République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli-Mascara-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Polycopié de Cours

Probabilités

Préparé par: Remli Embarka

Ce cours est destiné aus étudiants de deuxième année LMD Mathématiques.

Année universitaire 2021-2022

Table des matières

Avant-Propos

Ce polycopié de probabilités s'adresse plus généralement aux étudiants de la deuxième année Mathématiques.
Ce polycopié présente de manière détaillée les concepts de base des probabilités, en perméttant de faire découvrir des concepts théoriques et des outils de raisonnement importants. Ce document comporte de nombreux exercices d'assimilation à la fin de chaque chapitre avec d'un corrigé détaillé.
Trois chapitres composent le polycopié:

1. Rappels sur les probabilités.

2. Variables aléatoires à une dimension.

3. Lois de probabilités usuelles.

L'auteur

Correspondance entre le vocabulaire probabiliste et ensembliste

Langage probabiliste	**Langage ensembliste**	**Notations**
événement certain	ensemble entier	Ω
événement impossible	ensemble vide	$\emptyset$
événement	partie	$A \subset \Omega$
A est réalisé	w est un élément de A	$w \in A$
événement contraire	complémentaire	$\overline{A} = A^c$
épreuve, résultat, issue	élément	$w(w \in \Omega)$
événement élémentaire	singleton	$\{w\} \subset \Omega$
implication	inclusion	$A \subset B$
A et B(simultanéité)	intersection	$A \cap B$
A mais pas B	différence	$A \backslash B = A \cap B^c$
A ou B	réunion	$A \cup B$
A ou B mais pas les deux à la fois	différence symétrique	$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ $= (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
événements incompatibles	parties disjointes	$A \cap B = \emptyset$

Notations

$\mathcal{E}$	expérience aléatoire
$\mathcal{A}$	tribu
card Ω	cardinal de Ω
P	probabilité
Formule de binôme de Newton	$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$
Triangle de Pascal	$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},\ \sum_{k=1}^n \underbrace{C_k^p}_{p<k} = C_{n+1}^{p+1},\ n,\ k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq k$ $\sum_{k=1}^n \underbrace{C_k^2}_{\frac{k(k-1)}{2!}} = C_{n+1}^3 \Rightarrow \sum_{k=1}^n k^2 = 2C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2,$ $\sum_{k=1}^n \underbrace{C_k^1}_{k} = C_{n+1}^2$ $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$
v.a	variable aléatoire
v.a.r	variable aléatoire réelle
v.a.r.d	variable aléatoire réelle discrète
v.a.ab.c	variable aléatoire absolument continue

Chapitre 1

Rappels sur les probabilités

1.1 Analyse combinatoire

Définition 1.1.1 *(Arrangements sans répétition) On appelle arrangement sans répétition (noté A_n^p) de n éléments p à p $(n \geq p)$ tout ensemble ordonné de p de ces éléments, tous distincts. Un arrangement est donc caractérisé par la nature des éléments ou par leur ordre.* $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \geq p$

Exemple 1.1.1 *Tiercé dans l'ordre dans une course de* 14 *chevaux*

$$A_{14}^3 = \frac{14!}{(14-3)!} = 2184$$

Définition 1.1.2 *(Arrangements avec répétition (liste)) Un arrangement de n objets p à p avec répétition est un arrangement où chaque objet peut être répété jusqu'à p fois d'où* $A_n^p = n^p$

Exemple 1.1.2

- *Nombre total d'arrangement avec répétition d'ordre* 2 *des lettres a, b, c est* 3^2 *ie* $\{aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc\}$.
- *Nombre total d'arrangement avec répétition d'ordre* 3 *des lettres a, b est* 2^3 *ie* $\{aaa,\ aab,\ abb,\ aba,\ bbb,\ bab,\ baa,\ bba\}$.

Définition 1.1.3 *(Permutation) Une permutation noté par P de n objets est un ensemble ordonné de ces n objets. Les permutations de ces n objets constituent un cas particulier des arrangements, c'est le cas où* $n = p$. $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

Exemple 1.1.3 *Les permutations possibles des trois lettres x, y, z sont: xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx (P!=3!=6)*

Définition 1.1.4 *(Permutation avec répétition) Soit* $F = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ *un ensemble fini de cardinal k. Soient* $r_1, r_2, ..., r_k$ *des entiers naturels et n leur somme ie* $n = r_1 + r_2 + ... + r_k$. *Une permutation de n éléments de F avec* $r_1, r_2, ..., r_k$ *répétitions est un n-uplet d'éléments de F dans lequel chacun des éléments* $a_1, a_2, ..., a_k$ *de F apparaît respectivement* $r_1, r_2, ...r_k$ *fois. On note par* $P_n^{r_1, r_2, ...r_k}$ *le nombre de permutations de n éléments avec* $r_1, r_2, ..., r_k$ *répétitions.* $P_n^{r_1, r_2, ...r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!....r_k!}$.

Exemple 1.1.4 *Le nombre de permutations possibles avec les lettres du mot "indienne" est:*
On a $n = 8,\ r_i = 2,\ r_e = 2,\ r_n = 3$ *alors,* $P_{n=8}^{r_i, r_e, r_n} = \frac{8!}{2!2!3!} = 1680$

Définition 1.1.5 *(Combinaisons (coéfficient binomial)) On appelle combinaisons (noté* C_n^p*) de p éléments parmi n* $(n \geq p)$ *tout ensemble que l'on peut former en choisissant p de ces éléments, sans considération d'ordre.* $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, $n, p \in \mathbb{N}^*$ *et* $n \geq p$

Exemple 1.1.5 *Les combinaisons possibles de 4 lettres a, b, c, d 3 à 3 sont: abc, abd, acd et bcd.* ($C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$)

1.2 Expériences et événements aléatoires

Définition 1.2.1 *(expérience aléatoire) On appelle expérience aléatoire* $\mathcal{E}$ *toute expérience dont le résultat est imprévisible (impossible à prévoir).*

Exemple 1.2.1 *Jeux de pile ou face, jeux de cartes, jet de dés, durée de fonctionnement d'un appareil...ect*

Définition 1.2.2 *(univers) L'univers(espace fondamental) noté Ω est un ensemble non vide, qui représente toutes les résultats(issues) possibles de l'expérience.*
Un résultat possible de l'expérience est appelé événement élémentaire, qui est représenté dans Ω par un singleton $\{w\}$.

Définition 1.2.3 *(événement aléatoire) Etant donnée une expérience aléatoire d'ensemble Ω associé, on appelle événement aléatoire lié à cette éxpérience tout sous-ensemble d'une classe $\mathcal{A}$ de partie de Ω tel que cette classe possède les propriétés suivantes:*

- H_1: $\Omega \in \mathcal{A}$
- H_2: $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} = A^c \in \mathcal{A}$
- H_3: *Si* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite fini ou infini d'éléments de* $\mathcal{A}$*, alors* $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

Les hypothèses H_1, H_2 et H_3 montrent que $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est une tribu de partie de l'ensemble Ω

Exemple 1.2.2 *On considère les deux tirages successifs à pile ou face, $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ un univers à 4 éléments. La tribu naturelle sur Ω est $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, tel que*
$\mathcal{A}= \{\emptyset, \Omega, \{PP\}, \{PF\}, \{FP\}, \{FF\}, \{PP, PF\}, \{PP, FP\}, \{PP, FF\}, \{PF, FP\}, \{PF, FF\}, \{FP, FF\}, \{PP, PF, FP\}, \{PP, PF, FF\}, \{PP, FP, FF\}, \{PF, FP, FF\}\}$
La tribu possède $2^4 = 16$ éléments. L'événement $\ll$ les deux tirages ont donné le même résultat $\gg$ est $A = \{PP, FF\}$

Remarque 1.2.1

1. *L'événement A est réalisé si son résultat w appartient à A.*
2. *On dit que l'événement A est négligeable si $P(A) = 0$, par exemple l'ensemble vide est un événement négligeable.*

3. *On dit que l'événement A est presque sûr si $P(A) = 1$, par exemple l'univers Ω est un événement presque sûr.*

Exemple 1.2.3 *On considère le lancer d'un dé à six face comme une éxpérience où le résultat est aléatoire.*

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *est un univers (espace fondamental) représenté toutes les issues possibles.*

2. $\ll$ *faire un nombre impair* $\gg$ *est un événement, représenté dans* Ω *par le sous-ensemble* $A = \{1, 3, 5\}$, *cet événement n'est pas élémentaire.*

3. $\ll$ *faire 6* $\gg$ *est un événement élémentaire, représenté par le singleton* $A = \{6\}$.

Définition 1.2.4 *(Système complet d'événement)*
On dit que les événements $A_1, A_2, ..., A_n$ *est un système complet si*

1. *tous les ensembles* A_i *sont non vides (aucun des événements n'est impossible),*

2. $(A_i)_{i=1,...n}$ *constituent une partition de* Ω, *c'est-à-dire*

   a) *les événements sont deux à deux incompatibles, c'est-à-dire*
   $\forall i \neq j$ *on a* $A_i \cap A_j = \emptyset$

   b) $(A_i)_{i=1,...n}$ *couvrent tout l'espace (la réunion des événements est l'événement certain), c'est-à-dire* $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = \Omega$.

Exemple 1.2.4 *On lance un dé à six faces, soit l'univers* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *alors les deux événements* $\ll$ *faire un nombre inférieur ou égal à 3* $\gg$ *et* $\ll$ *faire un nombre supérieur ou égal à 4* $\gg$, *représentés par* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{4, 5, 6\}$ *forment un système complet.*

1.3 Probabilités

Définition 1.3.1 *On appelle espace probabilisable lié à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où Ω est l'univers des résultats de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ la tribu des événements liés à $\mathcal{E}$.*

Définition 1.3.2 *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \to [0,\ 1]$ telle que:*

1. $P(\Omega) = 1$
2. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatible on a:* $P(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(A_n)$ *(σ-additivité de P).*

Remarque 1.3.1
1. *Si A et B sont deux événements incompatible alors $P(A\cup B) = P(A) + (B)$*
2. *Plus généralement si $A_1, ..., A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles alors $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$*

Définition 1.3.3 *Le triplet $(\Omega,\mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé (espace de probabilité) associé à l'expérience aléatoire donnée.*

Propriétés 1.3.1 *Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $\forall A \in \mathcal{A},\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ *(croissance de P)*
4. $\forall A, B \in \mathcal{A},\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *(additivité forte)*
5. $\forall A, B \in \mathcal{A},\ \Rightarrow P(B\backslash A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B \cap A)$

6. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Rightarrow P(B\backslash A) = P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A)$

7. $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Preuve 1.3.1 *1. On a* $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ *et par définition on a* $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ *car* Ω *et* $\emptyset$ *sont disjoint. Par conséquent* $P(\emptyset) = 0$

2. *On a* $\Omega = A \cup \overline{A}$, *on applique la formule de la probabilité d'une union disjointe on obtient* $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$, *alors* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. *On a* $A \subset B$, *alors* $B = A \cup (B\backslash A)$. *Par définition on a* $P(B) = P(A) + P(B\backslash A)$, *donc* $P(B) \geq P(A)$ *car* $P(B\backslash A) \geq 0$.

4. *On a* $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ *et* $B = (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A)$, *alors*
$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$. *On applique la formule de la probabilité d'une union disjointe on obtient*

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) \\
&= P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) + \Big(P(A \cap B) - P(A \cap B)\Big) \\
P(A \cup B) &= \Big[P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)\Big] + \Big[P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B)\Big] - P(A \cap B)
\end{aligned}$$

donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. *On a* $B = (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A)$, *on applique la formule de la probabilité on trouve* $P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(B \cap A)$ *(car* $(B \cap \overline{A})$ *et* $(B \cap A)$ *sont deux événements disjoints.) Alors* $P(B \cap \overline{A}) = P(B\backslash A) = P(B) - P(B \cap A)$.

6. *Le résultat découle directement de la propriété* 4.

7. *Par la définition de* Δ *et par la distributivité de l'intersection sur l'union on a:*

$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A});
\end{aligned}$$

on applique la formule de la probabilité d'une union disjointe on obtient $P(A\Delta B) = P(A\cap\overline{B}) + P(B\cap\overline{A})$, *d'après la propriété* 5 *on a* $P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B)$

1.4 Probabilités uniforme (équiprobabilité)

Généralité: Si l'espace des événement $\Omega = \{w_1,, w_2, ..., w_n\}$ est fini de cardinal n, on peut caractériser la probabilité P par sa valeur prise en chaque événement élémentaire de Ω. Pour tout événement $A\subset\Omega$, $P(A) = \sum_{w_k\in A} P(\{w_k\})$ sur Ω et pour tout $w_i\in\Omega$, $P(\{w_i\}) = p_i,\ i = 1, ..., n$, est la distribution de probabilité correspondente sur Ω.

Définition 1.4.1 *Soit* $(\Omega,\mathcal{A})$ *un espace probabilisable fini* ($\Omega = \{w_1,, w_2, ..., w_n\}$). *On dit que la probabilité est uniforme si les nombres* $P(\{w_1\}), ..., P(\{w_n\})$ *sont égaux* $(i.e. p_1 = p_2 = ... = p_n)$

Remarque 1.4.1 *La probabilité uniforme s'applique à chaque fois que l'univers* Ω *est fini, et comme* $P(\Omega) = 1$, *on en déduit* $\sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = 1$, *d'où*
$\forall i = 1, ..., n,\ P(\{w_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{card\Omega}$.

Proposition 1.4.1 *Soit* $(\Omega,\mathcal{A})$ *un espace probabilisable fini. La probabilité uniforme définit sur cet espace une probabilité* P *unique, donné par*

$$\forall A\subset\Omega,\ P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\, cas\, favorable}{nombre\ de\, cas\, possible}$$

1.5 Conditionnements et indépendances

1.5.1 Probabilité conditionnelle

Exemple introductif: Soient l'expérience $\mathcal{E} \ll$ loncer un dé équilibé $\gg$, l'univers $\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ et $P(w_i) = \frac{1}{6}$. On réalise l'expérience et on obtient l'information suivante:

B= obtenir un nombre de point > 2.

A= obtenir w_5, w_6.

Soit $B = \{w_3, w_4, w_5, w_6\}$, alors $P_B(w_j) = \frac{1}{4}$

Soit $A = \{w_5, w_6\}$, alors $P_B(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$......$\star$

D'autre part on a $P(B) = \frac{card\, B}{card\, \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, alors $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.....$\star\star$

D'après $\star$ et $\star\star$ on en déduit $P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A/B)$ probabilité conditionnelle de A par rapport à B.

Définition 1.5.1 *Soient $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements tel que la probabilité de l'événement B non nulle, alors la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé, le nombre noté $P_B(A)$ ou $P(A/B)$ défini par $P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$*

Proposition 1.5.1 *Soient $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements, de probabilité non nulle, alors $P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$*

Preuve 1.5.1 *D'après la définition 1.5.1 on a $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ et $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, d'où l'on déduit l'égalité.*

Propriétés 1.5.1 *Soit $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ un espace probabilisé,*

1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} P_B : \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P_B(A) = P(A/B) \end{array}$$

   est une probabilité sur Ω

2. *Si* A_1, A_2, ..., A_n *est une famille d'événements telle que* $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \neq 0$, *alors*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})$$

3. $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$

4. $P(A_1 \cup A_2/B) = P(A_1/B) + P(A_2/B)$, *si* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Preuve 1.5.2 1. *On montre que* P_B *vérifie les conditions des probabilités données dans la définition 1.3.2.*

- $P_B(\Omega) = P(\Omega/B) = \frac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$
- *Pour toute suite* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'événements deux à deux incompatible on a:*

$$\begin{aligned} P_B(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) &= P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n/B) = \frac{P((\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \cap B))}{P(B)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n/B) = \sum_{n=0}^{\infty} P_B(A_n) \end{aligned}$$

alors P_B *est bien définie une probabilité sur* Ω.

2. *en utilisant la définition de la probabilité conditionnelle*

$$P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times ... \times P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) =$$
$$P(A_1) \times \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \times ... \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1})}$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)$$

3. *En utilisant la définition de la probabilité conditionnelle et la propriété 1.3.1 (numéro 5) on a*

$$\begin{aligned}
P(\overline{A}/B) &= \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\backslash A)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B)-P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(B\cap A)}{P(B)} \\
&= 1 - \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = 1 - P(A/B)
\end{aligned}$$

4. *Cela résulte de la distributivité de l'intersection par rapport à une réunion quelconque et la définition de la probabilité conditionnelle,*

$$\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2/B) &= \frac{P(B\cap(A_1\cup A_2))}{P(B)} \\
&= \frac{P((B\cap A_1)\cup(B\cap A_2))}{P(B)} \\
&= \frac{P(B\cap A_1)}{P(B)} + \frac{P(B\cap A_2)}{P(B)} \\
&= P(A_1/B) + P(A_2/B).
\end{aligned}$$

Exemple 1.5.1 *Soit une urne contenant* 4 *boules blanches et* 3 *boules noires. On tire une à une et sans remise* 3 *boules de l'urne. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire?*
On note B_i l'événement "la i^{eme} boule tirée est blanche", N_i l'événement "la i^{eme} boule tirée est noire". On cherche $P(B_1\cap B_2\cap N_3)$
$P(B_1\cap B_2\cap N_3) = P(B_1).P(B_2/B_1).P(N_3/B_1\cap B_2) = \frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{3}{5} = \frac{6}{35}$

1.5.2 Evénements indépendants

Définition 1.5.2 1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et A, B deux événements de probabilité non nulle. On dit que A et B sont indépendants si*
$P(A\cap B) = P(A).P(B)$

2. Soit A_1, A_2, ..., A_n des événements. On dit que A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants si pour toute sous-famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$, on a $P\big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big) = \prod\limits_{i\in I} P(A_i)$.

3. On dit que A_1, A_2, ..., A_n sont indépendants deux à deux si pour tout $i \neq j$, alors A_i et A_j sont indépendants (i.e.$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$)

Exemple 1.5.2 *Considérons les différentes répartitions possibles des sexes des enfants d'une famille ayant n enfants et notons $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de ces répartitions tel que le cardinal de $\mathcal{F}_n$ est 2^n. Nous supposons que les répartitions possible sont équiprobables. Considérons l'événement M: $\prec$ la famille a des enfants des deux sexe $\succ$ et l'événement F: $\prec$ la famille a au plus une fille $\succ$.*

i) *Pour $n = 2$ on a $\mathcal{F}_2$=$\{(G,G), (F,G), (G,F), (F,F)\}$, donc $M = \{(F,G), (G,F)\}$, $F = \{(G,G), (F,G), (G,F)\}$, $M \cap F = \{(F,G), (G,F)\} = M$ d'où $P(M) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{3}{4}$ et $P(M\cap F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. On en déduit M et F ne sont pas indépendants pour $n = 2$ car $P(M \cap F) \neq P(M).P(F)$*

ii) *Pour $n = 3$ on a*

$\mathcal{F}_3$=$\{(G,G,G), (F,G,G), (F,G,F), (G,F,F), (G,G,F), (G,F,G), (F,F,G), (F,F,F)\}$,

donc M =$\{$(F,G,G), (F,G,F), (G,F,F), (G,G,F), (G,F,G), (F,F,G)$\}$,

F=$\{(G,G,G), (F,G,G), (G,G,F), (G,F,G)\}$ et $M\cap F = \{(F,G,G), (G,G,F), (G,F,G)\}$ d'où $P(M) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ et $P(M \cap F) = \frac{3}{8}$. Alors M et F sont indépendants pour $n = 3$ car $P(M \cap F) = P(M).P(F)$

iii) *Dans le cas général, on a card$\mathcal{F}_n = 2^n$, $\mathrm{card\,M} = 2^{\mathrm{n}} - 2$ $\big($il y a en tout 2^n n-uplets et on doit retirer les deux n-uplets $\underbrace{(F,F,...,F)}_{n fois}$ et $\underbrace{(G,G,...,G)}_{n fois}\big)$, $\mathrm{card\,F = n + 1}$ et $\mathrm{card\,(M \cap F) = n}$, d'où $P(M) = \frac{2^n-2}{2^n}$, $P(F) = \frac{n+1}{2^n}$ et $P(M \cap F) = \frac{n}{2^n}$. Alors M et F ne sont pas indépendants pour n car $P(M\cap F) \neq P(M).P(F)$. Alors M et F ne sont indépendants que dans le cas d'une famille de 3 enfants.*

Remarque 1.5.1 *Si A et B deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A/B) = P(A) \Leftrightarrow P(B/A) = P(B)$*

Propriétés 1.5.2 *Soit $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un espace probabilisé,*

1. *Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, de même pour les événements $\overline{A}$ et B.*

2. *Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

3. *Si A_1, A_2, ..., A_n sont des événements mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux. La réciproque est fausse.*

Preuve 1.5.3

1. *On a $(A \cap B)$ et $(A \cap \overline{B})$ sont deux événements disjoints, et on a $A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ ce qui implique*

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= p(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B}), \end{aligned}$$

donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. Même raisonnement pour $\overline{A}$ et B.

2. *Si A et B sont indépendants on montre que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$, on sait que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, ce qui implique*

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \underbrace{(P(A) + P(B) - P(A \cap B))}_{additivite forte} = 1 - P(A) - P(B) + \underbrace{P(A).P(B)}_{A, B \text{ sont independants}} \\ &= \underbrace{1 - P(A)}\, - P(B)(\underbrace{1 - P(A)}) = P(\overline{A}) - P(B)P(\overline{A}) \\ &= P(\overline{A})(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B}) \end{aligned}$$

alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

3. *La propriété d'indépendance deux à deux étant un cas particulier de celle mutuelle (en prenant une sous famille de deux éléments). La réciproque est fausse on montre par un contre-exemple: On lance un dé non truqué deux fois. On définit les événements suivants:*

   A*: le premier chiffre est impair*

   B*: le deuxième chiffre est pair*

   C*: la somme des chiffre est paire,*

on a $card\,\Omega = 36$, $card\,A = card\,B = card\,C = 18$ *et* $card(A \cap B) = card(A \cap C) = card(B \cap C) = 9$*, alors* $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ *et* $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ *et par conséquant,* A*,* B *et* C *sont deux à deux indépendants. Or* $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A).P(B).P(C)$*, donc* A*,* B *et* C *ne sont pas mutuellement indépendants.*

1.5.3 Formule des probabilités totales et théorème de Thomas Bayes

Proposition 1.5.2 *(Formule des probabilités totales)*
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ *un espace probabilisé,* B *un événement, et* $A_1, ...A_n$ *un système complet d'évenements (de probabilité non nulle), alors* $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$

Preuve 1.5.4 *On a* $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$ *car* $A_1, ...A_n$ *est un système complet d'événements. On passe aux probabilités, on obtient* $P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$*. D'après la définition de la probabilité conditionnelles on a* $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B/A_i) \forall i = 1...n$ *ce qui donne* $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$*.*

Théorème 1.5.1 *(Théorème de Bayes)*
Soient $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ *un espace probabilisé,* A *et* B *deux événements de probabilité non*

nulle, alors

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Preuve 1.5.5 *D'après la définition de la probabilité conditionnelles on a* $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *et d'après la proposition 1.5.1, en remplaçant* $P(A \cap B)$ *par* $P(B/A)P(A)$ *d'où le résultat.*

Propriétés 1.5.3 *Soient* $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ *un espace de probabilité,*

1. *Si* A *et* B *sont deux événements de probabilité non nulle, alors*

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})}$$

2. *Si* $A_1,\, ...A_n$ *forme un système complet d'événements (de probabilité non nulle) et si* B *est un événement de probabilité non nulle, alors*

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}, \;\; \forall\, k = 1...n$$

Preuve 1.5.6

1. *D'après le théorème de Bayes on a* $P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$ *et comme* $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$*, en remplaçant* $P(B)$ *par* $P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$ *on obtient le résultat.*

2. *Le théorème de Bayes dit* $P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{P(B)}$ *et comme* $A_1,\, ...A_n$ *forme un système complet d'évenements, alors on applique la formule de probabilités totales au dénominateur, on trouve*

$$P(A_k/B) = \frac{P(B/A_k)P(A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)}, \;\; \forall\, k = 1...n$$

1.6 Exercices

Exercice 1: Une classe comprend 25 étudiants dont 15 garons et 10 filles pour des travaux pratiques, on choisit des sous groupes de 5 étudiants

a) Combien de sous groupes différents peut- on former

b) Combien de sous groupes contenant 3 garçons et 2 filles seulement peut-on former ?

Solution: On peut former:

a) $C_2 5^5 = \frac{25!}{20!5!} = 53130$ sous groupes différents.

b)$C_{15}^3 C_{10}^2 = \frac{15!}{12!3!}\frac{10!}{8!3!} = 20475$ sous groupes contenant 3 garçons et 2 filles.

Exercice 2: Combien de mots peut-on former à partir de " racine, probabilit, femme, successivement "

Solution: On utilise les permutations:

1)racine: $n = 6$, $P_n = n! \Rightarrow P_6 = 6! = 720$ mots.

2)probabilité (permutation avec répétition): $n = 11$, $r_p = 1$, $r_r = 1$, $r_b = 2$, $r_a = 1$, $r_i = 2$. $P_1^{r_b, r_i} 1 = \frac{11!}{2!2!} = 9979200$ mots.

Exercice 3: Trois boules sont tirées d' un sac contenant des boules blanches et des boules rouges . soit les évènements

A={la première boule est blanche }, B={la deuxième boule est blanche} C={ la troisième boule est blanche}.

Exprimer en termes de A,B et C les vnements suivants :

D={ toutes les boules sont blanche },

E={ les deux premières sont blanches},

F={ les deux premières sont blanches et la troisième est rouge},

G={seulement la deuxième est blanche},

H={exactement une est blanche}.

Si P(A) =0.4, P(B)=0.3, P(C)=0.2 .Calculer les probabilités des évènements D ,E ,..,H

Remarque: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$

Solution: $D = A \cap B \cap C \Rightarrow P(D) = 0.4 \times 0.3 \times 0.2 = 0.024$,

$E = A \cap B \Rightarrow P(E) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$,

$F = A \cap B \cap \overline{C} \Rightarrow P(F) = 0.4 \times 0.3 \times 0.8 = 0.096$,

$G = \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \Rightarrow P(G) = 0.6 \times 0.3 \times 0.8 = 0.144$,

$H = A \cup B \cup C \Rightarrow P(H) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B \cap C) = 0.4 + 0.3 + 0.2 - 0.024 = 0.876$.

Exercice 4: On extrait au hasard deux boules d'une boite contenant 6 boules rouges, 4 boules blanches et 10 boules bleues. Déterminer la probabilité d'avoir:

1) deux boules rouges

2) une boule blanche et une boule rouge

3) deux boules de couleur différente.

Solution: 1)$P(R) = \frac{cardR}{card\Omega} = \frac{C_6^2}{C_{20}^2} = 0.079$,

2)$P(B \cap R) = \frac{card(B \cap R)}{card\Omega} = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{20}^2} = 0.13$,

3)$P(deux\ boules\ de\ couleur\ differente) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{20}^2} + \frac{C_{10}^1 \times C_6^1}{C_{20}^2} + \frac{C_4^1 \times C_{10}^1}{C_{20}^2} = 0.65$.

Exercice 5: On jette un dé bien équilibré deux fois, les résultats pouvant être obtenus sont désignés par X et Y. Calculer les probabilités des évènements suivants.

$A = \{X = Y\}$, $B = \{X + Y > 10\}$, $C = \{|X - Y| < 3\}$ et $D = \{max(X, Y) > 4\}$.

Solution: On a $card\Omega = 6 \times 6 = 36$

1) $A = \{X = Y\} = \{(1, 1), (2, 2), ...(6, 6)\}$, alors $cardA = 6$ et $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2) $B = \{X + Y > 10\} = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$, alors $cardB = 3$ et $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

3) $C = \{|X - Y| < 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ...(6, 6)\}$, alors $cardC = 24$ et $P(C) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

4)$D = \{max(X, Y) > 4\} = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), ...(6, 6)\}$, alors $cardC = 20$ et $P(D) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

Exercice 6:(Formule des probabilités totales et théorème de Bayes) Une urne 1 contient 3 boules noirs et 2 boules blanches, une urne 2 contient 4 boules noirs et 5 boules blanches. Une boule tirée au hasard de l'urne des 2 urnes est blanche.

Quelle est la probabilité pour quelle provienne de l'urne 2 ?

Solution: $P(u_2/b) = \frac{P(b/u_2)P(u_2)}{P(b/u_1)P(u_1)+P(b/u_2)P(u_2)} = \frac{0.55\times 0.5}{0.4\times 0.5+0.55\times 0.5} = 0.58$

Exercice 7:(Formule des probabilités totales et théorème de Bayes) On a deux sacs A_1 et A_2, supposons que 70% des boules de A_1 sont blanches et 80% des boules de A_2 sont blanches et que le nombre des boules de A_1 égal à 3 fois le nombre des boules de A_2 . On mélange toutes les boules, de A_1 et de A_2 dans un autre sac et on tire une boule, on la trouve blanche.

Quelle est la probabilité que cette boule est de A_1 ?

Solution:$P(A_1/b) = \frac{P(b/A_1)P(A_1)}{P(b/A_1)P(A_1)+P(b/A_2)P(A_2)} = \frac{0.7\times\frac{3}{4}}{0.7\times\frac{3}{4}+0.8\times\frac{1}{4}} = 0.72$

Exercice 8:(Formule des probabilités totales et théorème de Bayes) Soit une population composée de 48% d'hommes et 52% de femmes. On suppose que 3% d'hommes et 0.5% de femmes sont atteints d'une certaine maladie. On choisit une personne au hasard.

1) Quelle est la probabilité que cette personne soit malade.

2) Sachant que la personne est malade, quelle est la probabilité que ce soit un homme

Solution: 1) La probabilité que cette personne soit malade, en utilisant formule de proba-totale:

$$P(M) = P(M/H)P(H) + P(M/F)P(F) = 0.03 \times 0.48 + 0.005 \times 052 = 0.017$$

2) la probabilité que ce soit un homme:

$$P(H/M) = \frac{P(M/H)P(H)}{P(M/H)P(H) + P(M/F)P(F)} = \frac{0.03 \times 0.48}{0.017} = 0.85$$

Chapitre 2

Variables aléatoires à une dimension

2.1 Généralités et notations

Une variable aléatoire (v.a) est définie à partir d'une expérience aléatoire comme une variable où la valeur dépend du résultat de cette expérience, par exemple, si elle consiste à jeter une pièce de monaie trois fois de suite, on suppose que l'on s'intéresse au nombre de pile obtenu. On associe à chaque élément de Ω (événement élémentaire) un nombre (nombre pile), on défini ainsi une application de Ω dans l'ensemble de nombres $\{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$. Nombre de pile noté X est une variable aléatoire, $X : \Omega \to \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$ ie $X(\Omega) = \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$.

- $X^{-1}(\{x\}) = \{w \in \Omega \;/\; X(w) = x\}$ se note $X = x$
- $X^{-1}(]x,\, +\infty[) = \{w \in \Omega \;/\; X(w) > x\}$ se note $X > x$
- $X^{-1}([a,\, b[) = \{w \in \Omega \;/\; a \leq X(w) < b\}$ se note $a \leq X < b$

2.1.1 Variables aléatoires réelles

Définition 2.1.1 *Soit (Ω,$\mathcal{A}$,P) un espace de probabilité on appelle variables aléatoires réelles(v.a.r) toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$*

$$X: \begin{array}{rl} \Omega \to & \mathbb{R} \\ w \mapsto & X(w) \end{array}$$

ayant les propriétés suivantes:

- *Pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I) = \{w \in \Omega \,/\, X(w) \in I\}$ est un événement(soit dans $\mathcal{A}$).*
- *X est une v.a.r si et seulement si pour tout nombre réel a, $X^{-1}(]-\infty, a])$ est un événement.*

Exemple 2.1.1 *On lance une pièce d'argent, l'univers assocé est $\Omega = \{P, F\}$(P=pile, F=face). Le nombre pile soit considéré comme un succés, alors $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $X(P) = 1$ et X(F)=0. Dans ce cas $\Omega(X) = \{0, 1\}$.*

2.1.2 Fonction de répartition

Définition 2.1.2 *(Fonction de répartition) Soit X une variables aléatoires réelles définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique F_X définie sur $\mathbb{R}$ par:*
$\forall\, x \in \mathbb{R},\, F_X = P(X \leq x) = P(\{w :\, X(w) \leq x\}) = P(]-\infty, x])$

Remarque 2.1.1 *La fonction de répartition prend ces valeurs dans $[0, 1]$ car c'est une probabilité.*

Théorème 2.1.1 *Soit X une variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et F_X est une fonction de répartition, alors F_X vérifie les propriétés suivantes:*

1. F_X *est une fonction croissante* $\nearrow$.

2. F_X *est continue à droite en tout point de* $\mathbb{R}$.

3. $\lim\limits_{n\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} F_X(x) = 1$.

Proposition 2.1.1 *Soit X une variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, et F_X sa fonction de répartition, on a*

1. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$.

2. *Soit $a < b$, alors* $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Preuve 2.1.1 1. $P(X > x) = P(\overline{PX \leq x}) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x)$.

2. *Soit $a < b$, alors*

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P((a < X) \cap (X \leq b)) \\ &= P(a < X) + P(X \leq b) - P((a < X) \cup (X \leq b)) \\ &= P(a < X) + P(X \leq b) - P(X \in \mathbb{R}) \\ &= 1 - P(a \geq X) + P(X \leq b) - 1 \\ &= 1 - F_X(a) + F_X(b) - 1 \\ &= F_X(b) - F_X(a) \end{aligned}$$

2.2 Variables aléatoires réelles discrètes

Définition 2.2.1 *(v.a.r.d) Une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite discrète si l'ensemble des image $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.*

Définition 2.2.2 *(loi de probabilié d'une v.a.r.d) La loi d'une variable aléatoire discrète X est déterminée par les nombres $P(X = x_i)$. De plus si $X(\Omega)$ est fini(ie $X(\Omega) =$*

$\{x_1,\ ...,\ x_n\}$) *on a* $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$ *et si* $X(\Omega)$ *est infini(ie* $X(\Omega) = \{x_1,\ ...,\ x_n, ...\}$) *on a* $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$.

Exemple 2.2.1 *La loi de probabilité de face du dé est donné par:*

$$P(X = x_1) = P(X = x_2) = P(X = x_3) = P(X = x_4) = P(X = x_5) = P(X = x_6) = \frac{1}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{6} P(X = x_i) = \frac{6}{6} = 1$$

Définition 2.2.3 *(Fonction de répartition) Soit* X *une variable aléatoire réelle discrètes définie sur un espace probabilisé* $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$*, On appelle fonction de répartition de* X *l'application définie en tout* x *de* $\mathbb{R}$ *par:*
$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{w:\ X(w) \leq x\}) = \sum_{\alpha \leq x} P(X = \alpha)$.

2.2.1 Moments des variables aléatoires réelles discrètes

Définition 2.2.4 *(espérance) Soit* X *une variable aléatoire réelle discrète,* $X(\Omega) = \{x_1,\ ...,\ x_n, ...\}$*. On dit que* X *possède une espérance si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n)$ *est obsolument convergente(i.e.* $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| P(X = x_n)$ *est convergente). Alors on appelle espérance le nombre* $E(X)$ *défini par:*

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n P(X = x_n).$$

Remarque 2.2.1 *Une variables aléatoire réelle discrète peut ne pas avoir d'espérance.*

Exemple 2.2.2 *Soit* X *une variable aléatoire réelle discrète,* $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $P(X = x_n) = \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$*. La série* $\sum_{n=1}^{\infty} nP(X = x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2}\frac{1}{n}$ *est diverge,car* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *série de Rieman divergente pour* $\alpha \leq 1$*. Par conséquent* X *n'a pas d'espérance.*

Définition 2.2.5 *(variance) Soit X une variable aléatoire réelle discrète, ayant une espérance $E(X)$, alors on appelle variance de X le nombre $V(X) \in \mathbb{R}^+$ défini par:*

$$V(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - E(X))^2 P(X = x_n)$$

Remarque 2.2.2 *Si la série précédente est diverge, alors la variables aléatoire réelle discrète ne possède pas de variance(la variables aléatoire réelle discrète possède une variance infinie).*

Définition 2.2.6 *(écart-type) Si X une variable aléatoire réelle discrète, admet une variance, alors on appelle écart-type de X le nombre $\sigma_X \in \mathbb{R}^+$ défini par:*

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Exemple 2.2.3 *On lance deux dés cubiques normaux et on note X la somme des points obtenus. Etudier la v.a.r.d X*
On a $X(\Omega) = \{2, 3 ..., 12\}$ et la loi de X est la suivante:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

D'où

$$\sum_{i=1}^{11} P_i = 1$$

,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = 2.\frac{1}{36} + ... + 12.\frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{11} (x_i - E(X))^2.P(X = x_i) = (2-7)^2 \frac{1}{36} + ... + (12-7)^2 \frac{1}{36} = \frac{210}{36} \simeq 5,83$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5,83} \simeq 2,42$$

Définition 2.2.7 *(moment d'ordre k) Soit X une variable aléatoire réelle discrète, $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n, ...\}$, si k est un entier supérieur ou égal à 1 et la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^k P(X = x_n)$ est obsolument convergente(i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^k P(X = x_n)$ est convergente). Alors on appelle moment d'ordre k de X le nombre $m_k(X)$ défini par:*

$$m_k(X) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^k P(X = x_n).$$

Définition 2.2.8 *(moment centré d'ordre k) Soit X une variable aléatoire réelle discrète, admet une espérance $E(X)$, alors on appelle moment centré d'ordre k de X le nombre*

$$\mu_k(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - E(X))^k P(X = x_n)$$

(sous réserve de convergence absolue de la série)

Propriétés 2.2.1 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète, admet une variance. Soit a et b deux réels quelconque on a:*

1. $E(a) = a$
2. $E(aX + b) = aE(X) + b$
3. $V(a) = 0$
4. $V(aX + b) = a^2 V(X)$
5. $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2$
6. *Soit X^* une variable a.r définie par $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$, on a alors $E(X^*) = 0$, $V(X^*) = 1$ et on dit que la v.a.r X^* est la variable centrée réduite associée à la v.a.r. X.*

Preuve 2.2.1 1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, alors* $E(a) = \sum_{n=0}^{\infty} aP(X = x_n) = a \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n)}_{=1 \text{ car loi de proba}}$

2. *Soit* a, $b \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
E(aX+b) &= \sum_{n=0}^{\infty}(ax_n+b)P(X=x_n)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ax_nP(X=x_n)+\sum_{n=0}^{\infty} bP(X=x_n)\\
&= a\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x_nP(X=x_n)}_{E(X)}+b\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} P(X=x_n)}_{=1}\\
&= aE(X)+b
\end{aligned}$$

3. *Soit* $a \in \mathbb{R}$, *alors* $V(a)=\sum_{n=0}^{\infty}(a-\underbrace{E(a)}_{a})^2P(X=x_n)=0$

4. *Soit* a, $b \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= \sum_{n=0}^{\infty}((ax_n+b)-E(aX_n+b))^2P(X=x_n)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(ax_n+b-aE(X_n)-b)^2P(X=x_n)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a^2(x_n-E(X_n))^2P(X=x_n)=a^2V(X)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{n=0}^{\infty}(x_n-E(X))^2.P(X=x_n)=\sum_{n=0}^{\infty}(x_n^2-2x_nE(X)+E(X)^2).P(X=x_n)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}x_n^2.P(X=x_n)-\sum_{n=0}^{\infty}2x_nE(X)P(X=x_n)+\sum_{n=0}^{\infty}E(X)^2P(X=x_n)\\
&= E(X^2)-2E(X)\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}x_n.P(X=x_n)}_{E(X)}+E(X)^2\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}P(X=x_n)}_{=1}\\
&= E(X^2)-2(E(X))^2+(E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2
\end{aligned}$$

6. *Soit X^* une variable a.r définie par $X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma_X}$, on a*

$$\begin{aligned} E(X^*) &= E\Big(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\Big) = \frac{1}{\sigma_X}\Big[E(X-E(X))\Big] \\ &= \frac{1}{\sigma_X}\Big[E(X) - \underbrace{E(E(X))}_{E(X)}\Big] = 0, \end{aligned}$$

$$V(X^*) = V\Big(\frac{X-E(X)}{\sigma_X}\Big) = \underbrace{\frac{1}{\sigma_X^2}}_{\frac{1}{V(X)}}\Big[V(X) - \underbrace{V(E(X))}_{0}\Big] = 1$$

Remarque 2.2.3 1. *$E(X^k) = m_k(X)$ et $\mu_k(X) = E((X-E(X))^k)$*

2. *Pour $k = 1$ on a $E(X) = m_1(X)$,*

3. *Pour $k = 2$ on a $V(X) = \mu_2(X)$*

2.3 Variables aléatoires absolument continues

Définition 2.3.1 *(densité de probabilité) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, on dit que X est une variable aléatoire réelle continue si $X(\Omega)$ est un intervalle ou réunion d'intervalle de $\mathbb{R}$. X est dite absolument continue, si de plus il existe fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ telle que:*

1. *$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$*

2. *f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points où elle admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite.*

3. *$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ existe et égale à 1.*

Alors on dit que f est une densité de probabilité de X.

Définition 2.3.2 *(fonction de répartion) Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, $f(x)$ sa densité de probabilité, On appelle fonction de répartition de X la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Remarque 2.3.1 *1.* $\forall\, a,\, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \\ &= \int_{a}^{b} f(x)dx \end{aligned}$$

2. P(X= b)=P(X=a)=0.

2.3.1 Moments d'une variable aléatoire réelle absolument continue

Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue et f une densité de probabilité de X.

Définition 2.3.3 *(moment d'ordre k) On appelle moment d'ordre k de X le nombre $m_k(X)$ défini par:*
$m_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx,\ \ k \in \mathbb{N}^*$ *(sous réserve de convergence de l'intégrale).*

Définition 2.3.4 *(espérance) On appelle espérance de X, le moment d'ordre 1 de X, s'il existe.*

$$E(X) = m_1(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Définition 2.3.5 *(moment centré d'ordre k) Si X admet une espérance $E(X)$, alors on appelle moment centré d'ordre k de X le nombre*

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x)dx$$

(sous réserve de convergence de l'intégrale)

Définition 2.3.6 *(variance et écart-type) On appelle variance de X, le moment centré d'ordre 2 de X, s'il existe.*

$$V(X) = m_2(X - E(X)) = \mu_2(X)$$

On appelle écart-type de X, la racine carée arithmétique de sa variance. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriétés 2.3.1 *Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue, admet des moments finis d'ordre 2. Soit a et b deux réels quelconque on a:*

1. $E(a) = a$

2. $E(aX + b) = aE(X) + b$

3. $V(a) = 0$

4. $V(aX + b) = a^2V(X)$

5. $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2) = E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

6. *Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue qui admet une espérance $E(X)$ et un écart-type $\sigma(X)$, alors la variable aléatoire X^* définie par $X^* = \frac{X-E(X)}{\sigma_X}$ est une variable aléatoire absolument continue et vérifie $E(X^*) = 0$, $V(X^*) = 1$. On dit que X^* est la variable centrée réduite associée à X.*

2.4 Exercices

Exercice 1: Soient a et b deux entiers strictement positifs et soit X une v.a discrète à valeurs entière telle que

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, & \text{si } 1 \leq x \leq ab; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

1. Quelle condition doivent vérifier a et b pour que la série $P(X = x)$ puisse être considérée comme loi de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition et tracer son graphe.

3. Calculer $E(X)$, et trouver a et b pour que $E(X) = 7/2$.

Solution:

1. $P(X = x)$ est une loi de probabilité si et seulement si $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = 1$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) &= \sum_{x=1}^{ab} (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) \\ &= (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(ab) = \frac{b-a}{ab}(ab) = b - a = 1 \end{aligned}$$

   Alors $b = a + 1$

2. La fonction de répartition $F_X(t) = \sum_{x=-\infty}^{t} P(X = x)$. On distingue 3 cas:

   1er cas: Si $t < 1$, on a $F_X(t) = 0$

   2eme cas: Si $1 \leq t < ab$, on a:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \sum_{x=-\infty}^{t} P(X = x) = \underbrace{\sum_{x=-\infty}^{1} P(X = x)}_{0} + \sum_{x=1}^{t} P(X = x) \\ &= \sum_{x=1}^{t} (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = (\frac{1}{a} - \frac{1}{b})t = \frac{b-a}{ab} t = \frac{a+1-a}{ab} t = \frac{t}{ab} \end{aligned}$$

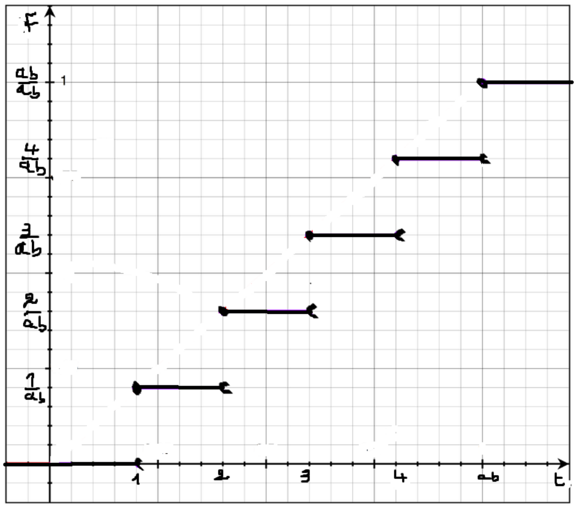


Figure 2.1: Fonction de répartition d'une v.a.r.d

3eme cas: Si $t \geq ab$, on a:

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \sum_{x=-\infty}^{t} P(X=x) = \underbrace{\sum_{x=-\infty}^{1} P(X=x)}_{0} + \underbrace{\sum_{x=1}^{ab} P(X=x)}_{=1\, loi\, de\, proba} + \underbrace{\sum_{x=ab}^{t} P(X=x)}_{0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{t}{ab}, & \text{si } 1 \leq t < ab; \\ 1, & \text{si } t \geq ab; \\ 0, & \text{si } t < 1. \end{cases}$$

3. Caluler $E(X)$?

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} xP(X=x) = \sum_{x=1}^{ab} x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \sum_{x=1}^{ab} x \\ &= \underbrace{\frac{\overbrace{b}^{a+1} - a}{ab}}_{=\frac{1}{ab}} \left[\frac{ab}{2}(1+ab)\right] = \frac{1+ab}{2} = \frac{1+a(a+1)}{2} = \frac{a^2+a+1}{2} \end{aligned}$$

Pour $E(X) = \frac{7}{2}$, on a $\frac{a^2+a+1}{2} = \frac{7}{2}$, alors $a^2 + a - 6 = 0$, on a deux solution $a_1 = 2$ et $\underbrace{a_2 = -3}_{rejeter\, car\, a,b>0}$, donc $a = 2$ et $b = a + 1 = 3$

Exercice 2: Soit la fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^k, & 0 \leq x \leq 1 \ ; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Où $k \in \mathbb{N}*$ et $c \in \mathbb{R}$

1. Déterminer les valeurs de c et k pour que $f(x)$ soit une densité de probabilité d'une v. a X.

2. Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$ pour $k = 1$.

3. Tracer le graphe de $F_X(t)$ pour $k = 1$

4. Pour $k = 1$ calculer:

   i) x_0 tel que $P(X < x_0) = 1/2$

   ii) $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$ et $P(X \leq 1/4)$

Solution:

(a) $f(x)$ est une densité de probabilité si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, alors $c\int_0^1 (1-x)^k dx = 1$, donc $c = \frac{k+1}{k}$

(b) Calculer F_X. Pour $k = 1$ on a $c = 2$ et on a

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{x dans } [0,\ 1] \ ; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On a trois cas:

1er cas: Si $t \leq 0$ on a $F_X(t) = 0$

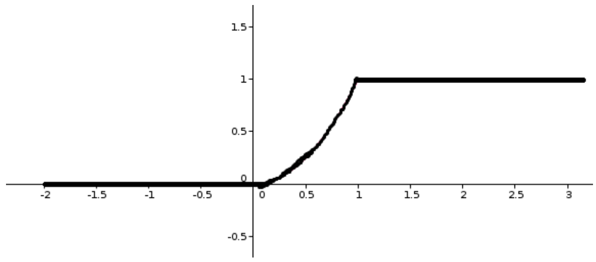


Figure 2.2: Fonction de répartition d'une v.a.a.continue.

2eme cas: Si $< t < 1$ on a

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{=0} + \int_{0}^{t} f(x)dx \\ &= 2\int_{0}^{t}(1-x)dx = 2t - t^2 \end{aligned}$$

3eme cas: Si $t \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(x)dx}_{=0} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)dx}_{=1\, loi\, de\, proba} + \underbrace{\int_{1}^{t} f(x)dx}_{=0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Conclusion:

$$F_X(t) = \begin{cases} 2t - t^2, & \text{si t dans [0,1[;} \\ 1, & \text{si t supérieur ou égale à 1;} \\ 0, & \text{si t inférieur ou égale à 0 .} \end{cases}$$

(c) Calculer x_0, $P(X < x_0) = F_X(x_0) = 2x_0 - x_0^2 = 1/2$, alors $x_0 = \frac{-2+\sqrt{2}}{-2}$

(d) $P(1/4 \leq X \leq 3/4) = F_X(\frac{3}{4}) - F_X(\frac{1}{4})$ et $P(X \leq 1/4) = F_X(\frac{1}{4})$

Exercice 3: Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité (loi de Paréto) de paramètres (a, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)

$$\begin{cases} (\frac{\lambda}{a})(\frac{a}{x})^{\lambda+1}, & \text{si } x \geq a; \\ 0, & \text{si } x < a. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

2. Calculer les moments d'ordre $r < \lambda$.

3. Calculer $E(X)$, $V(X)$.

Solution: Comme $\lambda + 1 > 1$, l'intégrale a bien un sens.

1. f est bien une densité de probabilité:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \frac{\lambda}{a}\int_a^{+\infty}(\frac{a}{x})^{\lambda+1}dx \\ &= \frac{\lambda}{a}a^{\lambda+1}\int_a^{+\infty}(x)^{-\lambda-1}dx = \lambda a^{\lambda}\Big[\frac{1}{-\lambda}x^{-\lambda}\Big]_a^{+\infty} \\ &= \lambda a^{\lambda}(\frac{1}{-\lambda}(-a^{-\lambda})) = 1\end{aligned}$$

2. Les moments d'ordre $r < \lambda$: le moment d'ordre r existe ssi $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^r f(x)dx$ converge ce qui équivalent à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^{\lambda+1-r}}$ par suite ce moment existe ssi $\lambda + 1 - r > 1$

   Soit $\lambda > r$ on a:

$$\begin{aligned}m_r(x) &= \lambda a^{\lambda}\int_a^{+\infty}(x)^{-\lambda+r-1}dx \\ &= \lambda a^{\lambda}(\frac{1}{r-\lambda}x)^{-\lambda+r})_a^{+\infty} = -\lambda a^{\lambda}\frac{x)^{-\lambda+r}}{r-\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-r}a^r\end{aligned}$$

3. Calculer $E(X)$, $V(X)$.

   Si $\lambda > 1$, $E(X) = m_1 = \frac{\lambda}{\lambda-1}a$

   Si $\lambda > 2$, $E(X^2) = m_2 = \frac{\lambda}{\lambda-2}a^2$, alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\lambda a^2}{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}$

Chapitre 3

Lois de probabilités usuelles

3.1 Lois de probabilités usuelles des variables aléatoires discrètes

3.1.1 Loi Uniforme

Définition 3.1.1 *On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi uniforme discrète sur l'intervalle $[1,\, n]$ de $\mathbb{N}$ si et seulement si*

$$X(\Omega) = [1,\, n] \;\text{ et }\; \mathrm{P(X = k)} = \frac{1}{\mathrm{n}} \;\; \forall \;\mathrm{k} \in [1,\, \mathrm{n}].$$

On note $X \sim \mathcal{U}([1,\, n])$

Remarque 3.1.1 *Vérifions qu'il s'agit bien une loi de probabilité:*

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} n = 1$$

Proposition 3.1.1 *Soit X une variable aléatoire réelle suit une loi uniforme discrète. Alors*

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Preuve 3.1.1 *On a* $E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$*, alors*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}.$$

On a $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k)$*, alors* $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ *(voir le tableau des notations (triangle de Pascal)).*

On a $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$*, alors*

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \Big(\frac{n+1}{2}\Big)^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

3.1.2 Loi Bernoulli

Une expérience à deux résultat possible s'appelle expérience de Bernoulli. Notons e(echec), s(succés) ces deux résultats. $\Omega = \{e, s\}$, $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{e\}, \{s\}, \Omega\}$. On pose $P(s) = p$, $P(e) = 1 - p = q$ tel que $p \in]0, 1[$.

Définition 3.1.2 *On dit qu'une variable aléatoire réelle* X *de Bernoulli de paramètre p si elle ne prend que les deux valeurs* 0 *et* 1 *avec des probabilité non nulles.On note la loi d'une variable aléatoire réelle* X *de Bernoulli par* $P(X = 1) = p$*,* $P(X = 0) = q = 1 - p$*,* $p \in]0, 1[$*. Ou*

$$P(X = k) = p^k q^{1-k}, \text{ tel que k} \in \{0, 1\}$$

On écrit $X \sim \mathcal{B}\ (p)$

Remarque 3.1.2 *Vérifions qu'il s'agit bien une loi de probabilité:*

$$\sum_{k=0}^{1} P(X = k) = \sum_{k=0}^{1} p^k q^{1-k} = p^0 q^{1-0} + p^1 q^{1-1} = q + p = 1 - p + p = 1$$

Proposition 3.1.2 *Soit* X *une variable aléatoire réelle suit une loi de Bernoulli. Alors*

$$E(X) = p, \quad V(X) = pq$$

Preuve 3.1.2 *On a* $E(X) = \sum_{k=0}^{1} kP(X = k)$*, alors*

$$E(X) = \sum_{k=0}^{1} kp^k q^{1-k} = 0p^0 q^{1-0} + 1p^1 q^{1-1} = p.$$

On a $E(X^2) = \sum_{k=0}^{1} k^2 P(X = k)$*, alors* $E(X^2) = \sum_{k=0}^{1} k^2 p^k q^{1-k} = p$ *.*
On a $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$*, alors*

$$V(X) = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Exercice: Soit $r \in \mathbb{N}$, calculer le moment et le moment centré d'ordre r d'une v.a.r de Bernoulli.

Solution: $m_r(X) = \sum_{k=0}^{1} k^r p^k q^{1-k} = p$

$\mu_r(X) = \sum_{k=0}^{1} (k - p)^r p^k q^{1-k} = (-p)^r q + (1 - p)^r p = (-p)^r q + (q)^r p$

3.1.3 Loi Hypergéomètrique

Etant donnée une population de $N = n_1 + n_2$ individus tel que n_1 individus de type 1 et n_2 individus de type 2. On tire au hasard n individus, sans remise ($n \leq n_1$ et $n \leq n_2$). Soit la variable X:≪ nombre d'individus de type 1 parmi les n individus tirés ≫. Alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ...n\}$. On suppose que les tirage soient équiprobables.
Le nombre de tirages possibles est C_N^n.
Le nombre de sous ensembles de la population de k individus de type 1 et de $(n - k)$ individus de type 2 est $C_{n_1}^k \times C_{n_2}^{n-k}$.

Définition 3.1.3 *On dit qu'une variable aléatoire réelle* X *suit une loi hypergéométrique de paramètre* N*,* n *et* p *si l'on a:* $X(\Omega) \subset [0, n]$ *et* $\forall\ k \in [0, n]$

$$P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k \times C_{n_2}^{n-k}}{C_N^n}$$

On écrit $X \sim \mathcal{H}\ (N, n, p)$

Remarque 3.1.3 *Vérifions que l'on a bien une loi de probabilité:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{n_1}^{k} \times C_{n_2}^{n-k}}{C_N^n} \\ &= \frac{1}{C_N^n} \sum_{k=0}^{n} C_{n_1}^{k} \times C_{n_2}^{n-k} \\ &= \frac{1}{C_N^n} \times C_N^n = 1\end{aligned}$$

Proposition 3.1.3 *Soit X une variable aléatoire réelle suit une loi hypergéométrique de paramètre N, n et p. Alors*

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$$

3.1.4 Loi Binomiale

Soit une expérience de Bernoulli dans laquelle l'événement A se réalise. On répète l'expérience de Bernoulli n fois de façons indépendant et on s'intéresse par le nombre de fois où A se réalise.

Définition 3.1.4 *On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ si l'on a: $X(\Omega) = [0,\, n]$ et $\forall\ k \in [0,\, n]$*

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

On écrit $X \sim \mathcal{B}\ (n,\, p)$

Remarque 3.1.4 *Vérifions qu'il s'agit bien une loi de probabilité:*

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = (1-q+q)^n = 1^n = 1$$

(Formule de binôme de Newton)

Proposition 3.1.4 *Soit X une variable aléatoire réelle suit une loi de Binomiale de paramètre n et p. Alors*

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq$$

Preuve 3.1.3 *Pour démonter cette proposition on va utiliser les résultats suivants (voir le tableau des notations)*

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1},\ \ k(k-1)C_n^k = (k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$$

On a $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$, *(car le terme correspondant à* $k=0$ *est nul)*
$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k},\ .$
Changeons d'indice en posant $k-1=r$,
$E(X) = n\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^{r} p^{r+1} q^{n-(r+1)} = np\underbrace{\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^{r} p^{r} q^{(n-1)-r}}_{=(p+q)^{n-1}=1} = np$

Calculer $V(X)$***:***

On a $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$

Calculer $E(X(X-1))$***:***
$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k p^k q^{n-k}$,*(car les termes correspondant à* $k=0$ *et* $k=1$ *sont nuls)*

$$E(X(X-1)) = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1}p^k q^{n-k} = n(n-1)\sum_{k=2} C_{n-2}^{k-2}p^k q^{n-k}$$

Effectuons le changement d'indice en posant $k-2=r$,

$$E(X(X-1)) = n(n-1)\sum_{r=0}^{n} C_{n-2}^{r}p^{r+2}q^{n-(r+2)} = n(n-1)p^2\underbrace{\sum_{r=0}^{n} C_{n-2}^{r}p^{r}q^{(n-2)-r}}_{(p+q)^{n-2}=1} = n(n-1)p^2$$

Alors

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq$$

3.1.5 Loi Géométrique

On répète l'expérience de Bernoulli autant de fois jusqu'a l'événement A sera réalisé pour la première fois.

Définition 3.1.5 *On dit qu'une variable.a.r* X *suit une loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$ *si on a:*
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et* $\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = pq^{k-1}$
On écris $X \sim G(p)$

Remarque 3.1.5 *Vérifions qu'il s'agit bien une loi de probabilité:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

série géométrique de raison q. *Comme* $0 < q < 1$ *alors cette série est convergente de somme* $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$, *donc* $p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \dfrac{p}{p} = 1$

Proposition 3.1.5 *Soit* X *une variable aléatoire réelle suit une loi géométrique de paramètre* p. *Alors*

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Preuve 3.1.4 *On a* $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}$, *on montre d'abord que cette espérance existe, i.e la série* $\sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1}$ *est absolument convergente. Or cette série à termes positifs, d'après le critère d'Alembert on pose* $u_k = kq^{k-1}$ *et on a* $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \to +\infty} \dfrac{k+1}{k} q = q < 1$, *alors la série est convergente.*
On a pour $0 < q < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$, *on dérive cette égalité on en déduit:* $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$, *d'où* $E(X) = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p \dfrac{1}{(1-q)^2} = \dfrac{p}{p^2} = \dfrac{1}{p}$
Calculer $V(X)$*:*

On a $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$

Calculer $E(X(X-1))$***:***

$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1}$, *le critère d'Alembert prouve encore une fois que cette série est convergente en effet: on pose* $v_k = k(k+1)q^{k-1}$, *on a* $\lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k-1}q = q < 1$.

On dérive cette égalité $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ *on en déduit:*$\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$

d'où $E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} = pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2pq}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$, *alors*

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - (\frac{1}{p})^2 = \frac{2q+p-1}{p^2} = \frac{q}{p}$

3.1.6 Loi de Poisson

Définition 3.1.6 *On dit qu'une variable.a.r.* X *suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$ *si les deux conditions suivantes sont réalisées:*

(i)$X(\Omega) = \mathbb{N}$

(i) $\forall \in \mathbb{N},\ P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. *On écrit* $X \sim P(\lambda)$

Remarque 3.1.6 *1. Pour tout nombre réel* x *la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *est convergente de somme* e^x *i.e.* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$, *alors* $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ *est bien une loi de probabilité.*

Proposition 3.1.6 *Soit* X *une variable aléatoire réelle suit une loi de Poisson de paramètre* λ. *Alors*

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

Preuve 3.1.5 *On a* $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$*, d'après le critère d'Alembert, on a la série définissant* $E(X)$ *est bien convergente.*

Le terme correspondant à $k = 0$ *est nul, ce qui nous permet de commencer la sommation à* $k = 1$*.*

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

(changement d'indice $k - 1 = r$*)*

Calculer $V(X)$***:***

On a $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2$

Calculer $E(X(X-1))$***:***

$E(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$*. Les termes correspondants à* $k = 0$ *et* $k = 1$ *sont nuls, alors*

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 \end{aligned}$$

(changement d'indice $k - 2 = h$*).*

D'où

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X(X-1)) + E(X) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

3.2 Lois de probabilités usuelles des variables aléatoires absolument continues

3.2.1 Loi Uniforme

Définition 3.2.1 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que X suit la loi uniforme sur le segment $[a,b]$, si X est absolument continue et admet comme densité de probabilité la fonction f définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & si\ x \in [a,b]; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Nous écrivons $X \sim \mathcal{U}([a,b])$

Remarque 3.2.1 *f vérifie bien une densité de probabilité. En effet;*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

Définition 3.2.2 *Soit X une variable aléatoire réelle suit la loi uniforme. La fonction de répartition de X définie par:*

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}, & si\ x \in [a,b]; \\ 1, & si\ x > b. \\ 0, & si\ x < a. \end{cases}$$

Proposition 3.2.1 *Soit X une variable aléatoire réelle suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$. Alors*

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Preuve 3.2.1

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b tdt = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \end{aligned}$$

Calculer $V(X)$***:***

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \frac{b+a}{2})^2 f(t)dt \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b (t - \frac{b+a}{2})^2 dt \\ &= \Big[\frac{1}{3(b-a)}(t - \frac{b+a}{2})^3\Big]_a^b \\ &= \frac{1}{3(b-a)}\Big[(\frac{b-a}{2})^3 - (\frac{a-b}{2})^3\Big] = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

3.2.2 Loi Exponentielle

Définition 3.2.3 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, si X est absolument continue et admet comme densité de probabilité la fonction f définie par:*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & si\ x \geq 0; \\ 0, & si\ x < 0\ . \end{cases}$$

Nous écrivons $X \sim \mathcal{E}\ (\alpha)$

Remarque 3.2.2 *f vérifie bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue. En effet, $f \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf au point zéro où elle admet une limite finie à gauche $= 0$ et à droite $= \alpha$. De plus on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \Big[-e^{-\alpha x}\Big]_0^{+\infty} = 1$$

Définition 3.2.4 *La fonction de répartition de X définie par:*

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x}, & si\ x \geq 0; \\ 0, & si\ x < 0. \end{cases}$$

Proposition 3.2.2 *Soit X une variable aléatoire réelle suit la loi exponentielle $\mathcal{E}$ (α). Alors*

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}, \quad V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Preuve 3.2.2

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \alpha \int_{0}^{+\infty} te^{-\alpha t}dt$$

Intégration par partie en posant $u = t \Rightarrow du = dt$, et $dv = \alpha e^{-\alpha t}dt \Rightarrow v = -e^{-\alpha t}$, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \Big[-te^{-\alpha t}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt \\ &= 0 + \Big[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

***Calculer** $V(X)$:*

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

***Calculer** $E(X^2)$:*

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \alpha \int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-\alpha t}dt$$

Intégrons par parties en posant $u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt$, et $dv = \alpha e^{-\alpha t}dt \Rightarrow v = -e^{-\alpha t}$, alors

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \Big[-t^2e^{-\alpha t}\Big]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} te^{-\alpha t}dt \\ &= 0 + \frac{2}{\alpha}E(X) = \frac{2}{\alpha^2} \end{aligned}$$

D'où $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$

3.2.3 Loi de Laplace-Gauss (loi normale)(loi gaussienne)

On admet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. (Intégrales de Gauss)

Définition 3.2.5 *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que X suit une loi de Laplace-Gauss (normale ou gaussienne) de paramètres m et σ, avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ si X est absolument continue et admet comme densité de probabilité la fonction $f_{m,\sigma}$ définie par: $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.*
On note $X \sim \mathcal{N}\ (m,\sigma)$.
En particulier, la densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est

$$x \mapsto \varphi_{(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Remarque 3.2.3 *$f_{m,\sigma}$ vérifie bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue. En effet, $f_{m,\sigma} \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{m,\sigma}(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$. On trouve

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{m,\sigma}(x)dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\sigma\sqrt{2}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du}_{\sqrt{\pi}\ \textit{integrale de Gauss}} = 1 \end{aligned}$$

Proposition 3.2.3 *Soit X une variable aléatoire réelle suit la loi normale $\mathcal{N}\ (m,\sigma)$. Alors*

$$E(X) = m, \quad V(X) = \sigma^2$$

Preuve 3.2.3

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{(m,\sigma)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Faisons le changement de variable $u = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$, *alors*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m+u\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}\sigma\sqrt{2}du \\ &= \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2}du \\ &= \frac{m}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Big[-\frac{1}{2}e^{-u^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= m + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} + \underbrace{e^{-\infty}}_{=0}) = m \end{aligned}$$

Calculer $V(X)$***:***

On a $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f_{(m,\sigma)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$

Faisons encore le changement de variable $u = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$, *alors*

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sigma^2u^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-u^2}\sigma\sqrt{2}du \\ &= \sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2}du \\ &= \sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u.ue^{-u^2}du \end{aligned}$$

Intégrons par parties, on obtient

$$\begin{aligned} V(X) &= \sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big[(-\frac{1}{2}ue^{-u^2})_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du\Big] \\ &= \sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big[0+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Big] = \sigma^2 \end{aligned}$$

Théorème 3.2.1 *Soient* X *une v.a.r. définie sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *et* $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ *une variable centrée réduite associée, alors*
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma) \Leftrightarrow X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

Preuve 3.2.4 $\Rightarrow$

Soit X *une v.a.r. suit la loi normale de paramètre* m *et* σ $(\mathcal{N}(m,\sigma))$*. On considère* $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ *la variable centrée réduite associée à* X*. On cherche de la fonction de* *répartition de X^*: $\forall x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} F_{X^*}(x) &= P(X^* \leq x) = P(\frac{X-m}{\sigma} \leq x) \\ &= P(X \leq m+\sigma x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{m+\sigma x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \\ &= F_X(m+\sigma x) \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \frac{(t-m)}{\sigma}$, on obtient:

$$F_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

L'expression de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

$\Leftarrow$

Soit X une v.a.r. admettant une espérance m et un écart-type σ telle que $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Cherchons la fonction de répartition de X: $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}) \\ &= P(X^* \leq \frac{x-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned}$$

On a le changement de variable $u = \frac{(t-m)}{\sigma} \Rightarrow t = \sigma u + m$, alors

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

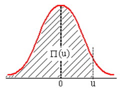
L'expression de la fonction de répartition de la loi normale de paramètre m et σ. Ce qui montre que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma)$

Remarque 3.2.4 • *En pratique, on ne calcule pas d'intégrale (fonction de répartition ($\mathcal{N}(m,\sigma)$)) , mais on utilise la fonction de répartition de la loi normale centrée déduite $\mathcal{N}(0,1)$ noté $\Pi_{(0,1)}(u) = \Pi(u)$ tel que: $\Pi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ donnée par la table suivante.*

Table de Loi Normale

Fonction de répartition Π de la loi normale centrée réduite N(0,1)

Probabilité de trouver une valeur inférieure à u .



Π (-u) = 1 - Π (u)

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989

Figure 3.1: Table: fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\Pi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

- $\varphi_{(0,1)}$ est symétrique par rapport à la verticale d'abscisse $m = 0$. On peut donc écrire $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{-x} \varphi_{(0,1)}(t)dt = \int_{x}^{+\infty} \varphi_{(0,1)}(t)dt$$

i.e. $\varphi_{(0,1)}(-x) = 1 - \varphi_{(0,1)}(x)$

Proposition 3.2.4 *Soit X une v.a.r. suit la loi normale centrée réduite ($\mathcal{N}(0,1)$), alors:*

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Pi(-x) = P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Pi(x)$

en particulier pour $x = 0$ on a $\Pi(0) = 1 - \Pi(-0) \Rightarrow 2\Pi(0) = 1 \Rightarrow \Pi(0) = \frac{1}{2}$

i.e. le point de coordonneés $(0, \frac{1}{2})$ *est centre de symétrie de la représentation graphique de* $\Pi_{(0,1)}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(|X| \leq x) = 2\Pi(x) - 1.$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(|X| \geq x) = 2(1 - \Pi(x)).$

(iv) *Si* X *suit la loi* $\mathcal{N}(m, \sigma)$, *alors*

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}) = \Pi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Pi(\frac{a-m}{\sigma})$$

Preuve 3.2.5 **(i)** $\forall x \in \mathbb{R},\ \Pi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, *en posant* $u = -t$, *on obtient* $\Pi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Pi(x).$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = \Pi(x) - \Pi(-x)$, *alors on applique le résultat (i) on trouve*

$$P(|X| \leq x) = \Pi(x) - (1 - \Pi(x)) = 2\Pi(x) - 1$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(|X| \geq x) = 1 - P(|X| \leq x) = 1 - (2\Pi(x) - 1) = 2(1 - \Pi(x)).$

3.3 Aproximations

Définition 3.3.1 *(Aproximation d'une loi Hypergéométrique par une loi Binomiale) Lorsque* N *est grand on approche la loi Hypergéométrique* $\mathcal{H}$ $(N,\ n,\ p)$ *par la loi Binomiale de paramètre* n *et* $p = \frac{n_1}{N}$

Définition 3.3.2 *(Aproximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson) On approche la loi Binomiale* $\mathcal{B}$ $(n,\ p)$ *par la loi de Poisson* $P(\lambda)$ *si le paramètre* p *est suffisamment petit* $(p \leq 0.1)$ *et l'entier* n *est suffisamment grand* $(n \geq 30)$ *avec* $\lambda = np$.

Exemple 3.3.1 *Un joueur achète tous les jours un ticket de jeu à gratter, il a une chance sur* 30 *de remporter un lot. Calculer la probabilité:*

1. *Qu'il gagne une fois en avril(qui comporte 30 jours)?*

2. *Qu'il gagne deux fois*

3. *Qu'il gagne au moins une fois*

4. *Qu'il gagne au moins deux fois*

Solution: (On a supposé que les tirages de tickets étaient indépendants) On note X le nombre de succès durant le mois d'avril, X suit exactement la loi Binomiale $\mathcal{B}$ $(n,\, p)$, où $n = 30$ et $p = \frac{1}{30}$. Puisque p est suffisamment petit et n suffisamment grand, alors on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson $P(\lambda)$,où $\lambda = np = 1$. Donc on peut calculer:

1. $P(X = 1) = \lambda e^{-\lambda} = 1e^{-1} \approx 0.368$

2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1} \approx 0.632$

3. $P(X = 2) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda} = \frac{1^2}{2} e^{-1} \approx 0.184$

4. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 1 - e^{-1} - 1e^{-1} \approx 0.264$

Un calcul exact mène à

1. $P(X = 1) = np(1 - p)^{n-1} \approx 0.374$

2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0.638$

3. $P(X = 2) \approx 0.187$

4. $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 0.264$

conclusion: les approximations ne sont bonnes qu'à 10^{-2} près. Les approximations poissoniennes sont plus utiles lorsque les calculs des coéfficients binomiaux sont délicats car faisant intervenir des quotients de nombres très grands.

Définition 3.3.3 *(Aproximation d'une loi Binomiale par une loi normale) Pour* $npq \geq 10$ *approximation de la loi Binomiale* $\mathcal{B}$ (n, p) *par la loi normale* $\mathcal{N}$ (m, σ) *de même espérance* $m = np$ *et de même variance* $\sigma^2 = npq$.

Remarque 3.3.1 *comme l'approximation faite est une approximation d'une loi discrète par une loi continue, il est nécessaire d'éffectuer une correction de continuité qui consiste à calculer, pour chaque valeur entière de* x*, la différence des probabilités que donne la loi normale pour* $x + 0.5$ *et pour* $x - 0.5$*. c'est-à-dire qu'à la valeur* x *d'une valeur discrète, nous associeront l'intervalle* $[x - 0.5, x + 0.5]$ *pour la variable continue.*

Exemple 3.3.2 *à une élection, un candidat A a obtenu 45% des voix. On tire au hasard un échantillon de 300 électeurs. Quelle est la probabilité pour que le nombre N de ceux qui ont voté pour A parmi eux soit compris entre 100 et 150.*

Solution: N suit une loi $\mathcal{B}$ (300, 0.45), $np = 300 \times 0.45 = 135$ et $npq = 300 \times 0.45 \times 0.55 = 74.25$.
On approche cette loi par la loi $\mathcal{N}$ (135, 8.62), alors

$$\begin{aligned} P(100 \leq N \leq 150) &= P(100 - 0.5 \leq N \leq 150 + 0.5) = P(99.5 \leq N \leq 150.5) \\ &= P(\frac{99.5 - 135}{\sqrt{74.25}} \leq \frac{N - 135}{\sqrt{74.25}} \leq \frac{150.5 - 135}{\sqrt{74.25}}) \\ &= P(-4.12 \leq \frac{N - 135}{\sqrt{74.25}} \leq 1.8) \\ &= \Pi(1.8) + \Pi(4.12) - 1 = 0.964 \end{aligned}$$

(Voir la table)

Définition 3.3.4 *(Aproximation d'une loi de Poisson par une loi normale) L'approximation d'une loi de Poisson $P(\lambda)$ par une loi normale $\mathcal{N}$ (m, σ) lorsque λ est assez grand (i.e. $\lambda > 10$) tel que $m = \lambda$ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$*

Remarque 3.3.2 *Si X suit la loi de Poisson, alors*

1. $P(a \leq X \leq b) = \Pi(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}) - \Pi(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$. *Comme précédemment, la correction de continuité pousse à écrire,*

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0.5 \leq X \leq b + 0.5) = \Pi(\frac{b + 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}) - \Pi(\frac{a - 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}})$$

2. $P(X = c) = P(c - 0.5 \leq X \leq c + 0.5) = \Pi(\frac{c+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}) - \Pi(\frac{c-0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}})$

(Π est la fonction de répartition de la loi normale centée réduite)

3.4 Exercices

Exercice 1: on lance trois fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Calculer la probabilité p pour qu'il y ait:

1. Trois fois face
2. Deux fois face
3. Une fois face
4. Aucune fois face.

Solution: On a deux méthodes:

- **Méthode1:**

  L'ensemble fondamental $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$, $card\Omega = 8$, alors

1. Il y a seulement une fois trois faces $\{FFF\}$ parmi les huit résultats possible dans Ω, par conséquent $p = \frac{1}{8}$
2. Il y a trois fois deux faces $\{FFP, FPF, PFF\}$, d'où $p = \frac{3}{8}$
3. Il y a trois fois une seule faces $\{FPP, PPF, PFP\}$, d'où $p = \frac{3}{8}$
4. Aucune face i.e. trois pile $\{PPP\}$ peut être réalisé une seule fois , d'où $p = \frac{1}{8}$

- **Méthode2:** On utilise la loi binomiale avec $n = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$

1. Pour $k = 3$, $p = C_3^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0 = 1.\frac{1}{8}.1 = \frac{1}{8}$
2. Pour $k = 2$, $p = C_3^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{3-2} = \frac{3}{8}$
3. Pour $k = 1$, $p = C_3^1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^{3-1} = \frac{3}{8}$
4. Pour $k = 0$, $p = C_3^0(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^{3-0} = \frac{1}{8}$

Exercice 2: Soit X une variable aléatoire suit une loi de poisson de paramètre λ strictement positif. Calculer $E(\frac{1}{1+X})$?

Solution: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{1+X}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(1+k)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{\lambda}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(1+k)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{1+k}}{(1+k)!} \end{aligned}$$

On pose $c = k + 1$

$$\begin{aligned} E(\frac{1}{1+X}) &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{c=1}^{+\infty}\frac{\lambda^c}{(c)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Exercice 3: Soit X une v.a absolument continue de densité (loi de Rayleigh)

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{-x^2}{2}}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

2. Calculer, $E(X)$ et $V(X)$. Quelle est la loi de $Y = X^2$.

Solution:

1. f est bien une densité de probabilité: $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{\frac{-x^2}{2}}dx = [-e^{\frac{-x^2}{2}}]_0^{+\infty} = 1$

2. On admet $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ intégrale de Gauss
   $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x.xe^{\frac{-x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (intégration par partie)
   $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$, tel que $E(X^2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2.xe^{\frac{-x^2}{2}}dx = 2$ (intégrale par partie).

3. La loi de $Y = X^2$:

$$\begin{aligned} P(Y < y) &= P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xe^{\frac{-x^2}{2}}dx \\ &= \int_{-\sqrt{y}}^{0} xe^{\frac{-x^2}{2}}dx + \int_0^{\sqrt{y}} xe^{\frac{-x^2}{2}}dx \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} xe^{\frac{-x^2}{2}}dx = [-e^{\frac{-x^2}{2}}]_0^{\sqrt{y}} = -e^{\frac{-y}{2}} + 1 = F(y) \end{aligned}$$

   $F^{'}(y) = \frac{1}{2}e^{\frac{-y}{2}} = f(y)$ la densité de probabilité de la la exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, alors $Y \sim (\mathcal{E}(\frac{1}{2}))$.

Exercice 4: Soit X une v.a.r de densité de brobabilité définie par:

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda u}, & \text{si } u \geq 0; \quad \lambda > 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda u}, & \text{si } u \leq 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité (loi exponentielle bilatérale)

2. Calculer $E(X)$.

3. Quelle est la loi de $Y = |X|$?

4. en déduire $V(X)$.

5. Soit X suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Quelle est la loi de $Y = -\frac{1}{\lambda}log(1-X)$, $\lambda > 0$

Solution:

1. f est une densité de probabilité:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda u}du + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda u}du \\
&= \frac{1}{2}\Big[e^{\lambda u}\Big]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\Big[-e^{-\lambda u}\Big]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

2. $E(X) = 0$ intégration par partie

3. La loi de $Y = |X|$:

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{0} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda u}du + \int_{0}^{y} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda u}du \\
&= \frac{1}{2}\Big[e^{\lambda u}\Big]_{-y}^{0} + \frac{1}{2}\Big[-e^{-\lambda u}\Big]_{0}^{+y} \\
&= \frac{1}{2}\Big[1 - e^{-\lambda y}\Big] + \frac{1}{2}\Big[1 - e^{-\lambda y}\Big] = 1 - e^{-\lambda y} = F(y)
\end{aligned}$$

Fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ donc $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

4. En déduire $V(X)$:

Puisque Y suit la loi exponenntielle $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(Y) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(Y) = \frac{1}{\lambda^2}$.

D'où $E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$, comme $Y^2 = X^2$,alors $E(X^2) = E(Y^2) = \frac{2}{\lambda^2}$ ce qui implique $V(X) = E(X^2) - 0 = \frac{2}{\lambda^2}$

5. La loi de $Y = -\frac{1}{\lambda}log(1-X)$, $\lambda > 0$, X suit $\mathcal{U}[0,1]$:

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(-\frac{1}{\lambda}log(1-X) \leq y) = P(log(1-X) \geq -\lambda y) = P(1 - X \geq e^{-\lambda y}) \\
&= P(X \leq 1 - e^{-\lambda y}) = \int_{0}^{1-e^{-\lambda y}} dx = 1 - e^{-\lambda y} = F(y)
\end{aligned}$$

Fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ donc $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Exercice 5: On suppose que 2% des articles produits par une usine sont défectueux. Calculer la probabilité pour que dans un échantillon de 100 articles, il y ait 3 articles défectueux.

Solution: On applique la distribution binomial $n = 100$ et $p = 0.02$.

Comme p est petit et $n > 30$, alors on utilise l'approximation de Poisson avec $\lambda = np = 2$, $k = 3$

$P(X = 3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0.18.$

Exercice 6: Un central téléphonique dessert 10000 abonnés, à un instant précis un abonné a une probabilité égale à 0.05 d'utiliser son téléphone, les appels sont supposés indépendants. Quel est le nombre maximum d'abonnés que le central doit être capable de traiter à un instant pécis pour que la probabilité de saturation du central soit inférieure à 0.025.

Solution: Soit X le nombre d'abonnés utilisant leur téléphone à un instant précis t, alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10000;\ 0.05)$. On a $np = 10000 \times 0.05 = 500$ et $npq = 10000 \times 0.05 \times 0.95 = 475$.

On peut donc approcher cette loi par la loi normale $\mathcal{N}(500;\ \sqrt{475})$.

Soit x tel que $P(X > x) \leq 0.025$, alors

$$\begin{aligned}
P(X > x) \leq 0.025 \quad &\Leftrightarrow \quad P\Big(\frac{X-500}{\sqrt{475}} > \frac{x-500}{\sqrt{475}}\Big) \leq 0.025 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - P\Big(\frac{X-500}{\sqrt{475}} < \frac{x-500}{\sqrt{475}}\Big) \leq 0.025 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \Pi\Big(\frac{x-500}{\sqrt{475}}\Big) \leq 0.025 \\
&\Leftrightarrow \quad \Pi\Big(\frac{x-500}{\sqrt{475}}\Big) \leq 0.975.
\end{aligned}$$

On a $\Pi(1.96) = 0.975$, alors $\frac{x-500}{\sqrt{475}} \leq 1.96$, on en déduit $x \geq 500 + 1.96\sqrt{475} = 542.71$. Il faut donc que le central soit capable de traiter 543 abonnés.

Références

[1] Christian Leboeuf. Jean-Louis Roque. Jean Guegand ; *Cours de probabilités et de statidtiques*, 2ème édition.

[2] Christophe HÉNOCQ ; *Cours de probabilités et de statidtiques mathḿatique*, Classes Préparatoires aux Écoles Vétérinaires.

[3] Jacqueline FOURASTIE. Jean-François LASLIER; *Probabilités et statidtique.*

[4] Khanh Dao Duc. David Delaunay, Probabilités *Cours exercices corrigés.*

[5] Pierre Meunier, Probabilités Discreètes. *Cours exercices*

[6] Walter Appel, Probabilités. *pour les non-probabilistes*,2ème édition.