démontrer que, pour que F soit stable par f il faut et il suffit que $q \circ f \circ p = 0$.

3

Géométrie affine

3.1 Espace affine

3.1.1 Groupe opérant sur un ensemble

Définition 3.1.1.1. *Soient E un ensemble non vide et $(G, \star, e)$ un groupe muni de loi de composition $\star$ et d'élément neutre e.*
On dit G opérant sur E s'il existe une application

$$\begin{aligned} \varphi : G \times E &\to E \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g, x) \end{aligned}$$

vérifiant
• $\forall x \in E \quad \varphi(e, x) = x$.
• $\forall x \in E \quad \forall g_1, g_2 \in E$ *on a* $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 \star g_2, x)$.
Autrement dit φ est une action à gauche de G sur E

Remarque 3.1.1.1. *Par fois on écrit $g.x$ au lieu de $\varphi(g, x)$.*
Si G opérant sur un ensemble E on dit que E est un $G-$ensemble.

Exemple 3.1.1.1. *Soit $(G, \star)$ on considère $E = G$. On définit action*

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\to G \\ (g, x) &\mapsto \varphi(g, x) = g \star x \star g^{-1} \end{aligned}$$

alors G opérant sur lui même.Cette action est appelée action conjugaison.

Définition 3.1.1.2. ***Stabilisateur***
Soit E un $G-$ensemble, soit $x \in E$ le stabilisateur de x sous ensemble de G noté G_x tel que $G_x = \{g \in G \,/\, g.x = x\}$

Remarque 3.1.1.2. *G_x est un sous groupe de G et est appelé le sous groupe isotropie de x.*

Exemple 3.1.1.2. *Pour l'action conjugaison à lui même alors*
$G_x = \{g \in G \,/\, g.x = x\} = G_x = \{g \in G \,/\, g \star x \star g^{-1} = x\} = \{g \in G \,/\, g \star x = x \star g\} = C(x)$
$C(x)$ est appelé le commutateur de x.

Proposition 3.1.1.1. *Soit E un $G-$ensemble, la relation $\mathfrak{R}$ définie par*

$$\forall (x,y) \in E^2 \; x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G \; y = g.x$$

est une relation d'équivalence sur E.

Preuve . $\mathfrak{R}$ réflexive : puisque $x = e.x$ pour tout $x \in E$
$\mathfrak{R}$ symétrique : puisque pour tout $(x,y) \in E^2$ si $x\mathfrak{R}y$ alors il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$ alors $x = g^{-1}y$ donc $y\mathfrak{R}x$
$\mathfrak{R}$ transitive : puisque pour tout $(x,y,z) \in E^3$ si $x\mathfrak{R}y$, $y\mathfrak{R}z$ alors il existe $g, h \in G$ tel que $y = g.x$ et $z = h.y$ donc $x = h.(g.x) = (h \star g).x$ alors $z\mathfrak{R}x$. ■

Définition 3.1.1.3. ***Orbite***
La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ notée $\dot{x} = \{y \in E \,/\, \exists g \in G \; y = g.x\}$ est appelée l'orbite de x et note par fois $orb(x)$ ou $G.x$

Exemple 3.1.1.3. *Pour l'action conjugaison à lui même alors*
$G.x = \{y \in G \,/\, \exists g \in G \, y = g.x\} = \{y \in G \,/\, \exists g \in G \, y = g \star x \star g^{-1}\}$
Si $x = e$ on a $G.e = \{y \in G \,/\, \exists g \in G \, y = g.e\}\{y \in G \,/\, \exists g \in G \, y = g \star e \star g^{-1} = e\} = \{e\}$ tel que e c'est l'élément neutre de G.

Proposition 3.1.1.2. *L'ensemble des orbites de $G-$ensemble forment une partition de E.*

Définition 3.1.1.4. ***Action transitive,libre et fidèle***
Soit E un $G-$ensemble, on dit que
- *G agit sur E transitivement ou φ est transitive si*

$$\forall x \in E \; orb(x) = E.$$

- *φ est une action fidèle si $\bigcap_{x \in E} G_x = \{e\}$.*
- *φ est une action libre si $G_x = \{e\} \; \forall x \in E$.*

Remarques 3.1.1.1. *1)Toute action libre est fidèle.*
2) Si G agit sur E par une action transitive on dit que E est un $G-$ensemble homogène.

3.1.2 Espace affine

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

Définition 3.1.2.1. ***Espace affine.***
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide est dite espace affine si $\mathcal{E}$ est un $E-$ensemble homogène par l'action suivante

$$(x, U) \in \mathcal{E} \times E \mapsto x + U \in \mathcal{E}$$

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés les points, les éléments de E sont appelés les vecteurs. l'espace vectoriel E est appelé la direction de $\mathcal{E}$.

Définition 3.1.2.2. ***Espace affine (définition équivalente.***
Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel ; Un $\mathbb{K}-$espace affine est un ensembles non vide $\mathcal{E}$ muni d'une application

$$\varphi : \begin{array}{c} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E \\ (A, B) \mapsto \varphi(A, B) \end{array}$$

vérifiant :
• *Relation de Chasles : $\forall A, B, C \in \mathcal{E}$ $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$.*
• *$\forall A \in \mathcal{E}$ $\forall U \in E$ alors $\exists! B \in \mathcal{E}$ tel que $U = \varphi(A, B)$.*

Remarque 3.1.2.1. *1) On note $B = A + U$ de l'unique point B de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi(A, B) = U$*
2)Nous dirons que $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E (ou dirige par E).
3)On note par fois $\overrightarrow{AB}$ au lieu de $\varphi(A, B)$

Proposition 3.1.2.1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E alors :*
• *$\varphi(A, B) = 0_E \Leftrightarrow A = B$.*
• *$\varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$.*
• *Identité de parallélogramme : pour tout $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ $\varphi(A, B) = \varphi(D, C) \Leftrightarrow \varphi(A, D) = \varphi(B, C)$.*

Preuve . Exercice ■

Exemple 3.1.2.1. *1)Soit $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un espace affine de direction $\mathbb{R}^2$ tel que $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{E} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$*
2) Tout espace vectoriel est un espace affine de direction lui même.

Remarque 3.1.2.2. *La dimension d'un espace affine est la dimension de son espace de direction.*

Définition 3.1.2.3. *On appelle droite affine tout espace affine de dimension* 1.
Plan affine tout espace affine de dimension 2.
Les points singuliers sont des espaces affines de dimension 0.

3.1.3 Barycentres

La notion de barycentre dans l'espace affine faire même rôle des combinaisons linéaires dans l'espace vectoriel.

Théorème 3.1.3.1. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille des points indexée par I, d'un $\mathbb{K}-$ espace affine $\mathcal{E}$ de direction E. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille des scalaires de $\mathbb{K}$ à support fini tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i = \sigma \neq 0$.*
Alors il existe un unique point G de $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0_E$.
Et pour tout M de $\mathcal{E}$ on a $G = M + \dfrac{1}{\sigma} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$

Preuve . Soit $B \in \mathcal{E}$ un point quelconque, alors pour tout $M \in \mathcal{E}$ on peut écrire $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i \in I} \lambda_i (\overrightarrow{BA_i} - \overrightarrow{BM}) = (\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}) - \sigma.\vec{BM}$. alors il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $(\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}) - \sigma.\overrightarrow{BM} = 0_E$ c'est point $G = B + \overrightarrow{BG} = B + \dfrac{1}{\sigma} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{BA_i}$. ■

Définition 3.1.3.1. ***Barycentre***
Sous les hypothèses du théorème (3.1.3.1). On appelle le barycentre de $\{A_i, \lambda_i\}$
l'unique point G *tel que*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i GA_i = 0_E = \vec{0}$$

Exemple 3.1.3.1. *Soit* A, B *deux ponts différents de plan affine* $\mathbb{R}^2$
Le barycentre de la famille $\{(A, 1), (B, 1)\}$ *est le milieu du segment* $[AB]$.
D'abord on vérifier $1 + 1 = 2 \neq 0$.
En effet si G *le barycentre de cette famille alors* $1\overrightarrow{GA} + 1\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 1\overrightarrow{GA} + 1\overrightarrow{GA} + 1\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3.1.4 Sous espace affine

Définition 3.1.4.1. ***Sous espace affine***
Soit $\mathcal{E}$ *un espace affine de direction* E. *Un sous ensemble* $\mathcal{F}$ *non vide de* $\mathcal{E}$ *est dit sous espace affine de* $\mathcal{E}$ *de direction* F *si :*
1)F *un sous espace vectoriel de* E.
2) Pour tous points A, B *de* $\mathcal{F}$ *le vecteur* $\vec{AB}$ *appartient à* F
3) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ *et tout vecteur* $U \in F$ *le point* $A + \vec{U}$ *appartient à* $\mathcal{F}$.

Exemple 3.1.4.1. *Les sous espace affines du plan affines sont les droites affines et les points.*

Proposition 3.1.4.1. *Soit* $\mathcal{F}$ *un sous espace affine de* $\mathcal{E}$, *dirigé par un sous espace vectoriel* F *alors pour tout point* $A \in \mathcal{F}$, *on a l'égalité* $\mathcal{E} = A + F$.

Preuve . Exercice. ∎

Proposition 3.1.4.2. *Soient* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille des points d'un espace affine* $\mathcal{E}$, *alors l'ensemble des tous les barycentres de* $(A_i)_{i\in I}$ *est un sous espace affine de* $\mathcal{E}$.

Preuve . Exercice. ∎

Proposition 3.1.4.3. ***Stabilité par barycentres.***
Soit $\mathcal{F}$ *un sous espace affine de* $\mathcal{E}$, *et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille des points de* $\mathcal{F}$.
Si G *est le barycentre de la famille* $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ *alors* G *appartient à* $\mathcal{F}$.

Preuve . Exercice. ∎

Définition 3.1.4.2. ***Parallélisme.***
Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *deux sous espaces affines de* $\mathcal{E}$, *dirigés respectivement par* F_1 *et* F_2.
On dit
- $\mathcal{F}_1$ *est parallèle à* $\mathcal{F}_2$ *si* $F_1 \subset F_2$.
- $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *sont parallèles si* $F_1 = F_2$.

Théorème 3.1.4.1. *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace affine de direction* E, *étant donne un point quelconque* A *de* $\mathcal{E}$ *et un sous espace vectoriel* F *de* E. *Alors il existe un unique sous espace affine de* $\mathcal{E}$ *passant par* A *et dirigé par* F.

Preuve . Cet espace est $A+F$ (l'unicité est évidente). ■

Proposition 3.1.4.4. *Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$, si $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_2$ alors $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \varnothing$.*

Preuve . Exercice. ■

Théorème 3.1.4.2. ***Intersection d'espaces affines.***
Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F_1 et F_2 alors :
1) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \varnothing$ ou
2) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$, dirigés par $F_1 \cap F_2$.
De plus si
1) $F_1 + F_2 = E$ alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \varnothing$.
2) $F_1 \oplus F_2 = E$ alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ contient exactement un seul point.

Preuve . Exercice. ■

3.1.5 Espace euclidien affine

Définition 3.1.5.1. ***Espace euclidien affine.***
Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un espace euclidien

Exemple 3.1.5.1. *Tout espace euclidien est un espace affine euclidien*

Définition 3.1.5.2. ***Repère d'un espace euclidien affine.***
Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien affine dirigé par un espace euclidien E.
On appelle un repère affine (ou cartésienne) tout couple $(O, \mathbf{B})$ où O un point de $\mathcal{E}$ et $\mathbf{B}$ une base de E.
Le point O s'appelle l'origine.

Exemple 3.1.5.2. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ *on pose* $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
O le point d'intersection de les droites affines dirigées respectivement par les droites vectoriels $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ alors $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3.1.5.1. *Soit $(O, \mathbf{B})$ un repère de $\mathcal{E}$ si $\mathbf{B}$ une base orthogonale de E on dira que $(O, \mathbf{B})$ est un repère orthogonal.*
Si $\mathbf{B}$ une base orthonormale de E on dira que $(O, \mathbf{B})$ est un repère orthonormal.

Définition 3.1.5.3. ***Coordonnées d'un point.***
Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien affine muni d'un repère $(O, \mathbf{B})$.
On appelle coordonnées d'un point $M \in \mathcal{E}$ dans le repère $(O, \mathbf{B})$ les coordonnées de le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathbf{B}$.

Exemple 3.1.5.3. *Le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point A de coordonnées $(2, 3)$ est point $O + \vec{i} + \vec{j}$.*
On remarque que le point O de coordonnées $(0, 0)$.

Définition 3.1.5.4. ***Distance entre deux points.***
Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien affine dirigé par E un espace euclidien muni de produit scalaire $<,>$ et sa norme associé $\| \|$.
Si A, B deux points de $\mathcal{E}$ alors la distance entre A et B est $\| \overrightarrow{AB} \|$.

Définition 3.1.5.5. ***Projection orthogonale d'un point sur un sous espace affine.***
Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien affine de direction E,et $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F.
La projection orthogonale d'un point A de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ est l'unique point A' de $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{AA'} \in F^{\perp}$.

Définition 3.1.5.6. ***Distance entre un point et sous espace affine.***
Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien affine de direction E,et $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F. Si A un point de $\mathcal{E}$ et A' la projection orthogonale de A sur $\mathcal{F}$.
Alors distance entre A et $\mathcal{F}$ est $\| \overrightarrow{AA'} \|$.

3.2 Formes affines et applications affines

3.2.1 Formes affines et hyperplans

Définition 3.2.1.1. ***Forme affine.***
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E Une application $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est dite forme affine s'il existe une forme linéaire $L : E \to \mathbb{R}$ tel que pour tous points $A, B \in \mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = L(\overrightarrow{AB})$
L est appelée la partie linéaire de f.

Exemple 3.2.1.1. *$\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ de direction $\mathbb{R}^2$ et*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 3x - 2y + 3 \end{aligned}$$

la partie linéaire de f est la forme linéaire

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto 3x - 2y \end{aligned} .$$

Remarque 3.2.1.1. *Une forme affine soit constante , soit surjective.*

Définition 3.2.1.2. ***Hyperplan affine.***
Un hyperplan affine est un sous espace affine dirigé par un hyperplan vectoriel.

Exemple 3.2.1.2. *La droite affine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x - 2y + 3 = 0\}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^2$ dirigé par l'hyperplan vectoriel $\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, 3x - 2y = 0\}$.*

Proposition 3.2.1.1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E. Si f un forme affine non constante, alors $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{E} \,/\, f(A) = 0\}$ est un hyperplan affine dirigé par le noyau de la partie linéaire de f.*

Preuve . Exercice. ∎

Remarque 3.2.1.2. *Les hyperplans affines de* $\mathbb{R}^1$ *sont les singletons.*
Les hyperplans affines de $\mathbb{R}^2$ *sont les droites affines.*
Les hyperplans affines de $\mathbb{R}^2$ *sont les plans affines.*

Proposition 3.2.1.2. ***Caractérisation des hyperplans affines***
Soit $\mathcal{H}$ *un hyperplan affine d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *alors il existe une forme affine non constante* $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ *tel que* $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} \,/\, f(M) = 0\}$.

Preuve . Exercice ■

3.2.2 Application affine

Définition 3.2.2.1. ***Applications affines***
Soient $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *deux espaces affines euclidiens de direction respectivement* E *et* F.
Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *est dite application affine s'il existe une application linéaire* $L : E \to F$ *tel que pour tous points* $A, B \in \mathcal{E}$ *on a* $\overrightarrow{f(M)f(N)} = L(\overrightarrow{AB})$
L *est appelée la partie linéaire de* f.

Exemple 3.2.2.1. *Soit* A *un point fixe de* $\mathcal{F}$.
L'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *tel que pour tout* $M \in \mathcal{E}$ $f(M) = A$ *est une application affine appelée application constante, de partie linéaire nulle.*
En effet pour tous points $M, N \in \mathcal{E}$ *on a* $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} = L(\overrightarrow{AB})$ *tel que* $L : U \mapsto 0_F$ *pour tout* U *de* E.

Proposition 3.2.2.1. *Soit* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *une application affine de partie linéaire* $L : E \to F$ *et si* A *un point de* $\mathcal{E}$ *alors pour tout* M *de* $\mathcal{E}$, *on a*

$$f(M) = f(A) + L(\overrightarrow{AM}).$$

Preuve . Exercice. ■

Proposition 3.2.2.2. *Soient* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *deux espaces affines euclidiens de direction respectivement* E *et* F. *Si* $L : E \to F$ *une application linéaire et si* A *un point de* $\mathcal{E}$
alors l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *qui satisfaire* $\forall M \in \mathcal{E}$ *on a* $f(M) = f(A) + L(\overrightarrow{AM})$
est une application affine de partie linéaire L

Preuve . Exercice. ■

Théorème 3.2.2.1. *Soit* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *une application affine de partie linéaire* $L : E \to F$. *Soit* $\mathcal{G}$ *un sous espace affine de* $\mathcal{F}$, *de direction* F' *posons* $\mathcal{H} = f^{-1}(\mathcal{G}) = \{M \in \mathcal{E} \,/\, f(M) \in \mathcal{G}\}$
alors soit $\mathcal{H} = \varnothing$ *ou* $\mathcal{H}$ *est un sous espace affine de* $\mathcal{E}$, *dirigé par* $L^{-1} == \{U \in E \,/\, L(U) \in F\}$.

Preuve . Supposons que $\mathcal{H}$ ne soit pas vide et soit A un point de $\mathcal{H}$ donc $f(A) \in \mathcal{G}$, alors $\mathcal{G} = f(A) + F'$ d'où pour tout point M de $\mathcal{E}$ on a $f(A)\vec{f}(M) = L(\overrightarrow{AM})$ ainsi que $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} \,/\, f(M) \in f(A) + F'\} = \{M \in \mathcal{E} \,/\, L(\overrightarrow{AM}) \in F'\} = \{M \in \mathcal{E} \,/\, A\vec{M} \in L^{-1}(F')\} = \{M \in \mathcal{E} \,/\, \overrightarrow{AM} \in E'\} = A + E'$.
Notons que E' est un sous espace vectoriel de E puisque l'image reciproque d'un sous espace vectoriel par application linéaire. Par conséquent $\mathcal{H} = A + E'$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction E'. ■

Isométries affines

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E muni d'un produit scalaire $<,>$ et sa norme associée $\|,\|$.

Proposition 3.2.2.3. *L'application* $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ *tel* $(A, B) \mapsto \| \overrightarrow{AB} \|$ *pour tout* $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ *est une distance dans* $\mathcal{E}$.

Preuve .1) Soient $A, B \in \mathcal{E}$ on a $d(A, B) = 0 \Rightarrow \| \overrightarrow{AB} \| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \downarrow A = B$.
2)Soient $A, B \in \mathcal{E}$ on a $d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{BA} \| = d(B, A)$.
3)Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$ on a $d(A, C) = \| \overrightarrow{AC} \| = \| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \| \leq \| \overrightarrow{AB} \| + \| \overrightarrow{BC} \| = d(A, B) + d(B, C)$. ■

Définition 3.2.2.2. *Soit* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *application affine est dite isométrie affine si pour tous points* M, N *de* $\mathcal{E}$ *on a* $d(f(M), f(N)) = d(M, N)$.

3.2.3 Groupe des translations, homothéties

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E.

Groupe de translations affines

Définition 3.2.3.1. ***Translation affine.*** *Soit* $\overrightarrow{U}$ *un vecteur de* E.
On appelle translation affine de vecteur U *l'application affine*

$$T_{\overrightarrow{U}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$
$$M \mapsto M + \overrightarrow{U}.$$

Remarque 3.2.3.1. *La partie linéaire d'une translation est l'application d'identité de* E *c'est à dire* $L = Id_E$.

Propriété 3.2.3.1. *1) La translation de vecteur*
$overrightarrow0 = 0_E$ *est l'identité de* $\mathcal{E}$
2)la composée de translations $T_{\overrightarrow{U}}$ *et* $T_{\overrightarrow{V}}$ *est une translation de vecteur* $\vec{U} + \vec{V}$, *c'est à dire* $T_{\overrightarrow{U}} \circ T_{\overrightarrow{V}} = T_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}}$.
3)L'inverse d'un translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ *est une translation de vecteur* $-\overrightarrow{U}$.
4) L'ensemble des translations muni de loi de composition interne est un groupe abélien.
5)Toute translation affine est un isométrie affine.

Preuve . Exercice. ■

Groupe d'homothéties affines

Définition 3.2.3.2. ***Homothétie affine.***
Soit C *un point fixe de* $\mathcal{E}$ *et* λ *un nombre réel,*
On appelle homothétie de centre A *et de rapport* λ *l'application affine*

$$H_{A,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$
$$M \mapsto A + \lambda\overrightarrow{AM}.$$

Remarques 3.2.3.1. *Soit H_λ homothétie de centre C et de rapport λ donc :*
1) si $\lambda = 0$ alors H_λ est une application constante c'est à dire pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $f(M) = C$.
si $\lambda = 1$ alors H_λ est une application d'identité de$\mathcal{E}$ c'est à dire pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $f(M) = M$.

Proposition 3.2.3.1. ***Points fixes.***
Soit H_λ homothétie de centre C et de rapport λ tel que $\lambda \notin \{0, 1\}$ alors il existe un unique point fixe est le centre de l'homothétie c'est à dire

$$H_\lambda(M) = M \Leftrightarrow M = C$$

Preuve . On considère que M un point fixe de H_λ alors c'est à dire
$H_\lambda(M) = M \Leftrightarrow M = C + \lambda\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \lambda\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$. ■

Exemple 3.2.3.1. *Soit H_2 homothétie de centre $O = (0, 0)$ et de rapport 2 dans le palan affine de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors l'image de $A(-1, 2)$ est $A' = O + 2\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ donc $A' = (-2, 4)$.*

Propriétés 3.2.3.1. *1)L'homothétie de rapport $\lambda = 1$ est un identité de $\mathcal{E}$.*
2) La composée deux homothéties de rapport respectivement λ_1 et λ_2 est un homothétie de rapport $\lambda_1.\lambda_2$.
3)L'inverse d'homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ est un homothétie de rapport $\dfrac{1}{\lambda}$.
4)L'ensemble des homothéties muni de loi composition interne est groupe abélien.

Preuve ..
Exercice ■

Proposition 3.2.3.2. ***Partie linéaire d'homothétie.***
Soit H_λ homothétie de centre C et de rapport λ. est l'homothétie vectoriel λId_E.

Preuve . Soient M, N deux points d'images par H_λ respectivement M' et N'. on a $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{CN'} = -\lambda\overrightarrow{CM} + \lambda\overrightarrow{CN} = \lambda(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}) = \lambda\overrightarrow{MN}$.
Alors la partie de H_λ est l'application linéaire $L : E \to E$ tel que $\overrightarrow{U} \mapsto \lambda\overrightarrow{U}$. ■

3.2.4 Projections,symétries et affinités

Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E.

Projections

Proposition 3.2.4.1. *Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, et $G \subset E$ un supplémentaire de F dans E, alors pour tout point M de $\mathcal{E}$ il existe un unique point M' de $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in G$.*

Preuve . D'après le théorème (3.1.4.2) le sous espace affine $M + G$ coupe $\mathcal{F}$ en un seul point. ■

Définition 3.2.4.1. ***Projection***
Sous hypothèses de la proposition précédente le point M' est appelé projette de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.
L'application qui à M associe M' s'appelle la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Exemple 3.2.4.1. *Soit l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*
(Δ) la droite d'équation cartésienne $x - y + 1 = 0$ et F le sous espace engendre par le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Soit $M = (x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et $M'(x', y')$ la projection de M sur Δ parallèlement F. d'une part le vecteur $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \in F$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ tel que $\begin{cases} x' - x = 1\lambda \\ y' - y = 2\lambda \end{cases}$.
D'autre part on a $M' \in (\Delta)$ donc $x' - y' + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + \lambda) - (y + 2\lambda) + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = x - y + 1$.
Alors $\begin{cases} x' - x = x - y + 1 \\ y' - y = 2(x - y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 2x - y + 2 \end{cases}$
D'où $pr : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $M(x, y) \mapsto pr(M) = (2x - y + 1, 2x - y + 2)$.

Proposition 3.2.4.2. *La partie linéaire de la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G est la projection vectorielle sur F parallèlement à G.*

Preuve . Soient $A \in \mathcal{F}$ et $P : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G, alors on a $A = pr(A)$ donc si $M' = pr(M)$ on obtient $M' = A + \overrightarrow{AM'}$.
On sait que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{M'M}$ tels que $\overrightarrow{AM'} \in F$ et $\overrightarrow{M'M} \in G$.
En particulier $\overrightarrow{AM'} = L(\overrightarrow{AM})$ avec $L : E \to F$ la projection vectorielle sur F parallèlement à G, alors on a $pr(M) = pr(A) + L(\overrightarrow{AM})$. ■

Propriétés 3.2.4.1. *Soit pr la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G, alors*
1) $pr \circ pr = pr$.
2) $pr(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathcal{F}$.

Symétries

Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, et $G \subset E$ un supplémentaire de F dans E,

Définition 3.2.4.2. ***Symétrie***
L'application s qui à pour tout point M de $\mathcal{E}$ associe $M + 2\overrightarrow{MM'} = M' - \overrightarrow{MM'}$ est appelé la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G, où M' est la projection de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G.

Remarque 3.2.4.1. *Si G est orthogonale à F alors s est symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$.*

Proposition 3.2.4.3. *La partie linéaire de la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G, est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G,*

Preuve . Soit $L_{pr} : E \to F$ la projection vectorielle sur F parallèlement à G, et soit $L : E \to E$ la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G, on a $L = 2L_{pr} - Id_E$. Soient $pr : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G,
et $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G,
alors pour tous point A et B de $\mathcal{E}$ on a

$$\overrightarrow{s(A)s(B)} = \overrightarrow{s(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bs(B)}$$

$$= 2\overrightarrow{pr(A)A} + (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{Bpr(B)}$$
$$= 2(\overrightarrow{pr(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bpr(B)}) - \overrightarrow{AB}$$
$$= 2\overrightarrow{pr(A)pr(B)}\overrightarrow{AB} = (2L_{pr} - Id_E)(\overrightarrow{AB})$$
$$= L(\overrightarrow{AB})$$

■

Propriétés 3.2.4.2. *Soit s la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G, alors*
1) $s \circ s = id_{\mathcal{E}}$.
2) s est une isométrie affine bijective.
3) $s(M) = M \Leftrightarrow M \in \mathcal{F}$
4) Le sous espace affine $\mathcal{G}$ dirigé par G est stable par s c'est a dire $s(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$.

Affinité

Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction F, et $G \subset E$ un supplémentaire de F dans E,

Définition 3.2.4.3. ***Affinité***
L'application f qui à pour tout point M de $\mathcal{E}$ associe $M' + \lambda\overrightarrow{M'M}$ est appelé l'affinité par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à G, où M' est la projection de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G de rapport λ, où M' est la projection de M sur $\mathcal{F}$ parallèlement à G et $\lambda \in \mathbb{R}$

Remarques 3.2.4.1. *1)La projection est une affinité de rapport $\lambda = 0$*
2)La symétrie est une affinité de rapport $\lambda = -1$
3)L' affinité de rapport $\lambda = 1$ est l'identité.

3.3 Exercices

Exercice 1

Prouver la proposition 3.1.2.1

Exercice 2

Prouver la proposition 3.1.4.1

Exercice 3

Prouver la proposition 3.1.4.2

Exercice 4

Prouver la proposition 3.1.4.3

Exercice 5

Prouver la proposition 3.1.4.4

Exercice 6

Prouver la proposition 3.1.4.2

Exercice 7

Prouver la proposition 3.2.1.1

Exercice 8

Prouver la proposition 3.2.1.2

Exercice 9

Prouver la proposition 3.2.2.1

Exercice 10

Prouver la proposition 3.2.2.2

Exercice 11

Prouver de la proposition 3.2.3.1

Exercice 12

Prouver de la proposition 3.2.3.1

Exercice 13

Montrer que $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(0) = 0\}$ est un hyperplan vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions réelles.
Montrer que $\mathbf{E} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(0) = 1\}$ est un hyperplan affine de direction E.

Exercice 14

Montrer que l'ensemble engendre par les translations et les homothéties affines muni de loi de composition $\circ$ est un groupe.

4

Géométrie affine euclidienne dans le plan et dans l'espace de dimension 3

4.1 Géométrie affine euclidienne dans le plan

4.1.1 Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$

Produit scalaire canonique et l'orthogonalité dans $\mathbb{R}^2$

Définition 4.1.1.1. *On appelle produit scalaire canonique ou usuel sur $\mathbb{R}^2$ la forme bilinéaire tel que* $\begin{array}{c} <,>: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto <u,v> \end{array}$ *tel que $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ on a $< u, v >= xx' + yy'$. Par fois on note $u.v$ au lieu de $< u, v >$.*

Remarque 4.1.1.1. *Deux vecteurs u, v sont dits vecteurs orthogonaux si son produit scalaire est nul, on note $u \perp v$.*

Définition 4.1.1.2. *On appelle la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$ la norme associée du produit scalaire canonique c'est à dire pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ associé $\| u \|= \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Remarque 4.1.1.2. *Un vecteur est dit vecteur unitaire si sa norme égale a 1*

Définition 4.1.1.3. *On appelle la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$ la distance associée de la norme scalaire canonique c'est a dire pour tous $u = (x, y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ associé $d(u, v) =\| u - v \|= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.*

Produit mixte et parallélisme dans $\mathbb{R}^2$

Définition 4.1.1.4. ***Produit mixte*** *Soient $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ le produit mixte de u et v note $u \times v$ est $u \times v = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$*

Remarque 4.1.1.3. *Deux vecteurs u, v sont dits vecteurs parallèles (ou linéairement dépendantes)si son produit mixte est nul, on note $u \| v$.*

Exemple 4.1.1.1. *$u = (1, 1)$ et $v = (2, 2)$ sont des vecteurs parallèles.*

Définition 4.1.1.5. ***angle entre deux vecteur*** *Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $v = (x', y')$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$ alors l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ note $\widehat{(\vec{u}, \vec{u'})}$ le réel θ défini modulo 2π tels que*

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\| u \|\| v \|} = \frac{xx' + yy'}{\| u \|\| v \|} \qquad \sin\theta = \frac{u \times v}{\| u \|\| v \|} = \frac{xy' - x'y}{\| u \|\| v \|}.$$

Exemple 4.1.1.2. *$u = (1, 0)$ et $v = (1, 1)$ alors $\cos\theta = \frac{1.1 + 0.1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1.1 - 0.1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\theta = \frac{\pi}{4}$.*

Groupe Orthogonale $O_2(\mathbb{R})$

Définition 4.1.1.6. ***Endomorphisme orthogonale*** *On appelle un endomorphisme orthogonale de $\mathbb{R}^2$ tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ conserve le produit scalaire c'est à dire*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad f(u).f(v) = u.v$$

On note $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4.1.1.4. .
1)

$$f \in O_2(\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \| f(u) \| = \| f(u) \| .$$

2) les éléments de $O_2(\mathbb{R})$ appelés aussi isométries vectorielles.

Proposition 4.1.1.1. *l'ensemble $O_2(\mathbb{R})$ muni la loi de composition est un groupe.*

Preuve . Exercice. ■

Définition 4.1.1.7. ***Matrice orthogonale***
Une matrice M de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ muni le produit scalaire usuel.
On note $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 4.1.1.2. *Soit M une matrice $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1)$M \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$
2)$M^tM = I_2$
3)$MM^t = I_2$
4)Pour toute base orthonormale B de $\mathbb{R}^2$,l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par M dans B est orthogonal.
5)Il existe une base orthonormale B de $\mathbb{R}^2$,dans laquelle l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par M dans B est orthogonal.

Preuve . Exercice. ■

Remarque 4.1.1.5. *l'ensemble des matrices orthogonales* $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$*est un groupe par la multiplication, appelé le groupe orthogonale.*

Corollaire 4.1.1.1. *Si* $M \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ *alors* $\det M = \pm 1$
Si $f \in O_2(\mathbb{R}$ *alors* $\det f = \pm 1$

Remarque 4.1.1.6. *L'endomorphisme orthogonal de determinant égale à* 1 *dite endomorphisme orthogonal direct.*

Corollaire 4.1.1.2.

$$\mathbf{O}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta \ \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\varphi \ \varphi \in \mathbb{R}\}$$

tels que $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *et* $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

Preuve . Exercice. ∎

Proposition 4.1.1.3. *L'ensemble des matrices orthogonales (respectivement les endomorphismes orthogonaux)de determinant égale à* 1 *est un sous de groupe de* $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ *(respectivement* $O_2(\mathbb{R})$*) appelé groupe special orthogonal note* $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ *(respectivement* $SO_2(\mathbb{R})$*).*

Preuve . Exercice. ∎

Corollaire 4.1.1.3.

$$\mathbf{SO}_2 = \{R_\theta \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

4.1.2 Géométrie affine euclidienne dans le plan

Définition 4.1.2.1. *On appelle plan affine euclidien toute couple* $(\mathcal{R}^2, .)$ *ou* $\mathcal{R}^2$ *est un plan affine réel, et . le produit scalaire usuel sur la direction* $\mathbb{R}^2$.
Au lieu de $(\mathcal{R}^2, .)$*on note souvent* $\mathcal{R}^2$.

Remarque 4.1.2.1. *On appelle repéré orthonormé direct en abrégé r.o.n tout triplet* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *de* $\mathcal{R}^2$ *tel que* O *un point de* $\mathcal{R}^2$*. et* $\vec{i}, \vec{j}$ *est une base orthonormal directe de* $\mathbb{R}^2$.

Définition 4.1.2.2. ***Distance entre deux points.*** *Le plan* $\mathcal{R}^2$ *muni r.o.n* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *la distance entre de points* M, M' *de* $\mathcal{R}^2$ *est la quantité positive* $d(M, N) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ *tels que* $M = (x, y)$ *et* $M' = (x', y')$.

Exemple 4.1.2.1. *Si* $M = (1, 3)$ *et* $N = (3, 1)$ *alors* $d(M, N) = \sqrt{(1 - 3)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Définition 4.1.2.3. ***Angle de droites.*** *Soient* D, D' *deux droites affines de* $\mathcal{R}^2$ *diriges respectivement par* $\vec{u}$ *et* $\vec{u'}$ *on appelle angle de* D *et* D' *et on note* $(\widehat{D, D'})$ *le réel défini modulo* π *par :*
$(\widehat{D, D'}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})[\pi]$.

Définition 4.1.2.4. ***angle de droites*** *Soient* D, D' *deux droites affines de* $\mathcal{R}^2$ *diriges respectivement par* $\vec{u}$ *et* $\vec{u'}$ *sont dites orthogonales si* $\vec{u} \perp \vec{u'}$ *c'est à dire* $\vec{u}.\vec{u'} = 0$

Remarque 4.1.2.2. *Soient* D, D' *deux droites affines de* $\mathcal{R}^2$ *sont dites orthogonales si* $(\widehat{D, D'}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Les droites affines

Soit le plan affine euclidienne $\mathcal{R}^2$ muni r.o.n $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Vecteurs orthogonaux à une droite.

Définition 4.1.2.5. ***vecteur normal***
Soient a, b, c des réels tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ la droite affine (D) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors le vecteurs $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal (ou orthogonal) à (D). Le vecteur unitaire $\dfrac{\vec{n}}{\| \vec{n} \|}$ est appelé le normal unitaire de (D).

Proposition 4.1.2.1. ***E.C d'une droite passant par un point connu et de vecteur normal connu.*** *Soient $A(x_0, y_0)$ un point et $u = (a, b)$ un vecteur non nul alors la droite affine (D) de normal u et passant par A est d'équation cartésienne*

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Preuve . Exercice. ∎

Direction d'une droite.

Définition 4.1.2.6. ***vecteur dirigé.*** *Soient a, b, c des réels tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ la droite affine (D) d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $(-b.a)$ est un vecteur dirigé (D).*

Proposition 4.1.2.2. ***E.C d'une droite passant par un point connu et de vecteur de direction connu.*** *Soient $A(x_0, y_0)$ un point et $u = (a, b)$ un vecteur non nul alors la droite affine (D) de direction u et passant par A est d'équation cartésienne*

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0.$$

Preuve . Exercice ∎

Proposition 4.1.2.3. ***E.C d'une droite passant par deux points connus*** *Soient $A(x_0, y_0)$ $B = (x_1, y_1)$ deux points différents alors la droite affine (D) passant par Aet B est d'équation cartésienne*

$$(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y - (y_1 - y_0)x_0 + (x_1 - x_0)y_0 = 0.$$

Preuve . Exercice. ∎

Projection orthogonale d'un point sur une droite

Proposition 4.1.2.4. *Soit (D) une droite affine d'E.C $ax + by + c = 0$ et $M(x, y)$ un point quelconque de $\mathcal{R}^2$, notons $M' = (X, Y)$ la projection orthogonale de M sur (D) est donne par* $\begin{cases} X = \dfrac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2} \\ Y = \dfrac{a^2y - abx - bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$

Preuve . Le point M' vérifier
$$\begin{cases} M' \in (D) \\ \overrightarrow{MM'} \perp (-b,a) \end{cases}$$
donc $\begin{cases} aX + bY = c = 0 \\ (X - x, Y - y).(-b,a) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ -b(X - x) + a(Y - y) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} aX + bY = -c \\ -bX + aY = ay - bx \end{cases}$

alors $\begin{cases} X = \dfrac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2} \\ Y = \dfrac{a^2y - abx - bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$ ∎

Corollaire 4.1.2.1. *La projection orthogonale sur la droite (D) d'E.C $ax + by = c = 0$ est définie par* $p : \begin{cases} \mathcal{R}^2 \to (D) \\ M(x,y) \mapsto pr(M) = M'(x',y') \end{cases}$

tels que $\begin{cases} x' = \dfrac{b^2x - aby - ac}{a^2 + b^2} \\ y' = \dfrac{a^2y - abx - bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$

Corollaire 4.1.2.2. ***distance entre un point et une droite***
La distance entre un point $A = (x_0, y_0)$ et une droite affine d'E.C $ax + by + c = 0$ est donnée par
$$d(M,(D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Preuve . On pose $A' = (X_0, Y_0)$ la projection de A sur (D),
donc $d(M,(D)) = d(A,A') = \parallel \overrightarrow{AA'} \parallel$
alors
$d^2(M,(D)) = (X_0 - x)^2 + (Y - y)^2$

$= \dfrac{(-a(ax_0 + by_0 + c))^2 + (-b(ax_0 + by_0 + c))^2}{(a^2 + b^2)^2}$

$= \dfrac{(a^2 + b^2)(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2 + b^2)^2}$

donc $d(M,(D)) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ∎

Isométries affines du plan

Définition 4.1.2.7. ***Isométrie affine***
On appelle isométrie affine de $\mathcal{R}^2$ toute application affine $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ conservant la distance c'est à dire
$$\forall A, B \in \mathcal{R}^2, \qquad d(f(A), f(B)) = d(A,B)$$

Proposition 4.1.2.5. *Soit $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ une application affine de partie linéaire L. Alors f est une isométrie affine si seulement si L est une isométrie.*

Preuve . Exercice. ∎

Proposition 4.1.2.6. ***Groupe d'isométries***
L'ensemble d'isométries affines muni la lois de composition est un groupe.

Preuve . Exercice. ∎

Définition 4.1.2.8. *Soit $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ une isométrie affine de partie linéaire L alors :*
1) On dit que f est une isométrie affine directe (ou déplacement) si seulement si $\det(L) = 1$.
2) On dit que f est une isométrie affine indirecte (ou antidéplacement) si seulement si $\det(L) = -1$.

Proposition 4.1.2.7. ***Groupe de déplacements***
L'ensemble de déplacements est un sous groupe du groupe d'isométries.

Preuve . Exercice ∎

Définition 4.1.2.9. ***Rotation***
Soient A un point de $\mathcal{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.On appelle rotation de centre A et d'angle θ note $Rot_{\theta,A}$ l'isométrie affine lissant A fixe et de partie linéaire rotation vectoriel Rot_θ. C'est à dire

$$Rot_{\theta,A}(A) = A \quad \overrightarrow{AM'} = Rot_\theta(AM)$$

pour tout $M \in \mathcal{R}^2$ avec $M' = Rot_{\theta,A}(M)$.

Propriétés 4.1.2.1. *Avec les notations précédentes*
1)$Rot_{\theta,A}$ est bijective et on a $Rot_{\theta,A}^{-1} = Rot_{-\theta,A}$.
2)$Rot_{\theta,A}$ est une isométrie affine.
3) il existe un et un seul point fixé de $Rot_{\theta,A}$ c'est son centre, c'est à dire $Rot_{\theta,A}(M) = M \Leftrightarrow M = A$.
4)$Rot_{2k\pi,A} = Id_{\mathcal{R}^2}$.
5)$Rot_{\theta,A} \circ Rot_{\theta',A} = Rot_{\theta+\theta',A}$.

Théorème 4.1.2.1. ***Classification des déplacements de $\mathcal{R}^2$***
Les déplacements de $\mathcal{R}^2$ sont les translations ou les rotations.

Preuve . 1) Il est clair que les translations et les rotations sont déplacements.
2)Soit f un déplacement direct alors la partie linéaire L de f est un isométrie vectorielle directe alors d'après la proposition (4.1.1.2) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $L = Rot_\theta$
Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors $L = Id_{\mathbb{R}^2}$ donc f est une translation affine.
Supposons que $\theta \neq 0[2\pi]$ on muni $\mathcal{R}^2$ par un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$tel que ,pour tout $M(x, y)$ de $\mathcal{R}^2$ alors $f(M)$ ait pour coordonnées (x', y') où

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + \alpha \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + \beta \end{cases}$$

On a $f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\cos\theta) + y\sin\theta = \alpha \\ -x\sin\theta + y(1-\cos\theta) = \beta \end{cases}$

Le determinant $\begin{vmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{vmatrix} = (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$ est non nul donc le système d'équation précédent admet une seule solution.
Ainsi f admet un seule point fixe noté A.
Comme $f(A) = A$ et $L = Rot_\theta$ d'où f est la rotation d'angle θ et centre A. ∎

Définition 4.1.2.10. ***Réflexion***
Soit (D) une droite affine de $\mathcal{R}^2$, On appelle symétrie orthogonale ou réflexion par rapport à (D) et on note Ref_D la symétrie affine par rapport à (D) parallèlement la direction orthogonale.

Remarque 4.1.2.3. *Soit (D) une droite affine de $\mathcal{R}^2$, de direction $\vec{u}$ et Ref_D la réflexion par rapport à (D).*
Si M un point de $\mathcal{R}^2$, tel que $M' = Ref_D(M)$ alors $d(M,(D)) = d(M',(D))$ et $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ autrement dit la droite (D) est la médiatrice de le segment de droite $[MM']$.

Propriétés 4.1.2.2. *Avec les notations précédentes*
1)$Ref_D \circ Ref_D = Id_{\mathcal{R}^2}$.
2) Ref_D est une isométrie.
3) Les points fixes de Ref_D sont points de la droite (D).

Proposition 4.1.2.8. *Étant donné deux points A, B distingues de $\mathcal{R}^2$, il existe une et une seule réflexion échangeant A et B, c'est la réflexion par rapport à la médiatrice de $[AB]$.*

Similitudes directes du plan

Définition 4.1.2.11. ***Similitude***
On appelle similitude du plan $\mathcal{R}^2$ toute application affine $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que

$$\forall A, B \in \mathcal{R}^2 \quad d(f(A), f(B)) = kd(A, B)$$

Remarque 4.1.2.4. *1) Avec les notations précédentes le réel k est appelé le rapport de f.*
2)Toute isométrie affine est une similitude de rapport 1.
3)Toute homothétie de rapport k est une similitude de rapport k.

Proposition 4.1.2.9. *Une application affine $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$, de partie linéaire est une similitude si seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\| L(u) \| = k \| u \|$.*

Preuve . Soit f une similitude de rapport k Soit $u \in \mathbb{R}^2$ alors il existe deux points A, B de $\mathcal{R}^2$, tel que $\overrightarrow{AB} = u$ alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = L(\overrightarrow{AB}) = L(u)$ donc
$\| L(u) \| = \| L(\overrightarrow{AB}) \| = \| \overrightarrow{f(A)f(B)} \| = d(f(A), f(B)) = kd(A, B) = k \| \overrightarrow{AB} \| = k \| u \|$.
D'autre part Soit f une application affine de partie linéaire L tel qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\| L(u) \| = k \| u \|$;
Soient A, B deux points de $\mathcal{R}^2$, on a $d(f(A), f(B)) = \| \overrightarrow{f(A)f(B)} \| = \| L(\overrightarrow{AB}) \| \; k \| \overrightarrow{AB} \| = kd(A, B)$. ∎

Propriétés 4.1.2.3. *1)$id_{\mathcal{R}^2}$ est une similitude de rapport $k = 1$. 2)Toute similitude de rapport k est bijective . 3) La composée de similitudes et l'inverse de similitude sont des similitudes.*

Proposition 4.1.2.10. *L'ensemble des similitudes $\mathcal{R}^2$ est un groupe par la composition.*

Preuve . 1) Soit f une similitude de rapport k et de partie linéaire L

$$L(u) = 0 \Rightarrow \| L(u) \| = 0 \Rightarrow k \| u \| = 0 \Rightarrow u = 0$$

donc L est injective alors elle bijective d'où f est bijective.
2)Soient f_1 ,f_2 deux similitudes $\mathcal{R}^2$ de rapport respectivement k_1 et k_2 donc pour tous points $A, B \in \mathcal{R}^2$ on a

$$d(f_1 \circ f_2(A), f_1 \circ f_2(B)) = k_1 d(f_2(A), f_2(B)) = k_1 k_2 d(A, B)$$

alors $f_1 \circ f_2$ est une similitude de rapport $k_1 k_2$. 3) Soit f une similitude de rapport k alors f^{-1} il existe parce qu'il f est bijective, et f^{-1} est une application affine bijective alors pour tout $A, B \in \mathcal{R}^2$ on a

$$d(f^{-1}(A), f^{-1}(B)) = \frac{1}{k} d(f(f^{-1}(A)), f(f^{-1}(B))) = d(A, B)$$

d'où f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$. ∎

Définition 4.1.2.12. ***Similitude directe,indirecte***
Soit f une similitude du plan de partie linéaire L. On dit que f est une similitude directe (resp.indirecte) si seulement si $\det L > 0$ *(resp. $detL < 0$).*

Proposition 4.1.2.11. *L'ensemble des similitudes directes du $\mathcal{R}^2$ est un sous groupe du groupe des similitudes du $\mathcal{R}^2$.*

Preuve . 1)$id_{\mathcal{R}^2}$ est une similitude directe puisque $\det Id_{\mathbb{R}^2} = 1$.
2) Soient f_1 ,f_2 deux similitudes directes $\mathcal{R}^2$ de parties linéaires respectivement L_1 et L_2 alors $f_1 \circ f_2$ est une similitude de partie linéaire $L_1 \circ L_2$ donc
$\det(L_1 \circ L_2) = \det L_1 . \det L_2 > 0$,
d'où $f_1 \circ f_2$ est une similitude directe.
3) Soit f une similitude directe de partie linéaire L donc f^{-1} est une similitude de partie linéaire L^{-1} et on
$\det L^{-1} = \dfrac{1}{\det L} > 0$ donc f^{-1} est une similitude directe. ∎

Théorème 4.1.2.2. *Soit f une similitude directe du plan, de rapport k.*
1)Si $k \neq 1$, alors f admet un et un seul point fixe Ω, et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ modulo 2π, tel que

$$f = H_{\Omega,k} \circ Rot_{\Omega,\theta} = Rot_{\Omega,\theta} \circ H_{\Omega,k}$$

2)Si $k = 1$ alors f est une translation ou une rotation.

Preuve . Soit L la partie linéaire de f. 1)-a)Soit A un point fixe quelconque du plan, et $k \neq 1$.
On a pour tout M de $\mathcal{R}^2$ tel que

$$f(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{f(A)M} \Leftrightarrow L(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)A} + \overrightarrow{Af(M)}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - L(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{Af(A)} \Leftrightarrow (Id_{\mathbb{R}^2} - L)(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{Af(A)}$$

-b) Montrons que $(Id_{\mathbb{R}^2} - L)$ est bijective ?
Soit $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $(Id_{\mathbb{R}^2} - L)(u) = 0_{\mathbb{R}^2}$ donc $L(u) = u$ on a alors $\| L(u) \| = \| u \|$ d'une part. Et d'autre part $\| L(u) \| = k \| u \|$ et $k \neq 1$ on déduit $\| u \| = 0$ d'où $u = 0_{\mathbb{R}^2}$ on conclure que $(Id_{\mathbb{R}^2} - L)$ est injective donc elle bijective. Ceci montre qu'il existe $U \in \mathbb{R}^2$ tel que $Id_{\mathbb{R}^2} - L)(u) = \overrightarrow{Af(A)}$ puis il existe Ω tel que $A\Omega = u$ alors $f(\Omega) = \Omega$.
-c)Soit $H_{\Omega,\frac{1}{k}}$ une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$ et de centre alors $H_{\Omega,\frac{1}{k}} \circ f$ est une isométrie affine admettant Ω un point fixe d'après le théorème (4.1.2.7) alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π tel que $H_{\Omega,\frac{1}{k}} \circ f = Rot_{\Omega,\theta}$ donc $H_{\Omega,\frac{1}{k}} \circ Rot_{\Omega,\theta} = f$.
Enfin $H_{\Omega,\frac{1}{k}}$ et $Rot_{\Omega,\theta}$ sont commutent. 2)Pour $k = 1$ alors f est une isométrie alors en deux cas
a)Si f admettant un point fixe alors elle est rotation.
b) si non alors f est une translation affine. ■

Le cercle dans le plan

Le plan affine $\mathcal{R}^2$ orienté muni repéré orthonormé (r.o.n.d) $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 4.1.2.13. ***Le cercle***
Soient Ω un point fixe de $\mathcal{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+$.
On appelle cercle de centre Ω et de rayon R et on note $C(\Omega, R)$ sous ensemble de $\mathcal{R}^2$ défini par

$$C(\Omega, R) = \{M \in \mathcal{R}^2 \ / \ \Omega M = R\}.$$

Remarques 4.1.2.1. *Avec les notations précédentes*
1)Pour tout $(\Omega, R) \in \mathcal{R}^2 \times \mathbb{R}_+ : C(\Omega, R) \neq \varnothing$
2)Si $R = 0$ alors $C(\Omega, R) = \Omega$
3)On a pour tout $\Omega, \Omega' \in \mathcal{R}^2$ et $R, R' \in \mathbb{R}_+$
$C(\Omega, R) = C(\Omega', R') \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega = \Omega' \\ R = R' \end{cases}$
Ainsi un cercle défini de manière unique son centre et son rayon.

Proposition 4.1.2.12. ***E.C d'un cercle***
Soient $\Omega = (a, b) \in \mathcal{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+$ le cercle $C(\Omega, R)$ admet E.C

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Autrement dit $C(\Omega, R) = \{M = (x, y) \in \mathcal{R}^2 \ / \ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}$.

Proposition 4.1.2.13. *Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. L'équation cartésienne $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma = 0$ représentée :*
1)Le cercle de centre $\Omega = (-\alpha, -\beta)$ et de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ si $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma \geqslant 0$
2) $\varnothing$ sinon.

Preuve .

$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma = 0 \Leftrightarrow (x+\alpha)^2+(y+\beta)^2-\alpha^2-\beta^2+\gamma = 0 \Leftrightarrow (x+\alpha)^2+(y+\beta)^2 = \alpha^2\beta^2-\gamma$$

alors
1) Si $\alpha^2\beta^2 - \gamma \geqslant 0$ E.C de le cercle de centre $\Omega = (-\alpha, -\beta)$ et de rayon $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$.
2) sinon $\varnothing$. ∎

Proposition 4.1.2.14. ***Représentation paramétrique d'un cercle***
Soient $\Omega = (a, b) \in \mathcal{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+$ le cercle $C(\Omega, R)$ admet la R.P : $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}$
avec $t \in \mathbb{R}$ ou en particulier $t \in [0, 2\pi]$.

Proposition 4.1.2.15. ***Tangente d'un cercle***
Soient $\Omega = (a, b) \in \mathcal{R}^2$ et $R \in \mathbb{R}_+$ le cercle $C(\Omega, R)$ admet en point M une tangente (T) et on a $(M\Omega) \perp T$.

Preuve . On a la R.P $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases}$
de $C(\Omega, R)$. alors le cercle $C(\Omega, R)$ admet en toute point M paramétré t une tangente T dirigée par le vecteur $V(t)$ tel que

$$V(t) = \frac{d\Omega M}{dt} = \begin{vmatrix} -R\sin t & R\cos t \end{vmatrix}$$

Comme $\Omega M.V(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix} = -R^2\cos t\sin t + R^2\cos t\sin t = 0$
alors $\Omega M \perp V(t)$. ∎

Proposition 4.1.2.16. ***E.C de la tangente d'un cercle***
Soient C un cercle d'E.C $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ et $M_0 = (x_0, y_0)$. La tangente en M_0 à C a pour E.C :

$$x(x_0 + \alpha) + y(y_0 + \beta) + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0.$$

Preuve . Le cercle C admet pour E.C :$(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$ admet pour R.P $x = -\alpha + R\cos t$, $y = -\beta + R\sin t$
avec $t \in \mathbb{R}$ en notant $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ (on suppose que $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma > 0$.)
Pour $M_0(t_0) \in C$ la tangente en M_0 à C admet pour E.C :
Soit $M = (x, y) \in \mathcal{R}^2$ alors si $M \in T \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_0}//V(t) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -R\sin t \\ y - y_0 & R\cos t \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow (x - x_0)R\cos t + (y - y_0)R\sin t = 0$.
En remplaçant $R\cos t$ par $x_0 + \alpha$ et $R\sin t$ par $y_0 + \beta$
alors

$$(x - x_0)(x_0 + \alpha) + (y - y_0)(y_0 + \beta) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x_0 + \alpha) + y(y_0 + \beta) - x_0(x_0 + \alpha) - y_0(y_0 + \beta) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x_0 + \alpha) + y(y_0 + \beta) - x_0^2 - y_0^2 - \alpha x_0 - \beta y_0 = 0$$

mais $M_0 \in C$ alors

$$-x_0^2 - y_0^2 = 2\alpha x_0 + 2\beta y_0 + \gamma.$$

Donc

$$x(x_0 + \alpha) + y(y_0 + \beta) - x_0^2 - y_0^2 - \alpha x_0 - \beta y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x_0+\alpha)+y(y_0+\beta)+2\alpha x_0+2\beta y_0+\gamma-\alpha x_0-\beta y_0=0$$
$$\Leftrightarrow x(x_0+\alpha)+y(y_0+\beta)+\alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0.$$

■

4.2 Géométrie affine euclidienne dans l'espace de dimension 3

4.2.1 Géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^3$

Produit scalaire canonique et l'orthogonalité dans $\mathbb{R}^3$

Définition 4.2.1.1. ***Produit scalaire canonique.***
On appelle produit scalaire canonique ou usuel sur $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} <,>: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto <u,v> \end{aligned}$$

tels que si $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ on a $<u,v>=xx'+yy'+zz'$.
Par fois on note $u.v$ au lieu de $<u,v>$.

Remarque 4.2.1.1. *Deux vecteurs u,v sont dits vecteurs orthogonaux si son produit scalaire est nul, on note $u\perp v$.*

Définition 4.2.1.2. *On appelle la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$ la norme associée du produit scalaire canonique c'est à dire pour tout $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ associé $\| u \|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.*

Remarque 4.2.1.2. *Un vecteur est dit vecteur unitaire si sa norme égale a 1.*

Définition 4.2.1.3. *On appelle la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^3$ la distance associée de la norme scalaire canonique c'est a dire pour tous $u=(x,y,z), v=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ associé $d(u,v)=\| u-v \|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.*

Produit mixte,produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition 4.2.1.4. ***Produit mixte***
Soient u,v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ le produit mixte des u,v,w note $[u,v,w]$ est défini par

$$[u,v,w]=\det(u,v,w).$$

Remarques 4.2.1.1. *L'application de $(\mathbb{R}^3)^3\to\mathbb{R}$ tel que $(u,v,w)\mapsto[u,v,w]$ est une forme trilinéaire alternée.*
C'est à dire pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ u,u',v et w des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ on a
1)$[u,v,w]=0\Leftrightarrow(u,v,w)$ *sont lies.*
2)$[\alpha u+u',v,w]=\alpha[u,v,w]+[u',v,w]$.
3) $[u,v,w]=[v,w,u]=[w,u,v]$.
4)$[u,w,v]=[w,v,u]=[v,u,w]=-[u,v,w]$.

Définition 4.2.1.5. ***Produit vectoriel.***
Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ le produit vectoriel de u, v note $u \wedge v$ ou $(u \times v)$ est défini par

$$(u \wedge v).w = [u, v, w].$$

Remarques 4.2.1.2. *L'application de $(\mathbb{R}^3)^2 \to \mathbb{R}^3$ tel que $(u, v) \mapsto u \times v$ est bilinéaire alternée.*
C'est à dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ u, u' et v des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ on a :
1)$u \times v = -v \times u$.
2)$(\alpha u + u') \times v = \alpha u \times v + u' \times v$.
3)$u \times v = 0 \Leftrightarrow (u, v)$ sont lies.
4)$(u \times v).u = (u \times v).v = 0$.
5) Si (u, v) libre alors $\{u, v, u \times v\}$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$.

Soient $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base o.n d de $\mathbb{R}^3$ et u, v de vecteurs $\mathbb{R}^3$ des composantes dans la base B sont respectivement (x, y, z) et (x', y', z') alors :

$$u \times v = \begin{vmatrix} x & x' & \vec{i} \\ y & y' & \vec{j} \\ z & z' & \vec{k} \end{vmatrix} = (yz' - y'z)\vec{i} + (zx' - z'x)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}.$$

Donc $u \times v = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)$.

Remarque 4.2.1.3. *Si $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base o.n d de $\mathbb{R}^3$ alors $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$,$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.*

Proposition 4.2.1.1. ***Identité de Lagrange***
Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors on a

$$\| u \times v \| + (u.v)^2 = \| u \|^2 \| v \|^2 .$$

Remarques 4.2.1.3. *Si u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors on a*
1)$\| u \times v \|$ est égale à l'aire du parallélogramme construit sur u, v.
2)$|[u, v, w]|$ est égale volume du parallélogramme construit sur u, v, w.

4.2.2 Endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$

Définition 4.2.2.1. ***Endomorphisme orthogonal***
On appelle un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ conserve le produit scalaire c'est à dire

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^3 \quad f(u).f(v) = u.v\,.$$

Remarque 4.2.2.1. *Toute application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conservant le produit scalaire est linéaire car pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tous $u, v \in \mathbb{R}^3$ on a*

$$\| f(\lambda u + v) - \lambda f(u) - f(v) \| = \| (\lambda u - v) - \lambda u - v \| = 0.$$

On note $O(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 4.2.2.2.
$$f \in O(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^3 \quad \| f(u) \| = \| u \| .$$

Proposition 4.2.2.1. *Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, les trois propriétés sont équivalentes :*
1) f orthogonal.
2) Pour toute b.o.n.B de $\mathbb{R}^3$, $f(B)$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^3$.
3) Il existe une b.o.n.de $\mathbb{R}^3$, telle que $f(B)$ soit une b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 4.2.2.2. *L'ensemble $O(\mathbb{R}^3)$ est un groupe pour la loi de composition des applications, appelé le groupe orthogonale de $\mathbb{R}^3$,*

Preuve . Exercice. ■

Définition 4.2.2.2. ***Matrice orthogonale***
Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

On note $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Proposition 4.2.2.3. *Pour tout endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$, les trois propriétés sont équivalentes :*
1) $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.
2) $M.M^t = M^t.M = I_{\mathbb{R}^3}$.
3) Pour toute b.o.n $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^3$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par M dans la base $\mathbf{B}$ est orthogonal.
4) Il existe une b.o.n $\mathbf{B}$ de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle l'endomorphisme représenté par M est orthogonal.

Proposition 4.2.2.4. *Soit $(.)$ la multiplication des matrices alors $(\mathcal{O}_3(\mathbb{R}), .)$ est un groupe.*

Preuve . 1)$I_{\mathbb{R}^3}.I_{\mathbb{R}^3}^t = I_{\mathbb{R}^3}^t I_{\mathbb{R}^3} = I_{\mathbb{R}^3}$ alors $I_{\mathbb{R}^3} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et on a $M.I_{\mathbb{R}^3} = I_{\mathbb{R}^3}.M = M$.
2) Pour toute $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ on a $M.M^t = M^t.M = I_{\mathbb{R}^3}$. donc M est inversible et $M^{-1} = M^t$. De plus $(M^{-1})^t = (M^t)^{-1}$.
3)Pour toutes $M, N \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ on a $(M.N).(M.N)^t = M.N.N^t.M^t = M.I_{\mathbb{R}^3}.M^t = M.M^t = I_{\mathbb{R}^3}$. ■

Remarque 4.2.2.3. *Pour toute de $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ on a $M.M^t = I_{\mathbb{R}^3}$. alors* $\det M.M^t = 1 \Leftrightarrow \det M. \det M^t = 1 \Leftrightarrow (\det M)^2 = 1$ *donc* $\det M = \pm 1$

Soit $f \in O(\mathbb{R}^3)$ on dit f est un endomorphisme orthogonal direct (resp.indirect) si seulement si $\det(f) = 1$(resp. -1).
L'ensemble des endomorphismes orthogonaux directs noté $SO(\mathbb{R}^3)$ est un sous groupe de $O(\mathbb{R}^3)$ appelé **groupe special orthogonal.**
Soit $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ on dit M est une matrice orthogonale droite (resp.gauche) si seulement si $\det(M) = 1$(resp. -1).
L'ensemble des matrices orthogonales droite noté $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ appelé **groupe special orthogonal.**

Définition 4.2.2.3. ***Rotation dans*** $\mathbb{R}^3$
Soient $u \in \mathbb{R}^3$ *un vecteur unitaire est* $F = \mathbb{R}u$ *l'axe dirigé et orienté par* u *et* $\theta \in \mathbb{R}$.
On appelle rotation d'axe F*et d'angle* θ *et on note* $R_{F,\theta}$, *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans une base b.o.n.d* (u, v, w) *commençant par* u *est*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On appelle retournement (ou demi tour) de $\mathbf{R}^3$ *toute rotation d'angle* $\pi[2\pi]$.

Remarques 4.2.2.1. *1)* $R_{F,\theta}$,*dont la matrice dans la base b.o.n.d* (v, u, w) *est*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

et 2)dont la matrice dans la base base b.o.n.d (v, w, u) *est*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $\det R_{F,\theta} = \det M = 1$.
4)$R_{F,\theta}$ *est un endomorphisme orthogonale direct.*

Définition 4.2.2.4. ***Réflexion dans*** $\mathbb{R}^3$
Soient P *un plan vectoriel de* $\mathbb{R}^3$.*On appelle réflexion ou symétrie orthogonale par rapport à* P *et on note* S_P *la symétrie par rapport à* P *parallèlement à* $P^{\perp}$.

Théorème 4.2.2.1. ***Classification des endomorphismes orthogonaux de*** $\mathbb{R}^3$
Soit f *un endomorphisme orthogonale de* $\mathbb{R}^3$ *avec* $f \neq Id_{\mathbb{R}^3}$ *alors*
1) Si $\det f = 1$ *alors est une rotation.*
2)Si $\det f = 1$ *alors :*
• f *est une réflexion de* $\mathbb{R}^3$,
• *ou bien* f *est la composée (commutative) d'une rotation de* $\mathbb{R}^3$, *réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de cette rotation.*

4.2.3 Géométrie affine euclidienne dans l'espace de dimension 3.

Définition 4.2.3.1. *On appelle espace affine euclidien de dimension 3 toute couple* $(\mathcal{R}^3, .)$ *ou* $\mathcal{R}^3$ *est l'espace affine réel, et . le produit scalaire usuel sur la direction* $\mathbb{R}^3$.
Au lieu de $(\mathcal{R}^3, .)$*on note souvent* $\mathcal{R}^3$.

Remarque 4.2.3.1. *On appelle repéré orthonormé direct en abrégé r.o.n.d tout triplet* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *de* $\mathcal{R}^3$ *tel que* O *un point de* $\mathcal{R}^3$. *et* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ *est une base orthonormal directe de* $\mathbb{R}^3$.

Définition 4.2.3.2. ***Distance entre deux points.***
L'espace $\mathcal{R}^3$ muni r.o.n .d $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la distance entre de points M, M' de $\mathcal{R}^2$ est la quantité positive
$d(M,N) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$
tels que $M = (x,y,z)$ et $N = (x', y', z)$.

Exemple 4.2.3.1. *Si $M = (1,3,1)$ et $N = (3,1,3)$ alors*
$d(M,N) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$

Définition 4.2.3.3. ***Angle entre de deux droites.***
Soient D, D' deux droites affines de $\mathcal{R}^3$ diriges respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ on appelle angle de D et D' et on note $(\widehat{D, D'})$ le réel défini modulo π par :
$(\widehat{D, D'}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u'}})[\pi].$

Définition 4.2.3.4. ***Droites orthogonales***
Soient D, D' deux droites affines de $\mathcal{R}^3$ diriges respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont dites orthogonales si $\vec{u} \perp \vec{u'}$ c'est à dire $\vec{u}.\vec{u'} = 0$

Remarque 4.2.3.2. *Soient D, D' deux droites affines de $\mathcal{R}^3$ sont dites orthogonales si $(\widehat{D, D'}) = \dfrac{\pi}{2}$.*

Les plans affines

Soit l'espace affine euclidienne $\mathcal{R}^3$ muni r.o.n $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Comme le plan affine est 'un hyperplan de $\mathcal{R}^3$ alors il existe une forme affine non nulle $f : \mathcal{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $(\mathcal{P}) = \{M = (x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \,/\, f(M) = 0\}$ et $f(M) = 0$ donc il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ avec $ax + by + cz + d = 0$

Définition 4.2.3.5. ***Équation cartésienne d'un plan.***
L'équation $ax + by + cz + d = 0$ est appelée équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$.

Vecteur orthogonal à un plan

Définition 4.2.3.6. ***vecteur normal***
Soient a, b, c, d des réels tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ le plan affine $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors le vecteurs $\vec{n} = (a,b,c)$ est un vecteur normal (ou orthogonal) à (P). Le vecteur unitaire $\dfrac{\vec{n}}{\| \vec{n} \|}$ est appelé le normal unitaire de (D).

Définition 4.2.3.7. ***Angle entre de deux plans.***
Soient $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{P}')$ deux droites affines de $\mathcal{R}^3$ de vecteurs normaux respectivement $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ on appelle angle entre $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ on note $(\widehat{D, D'})$ le réel défini modulo π par :
$((\widehat{\mathcal{P}), (\mathcal{P}'})) = (\widehat{\vec{n}, \vec{n'}})[\pi].$

Proposition 4.2.3.1. ***E.C d'un plan passant par un point connu et de vecteur normal connu.*** *Soient $A = (x_0, y_0, z_0)$ un point et $u = (a,b,c)$ un vecteur non nul alors le plan affine (P) de normal u et passant par A est d'équation cartésienne*

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0.$$

Preuve . Exercice. ∎

Direction d'un plan affine

Définition 4.2.3.8. ***La direction d'un plan affine.***
Soient a, b, c des réels tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ le plan affine $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors le plan d'E.C $ax + by + cz = 0$ est un plan dirigé (P).

Proposition 4.2.3.2. ***Les vecteurs de direction d'un plan affine.***
Soit $(\mathcal{P})$ un plan affine d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ alors les vecteurs $u = (-b, a, 0)$ et $v = (-c, 0, a)$ sont des vecteurs de direction de $(\mathcal{P})$.

Proposition 4.2.3.3. ***E.C d'un plan passant par un point connu et de vecteurs de direction connus .*** *Soient $A = (x_0, y_0, z_0)$ un point et $u = (a, b, c)$ $v = (a', b', c')$ et deux vecteurs non lies alors le plan affine (P) de direction u, v et passant par A est d'équation cartésienne*

$$(bc' - b'c)x + (a'c - ac')y + (ab' - a'b)z - (bc' - b'c)x_0 - (a'c - ac')y_0 - (ab' - a'b)z_0 = 0.$$

Preuve . Exercice. ∎

Droites affines dans $\mathcal{R}^3$

Proposition 4.2.3.4. ***Intersection deux plans affines dans l'espace $\mathcal{R}^3$*** *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans affines différents dans l'espace $\mathcal{R}^3$ d.E.C respectivement $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$*
alors l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est
- *$\varnothing$ si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles*
- *une droite affine d'E.C*

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Proposition 4.2.3.5. ***E.C d'une droite affine de $\mathcal{R}^3$ passant par un point connu et de direction connu***
Soient $A = (x_0, y_0, z_0)$ un point et $u = (a, b, c)$ non nul,alors la droite $(\mathcal{D})$ passant par A et direction u est de paramétrisation

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$$

donc et d'E.C

$$\begin{cases} b(x - x_0) = a(y - y_0) \\ c(x - x_0) = a(z - z_0) \end{cases}$$

Preuve . Soit $M = (x, y, z)$ un point de $\mathcal{R}^3$ alors $M \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$
$u \Leftrightarrow \exists t \in t \in \mathbb{R}^\star \ /\overrightarrow{AM} = tu$ donc $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ bt \\ ct \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases}$$

et on déduit $t = \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$
alors on obtient

$$\begin{cases} b(x - x_0) = a(y - y_0) \\ c(x - x_0) = a(z - z_0) \end{cases}$$

■

Projection orthogonale d'un point sur une droite

Proposition 4.2.3.6. *Soit $(\mathcal{P})$ un plan affine d'E.C $ax + by + cz + d = 0$ et $M(x, y, z)$ un point quelconque de $\mathcal{R}^3$, notons $M' = (X, Y, Z)$ la projection orthogonale de M sur $(\mathcal{P})$*

est donne par

$$\begin{cases} X = \dfrac{(b^2 + c^2)x - aby - acz - ad}{a^2 + b^2 + c^2} \\ Y = \dfrac{(a^2 + c^2)y - abx - bcz - bd}{a^2 + b^2 + c^2} \\ Z = \dfrac{(a^2 + b^2)z - acx - bcy - cd}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} .$$

Preuve . Exercice. ■

Corollaire 4.2.3.1. *La projection orthogonale sur le plan $(\mathcal{P})$ d'E.C $ax + by + cz + d = 0$ est définie par* $pr : \begin{cases} \mathcal{R}^3 \to (\mathcal{P}) \\ M(x, y, z) \mapsto pr(M) = M'(x', y', z') \end{cases}$

tels que $\begin{cases} x' = \dfrac{(b^2 + c^2)x - aby - acz - ad}{a^2 + b^2 + c^2} \\ y' = \dfrac{(a^2 + c^2)y - abx - bcz - bd}{a^2 + b^2 + c^2} \\ z' = \dfrac{(a^2 + b^2)z - acx - bcy - cd}{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} .$

Corollaire 4.2.3.2. ***distance entre un point et un plan***
La distance entre un point $A = (x_0, y_0, z_0)$ et un plan affine $(\mathcal{P})$ d'E.C $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par

$$d(A, (\mathcal{P})) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Preuve . Soit $A' = (x, y, z)$ la projection orthogonale de A sur $(\mathcal{P})$ soit $n = (a, b, c)$ un vecteur normal de $(\mathcal{P})$
on $\overrightarrow{OA}.n = ax_0 + by_0 + cz_0$ et $\overrightarrow{OA'}.n = ax + by + cz = -d$ d'une part.
Et d'autre part $\overrightarrow{AA'}$
$n \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\star \;/\; \overrightarrow{AA'} = \lambda n$ alors $\overrightarrow{AA'}.n = \lambda \parallel n \parallel^2$ et on a $\overrightarrow{AA'}.n = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA'}).n = \overrightarrow{AO}.n + \overrightarrow{OA'}.n = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$ alors $\lambda = \dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{\parallel n \parallel^2}$
Comme le vecteur $\dfrac{n}{\parallel n \parallel}$ est unitaire alors $\overrightarrow{AA'} = \parallel \overrightarrow{AA'} \parallel \dfrac{n}{\parallel n \parallel}$ on déduit $\parallel \overrightarrow{AA'} \parallel = |\lambda| \parallel n \parallel = \dfrac{|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d|}{\parallel n \parallel}$ ■

Isométries affines de l'espace de dimension 3.

Définition 4.2.3.9. ***Isométrie affine***
On appelle isométrie affine de $\mathcal{R}^3$ toute application affine $f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ conservant la distance c'est à dire

$$\forall A, B \in \mathcal{R}^3, \qquad d(f(A), f(B)) = d(A, B)$$

Proposition 4.2.3.7. *Soit $f : \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ une application affine de partie linéaire L. Alors f est une isométrie si seulement si L est une isométrie.*

Proposition 4.2.3.8. ***Groupe d'isométries***
L'ensemble d'isométries est un groupe par la loi de composition noté $\mathcal{O}_3(\mathcal{R})$.

Définition 4.2.3.10. *Soit $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ une isométrie affine de partie linéaire L alors :*
1) On dit que f est une isométrie affine directe (ou déplacement) si seulement si $\det(L) = 1$.
2) On dit que f est une isométrie affine indirecte (ou antidéplacement) si seulement si $\det(L) = -1$.

Proposition 4.2.3.9. ***Groupe de déplacements***
L'ensemble de déplacements est un sous groupe du groupe d'isométries et noté $\mathcal{SO}_3(\mathcal{R})$.

Définition 4.2.3.11. ***Rotation***
Soient $\mathcal{D}$ une droite affine de direction $\vec{n}$ de $\mathcal{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle rotation d'axe $(\mathcal{D}, \vec{n})$ et d'angle θ note $Rot_{\theta,(\mathcal{D},\vec{n})}$ l'isométrie affine lissant ($\mathcal{D}$ fixe et de partie linéaire rotation vectoriel $Rot_{\theta,\vec{n}}$. C'est à dire

$$Rot_{\theta,(\mathcal{D},\vec{n})}(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \quad et \quad \overrightarrow{AM'} = Rot_{\theta,\vec{n}}(AM)$$

pour tout $M \in \mathcal{R}^3$ avec $M' = Rot_{\theta,(\mathcal{D},\vec{n})}(M)$.

Propriétés 4.2.3.1. *Avec les notations précédentes*
1)$Rot_{\theta,(\mathcal{D},\vec{n})}$ est bijective et on a $Rot^{-1}_{\theta,(\mathcal{D},\vec{n})} = Rot_{-\theta,(\mathcal{D},\vec{n})}$.
2)$Rot_{\theta,(\mathcal{D},\vec{n})}$ est une isométrie affine.
3)$Rot_{2k\pi,(\mathcal{D},\vec{n})} = Id_{\mathcal{R}^3}$.
4)$Rot_{\theta,(\mathcal{D},\vec{n})} \circ Rot_{\theta',(\mathcal{D},\vec{n})} = Rot_{\theta+\theta',(\mathcal{D},\vec{n})}$.

Théorème 4.2.3.1. ***Classification des déplacements de $\mathcal{R}^3$***
Les déplacements de $\mathcal{R}^3$ sont les translations ou les rotations.

4.3 Exercices

Exercice 1

Prouver la proposition 4.1.1.1

Exercice 2

Prouver la proposition 4.1.1.2

Exercice 3

Prouver la proposition 4.1.1.2

Exercice 4

Prouver la proposition 4.1.2.7

Exercice 5

Prouver la proposition 4.1.2.1

Exercice 6

Prouver la proposition 4.1.2.2

Exercice 7

Prouver la proposition 4.1.2.3

Exercice 8

Prouver la proposition 4.1.2.5

Exercice 9

Prouver la proposition 4.1.2.6

Exercice 10

Prouver la proposition 4.1.2.7

Exercice 11

Prouver la proposition 4.2.2.2

Exercice 12

Prouver la proposition 4.2.3.1

Exercice 13

Prouver la proposition 4.2.3.3

Exercice 14

Prouver la proposition 4.2.3.6

Exercice 15

Montrer qu'une équation cartésienne de la droite affine de $\mathcal{R}^2$ passant par les deux points $A = (x_0, y_0)$ et $B = (x_1, y_1)$ est donnée par

$$\det \begin{pmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 16

Considérons deux droites affines de $\mathcal{R}^2$ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d.E.C respectivement $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ montrer que
1) Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si,seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ donc si,et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$$

2)Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles elles se coupent en unique point.

Exercice 17

Montrer qu'une équation cartésienne du plan affine de $\mathcal{R}^3$ passant par les trois points $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$ et $B = (x_2, y_2, z_2)$ est donnée par

$$\det \begin{pmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 18

Déterminer la nature de l'application dans $\mathcal{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = 2 - y \\ z' = z + 2 \end{cases}$$

Exercice 19

Une dilatation est une application affine dont la partie linéaire est $\alpha.Id_{\mathcal{E}}$, avec le réel α est appelé rapport de la dilatation.
1)Montrer qu'une dilatation est toujours bijective
2)Montrer qu'une dilatation de rapport α soit une translation soit une homothétie.

5 Solutions d'exercices

5.1 Exercices de chapitre 1

Exercice 1

1)Pour $0 \leqslant t \leqslant T$ on considère $A = \gamma(0) = (b, d)$ et $B = \gamma(T) = (aT + b, cT + d)$

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-b}{a} \\ t = \dfrac{y-d}{c} \end{cases}$$

alors $\dfrac{x-b}{a} = \dfrac{y-d}{c}$ donc $ay - ad = cx - cb$ avec $0 \leqslant x \leqslant aT + b$ et $0 \leqslant y \leqslant cT + d$
d'où γ est un segment $[A, B]$ de la droite affine d'E.C $cx - ay - cb + ad = 0$.

2)On a $\gamma'(t) = (a, c)$ donc $\parallel \gamma'(t) \parallel = \sqrt{a^2 + c^2}$
alors $L(A, B) = \int_0^T \parallel \gamma'(t) \parallel dt = \int_0^T \sqrt{a^2 + c^2} dt = T\sqrt{a^2 + c^2}$

Exercice 2

1) Le cercle $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2})$.
On a $\alpha'(t) = \left(\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}, \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \right)$ alors $\parallel \alpha'(t) \parallel = \dfrac{2}{1+t^2}$
$L(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \parallel \gamma'(t) \parallel dt = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{+r} \dfrac{2}{1+t^2} dt = \lim_{r \to +\infty} (4 \arctan t|_0^r) = \lim_{r \to +\infty} (4 \arctan r) = 4 \times \dfrac{\pi}{2} = 2\pi$.
2)Arche de la cycloïde $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$.
$\beta'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ donc $\parallel \beta'(t) \parallel = 2 \sin \dfrac{t}{2}$
d'où $L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \parallel \beta'(t) \parallel dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \dfrac{t}{2} dt = -4 \cos \dfrac{t}{2} |_0^{2\pi} = 8$
3) Parabole semi-cubique $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (t^2, t^3)$.

$\gamma'(t) = (2t, 3t^2)$ alors $\| \gamma'(t) \| = t\sqrt{9t^2+4}$
d'où $L(\gamma) = \int_0^a \| \gamma'(t) \| \, dt = \frac{1}{27}(9t^2+4)^{\frac{3}{2}}|_0^a = \frac{1}{27}(9a^2+4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}$.

Exercice 3

1)a) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto (t, f(t))$.
b)$\gamma'(t) = (1, f'(t))$ donc $\| \gamma'(t) \| = \sqrt{1+f'^2(t)}$ alors

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(t)}.dt$$

2)Le domaine de définition de la fonction $\arccos x : [-1,1] \to [0,\pi]$ et $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3)On a $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ donc $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \qquad t \mapsto \left(t, \sqrt{1-t^2}\right)$.
Alors $\| \gamma'(t) \| = \sqrt{1+f'^2(t)} = \sqrt{1+\dfrac{t^2}{1-t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
D'où $L(\gamma) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}.dt = -\arccos t|_a^b = \arccos b - \arccos a > 0$.

Exercice 4

1) On pose $\varphi(s) = t$ alors $\forall s \in [c,d]$ on a $\alpha(s) = \gamma \circ \varphi(s) = \gamma(\varphi(s)) = \gamma(t)$ d'une part.
Et d'autre part $\forall t \in [a,b]$ on a $\gamma(t)$
Donc les courbes paramétrées γ et α ont la même image dans $\mathbb{R}^2$.
2)$L(\gamma, [a,b]) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| .dt$ d'une part. Et d'autre part $L(\alpha, [c,d]) = \int_c^d \| \alpha'(t) \| .dt$ mais on a $\alpha(s) = \gamma \circ \varphi(s)$ donc $\alpha'(s) = \varphi'(s)\gamma' \circ \varphi(s)$.
Si $\varphi'(s) > 0$ d'abord on a $dt = \varphi'(s).ds$, $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$.
On déduire
$L(\alpha, [c,d]) = \int_c^d \| \alpha'(s) \| .ds = \int_c^d \| \varphi'(s).\gamma' \circ \varphi(s) \| .ds = \int_c^d |\varphi'(s)|. \| \gamma' \circ \varphi(s) \| .ds$

$= \int_c^d \| \gamma' \circ \varphi(s) \| .\varphi'(s)ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \| \gamma'(t) \| .dt = L(\gamma, [a,b])$.

Si $\varphi'(s) < 0$ d'abord on a $dt = \varphi'(s).ds$, $\varphi(c) = b$ et $\varphi(d) = a$.
On déduire
$L(\alpha, [c,d]) = \int_c^d \| \alpha'(s) \| .ds = \int_c^d \| \varphi'(s).\gamma' \circ \varphi(s) \| .ds = \int_c^d |\varphi'(s)|. \| \gamma' \circ \varphi(s) \| .ds$

$= -\int_c^d \| \gamma' \circ \varphi(s) \| .\varphi'(s)ds = -\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} \| \gamma'(t) \| .dt = -\int_b^a \| \varphi'(t) \| .dt = \int_a^b \| \gamma'(t) \| .dt$

$= L(\gamma, [a,b])$.

Exercice 6

Soit la courbe gauche définie par

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \alpha(t) = \frac{1}{2}(\cosh t, t, \sinh t)$$

1)Déterminer le repère de Frenet de la courbe α.
D'abord $\alpha'(t) = \frac{1}{2}(\sinh t, 1, \cosh t)$ donc $\parallel \alpha'(t) \parallel = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t$,
alors $\tau(t) = \frac{\sqrt{2}}{2\cosh t}(\sinh t, 1, \cosh t)$.
Et deuxièmement
$b(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\parallel \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \parallel}$
$= \frac{1}{\parallel \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \parallel}(\frac{1}{4}\sinh t, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\cosh t)$
$= \frac{2\sqrt{2}}{\cosh t}(\frac{1}{4}\sinh t, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}\cosh t)$
$= \frac{\sqrt{2}}{2\cosh t}(\sinh t, 1, -\cosh t)$
$\eta(t) = b(t) \wedge \tau(t) = \frac{1}{\cosh t}(1, -\sinh t, 0)$
2)$\kappa(\alpha(t)) = \frac{\parallel \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \parallel}{\parallel \alpha'(t) \parallel^3}$
$= \frac{\cosh t}{2\sqrt{2}} . \frac{2\sqrt{2}}{\cosh^3 t}$
$= \frac{1}{\cosh^2 t}$.
$\theta(\alpha(t)) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\parallel \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \parallel^2}$
$= \frac{-1}{8} \frac{8}{\cosh^2 t}$
$= \frac{-1}{\cosh^2 t}$.
3)$L(\alpha, [0, \ln 2]) = \int_0^{\ln 2} \parallel \alpha'(t) \parallel dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\ln 2} \cosh t$
$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t|_0^{\ln 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\ln 2) = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

Exercice 7

.
Soit $\gamma I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par son abscisse curviligne tel que pour tout $t \in I$, $\kappa(\gamma(t)) = 0$
On sait que $\gamma''(t) = \kappa(P)\eta(t)$. alors $\gamma''(t) = 0 \Leftrightarrow \gamma'(t) = a \Leftrightarrow \gamma(t) = at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

1)Si $I = \mathbb{R}$ alors γ est un segment de droite affine.
2) Si $I = [A, B]$ alors γ est une droite affine.

Exercice 8

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ par $\gamma(t) = (\exp t, \exp -t, t\sqrt{2})$

1)$\gamma'(t) = (\exp t, -\exp -t, \sqrt{2}) \neq (0, 0, 0)$ donc γ est régulière.
2)$\gamma''(t) = (\exp t, \exp -t, 0) \neq (0, 0, 0)$ donc γ est bi-régulière.

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \exp t & -\exp -t & \sqrt{2} \\ \exp t & \exp -t & 0 \end{pmatrix}$$

alors $\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (-\sqrt{2}\exp -t, \sqrt{2}\exp t, 2)$

$$\kappa(\gamma) = \frac{\parallel \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \parallel}{\parallel \gamma'(t) \parallel^3} = \frac{\sqrt{2}}{2 + \exp 2t + \exp -2t} = \frac{\sqrt{2}}{4\cosh^2 t}.$$

3) La courbe γ est tri-régulière puisque $\gamma'''(t) = (\exp t, -\exp t, 0) \neq (0, 0, 0)$.

$$\theta(\gamma) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\parallel \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \parallel^2} = \frac{\begin{vmatrix} \exp t & \exp t & \exp t \\ \exp -t & -\exp -t & \exp -t \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{8\cosh^2 t} = \frac{2\sqrt{2}}{8\cosh^2 t} = \frac{-\sqrt{2}}{4\cosh^2 t}.$$

4) $\dfrac{\theta}{\kappa} = -1.$

Exercice 9

Soient a, b deux nombres réels.On considère la courbe paramétrée

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$$

1)a)$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$ donc γ est régulière si $(a, b) \neq (0, 0)$

2)Soit s l'abscisse curviligne : $s(t) = \int_0^t \parallel \gamma'(t) \parallel dt = \sqrt{a^2 + b^2}t$
On pose $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $t = \dfrac{s}{R}$
alors on a une nouvelle paramétrisation de $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad s \mapsto \left(a\cos\dfrac{s}{R}, a\sin\dfrac{s}{R}, b\dfrac{s}{R}\right)$
On sait que $\kappa(\gamma) = \parallel \gamma''(s) \parallel$
alors $\gamma'(s) = \left(\dfrac{-a}{R}\sin\dfrac{s}{R}, \dfrac{a}{R}\cos\dfrac{s}{R}, \dfrac{b}{R}\right)$ donc $\gamma''(s) = \left(\dfrac{-a}{R^2}\cos\dfrac{s}{R}, \dfrac{-a}{R^2}\sin\dfrac{s}{R}, 0\right)$
alors $\kappa = \dfrac{|a|}{R^2} = \dfrac{|a|}{a^2 + b^2}.$

3)$\gamma''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0)$ donc γ est bi-régulière si $a \neq 0$.

4)On sait que $b'(s) = -\theta(\gamma(s))\eta(s)$.

$\eta(s) = \dfrac{1}{\parallel \gamma''(s) \parallel}\gamma''(s) = \dfrac{R^2}{|a|}\left(\dfrac{-a}{R^2}\cos\dfrac{s}{R}, \dfrac{-a}{R^2}\sin\dfrac{s}{R}, 0\right)$
$= \dfrac{-a}{|a|}\left(\cos\dfrac{s}{R}, \sin\dfrac{s}{R}, 0\right)$

$$b(s) = \tau(t) \wedge \eta(t) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \\ \dfrac{-a}{R}\sin\dfrac{s}{R} & \dfrac{a}{R}\cos\dfrac{s}{R} & \dfrac{b}{R} \\ \\ \dfrac{-a}{|a|}\cos\dfrac{s}{R} & \dfrac{-a}{|a|}\sin\dfrac{s}{R} & 0 \end{pmatrix}$$

alors $b(s) = \left(\dfrac{ab}{|a|R^2}\sin\dfrac{s}{R}, \dfrac{-ab}{|a|R^2}\cos\dfrac{s}{R}, \dfrac{|a|}{R}\right)$
donc $b'(s) = \dfrac{-b}{R^2}\left(\dfrac{-a}{|a|}\cos\dfrac{s}{R}, \dfrac{-a}{|a|}\sin\dfrac{s}{R}, 0\right)$.
Alors $\theta(\gamma(s)) = \dfrac{b}{R^2} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$.

Exercice 10

On considère la surface

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \mapsto (y\cos x, y\sin x, x)$$

On a $\dfrac{\partial X}{\partial x} = (-y\sin x, y\cos x, 1)$ et $\dfrac{\partial X}{\partial y} = (\cos x, \sin x, 0)$
alors on a les vecteurs $\dfrac{\partial X}{\partial x}(0,0) = (0,0,1)$ et $\dfrac{\partial X}{\partial y}(0,0) = (1,0,0)$ sont linéairement indépendants donc la surface X est régulière.

Exercice 11

On considère la surface

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (u, v) \mapsto ((1 - u\cos\frac{v}{2})\cos v, (1 - u\cos\frac{v}{2})\sin v, u\cos\frac{v}{2}).$$

$\dfrac{\partial X}{\partial x} = (-\sin\dfrac{v}{2}\cos v, -\sin\dfrac{v}{2}\sin v, \cos\dfrac{v}{2})$.
$\dfrac{\partial X}{\partial y} = (-\dfrac{1}{2}u\cos\dfrac{v}{2}\cos v - \sin v + u\sin\dfrac{v}{2}\sin v, -\dfrac{1}{2}u\cos\dfrac{v}{2}\sin v + \cos v - u\sin\dfrac{v}{2}\cos v)$.

Donc les vecteurs $\dfrac{\partial X}{\partial x}(0,0) = (0,0,1)$ et $\dfrac{\partial X}{\partial y}(0,0) = (0,1,0)$ sont linéairement indépendants alors la surface X est régulière.

Exercice 12

Soit la surface

$$X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (u, v, u^2 - v^2)$$

Soit la domaine $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u^2+v^2 = 1\}$ calculer $\mathbf{A}_X(D)$ $\mathbf{A}_X(D) = \int\int_D \| \dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} \|$ $dudv =$ d'abord on $\dfrac{\partial X}{\partial u} = (1,0,2u)$ et $\dfrac{\partial X}{\partial v} = (0,1,-2v)$
ensuite $\dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} = (-2u, 2v, 1)$ donc $\| \dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} \| = 4u^2 + 4v^2 + 1$
Enfin
$\mathbf{A}_X(D) = \int\int_D \sqrt{4u^2+4v^2+1} dudv$
On pose $u = r\cos\theta$ et $v = r\sin\theta$ alors $dudv = rdrd\theta$ et $0 \leqslant r \leqslant 1, \ \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$\mathbf{A}_X(D) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1}\, drd\theta = \int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\, dr \int_0^{2\pi} d\theta$

$= 2\pi | \dfrac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \dfrac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1).$

Exercice 13

Déterminer l'aire de la surface $\mathcal{S}$ définie par :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z \leqslant 1 \end{cases}$$

Soit la paramétrisation de

$$X :]-\pi, \pi[\times]-1,1[\to \mathbb{R}^3 \qquad (u,v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, u^2)$$

alors $\dfrac{\partial X}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 2u)$ et $\dfrac{\partial X}{\partial v} = (-u\sin v, u\cos v, 0)$
donc $\dfrac{\partial X}{\partial u}(0,0) = (1,0,0)$ et $\dfrac{\partial X}{\partial v}(0,0) = (0,1,0)$ sont linéairement indépendantes alors est régulière.
Comme $z = x^2 + y^2$ alors $0 \leqslant z \leqslant 1$ alors $D =]-\pi,\pi[\times[0,1]$ donc on a
$\mathbf{A}_S(D) = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \| \dfrac{\partial X}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial v} \| \, dudv$
$= \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} u\sqrt{4u^2+1} = 2\pi.\dfrac{1}{12}(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \dfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$
2)a)Comme Σ est une surface de revolution alors admet la paramétrisation suivante

$$X :]-\pi,\pi[\times]a,b[\to \mathbb{R}^3 \qquad (s,\theta) \mapsto (\rho(s)\cos\theta, \rho(s)\sin\theta, \varphi(s))$$

alors

$\dfrac{\partial X}{\partial s} = (\rho'(s)\cos\theta, \rho'(s)\sin\theta, \varphi'(s))$
et $\dfrac{\partial X}{\partial s} = (-\rho(s)\sin\theta, \rho(s)\cos\theta, 0)$

donc $\| \dfrac{\partial X}{\partial s} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial \theta} \| = |\rho(s)\sqrt{\varphi'^2(s) + \rho'^2(s)} = |\rho(s)| \parallel \gamma'(s) \parallel = \rho(s)$.
Alors
$\mathbf{A}_\Sigma(D) = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \| \dfrac{\partial X}{\partial s} \wedge \dfrac{\partial X}{\partial \theta} \| \, ds d\theta$
$= \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \rho(s) ds d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_a^b \rho(s) ds = 2\pi \int_a^b \rho(s) ds.$
b)La sphère unité $\mathbb{S}^2$ est une surface de revolution de $\mathbb{R}^3$, obtenue en faisant tourner la courbe γ autour de l'axe zz'. définie par $\gamma :]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3 \qquad s \mapsto (\cos(s), 0, \sin(s))$ alors $\mathbb{S}^2$ admet la paramétrisation suivante

$$X :]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times] - \pi, \pi[\to \mathbb{R}^3 \qquad (s, \theta) \mapsto (\cos(s)\cos\theta, \cos(s)\sin\theta, \sin(s))$$

alors
$\mathbf{A}(\mathbb{S}^2) = 2\pi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(s) ds = 2\pi |\sin(s)|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$
c)On obtient une représentation du tore

$$X : \begin{cases} x = (2 + \cos(s))\cos\theta \\ y = (2 + \cos(s))\sin\theta \\ z = \sin(s) \end{cases}$$

avec $(\theta, \alpha) \in ([-\pi, \pi])^2$
alors
$\mathbf{A}(\mathbb{T}^2) = 2\pi \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos(s)) ds = 2\pi |(2s + \sin(s))|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi(1 + \pi).$

5.2 Exercices de chapitre 2

Exercice 1

$$\varphi : ((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto (x + y - z)(x' + y' - z') + yy' + 2zz'$$

1) a)Il est facile pour démontrer que φ est bilinéaire et symétrique.
b) Soit $U = (x, y, z)$ on a $\varphi(U, U) = (x + y - z)^2 + y^2 + 2z^2 \geqslant 0$ donc φ elle est positive.
c) Soit $U = (x, y, z)$ on a $\varphi(U, U) = (x + y - z)^2 + y^2 + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow x + y - z = y = z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow U = (0, 0, 0)$ donc φ elle est définie.
2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
3) On a $\varphi(e_1, e_1) = 1$ alors $\| e_1 \| = 1$ donc $\xi_1 = e_1$.

$u_2 = e_2 - \varphi(e_2, \xi_1)\xi_1 = e_2 - 1e_1 = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$

donc $\| u_2 \| = \varphi(u_2, u_2) = \varphi(e_2 - e_1, e_2 - e_1) = \varphi(e_2, e_2) - 2\varphi(e_2, e_1) + \varphi(e_1, e_1) = 1$

alors $\xi_2 = (-1, 1, 0)$.

$u_3 = e_3 - \varphi(e_3, \xi_1)\xi_1 - \varphi(e_3, \xi_2)\xi_2 = e_3 - \varphi(e_3, e_1)e_1 - \varphi(e_3, e_2 - e_1)\xi_2 = e_3 + e_1 = (1, 0, 1)$

donc $\| u_3 \| = \varphi(u_3, u_3) = \varphi(e_3 + e_1, e_3 + e_1) = \varphi(e_3, e_3) + 2\varphi(e_3, e_1) + \varphi(e_1, e_1) = 2$

alors $\xi_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.

Exercice 2

•On a la forme

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

a) Il est facile pour montrer que φ est bilinéaire et symétrique.
b)$\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)dt \geqslant 0$ puisque l'intégrale d'une fonction positive dans un domaine compact est positive.

c)$\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1} P^2(t)dt \Rightarrow P^2(t) = 0 \ \forall t \in [-1, 1] \Rightarrow P(t) = 0 \ \forall t \in [-1, 1] \Rightarrow P = 0_E$.
• Orthonormalisation la base $\{1, X, X^2\}$ de sous espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ par le procède d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
a)On a $\| u_1 \|^2 \ \varphi(1, 1) = \int_{-1}^{1} dt = 2$ donc $\xi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}1$.
b) $u_2 = e_2 - \varphi(e_2, \xi_1)\xi_1 \quad \varphi(e_2, \xi_1) = \int_{-1}^{1} tdt = \dfrac{1}{2}t^2|_{-1}^{1} = 0$ donc $u_2 = e_2$
on obtient $\| u_2 \|^2 = \varphi(e_2, e_2) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \dfrac{1}{3}t^3|_{-1}^{1} = \dfrac{2}{3}$
alors $\xi_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{2}X$.

c)$u_3 = e_3 - \varphi(e_3, \xi_1)\xi_1 - \varphi(e_3, \xi_2)\xi_2$
d'abord $\varphi(e_3, \xi_1) = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \dfrac{2}{3}$
et $\varphi(e_3, \xi_2) = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0$
donc $u_3 = e_3 - \dfrac{2}{3}\xi_1 = X^2 - \dfrac{2}{3}$,
on obtient $\| u_3 \|^2 = \varphi(u_3, u_3) = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \dfrac{2}{3}\right)^2 dt = \dfrac{2}{5}$
alors $\xi_3 = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\left(X^2 - \dfrac{2}{3}\right)$.
• Calculer la distance entre X^3 et F.
$d(X^3, F) = d(X^3, Pr_F(X^3)$ tel que $Pr_F(X^3)$ est la projection orthogonal X^3 sur F,
$Pr_F(X^3) =< X^3, X^2 > X^2 + < X^3, X > X + < X^3, 1 > 1$

$< X^3, X^2 >= \int_{-1}^{1} t^5 dt = \frac{1}{6} t^6|_{-1}^{1} = 0,$
$< X^3, X >= \int_{-1}^{1} t^4 dt = \frac{1}{5} t^5|_{-1}^{1} = \frac{2}{5},$
et $< X^3, 1 >= \int_{-1}^{1} t^3 dt = \frac{1}{4} t^4|_{-1}^{1} = 0$
donc $Pr_F(X^3) = \frac{2}{5} X$
alors $d^2(X^3, F) = d(X^3, Pr_F(X^3) =\| X^3 - \frac{2}{5} X \|^2 = \int_{-1}^{1} (t^3 - \frac{2}{5} t)^2 dt$
$= \int_{-1}^{1} (t^6 + \frac{4}{25} t^2 - \frac{4}{5} t^4) dt = (\frac{1}{7} t^7 + \frac{4}{125} t^3 - \frac{4}{25} t^5)|_{-1}^{1} = \frac{26}{875}.$
d'où $d(X^3, F) = \frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{35}}.$
• Montrer que l'application $\psi : E \to E \quad P(X) \mapsto P(-X)$ est une symétrie orthogonale sur sous espace H que l'on précisera.
$\| \psi(P) \|^2 = \int_{-1}^{1} (\psi(P)(t))^2 dt = \int_{-1}^{1} P^2(-t) dt = \int_{1}^{-1} P^2(s)(-ds) = \int_{-1}^{1} P^2(s) ds =\| P \|^2$ donc ψ est une isométrie
et on a $(\psi \circ \psi)(P)(X) = P(X)$ donc $\psi \circ \psi = Id_E$ alors ψ est une symétrie orthogonal par rapport à H.
H est le sous espace invariante par ψ c'est à dire
$H = \{P \in E \ / \ \psi(P) = P\} = \{P \in E \ / \ \psi(P)(X) = P(X)\} = \{P \in E \ / \ P(-X) = P(X)\}$
donc H est le sous espace des polynômes pairs alors
$H = \{P \in E \ / \ P(X) = a_0 + a_1 X^2 + a_2 X^4 + ... + a_n X^{2n} + ...\}.$

Exercice 3

Montrer que

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad < u, v >^2 \leqslant < u, u >< v, v > .$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(u, v) \in E^2$
$< u + \lambda v, u + \lambda v > \geqslant 0$ alors $\lambda^2 < v, v > +2 < u, v > \lambda + < u, u > \geqslant 0$ est un polynôme positif du variable λ donc le discriminant soit négatif. Alors
$\Delta' =< u, v >^2 - < u, u >< v, v > \leqslant 0$ d'où $< u, v >^2 \leqslant < u, u >< v, v > .$

Exercice 4

Montrer que

$$\| \|: \begin{array}{c} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \| u \| = \sqrt{< u, u >} \end{array}$$

est une norme sur E.

1. $\| u \| = 0 \Leftrightarrow \| u \|^2 = 0 \Leftrightarrow < u, u > = 0 \Leftrightarrow u = 0_E.$
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$
$\| \lambda u \| = \sqrt{< \lambda u, \lambda u >} = \sqrt{\lambda^2 < u, u >} = |\lambda| \sqrt{< u, u >} = |\lambda| \ \| u \| \ .$
3. Soient $u, v \in E$ on a
$\| u + v \|^2 =< u + v, U + v >=< u, u > + < v, v > +2 < u, v >$

$\leqslant< u,u> + < v,v > +2\sqrt{< u,u > . < v,v >} = (\sqrt{< u,u >} + \sqrt{< v,v >})^2 = (\| u \| + \| v \|)^2$
alors $\| u+v \| \leqslant \| u \| + \| v \|$.

Exercice 5

Montrer que l'application :

$$: E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto d(u,v) = \| u-v \|$$

est une distance sur E.

1. Soient $u,v \in E$, $d(u,v) = 0 \Leftrightarrow \| u-v \| = 0 \Leftrightarrow u-v = 0_E \Leftrightarrow u = v$
2. Soient $u,v \in E$, $d(u,v) = \| u-v \| = \| v-u \| = d(u,v)$
3. Soient $u,v,w \in E$, $d(u,w) = \| (u-v)+(v-w) \| \leqslant \| (u-w) \| + \| (w-v) \|$
   $= d(u,v)+d(v,w)$

Exercice 6

Montrer que

$$\forall (U,V) \in E^2 \qquad \| U+V \|^2 + \| U-V \|^2 = 2(\| U \|^2 + \| V \|^2)$$

D'abord on a $\| U+V \|^2 = < U+V, U+V > = < U,U > + < V,V > +2 < U,V >$
et $\| U-V \|^2 = < U-V, U-V > = < U,U > + < V,V > -2 < U,V >$
donc $< U+V, U+V > + < U-V, U-V > = 2 < U,U > +2 < V,V >$
alors $\| U+V \|^2 + \| U-V \|^2 = 2(\| U \|^2 + \| V \|^2)$.

Exercice 7

1)Montrer que si $\{u_i\}_{i=1}^n$ une famille orthogonale alors $\| \sum_{i=1}^n u_i \|^2 = \sum_{i=1}^n \| u_i \|^2$.
Comme $\{u_i\}_{i=1}^n$ une famille orthogonale alors $< u_i, u_j > = 0$ si $u_i \neq u_j$.
$\| \sum_{i=1}^n u_i \|^2 = < \sum_{i=1}^n u_i, \sum_{i=1}^n u_i > = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n < u_i, u_j > = \sum_{i=1}^n < u_i, u_i > = \sum_{i=1}^n \| u_i \|^2$
2) La réciproque est fausse on considère $E = \mathbb{R}^2$ muni le produit scalaire standard,
et $\{u_1 = (1,0), u_2 = (1,1)\}$,
d'une part on a $\| u_1 + u_2 \| = \| (2,1) \| = \sqrt{5}$,
et d'autre part on a $\| u_1 \| + \| u_2 \| = 1 + \sqrt{2}$
donc $\| u_1 + u_2 \| \neq \| u_1 \| + \| u_2 \|$.

Exercice 8

Soit $\mathbf{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormale de E.
Montrer que pour tout $u \in E$ on a $u = \sum_{i=1}^n < u, e_i > e_i$;
Comme $\mathbf{B}$ une base orthonormale alors $< e_i, e_j > = \delta_i^j$
et pour tout $u \in E$ il existe une famille des scalaires $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$
donc pour tout $j \in \{1,...,n\}$ on a
$< u, e_j > = < \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j > = \sum_{i=1}^n \lambda_i < e_i, e_j > = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_i^j = \lambda_j$
alors $i \in \{1,...,n\}$ $< u, e_i > = \lambda_i$ d'où $u = \sum_{i=1}^n < u, e_i > e_i$.

Exercice 9

• Montrer que $A^\perp = \{u \in E / < u, a >= 0 \ \forall a \in A\}$ est un sous espace vectoriel de E.
1)$\forall a \in A : < 0_E, a >= 0$ alors $0_E \in A^\perp$ donc $A^\perp \neq \varnothing$.
2)Soient $u, v \in A^\perp$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $\forall a \in A$ on a $< \alpha u + \beta v, a >= \alpha < u, a > + \beta < v, a >= 0$ alors $(\alpha u + \beta v) \in A^\perp$.
• $E^\perp = \{u \in E / < u, v >= 0 \ \forall v \in E\} = \{0_E\}$
• Soit $a \in A$ alors pour tout $b \in A^\perp$ on a $< a, b >= 0$ donc $A \subset (A^\perp)^\perp$.
• Soit $x \in B^\perp$ alors $\forall b \in B$ on a $< x, b >= 0$ comme $A \subset B$ donc $\forall a \in A$ on a $< x, a >= 0$ alors $x \in A^\perp$. D'où $B^\perp \subset A^\perp$.

Exercice 10

Montrer que l'application

$$f : E \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto < a, u >$$

est une forme linéaire.
Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors $f(\alpha u + \beta v) =< a, \alpha u + \beta v >= \alpha < a, u > + \beta < a, v >= \alpha f(u) + \beta f(v)$.

Exercice 11

•

1. Soit $u \in E$ alors $\exists! v \in F$ et $\exists! w \in F_\perp$ tels que $u = v + w$ donc $P_F \circ P_F(u) = P_F \circ P_F(v + w) = P_F(v) = v = P_F(u)$. $\ker P_F = F^\perp$ et

2. $\ker P_F = \{u = v + w$
   $, P_F(u) = v = 0_E \ v \in F, \ w \in F_\perp\} = \{u = w \,/\, w \in F_\perp\} = F^\perp$

3. $\forall u \in E$ on a $P_F(u) \in F$ alors $ImP_F \subset F$ d'une part ;
   D'autre part $v \in F$ alors $P_F(v) = v$ alors $F \subset ImP_F$ d'où $ImP_F = F$

• $\forall U \in E$ on a $\| U - V \| \leq \| U - P_F(U) \| \qquad \forall V \in F$.

Exercice 12

On sait que $S_F(u^\top + u^\perp) = u^\top - u^\perp$
• Montrer que S_F est involutive c'est à dire
Soit $u \in E$ alors $S_F \circ S_F(u) = S_F \circ S_F(u^\top + u^\perp) = S_F(u^\top - u^\perp) = u^\top + u^\perp = u$ donc $S_F \circ S_F = Id_E$.

• Pour tout $u \in F$ alors $u = u^\top$ donc $S_F(u) = u^\top = u$
et pour tout $v \in F$ on a $v = v^\perp$ $S_F(v) = -v^\perp = -v$.
• Montrer que S_F est isomorphisme orthogonal symétrique.

1. S_F est injective puisque $S_F = 0_E \Rightarrow u^\top - u^\perp = 0_E \Rightarrow u^\top = u^\perp \Rightarrow u \in F \cap F^\perp \Rightarrow u = 0_E$, donc S_F est bijective.

2. $< S_F(u), S_F(u) >=< u^\top - u^\perp, u^\top - u^\perp >=< u^\top, u^\top > + < u^\perp, u^\perp >=\| u^\top \|^2 + \| u^\perp \|^2$ d'une part.
   Et d'autre part $< u, u >=< u^\top + u^\perp, u^\top + u^\perp >=< u^\top, u^\top > + < u^\perp, u^\perp >=\| u^\top \|^2$ $+ \| u^\perp \|^2$. alors $\| S_F(u) \|^2 = \| u \|^2$ donc S_F est orthogonal.

3. Soient $u, v \in E$ alors $< S_F(u), v >=< u^\top - u^\perp, v^\top + v^\perp >=< u^\top, v^\top > - < u^\perp, v^\perp >$ $- < u^\perp, v^\top > + < u^\top, v^\perp >=< u^\top, v^\top > - < u^\perp, v^\perp >$, d'une part.
   Et d'autre part $< S_F(v), u >=< v^\top - v^\perp, u^\top + u^\perp >=< v^\top, u^\top > - < v^\perp, u^\perp > - <$ $v^\perp, u^\top > + < v^\top, u^\perp >=< u^\top, v^\top > - < v^\perp, u^\perp >$,
   alors $< S_F(u), v >=< u, S_F(v) >$ donc S_F est symétrique.

Exercice 13

Soit $\varphi : E \to F$ un isométrie alors :
• $\forall\, x, y \in E < \varphi(x), \varphi(y) >_F =< x, y >_E$.
$\forall\, x, y \in E < \varphi(x), \varphi(y) >_F =< x, y >_E$. On a d'une part comme φ est un isométrie donc pour tout $u \in E < \varphi(u), \varphi(u) >_F =< u, u >_E$.
alors $< x + y, x + y >_E =< x, x >_E + < y, y >_E + 2 < x, y >_E$.
et d'autre part
$< \varphi(x + y), \varphi(x + y) >_F =< \varphi(x), \varphi(x) >_F + < \varphi(y), \varphi(y) >_F + 2 < \varphi(x), \varphi(y) >_F =$
$< x, x >_E + < y, y >_E + 2 < \varphi(x), \varphi(y) >_F$
alors $< \varphi(x), \varphi(y) >_F =< x, y >_E$
• Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y, z \in E$ alors
$< \varphi(\alpha x + \beta y), \varphi(z) >_F =< \alpha x + \beta y, z >_E = \alpha < x, z >_E + \beta < y, z >_E$
$= \alpha < \varphi(x), \varphi(z) >_F + \beta < \varphi(y), \varphi(z) >_F =< \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \varphi(z) >_F$
donc $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ alors est un endomorphisme.
Pour montrer que φ est bijective il suffit montrer que φ est injective.
Soient $x, y \in E$ si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors pour tout $z \in E$
on a $< \varphi(x) - \varphi(y), \varphi(z) >_F = 0 \Rightarrow < \varphi(x - y), \varphi(z) >_F = 0 \Rightarrow < x - y, z >_E = 0$
$\Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.
• φ Soit $\mathbb{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormale de E et $\mathbb{B}' = \{\varphi(e_i)\}_{i=1}^n$ l'image de $\mathbb{B}$ par φ.
Pour tout $i, j \in \{1, ..., n\}$ on a $< \varphi(e_i), \varphi(e_j) >_F =< e_i, e_j >_E = \delta_i^j$ donc $\mathbb{B}'$ est une base orthonormale de F.
• Soient $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux isométries alors $\psi \circ \varphi : E \to G$ est un isométrie.
En effet pour tout $x, y \in E$ on a $< \psi \circ \varphi(x), \psi \circ \varphi(y) >_G =< \varphi(x), \varphi(y) >_F =< x, y >_E$.
Soit $\varphi : E \to F$ un isométrie bijective et son inverse $\varphi^{-1} : F \to E$.
Alors pour tout $X, Y \in F < \varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(Y) >_E =< \varphi(\varphi^{-1}(X)), \varphi(\varphi^{-1}(Y)) >_F =< X, Y >_F$
donc φ^{-1} est une isométrie.

Exercice 14

Soient $\varphi : E \to F$ un isométrie, $\mathbb{B} = \{e_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormale de E et $\mathbb{B}' = \{\varphi(e_i)\}_{i=1}^n$ est une base orthonormale de F.
Pour tout $x \in E$ alors $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ donc par linéarité de φ on a $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i)$
$\| \varphi(x) \|_F^2 = < \varphi(x), \varphi(x) > = < \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i), \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) >_F = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^n \lambda_j < e_i, e_j >_E =$
$\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \delta_i^j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \| x \|_E^2$

Exercice 15

1)Soit $f \in \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère,pour tout $x \in \mathbb{R}$ $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = p(x) + i(x)$ avec $p \in \mathbf{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $i \in \mathbf{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Si $f \in \mathbf{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap \mathbf{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(-x) = -f(x)$ donc $2f(x) = 0$
d'où $f(x) = 0$ alors $f \equiv 0$.
2-1) Soit la forme $\phi : \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $f \mapsto f(x) - f(-x)$
a)ϕ est une forme linéaire :
en effet pour tout $f, g \in \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors
$\phi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f)(x) - (\alpha f)(-x) + (\beta g)(x) - (\beta g)(-x)$
$= \alpha f(x) - \alpha f(-x) + \beta g(x) - \beta g(-x) = \alpha \left(f(x) - f(-x) \right) + \beta \left(g(x) - g(-x) \right) = \alpha \phi(f) + \beta \phi(g)$.
b)$\ker \phi = \{ f \in \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ \phi(f) = 0 \} = \{ f \in \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(x) - f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \} = \mathbf{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2-2)Soit la forme $\psi : \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $f \mapsto f(x) + f(-x)$
a)ψ est une forme linéaire :
en effet pour tout $f, g \in \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors
$\psi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f)(x) + (\alpha f)(-x) + (\beta g)(x) + (\beta g)(-x) = \alpha f(x) + \alpha f(-x) + \beta g(x) + \beta g(-x)$
$= \alpha \left(f(x) + f(-x) \right) + \beta \left(g(x) + g(-x) \right) = \alpha \psi(f) + \beta \psi(g)$.
b)$\ker \psi = \{ f \in \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ \psi(f) = 0 \} = \{ f \in \mathbf{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(x) + f(-x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \} = \mathbf{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 16

Soit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre $n \geq 2$.
On définit la forme

$$\phi : \ \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \qquad A \mapsto trA$$

• Montrer que ϕ est une forme linéaire
On sait que pour tout $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ $tr(A + B) = trA + trB$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $tr\alpha A = \alpha trA$
Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$
$\phi(\alpha A + \beta B) = tr(\alpha A + \beta B) = tr\alpha A + tr\beta B = \alpha trA + \beta trB = \alpha \phi(A) + \beta \phi(B)$.
• $\ker \phi = \{ A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ trA = 0 \}$.

Exercice 17

Soit $E = \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre $n \geq 2$.
On définit la forme

$$<,>: E \times E \qquad (A, B) \mapsto tr(AB^t)$$

• Montrer que $<,>$ est un produit scalaire.
1)Soient $A, B \in E$ alors
$< A, B >= tr(AB^t) = tr(AB^t)^t = tr((B^t)^t A^t) = tr(BA^t) =< B, A >$
alors $<,>$ est symétrique.
2)Soient $A, B, C \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors
$< \alpha A + \beta B, C >= tr\left((\alpha A + \beta B)C^t\right) = tr(\alpha AC^t + \beta BC^t) = \alpha tr(AC^t) + \beta tr(BC^t) = \alpha < A, C > + \beta < B, C >$.
3)Soit $A \in E$, si $< A, A >= trAA^t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$
donc pour tout $A = (a_{ij}) \in E$ $< A, A > \geq 0$
Si$< A, A > \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ij}^2 = 0 \ \forall i, j \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i, j \Leftrightarrow A \equiv 0$.
• $\| I_n \|^2 = trII^t = trI^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2$ avec $a_{ii} = 1$ donc $\| I_n \| = \sqrt{n}$.

Exercice 18

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a
$< e_n(t), e_n(t) >= \int_0^1 e^{2nit\pi} e^{-2nit\pi} dt = \int_0^1 dt = 1$
Pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$ on a
$< e_n(t), e_m n(t) >= \int_0^1 e^{2nit\pi} e^{-2mit\pi} dt = \int_0^1 e^{2(n-m)it\pi} dt = \dfrac{1}{2(n-m)i\pi} e^{2(n-m)it\pi}|_0^1$
$= \dfrac{1}{2(n-m)i\pi}(e^{2(n-m)i\pi} - 1) = 0$

Exercice 19

• Montrer que p est un projecteur si seulement si $Id_E - p$ est un projecteur de E
Si p est un projecteur alors $p^2 = p$ donc $(Id_E - p) \circ (Id_E - p) = Id_E - p - p + p^2 = Id_E - p - p + p = (Id_E - p)$ alors $(Id_E - p)$ est un projecteur.
Si $(Id_E - p)$ est un projecteur donc $(Id_E - p)^2 = (Id_E - p)$ alors
$Id_E - p = Id_E - p - p + p^2 \Rightarrow Id_E - Id_E = p - p - p + p^2 \Rightarrow p^2 = p$ alors p est un projecteur.
• Montrer que $Im(Id_E - p) = \ker p$
Soit $y \in E$ si $y \in Im(Id_E - p)$ alors $\exists x \in E$ tel que $y = (Id_E - p)(x)$ donc $p(y) = p((Id_E - p)(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ donc $y \in \ker p$.
D'autre part soit $x \in \ker p$ alors $p(x) = 0$ donc $I(x) - p(x) = x \Rightarrow (I - p)(x) = x$ d'où $x \in E$.
• Montrer que $\ker(Id_E - p) = Imp$
Soit $x \in E$ si $x \in \ker(Id_E - p) \Leftrightarrow (Id_E - p)(x) = 0 \Leftrightarrow I(x) = p(x) \Leftrightarrow x = p(x) \Leftrightarrow x \in Imp$ • Montrer que $E = \ker p \oplus Imp$
a)Pour tout $x \in E$ on a $x = x - p(x) + p(x) = (I - p)(x) + p(x)$ avec $(I - p)(x) \in Im(I - p) = \ker p$ et $p(x) \in Imp$
b)Si $x \in \ker p \cap Imp$ alors $p(x) = 0$ et $(I - p)(x) = 0$ donc $x = p(x) = 0$
Alors $E = \ker p \oplus Imp$.

2)Soit p un projecteur de E et u un endomorphisme de E,
On suppose que $p \circ u = u \circ p$ Alors :
A)Si $x \in \ker p$ donc $p \circ u(x) = u \circ p(x) = u(0) = 0$ alors $u(x) \in \ker p$ donc $\ker p$ est stable par u.
B)Si $y \in Imp$ donc $\exists x \in E$ tel que $y = p(x)$ alors $u(y) = u(p(x)) = u \circ p(x) = p \circ u(x) \in Imp$ d'où Imp est stable par u.
Maintenant on suppose que $\ker p$ et Imp sont stables par u,
Soit $x \in E$ alors $\exists! y \in \ker p$ et $\exists! z \in Imp$ tels que $x = y + z$ alors $(u \circ p)(x) = (u \circ p)(y + z) = u(p(y) + p(z)) = u(0 + p(z)) = u(p(z)) = p(z)$ et d'autre part $(p \circ u)(x) = p(u(y + z)) = p(u(y)) + p(u(z)) = 0 + p(u(z)) = p(u(z)) = p(z)$.

Exercice 20

Démontrer que, pour que F soit stable par f il faut et il suffit que $q \circ f \circ p = 0$.
Soit $x \in E$ alors $\exists! y \in F$ et $\exists! z \in F^{\perp}$ tels que $x = y + z$.
Alors $p(x) = p(y + z) = p(z) = z$,on suppose que F est stable par f alors
$f \circ p(x) = f \circ p(z) = f(z) \in F$ donc $q \circ f \circ p(x) = q(f(z)) = 0$.
Supposons maintenant $q \circ f \circ p = 0$. Donc
$\forall y \in F \; q \circ f \circ p(y) = 0 \Rightarrow (q \circ f)(y) \Rightarrow q(f(y)) = 0 \Rightarrow f(y) \in F$.

5.3 Exercices de chapitre 3

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E alors :
• Montrer que $\varphi(A,B) = 0_E \Leftrightarrow A = B$.
En effet $\varphi(A,B) = 0_E \Leftrightarrow A + 0_E = B \Leftrightarrow A = B$
• Montrer que $\varphi(A,B) = -\varphi(B,A)$ pour tout $A, B \in \mathcal{E}$.
D'après la relation de Chasles on a $\varphi(A,B) + \varphi(B,A) = \varphi(A,A) = 0_E$
alors $\varphi(A,B) = -\varphi(B,A)$
• Montrer que : pour tout $A,B,C,D \in \mathcal{E}$ $\varphi(A,B) = \varphi(D,C) \Leftrightarrow \varphi(A,D) = \varphi(B,C)$,(Identité de parallélogramme).
En utilisant la relation de Chasles $\varphi(A,D) = \varphi(A,B) + \varphi(B,C) + \varphi(C,D) = \varphi(A,B) + \varphi(B,C) - \varphi(D,C) == \varphi(A,B) + \varphi(B,C) - \varphi(A,B) = \varphi(B,C)$.

Exercice 2

.
Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$, dirigé par un sous espace vectoriel F alors pour tout point $A \in \mathcal{F}$, on a l'égalité $\mathcal{E} = A + F$.
1)D'abord on a $A + F \subset \mathcal{E}$ puisque pour tout $\overrightarrow{U} \in F$ on a $A + \overrightarrow{U} \in E$
2 Soit $B \in E$ on a $B = A + \varphi(A,B)$ tel que $\varphi(A,B) \in F$ alors $B \in A + F$.

Exercice 3

Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille des points d'un espace affine $\mathcal{E}$, alors l'ensemble des tous les barycentres de $(A_i)_{i\in I}$ noté $\mathcal{F}$, est un sous espace affine de $\mathcal{E}$. 1)Soit O un point fixe de $\mathcal{E}$, on considère F le sous espace vectoriel engendre par famille des vecteurs $\overrightarrow{OA_j}$ avec $i \in I$
2)Soient $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ deux famille des scalaires de $\mathbb{K}$ à support fini
tels que $\sum_{i\in I} \alpha_i = \alpha \neq 0$. et $\sum_{i\in I} \lambda_i = \beta \neq 0$.
Si G_α le barycentre de $\{(A_i), \alpha_i\}_{i\in I}$ et G_β le barycentre de $\{(A_i), \beta_i\}_{i\in I}$
on a
a)$G_\alpha = O + \frac{1}{\alpha} \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$
b)$G_\beta = O + \frac{1}{\beta} \sum_{i\in I} \beta_i \overrightarrow{OA_i}$
donc $\overrightarrow{G_\alpha G_\beta} = \overrightarrow{G_\alpha O} + \overrightarrow{OG_\beta} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} + \frac{1}{\beta} \sum_{i\in I} \beta_i \overrightarrow{OA_i} = \sum_{i\in I}(\frac{\beta_i}{\beta} - \frac{\alpha_i}{\alpha})\overrightarrow{OA_i}$
donc $\overrightarrow{G_\alpha G_\beta} \in F$
3)Soit $G_\lambda = O + \frac{1}{\lambda} \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{U} \in F$
Comme $\overrightarrow{U} \in F$ donc $\exists\{\beta_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{K}$ tels que $\overrightarrow{U} = \sum_{i\in I} \beta_i \overrightarrow{OA_i}$ donc $G' = G_\lambda + \overrightarrow{U}$ est unique et on a $G' = O + \sum_{i\in I}(\beta_i + \frac{\lambda_i}{\lambda})\overrightarrow{OA_i}$ alors $G' \in \mathcal{F}$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille des points de $\mathcal{F}$.
Montrer que si G est le barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ alors G appartient à $\mathcal{F}$. Soit M un point fixe de $\mathcal{E}$, alors $G = M + \dfrac{1}{\lambda}\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}$ tel que $\lambda = \sum_{i\in I}\lambda_i \neq 0$ comme les points $M, A_1, ..., A_i, ...$ tous appartient à $\mathcal{F}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{MA_i}$ appartient à F, pour tout $i \in I$.
Donc G appartient à $\mathcal{F}$, tel que $\lambda = \sum_{i\in I}\lambda_i \neq 0$ comme les points $M, A_1, ..., A_i, ...$ tous appartient à $\mathcal{F}$, alors les vecteurs $\overrightarrow{MA_i}$ appartient à F, pour tout $i \in I$.
Donc G appartient à $\mathcal{F}$,

Exercice 5

Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$,
Montrer que si $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_2$ alors $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \varnothing$.
Comme $\mathcal{F}_1$ est parallèle à $\mathcal{F}_2$ donc F_1 est un sous espace vectoriel de F_2.
Si $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \varnothing$ alors il existe un point $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ donc $\mathcal{F}_1 = A + F_1 \subset A + F_2 = \mathcal{F}_2$.

Exercice 6

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F_1 et F_2
1)Si $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \varnothing$ alors $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ alors pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathcal{E}$, on a $A + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
alors $A + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}_1 \Rightarrow \overrightarrow{u} \in F_1$ et $A + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow \overrightarrow{u} \in F_2$ donc $\overrightarrow{u} \in F_1 \cap F_2$.
2)
a) Soit $A \in \mathcal{E}$, et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2 \in E$ tels que $\overrightarrow{u}_1 \in F_1$ et $\overrightarrow{u}_2 \in F_2$
Alors $A + \overrightarrow{u}_1 \in \mathcal{F}_1$ donc $A \in \mathcal{F}_1$ et $A + \overrightarrow{u}_2 \in \mathcal{F}_2$ donc $A \in \mathcal{F}_2$
d'où $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ alors $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \varnothing$.
b) Comme $F_1 \oplus F_2 = E$ alors $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
Soit $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ alors si $B = A + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ donc $B = A + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}_1$ et $B = A + \overrightarrow{u} \in \mathcal{F}_2$
alors $\overrightarrow{u} \in F_1 \cap F_2$ alors $\overrightarrow{u} = 0_E = \overrightarrow{0}$ donc $B = A + \overrightarrow{0} = A$

Exercice 7

Soit f un forme affine non constante, de partie linéaire L.
Montrer que $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{E} \,/\, f(A) = 0\}$ est un hyperplan affine dirigé par le noyau de L.
1)On suppose que $H = \{\vec{u} \in E \,/\, L(\vec{u}) = 0\}$, alors H est un hyperplan vectoriel de E puisqu'il est le noyau de la forme linéaire L.
2) Pour tout $A, B \in \mathcal{H}$ alors $0 = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}}} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = L(\overrightarrow{AB})$ alors $\overrightarrow{AB} \in H$.
3) Pour tout $A \in \mathcal{H}$ et pour tout $\vec{u} \in H$ on a si $B = A + \vec{u}$ alors $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ donc $L(\overrightarrow{AB}) = 0$ alors $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{0_{\mathbb{R}}} = 0$ d'où $f(B) = f(A) = 0$ alors $B \in \mathcal{H}$.
On déduire que $\mathcal{H}$ est un sous espace affine dirigé par H alors $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine.

Exercice 8

Montrer que si $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ alors il existe une forme affine non constante $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} \,/\, f(M) = 0\}$.
Comme $\mathcal{H}$ un hyperplan affine alors il existe un hyperplan vectoriel H on $H = \ker L$ avec L une forme linéaire non nulle, tel que H est la direction de $\mathcal{H}$.
Soit A un point quelconque de $\mathcal{H}$ on considère $f(A) = L(\overrightarrow{0}) = 0_{\mathbb{R}}$.
Pour tout $M \in \mathcal{H}$ on a $M = A + \overrightarrow{u}$ avec $L(\overrightarrow{u}) = 0$ c'est a dire $\overrightarrow{u} \in H$.
On considère la forme $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ tel que $M \mapsto f(A) + L(\overrightarrow{AM})$ donc
1) f est une forme affine de partie linéaire L.
2)Et pour tout $M \in \mathcal{H}$ on a $\overrightarrow{f(A)f(M)} = L(\overrightarrow{AM}) = 0$ alors $f(M) = f(A) = 0$.
Donc $\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} \,/\, f(M) = 0\}$.

Exercice 9

Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine de partie linéaire $L : E \to F$.
Montrer si A un point de $\mathcal{E}$ alors pour tout M de $\mathcal{E}$, on a $f(M) = f(A) + L(\overrightarrow{AM})$.
Soit A un point de $\mathcal{E}$ et pour tout M de $\mathcal{E}$, On a $\overrightarrow{f(A)f(M)} = L(\overrightarrow{AM})$ donc $f(M) = f(A) + L(\overrightarrow{AM})$.

Exercice 10

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines euclidiens de direction respectivement E et F.
Si $L : E \to F$ une application linéaire et si A un point de $\mathcal{E}$.
Montrer que l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ qui satisfaire $\forall M \in \mathcal{E}$ on a $f(M) = f(A) + L(\overrightarrow{AM})$ est une application affine de partie linéaire L
Soit A un point de $\mathcal{E}$ et pour tout M de $\mathcal{E}$, donc $f(M) = f(A) + L(\overrightarrow{AM})$ alors $\overrightarrow{f(A)f(M)} = L(\overrightarrow{AM})$.

Exercice 11

1. Soit $T_{\overrightarrow{0}}$ La translation de vecteur nul alors pour tout $M \in \mathcal{E}$ donc si $M' = T_{\overrightarrow{0}}(M)$ alors $M' = M + \overrightarrow{0} = M$ d'où $T_{\overrightarrow{0}} = Id_{\mathcal{E}}$.

2. Soient $T_{\overrightarrow{U}}$ et $T_{\overrightarrow{V}}$ translations affine de vecteur respectivement $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$,
pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $T_{\overrightarrow{U}} \circ T_{\overrightarrow{V}}(M) = T_{\overrightarrow{U}}(M + \overrightarrow{V}) = (M + \overrightarrow{V}) + \overrightarrow{U} = T_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}}(M)$ alors $T_{\overrightarrow{U}} \circ T_{\overrightarrow{V}} = T_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}}$

3. Soit $T_{\overrightarrow{U}}$ la translation affine de vecteur $\overrightarrow{U}$ on a $T_{\overrightarrow{U}} \circ T_{-\overrightarrow{U}} = T_{-\overrightarrow{U}} \circ T_{\overrightarrow{U}} = T_{\overrightarrow{0}}$
donc est $T_{\overrightarrow{U}}^{-1} = T_{-\overrightarrow{U}}$

4. a) $\circ$ est une loi interne .
b) On a $T_{\overrightarrow{U}} \circ T_{\overrightarrow{V}} = T_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}} = T_{\overrightarrow{V}+\overrightarrow{U}} = T_{\overrightarrow{V}} \circ T_{\overrightarrow{U}}$ donc $\circ$ est commutative.

c) $\circ$ est associative.
d)$T_{\overrightarrow{0}}$ est l'élément neutre.
e)Le symétrie de $T_{\overrightarrow{U}}$ est $T_{-\overrightarrow{U}}$ alors L'ensemble des translations muni de loi de composition $\circ$ est un groupe abélien.

5. Soient M, N deux points de $\mathcal{E}$ alors :
$d(T_{\overrightarrow{U}}(M), T_{\overrightarrow{U}}(N)) = \| \overrightarrow{T_{\overrightarrow{U}}(M)T_{\overrightarrow{U}}(N)} \| = \| Id_E(\overrightarrow{MN}) \| = \| \overrightarrow{MN} \| = d(M, N)$
alors la translation est une isométrie affine.

Exercice 12

Montrer que l'ensemble des homothéties de même centre, muni de loi composition $\circ$ est un groupe abélien.

1. Soit $H_{A,1}$ l'homothétie de rapport $\lambda = 1$ et de centre A alors pour tout $M \in \mathcal{E}$ si $N = H_{A,1}(M)$ alors $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ donc $M = N$ d'où $H_{A,1}$ est l'identité de $\mathcal{E}$.

2. Soient $H_{A,\lambda}$ et $H_{A,\mu}$ deux homothéties de rapport respectivement λ et μ de centre A alors pour tout $M \in \mathcal{E}$ $M_1 = H_{A,\lambda}(M)$ et $M' = H_{A,\mu}(M_1)$ alors $\overrightarrow{AM_1} = \lambda\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'} = \mu\overrightarrow{AM_1}$ alors $H_{A,\mu} \circ H_{A,\lambda}(M) = M'$ donc $\overrightarrow{AM'} = \lambda\mu\overrightarrow{AM}$ d'où $H_{A,\mu} \circ H_{A,\lambda} = H_{A,\lambda\mu}$. Et on a $H_{A,\lambda\mu} = H_{A,\mu\lambda} = H_{A,\lambda} \circ H_{A,\mu}$

3. Soit $H_{A,\lambda}$ l'homothétie de rapport $\lambda \neq 0$ et de centre A on a $H_{A,\lambda} \circ H_{A,\frac{1}{\lambda}} = H_{A,1} = Id_{\mathcal{E}}$ alors $H^{-1}_{A,\lambda} = H_{A,\frac{1}{\lambda}}$

Exercice 13

On définit la forme
$$\begin{aligned} L : \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

L est linéaire puisque :
pour tout $f, g \in \mathbb{F}$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a
$L(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha L(f) + \beta L(g)$.
$\ker L = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ f(0) = 0\} = H$ donc H est un hyperplan vectoriel.
Maintenant on définit la forme
$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) - 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ est une forme affine de partie linéaire L puisque pour tout $f, g \in \mathcal{F}$ on a
$\overrightarrow{\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)} = (g(0) - 1) - (f(0) - 1) = g(0) - f(0) = (g - f)(0) = L(g - f)$.
$\mathcal{H} = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ \mathcal{L}(f) = 0\}$ donc $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de direction H.

Exercice 14

On note $T_{\overrightarrow{u}}$ la translation affine de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $H_{A,\lambda}$ l'homothétie de rapport λ et de centre A.
alors on a

1. $T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{v}} = T_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$

2. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $(T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{A,\lambda})(M) = T_{\overrightarrow{u}}(M') = M''$ tels que $M'' = M' + \overrightarrow{u}$ et $M' = A + \lambda\overrightarrow{AM}$ donc $M'' = A + \lambda\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{u}$

3. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $(H_{A,\lambda} \circ T_{\overrightarrow{u}})(M) = H_{A,\lambda}(M') = M''$ tels que $M'' = A + \lambda\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AM}$ d'où $M'' = A + \lambda\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{u}$.
   Alors $T_{\overrightarrow{u}} \circ H_{A,\lambda} \neq H_{A,\lambda} \circ T_{\overrightarrow{u}}$
4. Pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $(H_{A,\lambda} \circ H_{B,\mu})(M) = H_{A,\lambda}(M') = M''$ tels que $M' = B + \mu\overrightarrow{BM}$ alors $\mu\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM'}$ donc $\overrightarrow{AM'} = \mu\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AB}$
   et on a $M'' = A + \lambda\overrightarrow{AM'}$alors $\overrightarrow{AM''} = \lambda(\mu\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AB}) = \lambda(1-\mu)\overrightarrow{AB} + \lambda\mu\overrightarrow{AM}$ d'où $H_{A,\lambda} \circ H_{B,\mu} = T_{\lambda(1-\mu)\overrightarrow{AB}} \circ H_{A,\mu\lambda}$
5. En déduire que $H_{B,\mu} \circ H_{A,\lambda} = T_{(1-\mu)\overrightarrow{AB}} \circ H_{A,\mu\lambda}$ et donc $H_{B,\mu} \circ H_{A,\lambda} \neq H_{A,\lambda} \circ H_{B,\mu}$

alors l'ensemble engendré par les homothéties et les translations est un groupe non abélien par la loi de composition.

5.4 Exercices de chapitre 4

Exercice 1

Montrer $(O_2(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe.
1)Soient $f, g \in O_2(\mathbb{R})$, alors $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a $(f\circ g)(u).(f\circ g(v)) = g(u).g(v) = u.v$. donc $f \circ g \in O_2(\mathbb{R})$ alors $\circ$ est interne.
2) $\circ$ est associative.
3)$Id_{\mathbb{R}^2} \in O_2(\mathbb{R}$ élément neutre de $(O_2(\mathbb{R}), \circ)$. 4)$f \in O_2(\mathbb{R}$ on a $\det f = \mp 1$ alors f est bijective. donc f^{-1} existe,
$\forall (u', v') \in \mathbb{R}^2$ $\exists \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f^{-1}(u') = u$ et $f^{-1}(v') = v$ alors $f^{-1}(u').f^{-1}(v') = u.v = f(u).f(v) = f(f^{-1}(u')).f(f^{-1}(v')) = u'.v'$ donc $f^{-1} \in O_2(\mathbb{R}$.
f^{-1} est le symétrie de f dans $O_2(\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit M une matrice $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ les propriétés suivantes sont équivalentes :
• 1 $\Rightarrow$ 2 Si $M \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ alors d'une part $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ $< f(u), f(v) >=< u, v >$ et d'autre part $< f(u), f(v) >=< f^t \circ f(u), v >$ donc
$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a $< f^t f(u), v >=< u, v >$ alors $f^t f(u) = u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ alors $M^t M = I_2$

• 2 $\Rightarrow$ 3 Si $\forall M \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ on a $M^t M = I_2$ alors $(f^t \circ f(u) = Id_2$ alors $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a $< u, v >=< f^t \circ f(u), v >=< f(u), f(v) >=< u, f \circ f^t(v) >$ alors pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ $f \circ f^t(v) = v$ donc $MM^t = I_2$

• 3 $\Rightarrow$ 4 Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^2$,et P la matrice de passage de B dans B' on sait que P et P^{-1} sont orthogonales'
Si M la matrice de f dans la base B et M' la matrice de f dans la base B on $M' = P^{-1}MP$ alors $M'M'^t = (P^{-1}MP)(P^{-1}MP)^t = P^{-1}MPP^tM^t(P^{-1})^t = P^{-1}(P^{-1})^t = I_2$.

• 4 $\Rightarrow$ 5 évidente.
• 5 $\Rightarrow$ 1 Si B une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ tel que la matrice M de f est orthogonale alors $MM^t = I$,donc pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ on a $< f(u), f(v) >=< M(u), M(v) >=< u, M^t M(u) >=< u, v >$. donc f est orthogonal.

Exercice 3

Soit $A \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ on considère $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors
1)si $\det A = ad - bc = 1$ et

$$AA^t = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \\ c = \cos\beta \\ d = \sin\beta \end{cases}$$

donc $\left\{\begin{array}{l} ac+bd=0 \\ ad-bc=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=0 \\ \cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos(\alpha-\beta)=0 \\ \sin(\beta-\alpha)=1 \end{array}\right.$

$\alpha-\beta=\dfrac{-\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

donc $a=\cos\alpha=\sin\beta=d$ et $b=\sin\alpha=-\cos\beta=-c$

d'où

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

si $\det A=ad-bc=-1$ *et* $AA^t=I_2$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a^2+b^2=1 \\ c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \\ ad-bc=-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a=\cos\alpha \\ b=\sin\alpha \\ c=\cos\beta \\ d=\sin\beta \\ ac+bd=0 \\ ad-bc=-1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \cos(\alpha-\beta)=0 \\ \sin(\beta-\alpha)=-1 \end{array}\right.$ alors

$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

donc $a=\cos\alpha=-\sin\beta=-d$ et $b=\sin\alpha=\cos\beta=c$

d'où

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$$

Exercice 4

Montrer que $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$.

On a $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})=\{A\in\mathbf{O}_2(\mathbb{R})\ /\ \det A=1\}$.

1)$\det I_2=\det\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$ alors $I_2\in\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

2)Soient $A,B\in\mathbf{SO}_2$ alors $\det(A.B)=\det A\times\det B=1\times1=1$ alors $A.B\in\mathbf{SO}_2$.

3))Soit $A\in\mathbf{SO}_2$ donc $\det A=1$ alors A est inversible et on a $\det A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}=1$ alors $A^{-1}\in\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Montrer que l'équation cartésienne de la droite affine (D) de normal $\vec{u}=(a,b)$ et passant par $A(x_0,y_0)$ est $ax+by-ax_0-by_0=0$.

En effet, soit $M(x,y)\in\mathcal{R}^2$ alors si $M\in(D)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\Leftrightarrow ax+by-ax_0-by_0=0$.

Exercice 6

Montrer que l'équation cartésienne de la droite affine (D) de direction $\vec{u} = (a, b)$ et passant par $A(x_0, y_0)$ est $bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$. En effet, soit $M(x, y) \in \mathcal{R}^2$ alors
si $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}//\vec{u} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow b(x-x_0)-a(y-y_0) = 0 \Leftrightarrow bx-ay-bx_0+ay_0 = 0.$

Exercice 7

Montrer que l'équation cartésienne de la droite affine (D) passant par deux points différents $A(x_0, y_0)$ et $B = (x_1, y_1)$ est $(y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y - (y_1 - y_0)x_0 + (x_1 - x_0)y_0 = 0$. En effet, soit $M(x, y) \in \mathcal{R}^2$ alors
si $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & (x_1 - x_0) \\ y - y_0 & (y_1 - y_0) \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow (y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$
$\Leftrightarrow (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y - (y_1 - y_0)x_0 + (x_1 - x_0)y_0 = 0.$

Exercice 8

Montrer que l'application affine $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ est une isométrie si seulement si sa partie linéaire L est une isométrie.
Soient $A, B \in \mathcal{R}^2$ on a
$d(f(A), f(B)) =\| \overrightarrow{f(A)f(B)} \|=\| L(\overrightarrow{AB}) \|$ donc :
Si f est une isométrie donc $\| L(\overrightarrow{AB}) \|= d(f(A), f(B)) = d(A, B) =\| \overrightarrow{AB} \|$
alors L est une isométrie.
Si L est une isométrie $d(f(A), f(B)) =\| L(\overrightarrow{AB}) \|==\| \overrightarrow{AB} \|= d(A, B)$
alors f est une isométrie.

Exercice 9

Montrer que l'ensemble d'isométries muni le loi de composition est un groupe.
1)Soient f, g deux isométries alors pour tout $u, v \in \mathcal{R}^2$ on a
$d((f \circ g)(u), (f \circ g)(v)) = d(f(g(u)), f(g(v))) = d(g(u), g(v)) = d(u, v)$
donc $f \circ g$ est isométrie affine d'où$\circ$ est interne.

2)$Id_{\mathcal{R}^2}$ est une isométrie affine , et on a pour toute isométrie affine de $\mathcal{R}^2$
on a $f \circ Id_{\mathcal{R}^2} = Id_{\mathcal{R}^2} \circ f = f$
3)Soit f une isométrie affine de partie linéaire L donc L est une isométrie vectorielle donc elle est inversible donc f est inversible,donc f^{-1} existe.
Soient $u', v' \in \mathcal{R}^2$ alors existe $u, v \in \mathcal{R}^2$ tels que $u' = f(u)$ et $v' = f(v)$ alors
$d(f^{-1}(u'), f^{-1}(v')) = d(u, v) = d(f(u), f(v)) = d(u', v')$ donc f^{-1} est isométrie.
4) $\circ$ est associative.

Exercice 10

Montrer que l'ensemble de déplacements est un sous groupe du groupe d'isométries. Voir l'exercice 4.

Exercice 11

Montrer que l'ensemble $O_3(\mathbb{R})$ est un groupe pour la loi de composition.
1)Soient $f, g \in O_3(\mathbb{R})$, alors $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$ on a $(f \circ g)(u).(f \circ g(v)) = g(u).g(v) = u.v$, donc $f \circ g \in O_3(\mathbb{R})$ alors $\circ$ est interne.
2) $\circ$ est associative.
3)$Id_{\mathbb{R}^3} \in O_3(\mathbb{R}$ est l'élément neutre de $O_3(\mathbb{R})$.
4)$f \in O_3(\mathbb{R}$ on a $\det f = \mp 1$ alors f est bijective, donc f^{-1} existe,
$\forall (u', v') \in \mathbb{R}^3$ $\exists (u, v) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f^{-1}(u') = u$ et $f^{-1}(v') = v$ alors $f^{-1}(u').f^{-1}(v') = u.v = f(u).f(v) = f(f^{-1}(u')).f(f^{-1}(v')) = u'.v'$ donc $f^{-1} \in O_3(\mathbb{R}$.
f^{-1} est le symétrie de f dans $O_2(\mathbb{R}$.

Exercice 12

Montrer que l'équation cartésienne de la droite affine (D) de normal $\vec{u} = (a, b, c)$ et passant par $A = (x_0, y_0, z_0)$ est $ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$.
En effet, soit $M(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ alors si $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$
$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow$
$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$.

Exercice 13

Montrer que le plan affine (P) de direction $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$ non lies passant par $A = (x_0, y_0, z_0)$ est d'équation cartésienne

$$(bc' - b'c)x + (a'c - ac')y + (ab' - a'b)z - (bc' - b'c)x_0 - (a'c - ac')y_0 - (ab' - a'b)z_0 = 0.$$

En effet, soit $M(x, y, z) \in \mathcal{R}^3$ alors si $M \in (P)$
alors $\overrightarrow{AM}, u, v$ sont lies donc $\begin{vmatrix} x - x_0 & a & a' \\ y - y_0 & b & b' \\ z - z_0 & c & c' \end{vmatrix} = 0$
alors

$$(x - x_0)\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - (y - y_0)\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0$$

d'où

$$(bc' - b'c)x + (a'c - ac')y + (ab' - a'b)z - (bc' - b'c)x_0 - (a'c - ac')y_0 - (ab' - a'b)z_0 = 0.$$

Exercice 14

Soit $(\mathcal{P})$ un plan affine d'E.C $ax+by+cz+d=0$ et $M(x,y,z)$
un point quelconque de $\mathcal{R}^3$, notons $M'=(X,Y,Z)$ la projection orthogonale de M sur $(\mathcal{P})$
Alors $\begin{cases} \overrightarrow{MM'}//\overrightarrow{n} \\ M' \in (\mathcal{P}) \end{cases}$.
tel que $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$ le vecteur normal de $(\mathcal{P})$ $\overrightarrow{MM'}//\overrightarrow{n} \Rightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^\star$ $\overrightarrow{MM'}=\lambda\overrightarrow{n}$ donc
$\begin{cases} x'-x=a\lambda \\ y'-y=b\lambda \\ z'-z=c\lambda \end{cases}$
et $ax'+by'+cz'+d=0$ alors
$a(x+a\lambda)+a(x+a\lambda)+a(x+a\lambda)+d=0$
$\Rightarrow \lambda(a^2+b^2+c^2)+ax+by+cz+d=0$
$\Rightarrow \lambda = -\dfrac{ax+by+cz+d}{a^2+b^2+c^2}$

donc $\begin{cases} x'=\dfrac{(b^2+c^2)x-aby-acz-ad}{a^2+b^2+c^2} \\ y'=\dfrac{(a^2+c^2)y-abx-bcz-bd}{a^2+b^2+c^2} \\ z'=\dfrac{(a^2+b^2)z-acx-bcy-cd}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$.

Exercice 15

Soit $M=(x,y)$ appartient à (D) si, et seulement si le système suivant de trois équations a trois inconnues (a,b,c) a une solution non triviale : $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax_0+by_0+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \end{cases}$
si et seulement si le determinant du système est nul,donc

$$\det\begin{pmatrix} x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=0.$$

Exercice 16

Considérons deux droites affines de $\mathcal{R}^2$ $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d.E.C respectivement $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$
1) Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si,seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\star$ tel que les vecteurs normaux $(a_1,b_1)=\lambda(a_2,b_2)$ donc si,et seulement si (a_1,b_1), et (a_2,b_2) sont colinéaires si,et seulement si

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}=0$$

2)on suppose que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles alors $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ alors le système suivant de deux équations a deux inconnues (x,y) :

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ admet une et unique solution (x_0, y_0).
Donc elles se coupent en unique point $M_0 = (x_0, y_0)$.

Exercice 17

Soit $M = (x, y, z)$ appartient à (P) si, et seulement si le système suivant de quatre équations a quatre inconnues (a, b, c, d) a une solution non triviale :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0 \end{cases}$$

si et seulement si le determinant du système est nul,donc

$$\det \begin{pmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exercice 18

Déterminer la nature de l'application f de $\mathcal{R}^3$ dans $\mathcal{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = 2 - y \\ z' = 2 - z \end{cases}$$

1) Soit $M = (x, y, z)$ un point fixe de f alors

$$\begin{cases} x = 6 - x \\ y = 2 - y \\ z = z + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

2) Soit $M = (x, y, z)$ point quelconque de $\mathcal{R}^3$ si $(f \circ f)(M) = (x', y')$ alors

$$\begin{cases} x' = 6 - (6 - x) \\ y' = 2 - (2 - y) \\ z' = 2 - (2 - z) \end{cases} \text{donc} \begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

d'où $f \circ f = Id_{\mathcal{R}^3}$

3)Soit $M' = (x', y', z') = f(M) = f((x, y, z)))$ alors le milieu de segment $[MM']$ est $C = (\dfrac{x + x'}{2}, \dfrac{y + y'}{2}, \dfrac{z + z'}{2}) = (3, 1, 1)$.
On déduire que f est une symétrie centrale par rapport le point $(3, 1, 1)$.

Exercice 19

Une dilatation f est une application affine dont la partie linéaire est $L = \alpha.Id_{\mathbb{E}}$, avec le réel $\alpha \neq 0$ est appelé rapport de la dilatation.

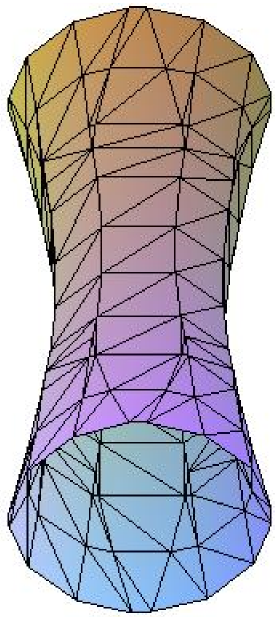

FIGURE 5.1 – ellipse

I)Montrer qu'une dilatation est toujours bijective
$\det L = (\alpha)^n \neq 0$ avec $n = \dim E$ donc L est bijective alors f est bijective.
II)A)Si $\alpha = 1$ alors $L = Id_{\mathbb{E}}$, donc pour tout A, B de $\mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{f(A)f(B)} = L(\overrightarrow{AB}) = Id_{\mathbb{E}}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$. donc d'après l'identité de parallélogramme on obtient $Af(A) = Bf(B)$ donc il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ tel que $Af(A) = \overrightarrow{u}$ alors $f(A) = A + \overrightarrow{u}$ donc f est une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
B)1)Si $\alpha \neq 1$ alors $L = Id_{\mathbb{E}}$, et on suppose qu'il existe un point fixe de f noté O, alors pour tout A de $\mathcal{E}$ obtient $\overrightarrow{f(A)O} = L(\overrightarrow{AO}) = \alpha.Id_{\mathbb{E}}\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AO}$.
donc f est une homothétie de centre O et de rapport α
2)si f n'admet aucun point fixe alors f est une composition d'une translation avec une homothétie.voir 5.1

Bibliographie

[1] Jean-Marie Monier : *Geometrie PCSI-PTSI,PC-PSI-PT cours et 400 exercices corrigés* .3 édition Dunond,Paris.2003.

[2] Michèle Audin *L3M GÉOMÉTRIE*.EDP Sciences.2006.

[3] Antoine Ducros *Géométrie affine et euclidienne*. Cours de L3 dispensé à l'Université Paris 6.Année universitaire 2011-2012.

[4] M.DAVID,F. HAGLUND,D.PERRIN J. CHAUMAT *GÉOMÉTRIE AFFINE*.Document de travail pour la préparation au CAPES.UNIVERSITÉ PARIS-SUD. Version 2008

[5] P. Tauvel, *Géométrie pour l'agrégation interne*, Masson (1997).

[6] C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, Hermann (1983).