

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mustapha STAMBOULI de Mascara



Faculté des Sciences et Technologies

Polycopié de Cours :

# ***Transfert de chaleur***

Fait par: Dr. Bekhti Siad Amaria

Destiné aux étudiants de 3<sup>ème</sup> Année / Génie des Procédés

**Algérie 2021-2022**

## EXTRAIT DE CANEVAS

Semestre : 5

Unité d'enseignement : **UEF 3.1.1**

Matière 1 : **Transfert de Chaleur**

### **Objectifs de l'enseignement:**

- Etude des différents modes de transfert : conduction, convection et rayonnement.
- Applications des lois régissant ces différents types de transfert.

### **Connaissances préalables recommandées:**

Thermodynamique, Equations différentielles.

### **Contenu de la matière :**

#### **Chapitre 1 : (7 semaines)**

Transfert de chaleur par Conduction : Cas : mur simple, murs composites, une couche cylindrique, couches cylindriques composites ; Calorifugeage des couches cylindriques ; Calorifugeage des couches sphériques.

#### **Chapitre 2 : (5 semaines)**

Transfert de chaleur par convection : Définitions ; Expression du flux de chaleur ; Calcul du flux de chaleur en convection naturelle ; Calcul du flux de chaleur en convection forcée.

#### **Chapitre 3 : (3 semaines)**

Transfert de chaleur par rayonnement : Lois du rayonnement ;Loi de Lambert ;Loi de Kirchhoff ; Rayonnement des corps noirs ; Rayonnement des corps non noirs ; Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces.

**Mode d'évaluation :**

Contrôle continu : **40%** ;

Examen : **60%**.

**Références bibliographiques:**

1. Krabøl, Transfert de chaleur, Masson, 1990.
2. Martin Becker, Heat transfer: a modern approach. Plenum, 1986.
3. J.F. Sacadura, Initiation au transfert thermique, TEC-DOC, 1980.
4. Pierre Wuithier, Le pétrole, raffinage et génie chimique.

---



---

## SOMMAIRE

<b>Avant Propos</b>	02
<b>GENERALITES SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR</b>	04
1. Introduction.....	04
2. Rappels de thermodynamique.....	05
2.1 Le premier principe de la thermodynamique.....	05
2.2 Le second principe de la thermodynamique .....	06
3. Différents modes de transfert de chaleur .....	06
3.1 La conduction .....	06
3.2 La convection .....	07
3.3 Le rayonnement.....	07
3.4 Conclusion.....	08
4. Application .....	09
4.1 La conduction.....	09
4.2 La convection.....	09
4.3 Le rayonnement .....	09
4.4 Exercice 1 : Quantité de chaleur.....	10
<b>Chapitre 1 : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION</b>	13
I.1 Introduction à la conduction .....	13
I.1.1 Origine microscopique du mécanisme de conduction .....	13
I.1.2 Exemples de transfert chaleur par conduction.....	15
I.1.3 Loi de Fourier(1822).....	16
I.1.4 La conductivité thermique .....	19
I.1.4.1 Quelques remarques concernant la conductivité thermique $\lambda$ .....	20
I.1.5 Equation fondamentale de transfert chaleur par conduction .....	22
I.1.5.1 Bilan énergétique .....	22
I.1.5.2 Cas particulier : milieu homogène et isotrope .....	24
I.1.5.3 Equation de Fourier .....	25

<b>I.1.6</b>	Phénomènes linéaires de conduction thermique .....	26
<b>I.1.6.1</b>	Mur simple sans production de chaleur .....	26
<b>I.1.6.2</b>	Résistance thermique d'un mur simple.....	28
<b>I.1.6.3</b>	Mur composite sans production de chaleur .....	29
<b>I.1.6.4</b>	Résistance thermique d'un mur composite:.....	30
<b>I.1.6.5</b>	Mur simple avec production de chaleur .....	30
<b>I.1.7</b>	Problème cylindrique de conduction thermique .....	31
<b>I.1.7.1</b>	Equation fondamentale .....	31
<b>I.1.7.2</b>	Résistance thermique d'un tube cylindrique circulaire .....	32
<b>I.1.7.3</b>	Tube cylindrique circulaire composite .....	32
<b>I.1.7.4</b>	Tube creux avec production de chaleur .....	33
<b>I.1.7.5</b>	Exemple : mur en Béton.....	34
<b>I.1.7.6</b>	Milieu à géométrie sphérique.....	34
<b>I.1.8</b>	Applications.....	35
<b>I.1.8.1</b>	Déperdition thermique d'un réfrigérateur.....	35
<b>I.1.8.2</b>	Génération de chaleur à flux constant p au sein d'une plaque.....	37
<b>I.1.9</b>	Mesure des conductivités thermiques en régime stationnaire.....	39
<b>I.1.9.1</b>	Principe de la mesure.....	39
<b>I.1.9.2</b>	Mesure absolue en système linéaire.....	40
<b>I.1.9.3</b>	Mesure absolue en système linéaire.....	42
<b>I.1.9.4</b>	Exercice sur Transfert de chaleur par conduction.....	42
<b>Chapitre II : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION</b>		46
<b>II.1</b>	Rappels sur l'analyse dimensionnelle .....	46
<b>II.1.1</b>	Dimensions fondamentales .....	46
<b>II.1.2</b>	Principe de la méthode .....	47
<b>II.1.3</b>	Exemple d'application .....	48
<b>II.1.3.1</b>	Détermination des grandeurs physiques.....	48
<b>II.1.3.2</b>	Equation dimension de chaque grandeur.....	49
<b>II.1.3.3</b>	Détermination des groupements $\pi$ .....	49
<b>II.1.3.4</b>	Signification physique de ces groupements.....	50
<b>II.1.4</b>	Avantage l'utilisation des grandeurs réduites .....	51

<b>II.1.4.1</b> Quelques groupements sans dimensions.....	51
<b>II.2</b> Convection sans changement d'état.....	52
<b>II.2.1</b> Généralités & Définitions.....	52
<b>II.2.1.1</b> Convection naturelle et forcée.....	52
<b>II.2.1.2</b> Régime d'écoulement.....	52
<b>II.2.2</b> Expression du flux de chaleur .....	53
<b>II.2.3</b> Calcul du flux de chaleur en convection forcée .....	56
<b>II.2.4</b> Calcul du flux de chaleur en convection naturelle .....	63
<b>II.2.4.1</b> Mécanisme de la convection naturelle.....	63
<b>II.2.4.2</b> Signification physique du nombre de Grashof.....	64
<b>II.3</b> Convection avec changement d'état .....	65
<b>II.3.1</b> Condensation .....	65
<b>II.3.1.1</b> Phénomènes.....	65
<b>II.3.1.2</b> Valeur du coefficient h pour la condensation en film.....	66
<b>II.3.2</b> Ebullition .....	70
<b>II.3.2.1</b> Formation de gouttelettes et des bulles.....	70
<b>II.3.2.2</b> Les différents régimes d'ébullition.....	70
<b>II.3.2.3</b> Intérêt du transfert de chaleur par ébullition.....	74
<b>II.4</b> Exercice : Transfert de chaleur par convection.....	75
<b>Chapitre III : TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT</b>	78
<b>III.1</b> Généralités & Définitions.....	78
<b>III.1.1</b> Nature du rayonnement .....	78
<b>III.1.2</b> Définition.....	79
<b>III.1.2.1</b> Classification.....	79
<b>III.1.2.2</b> Définition relatives aux sources .....	80
<b>III.1.2.3</b> Définitions relatives à un récepteur .....	83
<b>III.1.2.4</b> Corps noir, Corps gris.....	84
<b>III.2</b> Lois du rayonnement .....	85
<b>III.2.1</b> Loi de Lambert .....	85
<b>III.2.2</b> Lois physiques .....	87
<b>III.2.2.1</b> Loi de kirchoff.....	87

<b>III.2.2.2</b> Rayonnement du corps noir .....	88
<b>III.2.2.3</b> Rayonnement des corps non noirs .....	90
<b>III.3</b> Rayonnement réciproque de plusieurs surfaces .....	90
<b>III.3.1</b> Radiosité et flux net perdu.....	90
<b>III.3.2</b> Facteur de forme géométrique .....	91
<b>III.3.3</b> Calcul des flux .....	93
<b>III.3.3.1</b> Exemple d'application : cas de deux plans parallèles infinis.....	94
<b>III.3.4</b> Analogie électrique .....	95
<b>III.3.4.1</b> Exemple d'application : Cas d'une surface $S_1$ convexe complètement entourée par une surface $S_2$ .....	97
<b>III.4</b> Emission et absorption des gaz .....	98
<b>III.4.1</b> Spectre d'émission des gaz .....	98
<b>III.4.2</b> Echange thermique entre un gaz et une paroi.....	98
Exercice 1 : Transfert de chaleur par rayonnement.....	101
Exercice 2 : Combinaison des modes de transfert.....	102
 <b>ANNEXE : EXERCICES D'APPLICATIONS</b>	106
Exercice 1.....	106
Exercice 2.....	106
Exercice 3.....	107
Exercice 4.....	107
Exercice 5.....	108
<b>SOLUTIONS DES EXERCICES D'APPLICATIONS</b> .....	109
Solution de l'Exercice 1.....	109
Solution de l'Exercice 2.....	109
Solution de l'Exercice 3.....	111
Solution de l'Exercice 4.....	112
Solution de l'Exercice 5.....	113
 <b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....	115

# **Avant Propos**

## AVANT PROPOS

Ce cours « Transfert de Chaleur » s'adresse aux étudiants de 3<sup>ème</sup> année LMD dans le cadre de la spécialité génie des procédés, mais aussi à ceux qui souhaitent acquérir les notions de base des phénomènes de transfert. Cet ouvrage est le fruit d'une longue année de travail au département de génie des procédés à la faculté des sciences et de la technologie de l'université Mustapha Stambouli de Mascara. Ce polycopié a vu le jour grâce à l'aide précieuse de plusieurs enseignants dans le domaine. Les phénomènes de transfert de chaleur (Conduction, convection et rayonnement) sont d'une importance capitale dans le domaine de science et technologie car ils interviennent dans de nombreux domaines industriels. Ce cours se propose de donner une compréhension générale de ces phénomènes tout en exposant. Les lois fondamentales de Fourier, Newton et Fick ainsi que l'initiation des étudiants aux calculs des différent flux de matières et de chaleur et la démonstration des équations des bilans pour l'équilibre et pour l'écoulement des fluides.

Ce document présente les principes de base qui interviennent dans le transfert par conduction pure de chaleur en régime permanent des températures. Il sera étendu par la suite à d'autres formes de transferts de chaleur : convection et rayonnement. Ce polycopie est vivement recommandé aux étudiants du deuxième cycle, aux licences appliquées, aux licences professionnelles de Thermique et d'Energétique, aux étudiants de licence fondamentale (parcours énergétique) au étudiants de Masters d'Energétique, aux étudiants des facultés des sciences et techniques et écoles d'ingénieurs où l'enseignement de la thermique et énergétique commence à prendre place. Il s'adresse aussi aux techniciens et à tous ceux qui veulent s'initier aux problèmes des transferts thermiques. Structuré suivant le programme préconisé pour les licences appliquées. Ce polycopie contient trois chapitres qui regroupent toutes les définitions élémentaires de base et outils de calcul analytique et numériques. Certains exercices et problèmes sont proposés afin que le lecteur puisse, soi même, juger ses connaissances dans ce domaine.

**Rappels**

**Généralités Sur Les  
Transferts De  
Chaleur**

## GÉNÉRALITÉS SUR LES TRANSFERTS DE CHALEUR

### 1. INTRODUCTION

L'énergie correspond à un transfert ou échange par interaction d'un système avec son environnement. Ce système subit alors une transformation. On distingue habituellement deux types d'énergie :

i) le travail noté  $W$  qui peut prendre diverses formes selon l'origine physique du transfert en jeu (électrique, magnétique, mécanique.....), et

ii) la chaleur notée  $Q$ .

La thermodynamique classique ne s'intéresse généralement qu'aux états d'équilibre et aux variations entre ces états, grâce à l'utilisation de fonctions d'état, qui sur un plan mathématique sont des différentielles totales exactes. On pourrait d'ailleurs plus logiquement appeler cette discipline ; la thermostatique. Le formalisme généralement utilisé nécessite ainsi seulement la connaissance des états initiaux et finaux sans pour autant examiner le processus de transfert d'énergie, ni les modes d'interaction. L'étude complète et générale des mécanismes de transfert d'énergie nécessite d'aborder le formalisme de la thermodynamique hors équilibre (formalisme d'Onsager par exemple et théories de Prigogine).

Dans le cadre de cet ouvrage, nous nous limiterons de façon modeste, parmi les transferts énergétiques, à l'étude des transferts de chaleur ou transferts thermiques, selon un point de vue macroscopique.

Nous serons ainsi amenés à répondre à trois questions :

1. Qu'est ce qu'un transfert de chaleur ?
2. Comment la chaleur est elle transférée ?
3. Pourquoi est-ce important de l'étudier ?

Les réponses apportées à ces trois questions nous permettront de comprendre les mécanismes physiques en jeu dans les transferts de chaleur et d'apprécier l'importance de ces transferts de chaleur dans les problèmes industriels, environnementaux et économiques.

Par définition, un transfert de chaleur ou transfert thermique entre deux corps est une interaction énergétique qui résulte d'une différence de température entre les deux corps.

On distingue habituellement trois modes de transfert de chaleur :

1. La conduction thermique ou diffusion thermique
2. Le rayonnement thermique
3. La convection

Ces trois modes sont régis par des lois spécifiques et font ainsi l'objet de chapitres différents, cependant strictement parlant, seuls la conduction et le rayonnement sont des modes fondamentaux de transmission de la chaleur ; la convection, tout en étant très importante, ne fait que combiner la conduction avec un déplacement de fluide.

En outre il est rare qu'une situation particulière ne concerne qu'un seul mode : le plus souvent deux sinon trois modes entrent en jeu. Il sera donc nécessaire de poser correctement les problèmes pour prendre en compte ces différents mécanismes. N'oublions pas qu'un autre mode de transfert, qui ne fera pas l'objet ici d'étude existe : il s'agit des changements d'état.

## 2. RAPPELS DE THERMODYNAMIQUE

### 2.1 Le premier principe de la thermodynamique

Le premier principe est fondamentalement un principe de conservation. Il régit les transformations mutuelles du travail et de la chaleur en établissant un bilan. Il peut s'énoncer comme suit :

*" Lorsqu'un système isole subit une série de transformations qui le ramènent à un état d'équilibre final (2) identique à l'état d'équilibre initial (1) et au cours desquelles il n'échange avec l'extérieur que du travail et de la chaleur, le rapport du travail à cette quantité de chaleur est constant "*

$$[W + Q]_1^2 = \text{Constante} \quad (\text{I.1})$$

où:

$W$  : Travail échangée entre le système et le milieu extérieur

$Q$  : Chaleur échangée entre le système et le milieu extérieur

## 2.2 Le second principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique permet de faire le bilan des échanges d'énergie d'un système matériel subissant des transformations quelconques, mais il ne fait aucune différence entre les diverses formes sous lesquelles cette énergie se trouve fournie au milieu extérieur. Or, il n'est pas indifférent de recueillir la diminution d'énergie d'un système sous forme de travail ou de chaleur comme il n'est pas non plus sans importance que la quantité de chaleur éventuellement fournie le soit à une température faible ou à une température élevée.

Le second principe permet de calculer la quantité de travail susceptible d'être recueillie dans une transformation déterminée. Il permet aussi de préciser le sens dans lequel tendent réellement à évoluer les systèmes (alors que le premier principe qui est essentiellement un principe d'équivalence, ne nous indique rien sur le ou les systèmes (alors que le premier principe qui est essentiellement un principe d'équivalence ne nous indique rien sur le sens de la transformation)).

## 3. DIFFÉRENTS MODES DE TRANSFERT DE CHALEUR

Le transfert de chaleur peut être défini comme la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de température. Il est régi par une combinaison de lois physiques.

La littérature traitant du transfert de chaleur reconnaît essentiellement trois modes de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

### 3.1 La conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique. (Gradient de température dans un milieu).

Dans la plupart des cas, on étudie la conduction dans les milieux solides, puisque dans les milieux fluides (c'est-à-dire liquide ou gazeux), il y a souvent couplage avec un déplacement de matière et donc mécanisme de convection.

La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact.

La conduction s'effectue de proche en proche :

- ✓ Si on chauffe l'extrémité d'un solide il y a transfert progressif.
- ✓ Si on coupe le solide, on stoppe le transfert.

*Exemple :* Barre de métal chauffée à l'une de ces extrémités.

On comprend donc intuitivement que la conduction a une origine microscopique. Il s'agit d'un mécanisme de diffusion de la chaleur.

### **3.2 La convection**

Les phénomènes de convection interviennent dans la transmission de la chaleur chaque fois qu'un fluide se déplace par rapport à des éléments fixes. Lorsque se produit au sein du fluide des courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre, si le mouvement du fluide est provoqué par une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée.

*Exemple :* C'est ce qui se passe le long d'un radiateur. L'air froid s'échauffe au contact du radiateur, se dilate et monte sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il est alors remplacé par de l'air froid et ainsi de suite ; il y a existence de courants de fluide dans l'air ambiant.

### **3.3 Le rayonnement**

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un milieu à haute température vers un autre à basse température lorsque ces milieux sont séparés dans l'espace. Ce mode de transfert ne nécessite pas de support matériel et peut donc s'effectuer dans le vide.

En général, les sources de rayonnement sont des solides et le rayonnement se fait par la surface.

Le rayonnement thermique ne diffère des autres ondes électromagnétiques, comme les ondes hertziennes par exemple, que par son origine : la température. En effet tout corps rayonne tant que sa température est différente de 0 °K.

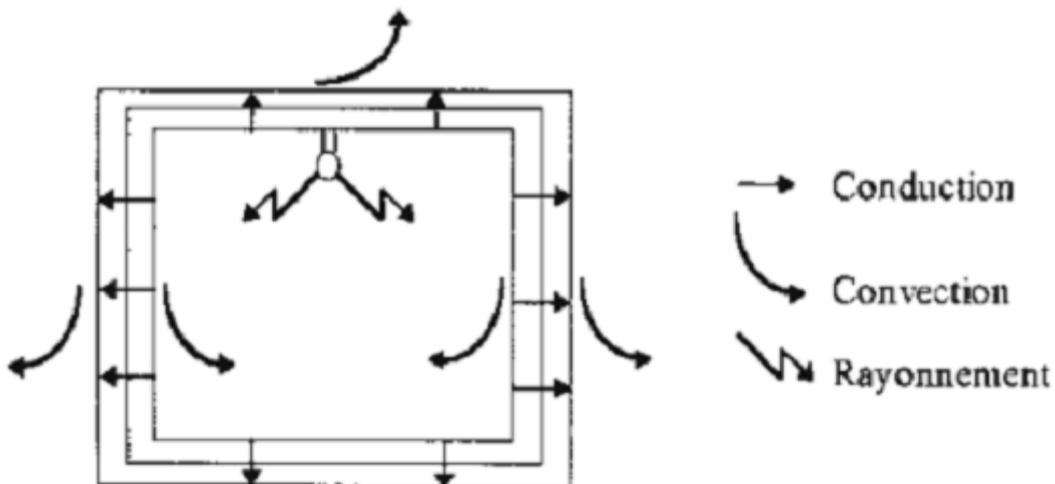
Le rayonnement thermique est un phénomène de surface.

### 3.4 Conclusion

La plupart des phénomènes étudiés font apparaître l'intervention des trois modes de transmission de la chaleur en même temps. Afin d'explicitier ceci, prenons le cas d'une chambre (figure I.1)

En effet, les trois modes de transfert de chaleur interviennent dans ce cas et sont représentés par :

- La conduction à travers les murs, le parquet et le toit de la chambre,
- La convection qui prend place grâce au mouvement de l'air à l'extérieur et à l'intérieur de la chambre,
- Le rayonnement de la lampe éclairant la chambre.



**Figure 1.1** : Illustration du phénomène de transfert de chaleur se produisant dans une chambre close

## 4. APPLICATIONS

### 4.1 La conduction

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours,...etc. Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique,...etc.) et qui sont des parois composites travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur.

### 4.2 La convection

Les applications du transfert de chaleur par convection interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur.

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud.

### 4.3 Le Rayonnement

➤ Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent :

- le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.) ;
- la cuisson (teintures, apprêts, enductions...) ;
- le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...) ; les polymérisations (encres, revêtements, emballages...) ;
- la stérilisation (flacons pharmaceutiques, produits alimentaires divers...).

➤ Le rayonnement ultraviolet est constitué de photons dont l'énergie est de l'ordre de grandeur de l'énergie des liaisons atomiques. Ceux-ci agissent sur la matière par déplacement

des électrons vers des niveaux énergétiques supérieurs. Lorsque la matière soumise au rayonnement y est sensible, il s'y produit des réactions chimiques. La partie du rayonnement ultraviolet absorbée par la matière et qui n'est pas utilisée à la réaction chimique est transformée en chaleur.

#### 4.4 Exercice 1 : Quantité de chaleur

1. On apporte 20kJ à 1kg d'eau. On constate que sa température s'élève de 20, 0°C à 24, 8°C. Que peut-on déduire à partir de cette expérience?

2. On chauffe un morceau d'acier homogène. Sa température passe de 20°C à 30°C. Sachant que la capacité thermique massique de l'acier considéré est 0,51 kJ/kg.°K, Déterminer la quantité de chaleur apportée et la variation de l'enthalpie de l'acier.

#### Solution :

1. On constate d'après cette expérience que la quantité de chaleur absorbée par l'eau est proportionnelle à : (Voir figure I.2)

- i. la masse de l'eau  $m$  (en kg),
- ii. la différence de température  $\Delta T = T_i - T_f$  (en °C ou K),
- iii. la nature du corps absorbant spécifié par sa capacité thermique massique :  $C_{eau}$

La quantité de chaleur absorbée par l'eau s'écrit alors :

$$Q = m \cdot C_{eau} \cdot \Delta T \text{ (en Joule)}$$

Nous pouvons déduire alors la capacité thermique massique de l'eau:

$$C_{eau} = \frac{Q}{m \Delta T} \text{ (en J/Kg} \cdot \text{K)} \text{ AN: } C_{eau} = \frac{210^4}{24.8 - 20} = 4.1667 \text{ KJ/kg} \cdot \text{K}$$

Notons que  $\Delta T$  est une différence de température, soit en °C soit en °K.

Exemple :  $\Delta T = 24.8 - 20 = 4.8^\circ\text{C}$ , ou  $\Delta T = (24.8 + 273.15) - (20 + 273.15) = 4.8^\circ\text{K}$ .

2. La quantité de chaleur apportée à l'acier est :

$$Q = m_{acier} \cdot C_{acier} \cdot \Delta T$$

$$AN : Q = 0.51 \cdot 10^3 \cdot [30 - 20] = 5.1 \text{ KJ/Kg}$$

La quantité de chaleur pour une transformation réversible :

$$dQ = C dT + k dF$$

Le premier terme désigne la variation de la température et le deuxième représente la dilatation du corps. À pression constante, le deuxième terme est nul. La variation d'enthalpie est alors la variation d'énergie interne.

$$\Delta H = \Delta U = \Delta Q = C_{\text{acier}} \Delta T$$

$$AN : \Delta H = 0.51 \cdot 10^3 \cdot [30 - 20] = 5.1 \text{ kJ}$$

## **Chapitre I**

# **Transfert De Chaleur Par Conduction**

## Chapitre I :

### TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION

#### I.1 INTRODUCTION À LA CONDUCTION

##### I.1.1 Origine microscopique du mécanisme de conduction

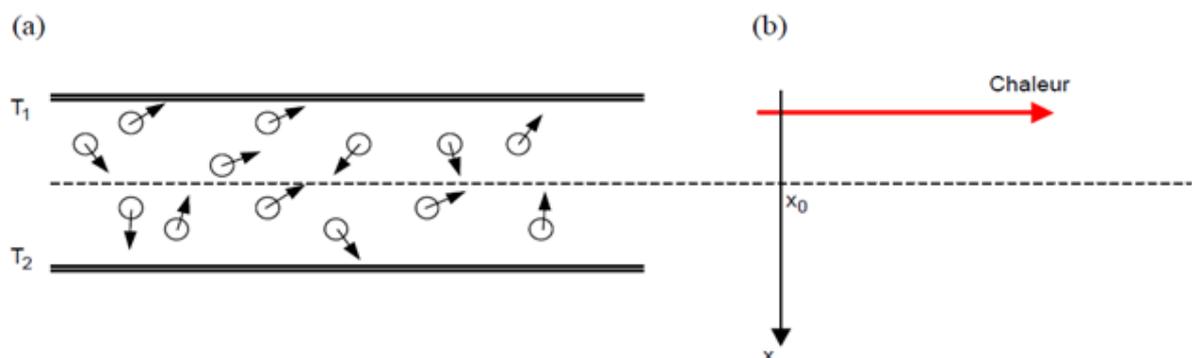
Rappelons que la conduction nécessite un support matériel et que son origine est microscopique, liée aux atomes et aux molécules du milieu où se produit la conduction.

La conduction peut être vue comme le transfert d'énergie de particules les plus énergétiques vers les particules les moins énergétiques, à cause des interactions entre particules.

➤ Description Simplifiée du mécanisme physique

Exemple : gaz sans mouvement d'ensemble (pas de convection).

Prenons un gaz contenu entre deux surfaces à  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_2$  (voir **Figure I.1**).



**Figure I.1:** (a) Mécanisme de dissipation thermique à la base de l'agitation moléculaire, et (b) Profil de température associé.

Dans un modèle moléculaire simple (théorie cinétique des gaz parfaits – distribution de Maxwell), l'énergie cinétique moyenne peut se mettre sous la forme suivante :

$$U = E_{\text{cinétique-translation}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

Où :

- $v$  désigne la vitesse quadratique moyenne d'agitation des molécules sous la seule action de la température  $T$ .
- $k$  est la constante de Boltzmann ( $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ ) et  $m$  la masse d'un atome ou d'une molécule.
- Les molécules en mouvement près de  $T_1$  ont la température  $T_1$ .
- Les molécules en mouvement près de  $T_2$  ont la température  $T_2$ .

*« Une énergie plus grande est par conséquent associée à une température plus élevée ».*

Au moment des collisions qui sont incessantes, il y a transfert d'énergie des molécules les plus énergétiques vers les moins énergétiques, des plus rapides vers les moins rapides, c'est-à-dire des plus hautes températures vers les plus basses.

Si l'on considère un plan fictif d'abscisse  $x_0$  dans le gaz (**voir Figure I.1**), des molécules traversent continûment la surface dans un sens ou dans l'autre. Mais les molécules du dessus ont une énergie plus grande car la température est plus élevée, il se produit ainsi un transfert net dans le sens des  $x > 0$  par mouvement aléatoire des molécules. Il s'agit d'un processus de diffusion d'énergie.

Pour un **liquide** le modèle est à peu près le même avec des interactions plus fortes.

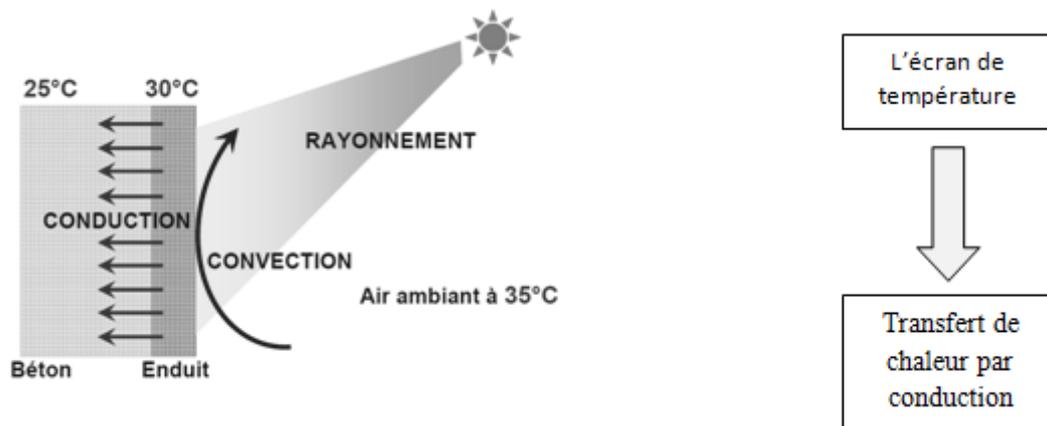
Dans les **solides** il faudra distinguer deux cas, à savoir celui des matériaux de type conducteur électrique, et celui des matériaux de type isolant électrique.

On observe que les bons conducteurs thermiques sont aussi des bons conducteurs électriques (Métaux). Intuitivement, il est facile de comprendre que dans le cas des matériaux conducteurs électriques, les électrons responsables de la conduction électrique sont aussi responsables de la conduction thermique.

Par contre dans le cas des isolants électriques, les vibrations atomiques (phonons) sont à l'origine microscopiques de la conduction thermique.

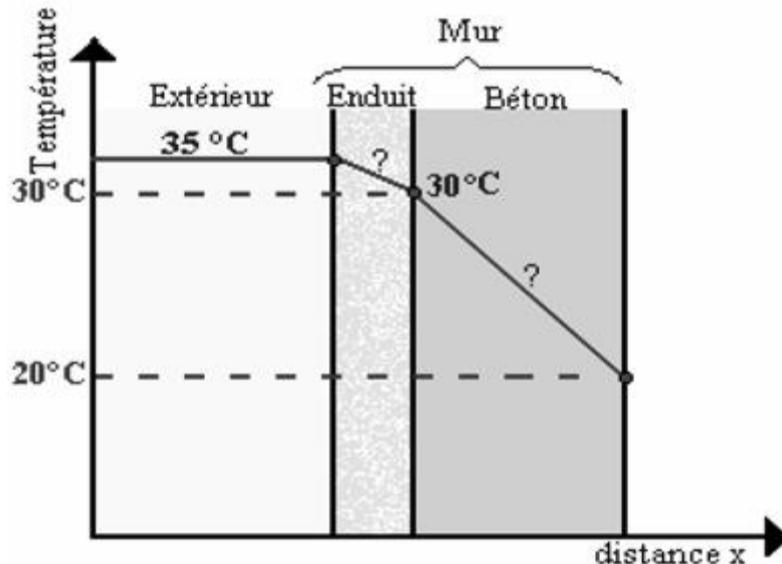
### I.1.2 Exemples de transfert chaleur par conduction : « Apports de chaleur et déperditions d'un mur »

La paroi extérieure du mur (enduit) reçoit de la chaleur par rayonnement et par convection. Elle cède de la chaleur au mur de béton par conduction

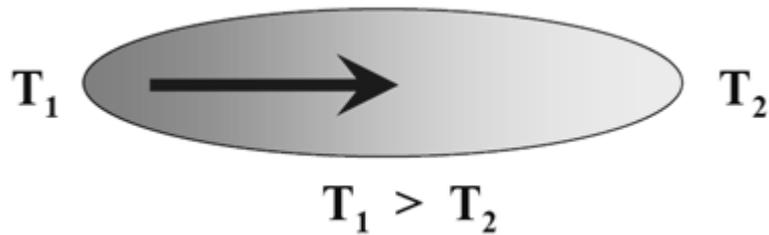


**Figure I.2 :** Profil spatial de la température dans un mur de Béton.

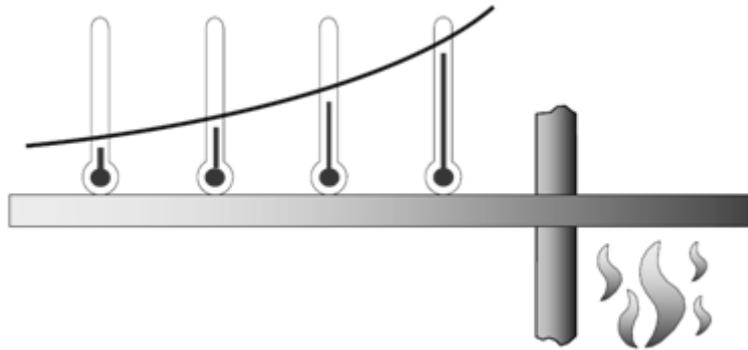
La température  $T$  est une fonction de la variable  $x$ . Sa variation en fonction de  $x$  peut être linéaire ou non.



**Figure I.3 :** Profil de la température dans un mur de Béton en fonction de la variable  $x$ .



**Figure I.4 :** Transfert de chaleur dans un corps solide



**Figure I.5 :** Transfert de chaleur dans une barre d'acier.

*« La conduction est le phénomène par lequel la chaleur se transmet »*

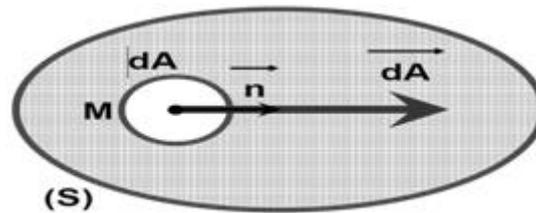
Le transfert d'énergie se fait d'une région à haute température vers une autre à basse température à l'intérieur d'un milieu solide (liquide ou gazeux sous certaines conditions) ou entre différents milieux mis en contact.

Le transfert d'énergie se fait par transmission de l'énergie cinétique d'agitation thermique des particules qui ont une énergie cinétique plus grande dans les régions à température élevée vers les régions à température plus faible.

### **I.1.3 Loi de Fourier (1822)**

Les solutions mathématiques proposées aux problèmes de la conduction en régime stationnaire sont basées sur l'analyse du mathématicien français J.B.J. FOURIER donnant la loi de transfert de chaleur par conduction.

Le corps (S) initialement en déséquilibre thermique évolue en fonction du temps



**Figure I.6 :** Représentation d'un corps (S) en déséquilibre thermique en évolution avec le temps

Chaque point du corps (S) est caractérisé par sa température T :

$$T = T(x, y, z) \quad T = T(x, y, z, t)$$

Régime permanent ou régime transitoire stationnaire

La loi de Fourier exprime l'énergie-chaleur  $dQ$  transférée à travers l'élément de surface  $dA$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  :

$$\delta = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{dA} \cdot dt$$

$$\overrightarrow{dA} = dA \cdot \vec{n} : \text{vecteur surface } \overrightarrow{\text{grad}}T \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{array} \right.$$

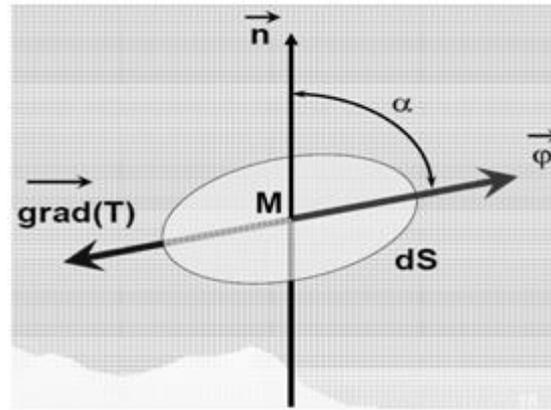
$$\delta = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{dA} \cdot dt$$

$\vec{n}$  : Vecteur unitaire normal à la surface  $dS$

$$\frac{\delta Q}{dt} = \dot{Q} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{dA}$$

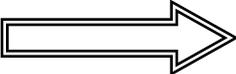
On définit la densité de flux thermique  $\phi$  par :

- $\vec{\phi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)$
- $\overrightarrow{\text{grad}}T$  en K/m
- $\vec{\phi}$  en W/m<sup>2</sup>
- $\lambda$  en W/(m.°K)



**Figure I.7 :** Schéma de la densité de flux thermique  $\phi$

Une cause donne lieu à un effet :

Cause		Effet
Gradient de température		Flux de chaleur
Gradient de concentration		Flux de matière

Pour les corps anisotropes, tel que les cristaux ou les corps composites (bois, fibres enrobées, milieux poreux etc...) :

La loi de Fourier se généralise sous forme tensorielle :

$$\delta Q = -\bar{\lambda} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \cdot \overrightarrow{dA} \cdot dt$$

$$\bar{\lambda} = \begin{vmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$$

Chaque composante  $\phi_x$  sera de la forme :

$$\phi_x = -\left( \lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial X} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

### I.1.4 La conductivité thermique

La conductivité thermique  $\lambda$  (souvent notée  $k$  dans les pays anglo-saxons) exprime, de par sa définition, l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur.

**Définition de la conductivité thermique :** « *la conductivité thermique est le flux de chaleur qui traverse une surface unité pour un matériau soumis à un gradient de température égal à l'unité* ».

La conductivité thermique s'exprime en **W.m<sup>-1</sup>.°K<sup>-1</sup>**.

La conductivité thermique dépend de :

- La nature physico-chimique du matériau
- La nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz)
- La température
- L'orientation dans les matériaux anisotropes

On trouvera dans la Tableau I.1 des ordres de grandeur pour la conductivité thermique pour divers matériaux à température ambiante (20°C).

**Tableau I.1 :** Tableau des coefficients de conductivité thermique

Nature du corps	Masse volumique	Chaleur massique	Conductivité thermique
Notation	$\rho$	C	$\lambda$
Unité	<b>Kg/m<sup>3</sup></b>	<b>J/ (kg.°K)</b>	<b>W / (m.°K)</b>
<b>Argent</b>	10500	230	418
<b>Cuivre</b>	8940	380	389
<b>Aluminium</b>	2700	860	200
<b>Acier</b>	7850	490	46
<b>Béton</b>	2300	960	0,92
<b>Verre</b>	2530	840	1,20
<b>Polystyrène</b>	44		0,025
<b>Laine de verre</b>	200	0,67	0,040

**Tableau I.1 :** Tableau des coefficients de conductivité thermique (W/m.°K) de quelques matériaux

Liquides :		Gaz :	
Acetone	0,20	Air	0,026
Alcool, ethyl	0,17	CO2	0,017
Mercury	8,7	Nitrogen	0,026
Oil, engine	0,15	Oxygen	0,027
Water	0,58		
Solides Métalliques		Non Métalliques	
Iron	73	Asbestos	0,16
Steel	46	Red Brick	0,63
Aluminum	210	Cardboard	0,2
Copper	386	Cement	0,30
Silver	406	Earth's crust	1,7
Gold	293	Glass	0,8
Yellow Brass	85	Fiberglass	0,04

#### I.1.4.1 Quelques remarques concernant la conductivité thermique $\lambda$

Les impuretés diminuent fortement la conductivité des matériaux. La règle habituelle des mélanges n'est pas applicable ni pour les alliages ni pour les impuretés. Les conductivités des alliages sont difficilement interprétables.

$$\text{Ni } \lambda = 62 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{Cu } \lambda = 405 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\text{Alliage (60\% Ni + 40\% Cu)}$$

$$\lambda = 22 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

#### Champs de lignes isothermes

Définition d'une surface isotherme  $\Sigma$

Pour tout  $M \in \Sigma$ ,  $T(M) = \text{Cte}$  ou  $dT \equiv 0$

**La loi de Fourier:**

$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}(T)$  Signifie que les vectrices densités de flux et gradient de température sont colinéaires.

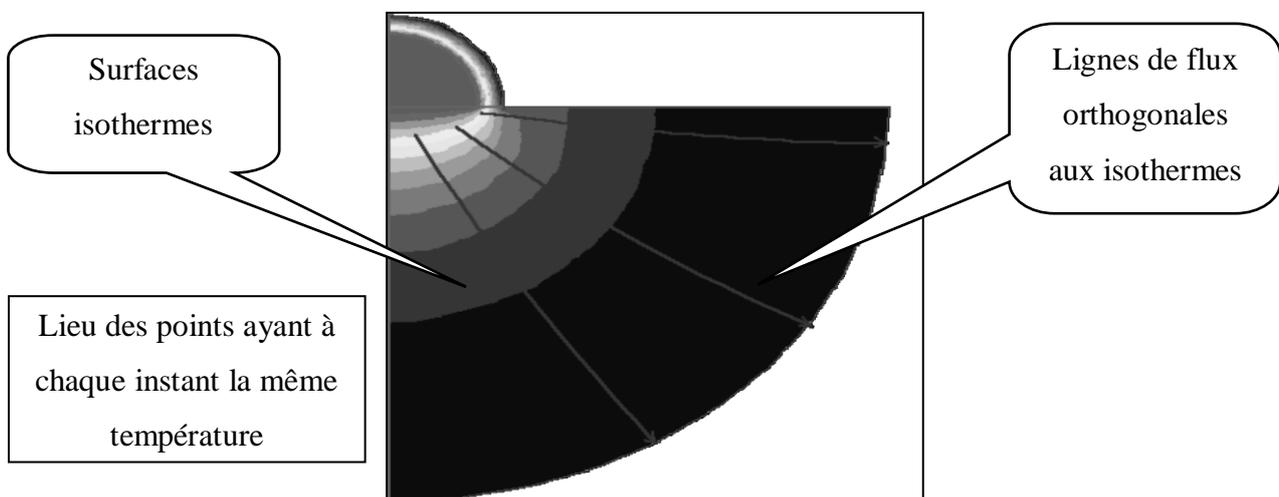
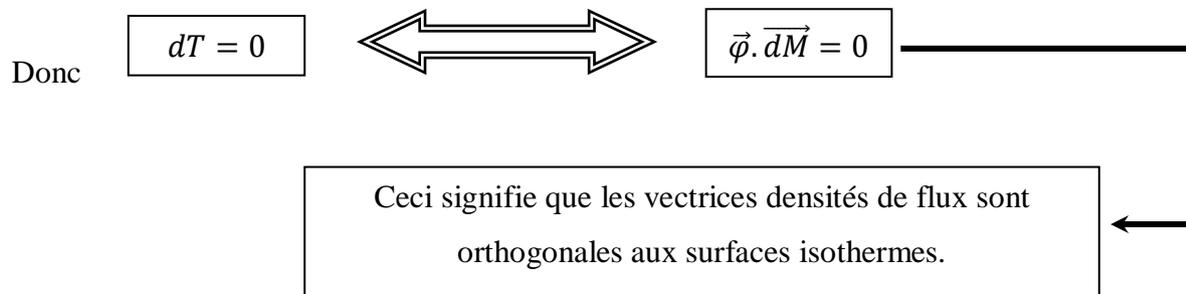
La définition du gradient :

$$dT = \overrightarrow{grad}(T) \cdot d\vec{M}$$

Conduit à l'expression du

$$\vec{\varphi} \cdot d\vec{M} = -\lambda \cdot dT$$

Produit scalaire :



**Figure I.8 :** Lignes de flux orthogonales et isothermes

### I.1.5 Equation fondamentale de transfert chaleur par conduction

Considérons un solide indéformable de volume  $V$  :

- de masse volumique  $\rho$  ;
- de chaleur massique  $c$  ;
- de conductivité thermique  $\lambda$  ;
- de puissance-chaleur  $P$  générée par unité de volume due aux sources internes (ou puits).

$P$  peut être provoquée par effet Joule, par frottement interne, par des réactions chimiques ou nucléaires, par absorption de rayonnements lumineux, électromagnétiques ou corpusculaires.

En général,  $c$  et  $\lambda$  dépendent des variables de l'espace et de la température.

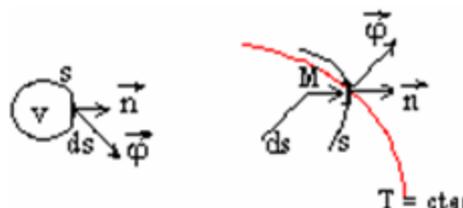
La puissance-chaleur  $P$  produite par une source interne par unité de temps est une fonction du temps, de l'espace et de la température.

- Cas des réactions chimiques :  $P = A_0 \exp[-\alpha T]$
- Cas de production de chaleur par effet Joule :  $P = A(M, t) + B(M, t)$

#### I.1.5.1 Bilan énergétique

On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume fini  $v$  contenu dans  $V$  et limité par une surface  $s$ .

L'énergie chaleur qui traverse l'élément de surface  $ds$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  est donnée par la loi de Fourier :



**Figure I.9** : Présentation de l'énergie de chaleur sur un élément de volume  $v$

$$\delta Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}(T) \cdot \overrightarrow{dS} \cdot dt$$

$$\delta Q = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds \cdot dt$$

Ou

La puissance-chaleur sortant à travers la surface s est :

$$\int_c^1 \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

La puissance reçue par le volume v à travers sa surface est :

$$-\int_c^1 \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

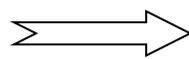
La puissance-chaleur générée par les sources internes au volume v est :

$$\int_v^1 P \cdot dV$$

Le solide étant indéformable ( $W^+$ ) = 0, seule la variation de T intervient dans l'expression de l'énergie interne.

La variation d'énergie interne dans l'élément de volume dv de masse m = ρ.dv s'écrit :

$$dU = m \cdot c \cdot dT = \rho \cdot dv \cdot c \cdot dT$$



$$\int_v^1 \frac{dU}{dt} = \int_v^1 C \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV$$

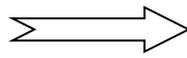
Le premier principe s'écrit :

$$-\int_s^1 \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds + \int_v^1 P \cdot dV = \int_v^1 \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dV$$



Puissance échangée sur la surface S	Puissance générée par les sources internes	Variation instantanée de l'énergie interne
---	---	--

Théorème d'Ostrogradky



$$\int_s^1 (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) \cdot ds = \int_v^1 \text{div}(\vec{\varphi}) \cdot dV$$

D'où Le premier principe s'écrit :

$$\int_v^1 \left[ -\text{div}(\vec{\varphi}) + P - \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \right] \cdot dV$$

Cette relation est vérifiée quel que soit le volume v de V. On a donc en tout point de V :

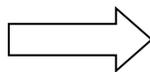
$$\text{div}(\vec{\varphi}) + \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot P = 0$$

C'est l'équation fondamentale de transfert chaleur par conduction

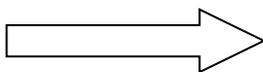
### I.1.5.2 Cas particulier : milieu homogène et isotrope

- On appelle milieu homogène un milieu constitué par un seul matériau.
- On appelle milieu isotrope un milieu dont les caractéristiques physiques ( $\rho$ ,  $c$ ,  $\lambda$ ) ne dépendent pas des variables d'espace.

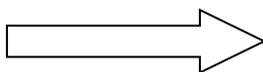
$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$



$$\text{div}(\vec{\varphi}) = \text{div}[-\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)]$$



$$\text{div} \text{div}[-\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T)] + \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot P = 0$$



$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C}$$

Diffusivité thermique

Cas particuliers :

- milieu avec source interne et en régime permanent :

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0$$

Equation de POISSON

- milieu sans source interne et en régime permanent :

$$\Delta T = 0$$

Equation de LAPLACE

- milieu sans source interne et en régime variable :

$$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Equation de FOURIER

L'équation de Fourier est suffisante pour traiter les problèmes usuels.

### I.1.5.3 Equation de Fourier

$$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

En Système de coordonnées :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$$

## I.1.6 Phénomènes linéaires de conduction thermique

### I.1.6.1 Mur simple sans production de chaleur

La géométrie du solide est supposée définie par des plans parallèles. Nous prendrons pour axes des  $x$  la direction perpendiculaire à ces plans. Nous supposons que les propriétés physiques du solide ne dépendent que de  $x$ .

Considérons une paroi dont les  $y$  faces sont planes et suffisamment étendues dans les directions  $y$  et  $z$  pour admettre qu'elles sont infinies.

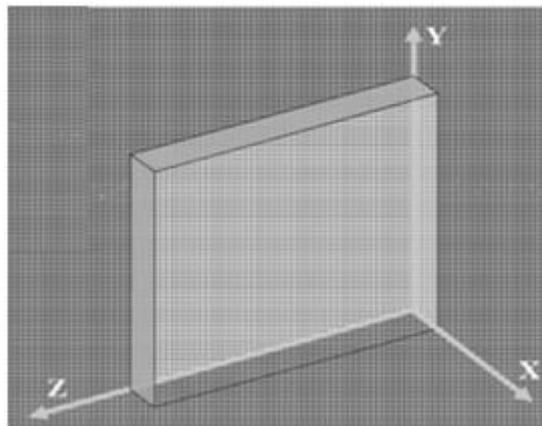
L'équation fondamentale de transfert de chaleur se réduit à :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

Dont la solution de la forme :

$$T = a x + b$$

$a$  et  $b$  sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites

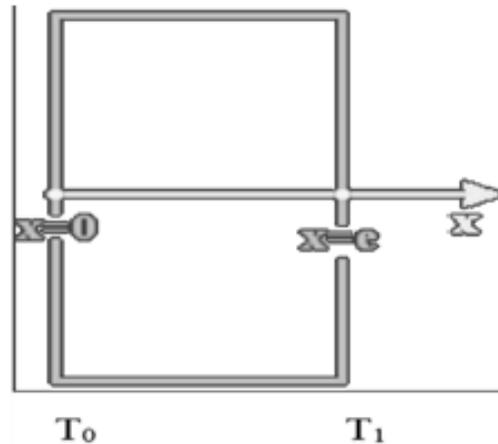


**Figure I. 10 :** Présentation d'une paroi à faces planes

Admettons que les faces  $x = 0$  et  $x = e$  soient respectivement portées aux températures  $T_0$  et  $T_1$  constantes.

La loi de répartition de la température s'écrit donc :

$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{e}x + T_0$$



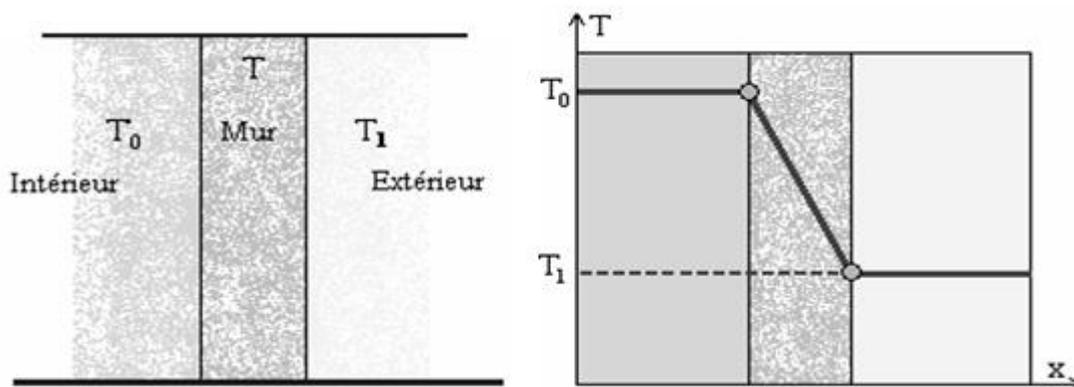
**Figure I.11** : Schéma de répartition de la température sur l'épaisseur de la paroi

La densité de flux de chaleur s'écrit :

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{e} = cte \quad \Rightarrow \quad \text{Le flux qui est entre la face } x = 0 \text{ est le même que celui qui sort par la face } x = e$$

- Si  $T_0 < T_1$  alors  $\varphi > 0$ , la chaleur pénètre par  $x = 0$  et ressort par  $x = e$ .
- Si  $T_0 > T_1$  alors  $\varphi < 0$ , la chaleur pénètre par  $x = e$  et ressort par  $x = 0$ .

**Exemple:** Profil de température dans un mur de bâtiment de l'intérieur vers l'extérieur.



**Figure I. 12** : Schéma du profil de température dans un mur de bâtiment de l'intérieur vers l'extérieur

### I.1.6.2 Résistance thermique d'un mur simple

La densité de flux de chaleur s'écrit :

$$\varphi = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{e}$$

Le flux de chaleur  $\Phi$  qui traverse une surface  $S$  du mur est :

$$\Phi = \varphi \cdot S = -\lambda \cdot S \frac{T_1 - T_0}{e}$$

Ou

$$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{e \cdot \Phi}{\lambda \cdot S}$$

Par analogie avec la conduction électrique :

$\Delta T = T_0 - T_1$  est analogue à une tension  $V$  ;

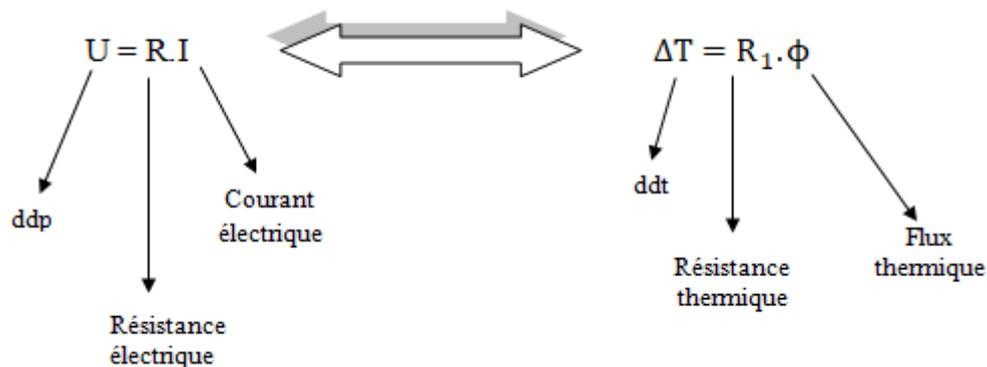
$\Phi$  est analogue à un courant  $I$ .

Or, selon la loi d'Ohm,  $V = R \cdot I$ , donc :

$$R_1 = \frac{e}{\lambda S}$$

$R_1$  est l'analogue d'une résistance électrique.

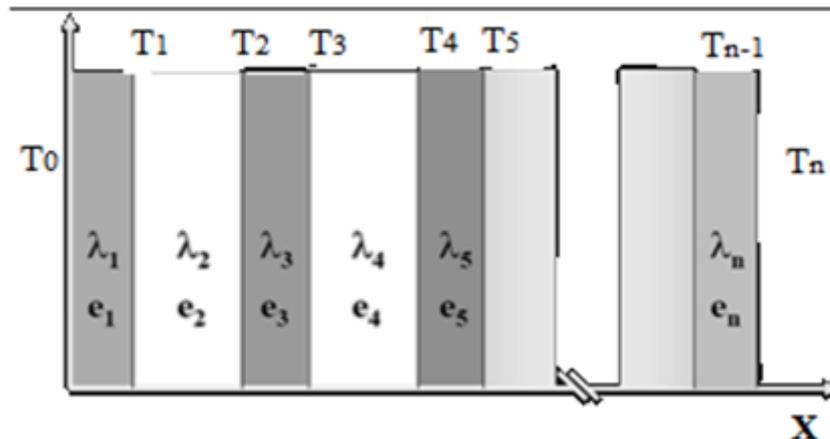
Nous l'appellerons résistance thermique.



**Figure I. 13** : Schéma analogique entre le système électrique et le système thermique

### I.1.6.3 Mur composite sans production de chaleur:

On considère un mur composite constitué de  $n$  murs simples de conductivités  $\lambda_i$ , ( $i = 1, n$ ) et d'épaisseur  $e_i$ , ( $i = 1, n$ ) accolés les uns aux autres.



**Figure I.13 :** Schéma d'un mur composite de  $n$  murs ; avec des conductivités  $\lambda_i$  et des épaisseurs  $e_i$  différentes

La densité de flux de chaleur pour chacun des murs s'écrit :

$$\boxed{\varphi_i = \frac{\lambda_i}{e_i} \cdot (T_{i-1} - T_i)_{i=1,n}} \quad \longrightarrow \quad \boxed{(T_{i-1} - T_i) = \frac{e_i}{\lambda_i} \cdot \varphi_i}$$

En régime stationnaire, la densité de flux de chaleur est la même dans tout le mur :

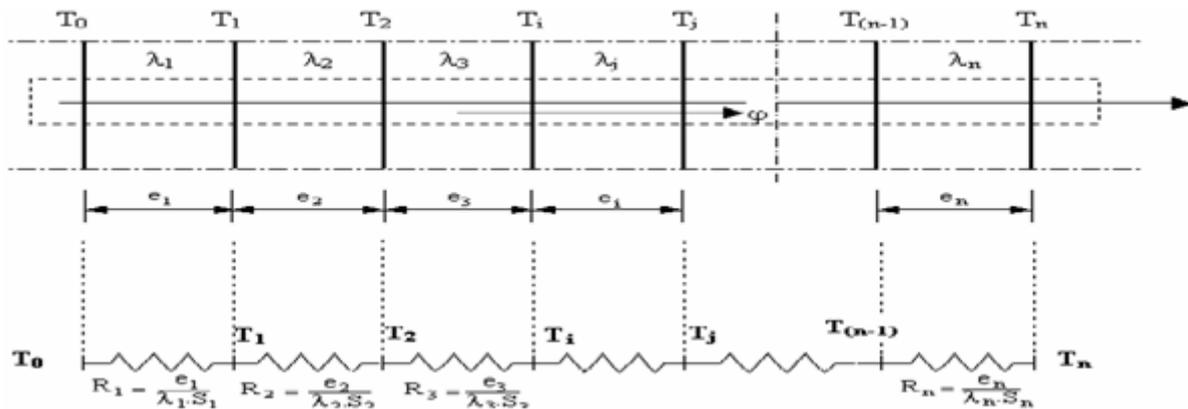
$$\longrightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$$

En ajoutant membre à membre les équations :

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{(T_0 - T_1) = \varphi_1 \cdot \frac{e_1}{\lambda_1}} \\ \boxed{(T_1 - T_2) = \varphi_2 \cdot \frac{e_2}{\lambda_2}} \\ \boxed{(T_2 - T_3) = \varphi_3 \cdot \frac{e_3}{\lambda_3}} \\ \boxed{(T_{n-1} - T_n) = \varphi_n \cdot \frac{e_n}{\lambda_n}} \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{(T_0 - T_n)}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n}}}$$

$$\boxed{\phi = \varphi \cdot S = \frac{S \cdot (T_0 - T_n)}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n}}}$$

### I.1.6.4 Résistance thermique d'un mur composite:



**Figure I. 14 :** Schéma de la résistance thermique pour un mur composite

Le flux de chaleur qui traverse ce mur est de manière générale :

$$\phi = \varphi \cdot S = \frac{S \cdot (T_0 - T_n)}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n}} = \frac{(T_0 - T_n)}{R_\lambda}$$

$R_\lambda$  est la résistance thermique du mur composite donnée par :

$$R_\lambda = \frac{1}{S} \left[ \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n} \right] \text{ Soit}$$

$$R_\lambda = R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + \dots + R_{\lambda n}$$

### I.1.6.5 Mur simple avec production de chaleur

L'équation fondamentale de transfert de chaleur par conduction s'écrit dans ce cas :

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0$$

$$T(x) = -\frac{P}{2\lambda} x^2 + bx + c \text{ Soit}$$

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx} = P \cdot x - b \cdot \lambda$$

Profil parabolique b et c dépendent des conditions aux limites.

### I.1.7 Problème cylindrique de conduction thermique

#### I.1.7.1 Équation fondamentale

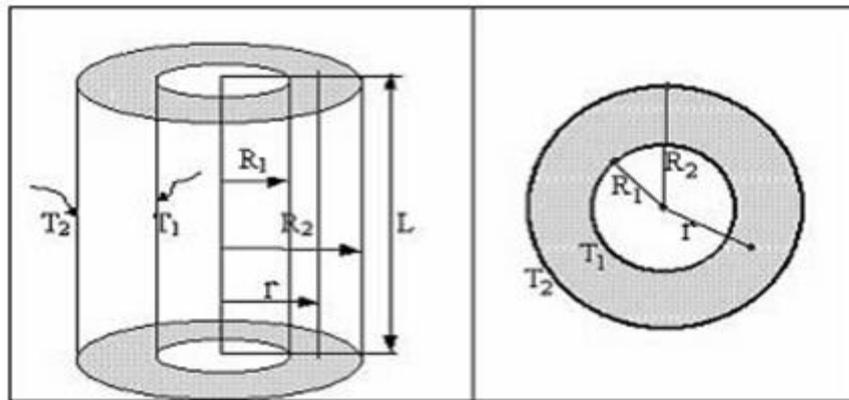
Dans certains cas, il serait plus commode d'utiliser les coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ .

L'équation fondamentale  $\Delta T = -\frac{P}{\lambda}$  s'écrit :

$$\frac{\delta^2 T}{\delta r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2 T}{\delta \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta T}{\delta r} + \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} = -\frac{P}{\lambda}$$

Si le solide est de révolution autour de l'axe  $z$  et est cylindrique, l'équation ne dépend plus de  $\theta$  et  $z$ .

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{\lambda}$$



**Figure I. 15 :** Schéma de la conduction thermique pour une forme cylindrique

Si le tube cylindrique circulaire est sans production de chaleur, l'équation fondamentale se réduit à :

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0$$

On multiplie par  $r$  l'équation précédente :

$$r \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \iff \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \implies r \frac{dT}{dr} = A$$

La distribution radiale des températures s'écrit donc :

$$T = A \cdot \ln r + B$$

La densité de flux de chaleur s'écrit :  $\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\lambda \frac{A}{r}$

Si pour  $r = R_1, T = T_1$

$r = R_2, T = T_2$

On déduit les constantes d'intégration A et B

$$A = \frac{T_2 T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \text{ et } B = \frac{T_1 \ln R_2 - T_2 \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

### I.1.7.2 Résistance thermique d'un tube cylindrique circulaire :

Pour une longueur L du cylindre, le flux de chaleur qui traverse la surface  $S = 2\pi rL$  s'écrit :

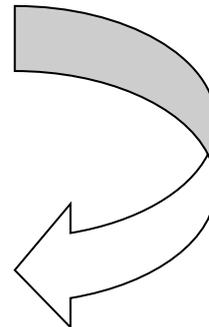
$$\phi = 2\pi rL\varphi = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{R_2} \cdot \frac{1}{r} 2\pi rL$$

$$|\phi| = 2\pi\lambda L \frac{|T_2 - T_1|}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$\Phi$  est indépendant de r car il n'y a pas de production de chaleur interne.

$$|T_2 - T_1| = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L} |\phi|$$

D'où  $R_\lambda = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L}$



Mur :  $R_\lambda = \frac{e}{\lambda S}$

Cylindre :  $R_\lambda = \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L}$

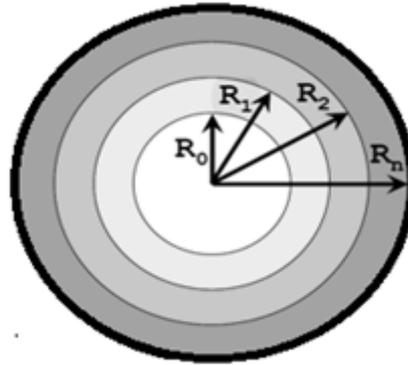
### I.1.7.3 Tube cylindrique circulaire composite

Considérons un cylindre composé de n matériaux superposés, limités par les cylindres de rayons  $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$ , de conductivités  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Les résistances thermiques de ces cylindres étant :

$$R_{\lambda_1} = \frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda_1 L} \quad R_{\lambda_n} = \frac{\ln \frac{R_n}{R_{n-1}}}{2\pi\lambda_n L}$$

$$R_\lambda = \sum_i R_{\lambda_i} = \frac{1}{2\pi L} \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}}$$



**Figure I. 16 :** Schéma d'un cylindre composé de n matériaux superposés

#### I.1.7.4 Tube creux avec production de chaleur

$$\boxed{\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{\lambda}}$$

Cette équation peut aussi s'écrire :

$$r \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{P.r}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dT}{dr} \right] = -\frac{P.r}{\lambda}$$

Une première intégration donne :

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{P.r^2}{2\lambda} + A \quad \Longrightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda} r + \frac{A}{r}$$

$$dT = -\frac{P}{2\lambda} r dr + A \frac{dr}{r} \quad T(r) = -\frac{P.r^2}{4\lambda} + A \cdot \ln(r) + B$$

Si on choisit comme conditions aux limites :

$$T = T_1 \quad \text{pour} \quad r = R_1 \quad ; \quad T = T_2 \quad \text{pour} \quad r = R_2$$

On obtient :

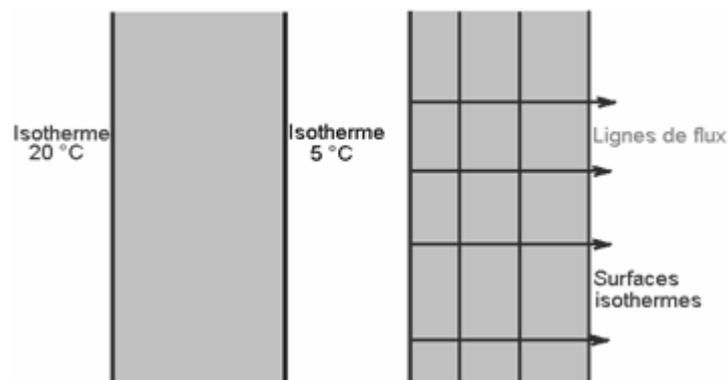
$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{P}{4\lambda} \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$B = \frac{T_1 \cdot \ln R_2 - T_2 \cdot \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{P}{4\lambda} \frac{R_1^2 \cdot \ln R_2 - R_2^2 \cdot \ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

La densité de flux est :  $\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{P \cdot r}{2} - \frac{\lambda \cdot A}{r}$

### I.1.7.5 Exemple : mur en béton

Il s'agit bien d'un problème à 1 seule dimension (1D)



**Figure I. 17** : Schéma des lignes de flux dans un mur en béton

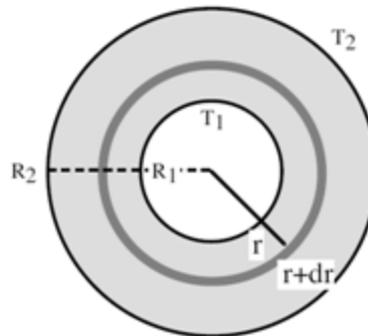
### I.1.7.6 Milieu à géométrie sphérique

Considérons en figure I. 18 une sphère creuse homogène de rayon interne  $R_1$  et de rayon externe  $R_2$ . Les surfaces internes et externes sont maintenues à la température  $T_1$  et  $T_2$

A la distance  $r$  de l'axe, on définit une sphère de surface  $S = 4\pi r^2$  ayant une épaisseur élémentaire  $dr$ . Sa résistance thermique élémentaire s'exprime selon :  $dR_{th} = \frac{dr}{\lambda 4\pi r^2}$

La résistance thermique totale est donc :

$$R_{th} = \frac{I}{4\pi\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

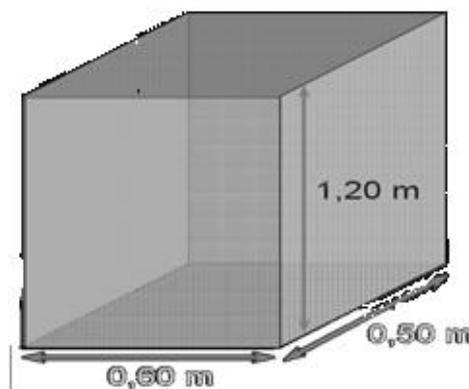


**Figure I. 17 :** Schéma d'une sphère creuse

## I.1.8 Applications

### I.1.8.1 Déperdition thermique d'un réfrigérateur

Un réfrigérateur ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de 1,20 m de haut, 0,60 m de large et 0,50 m de profondeur.

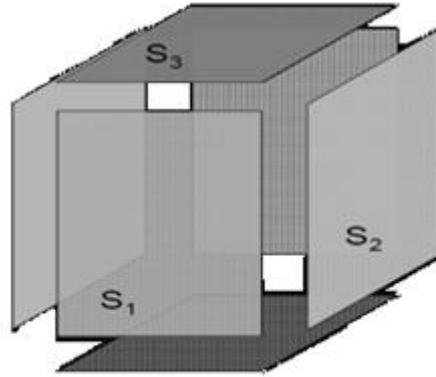


**Figure I. 18 :** Schéma d'un réfrigérateur de forme parallélépipède rectangle

Les parois sont constituées de plaques en plastique, d'épaisseur  $e = 3$  mm et de conductivité thermique  $\lambda = 0,12$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>. La température moyenne des faces extérieures est de 20 °C.

Calculer la puissance  $\Phi$  que devrait avoir le groupe frigorifique pour maintenir à 5 °C la température moyenne des faces internes du réfrigérateur.

On admettra que les déperditions calorifiques s'effectuent d'une manière uniforme à travers les 6 faces du réfrigérateur.



**Figure I. 19 :** Schéma des parois du réfrigérateur

**Solution :**

Calcul de la surface d'échange :

- ❖  $S_1 = 1,2 \times 0,6 = 0,72 \text{ m}^2$
- ❖  $S_2 = 1,2 \times 0,5 = 0,60 \text{ m}^2$
- ❖  $S_3 = 0,6 \times 0,5 = 0,30 \text{ m}^2$

Soit :

$$\text{❖ } S = 2(S_1 + S_2 + S_3) = 3,24 \text{ m}^2$$

Calcul de la Résistance thermique  $R_t$  :

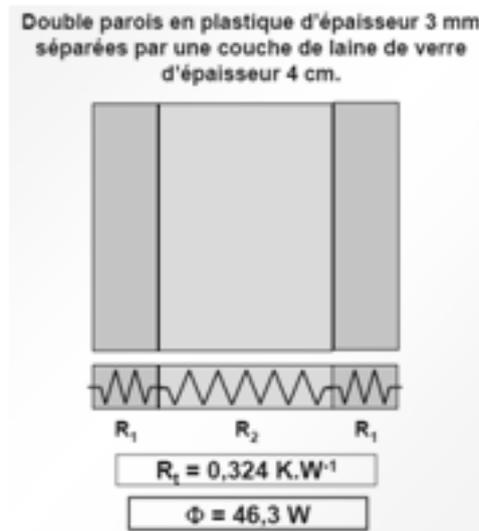
$$R_t = \frac{e}{\lambda S} = \frac{0,003}{0,12 \times 3,24} = 0,0077 \text{ K/W}$$

le flux de chaleur qui traverse les parois du réfrigérateur est :

$$\phi = \frac{|T_1 - T_2|}{R_1} = \frac{15}{0,0077} = 1944 \text{ W}$$

Les déperditions thermiques sont importantes !

Que devient cette puissance si les parois du réfrigérateur étaient constituées de deux plaques en plastique de 3 mm d'épaisseur séparées par une couche de laine de verre de 4 cm d'épaisseur ?



**Figure I. 20 :** Présentation de la résistance thermique dans les parois du réfrigérateur

La conductivité thermique de la laine de verre est de  $0,04 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

$$R_1 = 0,0077 \text{ K/W}$$

$$R_2 = 0,3086 \text{ K/W}$$

$$R_t = 2R_1 + R_2 = 0,324 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

$$\phi = \frac{|T_1 - T_2|}{R_t} = \frac{15}{0,324} = 46,3 \text{ W}$$

Les déperditions thermiques sont moins importantes !

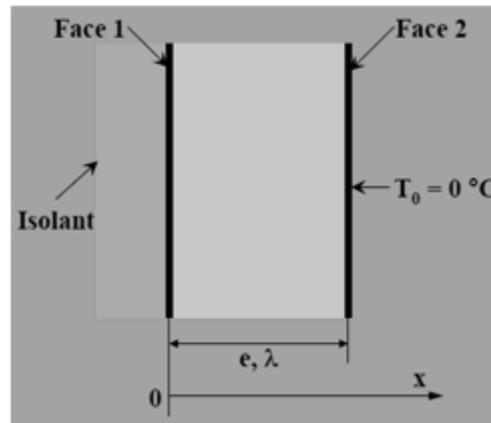
### I.1.8.2 Génération de chaleur à flux constant $p$ au sein d'une plaque

Soit une plaque d'épaisseur  $e$ , isolée sur sa face 1 et une température  $T_0$  imposée sur la face 2. En supposant qu'il existe au sein de la plaque une génération de chaleur à flux constant  $q_0$  ( $\text{W.m}^{-3}$ ), pour une conductivité thermique constante.

- Donner l'expression de la température de la plaque.
- Calculer la température de la face 1.

Données :

- $\lambda = 40 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- $q_0 = 10^6 \text{ W.m}^{-3}$
- $e = 10 \text{ cm}$ .



**Figure I. 21 :** Schéma d'une plaque à deux faces 1 et 2

Solution:

L'équation de la conduction de chaleur en régime permanent est donnée dans ce cas par :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} = 0 \quad \text{avec} \quad 0 < x < e$$

Condition aux limites :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pour } x = 0 : \frac{dT(x)}{dx} = 0 \\ \text{Pour } x = e : T(e) = 0^\circ\text{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda} x + C_1$$

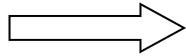
$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{\lambda} x^2 + C_1 x + C_2$$

➤ Pour x=0 :

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow T(x) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{\lambda} x^2 + C_2$$

➤ Pour  $x=e$  :

$$T(e) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{\lambda} e^2 + C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{\lambda} e^2$$



$$T(x) = -\frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{\lambda} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{\lambda} e^2 = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_0}{\lambda} [e^2 - x^2]$$

A.N. :

$$x=0 \quad T(0) = \frac{1}{2} \frac{10^6}{40} (0,1)^2 = 125^\circ\text{C} \quad (\text{Face 1})$$

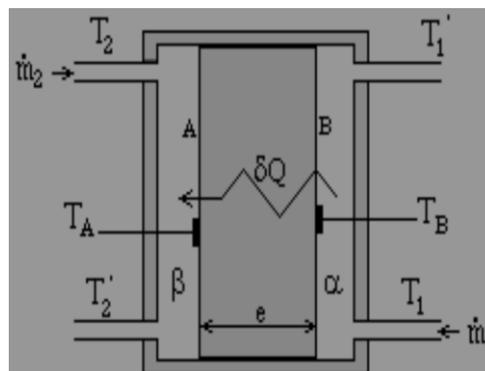
## I.1.9 Mesure des conductivités thermiques en régime stationnaire

### I.1.9.1 Principe de la mesure

Soit une source produisant une puissance-chaleur  $\Phi = \delta Q$ . Celle-ci traverse un solide d'épaisseur  $e$  et crée de part et d'autre de lui une différence de température  $\delta T$ .

De la relation  $R_\lambda = \delta T / \Phi$ , on déduit la valeur de la résistance thermique  $R_\lambda$  du solide. Connaissant la relation  $R_\lambda(\lambda)$ , on déduit la valeur de  $\lambda$ .

L'évaluation de  $R_\lambda$  est plus simple si le solide avait une forme simple. La mesure peut être effectuée en milieu linéaire, cylindrique ou même sphérique.



**Figure II. 22** : Schéma d'un système produisant de la chaleur

### I.1.9.2 Mesure absolue en système linéaire

Par application du premier principe de la thermodynamique au réseau  $\alpha$  on obtient le flux de chaleur qui traverse la surface A :

$$\dot{Q}_{\bar{a}} = \Phi_B = \dot{m}_1 \cdot (h_1 - h'_1) \approx \dot{m}_1 \cdot c \cdot (T_1 - T'_1)$$

De même pour le réseau  $\beta$  :

$$\dot{Q}_{\beta}^+ = \Phi_A = \dot{m}_2 \cdot (h_2 - h'_2) \approx \dot{m}_2 \cdot c \cdot (T_2 - T'_2)$$

Si les pertes sont négligeables  $\Phi_A = \Phi_B = \Phi$

Avec  $T_A$  et  $T_B$  les températures mesurées sur les surfaces A et B.

$$R_{\lambda} = \frac{T_A - T_B}{\phi} = \frac{e}{\lambda S} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{e}{R_{\lambda} S}$$

La plupart des processus thermodynamiques sont réalisés en systèmes ouverts. En effet, les cycles en système ouvert sont plus facilement réalisables que les cycles en système fermé.

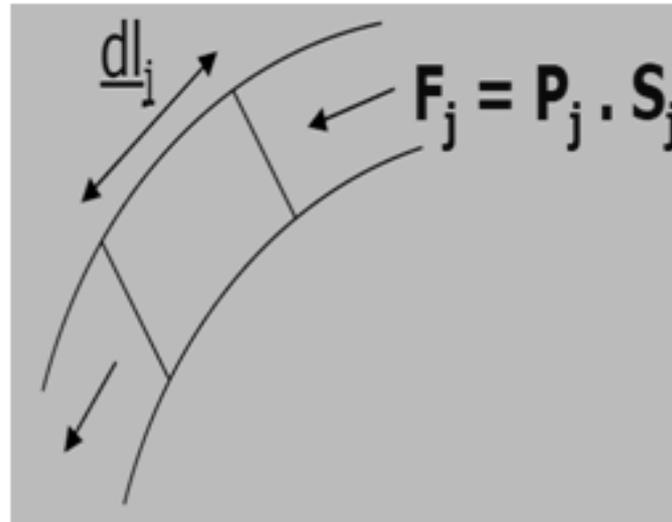
Les échangeurs de chaleur font intervenir uniquement les échanges thermiques (pas d'énergie travail) alors que pour les turbines, les compresseurs et les moteurs à combustion interne, il y a échange de chaleur et de travail technique avec le milieu extérieur.

Nous appellerons  $v_i$  le volume massique et  $e_i = u_i + e_{c_i} + e_{p_i}$  l'énergie interne totale massique de la matière qui entre ou qui sort par la conduite  $i$ . la variation d'énergie interne totale  $dE$  du volume de contrôle entre les instants  $t$  et  $t + dt$  est :

$$dE = dQ + dW_{\text{tot}} + \sum e_i dm_i$$

Le travail  $dW_{\text{tot}}$  est constitué du travail  $dW$ , appelé «travail technique ou travail utile» échangé entre le système et les parties amovibles d'une machine (piston, turbine ...) et du travail de transvasement (travail des forces pressantes qui font entrer ou sortir le fluide du système).

En effet, la force pressante du fluide dans la section  $S_j$  met en jeu un certain travail  $\delta W_j$ .



**Figure I. 23 :** Présentation de la force de pression  $F_j$  dans une conduite de section  $S_j$

$$dw_j = F_j \cdot dl_j = P_j \cdot S_j \cdot dl_j$$

$$\text{Or } S_j \cdot dl_j = dv_j = v_j \cdot dm_j \quad \text{donc} \quad dw_j = P_j \cdot v_j \cdot dm_j$$

On constate que le transfert de matière met enjeu un certain travail de transvasement que l'on doit distinguer des autres formes d'énergie-travail (électrique, mécanique, chimique...).

Nous appellerons énergie-travail technique une énergie-travail autre que le travail de transvasement, nous pouvons donc écrire :

Cette relation constitue l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert.

$h_{ti}$  est l'enthalpie massique totale du fluide qui entre ou qui sort par la section  $i$ .

L'expression du premier principe en puissance s'obtient en divisant par  $dt$  :

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{Q} + \dot{W} + h_{ti} \cdot \dot{m}_i}$$

**I.1.9.3 Mesure absolue en système linéaire**

Les mesures sont plus simples si la plaque était rectangulaire ou circulaire. L'expression du premier principe de la thermodynamique appliqué au réseau  $\alpha$  conduit à :

$$\dot{Q}_{\bar{\alpha}} = \dot{m}_1 \cdot (h_1 - h'_1) \approx \dot{m}_1 \cdot c \cdot (T_1 - T'_1)$$

De même pour le réseau  $\beta$  :

$$\dot{Q}_{\bar{\beta}} = \dot{m}_2 \cdot (h_2 - h'_2) \approx \dot{m}_2 \cdot c \cdot (T_2 - T'_2)$$

Si les pertes sont négligeables :  $\phi_B = \phi_A = \phi$

**I.1.9.4 Exercice sur Transfert de chaleur par conduction**

1. Rappeler la loi de Fourier. Exprimer le flux de chaleur émis dans chacun des cas suivants :

- a. Conduction monodimensionnelle suivant l'axe Ox ;
- b. Conduction radiale à travers un cylindre ;
- c. Conduction le long d'un cylindre ;
- d. Conduction radiale à travers une sphère.

2. Le mur d'un four construit avec une brique de 20 cm d'épaisseur et ayant une conductivité thermique  $\lambda$ . La largeur et la longueur de ce mur sont 50 cm et 3 m. Les mesures en régime permanent des températures donnent 1600 °K et 1200 °K sur les faces extérieure et intérieure respectivement. Calculer la chaleur perdue pendant 20 minutes.

3. Décrire brièvement une méthode permettant de mesurer la conductivité thermique d'un matériau.

4. Une face d'une plaque plane de cuivre de 2 cm d'épaisseur est maintenue à une température de 300°C alors que l'autre face est maintenue à une température de 100 °C.

Le flux de chaleur échangé à travers cette plaque vaut 148 kW. Calculer la conductivité du cuivre (supposée indépendante de la température) sachant que les dimensions de la plaque sont 20 cm x 20 cm.

Solution de l'exercice :

La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts: une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres. La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température.

**1. La loi de Fourier et applications :** L'existence d'un gradient de température dans une région crée un flux de chaleur qui s'oppose à ce gradient pour l'annuler. La loi de Fourier établie mathématiquement par Jean-Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1822. Le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température.

$$\vec{q} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \text{ (en W)}$$

**a.** conduction monodimensionnelle suivant l'axe Ox : La température est fonction de x. Le flux de chaleur s'écrit en coordonnées cartésiennes et en se limitant à la direction x comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \cdot a \cdot b \cdot \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$$

**b.** conduction radiale à travers un cylindre: La température est fonction de r. Le flux de chaleur s'écrit en coordonnées cylindrique et en se limitant à la direction r comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} = -\lambda \cdot 2\pi \cdot L_r \cdot \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

**c.** conduction axiale à travers un cylindre : La température est fonction de z. Le flux de chaleur s'écrit en coordonnées cylindriques et en se limitant à la direction z comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \cdot S_b \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \text{ (en W)} = -\lambda \cdot \pi r^2 \cdot \frac{dT}{dz} \vec{u}_z$$

**d.** conduction radiale à travers une sphère : La température est fonction de r. Le flux de chaleur s'écrit en coordonnées sphériques et en se limitant à la direction r comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \text{ (en W)} = -\lambda 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

## 2. chaleur perdue le long de mur d'un four

On suppose que le flux de chaleur se propage selon l'axe Ox, le flux de chaleur s'écrit alors comme suit :

$$\vec{q} = -\lambda \cdot S \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \text{ (en W)} = -\lambda L l \frac{\Delta T}{\Delta x} \vec{u}_x$$

$\Delta x = e$  dans notre problème.

**AN :**  $q = 4.2 \text{ kW}$

Le régime étant permanent, la quantité de chaleur perdue pendant 20 minutes est :

$$Q = q \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{1.4 \times 1.5 \times 400}{0.2} \times 20 \times 60 = 5040 \text{ KJ}$$

## 3. mesure de la conductivité thermique d'un matériau

On considère un matériau d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$  qu'on lui impose une densité de courant. La plaque s'échauffe par effet joule. On mesure les températures de deux faces à l'aide d'un thermocouple.

La puissance dissipée par effet joule est :

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 \text{ (en W)}$$

En faisant tracer la puissance dissipée en fonction en fonction de la différence de température, on peut déduire la conductivité thermique  $\lambda$  de matériau.

**4.** Les données du problème sont:  $e = 0.02 \text{ m}$ ,  $T_{\text{int}} = 300 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_{\text{ext}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,

$$q = 148 \text{ kW}, \quad S = 0.04 \text{ m}^2$$

La conductivité thermique est alors :

$$\lambda = \frac{q \cdot e}{S \cdot \Delta T}$$

**A.N :**

$$\lambda = \frac{14810^3 \times 0.02}{0.04 \times 200} = 370 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{K}$$

## **Chapitre II**

# **Transfert De Chaleur Par Convection**

## Chapitre II :

# TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

### II.1 RAPPELS SUR L'ANALYSE DIMENSIONNELLE

#### II.1.1 Dimensions fondamentales

On peut exprimer les grandeurs physiques en fonction d'un nombre limité de dimensions fondamentales.

Exemples:

- Vitesse :  $L \cdot T^{-1}$
- Viscosité dynamique:  $M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$
- Force :  $M \cdot L \cdot T^{-2}$

Sur ces exemples on voit que le nombre de dimensions fondamentales est de 3 : Masse  $M$  ; Longueur  $L$  ; Temps  $T$ .

Ces trois dimensions fondamentales ne sont pas toujours suffisantes. Pour les problèmes de transfert de chaleur, il est nécessaire d'ajouter une 4<sup>ème</sup> dimension : la température  $\theta$  et, lorsque l'échange d'énergie entre grandeurs mécaniques et grandeurs thermiques ne sera pas mesurable, on ajoutera la quantité de chaleur  $Q$  qui sera considérée comme une 5<sup>ème</sup> dimension.

Remarque:

$Q$  homogène à un travail qui s'exprime en fonction des dimensions fondamentales  $M$ ,  $L$  et  $T$  par :  $[Q] = M \cdot L \cdot T^{-2}$  qui n'est pas une vraie dimension fondamentale.

La méthode d'analyse dimensionnelle, qui repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation, est connue sous le nom de théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème des groupements  $\pi$ .

### II.1.2 Principe de la méthode

Si l'on peut représenter mathématiquement une loi physique en exprimant une variable physique  $G_1$  en fonction d'un certain nombre d'autres variables physiques indépendantes  $G_2, \dots, G_n$ , c'est-à-dire :

$$\text{si } G_1 = f(G_2, G_3, \dots, G_n) \text{ ou encore : } f(G_1, G_2, \dots, G_n) = 0$$

Le problème peut être simplifié de la manière suivante :

- On écrit pour chaque variable  $G_i$ , l'équation dimension en fonction des dimensions fondamentales. On dispose alors de  $n$  équations qui ont nécessité  $p$  dimensions fondamentales pour caractériser toutes les grandeurs physiques.

- On prélève  $p$  de ces  $n$  équations que l'on considère comme équations de base. Bien que le choix des équations prélevées soit arbitraire, il faut toutefois que chaque dimension fondamentale apparaisse au moins une fois sur l'ensemble des  $p$  équations.

- Les  $(n-p)$  équations restantes se présentent alors sous forme de  $(n-p)$  rapports sans dimensions appelés groupements  $\pi$  qui sont des "grandeurs réduites". On obtient alors une équation réduite :

$$g(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-p}) = 0$$

Un groupement  $\pi$  est le rapport d'une équation dimension d'une grandeur physique n'appartenant pas à l'ensemble des équations de base au produit des équations de base, chacune d'elle étant portée à une certaine puissance:

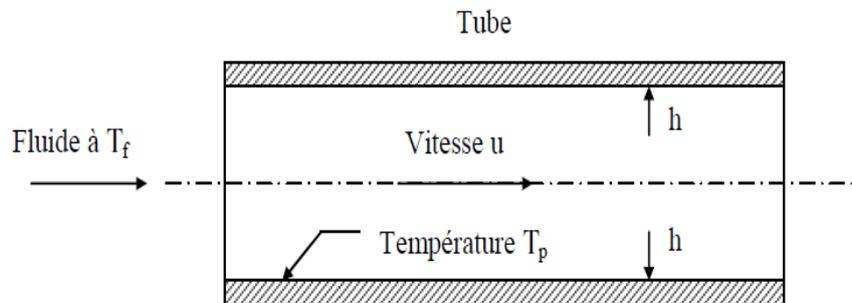
$$\pi_i = \frac{[G_i]}{[G_1]^{a_i} [G_2]^{b_i} \dots [G_p]^{e_i}}$$

Pour chaque dimension fondamentale  $M, L, T, \theta, Q$  figurant au dénominateur, on fait la somme des exposants que l'on identifie avec l'exposant de la même dimension figurant dans l'équation dimension de la grandeur physique du numérateur. On obtient ainsi un système linéaire de  $p$  équations dont la résolution permet de déterminer les  $p$  exposants des équations de base du dénominateur.

Il suffit alors d'écrire le rapport  $\pi$  en fonction des grandeurs physiques attachées aux équations dimensions de départ.

### II.1.3 Exemple d'application

Considérons un fluide en circulation forcée dans une canalisation cylindrique pour lequel on se propose de déterminer le coefficient de convection  $h$  relatif au transfert de chaleur fluide-paroi qui correspond à une convection forcée:



**Figure II.1:** Schéma de la configuration d'un fluide en circulation forcée

#### II.1.3.1 Détermination des grandeurs physiques

Il faut déterminer tous les paramètres dont dépend la densité de flux de chaleur  $\phi$  (liée à  $h$  par  $\phi = h \Delta T$ ), ce sont ici :

- Les caractéristiques du fluide :
  - $\lambda$  coefficient de conductibilité thermique
  - $C_p$  chaleur massique
  - $\rho$  masse volumique
  - $\mu$  viscosité dynamique

Les caractéristiques de l'écoulement

- $u$  vitesse moyenne du fluide

La géométrie de la surface d'échange

- $D$  diamètre de la conduite

L'écart de température paroi-fluide  $\Delta T$  ; d'où :

$$f(\lambda, C_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$$

### II.1.3.2 Equation dimension de chaque grandeur

Il faut ensuite écrire l'équation aux dimensions fondamentales M, L, T,  $\theta$ , Q de chacune des grandeurs, ce qui s'écrit ici :

- $\lambda : Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-1}$
- $C_p : Q \cdot M^{-1} \cdot \theta^{-1}$
- $\rho : M \cdot L^{-3}$
- $\mu : M \cdot T^{-1} \cdot L^{-1}$
- $u : L \cdot T^{-1}$
- $D : L$
- $T : \theta$
- $\phi : Q \cdot T^{-1} \cdot L^{-2}$

### II.1.3.3 Détermination des groupements $\pi$

Il faut maintenant choisir 5 équations de base ( Toutes les dimensions fondamentales ont été utilisées) de façon à ce que les 5 dimensions fondamentales figurent au moins une fois dans l'ensemble des équations.

Prenons par exemple :  $\lambda, \rho, u, D, \Delta T$ , il reste  $\phi, C_p$  et  $\mu$ .

On écrit alors les 3 rapports sans dimension correspondants à ces variables sous la forme :

$$\pi_1 = \frac{\phi}{T^{a_1} \lambda^{b_1} \rho^{c_1} D^{d_1} u^{e_1}} ; \pi_2 = \frac{C_p}{T^{a_2} \lambda^{b_2} \rho^{c_2} D^{d_2} u^{e_2}} ; \pi_3 = \frac{u}{T^{a_3} \lambda^{b_3} \rho^{c_3} D^{d_3} u^{e_3}}$$

Pour chaque rapport  $\pi$ , on remplace les grandeurs physiques par leurs équations dimensions ce qui donne par exemple pour  $\pi_1$  :

$$[\pi_1] = \frac{Q T^{-1} L^{-1}}{\theta^{a_1} (Q T^{-1} L^{-1} \theta^{-1})^{b_1} (M L^{-3})^{c_1} L^{d_1} (L T^{-1})^{e_1}}$$

Pour chaque dimension fondamentale, on identifie les exposants de puissance entre numérateur et dénominateur relatifs à une même dimension ce qui conduit au système:

- (Q) :  $1 = b_1$
- (T) :  $-1 = -b_1 - c_1$

- (L) :  $-2 = -b_1 - 3c_1 + d_1 + e_1$
- ( $\theta$ ) :  $0 = a_1 - b_1$
- (M) :  $0 = c_1$

Le rapport  $\pi_1$  s'écrit donc :  $\pi_1 = \frac{\phi D}{\Delta T \lambda}$

Ce qui avec  $\phi = h \Delta \theta$  peut encore s'écrire :  $\pi_1 = \frac{hD}{\lambda}$

On obtient de la même manière :  $\pi_2 = \frac{\rho u D C_p}{\lambda}$  et  $\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u}$

Le théorème de Vaschy-Buckingham nous permet d'affirmer que la relation :

$$f(\lambda, c_p, \rho, \mu, u, D, \Delta T, \phi) = 0$$

entre 8 variables peut s'exprimer à l'aide des trois nombres sans dimension :  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  sous la forme :  $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$  ou  $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$ .

#### II.1.3.4 Signification physique de ces groupements

- $\pi_1 = \frac{hD}{\lambda}$  est le nombre de Nusselt, il peut aussi s'écrire :  $N_u = \frac{D}{\frac{\lambda}{h}}$ . C'est donc le rapport

de la résistance thermique de conduction par la résistance thermique de convection. Il est d'autant plus élevé que la convection est prédominante sur la conduction. Il caractérise le type de transfert de chaleur.

- $\pi_3 = \frac{\mu}{\rho D u} = \frac{1}{Re}$ , c'est l'inverse du nombre de Reynolds qui caractérise le régime d'écoulement dans la canalisation.

- $\pi_2 = \frac{\rho u D C_p}{\lambda}$  c'est le nombre de Peclet. On peut aussi l'écrire :  $Pe = \frac{\rho u D}{\mu} \cdot \frac{C_p \mu}{\lambda}$  et faire apparaître un nouveau nombre adimensionnel :  $Pr = \frac{C_p \mu}{\lambda}$  appelé nombre de Prandtl. Ce nombre est calculable pour un fluide donné indépendamment des conditions expérimentales (il ne dépend que de la température) et caractérise l'influence de la nature du fluide sur le transfert de chaleur par convection.

On préfère donc chercher une relation sous la forme :

$$N_u = f(R_e, P_r)$$

### II.1.4 Avantages de l'utilisation des grandeurs réduites

Ils concernent essentiellement la représentation, la comparaison et la recherche des résultats expérimentaux :

- La représentation des résultats expérimentaux est simplifiée on pourra avoir une courbe reliant 2 variables ou une abaque reliant 3 variables réduites au lieu d'une relation liant  $(3 + p)$  paramètres.
- La comparaison des résultats expérimentaux est aussi très rapide et aisée, quel que soit le chercheur, même si le système d'unité utilisé est différent puisque les grandeurs réduites sont sans dimension.
- La recherche des résultats expérimentaux est facilitée et ordonnée : s'il suffit de tracer une courbe entre deux variables réduites, c'est qu'il suffit d'effectuer une seule série d'expériences.

#### Remarque:

Il faut toutefois bien comprendre que la méthode de l'analyse dimensionnelle qui fournit les grandeurs réduites ne donne pas la forme de la relation qui les lie, la recherche de cette relation fait l'objet du dépouillement des résultats expérimentaux.

#### II.1.4.1 Quelques groupements sans dimensions

**Tableau II.1 :** Tableau de quelques groupements sans dimensions

Groupement	
$R_e = \frac{\rho u D}{\mu}$ Nombre de Reynolds	$M_a = \frac{h}{\rho u c_p}$ Nombre de Margoulis
$P_r = \frac{c_p \mu}{\lambda}$ Nombre de Prandtl	$Gr = \frac{\beta_g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2}$ Nombre de Grashof
$N_u = \frac{h D}{\lambda}$ Nombre de Nusselt	$Ra = \frac{c_p \beta_g \Delta T \rho^2 L^3}{\lambda \mu}$ Nombre de Rayleigh
$P_e = \frac{\rho u D c_p}{\lambda}$ Nombre de Peclet	

## II.2 CONVECTION SANS CHANGEMENT D'ETAT

### II.2.1 Généralités & Définitions

Les transferts de chaleur qui s'effectuent simultanément avec des transferts de masse sont dits transferts de chaleur par convection. Ce mode d'échange de chaleur existe au sein des milieux fluides dans lesquels il est généralement prépondérant.

#### II.2.1.1 Convection naturelle et forcée

Selon la nature du mécanisme qui provoque le mouvement du fluide on distingue :

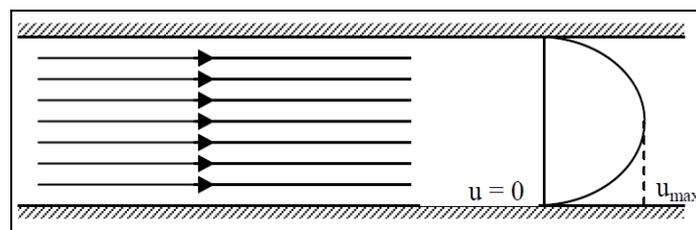
- La convection libre ou naturelle: le fluide est mis en mouvement sous le seul effet des différences de masse volumique résultant des différences de températures sur les frontières et d'un champ de forces extérieures (la pesanteur).
- La convection forcée: le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (pompe, ventilateur,...).

L'étude du transfert de chaleur par convection permet de déterminer les échanges de chaleur se produisant entre un fluide et une paroi.

#### II.2.1.2 Régime d'écoulement

Compte tenu du lien entre le transfert de masse et le transfert de chaleur, il est nécessaire de prendre en compte le régime d'écoulement. Considérons à titre d'exemple l'écoulement d'un fluide dans une conduite :

- En régime laminaire, l'écoulement s'effectue par couches pratiquement indépendantes.

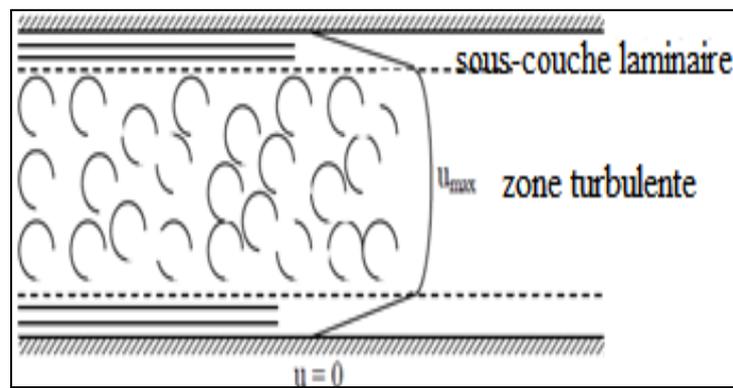


**Figure II.2** : Schéma d'un écoulement laminaire.

Entre deux filets fluides adjacents les échanges de chaleur s'effectuent donc:

- ✓ Par conduction uniquement si l'on considère une direction normale aux filets fluides.
- ✓ Par convection et conduction (négligeable) si l'on considère une direction non normale aux filets fluides.

- En régime turbulent : l'écoulement n'est pas unidirectionnel:



**Figure II.3** : Schéma d'un écoulement turbulent.

L'échange de chaleur dans la zone turbulente s'effectue par convection et conduction dans toutes les directions. On vérifie que la conduction moléculaire est généralement négligeable par rapport à la convection et à la « diffusion turbulente » (mélange du fluide dû à l'agitation turbulente) en dehors de la sous-couche laminaire.

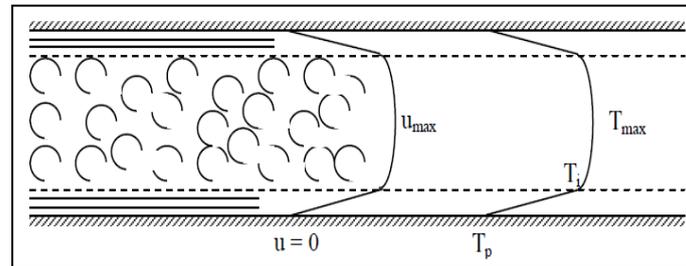
## II.2.2 Expression du flux de chaleur

### Analogie de Reynolds

De même qu'au niveau moléculaire on explique la viscosité des gaz par la transmission des quantités de mouvement des molécules lors des chocs intermoléculaires, on explique la transmission de la chaleur par la transmission d'énergie cinétique lors de ces mêmes chocs.

Cette liaison intime des phénomènes de viscosité et de transfert de chaleur conduit à l'analogie de Reynolds : dans un écoulement fluide avec transfert de chaleur, le profil des

vitesses et le profil des températures sont liés par une relation de similitude schématisée sur la figure II.4. Cette similitude sera démontrée plus loin dans le cas d'un écoulement sur une plaque plane chauffée.



**Figure II.4 :** Représentation de l'analogie de Reynolds dans le cas d'un écoulement turbulent dans un tube

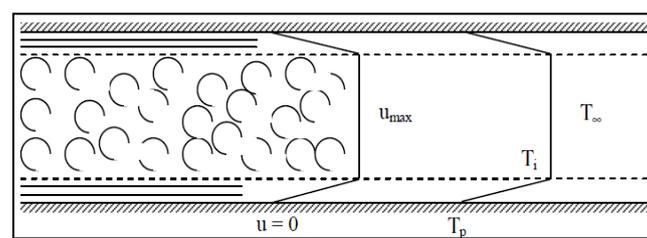
### Couches limites dynamique et thermique

Quel que soit le régime d'écoulement, il demeure une couche limite dynamique dans laquelle l'écoulement est laminaire et dont l'épaisseur est d'autant plus réduite que le nombre de Reynolds est grand. L'épaisseur de cette couche limite varie en fonction de nombreux paramètres : nature du fluide, température, rugosité de la paroi, ...

L'analogie de Reynolds montre que le gradient thermique est particulièrement important au voisinage de la paroi, dans une couche limite thermique qui se développe de manière analogue à la couche limite dynamique.

Aussi, quel que soit le régime d'écoulement du fluide, on considère que la résistance thermique est entièrement située dans cette couche limite thermique qui joue le rôle d'isolant.

Ceci correspond au modèle de Prandtl représenté sur la figure II.5 à titre d'exemple pour l'écoulement turbulent d'un fluide dans une conduite.



**Figure II.5 :** Représentation du modèle de Prandtl pour un écoulement turbulent dans une conduite

Expression du flux

Quel que soit le type de convection (libre ou forcée) et quel que soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur  $\varphi$  est donné par la relation dite loi de Newton :

$$\varphi = h S \Delta\theta$$

Le problème majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer le coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  qui dépend d'un nombre important de paramètres : caractéristiques du fluide, de l'écoulement, de la température, de la forme de la surface d'échange,...

On trouvera dans le tableau II.2, l'ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection pour différentes configurations.

**Tableau II.2 :** Ordre de grandeur du coefficient de transfert de chaleur par convection.

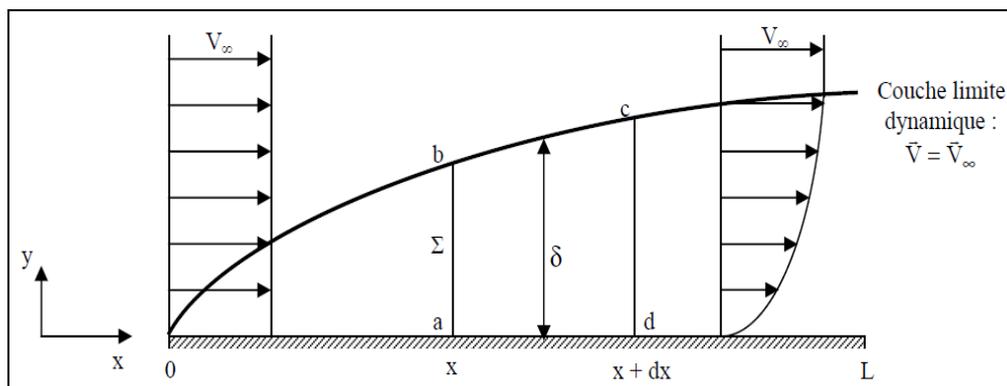
Configuration	$h$ (W.m <sup>-2</sup> °C <sup>-1</sup> )
<b><u>Convection naturelle</u></b>	
Dans un gaz	2 - 10
Dans un liquide	100 - 1000
<b><u>Convection forcée</u></b>	
Avec un gaz	10 - 200
Avec un liquide	100 - 5000
<b><u>Ebullition de l'eau</u></b>	
Dans un récipient	2500 - 35000
En écoulement dans un tube	5000 - 100000
<b><u>Condensation de l'eau sous 1 atm</u></b>	
Sur une surface verticale	1000 - 11000
A l'extérieur de tubes horizontaux	10000 - 25000

### II.2.3 Calcul du flux de chaleur en convection forcée

#### Calcul exact

Dans certains cas de figure simples, un calcul théorique peut permettre d'aboutir à une expression analytique du flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi. Nous traiterons ici à titre d'exemple le cas classique de l'écoulement laminaire en régime permanent d'un fluide à propriétés physiques constantes à la température  $T_\infty$  sur une paroi plane de longueur  $L$  maintenue à une température  $T_p$  (voir figure II.6).

On constate que la vitesse du fluide évolue d'une valeur nulle à la paroi à une valeur proche de  $u_\infty$  dans une zone d'épaisseur  $\delta(x)$  appelée couche limite dynamique. De la même manière, la température du fluide évolue de la valeur  $T_p$  à la paroi à une valeur proche de  $T_\infty$  dans une zone d'épaisseur  $\Delta(x)$  appelée couche limite thermique.



**Figure II.6 :** Schématisation du développement d'une couche limite dynamique sur une plaque plane

L'équation de conservation de la masse s'écrit sous forme intégrale :

$$\int_A \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_\Sigma \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à  $S$ .

En régime permanent :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ .

Appliquons cette relation au volume [abcd] représenté sur la figure II.6 :

$$\int_{\Sigma} \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} dS = -\rho \left( \int_0^{\delta} u dy \right)_x + \rho \left( \int_0^{\delta} u dy \right)_{x+dX} + \int_{bc} \rho \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} dS = 0$$

Avec :

$$-\rho \left( \int_0^{\delta} u dy \right)_x \rightarrow \text{flux masse sortant par ab}$$

$$\rho \left( \int_0^{\delta} u dy \right)_{x+dX} \rightarrow \text{flux masse sortant par cd}$$

$$\int_{bc} \rho \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} dS \rightarrow \text{flux masse sortant par bc}$$

$$\text{On en déduit : } \int_{bc} \rho \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} dS = -\rho \frac{d}{dX} \left( \int_0^{\delta} u dy \right) dx$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement en régime permanent (Théorème d'Euler) s'écrit :

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_A \rho \vec{f} dV + \int_{\Sigma} \vec{T} dS = \int_{\Sigma} \vec{T} dS \text{ car } f = 0 \text{ (pas de force de volume due à un champ extérieur)}$$

Où :  $\vec{T}$  sont les forces extérieures (par unité de surface) s'exerçant par contact sur les faces de la surface  $\Sigma$  délimitant le volume A.

Appliquons cette relation au volume [abcd] :

$$\int_{\Sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -\rho \left( \int_0^{\delta} \vec{V} u dy \right)_x + \rho \left( \int_0^{\delta} \vec{V} u dy \right)_{x+dX} + \int_{bc} \rho \vec{V}_{\infty} (\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{par unité de largeur})$$

Soit en projection suivant Ox :

$$\int_{\Sigma} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -\rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_x + \rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_{x+dX} + \int_{bc} \rho u_{\infty} (\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\int_{\Sigma} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -\rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_x + \rho \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right)_{x+dX} + \rho u_{\infty} \int_{bc} \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} dS$$

D'où en utilisant l'équation de conservation de la masse :

$$\int_{\Sigma} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \rho \frac{d}{dX} \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx - \rho u_{\infty} \frac{d}{dX} \left( \int_0^{\delta} u dy \right) dx$$

Analysons les forces en présence suivant Ox :

- sur [ad] s'exerce le frottement pariétal
- sur [bc] comme le profil de vitesse est uniforme, il n'y a pas de frottement
- il n'y a pas de forces de pression puisque la pression est uniforme dans l'écoulement.

On peut donc écrire :

$$\int_{\Sigma} \vec{T} dS = -\tau_p dx \quad \text{d'où :} \quad -\tau_p dx = \rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx - \rho u_{\infty} \frac{d}{dx} \left( \int_0^{\delta} u dy \right) dx$$

$$\text{car: } \int_{\Sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Sigma} \vec{T} dS$$

$$\text{On en déduit : } \frac{\tau_p}{\rho u_{\infty}^2} = \frac{d}{dx} \left[ \delta \int_0^1 \frac{u}{u_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{u_{\infty}} \right) d \left( \frac{y}{\delta} \right) \right] \quad (\text{a})$$

On cherche a priori la vitesse sous la forme simple d'un profil parabolique :

$$\frac{u}{u_{\infty}} = a + b \left( \frac{y}{\delta} \right) + \left( \frac{y}{\delta} \right)^2$$

La vitesse est nulle à la paroi :  $u(y=0) = 0$

La continuité de la vitesse et du frottement à la frontière de la couche limite impose les conditions suivantes :

$$u(y = \delta) = u_{\infty}$$

$$\mu \frac{du}{dy} (y = \delta) = 0$$

$$\text{On en déduit que : } \frac{u}{u_{\infty}} = \frac{y}{\delta} \left( 2 - \frac{y}{\delta} \right) \quad (\text{b})$$

$$\text{Et } \tau_p = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 2\mu \frac{u_{\infty}}{\delta}$$

Les relations (a) et (b) conduisent à :  $\frac{2\mu}{\rho V_{\infty} \delta} = \frac{2}{15} \frac{d\delta}{dx}$

$$\text{Puis par intégration : } \delta^2 = 30 \frac{\mu X}{\rho u_{\infty}} \quad \text{ou encore :} \quad \left( \frac{\delta}{X} \right)^2 = 30 \frac{\mu}{\rho u_{\infty} X} = \frac{30}{Re_X}$$

$$\tau_p = 2\mu \frac{u_\infty}{\delta} = 2\mu u_\infty \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{30 \mu X}}$$

On en déduit l'expression du coefficient de frottement:  $C_{f_x} = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{2\mu u_\infty \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{30 \mu x}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}$

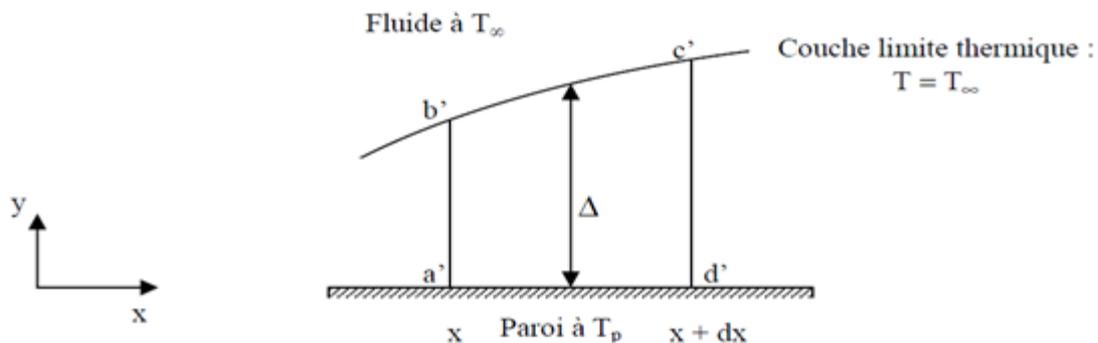
On en déduit l'expression du coefficient de frottement :  $C_{f_x} = \frac{0.73}{Re_x^{0.5}}$

Une analyse plus précise (équations locales et pas d'hypothèses sur la forme du profil de vitesse) conduirait à une constante de 0,664 au lieu de 0,73.

A pression constante, la variation d'enthalpie d'un système est égale à la chaleur fournie à ce système. En appliquant ce principe à un volume ( $\Lambda$ ) de surface ( $\Sigma$ ) et en négligeant la dissipation visqueuse (source interne de chaleur correspondant à la dégradation de l'énergie mécanique en chaleur), il vient :

$$\int_{\Lambda} \frac{\partial}{\partial t} (\rho H) dV + \int_{\Sigma} (\rho H \vec{V} + \vec{q}) \cdot \vec{n} dS$$

où  $H$  désigne l'enthalpie massique du fluide et  $\vec{q}$  : le vecteur densité de flux de chaleur.



**Figure II.7 :** Schématisation de la couche limite thermique sur une plaque plane

Appliquons cette relation en régime permanent au volume  $[a'b'c'd']$  représenté sur la figure II.7 pour un fluide tel que  $H = c_p (T - T_0)$  (la pression est supposée constante). La densité de flux de chaleur conductive est nulle sur la surface  $[b'c']$  puisqu'à l'extérieur de la couche limite thermique la température est uniforme et vaut  $T_\infty$ .

D'autre part, on néglige le flux de chaleur longitudinal (suivant Ox) devant le flux de chaleur transversal (suivant Oy), la température variant beaucoup plus rapidement dans la direction Oy que dans la direction Ox (hypothèse de couche limite). Il vient alors :

$$-\left(\rho c_p \int_0^\Delta u T dy\right)_x + \left(\rho c_p \int_0^\Delta u T dy\right)_{x+dx} + \rho c_p T_\infty \int_{b'c'} u dS - q_p dx = 0$$

Où :  $q_p = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$  est la densité de flux de chaleur échangé à la paroi (positive si entrant dans le volume [a'b'c'd']).

En appliquant la conservation de la masse au volume [a'b'c'd'], il vient :

$$\int_{b'c'} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \rho \int_{b'c'} u dS = -\rho \frac{d}{dx} \left( \int_0^\Delta u dy \right)$$

$$d'où : \frac{d}{dx} \left( \rho c_p \int_0^\Delta u T dy \right) dx - \rho c_p T_\infty \frac{d}{dx} \left( \int_0^\Delta u dy \right) dx - q_p dx = 0$$

$$\frac{q_p}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} = + \frac{d}{dx} \left[ \Delta \int_0^1 \frac{u}{u_\infty} \left( 1 - \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} \right) d \left( \frac{y}{\Delta} \right) \right] \quad (c)$$

On cherche a priori la température sous la forme :  $\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = a + b \left( \frac{y}{\Delta} \right) + c \left( \frac{y}{\Delta} \right)^2$

La continuité de la température et du flux de chaleur impose les conditions suivantes :

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} (y = 0) = 0$$

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} (y = \Delta) = 1$$

$$\lambda \frac{dT}{dy} (y = \Delta) = 0$$

$$\text{On en déduit que : } \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = \frac{y}{\Delta} \left( 2 - \frac{y}{\Delta} \right) \quad (d)$$

$$\text{Et : } q_p = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = 2\lambda \frac{T_p - T_\infty}{\Delta}$$

Les relations (c) et (d) permettent d'écrire :

$$\frac{q_p}{\rho c_p u_\infty (T_p - T_\infty)} = + \frac{d}{dx} \left[ \Delta \int_0^1 \frac{y}{\delta} \left( 2 - \frac{y}{\delta} \right) \left( 1 - \frac{y}{\Delta} \left( -2 \frac{y}{\Delta_p} \right) \right) d \left( \frac{y}{\Delta} \right) \right]$$

On se place dans le cas où  $\Delta < \delta$  et on suppose que  $r = \frac{\Delta}{\delta} \leq 1$  reste constant

La relation précédente devient alors : 
$$\Delta \frac{d\Delta}{dx} = \frac{12 \lambda}{\rho c_p u_\infty r \left( 1 - \frac{r}{5} \right)}$$

Puis après intégration : 
$$\left( \frac{\Delta}{X} \right)^2 = \frac{24}{Re_x Pr} \frac{1}{r \left( 1 - \frac{r}{5} \right)} \quad \text{ou} \quad Re_x = \frac{\rho V_\infty X}{\mu}$$

Par ailleurs : 
$$\left( \frac{\delta}{X} \right)^2 = \frac{30}{Re_x}$$

$r$  est donc solution de l'équation : 
$$r^2 = \frac{4}{5 Pr \left( 1 - \frac{r}{5} \right)} \quad (e)$$

Dans le cas  $Pr = 1$ , la solution de l'équation (e) est  $r = 1$ , les couches limites dynamique et thermique ont la même épaisseur et il y a analogie complète entre les transferts de chaleur et de quantité de mouvement. C'est le cas des gaz pour lesquels  $Pr \approx 1$ .

Le cas  $r < 1$  correspond au cas  $Pr > 1$ , c'est le cas de l'eau par exemple ( $Pr \approx 7$ ). Une solution approchée de l'équation (e) est alors :

$$\frac{\Delta}{\delta} \approx Pr^{-\frac{1}{3}}$$

La densité de flux de chaleur à la paroi s'écrit : 
$$q_p = h(T_p - T_\infty) = 2 \frac{\lambda}{\Delta} (T_p - T_\infty)$$

Et : 
$$Nu_x = \frac{hX}{\lambda} = \frac{2X}{\delta} \frac{\delta}{\Delta} = 0.36 Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}$$

Un calcul plus précis conduirait à :

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

Le flux global s'obtient par intégration de  $q_p$  entre  $x = 0$  et  $x = L$  et on en déduit le nombre de Nusselt moyen sur la surface de longueur  $L$  :

$$\bar{Nu}_L = 0.664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$$

Calcul approché

Dans les cas plus complexes où une solution analytique ne peut pas être établie, on utilise des corrélations déduites d'expérimentations.

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels :

$$Nu = f(Re, Pr)$$

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

Définie par :

$$Re = \frac{\rho u D}{\mu} \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

Où :  $D$  est la dimension caractéristique de la géométrie considérée qui sera par exemple le diamètre hydraulique  $Dh = \frac{4 \times \text{Section de passage}}{\text{Périmètre}}$  pour un écoulement dans un conduit (égal au diamètre intérieur pour un conduit cylindrique), le diamètre extérieur pour un écoulement extérieur perpendiculaire à un tube, la longueur pour un écoulement à surface libre sur une plaque...

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection forcée s'effectue donc de la manière suivante :

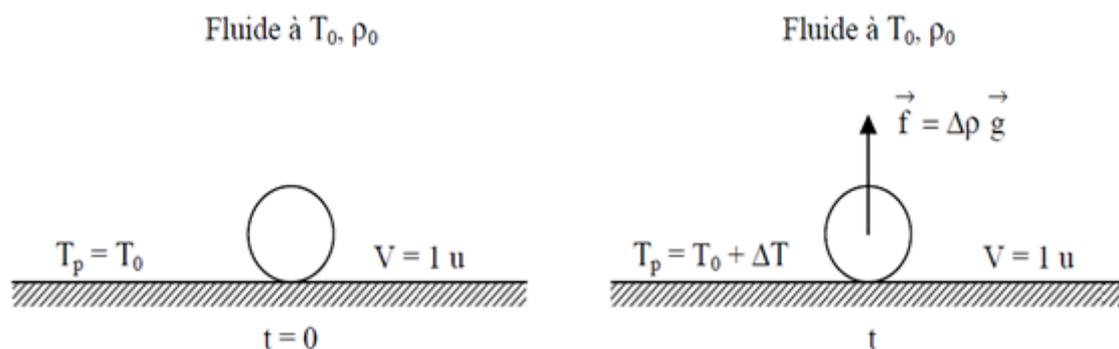
1. Calcul des nombres adimensionnels de Reynolds et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de  $Re$  et la configuration  $\rightarrow$  choix de la corrélation (fonction  $f$  dans la relation 5.7).
3. Calcul de  $Nu$  par application de cette corrélation.
4. Calcul de  $h = \frac{\lambda Nu}{D}$  et de  $\varphi = h S(T_p - T_\infty)$ .

Pour la convection forcée, les propriétés du fluide ( $c_p, \rho, \lambda, \mu$ ) sont calculées à une température moyenne dite température de film :  $\tau_f = \frac{T_p + T_\infty}{2}$

## II.2.4 Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

### II.2.4.1 Mécanisme de la convection naturelle

Considérons un fluide au repos en contact avec une paroi plane à température  $T_0$ . Si l'on porte la paroi à une température  $T = T_0 + \Delta T$ , le fluide au contact de la paroi va s'échauffer par conduction et la masse du volume unité va passer de  $\rho_0$  à  $\rho_0 - \Delta\rho$  :



**Figure II.8 :** Représentation du mécanisme de convection naturelle

Il sera donc soumis à une force ascensionnelle  $\vec{f} = -\Delta\rho \vec{g}$ . Le principe fondamental de la dynamique permet d'évaluer l'accélération du fluide :

Pour un volume unité :  $m = \rho$  d'où :  $\Delta\rho g = \rho\gamma$  et  $\gamma = \frac{\Delta\rho}{\rho} g$

En introduisant le coefficient de dilatation cubique  $\beta$  du fluide défini par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta\rho}{\Delta T} \right)_P, \text{ il vient : } \gamma = -\beta g \Delta T$$

$\beta g \Delta T$  est donc le module de l'accélération produite par l'expansion thermique due à la variation  $\Delta T$  de la température  $T_0$ . Ce mouvement du fluide induit par les différences de masse volumique résultantes des gradients de température va donner naissance aux courants de convection.

Dans le cas d'un transfert de chaleur par convection naturelle le long d'une plaque plane, le coefficient de convection dépend des caractéristiques du fluide :  $\lambda, \rho, \mu, c_p, \beta, g$  ; de

la paroi caractérisée par la longueur  $L$  et de l'écart de température  $\Delta\theta$  aux bornes du film. Ce que l'on peut traduire par une relation du type :

$$\phi = f(\lambda, \rho, \mu, c_p, \beta, g, L, \Delta T)$$

Dans le système  $M, L, T, \theta, Q$ , cette relation entre 8 grandeurs se réduit à une relation entre trois nombres adimensionnels ( $Nu = f(Gr, Pr)$ ) définie par :

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt}$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grashof}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

#### II.2.4.2 Signification physique du nombre de Grashof

Lorsque la masse unité du fluide, soumise à l'accélération  $\beta g \Delta T$  subit une variation d'altitude  $L$ , la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\frac{u^2}{2} = \beta g \Delta T L$$

$\frac{u^2}{2}$  représente la variation d'énergie cinétique et  $\beta g \Delta T L$  la variation d'énergie potentielle.

On voit donc que le nombre de Grashof peut se mettre sous la forme :

$$Gr = \frac{1}{2} \left( \frac{uL\rho}{\mu} \right)^2$$

Il est donc proportionnel au carré d'un nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement. En pratique, en convection naturelle, le courant qui prend naissance reste laminaire jusqu'à ce que le nombre de Grashof atteigne une valeur d'environ  $10^9$ .

### II.2.4.3 Calcul du flux de chaleur en convection naturelle

L'application de l'analyse dimensionnelle montre que la relation liant le flux de chaleur transféré par convection aux variables dont il dépend peut être recherchée sous la forme d'une relation entre trois nombres adimensionnels :  $Nu = f(Gr, Pr)$  définis par :

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} \quad \text{Nombre de Nusselt,}$$

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad \text{Nombre de Grachof}$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{\lambda} \quad \text{Nombre de Prandtl}$$

Le calcul d'un flux de chaleur transmis par convection naturelle s'effectue donc de la manière suivante :

1. Calcul des nombres adimensionnels de Grashof et de Prandtl.
2. Suivant la valeur de Gr et configuration  $\rightarrow$  choix de la corrélation.
3. Calcul de Nu par application de cette corrélation.
4. Calcul de  $h = \frac{\lambda Nu}{D}$  et de  $\varphi = h S(T_p - T_\infty)$

Pour la convection naturelle, les propriétés du fluide ( $c_p, \rho, \lambda, \mu$ ) sont calculées à la température moyenne de film comme en convection forcée.

## II.3 CONVECTION AVEC CHANGEMENT D'ETAT

### II.3.1 Condensation

#### II.3.1.1 Phénomènes

Les échanges de chaleur entre une vapeur se condensant sur une paroi et la paroi proprement dite sont liés aux types de condensation qui dépendent essentiellement des interactions liquide-paroi.

Si le liquide ne mouille pas la surface, il se forme alors en certains points des gouttelettes de liquide qui ruissellent le long de la paroi. Ce type de condensation ne peut s'observer que si la paroi a une surface lisse et propre. Dans le cas d'une condensation en

gouttes, le liquide qui ne forme pas un film continu sur la paroi offre une résistance thermique négligeable.

Cependant, le type de condensation que l'on rencontre généralement dans la pratique est la condensation en film : la paroi est isolée de la vapeur par un film continu de liquide qui joue le rôle d'isolant thermique entre la paroi et la vapeur et fait chuter la valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection  $h$  par rapport à la condensation en gouttes.

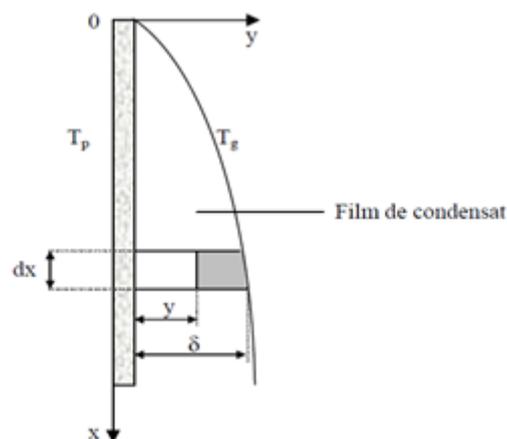
### II.3.1.2 Valeur du coefficient $h$ pour la condensation en film

La théorie de Nusselt, établie en 1916, relie analytiquement le coefficient de transfert  $h$  aux divers paramètres physiques intervenant dans la condensation en film d'un fluide sur une paroi :

#### a. Paroi verticale

Hypothèses :

- Ecoulement laminaire du film.
- Température de paroi constante.
- Gradient de température constant dans le film.
- Grand rayon de courbure du film de condensat.



**Figure II.9 :** Schématisation de la condensation sur une paroi verticale

On notera  $T_g$  la température de saturation (rosée) de la vapeur et  $T_p$  ( $< T_g$ ) la température maintenue constante de la paroi verticale.

Les forces s'exerçant sur le système constitué du liquide d'épaisseur  $dx$  compris entre  $y$  et  $\delta$  et de longueur unité suivant  $Oz$  (surface grise) sont :

- La force de pesanteur :  $\rho_1 g(\delta - y)dx$
- La force due à la vapeur d'eau déplacée :  $\rho_v g(\delta - y)dx$
- La force de frottement visqueux :  $\mu_1 \frac{du}{dy} dx$  (hypothèse du fluide Newtonien)

Le bilan des forces s'écrit :  $\rho_1 g(\delta - y)dx = \mu_1 \frac{du}{dy} dx + \rho_v g(\delta - y)dx$

En intégrant l'équation précédente entre  $y = 0$  et  $y = \delta$  avec la condition limite  $u = 0$  en  $y = 0$ ,

on obtient :  $u = \frac{(\rho_1 - \rho_v)g}{\mu_1} \left( \delta y - \frac{1}{2} y^2 \right)$

Le débit massique de liquide condensé à une hauteur  $x$  (par unité de longueur suivant  $Oz$ ) est donné par :

$$m = \int_0^\delta \rho_1 \left[ \frac{(\rho_1 - \rho_v)g}{\mu_1} \left( \delta y - \frac{1}{2} y^2 \right) \right] dy = \rho_1 \frac{(\rho_1 - \rho_v)g\delta^3}{3\mu_1}$$

Le flux de chaleur cédé par le condensat à la paroi sur la hauteur  $dx$  s'écrit :

$$\varphi_x = \lambda dx \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda dx \frac{T_g - T_p}{\delta}$$

Le flux de chaleur cédé par le condensat à la paroi doit être égal à la chaleur latente de condensation libérée par la quantité de vapeur calculée ci-dessus soit :

$$\rho_1 \frac{(\rho_1 - \rho_v)g\delta^2 d\delta}{\mu_1}$$

$$\Delta H = \lambda dx \frac{(T_g - T_p)}{\delta}$$

L'intégration de cette équation avec la condition limite  $\delta = 0$  en  $x = 0$  conduit à :

$$\delta = \left[ \frac{4\mu_1 \lambda x (T_g - T_p)}{g \Delta H \rho_1 (\rho_1 - \rho_v)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Le coefficient de transfert de chaleur local (en  $x$ ) par convection vérifie :

$$h_x dx (T_g - T_p) = \lambda_1 dx \frac{T_g - T_p}{\delta} \quad \text{D'où } h_x = \frac{\lambda_1}{\delta}$$

$$\text{Soit : } h_x = \left[ \frac{g \Delta H \rho_1 (\rho_1 - \rho_v) \lambda_1^3}{4 \mu_1 \times (T_g - T_p)} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Le coefficient de transfert moyen s'obtient en intégrant le coefficient local sur la hauteur L de la surface condensante :  $h_v = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx$

Soit finalement :

$$h_v = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( \frac{\lambda_1^3 \rho_1^2 g \Delta H}{L \mu_1 \Delta T} \right)^{1/4}$$

Avec :

- $\Delta H$ : chaleur latente de condensation ( $\text{J kg}^{-1}$ )
- $\Delta T$  : différence entre la température de rosée de la vapeur et la température de la paroi ( $^{\circ}\text{C}$ )
- L : hauteur de la paroi (m)
- Condition de validité :  $Re < 2100$

Considérons par exemple le cas d'un tube vertical de diamètre extérieur De.

Soient :

- M : débit massique de condensat
- S : section de passage du film liquide

On définit le diamètre hydraulique  $D_h$  du film par :

$$D_h = 4 \frac{\text{section passage}}{\text{périmètre mouillé}} = 4 \frac{S}{\pi D_e} \quad \text{d'où} \quad Re = \frac{\rho_1 u D_h}{\mu_1} = \frac{\rho_1 u}{\mu_1} \frac{4 S}{\pi D_e} = \frac{4 M}{\mu_1 \pi D_e}$$

La condition de validité s'écrit donc dans ce cas :  $\frac{4 M}{\mu_1 \pi D_e} < 2100$

Remarque :

Les grandeurs physiques relatives au liquide sont évaluées à la température du film définie par la formule de Drew :  $T_f = \frac{3T_p + T_v}{4}$

**b. Tube horizontal**

Une valeur moyenne de h pour un tube horizontal peut être calculée par :

$$h_h = 0.725 \left( \frac{\lambda_1^3 \rho_1^2 g \Delta H}{De \mu_1 \Delta T} \right)^{1/4}$$

Avec la condition de validité :  $Re = \frac{4M}{\mu_1 \pi De} < 2100$

**c. Comparaison entre tube horizontal et vertical**

Si l'on note  $L_v$  la longueur du tube vertical et  $De_h$  le diamètre extérieur du tube horizontal, le rapport des deux expressions de h conduit à :

$$\frac{h_h}{h_v} = 0.769 \left( \frac{L_v}{De_h} \right)$$

D'où :  $h_h > h_v$  si  $L_v > 2,86 De_h$  ; ce qui est pratiquement toujours le cas. Dans les mêmes conditions de température, le coefficient de transfert est plus élevé sur un tube horizontal que sur un tube vertical.

Dans le cas des condenseurs à faisceaux tubulaires, les tubes n'étant pas tous dans un même plan horizontal, le liquide tombant d'un tube va « épaissir » le film qui existe sur le tube situé en-dessous de lui de sorte que le coefficient de transfert de chaleur h est moins élevé sur les tubes inférieurs.

En tenant compte du recyclage du condensat sur les tubes inférieurs, Nusselt a proposé la relation suivante pour calculer la valeur moyenne de h pour un ensemble de N tubes situés dans un même plan vertical :

$$\bar{h}_h = 0.725 \left( \frac{\lambda_1^3 \rho_1^2 g \Delta H}{N De \mu_1 \Delta T} \right)^{1/4}$$

L'expérience a montré que cette formule théorique donne des valeurs de h inférieures à celles déterminées expérimentalement et qu'il convient de multiplier la valeur de h donné par la formule précédente ci-dessus par un facteur correctif selon la formule suivante :

$$\bar{h}_{h \text{ corrigé}} = \bar{h}_h \left[ 1 + 0.2(N - 1) \frac{c_p \Delta T}{\Delta H} \right]$$

## II.3.2 Ebullition

### II.3.2.1 Formation des gouttelettes et des bulles

La pression d'équilibre d'une gouttelette de liquide dans sa vapeur est de la forme :

$P_{rg}(T) = P_s(T) + \frac{2\sigma}{r}$ , (Voir figure III.10). Si  $r_g \rightarrow 0$  alors  $p_{rg} \rightarrow \infty$ , donc une gouttelette ne pourrait théoriquement pas prendraissance dans une vapeur qui est un milieu continu. Lors du refroidissement d'une vapeur à pression constante, la condensation va donc être initiée sur des « germes » de très petits diamètres (poussières en suspension dans l'atmosphère par exemple) à une température  $T_g$  inférieure à la température de saturation  $T_s(p)$ .

Le développement de la condensation va ensuite avoir pour effet d'augmenter la taille des gouttelettes et diminuer l'écart entre  $T_g$  et  $T_s(p)$ . De manière analogue, lorsque l'on chauffe un liquide, on suppose que sur les parois chaudes sur lesquelles se produit l'ébullition se trouvent des discontinuités (petites cavités contenant de l'air) qui servent de "germes" favorisant la naissance de bulles de petit diamètre à une température  $T_b$  supérieure à la température de saturation  $T_s(p)$ . Le développement de l'ébullition va ensuite avoir pour effet d'augmenter la taille des bulles et diminuer l'écart entre  $T_b$  et  $T_s(p)$ .

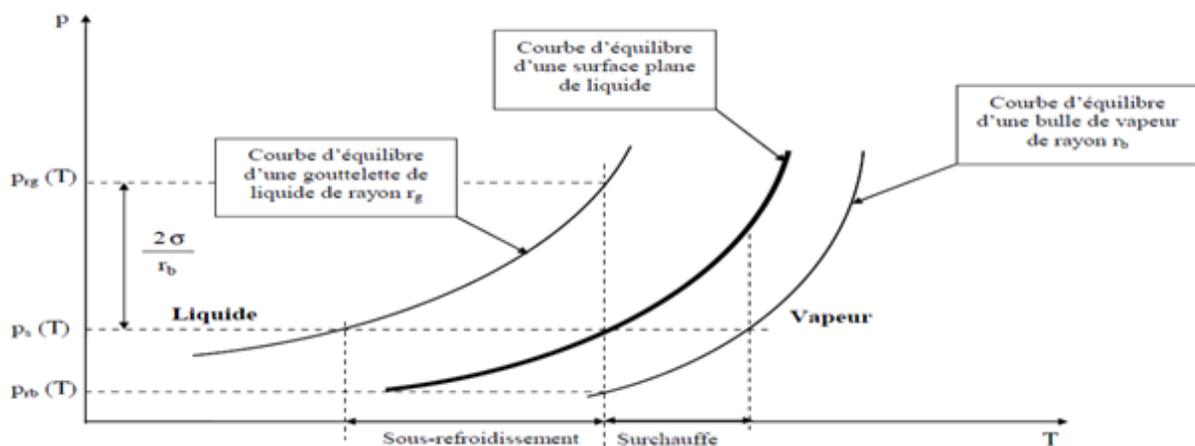


Figure II.10 : Diagramme général d'équilibre liquide-vapeur

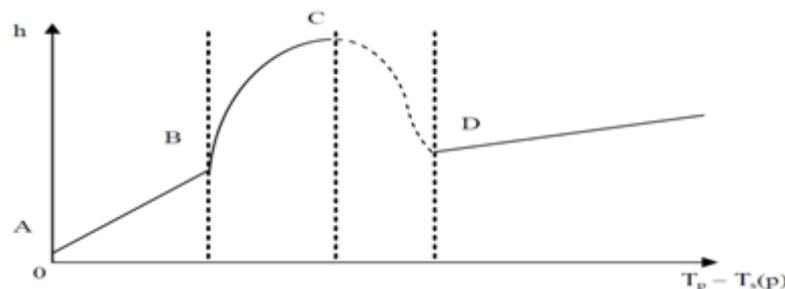
### II.3.2.2 Les différents régimes d'ébullition

Les variations du coefficient de transfert de chaleur  $h$  en fonction de l'écart de température  $T_p - T_s(p)$ , où  $T_p$  est la température de la paroi chauffée, présentent la même allure

pour un grand nombre de liquides, elles sont représentées par le graphe de Nukiyama (voir figure II.11).

➤ Zone AB

Bien que  $\theta_p > \theta_s(p)$ , il n'y a pas encore naissance de bulles. L'échange paroi-liquide s'effectue par convection naturelle et obéit à la loi de Newton :  $\phi = h S(T_p - T_\infty)$ ,  $h$  se calculant par les corrélations concernant la convection naturelle. Une évaporation se produit sur la surface plane et libre du liquide en contact avec l'air.



**Figure II.11** : Représentation schématique du graphe de Nukiyama

➤ Zone BC

Les bulles montent en colonne à partir de points isolés de la paroi : les « sites » avec une fréquence de l'ordre de 100 par seconde. Ensuite les bulles deviennent de plus en plus nombreuses et isolent presque totalement la paroi par une couche de vapeur presque continue. L'évacuation de la chaleur s'effectue principalement sous forme de chaleur latente de vaporisation. C'est la zone d'ébullition nucléée.

La densité de flux de chaleur  $\phi$  transférée dans cette zone peut être calculée par la formule suivante (Rosenhow, 1985) :

$$\frac{c_1 \Delta T}{\Delta H (Pr_1)^s} = c \left[ \frac{\phi}{\mu_1 \Delta H} \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_1 - \rho_v)}} \right]^{0.33}$$

Où :

- $c_l$  : Capacité thermique du liquide
- $\Delta T$  : Ecart de température  $T_p - T_s(p)$
- $\Delta H$  : Chaleur latente de vaporisation
- $Pr_1$  : Nombre de Prandtl du liquide à saturation
- $\sigma$  : Tension superficielle (valeur pour l'eau dans le tableau II.2)
- $g$  : Accélération de la pesanteur
- $\rho_l$  : Masse volumique du liquide
- $\rho_v$  : Masse volumique de la vapeur
- $C$  : Constante déterminée expérimentalement (cf. valeurs dans le tableau II.3)
- $s = (1 \text{ pour l'eau et } 1,7 \text{ pour les autres liquides})$

**Tableau II.2** : Valeur de la tension superficielle pour l'eau (d'après Holman, 1990)

Température Saturation °C	Tension Superficielle $10^{-3} N.m^{-1}$
0	75,6
15,6	73,3
37,8	69,8
60	66,0
93,3	60,1
100	58,8
160	46,1
226,7	32,0
293,3	16,2
360	1,46
374,1	0

**Tableau II.3:** Valeurs de la constante C pour diverses configurations fluide/surface chauffante (d'après Holman, 1990)

Configuration	C	Configuration	C
Eau-Cuivre	0,013	Benzène-Chrome	0,010
Eau-Platine	0,013	Alcool éthylique-Chrome	0,027
Eau-Laiton	0,006	n-Pentane-Chrome	0,015
Eau-Cuivre poli à l'émeri	0,0128	n-Pentane-Cuivre poli à l'émeri	0,0154
Eau-Acier inox poli	0,0080	n-Pentane-Nickel poli à l'émeri	0,0127
Tetrachlorure de carbone-Cuivre	0,013	Alcool isopropylique-Cuivre	0,00225
Tetrachlorure de carbone-Cuivre poli	0,007	Alcool n-Butly-Cuivre	0,00305

➤ Point C

La couche de vapeur isole totalement la paroi du liquide et la chaleur ne peut plus se transmettre que par l'intermédiaire de la vapeur de très faible conductivité thermique. L'augmentation brutale de la résistance thermique va provoquer une brusque augmentation de la température de la paroi chauffante jusqu'à un niveau qui va permettre d'évacuer le flux fourni à la paroi à la fois par conduction-convection et par rayonnement. On passe ainsi brusquement du point C au point D dont la température dépasse largement 1000°C, on a fusion de la paroi dans la plupart des cas, c'est pourquoi le point C est appelé point de burn-out.

La détermination du point de burn-out est capitale dans l'étude de l'ébullition pour d'évidentes raisons de sécurité. La corrélation la plus utilisée pour déterminer cette densité de flux de burn-out est la suivante (Zuber, 1958) :

$$\phi_{bo} = \frac{\pi \rho_v}{24} \Delta H \left[ \frac{\sigma g (\rho_1 - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} \left( 1 + \frac{\rho_v}{\rho_1} \right)^{1/2}$$

➤ Zone CD

Zone instable

➤ Zone DE

Zone « d'ébullition pelliculaire » dans laquelle le transfert de chaleur de la paroi vers le liquide s'effectue par conduction et par rayonnement à travers la couche continue de vapeur. Les coefficients de transfert de chaleur peuvent se calculer par (Bromley, 1950) :

Conduction :

$$h_c = 0.62 \left[ \frac{\lambda_v^3 \rho_v (\rho_l - \rho_v) g (\Delta H + 0.4 c_{pv} \Delta T)}{d \mu_v \Delta T} \right]^{\frac{1}{4}}$$

Rayonnement :

$$h_r = \frac{\sigma \varepsilon (T_p^4 - T_{sat}^4)}{T_p - T_{sat}}$$

Global :

$$h = h_c \left( \frac{h_c}{h} \right)^{\frac{1}{3}} + h_r$$

La relation empirique ci-dessus nécessite l'utilisation d'une méthode itérative pour calculer le coefficient global h.

### II.3.2.3 Intérêt du transfert de chaleur par ébullition

Outre dans les générateurs de vapeur d'eau largement utilisés dans les industries agro-alimentaires et textiles, ce type de transfert est utilisé pour l'extraction de très importantes puissances calorifiques à partir de surfaces très réduites : refroidissement de cœurs de réacteurs nucléaires, de moteurs de fusée... du fait des valeurs élevées des coefficients de transfert, de l'ordre de  $100\,000 \text{ W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

**II.4 EXERCICE : TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION**

1. Rappeler la loi de Newton concernant la convection de la chaleur.
2. Quelle est la différence entre la convection naturelle et la convection forcée ?
3. Une face d'une plaque plane de taille 60x80cm est maintenue à une température de 250°C. Cette face est refroidie par un courant d'air de température 20°C.

Calculer le flux total de chaleur échangé entre la plaque et l'air sachant que le coefficient d'échange convectif est  $h = 30 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

4. Décrire brièvement une méthode permettant de mesurer le coefficient d'échange convectif.

Solution d'exercice : Transfert de chaleur par convection

1. Loi de Newton : Le transfert de chaleur par convection a lieu entre un élément macroscopique d'un fluide (liquide, gaz) et une surface solide. La convection est un mode de transfert qui implique un déplacement de matière dans le milieu.

L'échange convectif entre une surface chaude (à Température  $T_p$ ) et un fluide (à température  $T_\infty$ ) est donnée par la loi de Newton :

$$q = h \cdot S \cdot (T_p - T_\infty)$$

Avec :  $h$  est le coefficient d'échange par convection et  $S$  la surface d'échange qui est perpendiculaire au flux de chaleur convectif.

2. Différence entre convection naturelle et convection forcée : La convection naturelle ( $h$  faible) a lieu à la suite d'une variation de la masse volumique de fluide, alors que la convection forcée ( $h$  élevée) s'effectue sous l'effet d'une action mécanique (ventilateur). Si les deux types de convection existent, il s'agit de la convection hybride.

3. Flux de chaleur convectif pour :

$$S = 0.48 \text{ m}^2 \quad T_p = 250 \text{ }^\circ\text{C}, \quad T_\infty = 20 \text{ }^\circ\text{C}, \quad h = 30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$\text{Le flux de chaleur par convection } q = h \cdot S \cdot (T_p - T_\infty)$$

$$\text{AN : } q = 30 \times 0.48 \times 230 = 3.312 \text{ KW}$$

4. Mesure de coefficient d'échange par convection : On travaille avec l'échantillon de petite taille. On fixe la vitesse de l'écoulement et on vérifie la relation de proportionnalité entre le flux échangé et la différence de température.

## **Chapitre III**

# **Transfert De Chaleur Par Rayonnement**

## Chapitre III :

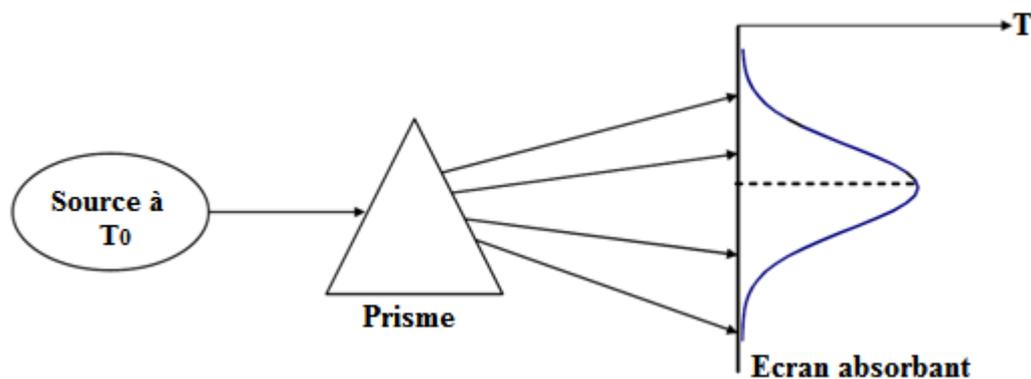
### TRANSFERT DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

#### III.1 GÉNÉRALITES & DÉFINITIONS

##### III.1.1 Nature du rayonnement

Tous les corps, quelque soit leur état : solide, liquide ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps émetteur.

Le rayonnement se propage de manière rectiligne à la vitesse de la lumière, il est constitué de radiations de différentes longueurs d'onde comme l'a démontré l'expérience de William Herschel :



**Figure III.1** : Principe de l'expérience de William Herschel.

En passant à travers un prisme, les radiations sont plus ou moins déviées selon leur longueur d'onde. On envoie donc les radiations émises par une source à la température  $T_0$  sur un prisme et on projette le faisceau dévié sur un écran absorbant (noirci), on obtient ainsi la décomposition du rayonnement total incident en un spectre de radiations monochromatiques.

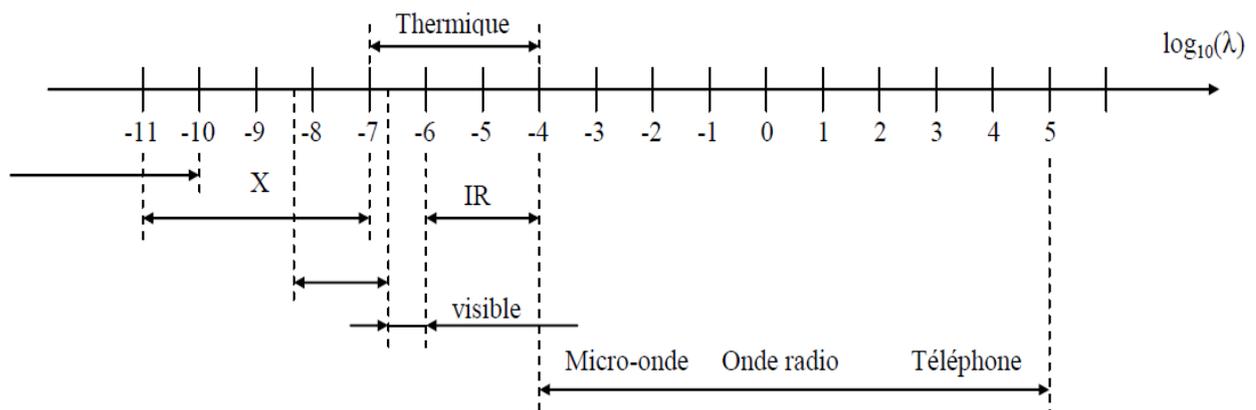
Si l'on déplace le long de l'écran un thermomètre, on mesure la température  $T_e$  caractérisant l'énergie reçue par l'écran dans chaque longueur d'onde. En construisant la

courbe  $T_e = f(\lambda)$ , on obtient la répartition spectrale de l'énergie rayonnée pour la température  $T_0$  de la source. On constate alors que:

- L'énergie émise est maximale pour une certaine longueur d'onde  $\lambda_m$  variable avec  $T_0$ .
- L'énergie n'est émise que sur un intervalle  $[\lambda_1, \lambda_2]$  de longueur d'onde caractérisant le rayonnement thermique.

On trouvera représentés sur la figure III.2 les différents types d'ondes électromagnétiques et leurs longueurs d'ondes correspondantes. On retiendra que le rayonnement thermique émis par les corps se situe entre 0,1 et 100mm. On notera par ailleurs que le rayonnement est perçu par l'homme :

- Par l'œil : pour  $0,38 \text{ mm} < \lambda < 0,78 \text{ mm}$  rayonnement visible.
- Par la peau : pour  $0,78 \text{ mm} < \lambda < 314 \text{ mm}$  rayonnement IR.



**Figure III.2 :** Spectre des ondes électromagnétiques ( $\lambda$  en m).

### III.1.2 Définitions

#### III.1.2.1 Classification

Les grandeurs physiques seront distinguées selon :

1. La composition spectrale du rayonnement :

- Si la grandeur est relative à l'ensemble du spectre elle est dite totale.
- Si elle concerne un intervalle spectral étroit  $d\lambda$  autour d'une longueur d'onde  $\lambda$  elle est dite monochromatique :  $G_\lambda$ .

## 2. La distribution spatiale du rayonnement :

- Si la grandeur est relative à l'ensemble des directions de l'espace, elle est dite hémisphérique.
- Si elle caractérise une direction donnée de propagation, elle est dite directionnelle :  $G_x$ .

### III.1.2.2 Définitions relatives aux sources

#### ➤ Flux

- On appelle flux d'une source S la puissance rayonnée notée  $\varphi$  par S dans tout l'espace qui l'entoure, sur toutes les longueurs d'onde. Le flux  $\varphi$  s'exprime en W.
- Le flux envoyé par un élément de surface  $dS$  dans un angle solide élémentaire  $d\Omega$  est noté  $d^2\varphi$
- Le flux envoyé dans tout l'espace par une surface élémentaire  $dS$  est noté  $d\varphi$ .
- Le flux envoyé par une surface S dans l'angle solide  $d\Omega$  entourant la direction Ox est noté  $d\varphi_x$ .

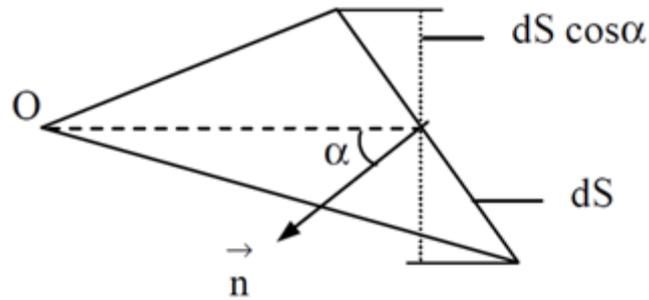
Nous avons donc les relations suivantes :  $d\varphi = \int_{\Omega} d^2\varphi$  et  $\varphi = \int_S d\varphi = \int_{\Omega} d\varphi_x$

#### ➤ Rappel sur les angles solides élémentaires :

L'angle solide sous lequel depuis un point O on voit une surface S est par définition l'aire de la surface intersection de la sphère de rayon unité et du cône de sommet O s'appuyant sur le contour de la surface S.

L'angle solide élémentaire  $d\Omega$  sous lequel est vu d'un point O le contour d'une petite surface  $dS$  (assimilée à une surface plane) peut être calculé par :

$$d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2}$$



**Figure III.3 :** Schéma de l'angle solide.

Propriétés :

- La valeur d'un angle solide  $\Omega$  est comprise entre 0 et  $4\pi$
- Pour un cône de demi-angle au sommet  $\alpha$  :  $\Omega = 2\pi (1 - \cos\alpha)$

➤ Emittance énergétique

- Monochromatique :

Un élément de surface  $dS$  émet un certain flux d'énergie par rayonnement dans toutes les directions du  $\frac{1}{2}$  espace. Ce flux est réparti sur un intervalle de longueurs d'ondes. Si l'on considère le flux d'énergie  $d\phi$

$d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}$  émis entre les deux longueurs d'ondes  $\lambda$  et  $\lambda+d\lambda$ , on définit l'émittance monochromatique d'une source à la température  $T$  par :

$$M_{\lambda T} = \frac{d\phi_{\lambda}^{\lambda+d\lambda}}{dS d\lambda}$$

- Totale : C'est la densité de flux de chaleur émise par rayonnement par  $dS$  sur tout le spectre des longueurs d'ondes. Elle n'est plus fonction que de la température  $T$  et de la nature de la source :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \frac{d\phi}{dS}$$

➤ Intensité énergétique dans une direction

On appelle intensité énergétique  $I_x$  le flux par unité d'angle solide émis par une surface  $dS$  dans un angles olide  $d\Omega$  entourant la direction  $Ox$  :

$$I_x = \frac{d\varphi_x}{d\Omega}$$

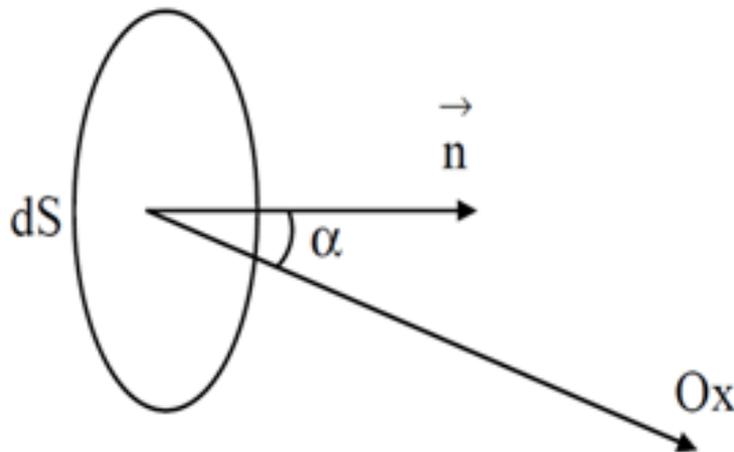
➤ Luminance énergétique dans une direction

Soit a l'angle fait par la normale  $\vec{n}$  à la surface émettrice  $S$  avec la direction  $Ox$ . La projection de  $dS$  sur leplan perpendiculaire à  $Ox$  définit la surface émettrice apparente :

$$dS_x = dS \cos \alpha.$$

L'intensité énergétique élémentaire  $dI_x$  dans la direction  $Ox$  par unité de surface émettrice apparente  $dS_x$  s'appelle la luminance énergétique  $L_x$ . En partant de la relation ci dessus :

$$L_x = \frac{I_x}{dS_x} = \frac{I_x}{dS \cos \alpha} = \frac{d^2\varphi_x}{d\Omega dS \cos \alpha}$$

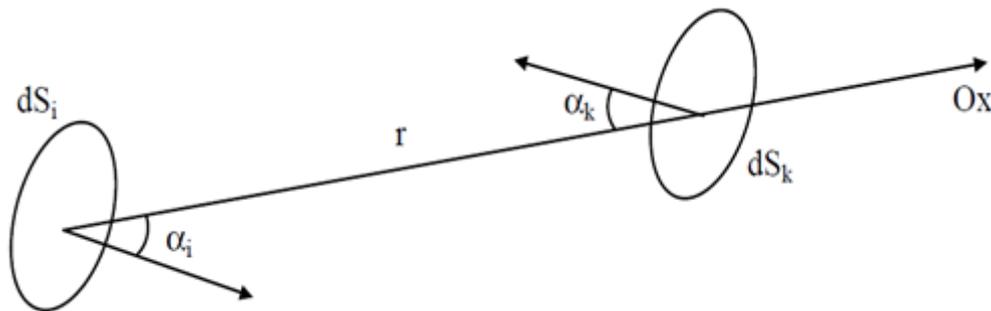


**Figure III.4** : Schéma de définition des angles

➤ Application : Formule de Bouguer

On déduit des définitions précédentes l'expression du flux  $d^2\varphi_X$  envoyé par un élément  $dS_i$  de luminance  $L_X$  sur un autre élément  $dS_k$  :

$$d^2\varphi_X = I_X d\Omega = L_X dS_i \cos \alpha_i d\Omega$$



**Figure III.5** : Schéma de définition des angles dans la formule de Bouguer

Où :  $d\Omega$  est l'angle solide sous lequel on voit la surface  $dS_k$  depuis la surface  $dS_i$  donc :

$$d\Omega = \frac{dS_k \cos \alpha_k}{r^2}$$

D'où la formule de Bouguer :

$$d^2\varphi_X = L_{iX} \frac{dS_i \cos \alpha_i dS_k \cos \alpha_k}{r^2}$$

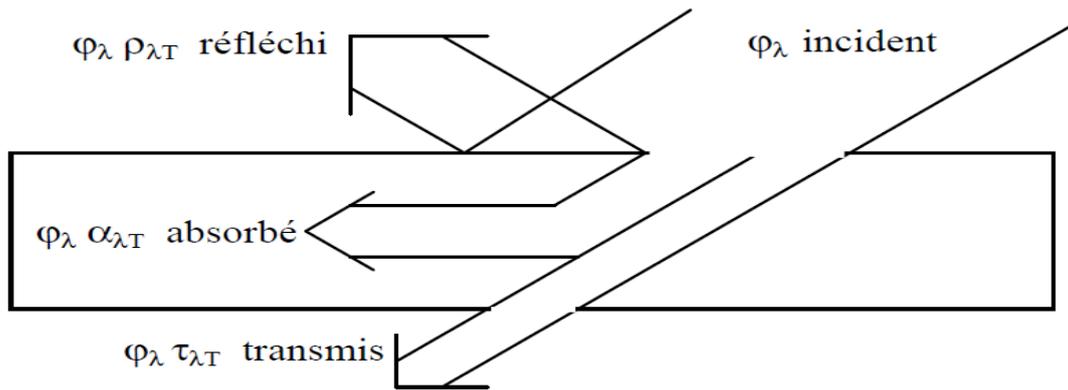
### III.1.2.3 Définitions relatives à un récepteur

➤ Eclairement

C'est l'homologue de l'émittance pour une source. L'éclairement est le flux reçu par unité de surface réceptrice, en provenance de l'ensemble des directions.

➤ Réception du rayonnement par un solide

Quand un rayon incident d'énergie  $\varphi_l$  frappe un corps à la température T, une partie  $\varphi_\lambda \rho_{\lambda T}$  de l'énergie incidente est réfléchiée par la surface S, une autre partie  $\varphi_\lambda \alpha_{\lambda T}$  est absorbée par le corps qui s'échauffe et le reste  $\varphi_\lambda \tau_{\lambda T}$  est transmis et continue son chemin :



**Figure III.6:** Schématisation de la répartition d'un flux incident de rayonnement sur un solide.

On a évidemment:  $\varphi_\lambda = \varphi_\lambda \rho_{\lambda T} + \varphi_\lambda \alpha_{\lambda T} + \varphi_\lambda \tau_{\lambda T}$  d'où :  $\rho_{\lambda T} + \alpha_{\lambda T} + \tau_{\lambda T} = 1$

On définit ainsi les pouvoirs monochromatiques réfléchissant  $\rho_{\lambda T}$ , absorbant  $\alpha_{\lambda T}$  et filtrant  $\tau_{\lambda T}$  qui sont fonction de la nature du corps, de son épaisseur, de sa température  $T$ , de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement incident et de l'angle d'incidence. Si l'on considère l'énergie incidente sur tout le spectre des longueurs d'onde, on obtient les pouvoirs réfléchissants  $\rho_T$ , absorbant  $\alpha_T$  et filtrant  $\tau_T$  totaux. Les valeurs de  $\rho_T$ ,  $\alpha_T$  et  $\tau_T$  de certains corps sont déjà annexées.

#### III.1.2.4 Corps noir, corps gris

##### ➤ Corps noir

C'est un corps qui absorbe toutes les radiations qu'il reçoit indépendamment de son épaisseur, de sa température, de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde du rayonnement incident, il est défini par :  $\alpha_{\lambda T} = 1$ .

Une surface enduite de noir de fumée est approximativement un corps noir.

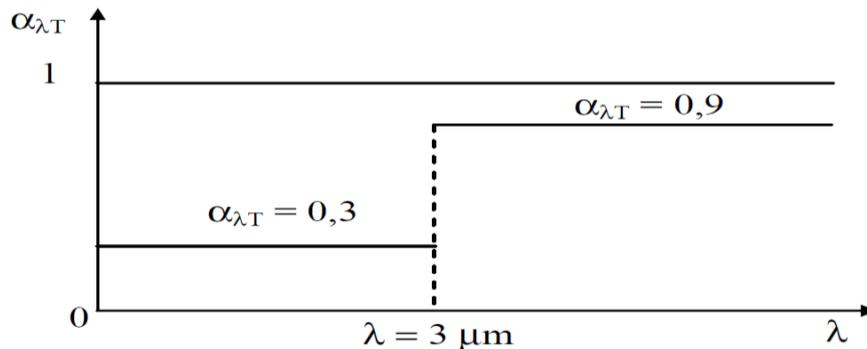
Propriétés du corps noir sont :

- Tous les corps noirs rayonnent de la même manière.
- Le corps noir rayonne plus que le corps non noir à la même température.

➤ Corps gris

Un corps gris est un corps dont le pouvoir absorbant  $\alpha_{\lambda T}$  est indépendant de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement qu'il reçoit. Il est défini par :  $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ .

En général, on considère les corps solides comme des corps gris par intervalle et on utilise un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour  $\lambda < 3 \text{ mm}$  (rayonnement émis par des corps à haute température comme le Soleil) et un pouvoir absorbant moyen vis-à-vis du rayonnement émis pour  $\lambda > 3 \text{ mm}$  (rayonnement émis par les corps à faible température : atmosphère, absorbeur solaire,...). On pourra à titre d'exemple considérer les valeurs suivantes pour la peinture blanche :



**Figure III.7:** Représentation simplifiée du pouvoir absorbant monochromatique de la peinture blanche.

## III.2 LOIS DU RAYONNEMENT

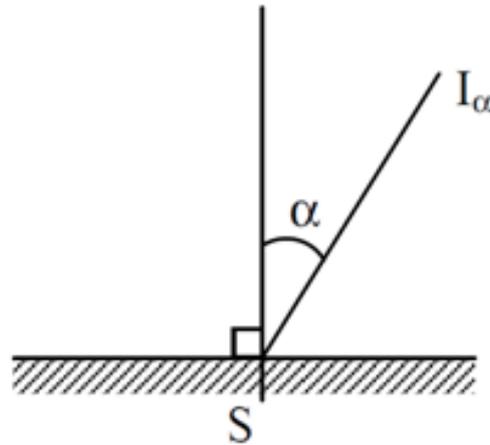
### III.2.1 Loi de Lambert

Une source est isotrope si la luminance est indépendante de la direction :  $L_x = L$

$$\text{Or: } L_x = \frac{I_x}{dS_x} = \frac{I_x}{dS \cos \alpha}$$

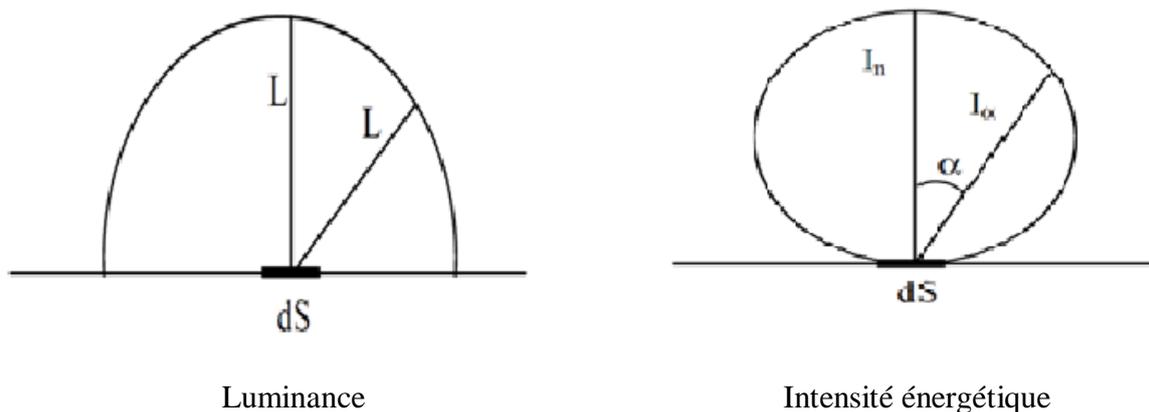
De l'égalité  $L_x = L$  on déduit la loi de Lambert pour une source une source isotrope :

$$\frac{dI_x}{dS} = L \cos \alpha$$



**Figure III.8:** Schématisation de l'intensité énergétique

Ainsi l'indicatrice d'émission est une sphère tangente en O à la surface émettrice lorsque celle-ci suit la loi de Lambert :



**Figure III.9:** Schématisation de la luminance et de l'intensité énergétique d'une source isotrope.

Remarque : Comme pour un cône de demi-angle au sommet  $\alpha$  :  $\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha)$  et

$$d\Omega = 2\pi \sin\alpha \, d\alpha$$

Lorsqu'un corps suit la loi de Lambert :

$$M = \frac{d\phi}{dS} = L \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} \cos\alpha \, d\Omega = 2\pi L \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} \cos\alpha \sin\alpha \, d\alpha$$

Soit :

$$M = \pi L$$

### III.2.2 Lois physiques

#### III.2.2.1 Loi de Kirchoff

A une température  $T$  donnée et pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, le rapport  $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$  est le même pour tous les corps.

Pour le corps noir :  $\alpha_{\lambda T} = 1$ , le rapport  $\frac{M_{\lambda T}}{\alpha_{\lambda T}}$  est donc égal à  $M_{O_{\lambda T}}$  en appelant  $M_{O_{\lambda T}}$  l'émittance monochromatique du corps noir, donc :

$$M_{\lambda T} = \alpha_{\lambda T} M_{O_{\lambda T}}$$

L'émittance monochromatique de tout corps est égale au produit de son pouvoir absorbant monochromatique par l'émittance monochromatique du corps noir à la même température, d'où l'intérêt de connaître le rayonnement émis par le corps noir.

#### ➤ Cas des corps gris : « loi de Kirchoff généralisée »

Dans le cas du corps gris, on peut généraliser cette loi ce qui facilite les applications. En effet pour un corps gris  $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$ , donc :

$$M_T = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{\lambda T} d\lambda = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \alpha_{\lambda T} M_{O_{\lambda T}} d\lambda = \alpha_T \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} M_{O_{\lambda T}} d\lambda$$

En appelant  $M_{O_T}$  l'émittance totale du corps noir à la température  $T$ , nous obtenons pour un corps gris :

$$M_T = \alpha_T M_{O_T}$$

L'émittance totale  $M_T$  d'un corps gris à la température  $T$  est égal au produit de son pouvoir absorbant  $\alpha_T$  à  $T$  par l'émittance totale  $M_{O_T}$  du corps noir à la même température.

### III.2.2.2 Rayonnement du corps noir

#### ➤ Emittance monochromatique

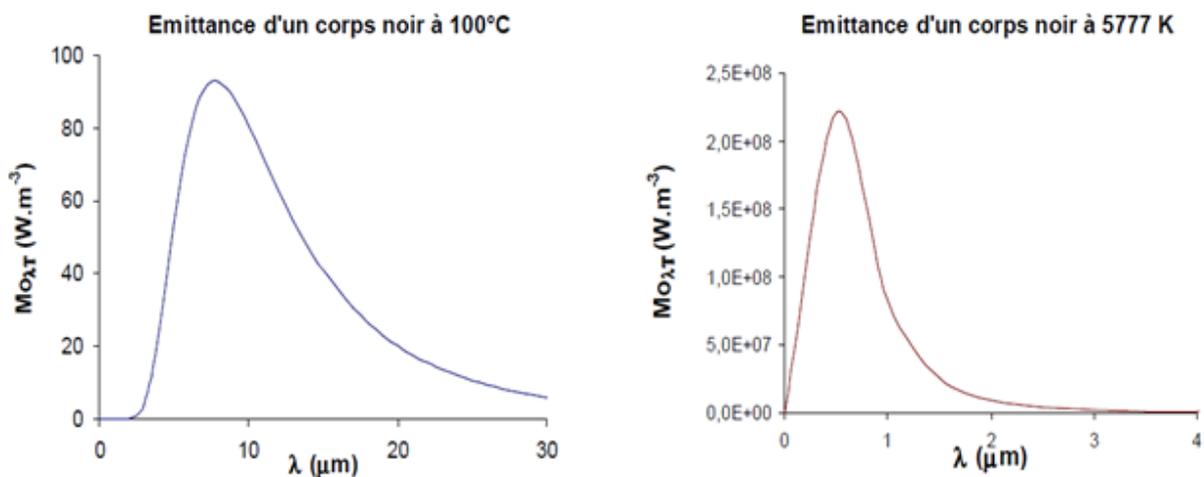
Elle est donnée par la loi de Planck :

$$M_{o\lambda T} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1}$$

Avec :  $C_1 = 3,742 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^{-2}$

$C_2 = 1,4385 \cdot 10^{-2} \text{ m.}^\circ\text{K}$

La loi de Planck permet de tracer les courbes isothermes représentant les variations de  $M_{o\lambda T}$  en fonction de la longueur d'onde pour diverses températures :



**Figure III.10** : Emittance monochromatique d'un corps noir à deux températures différentes

#### Remarque :

- La longueur d'onde  $\lambda_M$  pour laquelle l'émission est maximale varie avec la température de la source :

$$\lambda_M = \frac{2.897 \cdot 10^{-3}}{T}$$

et

$$M_{o\lambda_M T} = 0.410 \left(\frac{T}{10}\right)^5$$

Avec T : Température (°K)

Pour le Soleil ( $T = 5777 \text{ °K}$  ; 90% de l'énergie est émise entre  $\lambda = 0,31$  et  $2,5 \text{ mm}$ , le maximum étant situé dans le spectre visible. Par contre, un corps noir à  $373 \text{ °K}$  ( $100\text{°C}$ ) à son émission maximale vers  $\lambda = 8 \text{ mm}$  dans l'IR.

➤ Emittance totale  $M_{oT}$

L'intégration de la formule de Planck pour toutes les longueurs d'onde donne l'émission totale  $M_{oT}$  du corps noir qui n'est plus fonction que de la température  $T$ , on obtient la loi de Stefan-Boltzmann :

$$M_{oT} = \sigma T^4$$

Avec :  $\sigma = 5,675 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{°K}^{-4}$

Dans les calculs, on écrira souvent :  $M_{oT} = 5,675 \left( \frac{T}{100} \right)^4$

Fraction de l'émission dans un intervalle donné de longueurs d'onde  $[\lambda_1, \lambda_2]$

C'est la fraction du flux émis par l'unité de surface du corps noir à la température  $T$  entre les longueurs d'ondes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  :

$$F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda}{\int_0^{\infty} M_{o\lambda T} d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda - \int_0^{\lambda_1} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{\int_0^{\lambda_2} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4} - \frac{\int_0^{\lambda_1} M_{o\lambda T} d\lambda}{\sigma T^4}$$

Ce qui peut également s'écrire :  $F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T}$ , Calculons  $F_{0-\lambda T}$  à  $T$  constant :

$$F_{0-\lambda T} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} d\lambda = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 (\lambda T)^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} T d\lambda = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\lambda} \frac{C_1 (\lambda T)^{-5}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} d\lambda T$$

Nous constatons que  $F_{0-\lambda T}$  ne dépend que du produit  $\lambda T$ . Il suffit donc de dresser une fois pour toutes une table à une entrée unique  $\lambda T$  donnant  $F_{0-\lambda T}$  et de l'utiliser pour le calcul de  $F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T}$ .

### III.2.2.3 Rayonnement des corps non noirs

➤ Facteur d'émission ou émissivité

On définit les propriétés émissives des corps réels par rapport aux propriétés émissives du corps noir dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde et on les caractérise à l'aide de coefficients appelés facteurs d'émission ou émissivités. Ces coefficients monochromatiques ou totaux sont définis par :

$$\varepsilon_{\lambda T} = \frac{M_{\lambda T}}{M_{o\lambda T}} \quad \text{et} \quad \varepsilon_T = \frac{M_T}{M_{oT}}$$

D'après la loi de Kirchoff, on montre que :

$$\alpha_{\lambda T} = \varepsilon_{\lambda T}$$

- Cas des corps gris

Ils sont caractérisés par  $\alpha_{\lambda T} = \alpha_T$  soit d'après ce qui précède :  $\varepsilon_{\lambda T} = \varepsilon_T$

Or :  $M_T = \varepsilon_T M_{oT}$  , nous en déduisons l'émittance du corps gris à la température  $T$  :

$$M_T = \varepsilon_T \sigma T^4$$

## III.3 RAYONNEMENT RECIPROQUE DE PLUSIEURS SURFACES

Hypothèses :

- Les surfaces considérées sont supposées homogènes, opaques, isothermes et grises.
- Les éclairagements sont supposés homogènes et les réflexions diffuses.

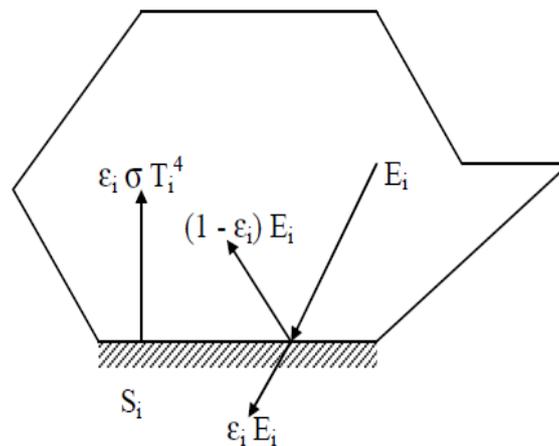
### III.3.1 Radiosité et flux net perdu

Le rayonnement qui quitte une surface  $S_i$  est la somme de son émission propre et de la réflexion d'une partie du rayonnement incident sur cette surface. On appelle radiosité, que l'on note  $J_i$ , l'émittance apparente de la surface  $S_i$  donc :

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) E_i$$

Avec  $E_i$  : Eclairement de la surface  $S_i$  ( $\text{W.m}^{-2}$ )

Considérons maintenant la surface  $S_i$  choisie parmi  $n$  surfaces isothermes et homogènes qui délimitent un volume:



**Figure III.11:** Schématisation des flux de rayonnement sur une surface.

La densité d'énergie nette perdue par rayonnement par  $S_i$  s'écrit :  $\Phi_{i_{net}} = \varepsilon_i \sigma T_i^4 - \varepsilon_i E_i$

En introduisant, d'après l'expression précédente de  $J_j$ , la radiosité  $J_i$  par :

$E_i = \frac{1}{1 - \varepsilon_i} (J_i - \varepsilon_i \sigma T_i^4)$ , nous obtenons:

$$\Phi_{i_{net}} = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) = \varepsilon_i (\sigma T_i^4 - E_i) = J_i - E_i$$

### III.3.2 Facteur de forme géométrique

On considère une surface  $S_i$  qui sur toute son étendue à une émission apparente :

$$\varphi_i = S_i J_i.$$

La surface  $S_i$  est environnée par un nombre  $n$  de surfaces et  $\varphi_i$  est envoyé sur toutes ces surfaces (la surface  $S_i$  peut également rayonner vers elle-même si elle est concave). Le flux apparent  $\varphi_i$  peut donc se décomposer de la manière suivante :

$$\varphi_i = \varphi_{i \rightarrow 1} + \varphi_{i \rightarrow 2} + \dots + \varphi_{i \rightarrow i} + \dots + \varphi_{i \rightarrow n}$$

Calculons  $\varphi_{i \rightarrow k}$  qui est la part du flux quittant  $S_i$  qui atteint  $S_k$  :

D'après la formule de Bouguer, le flux  $d^2\varphi_{i \rightarrow k}$  envoyé par la surface élémentaire  $dS_i$  vers la surface élémentaire  $dS_k$  s'écrit :

$$d^2\varphi_{i \rightarrow k} = L_i \frac{dS \cos \alpha_i dS_k \cos \alpha_k}{r^2}$$

avec :  $L_i = \frac{J_i}{\pi}$  comme la surface grise  $S_i$  suit la loi de Lambert,

Nous en déduisons :

$$\varphi_{i \rightarrow k} = J_i \int_{S_i} \int_{S_k} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_k}{\pi r^2} dS_i dS_k$$

Le facteur de forme géométrique  $f_{ik}$  de la surface  $S_i$  par rapport à la surface  $S_k$  est alors défini par la relation :

$$S_i f_{ik} = \int_{S_i} \int_{S_k} \frac{\cos \alpha_i \cos \alpha_k}{\pi r^2} dS_i dS_k$$

Il ne dépend que de la géométrie et de la disposition relative des surfaces  $S_i$  et  $S_k$ . Des formules donnent sa valeur pour les cas de figure III. 11 les plus courants. Le flux  $\varphi_{i \rightarrow k}$  peut alors s'écrire simplement :  $\varphi_{i \rightarrow k} = J_i f_{ik} S_i$

Le facteur de forme géométrique  $f_{ik}$  s'interprète simplement comme la fraction du flux total émis en apparence par  $S_i$ ; ( $\varphi_i = J_i S_i$ ) qui atteint la surface  $S_j$ .

Remarque :

• Le 2<sup>ème</sup> membre de la formule de définition de  $f_{ik}$  est symétrique en  $i$  et  $k$ , on en déduit la relation de réciprocité des facteurs de forme :

$$S_i f_{ik} = S_k f_{ki}$$

• La relation  $\varphi_i = \varphi_{i \rightarrow 1} + \varphi_{i \rightarrow 2} + \dots + \varphi_{i \rightarrow i} + \dots + \varphi_{i \rightarrow n}$  peut s'écrire :  
 $\varphi_i = J_i f_{i1} S_i + J_i f_{i2} S_i + \dots + J_i f_{in} S_i = J_i S_i (f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{in})$  or  $\varphi_i = S_i J_i$

D'où :

$$f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{in} = 1$$

Ces deux relations sont utiles pour la détermination des facteurs de formes de plusieurs surfaces en présence.

### III.3.3 Calcul des flux

Le flux  $\varphi_{\rightarrow i}$  reçu par la surface  $S_i$  s'écrit :  $\varphi_{\rightarrow i} = E_i S_i = \sum_{k=1}^n \varphi_{k \rightarrow i}$  or  $\varphi_{k \rightarrow i} = J_k S_k f_{ki}$

D'où :  $E_i S_i = \sum_{k=1}^n J_k S_k f_{ki} = \sum_{k=1}^n J_k S_i f_{ik}$ .

En reportant cette expression aux calculs précédents, nous obtenons :

$$J_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) \sum_{k=1}^n J_k f_{ik}$$

Soit encore :  $\sigma T_i^4 = \frac{J_i}{\varepsilon_i} - \frac{1}{\varepsilon_i} \sum_{k=1}^n (1 - \varepsilon_i) J_k f_{ik}$

En utilisant le symbole de Kronecker, nous pouvons écrire :  $J_i \sum_{k=1}^n \delta_{ik} J_k$

D'où :

$$\sum_{k=1}^n [\delta_{ik} - (1 - \varepsilon_i) f_{ik}] J_k = \varepsilon_i \sigma T_i^4$$

On écrit cette relation pour toutes les surfaces  $S_i$  dont on connaît les températures. Pour celles dont on connaît plutôt la densité de flux net perdue  $\Phi_{i_{net}}$  on utilise la relation :

$$\Phi_{i_{net}} = J_i - E_i = J_i - \sum_{k=1}^n f_{ik} J_k$$

Qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=1}^n (\delta_{ik} - f_{ik}) J_k = \Phi_{i_{net}}$$

➤ Méthode de résolution

Si l'on connaît p températures et (n-p) densités de flux nets  $\Phi_{i_{net}}$ , on peut obtenir ainsi un système linéaire de n équations à n inconnues :  $J_1, J_2, \dots, J_p; T_{p+1}, \dots, T_n$ .

La résolution de ce système permet de calculer les (n-p) températures et les p radiosités inconnues. Les p densités de flux nets inconnues se calculent ensuite par la relation ::

$$\Phi_{i_{net}} = \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i)$$

Remarque :

Si une surface est noire ( $\varepsilon_i = 1$ ), nous avons alors simplement dans ce cas la relation :  $J_i = \sigma T_i^4$  et l'on résout le système des (n-1) équations restantes.

### III.3.3.1 Exemple d'application : Cas de deux plans parallèles infinis

On suppose que les températures  $T_1$  et  $T_2$  ainsi que les émissivités  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont connues, on cherche à déterminer le flux net perdu par chacune de ces surfaces.

Nous avons  $f_{11} = f_{22} = 0$  car les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont planes et ne peuvent pas rayonner vers elles-mêmes.

Nous en déduisons  $f_{12} = 1$  et  $f_{21} = 1$  en appliquant la relation  $\sum_{k=1} f_{ik} = 1$  pour  $i=1$  et pour  $i=2$ .

La relation (4.23) s'écrit alors de la manière suivante pour  $i = 1$  et  $i = 2$  :

$$\begin{cases} J_1 - (1 - \varepsilon_1)J_2 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \\ -(1 - \varepsilon_2)J_1 + J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } J_1 = \sigma \frac{\varepsilon_1 T_1^4 + \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1) T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}$$

$$\Phi_{i_{net}} = \frac{\varepsilon_i}{1-\varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i) = \sigma T_1^4 \left( \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) - \sigma T_2^4 \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

Et  $\phi_{1net} = -\phi_{2net} = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_2}$

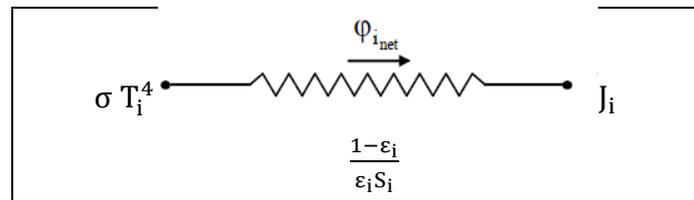
Soit finalement :  $\phi_{1net} = -\phi_{2net} = \sigma \frac{(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$

**III.3.4 Analogie électrique**

➤ Flux net perdu par une surface

Nous avons montré que :  $\phi_{inet} = \frac{\epsilon_i}{1 - \epsilon_i} (\sigma T_i^4 - J_i)$  ce qui peut encore s'écrire :  $\phi_{inet} = \frac{\sigma T_i^4 - J_i}{\frac{1 - \epsilon_i}{\epsilon_i S_i}}$

Par analogie, cette relation peut être représentée par le schéma électrique équivalent suivant :



**Figure III.12:** Schéma électrique équivalent du flux radiatif perdu par une surface.

On notera que cette résistance thermique de rayonnement ne dépend que des propriétés physiques de la surface  $S_i$  et qu'elle est nulle pour un corps noir.

➤ Flux net échangé entre plusieurs surfaces

Le flux net perdu par la surface  $S_i$  dans ses échanges radiatifs avec l'ensemble des surfaces environnantes s'écrit :  $\phi_{inet} = (J_i - E_i)S_i$

Le flux  $\phi_i = J_i S_i$  quittant la surface  $S_i$  peut se décomposer de la manière suivante:

$$\phi_i = \phi_{i \rightarrow 1} + \phi_{i \rightarrow 2} + \dots + \phi_{i \rightarrow i} + \dots + \phi_{i \rightarrow n} = \sum_{j=1}^n J_i S_i f_{ij}$$

L'éclairement  $E_i$  reçu par la surface  $S_i$  peut se décomposer de la manière suivante:

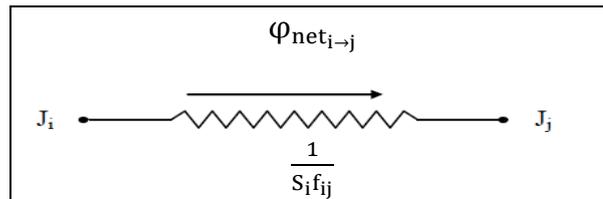
$$E_i S_i = \sum_{j=1}^n \phi_{j \rightarrow i} = \sum_{j=1}^n J_j S_j f_{ji}$$

Le flux net perdu par  $S_i$  peut donc s'écrire:

$$\varphi_{i_{net}} = \sum_{j=1}^n J_i S_i f_{ij} - J_j S_j f_{ji} = \sum_{j=1}^n S_i f_{ij} (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^n \varphi_{net_{i \rightarrow j}}$$

Le flux net échangé entre les surfaces  $S_i$  et  $S_j$  s'écrit donc :  $\varphi_{net_{i \rightarrow j}} = (J_i - J_j) S_i f_{ij} = \frac{J_i - J_j}{\frac{1}{S_i f_{ij}}}$

Cet échange radiatif peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant:



**Figure III.13:** Schéma électrique équivalent du flux radiatif échangé entre deux surfaces.

On notera que cette résistance thermique de rayonnement est purement géométrique et qu'elle ne dépend pas des propriétés physiques des surfaces  $S_i$  et  $S_j$ .

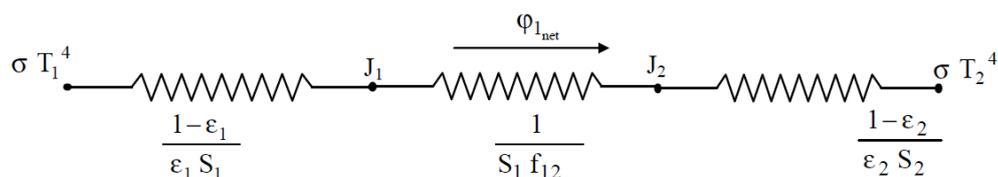
### Application :

Echange entre deux surfaces grises  $S_i$  les deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont seules en présence, le flux net  $\varphi_{1_{net}}$  perdu par  $S_1$  est égal au flux net  $\varphi_{2_{net}}$  gagné par  $S_2$ . Ce flux est encore égal au flux net  $\varphi_{net_{1 \rightarrow 2}}$  échangé entre  $S_1$  et  $S_2$ , nous avons donc les égalités :

$$\varphi_{1_{net}} = \varphi_{net_{1 \rightarrow 2}} = -\varphi_{2_{net}}$$

$$\text{Soit } \varphi_{1_{net}} = \frac{\sigma T_1^4 - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{S_1 f_{12}}} = \frac{J_2 - \sigma T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

Cet échange radiatif peut être représenté par le schéma électrique équivalent suivant:



**Figure III.14:** Schéma électrique équivalent du flux radiatif net échangé entre deux surfaces.

$$D'o\grave{u} : \varphi_{1net} = -\varphi_{2net} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1 f_{12}} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

### Utilisation des schémas analogiques

Dans les systèmes simples, il est plus rapide d'utiliser la technique des schémas analogiques que celle du système linéaire. Lorsqu'on a établi le schéma analogique, on calcule les différentes résistances du circuit puis on résout par les techniques habituelles utilisées en électricité: loi d'association des résistances en série et en parallèle, loi des nœuds,...

#### **III.3.4.1 Exemple d'application : Cas d'une surface $S_1$ convexe complètement entourée par une surface $S_2$**

La surface  $S_1$  étant convexe elle ne peut pas rayonner vers elle-même donc :  $f_{11} = 0$

La relation  $f_{11} + f_{12} = 1$  nous permet de déduire :  $f_{12} = 1$

On peut alors écrire :

$$\varphi_{1net} = -\varphi_{2net} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{S_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \sigma \frac{T_1^4 - T_2^4}{\frac{1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{\varepsilon_2 S_2} + \frac{1}{S_2}}$$

$$\varphi_{1net} = -\varphi_{2net} = \sigma \frac{S_1(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$$

Cas particulier où la surface  $S_1$  est « petite » devant la surface  $S_2$  :

Nous avons dans ce cas :  $\frac{S_1}{S_2} \approx 0$  et la relation précédente s'écrit alors:

$$\varphi_{1net} = -\varphi_{2net} = \sigma \varepsilon_1 S_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

Vue de la surface  $S_1$  (« petit corps »), la surface  $S_2$  se comporte alors comme un corps noir.

### III.4 EMISSION ET ABSORPTION DES GAZ

#### III.4.1 Spectre d'émission des gaz

Beaucoup de gaz et de mélanges de gaz sont transparents pour  $T < 3000 \text{ K}$  :  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$ , air sec... Par contre, les gaz hétéro polaires diatomiques ou triatomiques ( $\text{CO}_2$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{CH}_4$ ...) et des vapeurs d'hydrocarbures ou d'alcools présentent des bandes d'émission et d'absorption de largeur plus ou moins grande dans le spectre, le gaz restant transparent entre ces bandes. Les spectres d'émission sont de plus différents selon la température du gaz.

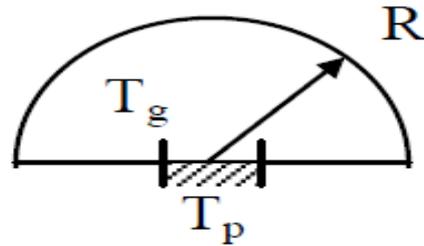
Le  $\text{CO}_2$  et la vapeur d'eau sont importants en pratique :

- Présents en grande quantité dans les gaz de combustion, leur rayonnement est parfois essentiel dans les échanges de chaleur entre les flammes, les gaz chauds et les charges à réchauffer.
- Présents dans l'atmosphère, le flux qu'ils envoient vers la Terre joue un rôle important dans son bilan thermique.
- Les refroidissements nocturnes importants observés en saison sèche s'expliquent par l'abaissement du rayonnement émis par l'atmosphère du fait de la faible présence de vapeur d'eau dans l'air.
- L'augmentation de la teneur en  $\text{CO}_2$  dans l'atmosphère du fait des émissions industrielles et automobiles augmente le rayonnement émis par l'atmosphère vers la Terre et contribue au réchauffement de la Terre (effet de serre).

#### III.4.2 Echange thermique entre un gaz et une paroi

##### Cas particulier

Traitons le cas d'une masse de gaz hémisphérique et d'une paroi plane de petites dimensions placée au centre de la base de l'hémisphère:



**Figure III.15:** Schématisation du cas considéré.

Soient  $T_p$  et  $T_g$  les températures de la paroi et du gaz et  $R$  le rayon de l'hémisphère.

Le gaz envoie sur la paroi un rayonnement dont la densité de flux a pour valeur :  $\sigma \varepsilon_g T_g^4$ ,  $\varepsilon_g$  étant le facteur total d'émission de la couche de gaz d'épaisseur  $R$  à la température  $T_g$ .  $\varepsilon_g$  a la même valeur dans toutes les directions car la couche de gaz a la même épaisseur dans toutes les directions du fait de sa forme hémisphérique.

La densité de flux absorbé par la paroi est :  $\varepsilon_p \sigma \varepsilon_g T_g^4$ ,  $\varepsilon_p$ ,  $\varepsilon_p$  étant le facteur total d'absorption de la paroi.

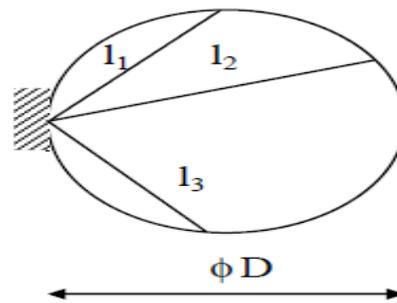
La paroi émet par ailleurs un rayonnement d'une densité de flux égale à :  $\sigma \varepsilon_p T_p^4$

Au total, la paroi reçoit la densité de flux net :

$$\varphi_{p_{net}} = \varepsilon_p \sigma (\varepsilon_g T_g^4 - T_p^4)$$

### Cas général

Dans le cas particulier que nous venons de traiter, tous les trajets aboutissant à la paroi ont la même longueur donc  $\varepsilon_g$  est le même dans toutes les directions. Il n'en n'est pas ainsi dans le cas général. Par exemple, dans le cas d'une paroi sphérique de diamètre  $D$  enfermant une masse gazeuse, les trajets aboutissants à la paroi ont une longueur comprise entre 0 et  $D$ . Le calcul de la densité de flux envoyée par le gaz sur la paroi nécessite donc une intégration par rapport à l'angle d'incidence.



**Figure III.16:** Schématisation du transfert radiatif dans une sphère gazeuse.

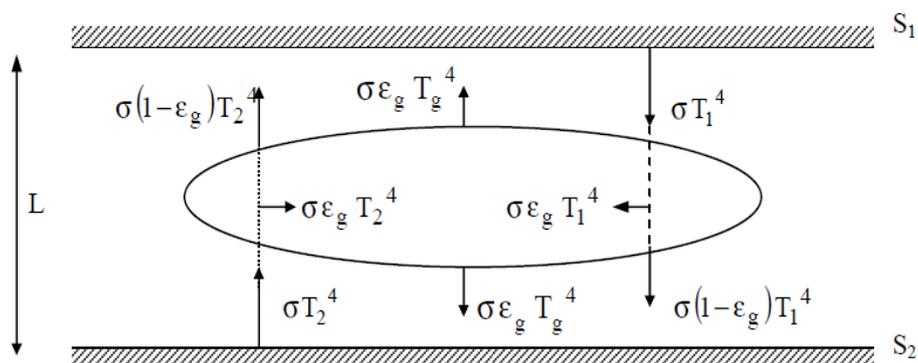
On trouve par exemple dans ce cas que la densité de flux est égale à celle que l'on obtiendrait avec un hémisphère de rayon équivalent :  $R = \frac{2}{3} D$

D'une manière plus générale, on trouve qu'une bonne approximation du rayon de l'hémisphère équivalent peut être calculée par :

$$R = \frac{4V}{S}$$

#### Echange thermique entre deux parois séparées par un gaz

Considérons un gaz séparant deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  supposées planes, parallèles et noires, à des températures différentes  $T_1$  et  $T_2$ . On admettra que la masse de gaz est à la température uniforme  $T_g$  et qu'elle a une épaisseur constante  $L$ .



**Figure III.17:** Schématisation des flux radiatifs entre deux parois séparées par un gaz.

La température  $T_g$  du gaz peut être calculée en fonction de  $T_1$  et de  $T_2$  en écrivant que le flux de chaleur absorbé par la couche gazeuse est égal au flux qu'elle rayonne vers les deux parois :

$$2\sigma \varepsilon_g T_g^4 = \varepsilon_g \sigma T_1^4 + \varepsilon_g \sigma T_2^4$$

D'où :

$$T_g^4 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

La densité de flux qui passe de la surface  $S_1$  à la surface  $S_2$  s'écrit:

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \sigma T_1^4 (1 - \varepsilon_g) + \sigma \varepsilon_g T_g^4$$

$$\Phi_{1\text{net}} = \Phi_{2\text{net}} = \Phi_{1 \rightarrow 2} - \sigma T_2^4 = \sigma(T_1^4 - T_2^4) \left(1 - \frac{\varepsilon_g}{2}\right)$$

### ➤ Exercice 1 : Transfert de chaleur par rayonnement

On considère deux plaques planes ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) de dimensions très grandes et assimilées à des corps noirs. Les températures de ces plaques sont  $T_1 = 1000^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 200^\circ\text{C}$ .

▪ Calculer la densité de flux de chaleur échangée par rayonnement. La constante de Stefan est

$$\sigma = 5.67051 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}.$$

### Solution d'exercice N°1 : Transfert de chaleur par rayonnement

Le transfert de chaleur par rayonnement est dû à la propagation des ondes électromagnétiques qui peuvent se déplacer aussi bien dans un milieu matériel que dans le vide. Un corps noir est un corps qui absorbe toute la lumière.

Le flux de chaleur par unité de surface est donnée par :

$$\phi = \frac{q}{S} = \sigma T^4 = \sigma [T_1^4 - T_2^4] = 1.510^6 \text{W/m}^2$$

L'émissivité est le rapport entre l'énergie rayonnée et celle qu'un corps noir rayonnerait à la même température. Pour un corps noir, l'émissivité  $\varepsilon$  vaut 1.

Pour un corps gris, le flux de chaleur s'écrit comme suit :

$$q_{ray} = F \cdot \epsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot [T_1^4 - T_2^4]$$

Avec :  $F$  est le facteur de forme qui tient compte des caractéristiques géométriques des surfaces.

➤ **Exercice 2** : Combinaison des modes de transfert

1. Une conduite non calorifugée traverse une chambre où l'air et les murs sont à 25°C. Le diamètre extérieur, la température et l'émissivité de la conduite sont respectivement

$D = 7\text{mm}$ ,  $T_s = 200^\circ\text{C}$ ,  $\epsilon = 0.8$ . Le coefficient d'échange par convection naturelle de la conduite vers l'air est  $h = 15\text{W/m}^2\text{K}$ .

Rappeler la loi de Fourier. Exprimer le flux de chaleur émis dans chacun des cas suivants :

i- Calculer le flux de chaleur perdu par unité de longueur de la conduite.

ii- Refaire le même calcul pour une température de la conduite  $T_s = 300^\circ\text{C}$  puis  $T_s = 400^\circ\text{C}$  (les autres paramètres sont supposés inchangés).

2. Les gaz chauds d'un four sont séparés de l'air ambiant et le milieu extérieur par une un mur de brique d'épaisseur 20cm. La brique a une conductivité thermique  $\lambda = 1.3\text{W/m}^2\text{K}$  et une émissivité  $\epsilon = 0.8$ . En régime permanent, la température de la face extérieure du mur est 100°C et celle de l'air ambiant et le milieu extérieur est 25°C.

Le coefficient d'échange convectif (dû à la convection naturelle) est  $h = 15\text{W/m}^2\text{K}$ .

i- Calculer la température de la face intérieure de mur.

Solution d'exercice N°2 : Combinaison des modes de transfert

1. Une conduite non calorifugée traverse une chambre où l'air et les murs sont à 25°C. Le diamètre extérieur, la température et l'émissivité de la conduite sont respectivement

$D = 7\text{mm}$ ,  $T_s = 200^\circ\text{C}$ ,  $\epsilon = 0.8$ . Le coefficient d'échange par convection naturelle de la conduite vers l'air est  $h = 15\text{W/m}^2\text{K}$ .

✓ Flux de chaleur perdu pour  $T_s = 200^\circ\text{C}$

i- Le flux de chaleur convectif :

$$q_{conv} = h \cdot S_L \cdot (T_p - T_\infty) = h \cdot 2\pi \cdot L \cdot R \cdot (T_p - T_\infty)$$

✓ Le flux de chaleur par unité de longueur est:

$$q_{ong}/L_{ong} = \frac{q_{ong}}{L} = h \cdot 2\pi \cdot R \cdot (T_p - T_\infty) = 57.7\text{W/m}$$

ii- Le flux de chaleur rayonné :

$$q_{ong}/L_{ong} = \frac{\sigma \cdot S \cdot \epsilon \cdot T^4}{L} = \sigma \cdot 2\pi \cdot R \cdot \epsilon \cdot [T_p - T_\infty] = 42.12\text{W/m}$$

Pas de transfert de chaleur par conduction entre l'air et le mur de la chambre. Le flux de chaleur total perdu est:

$$q_{Tot}/L_{ong} = q_{conv}/L_{ong} + q_{ray}/L_{ong} = 99.82\text{W/m}$$

✓ Flux de chaleur perdu pour :

▪  $T_s = 300^\circ\text{C}$

- $q_{conv}/L_{ong} = 90.7135\text{W/m}$
- $q_{ray}/L_{ong} = 99.7\text{W/m}$
- $q_{Tot}/L_{ong} = 190.41\text{W/m}$

▪  $T_s = 400^\circ\text{C}$

- $q_{conv}/L_{ong} = 123.7\text{W/m}$
- $q_{ray}/L_{ong} = 196.95\text{W/m}$
- $q_{Tot}/L_{ong} = 320.65\text{W/m}$

2. Au niveau de la surface d'une plaque chaude, la chaleur récupérée par conduction à travers le solide est transmise au fluide par convection et par rayonnement. Ainsi les conditions aux limites au niveau de la surface (bilan thermique en supposant que le fluide est transparent au rayonnement et que la surface plane est noire) s'écrivent :

$$q_{cond} = q_{conv} + q_{ray}$$

**i-**  $\phi_{cond} = 2.38KW/m^2$

**ii-**  $\phi_{conv} = 1.5KW/m^2$

**iii-**  $\phi_{ray} = 0.88KW/m^2$

$$\Delta T = \frac{\phi_{cond} \cdot e}{\lambda} = 366^{\circ}C \Rightarrow T_{int} = 466^{\circ}C$$

# **Annexe d'Exercices d'Applications**

---

**ANNEXE**  
**EXERCICES D'APPLICATIONS**

***Exercice 01 :***

Une résistance électrique de forme cylindrique ( $D = 0,4\text{cm}$ ,  $L = 1,5\text{cm}$ ) sur un circuit imprimé dissipe une puissance de  $0,6\text{ W}$ . En supposant que la chaleur est transférée de manière uniforme à travers toutes les surfaces.

Déterminer :

- a.* la quantité de chaleur dissipée par cette résistance au cours d'une période de 24 heures,
- b.* le flux de chaleur,
- c.* la fraction de la chaleur dissipée par les surfaces du haut et du bas.

***Exercice 02 :***

Un réservoir contient  $3\text{m}^3$  d'eau chaude à  $T_i = 80^\circ\text{C}$ . Il est parfaitement calorifugé sauf sur une partie dont la surface est  $S = 0,3\text{m}^2$ . On constate qu'au bout de  $\Delta t = 5$  heures, la température de l'eau a baissé de  $0,6\text{ }^\circ\text{C}$  quand la température ambiante est de  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . En supposant que la capacité calorifique du réservoir est de  $10^3\text{ kcal/}^\circ\text{C}$ .

1) Calculer:

- a.* la quantité de chaleur perdue en 5 heures,
- b.* le flux de chaleur à travers le couvercle,
- c.* la densité de flux thermique à travers le couvercle,
- d.* la résistance thermique du couvercle,
- e.* le coefficient global de transmission thermique.

On donnera les résultats dans les systèmes M.K.H et S.I.

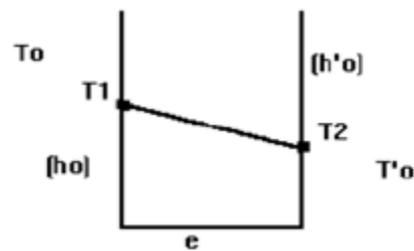
2) Que se passerait-il au bout de 1 jour, 10 jours ?

**Exercice 03 :**

a) Calculer la densité du flux et les températures  $T_1$  et  $T_2$  d'un mur d'une épaisseur de 10 cm.

b) On double l'épaisseur de ce mur ; que deviennent les pertes ( $q$ ) et les températures  $T_1$  et  $T_2$  ?

- $T_0 = 500^\circ\text{C}$ ;
- $h_0 = 20 \text{ W/m}^2\text{K}$ ;
- $T'_0 = 20^\circ\text{C}$ ;
- $h'_0 = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$  ;
- $k = 1 \text{ W/m}^2\text{K}$

**Exercice 04 :**

a) Encore une fois un mur. Le mur est composé cette fois ci de :

- Briques réfractaires:  $e_1 = 10 \text{ cm}$  ;  $k_1 = 1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
- D'un isolant:  $e_2 = 2 \text{ cm}$  ;  $k_2 = 0,1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
- $T_1 = 1100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_3 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

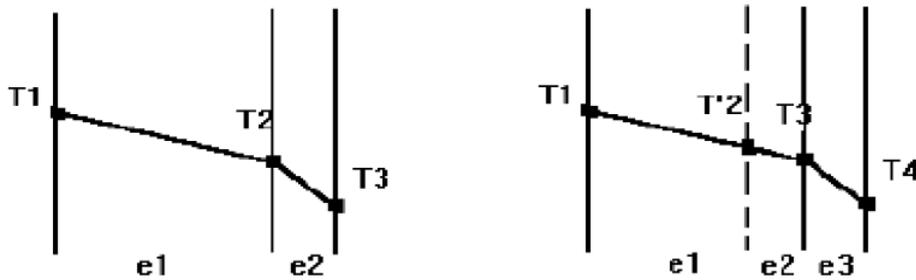
Calculer  $q$  et  $T_2$ .

b) Que l'isolant ( $e_2$ ) ne supporte pas  $740 \text{ }^\circ\text{C}$ ; on propose le garnissage suivant, de même épaisseur totale:

- Briques réfractaires:  $e_1 = 7 \text{ cm}$ ,  $k_1 = 1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
- Isolant réfractaire :  $e_2 = 3 \text{ cm}$ ;  $k_2 = 0,5 \text{ W/m}^\circ\text{C}$
- Isolant:  $e_3 = 2 \text{ cm}$ ;  $k_3 = 0,1 \text{ W/m}^\circ\text{C}$

$T_1 = 1100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_4 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Calculer  $q$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et faire une comparaison avec des résultats de a).



**Exercice 05 :**

Un mur de béton de 15 cm d'épaisseur sépare une pièce à la température  $T_i = 20\text{ °C}$  de l'extérieur où la température est  $T_e = 5\text{ °C}$ .

On donne :  $h_i = 9.1\text{ W.m}^{-2}.\text{°K}^{-1}$

- $h_e = 16.7\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
- $\lambda = 1,74\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

Calculer :

- la résistance thermique totale
- la densité de flux
- les températures interne et externe du mur.

---

**SOLUTIONS DES EXERCICES D'APPLICATIONS**
**Solution de l'exercice 01 :**

Hypothèses : La chaleur est transférée de façon uniforme à travers toutes les surfaces.

Analyses :

- a. la chaleur dissipée par cette résistance au cours d'une période de 24 heures est :

$$Q_{total} = Q_{total} \Delta t = (0.6 \text{ W})(24 \text{ h}) = 14.4 \text{ Wh} = 51.84 \text{ KJ} \quad (1 \text{ Wh} = 3600 \text{ Ws} = 3.6 \text{ KJ})$$

- b. Le flux de chaleur à la surface de la résistance est

$$S_{total} = 2 \frac{\pi D^2}{4} + \pi DL = 2 \frac{\pi(0.4 \text{ cm})^2}{4} + \pi(0.4 \text{ cm})(1.5 \text{ cm}) = 0.251 + 1.885 \\ = 2.136 \text{ cm}^2$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}_{total}}{S_s} = \frac{0.60 \text{ W}}{2.136 \text{ cm}^2} = 0.2809 \text{ W/cm}^2$$

- c. En supposant que le coefficient de transfert de chaleur est uniforme, le transfert de chaleur est proportionnel à la surface. Ensuite, la fraction de la chaleur dissipée par le haut et le bas des surfaces de la résistance devient :

$$\frac{Q_{haut-bas}}{Q_{total}} = \frac{S_{haut-bas}}{S_{total}} = \frac{0.251}{2.136} = 0.118 \text{ or } (11.8 \%)$$

Discussion : Le transfert de chaleur par le haut et le bas des surfaces sont faibles par rapport à celle transféré par la surface cylindrique. C'est le cas des murs au sens thermique du terme.

**Solution de l'exercice 02 :**

1) Hypothèse : les températures de l'eau et du réservoir sont homogène est égale à une température moyenne  $T_{eau}(t)$  à chaque instant t.

- a. La quantité de chaleur perdue en 5 heures est :

$$Q(t = 5h) = ((m.c)_{eau}(m.c)_{réservoir})T_{eau}((t = 5h) - T_{eau}(t = 0))$$

$$Q(t = 5h) = ((3 * 10^3 * 1 \text{ Kcal/}^\circ\text{C}) + (10^3 \text{ Kcal/}^\circ\text{C}))(-0.6^\circ\text{C}) = -2.4 * 10^3 \text{ Kcal}$$

(Système MKH)

$$Q(t = 5h) = -2.4 \cdot 10^3 \text{ Kcal} = -2.4 \cdot 10^3 * 4.185 \text{ KJ} = -10044 \text{ KJ}$$

(Système internationale)

**b.** Calculer du flux de chaleur à travers le couvercle

$$\phi(t = 5h) = \frac{Q(t=5h)}{\Delta t} = \frac{-2.4 \cdot 10^3 \text{ Kcal}}{5h} = -480 \frac{\text{Kcal}}{h} \quad (\text{Système MKH})$$

$$\phi(t = 5h) = -480 \frac{4185 \text{ J}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = -480 * 1.1625 \text{ W} = -558 \text{ W} \quad (\text{SI})$$

**c.** Calculer la densité de flux thermique à travers le couvercle

$$\varphi(t = 5h) = \frac{\phi(t=5h)}{S} = \frac{-480 \frac{\text{Kcal}}{h}}{0.3 \text{ m}^2} = -1600 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \cdot h} \quad (\text{Système MKH})$$

$$\varphi(t = 5h) = -1600 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \cdot h} = -1600 \frac{4185 \text{ J}}{3600 \text{ m}^2 \cdot \text{s}} = -1600 * 1.1625 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = -1860 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{SI})$$

**d.** La résistance thermique du couvercle

Par analogie thermique électrique :

$$\Delta U = R_{\text{électrique}} * I \quad \Delta T = R_{\text{thermique}} * \phi \Rightarrow R_{\text{thermique}} = \frac{\Delta T}{\phi}$$

$$R_{\text{thermique}} = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}(t=5h)}{\phi(t=5h)} = \frac{(20 - (80 - 0.6))^\circ \text{C}}{-480 \frac{\text{Kcal}}{h}} = 0.12375 \frac{^\circ \text{C} \cdot h}{\text{Kcal}} \quad (\text{Système MKH})$$

$$R_{\text{thermique}} = 0.12375 \frac{^\circ \text{C} \cdot h}{\text{Kcal}} = 0.12375 * \frac{^\circ \text{C} \cdot 3600 \cdot \text{s}}{4185 \text{ J}} = 0.12375 * \frac{1}{1.1625} \frac{^\circ \text{C}}{\text{W}} = 0.1064 \frac{^\circ \text{C}}{\text{W}} \quad (\text{SI})$$

**e.** Le coefficient global de transmission thermique K

$$\phi = K * S * \Delta T \Rightarrow K = \frac{\phi}{S * \Delta T} = \frac{\phi}{S * R_{\text{thermique}} * \phi} = \frac{1}{R_{\text{thermique}} * S}$$

$$K = \frac{1}{R_{\text{thermique}} * S} = \frac{1}{0.12375 * 0.3} = 26.93 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \cdot h \cdot ^\circ \text{C}} \quad (\text{Système MKH})$$

$$K = 26.93 \frac{\text{Kcal}}{\text{m}^2 \cdot h \cdot ^\circ \text{C}} = 26.93 * 1.1625 = 31.32 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \quad (\text{SI})$$

**II)** Si on suppose que :  $R_{\text{thermique}} = Cte$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}}}{R_{\text{thermique}}} = -mc \frac{dT}{dt} = -mc \frac{d(T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}})}{dt} \rightarrow \frac{d(T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}})}{T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}}} \\ &= - \frac{dt}{R_{\text{thermique}} \cdot mc} \end{aligned}$$

$$(T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}}) = (T_{\text{eau}}(0) - T_{\text{air}}) e^{\frac{1}{R_{\text{thermique}} \cdot mc} t} \quad \text{avec } R_{\text{thermique}} \cdot mc = 0.12375 * 410^3 = 495 \text{ h}^{-1}$$

$$T_{\text{eau}}(t) = 20 + 60 * e^{\frac{t(h)}{495}}$$

- $t = 1j = 24h : T_{air}(24h) = 77^{\circ}C$
- $t = 10j = 240h : T_{air}(240) = 56.9^{\circ}C$

**Solution de l'exercice 03 :**

On calcule :

$$\varphi = \frac{T_0 - T_1}{\frac{1}{h_0}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda}} = \frac{T_2 - T_0}{\frac{1}{h_0}} = \frac{T_0 - T_0}{\frac{1}{h_0} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_0}} = \frac{500 - 20}{\frac{1}{20} + \frac{0.1}{1} + \frac{1}{5}} = 1371 \quad (W/m^2)$$

De plus,

$$\frac{500 - T_1}{\frac{1}{20}} = 1371 \quad \text{d'où} \quad T_1 = 431^{\circ}C \quad \text{et} \quad \frac{T_2 - 20}{\frac{1}{5}} = 1371.$$

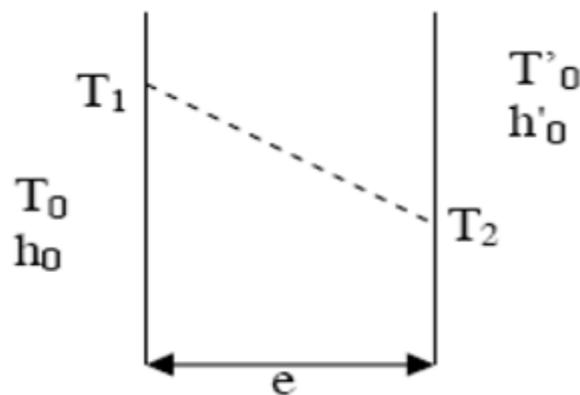
D'où  $T_2 = 294^{\circ}C$

Si maintenant :  $e = 20 \text{ cm}$  :

$$\varphi' = \frac{500 - 20}{\frac{1}{20} + \frac{0.2}{1} + \frac{1}{5}} = 1066 \quad (W/m^2)$$

$T'_1 = 446^{\circ}C$  et  $T'_2 = 233^{\circ}C$

Ainsi  $\varphi$  a diminué de 23% (et non de moitié).  $T_1$  a augmenté et  $T_2$  a diminué.



**Solution de l'exercice 04 :**

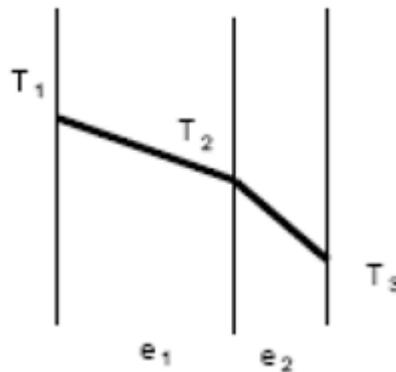
a. Briques réfractaires

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = 10\text{cm} \\ \lambda_1 = 1\text{ W/m}^\circ\text{C} \end{array} \right. \quad \text{Isolant} \quad \left\{ \begin{array}{l} e_2 = 2\text{cm} \\ \lambda_2 = 0.1\text{ W/m}^\circ\text{C} \\ T_1 = 1100^\circ\text{C}, T_3 = 20^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\text{Ici, } \varphi = \frac{1100-20}{\frac{0.1}{1} + \frac{0.02}{0.1}} = 3600\text{ W/m}^2 \text{ et donc } \varphi = 3600 = \frac{100-T_2}{\frac{0.1}{1}}$$

$$\text{d'où : } T_2 = 740^\circ\text{C}$$



b. Brique réfractaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = 7\text{cm} \\ \lambda_1 = 1\text{ W/m}^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

$$\text{Isolant réfractaire : } \left\{ \begin{array}{l} e_3 = 3\text{cm} \\ \lambda_2 = 0.5\text{ W/m}^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

$$\text{Isolant : } \left\{ \begin{array}{l} e_3 = 2\text{cm} \\ \lambda_3 = 0.1\text{ W/m}^\circ\text{C} \end{array} \right.$$

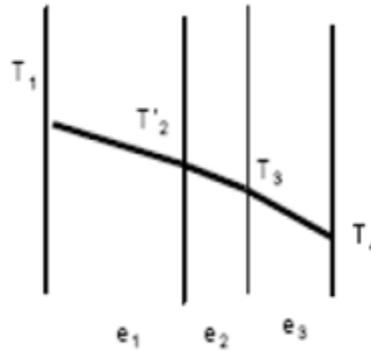
Avec à nouveau :  $T_1 = 1100^\circ\text{C}, T_4 = 20^\circ\text{C}$

$$\varphi = \frac{1100 - 20}{\frac{0.07}{1} + \frac{0.03}{0.5} + \frac{0.02}{0.1}} = 3273\text{ (W/m}^2\text{)} \quad (a)$$

$$\varphi' \approx 0.91\varphi \text{ et } 3273 = \frac{1100 - T_2}{\frac{0.07}{1}} \text{ d'ou } T_2 = 870^\circ\text{C,}$$

De plus :

$$3273 = \frac{T_2 T'_3}{\frac{0.03}{0.5}}, \text{ donc } T'_3 = 674^\circ\text{C} (T'_3 < T'_2). \quad (b)$$



On se rend compte qu'il convient de se méfier des solutions intuitives ou « évidentes » et qu'il vaut mieux les étayer par un calcul, même approximatif.

**Solution de l'exercice 05 :**

$$\varphi = h_i(T_i - T_{ip}) = (\lambda/e)(T_{ip} - T_{ep}) = h_e(T_{ep} - T_e) = (T_i - T_e)/R$$

$$\text{Avec } R = 1/h_i + e/\lambda = 1/h_e = 0.11 + 0.15/1.74 + 0.06 = 0.2562 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

De la première égalité :

$$\varphi = 15/0,2562 \varphi = 58,546 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

De la première égalité :

$$T_{ip} = T_i - \varphi/h_i = T_i - \varphi \cdot R_i = 20 - 58,546 * 0.11$$

$$T_{ip} = 13,6^\circ\text{C}$$

De la même façon :

$$T_{ip} = T_i - \varphi/h_e = T_e + \varphi \cdot R_e = 5 + 58,546 * 0.06$$

$$T_{ip} = 8,5^\circ\text{C}$$

# **Références Bibliographiques**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Jean Taine, Franck Enguehard, Estelle lacona, « Transferts thermiques ; Introduction aux transferts d'énergie », 5<sup>ème</sup> édition Dunod, (2014).
2. Yves Jannot, « Transfert thermique », Ecole des mines Nancy, (2012).
3. Mac Adams (W.H.), « Transmission de la chaleur », Dunod, (1961).
4. Gosse J, « Guide thermique », Dunod, (1981)
5. Gosse J, « Rayonnement thermique », Éditions Riber, (1975).
6. Sacadura J.F, « Initiation aux transferts thermiques », Technique et Documentation, (1978).
7. René Leleu, « Transfert de chaleur », Techniques de l'Ingénieur, (1995).