الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Mustapha Stambouli de Mascara

جـــــــامعة مصطفى إسطنبولي معسكـــــــــــر

Faculté des Sciences et de la Technologie

كـلـــية العلـــوم والتكنولوجيا

Polycopié de Cours

Physique 1

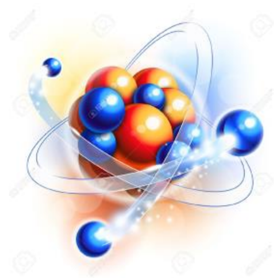
Mécanique du Point Matériel

Cours et exercices corrigés

Présenté par :

Dr. BOUGUENNA Driss

Ce cours est destiné aux étudiants de première année licence ST et SM



Algérie

2015

Avant-propos

Conforme aux programmes LMD (Licence-Master-Doctorat) défini par arrêté ministériel du ministère de l’enseignement supérieur et de la recherche scientifique, ce fascicule s’adresse aux étudiants licence de première année de l’université dans le domaine des Sciences de la Matière (SM) et des Sciences et Techniques (ST). Il est conçu de façon à aplanir au mieux les difficultés inhérentes au discours scientifique tout en conservant la rigueur nécessaire. Cet ouvrage présente l'ensemble des notions et des bases abordées en Mécanique du point durant la première année de Licence SM et ST. Ainsi également, des exercices corrigés sont proposés en fin de chaque chapitre permettent à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux partiels et aux examens.

Le premier chapitre est consacré à des rappels mathématiques sur les équations aux dimensions, calculs d’erreurs et vectoriels. Les deux traitent des grandeurs physiques de base qui sont utilisées pour l’expression des lois physiques. En plus des rappels nécessaires, l’objectif de cette partie est d’introduire des définitions claires et des notations appropriées.

Le deuxième chapitre est dédié à la cinématique du point matériel. Son but est de décrire les mouvements d’objets sans s’intéresser aux causes qui les produisent. Il traite uniquement des mouvements de point matériel.

Le troisième chapitre traite de la dynamique du point matériel, dans le cadre de la mécanique de Newton avec ses trois lois: la loi d’inertie, la loi fondamentale de la dynamique et la loi des actions réciproques. Nous y considérons les lois générales, dites lois de forces, établies pour un certain nombre d’interactions. La notion de moment cinétique d’une particule par rapport à l’origine y est également traitée.

Le quatrième chapitre concerne la troisième méthode d’analyse qui est celle du travail et de l’énergie. Cette approche élimine le calcul de l’accélération en reliant directement la force, la masse, la vitesse et le déplacement. Nous considérons d’abord le travail d’une force et l’énergie cinétique d’un point matériel. Nous traitons ensuite les notions d’énergie potentielle et totale. En plus, nous traitons aussi le champ de forces et les forces conservatives et non conservatives.

Le cours présenté dans ce polycopié de cours est le fruit de plusieurs années d’enseignement dispensé aux étudiants de première année Licence Sciences de la Matière (SM) à l’université Mustapha Stambouli de Mascara. Il s’agit d’un cours de physique 1 "Mécanique du Point Matériel".

Table des matières

INTRODUCTION

Introduction

La physique (du grec φυσικη, la nature) est étymologiquement la «*science de la nature*». La physique n'accepte comme résultat que ce qui est mesurable et reproductible par expérience. Ainsi également, cherche à décrire les phénomènes de manière qualitative et quantitative. Elle doit donc caractériser par des grandeurs susceptibles d'être mesurées.

La physique analyse les propriétés des objets ou des êtres qu'on considère comme des objets physiques, étudie leurs comportements dans les interactions avec le milieu environnant et en dégage les lois de physique qui mouvement leurs évolutions dans le temps et dans l'espace. Les objets physiques sont alors caractérisés par un certain nombre de propriétés qui constituent en quelque sorte leur fiche d'identité, telle que leur masse et leur énergie.

Nous nous intéresserons à la mécanique du point, pratiquement elle concerne les objets matériels dont l'extension spatiale est très faible: leurs déformations et l'énergie liée à leur mouvement propre de rotation peuvent ainsi être négligées devant les énergies mises en jeu. Cependant, un objet aussi volumineux que la terre ou le soleil peut dans certains cas être assimilable à un point en ce qui concerne. Nous supposerons qu'un temps unique peut-être défini en tout point de l'espace, et que les longueurs, masses, temps, et forces sont invariantes lors d'un changement de référentiel. La mécanique du point n'exclut pas la mécanique des points et nous aurons de nombreuses fois l'occasion d'évoquer le comportement de plusieurs corps en présence et d'en définir certaines propriétés comme le centre de masse et la quantité de mouvement.

La plupart des objets étudiés par les physiciens sont en mouvement : depuis les particules élémentaires telles que les électrons, les protons et les neutrons qui constituent les atomes, jusqu'aux galaxies, en passant par les objets usuels et les corps célestes. On ne peut espérer bien comprendre comment fonctionne la nature que si l'on est capable de définir clairement le mouvement et de le mesurer. La branche de la physique qui étudie les mouvements s'appelle la mécanique. L'étude de la mécanique se subdivise en cinématique et dynamique. La cinématique consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement. La dynamique, par contre, s'intéresse à ces causes : les forces.

Ainsi également, étudier les phénomènes physiques qui régissent un de ces domaines permet aussi de comprendre en partie certains phénomènes dans un autre domaine. Le cours qui suit est un cours de Mécanique du Point. Dans un premier temps, chaque objet étudié sera ramené à un point. Ceci suppose que l'objet est rigide et non déformable et que toute la masse est concentrée au centre de gravité de celui-ci. On parle alors de «*point matériel*» de masse m. En électrostatique, on doit aussi considérer que ce point matériel porte une charge q. Cet objet se déplace dans l'espace au cours du temps : il possède une vitesse, une accélération, c'est le domaine de la cinématique. Néanmoins, cette notion de vitesse ou d'accélération est toute relative.

Le point matériel interagit avec d'autres objets par des forces d'interaction gravitationnelle, d'interaction électrostatique, de frottements. Ces forces conduisent à la dynamique du système étudié et donc au mouvement de celui-ci... .

On outre, au cours du mouvement d'un point matériel, l'énergie cinétique du système varie si sa vitesse n'est pas constante. La variation d'énergie cinétique peut-être transformée en un autre type d'énergie : énergie potentielle électrostatique, énergie potentielle de gravitation, chaleur,…

Enfin, nous nous intéresserons à la dynamique des solides indéformables qui nous permettra d'aborder le comportement d'objets plus complexes qu'un point matériel. En particulier, nous justifierons la validité de l'approximation de la mécanique du point.

Chapitre 1

Rappels Mathématiques

Chapitre 1 **Rappels Mathématiques**

1.1 Généralités sur les grandeurs physiques

Une grandeur est une propriété ou qualité que l'on attribue à un corps ou à un phénomène et, à laquelle on peut donner une représentation numérique. On appelle grandeur physique, ou simplement grandeur, toute propriété de la science de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou le calcul.

Exemples : l'intensité d'un courant électrique, la longueur d'un objet...
Cette représentation numérique permet alors l'étude quantitative des phénomènes.

On distingue deux types de grandeurs :
1°) Grandeurs physiques repérables,
2°) Grandeurs physiques mesurables.

1°) Grandeurs physiques repérables :

Une grandeur physique est repérable s'il est possible de définir une relation d'ordre pour chaque couple d'observation une grandeur, sans lui donner des valeurs numériques précises.

Exemples :
Dureté, rigidité diélectrique, viscosité, etc ...

2°) Grandeurs physiques mesurables :

Une grandeur physique est mesurable s'il est possible de définir l'égalité et l'addition de deux grandeurs de ses espèces, et s'il possible aussi de lui associer une valeur numérique.

Il existe deux types de grandeurs mesurables : scalaires et vectorielles :
a°) Grandeurs mesurables scalaires :
Longueur, masse, temps, pression, etc…
b°) Grandeurs mesurables vectorielles :
Vitesse, accélération, force, etc …

Une grandeur est mesurable lorsqu'on sait définir l'égalité et le rapport de deux grandeurs de cette espèce. Ainsi, la température en degré Celsius est repérable mais non mesurable, à la différence de la température en Kelvin.

Pour mesurer une grandeur physique X revient à la comparer à une autre grandeur, de même nature, X_0, pris arbitrairement comme unité, précisément en effectuant leur rapport :

$$m_X = \frac{X}{X_0}, \qquad (1\text{-}1)$$

où X_0 est la grandeur unité.

Un système d'unité est constitué d'unités fondamentales choisies arbitrairement et indépendante de les unes des autres. Celles-ci sont définies par un étalon, conventionnellement choisi, en général pour sa simplicité, sa stabilité et l'universalité de son mode de réalisation.

Toutes les autres unités, dites dérivées, découlent des unités fondamentales à partir de relations de définition.

1.1.1 Systèmes d'unités en physique

Unités de base du système international (S.I. 1960) :

Toutes les grandeurs physiques ont une unité. Sans unité, une grandeur n'a aucun sens. L'ensemble de toutes les unités forme un système cohérent défini à partir de quelques grandeurs fondamentales, et toutes les autres grandeurs ont des unités dérivées. Depuis le lycée, vous utilisez le système international (S.I. ou SI), qui est basé sur les grandeurs suivantes : le mètre m (unité de longueur), le kilogramme kg (unité de masse), la seconde s (unité de temps) et l'ampère A (unité de courant électrique), on l'appelle également le système MKSA.

Dans des domaines particuliers de la physique, il est commun de définir des unités supplémentaires, par exemple, la température «absolue» s'exprime en kelvins (K) en thermodynamique bien qu'elle résulte de l'agitation thermique des molécules et puisse de définir à partir des unités de la mécanique.

En pratique, il n'est pas rare de faire ses mesures (en TP par exemple) avec d'autres unités plus pratiques; le système CGS. (Centimètre, Gramme, Seconde) correspond à la pratique courante.

Le système international d'unités est composé de sept unités de base correspondant aux sept grandeurs de base.

Le problème que posent les unités est celui de l'universalité et de la cohérence, d'où l'intérêt du choix d'un système international qui définit les unités étalonnées de façon identique en tout point du globe.

1°) Le système CGS est fondé sur le Centimètre, le Gramme et la Seconde.
2°) Le système MKSA est basé sur le Mètre, le Kilogramme, la Seconde et l'Ampère. C'est le système précurseur du système international d'unités (SI).
3°) Les unités légales du système international (SI) : Le SI est fondé sur le MKSA à qui on a ajouté le kelvin (K), la mole (mol), la candela (cd), le radian (rd) et le stéradian (sr).

1.1.2 Equations aux dimensions

a°) Définition :

La notion de dimension est essentielle pour contrôler la validité d'une relation. Si la dimension des grandeurs fondamentales s'identifie avec les lettres majuscules indiquées dans la dernière colonne de la table 1-1, la dimension d'une autre grandeur X est notée $[X]$. Celle-ci peut s'exprimer en fonction des dimensions fondamentales, par exemple :

- ☑ une surface est homogène au carré d'une longueur : $[S] = L^2$,
- ☑ une vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps : $[v] = L.T^{-1}$.

L'expression de la dimension d'une grandeur en fonction des dimensions fondamentales est appelée équation aux dimensions.

Les unités fondamentales sont au nombre de sept. Elles sont présentées dans la table suivante avec leur symbole et la dimension associée.

Grandeurs	Unités	Symboles	Dimensions
Longueur	mètre	m	*L*
Masse	kilogramme	kg	*M*
Temps	seconde	s	*T*
Intensité électrique	ampère	A	*I*
Température	kelvin	K	Θ
Intensité lumineuse	candela	Cd	*J*
Quantité de matière	mole	mol	*N*

Tableau 1-1 *Les sept grandeurs fondamentales.*

Il est évidemment impossible de rassembler toutes les grandeurs dérévées physiques avec leurs unités et leurs dimensions. Dans la table suivante nous présentons, à titre d'illustration, quelques grandeurs physiques, a priori déjà connues.

Grandeurs	Unités	Symboles	Dimensions
Vitesse	Mètre(s) par seconde	$m.s^{-1}$	$L.T^{-1}$
Vitesse angulaire	Radian(s) par seconde	$Rad.s^{-1}$	T^{-1}
Accélération	Mètre(s) par seconde carrée	$m.s^{-2}$	$L.T^{-2}$
Fréquence	hertz	Hz	T^{-1}
Masse volumique	Kilogramme par mètre cube	$kg.m^{-3}$	$M.L^{-3}$
Force	Newton	N	$L.M.T^{-2}$
Pression	Pascal	Pa	$L^{-1}.M.T^{-2}$
Energie, travail	Joule	J	$L^2.M.T^{-2}$
Puissance	Watt	W	$L^2.M.T^{-3}$
Résistance électrique	Ohm	Ω	$L^2.M.T^{-3}. A^{-2}$
Conductance électrique	Siemens	S	$L^{-2}.M^{-1}.T^3.A^2$

Tableau 1-2 *Exemples de grandeurs avec leurs unités et leurs dimensions.*

b°) Règles sur les équations aux dimensions :

- ☑ On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension,
- ☑ La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs: $[AB]=[A].[B]$,
- ☑ La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre rationnel sans dimension,
- ☑ Les nombres et les angles sont des grandeurs sans dimension. En particulier, un angle, exprimé en radians, est le rapport de la longueur de l'arc intercepté au rayon du cercle.

C'est bien un nombre sans dimension et indépendant de l'unité de longueur choisie.

- ☑ Le rapport de deux grandeurs de même dimension est sans dimension.
- ☑ Les fonctions mathématiques (cos, sin, tan, exp, ln ...) et leurs arguments sont sans dimension.

Par exemple cos(x) et x sont sans dimensions; [cos(x)]=1, [2π]=1…

- ☑ L'équation aux dimensions de toute grandeur X peut se mettre sous la forme : $[X]=L^a\ M^b\ T^c\ I^d\ J^e\ q^f\ N^g$.

- ☑ Si $\left[X\right]=1$, la grandeur $\left[X\right]$ est dite sans dimension ou de dimension 1.
- ☑ $\left[\dfrac{dx}{dt}\right]=\dfrac{[x]}{[t]}=L.T^{-1}$.

c°) Utilités des équations aux dimensions :

- ☑ La connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur sa nature physique.
- ☑ Utilité de l'équation aux dimensions : elle permet de vérifier la cohérence d'une formule ou d'une relation : comme le système d'unités dérivées est cohérent, il en résulte que :

[1er membre] = [2ème membre]. Chaque membre d'une relation doit évidemment avoir la même dimension.

d°) Homogénéité d'une expression :

On dit qu'une expression est homogène si :

- ☑ tous les termes d'une somme ou d'une différence ont la même dimension. Dans le cas contraire, l'équation est forcément fausse.
- ☑ les deux membres d'une égalité ont la même dimension. L'analyse de l'homogénéité constitue un puissant outil pour détecter une erreur puisqu'une équation non homogène est nécessairement fausse.

À la fin de tout calcul littéral, il faut vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue, en retenant qu'une équation non homogène est toujours fausse mais une équation homogène n'est pas nécessairement juste !!!.

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier l'homogénéité d'une formule littérale. Pour cela on relie aux unités S.I. les diverses grandeurs physiques qui interviennent dans cette formule.

1.2 Calculs d'erreurs et des incertitudes

1.2.1 Introduction

Les physiciens et les chimistes sont constamment amenés à effectuer des mesures de toutes sortes. Dès qu'on mesure une grandeur, on ne peut jamais être sûr du résultat obtenu (certitude au sens mathématique du terme). Une des tâches de l'expérimentateur est de déterminer le domaine dans lequel se trouve la vraie valeur de la grandeur : on dit qu'il exprime la *probabilité d'exactitude de la valeur fournie*.

1.2.2 Erreur absolue

a°) Erreurs : une erreur est toujours en relation avec quelque chose de juste ou considéré comme tel. Il y a deux sortes d'erreurs :

- ☑ L'erreur accidentelle : qu'on élimine simplement en multipliant les opérations (faire 10 pesées au lieu de n'en faire qu'une).
- ☑ L'erreur systématique : est commise sans cesse et se renouvelle (erreur de zéro d'un appareil de mesure). Pour l'éliminer on doit refaire la mesure avec un autre appareil de mesure.

b°) Qualités d'un instrument de mesures :

- ☑ justesse : la valeur indiquée par l'appareil correspond, aux erreurs normales de mesures près, à la valeur réelle de la grandeur mesurée.

- ☑ fidélité : en répétant la même mesure plusieurs fois de suite, dans les mêmes conditions, l'appareil indique chaque fois la même valeur.
- ☑ sensibilité : elle traduit l'aptitude de l'appareil à réagir à la moindre sollicitation; la sensibilité de l'appareil représente la plus petite grandeur mesurable par un déplacement appréciable de l'affichage.

Par définition l'erreur absolue est donnée par : $\delta G = |valeur\ aprochée - valeur\ réelle|$.

1.2.3 Erreur relative

L'erreur relative est le rapport entre l'erreur absolue et la valeur réelle, ainsi donnée en pourcentage.
L'erreur relative est : $\delta G / G = (valeur\ aprochée - valeur\ réelle)/(valeur\ réelle)$.

1.2.4 Calcul des incertitudes

En physique, lors de la plupart des mesures, on ne possède pas de valeur de référence, on ne dispose que des valeurs expérimentales. Nous pouvons quand même estimer l'erreur commise qui dépend des instruments de mesure utilisés.

a°) Incertitude absolue :

Si on désigne par x la valeur la plus probable d'une grandeur G, par x_0 la vraie valeur et par Δx l'incertitude absolue, on a :

$$\mathrm{x} - \Delta \mathrm{x}_0 \le \mathrm{x}_0 \le \mathrm{x} + \Delta \mathrm{x}_0 \qquad (1\text{-}2)$$

que nous pouvons écrire la valeur exacte sous la forme :

$$\mathrm{G} = (\mathrm{x}_0 \pm \Delta x)\, unité. \qquad (1\text{-}3)$$

b°) Incertitude relative : est donnée par $\frac{\Delta x}{x}$ qui est sans unité et exprimée en pourcentage.
L'incertitude relative nous renseigne sur la qualité de la mesure.

Cas d'une addition et soustraction :

On calcule l'incertitude absolue : c'est le principe d'une dérivée simple :
- ☑ si $G = A + B \Rightarrow dG = dA + dB \Rightarrow \Delta G = \Delta A + \Delta B$.
- ☑ si $G = A - B \Rightarrow dG = dA - dB$.
- ☑ $\Delta G = \Delta A + \Delta B$; les erreurs s'ajoutent au pire des cas.

L'incertitude absolue sur une somme ou sur une différence est la somme des incertitudes absolues de chaque terme.

Cas d'une multiplication :

On calcule l'erreur relative : c'est le principe d'une dérivée logarithmique : (dérivée de $\ln \mathrm{G} = \frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{G}}$). si

$\mathrm{G} = \mathrm{A}.\mathrm{B} \Rightarrow \ln \mathrm{G} = \ln \mathrm{A} + \ln \mathrm{B} \Rightarrow \frac{\mathrm{dG}}{\mathrm{G}} = \frac{dA}{A} + \frac{dB}{B}$ alors : $\frac{\Delta G}{\mathrm{G}} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$.

Cas d'un quotient :

☑ si $G = \frac{A.B}{C} \Rightarrow \ln G = \ln A + \ln B - \ln C \Rightarrow \frac{dG}{G} = \frac{dA}{A} + \frac{dB}{B} - \frac{dC}{C}$.

Alors : $\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} + \frac{\Delta C}{C}$; les erreurs s'ajoutent au pire des cas.

L'incertitude relative sur un produit ou un quotient est la somme des incertitudes relatives de chaque terme.

c°) Dérivée partielle :

Si $u(x, y, z)$ une fonction de trois variables, on appelle dérivées partielles par rapport à x, y et à z les expressions : $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ et $u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$.

On appelle différentielle partielles, les expressions : $du_x = \frac{\partial u}{\partial x} dx$, $du_y = \frac{\partial u}{\partial y} dy$ et $du_z = \frac{\partial u}{\partial z} dz$.

d°) Différentielle totale :

La différentielle totale de u est définie par :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz . \tag{1-4}$$

e°) Différentielle logarithmique :

Soit une fonction $u(x, y, z)$. La différentielle logarithmique de u est la différentielle de $\ln u$:

$$d(\ln u) = \frac{du}{u} . \tag{1-5}$$

Cas particulier : $u = a.x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}$.

$$\frac{du}{u} = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} + \gamma \frac{dz}{z} . \tag{1-6}$$

f°) Incertitude absolue sur une mesure indirecte :

Une grandeur u que l'on cherche à déterminer est fonction de plusieurs grandeurs x, y et z. Ces trois grandeurs sont mesurées avec des incertitudes absolus Δx, Δy et Δz. Quelle est l'incertitude relative Δu sur u ?

x, y et z sont mesurées avec des erreurs δx, δy et δz supposées petites devant x, y et z. L'erreur δu sur u peut être confondue avec la différentielle de u.

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \delta z . \tag{1-7}$$

Or $|\delta x| \leq \Delta x$, $|\delta y| \leq \Delta y$ et $|\delta z| \leq \Delta z$.

δx , δy et δz sont indépendantes et de signes quelconques et inconnus.

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\Delta z \,. \tag{1-8}$$

g°) Incertitude relative sur une mesure indirecte :

L'erreur relative sur u est notée $\frac{\delta u}{u}$.

Si les erreurs sont petites, on peut confondre l'erreur relative et la différentielle $\frac{\delta u}{u} = d(\ln u)$.

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{du}{u} = \frac{\partial(\ln u)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\ln u)}{\partial y}dy + \frac{\partial(\ln u)}{\partial z}dz \,. \tag{1-9}$$

D'où l'incertitude relative sur u si x, y et z sont indépendantes :

$$\frac{\Delta u}{u} = \left|\frac{\partial(\ln u)}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial(\ln u)}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial(\ln u)}{\partial z}\right|\Delta z \,. \tag{1-10}$$

Cas intéressant : $u = a.x^{\alpha}.y^{\beta}.z^{\gamma}$

α , β , γ et a sont des constantes parfaitement connues.

$$\frac{\Delta u}{u} = \left|\frac{\alpha}{x}\right|\Delta x + \left|\frac{\beta}{y}\right|\Delta y + \left|\frac{\gamma}{z}\right|\Delta z \,. \tag{1-11}$$

h°) Précision d'une mesure :

L'incertitude relative $\frac{\Delta X}{X}$: c'est la précision sur la mesure.

Dans une manipulation, il s'agit d'apprécier les erreurs absolues commises sur chaque grandeur mesurée et ensuite, à l'aide d'un calcul, de déterminer l'erreur absolue et relative globale.

L'objet de la physique est de découvrir et d'expliquer les lois de la nature.
Grandeur et équation aux dimensions.

1.3 Calculs vectoriels

1.3.1 Grandeur scalaire et vectorielle

a°) Grandeur scalaire : elle est représentée par un nombre suivi d'une unité.

Exemple : la masse d'un corps est $m = 5kg$, la pression en un point de l'espace : $P = 5Pa$.

Remarque : tout nombre réel est un scalaire.

b°) Grandeur vectorielle : Dans ce cas, la grandeur est caractérisée par un vecteur.

Exemples : la vitesse $\vec{v}$, l'accélération $\vec{a}$, la force $\vec{F}$ et le champ électrique $\vec{E}$.

1.3.2 Définition

Un vecteur $\overrightarrow{MN} = \vec{A}$ (figure 1-1) est un segment orienté qui possède:

- ☑ origine M ,
- ☑ vecteur unitaire $\vec{U}$,
- ☑ un module $\left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|$: la longueur du segment MN ,
- ☑ une direction : celle de la droite (MN),
- ☑ un sens : de M vers N .

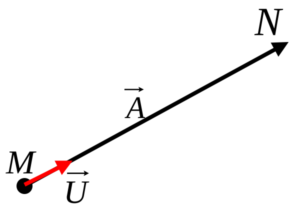


Figure 1-1 *Vecteur* $\overrightarrow{MN} = \vec{A}$.

Remarque : On peut désigner un vecteur par une seule lettre.
Par exemple : $\vec{A} = \overrightarrow{MN}$.

1.3.3 Différents types de vecteurs

Définitions :

- ☑ Vecteur libre: c'est un vecteur dont l'origine est arbitraire,
- ☑ Vecteur lié : c'est un vecteur dont l'origine est fixe,
- ☑ Vecteur glissant : c'est un vecteur qui glisse sur un support,
- ☑ Vecteur unitaire : c'est un vecteur de module l'unité $\vec{U} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$,
- ☑ Vecteurs équipollents : ce sont des vecteurs qui ont même direction, même sens et même module. Ils coïncident à une translation près,
- ☑ Vecteurs opposés : ce sont deux vecteurs de sens contraires. L'opposé de $\vec{V} = -\vec{V}$.

1.3.4 Intensité-module-norme

Une unité de longueur ayant été choisie sur la droite (Δ), support du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on appelle module du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, désigné par $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, la longueur AB. Si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ représente une grandeur physique $\vec{F}$, la mesure, notée $\left\|\vec{F}\right\|$, de cette grandeur avec l'unité adéquate est son intensité.

1.3.5. Produit scalaire

1°) Définition :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, noté $\vec{A}.\vec{B}$, est le scalaire défini par :

$$\vec{A}.\vec{B} = \left\|\vec{A}\right\|.\left\|\vec{B}\right\|.\cos\theta . \tag{1-12}$$

Où θ est l'angle $(\vec{A}, \vec{B})$(voir Figure (1-2)).

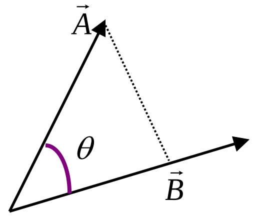


Figure 1-2 *Le produit scalaire de deux vecteurs* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module de l'un par la mesure algébrique de la projection de l'autre sur son droit support.

2°) Forme analytique :

En posant A_x, A_y, A_z et B_x, B_y, B_z les composantes respectives de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$$\vec{A}.\vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right). \quad (1\text{-}13)$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z\,. \quad (1\text{-}14)$$

Sachant que: $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$.

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$.

3°) Propriétés :

Commutativité : $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

Distributivité par rapport à l'addition : $\left(\vec{A} + \vec{B}\right).\vec{C} = \vec{A}.\vec{C} + \vec{B}.\vec{C}$.

Linéarité : $\left(\alpha\vec{A}\right).\left(\beta\vec{B}\right) = (\alpha\beta)\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$ (α et β étant des scalaires).

4°) Condition d'orthogonalité de deux vecteurs :

$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = 0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$.

$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z = 0$.

5°) Applications du produit scalaire en géométrie :

Détermination du cosinus de l'angle entre deux vecteurs $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ et $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$.

Par application du produit scalaire :

$$\cos\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|} = \frac{A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}\,. \quad (1\text{-}15)$$

Relation métrique dans un triangle quelconque (figure 1-2)

Nous avons :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}. \tag{1-16}$$

$$\text{d'où : } \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right). \tag{1-17}$$

$$\text{Donc : } \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right). \tag{1-18}$$

Soit : $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b\cos\theta$.

Remarque : dans le cas d'un triangle rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$.

1.3.6 Produit vectoriel

1°) Définition :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est vecteur $\vec{C}$ défini par $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ (on lit $\vec{A}$ vectoriel $\vec{B}$). Le module du vecteur $\vec{C}$ est donné par la relation:

$$\left\|\vec{C}\right\| = \left\|\vec{A} \wedge \vec{B}\right\| = \left\|\vec{A}\right\|\left\|\vec{B}\right\|.\sin\left(\vec{A},\vec{B}\right). \tag{1-19}$$

Exemple : soient les deux vecteurs $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ et $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ dans la base orthonormée $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On peut déterminer le produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ par trois méthodes de calcul:

Méthode 1 :

Les composantes peuvent aussi être déterminées par le déterminant à trois colonnes :

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \Leftrightarrow \vec{C} = +\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\vec{k}. \tag{1-20}$$

Avec : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - c.b$.

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow \vec{C} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}. \tag{1-21}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}. \tag{1-22}$$

Méthode 2 :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix}. \tag{1-23}$$

$$\Rightarrow \vec{A}\wedge\vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\vec{i} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\vec{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\vec{k}\,. \tag{1-24}$$

Attention !!

- ☑ Le produit vectoriel est un vecteur.
- ☑ Si $\vec{A}\wedge\vec{B}=\vec{0}$ et si les deux vecteurs ne sont pas nuls, alors $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles.
- ☑ Le produit vectoriel est anticommutatif (n'est pas commutatif) c-à-d $\vec{A}\wedge\vec{B}=-\vec{B}\wedge\vec{A}$.
- ☑ Le produit vectoriel n'est pas associatif $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)\neq\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\wedge\vec{C}$.
- ☑ D'après les propriétés du produit vectoriel on a : $\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$ et $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$ et $\vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$.

Ces trois dernières relations se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire.

On aura de même : $\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i}$ et $\vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$.

On peut aussi définir le sens direct par la règle des trois doigts de la main droite.

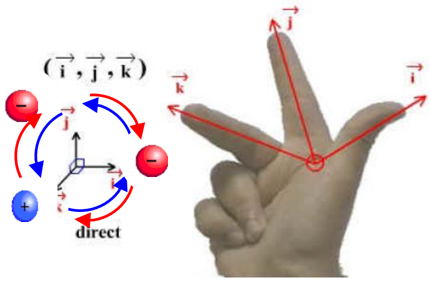


Figure 1-3 *Permutation circulaire et la règle des trois doigts de la main droite pour déterminer le produit vectoriel des vecteurs unitaires.*

Remarque : on appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{A},\vec{B}\,et\,\vec{C}$, une quantité scalaire m égale au produit scalaire du troisième vecteur et du produit vectoriel des deux premiers :

$$m=\vec{C}.(\vec{A}\wedge\vec{B})=\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{1-25}$$

Exemple d'application :

Le moment du vecteur $\vec{A}$ d'origine M par rapport au point O est vecteur noté :

$$\vec{\mu}_{/O}\left(\vec{A}\right)=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{A}. \tag{1-26}$$

1.3.7 Notion de champ

Définition :

1°) Champ de vecteurs :

Si une grandeur vectorielle varie d'un point à un autre de l'espace, on parle alors de fonction vectorielle ou champ de vecteurs.

Exemple : $\vec{F}\left(x,y,z\right)=xy^2\vec{i}-2yz^3\vec{j}+x^2z\vec{k}$.

2°) Champ de scalaires :

Si une grandeur scalaire varie d'un point à un autre de l'espace on parle alors de fonction scalaire ou champ de scalaires.

Exemple : $\Phi(x, y, z) = x^3 y - z^2$, champ de potentiels.

Dérivées d'une fonction vectorielle à partir d'une variable scalaire :

Soit $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$ une fonction vectorielle de la variable scalaire t.
Si $A_x(t)$, $A_y(t)$ et $A_z(t)$ sont des fonctions dérivables en t.
La dérivée de $\vec{A}(t)$ par rapport à t est :

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z(t)}{dt}\vec{k}. \qquad (1\text{-}27)$$

Les vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont supposées indépendants de t.

Intégrale des fonctions vectorielles d'une variable scalaire :

Soit $\vec{A}(t) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$ une fonction vectorielle de t.
On définie un intégrale indéfinie de $\vec{A}(t)$ par :

$$\int \vec{A}(t)dt = \vec{i}\int A_x(t)dt + \vec{j}\int A_y(t)dt + \vec{k}\int A_z(t). \qquad (1\text{-}28)$$

Il existe un vecteur $\vec{W}(t)$ tel que :

$$\frac{d\vec{W}(t)}{dt} = \vec{A}(t). \qquad (1\text{-}29)$$

On aura donc :

$$\int \vec{A}(t)dt = \vec{W}(t) + \vec{C}. \qquad (1\text{-}30)$$

Où $\vec{C}$ est un vecteur constant par rapport à la variable t.
On appelle de même intégrale :

$$\int_a^b \vec{A}(t)dt = \vec{W}(b) - \vec{W}(a). \qquad (1\text{-}31)$$

L'intégrale définie entre les bornes : $t = a$ et $t = b$.

1.3.8 Opérateurs sur les champs

a°) Opérateur vectoriel « Nabla » :

Dans un repère cartésien orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'opérateur vectoriel Nabla noté par $\vec{\nabla}$ est donnée par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \tag{1-32}$$

Cet opérateur possède des propriétés analogues à celles des vecteurs ordinaires. Il est utile pour définir la divergence, le gradient et le rotationnel.

b°) Gradient :

Le gradient d'un champ scalaire ou d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ est donnée par :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}. \tag{1-33}$$

c°) Divergence :

La divergence d'un champ de vecteur $\vec{A}(x, y, z) = A_x\vec{i} + A_x\vec{j} + A_x\vec{k}$ est donnée par le produit scalaire $\vec{\nabla}.\vec{A}$ et notée :

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{1-34}$$

$\vec{\nabla}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{\nabla}$ et $\vec{\nabla}.\vec{V}$ analogue à $\vec{A}.\vec{B}$.

d°) Rotationnel :

Le rotationnel d'un vecteur est un vecteur.

On définie le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}(x, y, z) = A_x\vec{i} + A_x\vec{j} + A_x\vec{k}$ par :

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \Rightarrow \overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{1-35}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{1-36}$$

1.4 Exercices

Exercice 1 :

La force de Lorentz pour un point matériel d'une masse m, de charge électrique q soumise à un champ magnétique B et animé d'une vitesse v, est exprimée par la relation suivante : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.
Lorsque $\vec{v} \wedge \vec{B}$, une relation peut être déduire pour exprimer la vitesse angulaire ω du point en fonction des autres paramètres, de la forme : $\omega = k.m^{\alpha}.q^{\beta}.B^{\gamma}$, k est une constante.

La vitesse angulaire ω peut être exprimée en fonction de la période T_0 : $\omega = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

En connaissant les unités de base de la force F, déterminer l'équation aux dimensions de B en fonction de M, T, et I.
Déterminer les constantes α, β et γ.

Exercice 2 :

L'énergie cinétique d'un corps est donnée par : $E_C = k.m^{\alpha}.v^{\beta}$, avec k constante, m est la masse du corps et v sa vitesse de déplacement.
Déterminer les constantes α et β en utilisant les équations aux dimensions.

Exercice 3 :

Déterminer la dimension des deux paramètres α et β qui apparaissent dans la loi : $F = \alpha.m.v + \beta.v^2$.
Où m s'exprime en kg, v en m/s.

Exercice 4 :

La vitesse d'un corps est donnée par : $v = \sqrt{8.\gamma^{\alpha}.l^{\beta}}$, où γ est l'accélération du corps et l la longueur parcourue par le corps.
Déterminer les constantes α et β en utilisant les équations aux dimensions.

Exercice 5 :

La période d'un pendule de torsion est donnée par : $T = k.\left(J^{\alpha}.c^{\beta}\right)$.
Déterminer les constantes α et β en utilisant les équations aux dimensions.

Exercice 6 :

Déterminer la dimension de la constante de raideur k de l'expression $F = k.x$, où x est une élongation.

1°) Vérifier l'homogénéité de l'expression suivante : $v = \sqrt{\dfrac{k.x^2}{m}}$.

Exercice 7 :

1°) Déterminer l'incertitude relative de G, avec $G = \dfrac{A^n.B^m}{C}$.

2°) Déterminer l'incertitude relative de G, avec $G = \dfrac{L^2}{T^2}\cos\theta$.

Exercice 8 :

Calculer la valeur exacte de l'énergie cinétique sachant que : $k = \frac{1}{2}$, $m = (9{,}5 \pm 1{,}8)kg$ et $v = (7{,}35 \pm 0{,}23)m/s$.

Exercice 9 :

Calculer la valeur exacte de la vitesse d'une bille métallique $v = \sqrt{g.h}$, sachant que : les valeurs exactes de l'accélération de la pesanteur $g = (9{,}81 \pm 0{,}09)m.s^{-2}$ et de l'hauteur de chute libre d'une bille métallique $h = (0{,}99 \pm 0{,}01)m$.

Exercice 10 :

Calculer l'incertitude absolue de la période de torsion d'un fil sachant que : les valeurs exactes du moment d'inertie de la tige est $J = (10 \pm 1).10^{-3}kg.m^2$ et la constante de torsion d'un fil c est $c = (0{,}35 \pm 0{,}01)N.m.rad^{-1}$.

Exercice 11 :

L'accélération d'une particule à tout instant $t \geq 0$ est donnée par :

$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\cos(2t)\vec{i} - 8\sin(2t)\vec{j} + 4t.\vec{k}$ si la vitesse initiale est nulle; $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$.

Trouver le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$?

Exercice 12 :

Soit la fonction vectorielle : $\vec{A}(t) = \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}$.

Trouver $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2}$.

Exercice 13 :

Soit $\varphi(x, y, z) = 2.x^2.y.z^4$.

Calculer $\overrightarrow{grad}(\varphi)$.

Exercice 14 :

Soit $\vec{A}(x, y, z) = (x.y)\vec{i} + (z)\vec{j} - (x.z^2)\vec{k}$

Calculer $div\vec{A}$,

Calculer $\overrightarrow{Rot}(\vec{A})$.

1.5 Solutions

Exercice 1 :

L'équation aux dimensions de B est :

On a : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \Leftrightarrow F = q.v.B$.

$$\Leftrightarrow F = q.v.B.$$

$$\Rightarrow B = \frac{F}{q.v} \ ;$$

$\Leftrightarrow [B] = \dfrac{[F]}{[q].[v]}$, est l'équation aux dimensions de B.

Dimension de B :

$[B] = \dfrac{[F]}{[q].[v]} = \dfrac{[m][a].[t]}{[I].[t].[x]}$, avec : $F = m.a$, $q = I.t$ et $v = \dfrac{x}{t}$.

Alors : $[B] = \dfrac{M.L.T^{-2}.T}{I.T.L} = \dfrac{M.T^{-2}}{I}$, donc : $[B] = M.T^{-2}.I^{-1}$.

Les valeurs des constantes α, β et γ :

On a : $\omega = k.m^{\alpha}.q^{\beta}.B^{\gamma}$.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, pour déterminer les valeurs des constantes α, β et γ :
L'équation aux dimensions de la vitesse angulaire ω est :

$$\omega = k.m^{\alpha}.q^{\beta}.B^{\gamma} \Leftrightarrow [\omega] = [k].[m]^{\alpha}.[q]^{\beta}.[B]^{\gamma}.$$

D'autre part :

$$\left[\begin{array}{l} [\omega] = \dfrac{[2.\pi]}{[T_0]} = T^{-1} \\ [k] = 1 \\ [m] = M \\ [q] = [I].[t] = I.T \\ [B] = M.T^{-2}.I^{-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} [\omega] = \dfrac{[2.\pi]}{[T_0]} = T^{-1} \\ [k] = 1 \\ [m]^{\alpha} = M^{\alpha} \\ [q]^{\beta} = [I].[t] = I^{\beta}.T^{\beta} \\ [B]^{\gamma} = M^{\gamma}.T^{-2\gamma}.I^{-\gamma} \end{array}\right. .$$

Par identification :

$$[\omega] = [k].[m]^{\alpha}.[q]^{\beta}.[B]^{\gamma} \Leftrightarrow T^{-1} = M^{\alpha}.I^{\beta}.T^{\beta}.M^{\gamma}.T^{-2\gamma}.I^{-\gamma}.$$

$$\Leftrightarrow T^{-1} = M^{\alpha+\gamma}.I^{\beta-\gamma}.T^{\beta-2\gamma}.$$

Alors:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{array}\right. , \quad \text{d'où : } \alpha = -1 \text{ et } \beta = \gamma = 1.$$

Donc l'expression de la vitesse angulaire ω est : $\omega = k.\dfrac{q.B}{m}$.

Exercice 2 :

Les valeurs des constantes α et β :

On a : $E_C = k.m^{\alpha}.v^{\beta}$.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, pour déterminer les valeurs des constantes α et β.

L'équation aux dimensions de E_C est : $[E_C] = [k].[m^{\alpha}].[v^{\beta}] = [k].[m]^{\alpha}.[v]^{\beta}$.

D'autre part :

$$\begin{cases} [E_C] = M.L^2.T^2 \\ [k] = 1 \\ [m] = M \Leftrightarrow [m]^{\alpha} = M^{\alpha} \\ [v] = L.T^{-1} \Leftrightarrow [v]^{\beta} = L^{\beta}.T^{-\beta} \end{cases}$$

, autrement dit : $E_C = W = F.d \Leftrightarrow [E_C] = M.L^2.T^2$.

D'où : $M.L^2.T^2 = M^{\alpha}.L^{\beta}.T^{-\beta}$.

Alors, par identification: D'où : $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

Donc l'expression de l'énergie cinétique est : $E_C = \frac{1}{2}.m.v^2$.

Exercice 3 :

Les valeurs des constantes α et β :

On a la loi : $F = \alpha.m.v + \beta.v^2$.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, pour déterminer les valeurs des constantes α et β.

L'équation aux dimensions de F est : $F = \alpha.m.v + \beta.v^2 \Leftrightarrow [F] = [\alpha].[m].[v] = [\beta].[v]^2$.

D'autre part :

$$\begin{cases} [F] = [m].[a] = M.L.T^{-2} \\ [\alpha] = ? \\ [v] = L.T^{-1} \Leftrightarrow [v]^2 = L^2.T^{-2}, \\ [\beta] = ? \end{cases}$$

D'où : $[F] = [\alpha].[m].[v] = [\beta].[v]^2 \Leftrightarrow M.L.T^{-2} = [\alpha].M.L.T^{-1} = [\beta].L^2.T^{-2}$.

Alors, par identification :

$$\begin{cases} [\alpha] = T^{-1} \\ [\beta] = M.L^{-1} \end{cases} ;$$

Donc : $[\alpha] = T^{-1}$ et $[\beta] = M.L^{-1}$.

Exercice 4 :

Les valeurs des constantes α et β :

On a : $v = \sqrt{8\gamma^{\alpha} l^{\beta}}$.

En utilisant l'analyse dimensionnelle, pour déterminer les valeurs des constantes α et β.

L'équation aux dimensions de v est :

$$v=\sqrt{8.\gamma^{\alpha}.l^{\beta}} \Leftrightarrow [v]=[8]^{\frac{1}{2}}[\gamma^{\alpha}]^{\frac{1}{2}}.[l^{\beta}]^{\frac{1}{2}}=[8]^{\frac{1}{2}}[\gamma]^{\frac{\alpha}{2}}.[l]^{\frac{\beta}{2}}.$$

D'autre part :

$$\begin{cases} [v]=L.T^{-1} \\ [8]=1 \\ [\gamma]=L.T^{-2} \Leftrightarrow [\gamma]^{\frac{\alpha}{2}}=L^{\frac{\alpha}{2}}.T^{-\alpha} \\ [l]=L \Leftrightarrow [l]^{\frac{\beta}{2}}=L^{\frac{\beta}{2}} \end{cases}$$, autrement dit : $v=\dfrac{x}{t} \Leftrightarrow [v]=L.T^{-1}$.

D'où : $[v]=[8]^{\frac{1}{2}}[\gamma^{\alpha}]^{\frac{1}{2}}.[l^{\beta}]^{\frac{1}{2}}=[8]^{\frac{1}{2}}[\gamma]^{\frac{\alpha}{2}}.[l]^{\frac{\beta}{2}} \Leftrightarrow L.T^{-1}=1.L^{\frac{\alpha}{2}}.T^{-\alpha}.L^{\frac{\beta}{2}}$.

$$\Leftrightarrow L.T^{-1}=L^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.T^{-\alpha}.$$

Alors, par identification :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta}{2}=1 \\ -\alpha=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases}$$

D'où : $\alpha=1$ et $\beta=1$.

Donc l'expression de la vitesse est : $v=\sqrt{8.\gamma.l}$.

Exercice 5 :

On a la période d'un pendule de torsion est donnée par : $T=k.(J^{\alpha}.c^{\beta})$.
En utilisant l'analyse dimensionnelle, pour déterminer les valeurs des constantes α et β.

$$T=k.(J^{\alpha}.c^{\beta}) \Leftrightarrow [T]=[k][J]^{\alpha}.[c]^{\beta}.$$

D'autre part :

$$\begin{cases} [T]=T \\ [k]=1;\text{constante} \\ [J]=[m][d^2]=M.L^2 \Leftrightarrow [J]^{\alpha}=M^{\alpha}.L^{2\alpha} \\ [c]=[F][d][\theta]^{-1} \Leftrightarrow [c]^{\beta}=[m]^{\beta}.[\gamma]^{\beta}[d]^{\beta}.[\theta]^{-\beta} \end{cases}$$, autrement dit : $J=m.d^2$ et $c=\dfrac{F.d}{\theta}$.

Avec : θ est angle de torsion d'un fil,
γ est l'accélération,
m est la masse.

$[c]^{\beta}=M^{\beta}.L^{\beta}.T^{-2\beta}.L^{\beta}.1^{-\beta}$; $[\theta]=1$ sans dimension.
D'où : $[T]=[k][J]^{\alpha}.[c]^{\beta} \Leftrightarrow T=1.M^{\alpha}.L^{2\alpha}.M^{\beta}.L^{\beta}.T^{-2\beta}.L^{\beta}.1^{-\beta}$.

$$\Leftrightarrow T=M^{\alpha+\beta}.L^{2(\alpha+\beta)}.T^{-2\beta}.$$

Alors, par identification :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2(\alpha + \beta) = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

D'où : $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = -\dfrac{1}{2}$.

Donc l'expression de la vitesse est : $T = k\sqrt{\dfrac{J}{c}}$.

Où k est une constante exprimée expérimentalement par 2π, d'où $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{c}}$.

Exercice 6 :

1°) Dimension de la constante de raideur k :
On a : $F = k.x$.

D'où : $F = k.x \Rightarrow k = \dfrac{F}{x}$,

$\Rightarrow k = F.x^{-1}$.

$k = F.x^{-1} \Leftrightarrow [k] = [F].[x^{-1}]$,

$\Leftrightarrow [k] = [m][\gamma].[x]^{-1}$,

$\Leftrightarrow [k] = M.L.T^{-2}.L^{-1}$,

Donc : $[k] = M.T^{-2}$.

2°) Homogénéité de l'expression suivante : $v = \sqrt{\dfrac{k.x^2}{m}}$.

On a : $v = \sqrt{\dfrac{k.x^2}{m}} \Leftrightarrow v^2 = \dfrac{k.x^2}{m}$.

Pour que l'expression si les deux membres d'une égalité ont la même dimension.

$$\begin{cases} [v] = L.T^{-1} \Leftrightarrow [v]^2 = L^2.T^{-2} \\ [k] = M.T^{-2} \\ [x] = L \\ [m] = M \end{cases}.$$

Alors : $\dfrac{[k][.x]^2}{[m]} = L^2.T^{-2}$.

$[v]^2 = \dfrac{[k].[x]^2}{[m]} \Leftrightarrow L^2.T^{-2} = L^2.T^{-2}$.

Donc : l'expression $v = \sqrt{\dfrac{k.x^2}{m}}$ est homogène.

Exercice 7 :

1°) Incertitude relative de G :

On a : $G = \dfrac{A^n . B^m}{C}$.

Nous pouvons aussi utiliser la méthode des logarithmes :
On prend le logarithme de G :

$$\ln G = \ln(A^n) + \ln(B^m) - \ln(C) \Rightarrow \ln G = n\ln(A) + m\ln(B) - \ln(C).$$

En passant aux différentiels : $\dfrac{dG}{G} = n\dfrac{dA}{A} + m\dfrac{dB}{B} - \dfrac{dC}{C}$.

Et enfin, l'incertitude relative est donnée par : $\dfrac{\Delta G}{G} = |n|\dfrac{\Delta A}{A} + |m|\dfrac{\Delta B}{B} + \dfrac{\Delta C}{C}$.

2°) Incertitude relative de G :

On a : $G = \dfrac{L^2}{T^2}\cos\theta$.

$\ln G = 2\ln L - 2\ln T + \ln(\cos\theta)$.

En passant aux différentiels :

$$\frac{dG}{G} = 2\frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T} + \frac{d(\cos\theta)}{\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{dG}{G} = 2\frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta.$$

Et enfin l'incertitude relative est donnée par : $\dfrac{\Delta G}{G} = 2\left(\dfrac{\Delta L}{L} + \dfrac{\Delta T}{T}\right) + |tg\theta|\Delta\theta$.

Exercice 8 :

Calcule de la valeur exacte de E_C :

On utilise la méthode logarithmique pour déterminer l'incertitude absolue :
1°) Fonction logarithmique :

nous avons :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \ln(E_C) = \ln\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

$$\Leftrightarrow \ln(E_C) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(m) + \ln(v^2).$$

$$\Leftrightarrow \ln(E_C) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(m) + 2\ln(v).$$

2°) Différentielle logarithmique : $(\ln(x))' = \dfrac{dx}{x}$.

D'où la différentielle logarithmique de E_C est : $\dfrac{dE_C}{E_C} = \dfrac{d\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + \dfrac{d(m)}{m} + 2\dfrac{d(v)}{v}$; $\left[\dfrac{d\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right] = 0$.

3°) Valeur absolue ou la relation relative : $\Delta x \leq |dx|$.

D'où l'incertitude relative de E_C est : $\dfrac{\Delta E_C}{E_C} = \dfrac{\Delta m}{m} + 2\dfrac{\Delta v}{v}$.

Alors l'incertitude absolue de E_C est : $$\Delta E_C = E_C.\left(\frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta v}{v}\right).$$

Application numérique : $E_C = \frac{1}{2}(9{,}5).(7{,}35)^2 = 256{,}60 \cong 257 kg.m^2/s^2 = 257 J$.

$$\Delta E_C = 257\left(\frac{1{,}8}{9{,}5} + 2\frac{0{,}23}{7{,}35}\right) = 65 kg.m^2/s^2 = 65 J .$$

Donc la valeur exacte de E_C : $E_C = (257 \pm 65) kg.m^2/s^2 = (257 \pm 65) J$.

Exercice 9 :

Calcule de la valeur exacte de v :
On utilise la méthode logarithmique pour déterminer l'incertitude absolue :
1°) Fonction logarithmique :

nous avons : $$v = \sqrt{g.h} \Leftrightarrow \ln(v) = \ln(g.h)^{\frac{1}{2}}.$$
$$\Leftrightarrow \ln(v) = \frac{1}{2}\ln(g.h).$$
$$\Leftrightarrow \ln(v) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(g) + \ln(h).$$

2°) Différentielle logarithmique : $(\ln(x))' = \frac{dx}{x}$.

D'où la différentielle logarithmique de v est : $$\frac{dv}{v} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + \frac{d(g)}{g} + \frac{d(h)}{h} \; ; \; \left[\frac{d\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right] = 0 .$$

3°) Valeur absolue ou la relation relative : $\Delta x \leq |dx|$.

D'où l'incertitude relative de v est : $$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Alors l'incertitude absolue de v est : $$\Delta v = v.\left(\frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta h}{h}\right).$$

Application numérique : $v = \sqrt{g.h} = \sqrt{9{,}81 \times 0{,}99} = 3{,}116 m/s$.

$$\Delta v = 3{,}116\left(\frac{0{,}09}{9{,}81} + \frac{0{,}01}{0{,}99}\right) = 0{,}059 m/s .$$

Donc la valeur exacte de v : $v = (3{,}116 \pm 0{,}059) m/s$.

Exercice 10 :

Calcul de l'incertitude absolue de la période de torsion d'un fil :
On a : $J = (10 \pm 1).10^{-3} kg.m^2$ et $c = (0{,}35 \pm 0{,}01) N.m.rad^{-1}$.
1°) En utilisant la méthode logarithmique :

La période d'un pendule de torsion est défini par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}} \Leftrightarrow \ln(T) = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}\right).$$

$$\Leftrightarrow \ln(T) = \ln(2\pi) + \ln\left(\sqrt{\frac{J}{c}}\right).$$

$$\Leftrightarrow \ln(T) = \ln(2\pi) + \ln\left(\frac{J}{c}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \ln(T) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2}.\ln\left(\frac{J}{c}\right).$$

$$\Leftrightarrow \ln(T) = \ln(2\pi) + \frac{1}{2}.[\ln(J) - \ln(c)].$$

2°) En utilisant la différentielle logarithmique :

$$\frac{dT}{T} = \frac{d(2\pi)}{2\pi} + \frac{1}{2}\left(\frac{dJ}{J} - \frac{dc}{c}\right) \Leftrightarrow \frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dJ}{J} - \frac{dc}{c}\right); \qquad \frac{d(2\pi)}{2\pi} = 0.$$

3°) En utilisant la relation relative (valeur absolue) :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dJ}{J} - \frac{dc}{c}\right) \Leftrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta c}{c}\right).$$

$\Rightarrow \Delta T = \frac{T}{2}\left(\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta c}{c}\right)$, est l'expression de l'incertitude absolue de la période d'un pendule de torsion.

Application numérique :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-2}}{0{,}35}} = 1.06 \text{ s.}$$

Alors : $\Delta T = \frac{1{,}06}{2}\left(\frac{10^{-3}}{10^{-2}} + \frac{10^{-2}}{0{,}35}\right) = 0{,}06$ s.

Donc l'incertitude absolue de la période de torsion est: $\Delta T = 0{,}06$ s.

Exercice 11 :

On a : $\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\cos(2t)\vec{i} - 8\sin(2t)\vec{j} + 4t.\vec{k}$ et $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$.

Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$:

Le vecteur d'accélération est défini par la dérivée de vecteur vitesse par unité de temps : $\vec{\gamma}(t)=\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$.

$$\vec{\gamma}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\Rightarrow d\vec{v}(t)=\vec{\gamma}(t).dt\,.$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t)=\int_0^t \vec{\gamma}(t)dt\,.$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{v}(0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t)=\int_0^t \left[2.\cos(2t)\vec{i}-8\sin(2t)\vec{j}+4t.\vec{k}\right]dt\,.$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t)-\vec{v}(0)=\sin(2t).\vec{i}+4\cos(2t).\vec{j}+2t^2.\vec{k}\,.$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t)=\sin(2t).\vec{i}+4\cos(2t).\vec{j}+2t^2.\vec{k}\,.$$

Exercice 12 :

On a : $\vec{A}(t)=\cos(\omega t)\vec{i}+\sin(\omega t)\vec{j}$.

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\cos(\omega t)\vec{i}+\sin(\omega t)\vec{j}\right]\Leftrightarrow \frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\cos(\omega t)\vec{i}\right]+\frac{d}{dt}\left[\sin(\omega t)\vec{j}\right].$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{A}(t)}{dt}=-\omega.\sin(\omega t)\vec{i}+\omega.\cos(\omega t)\vec{j}\,.$$

$$\frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left[-\omega.\sin(\omega t)\vec{i}+\omega.\cos(\omega t)\vec{j}\right]\Leftrightarrow \frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2}=-\omega^2\vec{A}(t).$$

Exercice 13 :

$$\overrightarrow{grad}(\varphi)=\vec{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}=\left(\frac{\partial(2.x^2.y.z^4)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial(2.x^2.y.z^4)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial(2.x^2.y.z^4)}{\partial z}\vec{k}\right).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{grad}(\varphi)=(4.x.y.z^4)\vec{i}+(2.x^2.z^4)\vec{j}+(8.x^2.y.z^3)\vec{k}\,.$$

Exercice 14 :

$div\vec{A}=?$

$$div\vec{A}=\vec{\nabla}.\vec{A}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x.y\\ z\\ -x.z^2\end{pmatrix}=\frac{\partial(x.y)}{\partial x}+\frac{\partial(z)}{\partial y}+\frac{\partial(-x.z^2)}{\partial z}=y+0-2.x.z\,.$$

$\Rightarrow\ div\vec{A}=y-2.x.z\,.$

$\overrightarrow{Rot}(\vec{A})=?$

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x.y\\ z\\ -x.z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\left(-x.z^2\right)}{\partial y}-\dfrac{\partial(z)}{\partial z}\\ \dfrac{\partial(x.y)}{\partial z}-\dfrac{\partial\left(-x.z^2\right)}{\partial x}\\ \dfrac{\partial(z)}{\partial x}-\dfrac{\partial(x.y)}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1\\ 0-\left(-z^2\right)\\ 0-(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ +z^2\\ -x\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{Rot}\left(\vec{A}\right)=-\vec{i}+z^2\,\vec{j}-x.\vec{k}\,.$$

Chapitre 2

Cinématique du Point

Chapitre 2 **Cinématique du Point**

Ce chapitre est une partie de la «mécanique» : étude du mouvement et de l'équilibre des corps en relation avec les actions exercées sur eux par le «monde extérieur».

Cette étude se découpe en deux : cinématique et dynamique.

La cinématique vise à décrire les mouvements (trajectoire d'un mobile, équation horaire, vitesse, accélération etc.) sans se préoccuper des causes qui les provoquent.

La Mécanique peut être divisée en plusieurs branches :

- ☑ la cinématique (du grec kinhma «kinéma» signifiant mouvement) qui vise à décrire les mouvements sans en chercher les causes;
- ☑ la dynamique (du grec dunamic «dynamis» signifiant force) qui cherche à établir un lien entre les mouvements et les causes qui les engendrent.

D'autres branches de la mécanique peuvent aussi être envisagées :

- ☑ la statique ou l'étude des équilibres des systèmes : cette partie est implicitement incluse dans l'analyse de la dynamique en considérant que vitesse et accélération ou toute autre quantité dynamique sont nulles.
- ☑ la cinétique ou l'étude descriptive d'un système matériel en mouvement : cette partie doit souvent être antérieure à tout autre aspect de la mécanique. Il s'agit de définir les quantités qui vont permettre de décrire le mouvement comme la quantité de mouvement ou le moment cinétique par exemple.

On appelle un point matériel, une particule matérielle dont les dimensions sont négligeables dans les conditions du problème considéré. La différence par rapport au point géométrique, réside en le fait que le point matériel est supposé contenir une certaine quantité de matière concentrée. Un point matériel jouit donc de la propriété d'inertie, et d'interactions avec d'autres points matériels.

2.1 Mouvement rectiligne

2.1.1 Mouvement rectiligne uniforme

a°) Définition : un point matériel M est en mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et sa vitesse constante (donc sa accélération nulle).

b°) Equation horaire : on choisit l'axe (Ox) comme repère rectiligne et on fixe la condition initiale à $t = 0s$; $x = x_0$ (l'abscisse initiale).

Grâce à une intégration on arrive à exprimer l'abscisse x en fonction du temps:
On a l'expression de la vitesse définie par :

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx(t) = v(t)dt\,. \qquad \text{(2-1)}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx(t) = \int_0^t v(t)dt \,. \qquad (2\text{-}2)$$

$$\Rightarrow x(t)\Big|_{x_0}^{x(t)} = v(t)t\Big|_0^t \,. \qquad (2\text{-}3)$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = v(t)t = v_0 t \,. \qquad (2\text{-}4)$$

$$\Rightarrow x(t) = v(t)t + x_0 = v_0 t + x_0 \,. \qquad (2\text{-}5)$$

Dans une dernière étape on obtient l'équation horaire du mouvement qui est une fonction du premier degré :

$$x(t) = v_0 t + x_0 \,. \qquad (2\text{-}6)$$

On appelle $x(t)$ l'abscisse instantanée, et x_0 l'abscisse initiale.

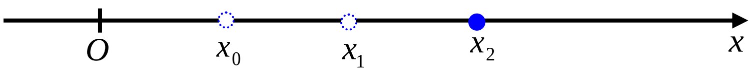


Figure 2-1 *Repère rectiligne.*

c°) Diagrammes du mouvement :

Les diagrammes du mouvement rectiligne uniforme sont la représentation graphique du déplacement, de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps (voir figure 2-2).

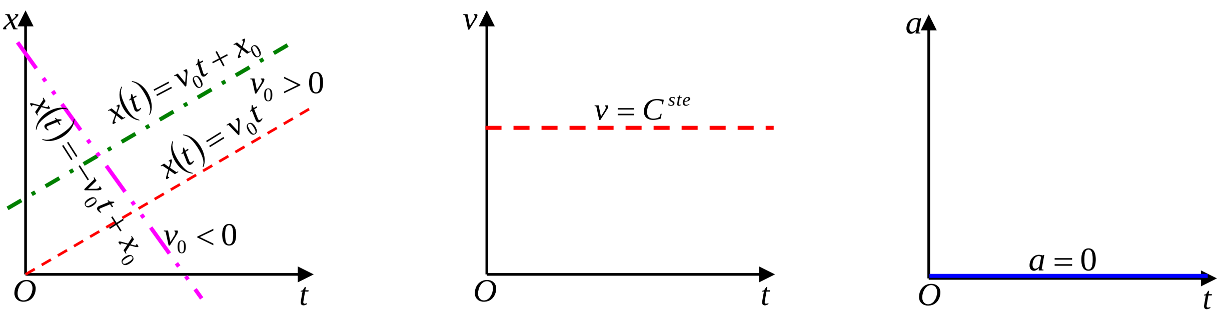


Figure 2-2 *Diagrammes du mouvement.*

2.1.2 Mouvement rectiligne uniformément varié

a°) Définition : un point matériel M est en mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son accélération est constante.

b°) Equation horaire de la vitesse : en considérant les conditions initiales à $t = 0s$; $v = v_0$ (vitesse initiale).

Par intégration en peut écrire :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a(t)dt \,. \qquad (2\text{-}7)$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv(t) = \int_0^t a(t)dt \,. \qquad (2\text{-}8)$$

$$\Rightarrow v(t)\Big|_{v_0}^{v(t)} = a(t)t\Big|_0^t \ . \tag{2-9}$$

$$\Rightarrow v(t) - v_0 = a(t)t = at \ . \tag{2-10}$$

$$\Rightarrow v(t) = at + v_0 \ . \tag{2-11}$$

Dans une dernière étape on obtient l'équation instantanée de la vitesse qui est une fonction du premier degré :

$$v(t) = at + v_0 \ . \tag{2-12}$$

c°) Equation horaire du mouvement : si on prend la condition initiale à $t = 0s$; $x = x_0$ (l'abscisse initiale).

Par intégration on a :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = at + v_0 \Rightarrow dx(t) = v(t)dt \ . \tag{2-13}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx(t) = \int_0^t (at + v_0)dt \ . \tag{2-14}$$

$$\Rightarrow x(t)\Big|_{x_0}^{x(t)} = \left(\frac{1}{2}at^2 + v_0 t\right)\Bigg|_0^t \ . \tag{2-15}$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \ . \tag{2-16}$$

L'équation horaire du mouvement est donc :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \ . \tag{2-17}$$

Dans une dernière étape on obtient l'équation horaire du mouvement qui est une fonction du second degré :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \ . \tag{2-18}$$

d°) Diagrammes du mouvement :

La figure (2-3) montre les diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié du déplacement, de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps.

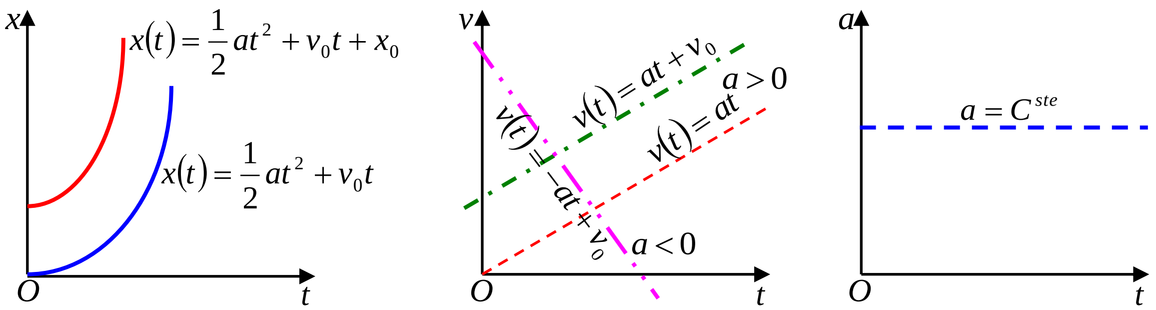


Figure 2-3 *Diagrammes du mouvement rectiligne uniformément varié.*

Remarque :

Le mouvement rectiligne est accéléré si $a.v \rangle 0$ et il est retardé $a.v \langle 0$.

e°) Relation entre position x , vitesse v et l'accélération a :

On a :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a(t)dt \,. \qquad (2\text{-}19)$$

On multiplie chaque membre par v , alors :

$$vdv(t) = va(t)dt \;\Rightarrow vdv(t) = a(t)dx \,, \qquad (2\text{-}20)$$

Avec : $vdt = dx$.

On intègre de chaque côté :

$$\int_{v_0}^{v} vdv(t) = \int_{x_0}^{x} a(t)dx = \int_{x_0}^{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = a\left(x - x_0\right). \qquad (2\text{-}21)$$

On en déduit la relation suivante :

$$\left(v^2 - v_0^2\right) = 2a\left(x - x_0\right). \qquad (2\text{-}22)$$

g°) Distances parcourus pendant des intervalles de temps successifs égaux :

Soit un mobile en mouvement rectiligne uniformément varié. Son élongation à un instant t quelconque a pour équation :

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \,. \qquad (2\text{-}23)$$

A l'instant $t + \theta$ l'équation horaire de l'élongation du mobile s'écrit :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a(t+\theta)^2 + v_0(t+\theta) + x_0 \,. \qquad (2\text{-}24)$$

A l'instant $t + 2\theta$ l'équation horaire de l'élongation du mobile s'écrit :

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a(t+2\theta)^2 + v_0(t+2\theta) + x_0 \,. \qquad (2\text{-}25)$$

A l'instant $t + 3\theta$ l'équation horaire de l'élongation du mobile s'écrit :

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a(t+3\theta)^2 + v_0(t+3\theta) + x_0 \,. \qquad (2\text{-}26)$$

Ainsi de suit, à l'instant $t+n\theta$ on a :

$$x_2(t)=\frac{1}{2}a(t+n\theta)^2+v_0(t+n\theta)+x_0 . \tag{2-27}$$

On pose $e_1=x_1-x$, $e_2=x_2-x_1$, $e_3=x_3-x_2$, …, $e_n=x_n-x_{n-1}$ les distances respectifs parcourus entre les instants t et $t+\theta$, $t+\theta$ et $t+2\theta$, $t+2\theta$ et $t+3\theta$,…, $t+(n-1)\theta$ et $t+n\theta$ c'est-à-dire les distances parcourus pendant les intervalles successifs [$(t+\theta)-t=\theta$], [$(t+2\theta)-(t+\theta)=\theta$], [$(t+3\theta)-(t+2\theta)=\theta$], …, [$(t+n\theta)-(t+(n-1)\theta)=\theta$].

Il vient :

$$e_1=x_1-x=at\theta+\frac{1}{2}a\theta^2 , \tag{2-28}$$

$$e_2=x_2-x_1=at\theta+\frac{3}{2}a\theta^2 , \tag{2-29}$$

$$e_3=x_3-x_2=at\theta+\frac{5}{2}a\theta^2 , \tag{2-30}$$

$$e_n=x_n-x_{n-1}=at\theta+\frac{2n-1}{2}a\theta^2 , \tag{2-31}$$

Constatation :

$$e_2-e_1=\left(at\theta+\frac{3}{2}a\theta^2\right)-\left(at\theta+\frac{1}{2}a\theta^2\right)=a\theta^2 , \tag{2-32}$$

$$e_3-e_2=\left(at\theta+\frac{5}{2}a\theta^2\right)-\left(at\theta+\frac{3}{2}a\theta^2\right)=a\theta^2 , \tag{2-33}$$

$$e_n-e_{n-1}=\left(at\theta+\frac{2n-1}{2}a\theta^2\right)-\left(at\theta+\frac{2n-3}{2}a\theta^2\right)=a\theta^2 . \tag{2-34}$$

C'est-à-dire que : $e_2=e_1+a\theta^2$, $e_3=e_2+a\theta^2$, …, $e_n=e_{n-1}+a\theta^2$ ce qui rappelle l'expression d'une suite arithmétique :

$$U_n=U_{n-1}+r , \tag{2-35}$$

Avec : r est la raison de la suite arithmétique.

On déduit que dans un mouvement rectiligne uniformément varié, les distances parcourus pendant des intervalles successifs égaux θ forment une suit arithmétique de raison :

$$r=a\theta^2 . \tag{2-36}$$

On admettra qu'inversement : lorsque dans un mouvement rectiligne, les distances parcourus pendant des intervalles de temps successifs égaux θ forment une suit arithmétique de raison r, le mouvement rectiligne est uniformément varié d'accélération :

$$a=r/\theta^2 . \tag{2-37}$$

2.1.3 Mouvement rectiligne sinusoïdal

a°) Définition : un point matériel M est en mouvement rectiligne sinusoïdal lorsque l'équation horaire de son élongation est une fonction sinusoïdale du temps.

b°) Expression de l'équation horaire de l'élongation :

L'équation horaire de l'élongation d'un mobile en mouvement rectiligne sinusoïdal s'écrit sous la forme:

$$x(t) = X_{max}\sin(\omega t + \varphi) \text{ ou même } x(t) = X_{max}\cos(\omega t + \phi) . \qquad (2\text{-}38)$$

Avec : $x(t)$ est élongation ou l'abscisse instantanée, elle varie entre valeurs extrêmes $-X_{max} \leq x(t) \leq +X_{max}$, son unité est le mètre,

$X_{max} = A$ est l'amplitude ou l'élongation maximale son unité est le mètre,

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\upsilon$ est le pulsation du mouvement, son unité est le radian/seconde,

T est période du mouvement,
$f = \upsilon$ est la fréquence de vibration du système mobile,
φ est la phase initiale ou le déphasage, son unité est le radian,
$\omega t + \varphi$ est la phase instantanée, son unité est le radian.

c°) Expression de l'équation horaire de la vitesse :

En dérivant l'équation horaire on obtient l'expression de la vitesse instantanée :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \Leftrightarrow v(t) = \frac{d}{dt}\left[X_{max}\sin(\omega t + \varphi)\right]. \qquad (2\text{-}39)$$

$$\Leftrightarrow v(t) = \omega X_{max}\cos(\omega t + \varphi). \qquad (2\text{-}40)$$

Cette vitesse varie entre deux valeurs extrêmes :

$$-1 \leq \cos(\omega t + \varphi) \leq +1 \text{ car } -\omega X_{max} \leq v(t) \leq +\omega X_{max} . \qquad (2\text{-}41)$$

d°) Expression de l'équation horaire de l'accélération :

En dérivant l'équation horaire de la vitesse on obtient l'expression de l'accélération instantanée :

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \ddot{x}(t) \Leftrightarrow a(t) = \frac{d}{dt}\left[\omega X_{max}\cos(\omega t + \varphi)\right]. \qquad (2\text{-}42)$$

$$\Leftrightarrow a(t) = -\ \omega^2 X_{max}\sin(\omega t + \varphi). \qquad (2\text{-}43)$$

Cette accélération varie entre deux valeurs extrêmes :

$$-\omega^2 X_{max} \leq a(t) \leq +\omega^2 X_{max} . \qquad (2\text{-}44)$$

Nous pouvons écrire l'expression de l'accélération sous la forme :

$$a(t) = -\ \omega^2 x(t). \qquad (2\text{-}45)$$

On remarque que l'accélération est proportionnelle à l'élongation avec un signe opposé. Contrairement à la vitesse, l'accélération s'annule au passage du mobile par la position d'équilibre (origine des abscisses) et prend une valeur maximale lorsque l'élongation est maximale.

Résumé :

Nous nous résumé sur la figure (2-4) les principales caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal.

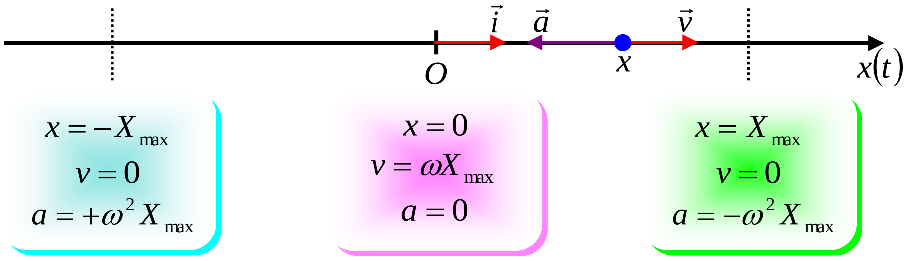


Figure 2-4 *Principales caractéristiques du mouvement rectiligne sinusoïdal.*

e°) Equation différentielle du mouvement :

L'expression de l'accélération du mouvement sinusoïdal peut se mètre sous la forme d'une équation différentielle :

$$a(t) = -\ \omega^2 x(t) \Rightarrow a(t) + \omega^2 x(t) = 0 \qquad (2\text{-}46)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \qquad (2\text{-}47)$$

avec : $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

La solution mathématique de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t). \qquad (2\text{-}48)$$

Après la transformation trigonométrique nous pouvons écrire : $x(t) = X_{max} \sin(\omega t + \varphi)$.

Avec : X_{max} et φ sont les constantes différentielles qui sont déterminées grâce aux conditions initiales sur l'élongation x_0 et la vitesse v_0, d'où l'on obtient un système de deux équations à deux inconnues qui nous permet de déterminer X_{max} et φ.

À $t = 0s$: $\begin{cases} x_0 = X_{max} \sin\varphi \\ v_0 = X_{max} \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\dfrac{x_0}{v_0}\right)$.

f°) Diagrammes du mouvement :

Les diagrammes du mouvement rectiligne sinusoïdal sont les représentations graphique du déplacement, de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps (voir figure 2-5).
Pour simplifier nous avons choisi $\varphi = 0$.

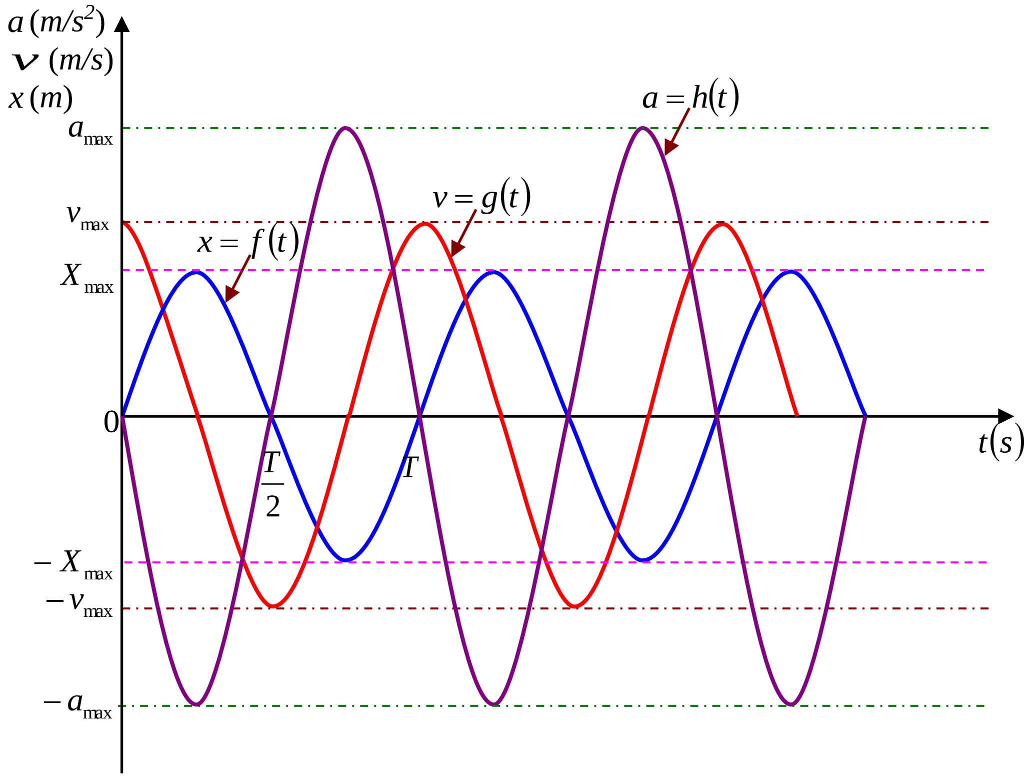


Figure 2-5 *Diagrammes du mouvement.*

2.2 Mouvement dans l'espace

C'est un mouvement dont la trajectoire est une courbe quelconque, c'est-à-dire qu'elle n'est pas nécessairement droite.

Référentiel :

L'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liés à un même solide de référence S constitue un repère.

Soit une horloge permettant de mesurer des durées ou intervalles de temps. Si on choisit un instant origine, on dispose alors d'un repère temporel ou chronologie. L'ensemble d'un repère lié à un solide de référence S et d'une chronologie constitue un référentiel lié à S.

2.2.1 Trajectoire d'un point

La trajectoire d'un point mobile *M* dans un repère donne est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point *M* dans ce repère.

La trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi.

L'équation de la trajectoire d'un point dans un repère donne est une relation entre les coordonnées de ce point indépendante du temps : $f(x, y, z) = 0$.

L'équation de la trajectoire est la relation liant les coordonnées x, y et z du mobile. On l'obtient en éliminant la variable temps t entre les équations paramétriques. Les coordonnées x, y et z sont encore appelées abscisses ou élongations du mobile.

2.2.2 Position d'un point

La position d'un point mobile *M*, à l'instant *t*, dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lie a un référentiel est donnée par ses coordonnées : *x*, *y* et *z* qui dépendent du temps.

Les coordonnées cartésiennes de point M sont (x,y,z), avec :
$-\infty \leq x \leq +\infty$, $-\infty \leq y \leq +\infty$ et $-\infty \leq z \leq +\infty$.

Le vecteur position du point *M* est :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{2-49}$$

Les équations horaires du mouvement du point *M* sont données par : $x = x(t)$, $y = y(t)$ et $z = z(t)$.

2.2.3 Vecteur vitesse

a°) Vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}$:

Définition :

Soient à un instant t_1, M_1 la position d'un mobile M en mouvement et M_2 sa position à l'instant t_2 : on appelle vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_{moy}$ du mobile l'accroissement moyen du vecteur espace entre les instants t_1 et t_2.

La vitesse moyenne du mobile sur un parcours donné est le quotient de la distance parcourue sur la durée de parcours.

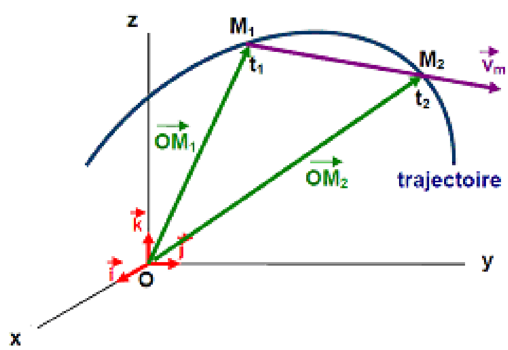


Figure 2-6 *Vecteur vitesse moyenne* $\vec{v}_{moy}$*, entre les instants* t_1 *et* t_2*, est colinéaire au vecteur* $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Caractéristiques :

Le vecteur vitesse moyenne est colinéaire au vecteur de déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Coordonnées du vecteur vitesse moyenne :

Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on a :

$$\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{M_1M}_2 = \overrightarrow{OM}_2 . \tag{2-50}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M}_2 = \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 \left| \begin{array}{l} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ (z_2 - z_1) \end{array} \right. . \tag{2-51}$$

Les coordonnées du vecteur vitesse moyenne sont : $\vec{v}_{moy} \left| \begin{array}{l} \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ \dfrac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{array} \right.$. (2-52)

Avec : $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta z = z_2 - z_1$ et $\Delta t = t_2 - t_1$ les accroissements des grandeurs concernées.

b°) Le vecteur vitesse instantané ou vitesse v du mobile :

Définition :

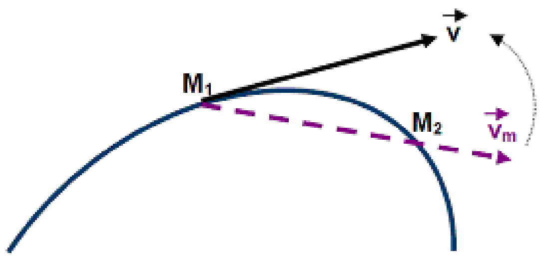


Figure 2-7 *Vecteur vitesse instantané et lorsque M_1 se rapproche de M_2, la direction de $\overrightarrow{M_1M}_2$ tend vers tangente à la trajectoire au M_1.*

Si dans l'expression du vecteur vitesse moyenne on fait tendre t_2 vers t_1 alors tend vers une limite notée $\vec{v}_{inst}$ telle que :

$$\vec{v}_{nst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{\Delta t} . \tag{2-53}$$

On reconnaît dans cette expression mathématique de la dérivée du vecteur espace par rapport au temps. Par conséquent on a :

$$\vec{v}_{inst} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} . \tag{2-54}$$

Le vecteur vitesse instantanée ou vitesse d'un mobile est la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Caractéristiques du vecteur vitesse :

- ☑ Sa direction est à chaque instant tangente à la trajectoire,
- ☑ Son sens est le sens du mouvement du mobile,
- ☑ Son intensité indique à chaque instant la vitesse du mobile.

c°) Expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

Dans la base cartésienne $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le vecteur position es défini par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et comme le vecteur vitesse $\vec{v}(t) = \vec{v}_{inst} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ on aura donc : $\vec{v}(t) = \dfrac{d\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)}{dt}$. Or les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs constants indépendants du temps, par conséquent :

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \qquad (2\text{-}55)$$

Avec : $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ et $\dfrac{dz}{dt}$ sont les dérivées respectives des élongations x, y et z par rapport au temps.

Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est déterminé dans la base cartésienne $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par les composantes : v_x, v_y et v_z.

$$\vec{v}(t)\left|\begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt}, \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{array}\right. \qquad (2\text{-}56)$$

Avec : $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$.

Son intensité est donnée par la relation :

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ , \qquad (2\text{-}57)$$

et s'exprime dans le système international en mètre par seconde (m/s ou $m.s^{-1}$).

Conventions :

Notation de Newton : on note la dérivée par rapport au temps en mettant un point sur le symbole de variable. Si la dérivée est par rapport à une variable autre que le temps, la notation est de mettre une apostrophe (') après le symbole de la variable à dériver.

Notation de Leibnitz : on note la dérivée de y , par exemple, par rapport au temps, par $\dfrac{dy}{dt}$.

Ainsi nous pouvons écrire : $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$.

Alors : $\vec{v}(t)\left|\begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{array}\right.$. (2-58)

d°) Expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes :

Pour définir le déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes on a l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\ . \tag{2-59}$$

$$\Rightarrow d\vec{r}(t) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\ . \tag{2-60}$$

Donc l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes s'écrire :

$$d\vec{r}(t) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\ . \tag{2-61}$$

2.2.4 Vecteur accélération

a°) Vecteur accélération moyenne $\vec{a}_{moy}$ ou $\vec{\gamma}_{moy}$:

Définition :

Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les vecteurs vitesse respectifs aux instants t_1 et t_2 correspondants aux positions M_1 et M_2 du mobile M . On appelle vecteur accélération moyenne $\vec{a}_{moy}$ du mobile l'accroissement moyen du vecteur entre les instants t_1 et t_2 .

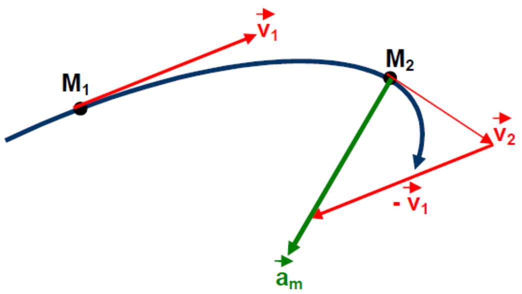


Figure 2-8 *Vecteur accélération moyenne.*

Les composantes du vecteur accélération moyenne sont : $\vec{a}_{moy}\left|\begin{array}{l} \dfrac{v_{x_2} - v_{x_1}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ \dfrac{v_{y_2} - v_{y_1}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t} \\ \dfrac{v_{z_2} - v_{z_1}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{array}\right.$. (2-62)

Avec : $\Delta v_x = v_{x_2} - v_{x_1}$, $\Delta v_y = v_{y_2} - v_{y_1}$, $\Delta v_z = v_{z_2} - v_{z_1}$ et $\Delta t = t_2 - t_1$ les accroissements des grandeurs concernées.

Caractéristiques du vecteur accélération moyenne :

Le vecteur d'accélération a la direction et le sens de $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et le vecteur d'accélération moyenne est toujours dirigé vers le centre de la concavité de la trajectoire. Ainsi que, sa norme du vecteur d'accélération s'exprime, dans le système international, en mètre par seconde carré (m/s^2).

b°) Vecteur accélérateur instantanée $\vec{a}_{inst}$ ou $\vec{\gamma}_{inst}$:

Pour trouver le vecteur accélérateur instantané ou tout simplement vecteur accélération noté généralement $\vec{a}_{inst}$ ou $\vec{\gamma}_{inst}$ il suffit dans le cas de la vitesse, de faire tendre t_2 vers t_1. On a alors :

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{inst} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}. \tag{2-63}$$

On appelle vecteur accélération instantanée ou tout simplement vecteur accélération d'un mobile le vecteur dérivée par rapport au temps : $\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$. On peut également le définir comme étant le vecteur dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps.

En effet : $$\begin{cases} \vec{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ \quad et \\ \vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}. \tag{2-64}$$

Les composantes du vecteur accélération : le vecteur accélération déterminé dans la base cartésienne $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par les composantes a_x, a_y et a_z.

$$\vec{a}(t) \left| \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \right. \tag{2-65}$$

Avec : $\vec{a}(t) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Son intensité est donnée par la relation :

$$a(t) = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{2-66}$$

et s'exprime dans le système international en mètre par seconde (m/s^2 ou $m.s^{-2}$).

Résumé : dans un repère cartésien les vecteurs positions, vitesse et accélération sont :

Dérivation Dérivation

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \vec{v}(t)=\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\\frac{dy}{dt}\\\frac{dz}{dt}\end{pmatrix} \qquad \vec{a}(t)=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{v}_x\\\dot{v}_y\\\dot{v}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d^2x}{dt^2}\\\frac{d^2y}{dt^2}\\\frac{d^2z}{dt^2}\end{pmatrix}$$

Intégration Intégration

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\rightarrow\vec{v}(t)=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}\rightarrow\vec{a}(t)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

2.3 Etude de mouvements particuliers

2.3.1 Mouvements circulaires

La trajectoire du point est un cercle caractérisé par son centre O et son rayon R. Il est logique de choisir l'origine du repère en centre du cercle et l'axe (Oz) perpendiculaire au plan contenant la trajectoire. Les équations horaires du mouvement peuvent s'écrire : $\rho=R=C^{ste}$ et $\alpha=\alpha(t)$. La forme de la fonction $\alpha(t)$ qualifiera le type de mouvement circulaire. Suivant la forme de la fonction $\alpha(t)$ le mouvement sera dit circulaire et :

- ☑ Uniforme si $\alpha(t)=\omega_0 t+\alpha_0$, avec $\dot{\alpha}=\omega_0=C^{ste}$.
- ☑ Uniformément varié (accéléré ou retardé), si $\ddot{\alpha}=\ddot{\alpha}_0=C^{ste}$, soit :

$$\dot{\alpha}=\omega=\ddot{\alpha}_0 t+\dot{\alpha}_0\ , \qquad (2\text{-}67)$$

$$\alpha(t)=\frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2+\dot{\alpha}_0 t+\alpha_0\,. \qquad (2\text{-}68)$$

- ☑ Sinusoïdale si : $$\alpha(t)=\alpha_{\max}\sin(\omega t+\varphi). \qquad (2\text{-}69)$$

2.3.2 Mouvement parabolique

Considérons le cas où le vecteur d'accélération est un constant et qu'à un instant choisi comme origine $t=0$ le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ est connu.
Pour simplifier l'étude, on peut définir le repère à partir des données du problème.
L'origine du repère position du point à $t=0$,
L'axe (Oz) suivant le vecteur accélération, soit $\vec{a}=a_0\vec{k}$,
L'axe (Ox) perpendiculaire à l'axe (Oz) et dans le plan $\vec{v}_0$ et $\vec{a}$.

Pour $t=0$ on a :
L'axe (Oy) est défini de sorte que $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ forme une base orthonormée directe.
On obtient par intégrations successives :

$$\vec{a}=a_0\vec{k} \Rightarrow \vec{v}=v_{0x}\vec{i}+(a_0t+v_{0z})\vec{k}\ , \qquad (2\text{-}70)$$

avec $v_{0y}=0$.

$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(v_{0x}t)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}a_0t^2+v_{0z}t\right)\vec{k}\ , \qquad (2\text{-}71)$$

avec $x_0=y_0=z_0=0$.

Dans le cas où $v_{0x}=0$, on retrouve le mouvement rectiligne uniformément varié suivant l'axe des z.

Pour $v_{0x}\neq 0$, le mouvement est un mouvement plan, dans le plan défini par le vecteur accélération et le vecteur vitesse à l'instant $t=0$.
Le mouvement projeté suivant l'axe des x est un mouvement uniforme de vitesse v_{0x}.
Le mouvement projeté suivant l'axe des z est uniformément varié, d'accélération a_0.

a°) Equation de la trajectoire :

Suivant l'axe des x, on a :

$$x=v_{0x}t \Rightarrow t=\frac{x}{v_{0x}}\ , \qquad (2\text{-}72)$$

Alors :

$$z=\frac{1}{2}a_0\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2+v_{0z}\frac{x}{v_{0x}}\ . \qquad (2\text{-}73)$$

Si α est l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{v}_0$ avec l'axe des x et v_0 la norme de ce vecteur vitesse, on peut écrire:

$$v_{0x}=v_0\cos\alpha\ , \qquad (2\text{-}74)$$

et

$$v_{0z}=v_0\sin\alpha\ . \qquad (2\text{-}75)$$

Alors:

$$\frac{v_{0z}}{v_{0x}}=\frac{v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}=\tan\alpha\ . \qquad (2\text{-}76)$$

Finalement, l'expression de la trajectoire est :

$$z=\frac{1}{2}\frac{a_0}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2+x\tan\alpha\ , \qquad (2\text{-}77)$$

Avec : z est une portion de parabole.

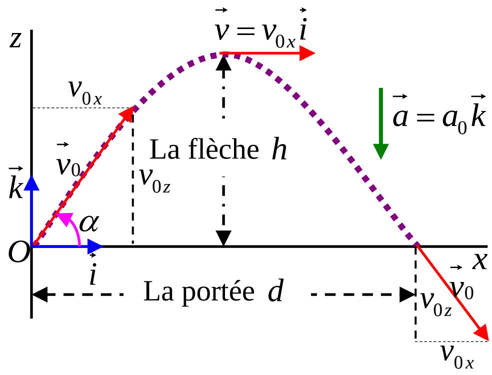


Figure 2-9 *Chute parabolique. L'accélération $\vec{a}$ correspond ici à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.*

La figure (2-9) représente la trajectoire d'un projectile pour lequel le vecteur accélération vaut : $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{k} \Rightarrow a_0 = -g$, où g est l'accélération de la pesanteur.

La flèche h correspond à l'altitude maximale que peut atteindre le mobile. La portée d correspond à la distance maximale que peut atteindre le point lorsque qu'il revient à l'ordonnée z .

b°) Calcul de la portée :

$$z = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } x = d = -2\frac{v_0^2}{a_0}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \,. \qquad (2\text{-}78)$$

La portée d est maximale pour $2\alpha = \pi/2$, soit pour un angle de tir correspondant à $\alpha = \pi/4 = 45°$.

c°) Calcul de l'altitude maximale h :

Elle peut être obtenue de différentes façons. On peut rechercher, par exemple, l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x = d/2$. On obtient alors :

$$h = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\left(\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\right)\tan\alpha \,. \qquad (2\text{-}79)$$

Finalement, l'expression de l'altitude maximale est :

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha \,. \qquad (2\text{-}80)$$

2.4 Etude de mouvements dans différents systèmes (polaires, cylindriques et sphériques) ou mouvement curviligne

2.4.1 Etude du mouvement d'un point matériel en coordonnées polaires

On considère un point matériel M en mouvement plan et repérer par ses coordonnées polaires (r,φ).

Avec : $r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \left\| \vec{r} \right\|$ est le rayon polaire,

$\varphi = \left(\vec{i}, \vec{U}_r \right)$ est l'angle polaire,

$0 \le r \le +\infty$ et $0 \le \varphi \le 2\pi$.

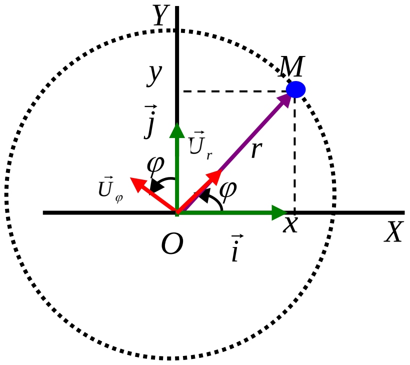


Figure 2-10 *Base des coordonnées polaires.*

a°) Expression du vecteur position en coordonnées polaires :

On repère le point M par la distance $\left\| \overrightarrow{OM} \right\| = r$ et l'angle φ .

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} r(t) \\ \varphi(t) \end{cases}. \tag{2-81}$$

Avec : $r(t)$ et $\varphi(t)$ sont des équations paramétriques en coordonnées polaires.

Le vecteur position en coordonnées cartésiennes dans le plan est défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \,. \tag{2-82}$$

La relation qui lie les cordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires est :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right). \tag{2-83}$$

Alors l'expression du vecteur position en coordonnées polaires s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r \,.$$

On a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = r\cos\varphi\vec{i} + r\sin\varphi\vec{j} = r\left(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right). \tag{2-84}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r \,.$$

Par identification on obtient l'expression de vecteur unitaire :

$$\vec{U}_r = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \,. \tag{2-85}$$

b°) Expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

Nous dérivons le vecteur position on obtient :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(r\vec{U}_r\right)}{dt} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt}. \qquad (2\text{-}86)$$

La dérivation d'un vecteur unitaire $\vec{U}_r$ par rapport à l'angle polaire φ est :

$$\frac{d\vec{U}_r}{d\varphi} = \frac{d\left(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right)}{d\varphi} \Leftrightarrow \frac{d\vec{U}_r}{d\varphi} = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}. \qquad (2\text{-}87)$$

L'angle entre les deux vecteur de la base polaire est : $\left(\vec{U}_r, \vec{U}_\varphi\right) = \frac{\pi}{2}$.

Donc on a : $$\vec{U}_r = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \Leftrightarrow \vec{U}_\varphi = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j}. \qquad (2\text{-}88)$$

En appliquant les règles des fonctions trigonométriques :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \text{ et } \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta. \qquad (2\text{-}89)$$

Alors : $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$ et $\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$.

Donc l'expression de $\vec{U}_\varphi$ devient : $$\vec{U}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}. \qquad (2\text{-}90)$$

De même on obtient: $$\frac{d\vec{U}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\varphi\vec{i} - \sin\varphi\vec{j} = -\vec{U}_r. \qquad (2\text{-}91)$$

On déduit la règle suivante :

La dérivée par rapport à l'angle polaire φ d'un vecteur unitaire $\vec{U}$ (qui ne dépend que de l'angle φ) est un vecteur unitaire qui lui est directement perpendiculaire (rotation de $\pi/2$ dans le sens positif).

Pour dériver le vecteur unitaire $\vec{U}_r$ par rapport au temps il faut appliquer les règles de dérivation d'une fonction composée. Si $f = f(y)$ est une fonction de y et $y = y(x)$ une fonction de x, on a :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}. \qquad (2\text{-}92)$$

Dans notre cas, la variable y correspond à l'angle polaire φ et x à la variable temps t. On aura donc :

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{U}_\varphi. \qquad (2\text{-}93)$$

La quantité $\dot{\varphi}$ caractérisé la variation de l'angle polaire au cours du temps et correspond à la définition de la vitesse angulaire.

En utilisant le résultat de la dérivation du vecteur unitaire $\vec{U}_r$, on obtient :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi, \tag{2-94}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} \text{ ou } \vec{v}(t)(v_r = \dot{r}; v_\varphi = r\dot{\varphi}), \tag{2-95}$$

où v_r et v_φ sont respectivement les composantes radiale et orthoradiale (transversale) du vecteur vitesse dans la base polaire.

La valeur $\|\vec{v}(t)\|$ de la vitesse correspond à la norme de ce vecteur :

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2}\ . \tag{2-96}$$

c°) Expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires :

Pour définir le déplacement élémentaire en coordonnées polaires on a l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{U}_\varphi. \tag{2-97}$$

$$\Rightarrow d\overrightarrow{OM}(t) = d\vec{r}(t) = dr\vec{U}_r + rd\varphi\vec{U}_\varphi. \tag{2-98}$$

Donc l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées polaires est donnée par :

$$d\vec{r}(t) = dr\vec{U}_r + rd\varphi\vec{U}_\varphi. \tag{2-99}$$

d°) Expression du vecteur accélération en coordonnées polaires :

A partir de l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires et de la définition du vecteur accélération on obtient :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right) \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\vec{U}_r\right)}{dt} + \frac{d\left(r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right)}{dt}. \tag{2-100}$$

La base polaire étant une base mobile dans le référentiel d'étude, le premier terme est a priori un produit de deux fonctions du temps et le deuxième terme un produit de trois fonctions du temps.

En appliquant les règles de dérivation d'un produit de fonctions, le premier terme donne :

$$\frac{d\left(\dot{r}\vec{U}_r\right)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{U}_r + \dot{r}\frac{d\vec{U}_r}{dt}. \tag{2-101}$$

En appliquant les règles de dérivation d'un vecteur tournant ce premier terme de l'expression de l'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\frac{d\left(\dot{r}\vec{U}_r\right)}{dt} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi . \tag{2-102}$$

En pratiquant de même avec le deuxième terme, on peut écrire :

$$\frac{d\left(r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right)}{dt} = \frac{dr}{dt}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + r\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} . \tag{2-103}$$

En utilisant le résultat donnant la dérivée des vecteurs de la base polaire.

$$\frac{d\left(r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right)}{dt} = \dot{r}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{U}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{U}_r , \tag{2-104}$$

Avec: $\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{U}_r$.

En regroupant les deux premiers termes, on a :

$$\frac{d\left(r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right)}{dt} = \left(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{U}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{U}_r . \tag{2-105}$$

L'expression finale de l'accélération en coordonnées polaires est devient :

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \left(\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{U}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\vec{U}_r \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{U}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{U}_\varphi . \tag{2-106}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}(t) = a_r\vec{U}_r + a_\varphi\vec{U}_\varphi . \tag{2-107}$$

Donc :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \end{pmatrix} . \tag{2-108}$$

Le premier terme ($a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$) correspond à la composante radiale de l'accélération, le second ($a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$) à l'accélération orthoradiale.

e°) Cas particulier, le mouvement circulaire :

Puisque $r = R = C^{ste}$, le vecteur vitesse est donc :
$\vec{v}(t) = R\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi$ et l'expression du vecteur accélération est :

$$\vec{a}(t) = -R\dot{\varphi}^2\vec{U}_r + R\ddot{\varphi}\vec{U}_\varphi . \tag{2-109}$$

Remarquons que cette accélération a deux composantes : accélération normale notée $\vec{a}_N$, portée par la normale, dirigée vers le centre, et de sens contraire à $\vec{a}$, elle indique la variation de la direction de la vitesse.

$$\vec{a}_N = -\vec{a}_r = R\dot{\varphi}^2 \vec{U}_r \Rightarrow a_N = R\dot{\varphi}^2 . \qquad (2\text{-}110)$$

Accélération tangentielle notée $\vec{a}_T$, portée par la tangente à la trajectoire au point M , elle indique la variation du module de la vitesse.

$$\vec{a}_T = \vec{a}_\varphi = R\ddot{\varphi}\vec{U}_\varphi \Rightarrow a_T = R\ddot{\varphi}. \qquad (2\text{-}111)$$

Autre cas particulier, le mouvement circulaire uniforme : pour ce mouvement la vitesse est constante en module. Ainsi, puisque $r = R = C^{ste}$, la vitesse est donc :

$v = \dfrac{ds}{dt}$, avec $\varphi = \dfrac{s}{R} \Rightarrow s = R\varphi$.

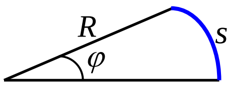


Figure 2-11 *Définition d'un angle exprimé en radian.*

Alors : $v = \dfrac{d(R\varphi)}{dt} = R\dot{\varphi} = R\omega$ est l'expression qui lie la vitesse linéaire (scalaire) avec la vitesse angulaire.

Nous connaissons la vitesse angulaire ω qui représente l'angle balayé par unité de temps et dont l'unité est le radian par seconde (rad.s^{-1}).

Quant à l'accélération elle vaut :

$$a = a_r = a_N = R\dot{\varphi}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow \vec{a}_N = -R\omega^2\vec{U}_r . \qquad (2\text{-}112)$$

f°) Les composantes tangentielle et normale de la vitesse et de l'accélération $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ dans le repère de Frenet :

Pour déterminer l'accélération en un point M , certains cas on utilise ses composantes intrinsèques qui sont ses projections algébriques (voir figure 2-12).

Considérons un mouvement dont la trajectoire est une courbe plane quelconque (Γ). Nous dessinons un repère composé de l'axe (MT), tangent à la trajectoire au point M et porte le vecteur vitesse, et de l'axe (MN) perpendiculaire à l'axe (MT).

On définit deux vecteurs unitaires :

$\vec{U}_T$: porté par la tangente à la trajectoire en M est orienté dans le sens positif,

$\vec{U}_N$: porté par la perpendiculaire à la trajectoire et dirigée vers l'intérieur.

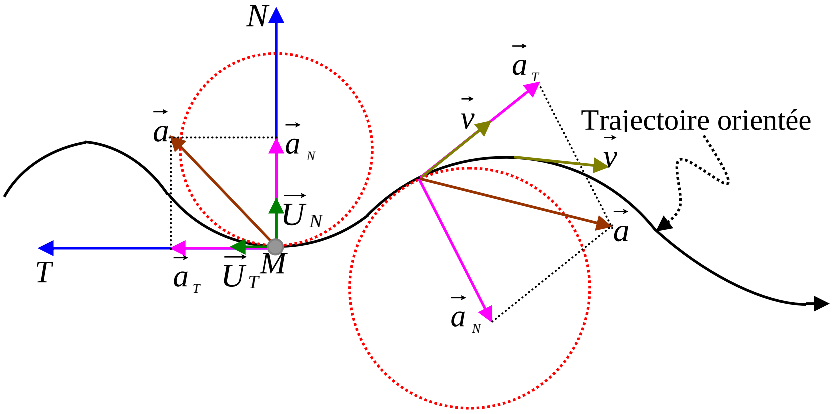


Figure 2-12 *Vecteur vitesse et accélération et la base de Frenet.*

On remarque sur la figure (2-12) que la vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{U}_T = v\vec{U}_T \,. \tag{2-113}$$

L'accélération s'écrit : $\vec{a}(t) = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$. (2-114)

Donc : $\vec{a} = \|\vec{a}_T(t)\|.\vec{U}_T + \|\vec{a}_N(t)\|.\vec{U}_N$ et $\|\vec{a}(t)\|^2 = \|\vec{a}_T(t)\|^2 + \|\vec{a}_N(t)\|^2$. (2-115)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{U}_T\right) = \frac{dv}{dt}\vec{U}_T + v\frac{d\vec{U}_T}{dt}\,. \tag{2-116}$$

Or : $\dfrac{d\vec{U}_T}{dt} = \dot{\varphi}\vec{U}_N$. (2-117)

Donc: $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt}\vec{U}_T + v\dot{\varphi}\vec{U}_N \Leftrightarrow \vec{a} = \|\vec{a}_T(t)\|.\vec{U}_T + \|\vec{a}_N(t)\|.\vec{U}_N$. (2-118)

Alors: $\|\vec{a}_T(t)\| = a_T = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt}$ et $\|\vec{a}_N(t)\| = v\dot{\varphi} = \dfrac{v^2}{\rho(t)}$. (2-119)

Avec $\rho(t)$ est le rayon de courbure de la trajectoire.

$$ds = rd\varphi \Rightarrow \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt}\,. \tag{2-120}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}\,, \tag{2-121}$$

et donc : $\|\vec{a}_N(t)\| = \dfrac{v^2}{r}$. (2-122)

Remarque :

La condition pour que le mouvement curviligne devient rectiligne, si le rayon de courbure $\rho(t)$ tend vers à l'infini, car : $\rho(t) \to +\infty$, c'est-à-dire $\|\vec{a}_N(t)\| = 0$.

Composante tangentielle de l'accélération $\|\vec{a}_T(t)\|$:

$$\|\vec{a}_T(t)\| = \frac{d\|\vec{v}(t)\|}{dt} = \frac{dv}{dt} . \qquad (2\text{-}123)$$

Remarque :

Cette expression est plus difficile à retenir que celle obtenue en coordonnées cartésiennes. Pour cette raison il faut savoir la retrouver très rapidement en dérivant successivement le vecteur position puis le vecteur vitesse.

2.4.2 Etude du mouvement d'un point matériel en coordonnées cylindriques

Lorsqu'un mouvement a lieu sur surface cylindrique ou spirale, on utilise souvent les coordonnées cylindriques que l'on définit par rapport au système cartésien. Le mobile M est alors repéré par :
Les coordonnées polaires (r,φ) de sa projection m sur le plan (Oxy),
Sa coordonnée axiale z .
Les coordonnées cylindriques ne sont qu'une extension des coordonnées polaires au cas tridimensionnel.

Les coordonnées cylindriques sont (ρ,φ,z). Dans ce système, les grandeurs cinématiques vectorielles, $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ sont définies par les composantes polaires de leurs projections sur le plan (Oxy), complétées par leur composante axiale.

Les coordonnées cylindriques de point M sont (ρ,φ,z), avec :

$0 \le \rho \le +\infty$,
$0 \le \varphi \le 2\pi$,
$-\infty \le z \le +\infty$.

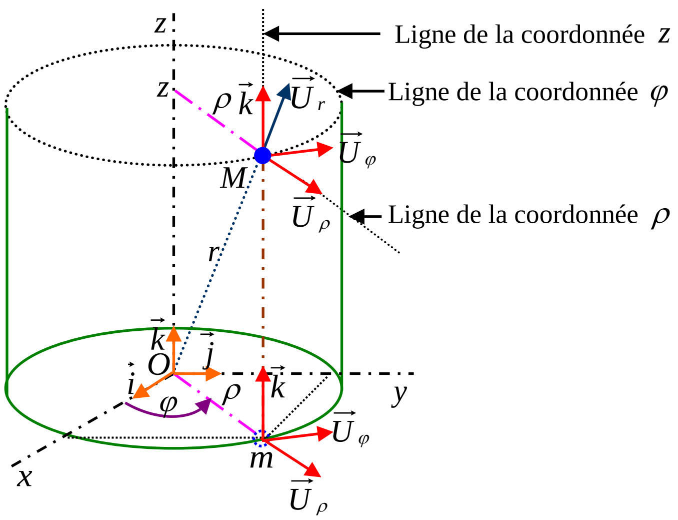


Figure 2-13 *Base des coordonnées cylindriques.*

On obtient alors pour :

a°) Expression du vecteur position en coordonnées cylindriques :

D'après la relation de Charles on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}, \qquad (2\text{-}124)$$

Avec : $\overrightarrow{Om}$ est le vecteur position en coordonnées polaires est donnée par :

$$\overrightarrow{Om} = \rho\vec{U}_\rho = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j}\,. \qquad (2\text{-}125)$$

$\overrightarrow{mM}$ est vecteur parallèle à l'axe axiale (Oz) du repère cartésien est donné par :

$$\overrightarrow{mM} = z\vec{k}\,. \qquad (2\text{-}126)$$

Donc l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques est donnée :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{U}_r\,. \qquad (2\text{-}127)$$

Remarque très importante :

A ne pas confondre $\vec{U}_r$ et $\vec{U}_\rho$.

Avec le module de vecteur position est devient :

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r = \sqrt{\rho^2 + z^2}\ , \qquad (2\text{-}128)$$

$$\text{et } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \qquad (2\text{-}129)$$

b°) Expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

Nous dérivons le vecteur position on obtient :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(\rho\vec{U}_\rho + z\vec{k}\right)}{dt} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{k}\,. \qquad (2\text{-}130)$$

Avec : $\vec{U}_\rho$ est vecteur tournant, de dérivée est : $\dfrac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{U}_\varphi$. (2-131)

$\vec{k}$ est vecteur fixe.

Donc : $$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{z}\vec{k}, \qquad (2\text{-}132)$$

Alors, la base du repère cylindrique est $\left(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\varphi, \vec{k}\right)$.

Soit le premier terme ($v_\rho = \dot{\rho}$) correspond à la composante radiale de la vitesse, le second ($v_\varphi = \rho\dot{\varphi}$) à la vitesse transversale et le troisième terme $v_z = \dot{z}$ à la vitesse axiale.

c°) Expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques :

Pour définir le déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques on a l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{z}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{U}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{U}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k}\,. \tag{2-133}$$

$$\Rightarrow d\vec{r}(t) = d\rho\vec{U}_\rho + \rho d\varphi\vec{U}_\varphi + dz\vec{k}\,. \tag{2-134}$$

Donc l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques s'écrire :

$$d\vec{r}(t) = d\rho\vec{U}_\rho + \rho d\varphi\vec{U}_\varphi + dz\vec{k}\,. \tag{2-135}$$

d°) Expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques :

A partir de l'expression du vecteur d'accélération en coordonnées cylindriques et de la définition du vecteur d'accélération on obtient :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{z}\vec{k}\right) \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\left(\dot{\rho}\vec{U}_\rho\right)}{dt} + \frac{d\left(\rho\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right)}{dt} + \frac{d\left(\dot{z}\vec{k}\right)}{dt}\,. \tag{2-136}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{U}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{\rho}\ddot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} + \ddot{z}\vec{k}\,. \tag{2-137}$$

Avec : $\dfrac{d\vec{U}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{U}_\varphi$ et $\dfrac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{U}_\rho$.

Alors l'expression du vecteur d'accélération en coordonnées cylindriques est devient :

$$\vec{a}(t) = \ddot{\rho}\vec{U}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{\rho}\ddot{\varphi}\vec{U}_\varphi - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2\vec{U}_\rho + \ddot{z}\vec{k}\,. \tag{2-138}$$

En regroupant les termes de même nature vecteur unitaire on a l'expression finale de l'accélération en coordonnées polaires est devient :

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2\right)\vec{U}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\ddot{\varphi}\right)\vec{U}_\varphi + \ddot{z}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}. \tag{2-139}$$

Le premier terme ($a_\rho = \ddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2$) correspond à la composante radiale de l'accélération, le second ($a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$) à l'accélération orthoradiale et le troisième terme ($a_z = \ddot{z}$) à l'accélération axiale.

2.4.3 Etude du mouvement d'un point matériel en coordonnées sphériques

On considère un point M dans une sphère, m est la projection de point M sur le plan (Oxy) et h est la projection de M sur l'axe (Oz) (voir figure 2-14).

Les coordonnées sphériques de point M sont (r,φ,θ), avec :

☑ r est le rayon polaire, $0 \le r \le +\infty$,

☑ $\varphi = \left(\vec{i},\vec{U}_\rho\right)$ coaltitude, $0 \le \varphi \le 2\pi$,

☑ $\theta = \left(\vec{U}_r,\vec{k}\right)$ azimut, $0 \le \theta \le \pi$.

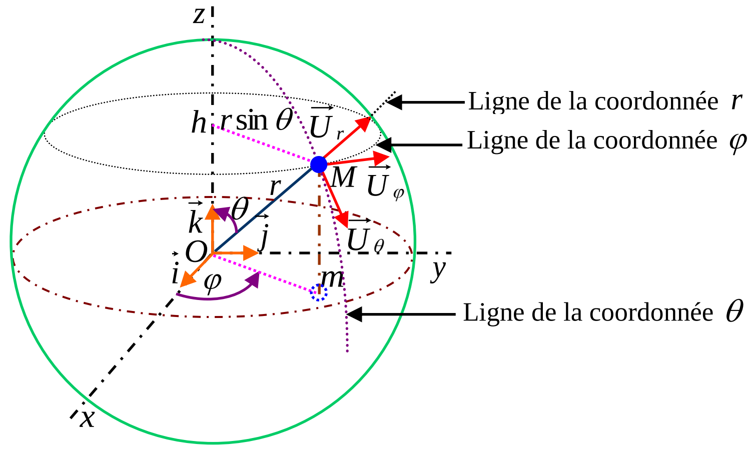


Figure 2-14 *Base des coordonnées sphériques.*

En coordonnées cartésiennes le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,, \tag{2-140}$$

et on a d'après la relation de Charles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} \,, \tag{2-141}$$

avec m est la projection du point M sur le plan (Oxy).

Alors,
$$\overrightarrow{Om} = \rho\vec{U}_\rho = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} = \rho\left(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right) , \tag{2-142}$$

avec : $\rho = r\sin\theta$.

$\overrightarrow{mM} = z\vec{k} = r\cos\theta$.

Nous déduisons que le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\sin\theta\left(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right) + r\cos\theta\vec{k} \;. \tag{2-143}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\cos\varphi\sin\theta\vec{i} + r\sin\varphi\sin\theta\vec{j} + r\cos\theta\vec{k} \,. \tag{2-144}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,.$$

Par identification en trouve les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \,. \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{2-145}$$

On peut écrire aussi :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\left(\cos\varphi \sin\theta \vec{i} + \sin\varphi \sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k}\right) = r\vec{U}_r . \qquad (2\text{-}146)$$

Finalement l'expression du vecteur position en coordonnées sphériques est : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{U}_r$.

Alors l'expression de $\vec{U}_r$ est :

$$\vec{U}_r = \cos\varphi \sin\theta \vec{i} + \sin\varphi \sin\theta \vec{j} + \cos\theta \vec{k} . \qquad (2\text{-}148)$$

Connaissons les vecteurs :

$$\vec{U}_\rho = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j} , \qquad (2\text{-}149)$$

et

$$\vec{U}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} . \qquad (2\text{-}150)$$

Avec $\left(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\varphi\right) = \frac{\pi}{2}$.

La dérivée du vecteur unitaire $\vec{U}_\varphi$ par rapport au temps et qui dépend du variable φ est :

$$\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{U}_\varphi}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\vec{U}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\left(-\cos\varphi \vec{i} - \sin\varphi \vec{j}\right). \qquad (2\text{-}151)$$

Donc :

$$\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{U}_\rho . \qquad (2\text{-}152)$$

Il nous reste à déterminer le vecteur $\vec{U}_\theta$. La base sphérique $\left(\vec{U}_r, \vec{U}_\varphi, \vec{U}_\theta\right)$ étant orthogonale, le vecteur unitaire est donc le résultat du produit vectoriel entre $\vec{U}_\varphi$ et $\vec{U}_r$.

$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_\varphi \wedge \vec{U}_r . \qquad (2\text{-}153)$$

Pour déterminer ce produit vectoriel en utilisant la méthode de déterminant :

$$\vec{U}_\theta = \vec{U}_\varphi \wedge \vec{U}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix} . \qquad (2\text{-}154)$$

d'où :

$$\vec{U}_\theta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix}\vec{k} . \qquad (2\text{-}155)$$

Donc :

$$\vec{U}_\theta = \cos\varphi\cos\theta \vec{i} + \sin\varphi\cos\theta \vec{j} - \sin\theta \vec{k} . \qquad (2\text{-}156)$$

La dérivée du vecteur unitaire $\vec{U}_\theta$ par rapport au temps et qui dépend à deux variables φ et θ :

$$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{U}_\theta}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} + \frac{d\vec{U}_\theta}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\vec{U}_\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}. \quad (2\text{-}157)$$

Alors : $$\frac{d\vec{U}_\theta}{d\varphi} = -\sin\varphi\cos\theta\vec{i} + \cos\varphi\cos\theta\vec{j} = \cos\theta\left(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right) = \cos\theta\vec{U}_\varphi, \quad (2\text{-}158)$$

et $$\frac{d\vec{U}_\theta}{d\theta} = -\cos\varphi\sin\theta\vec{i} - \sin\varphi\sin\theta\vec{j} - \cos\theta\vec{k} = -\vec{U}_r. \quad (2\text{-}159)$$

Donc: $$\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \dot{\varphi}\cos\theta\vec{U}_\varphi - \dot{\theta}\vec{U}_r. \quad (2\text{-}160)$$

a°) Expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

Nous dérivons le vecteur position on obtient :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\left(r\vec{U}_r\right)}{dt} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{r}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt}. \quad (2\text{-}161)$$

On a : $$\vec{U}_r = \cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}. \quad (2\text{-}162)$$

On remarque que l'expression du vecteur unitaire $\vec{U}_r$ dépend à deux variables φ et θ alors, la dérivée du vecteur unitaire $\vec{U}_r$ par rapport au temps s'écrite:

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\vec{U}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}. \quad (2\text{-}163)$$

Alors : $$\frac{d\vec{U}_r}{d\varphi} = -\sin\varphi\sin\theta\vec{i} + \cos\varphi\sin\theta\vec{j} = \sin\theta\left(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right). \quad (2\text{-}164)$$

D'où : $$\frac{d\vec{U}_r}{d\varphi} = \sin\theta\vec{U}_\varphi. \quad (2\text{-}165)$$

et ainsi : $$\frac{d\vec{U}_r}{d\theta} = \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k} = \vec{U}_\theta. \quad (2\text{-}166)$$

Donc : $$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + \dot{\theta}\vec{U}_\theta. \quad (2\text{-}167)$$

Par remplacement on obtient l'expression finale du vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{U}_r + r\left(\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + \dot{\theta}\vec{U}_\theta\right) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta. \quad (2\text{-}168)$$

Les trois composantes sphériques du vecteur vitesse apparaissent clairement :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi + \vec{v}_\theta = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi}\sin\theta \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}. \quad (2\text{-}169)$$

La base orthogonale directe est constituée des vecteurs $\left(\vec{U}_r, \vec{U}_\varphi, \vec{U}_\theta\right)$ qui dépend de la position du mobile, donc du temps. Elle est définie par les équations horaires $r(t)$, $\varphi(t)$ et $\theta(t)$, qui nous permettent d'arriver aux valeurs algébriques v_r, v_φ et v_θ des composantes sphériques du vecteur vitesse et de là, la détermination du vecteur vitesse.

b°) Expression du vecteur déplacement en coordonnées sphériques :

Pour définir le déplacement élémentaire en coordonnées sphériques on a l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\frac{d\theta}{dt}\vec{U}_\theta . \quad (2\text{-}170)$$

$$\Rightarrow d\vec{r}(t) = dr\vec{U}_r + rd\varphi\sin\theta\vec{U}_\varphi + rd\varphi\vec{U}_\theta . \quad (2\text{-}171)$$

Donc l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées sphériques s'écrire :

$$d\vec{r}(t) = dr\vec{U}_r + rd\varphi\sin\theta\vec{U}_\varphi + rd\varphi\vec{U}_\theta . \quad (2\text{-}172)$$

c°) Expression du vecteur accélération en coordonnées sphériques :

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps, on arrive à l'expression du vecteur accélération soit :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{U}_\theta\right). \quad (2\text{-}173)$$

d'où :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\left(\dot{r}\vec{U}_r\right)}{dt} + \frac{d\left(r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi\right)}{dt} + \frac{d\left(r\dot{\theta}\vec{U}_\theta\right)}{dt} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} . \quad (2\text{-}174)$$

Dérivons terme par terme :

$$\vec{A} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\frac{d\vec{U}_r}{dt} . \quad (2\text{-}175)$$

$$\vec{B} = \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}\frac{d(\sin\theta)}{dt}\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\vec{U}_\varphi}{dt} . \quad (2\text{-}176)$$

$$\vec{C} = \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} . \quad (2\text{-}177)$$

D'où :

$$\vec{A} = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\left(\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + \dot{\theta}\vec{U}_\theta\right) = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta . \quad (2\text{-}178)$$

$$\vec{B} = \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{U}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\vec{U}_\rho . \quad (2\text{-}179)$$

Avec : $\dfrac{d\vec{U}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{U}_\rho$.

$$\vec{C} = \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} \Leftrightarrow \vec{C} = \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\theta}\left(\dot{\varphi}\cos\theta\vec{U}_\varphi - \dot{\theta}\vec{U}_r\right). \qquad (2\text{-}180)$$

$$\Leftrightarrow \vec{C} = \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{U}_\varphi - r\dot{\theta}^2\vec{U}_r. \qquad (2\text{-}181)$$

Avec : $\dfrac{d\vec{U}_\theta}{dt} = \dot{\varphi}\cos\theta\vec{U}_\varphi - \dot{\theta}\vec{U}_r$.

Par remplacement on obtient l'expression finale du vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) = \ddot{r}\vec{U}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi +& \\ r\ddot{\varphi}\sin\theta\vec{U}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{U}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\vec{U}_\rho +& \\ \dot{r}\dot{\theta}\vec{U}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{U}_\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{U}_\varphi - r\dot{\theta}^2\vec{U}_r.&\end{aligned} \qquad (2\text{-}182)$$

Pour déterminer l'expression du vecteur unitaire $\vec{U}_\rho$, en multipliant l'expression du vecteur unitaire $\vec{U}_r$ par $\sin\theta$ et $\vec{U}_\theta$ par $\cos\theta$, puis additionner les deux expressions:

$$\frac{\begin{matrix}\left(\vec{U}_r = \cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}\right)\times\sin\theta \\ \left(\vec{U}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{k}\right)\times\cos\theta\end{matrix}\;+}{\sin\theta\vec{U}_r + \cos\theta\vec{U}_\theta = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} = \vec{U}_\rho} = \qquad (2\text{-}183)$$

Alors : $$\vec{U}_\rho = \sin\theta\vec{U}_r + \cos\theta\vec{U}_\theta. \qquad (2\text{-}184)$$

Donc : $$\begin{aligned}\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{U}_r +& \\ \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{U}_\varphi +& \\ \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{U}_\theta.&\end{aligned} \qquad (2\text{-}185)$$

Résumé :

Dans un repère donné, les mêmes vecteurs position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$, vitesse $\vec{v}(t)$, déplacement élémentaire $d\vec{r}$ et accélération $\vec{a}(t)$ peuvent s'exprimer différemment suivant le choix du système de coordonnées et de la base.

Vecteur	**coordonnées cartésiennes** (x, y, z) **Base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	**coordonnées polaires** (r, φ) **Base** $(\vec{U}_r, \vec{U}_\varphi)$	**coordonnées cylindriques** (ρ, φ, z) **Base** $(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\varphi, \vec{k})$	**coordonnées sphériques** (r, φ, θ) **Base** $(\vec{U}_r, \vec{U}_\varphi, \vec{U}_\theta)$
Position $\overrightarrow{OM}$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\overrightarrow{OM} = \left\| \begin{array}{l} x.\vec{i} \\ y.\vec{j} \\ z.\vec{k} \end{array} \right.$	$\rho = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\overrightarrow{OM} = r.\vec{U}_r$ or $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{U}_\rho$	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\rho \neq r$ $\overrightarrow{OM} = \left\| \begin{array}{c} \rho.\vec{U}_\rho \\ 0 \\ z.\vec{k} \end{array} \right.$	$\overrightarrow{OM} = r.\vec{U}_r$
Vitesse $\vec{v}(t)$	$\vec{v}(t) = \left\| \begin{array}{l} \dot{x}.\vec{i} \\ \dot{y}.\vec{j} \\ \dot{z}.\vec{k} \end{array} \right.$	$\vec{v}(t) = \left\| \begin{array}{l} \dot{r}.\vec{U}_r \\ r\dot{\varphi}.\vec{U}_\varphi \end{array} \right.$	$\vec{v}(t) = \left\| \begin{array}{c} \rho.\vec{U}_\rho \\ \rho.\dot{\varphi}.\vec{U}_\varphi \\ \dot{z}.\vec{k} \end{array} \right.$	$\vec{v}(t) = \left\| \begin{array}{l} \dot{r}.\vec{U}_r \\ r.\dot{\varphi}.\vec{U}_\varphi \\ r\dot{\theta}.\vec{U}_\theta \end{array} \right.$
Déplacement élementaire $d\vec{r}$	$d\vec{r}(t) = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$	$d\vec{r} = dr.\vec{U}_r + rd\varphi.\vec{U}_\varphi$	$d\vec{r} = d\rho\vec{U}_\rho + \rho d\varphi\vec{U}_\varphi + dz\vec{k}$	$d\vec{r} = dr\vec{U}_r + rd\varphi \sin\theta\vec{U}_\varphi + rd\varphi\vec{U}_\theta$
Accélération $\vec{a}(t)$	$\vec{a}(t) = \left\| \begin{array}{l} \ddot{x}.\vec{i} \\ \ddot{y}.\vec{j} \\ \ddot{z}.\vec{k} \end{array} \right.$	$\vec{a}(t) = \left\| \begin{array}{c} (\ddot{r} - r.\dot{\varphi}).\vec{U}_r \\ (2.\dot{r}.\dot{\varphi} + r.\ddot{\varphi}).\vec{U}_\varphi \end{array} \right.$	$\vec{a}(t) = \left\| \begin{array}{c} (\ddot{\rho} - \rho.\dot{\varphi}).\vec{U}_\rho \\ (2.\dot{\rho}.\dot{\varphi} + \rho.\ddot{\varphi}).\vec{U}_\varphi \\ \ddot{z}.\vec{k} \end{array} \right.$	$\vec{a}(t) = \left\| \begin{array}{c} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta).\vec{U}_r \\ (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta).\vec{U}_\varphi \\ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta).\vec{U}_\theta \end{array} \right.$

Tableau 2-1 *Récapitulatif.*

2.5 Mouvements relatifs

On considère deux référentiels différents, l'un $R(Oxyz)$ au quel est attaché à une base fixe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et l'autre $R'(O'x'y'z')$ est attaché à une base mobile $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$. Si M est un point matériel mobile dans (R'), on appellera :

- ☑ Mouvement absolu, le mouvement de M par rapport à $(R)=(R_a)$ est un référentiel fixe,
- ☑ Mouvement relatif, le mouvement de M par rapport à $(R')=(R_r)$ est un référentiel mobile,
- ☑ Mouvement d'entraînement, le mouvement (R') de par rapport à (R).

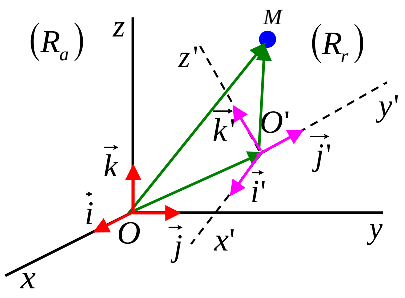


Figure 2-15 *Référentiels absolu et relatif.*

Nous cosignons ces résultats dans le tableau (2-2) suivant:

Observateur	$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ **invariants dans** (R_a)	$\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$ **variables dans** $(R_r)/(R_a)$
Position	$\vec{r}(t)=\overrightarrow{OM}$	$\vec{r}'(t)=\overrightarrow{O'M}$
Vitesse	$\vec{v}_a(t)=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$	$\vec{v}_r(t)=\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$
Accélération	$\vec{a}_a(t)=\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\dfrac{d\vec{v}_a(t)}{dt}$	$\vec{a}_r(t)=\dfrac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}=\dfrac{d\vec{v}_r(t)}{dt}$

Tableau 2-2 *Définitions des vecteurs : position, vitesse et accélération par rapport les deux référentiels absolu et relatif.*

2.5.1 Loi de composition des positions

Sur la figure (2-15), on peut voir que d'après la relation de Charles :

$$\left(\overrightarrow{OM}\right)_{(R)}=\left(\overrightarrow{OO'}\right)_{(R')/(R)}+\left(\overrightarrow{O'M}\right)_{(R')}. \qquad (2\text{-}186)$$

par suite: $\begin{cases}\left(\overrightarrow{OM}\right)_{(R)}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} & : \text{ vecteur position du point } M \text{ par rapport à } (R),\\ \left(\overrightarrow{O'M}\right)_{(R')}=x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}' & : \text{ vecteur position du point } M \text{ par rapport à } (R').\end{cases}$

Avec : x, y et z sont des coordonnées du point M dans (R),
x', y' et z' sont des coordonnées du point M dans (R').

2.5.2 Loi de composition des vitesses

On a : $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + \underbrace{x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'}_{\overrightarrow{O'M}}. \quad (2\text{-}187)$$

En dérivant la relation précédente par rapport au temps, on obtient la relation entre les différentes vitesses :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right), \quad (2\text{-}188)$$

alors : $$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a(t)} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\vec{v}_e(t)} + \underbrace{\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'}_{\vec{v}_r(t)}. \quad (2\text{-}189)$$

Soit :
- $\vec{v}_a(t)$ vitesse absolue : c'est la vitesse de M par rapport à (R),
- $\vec{v}_e(t)$ vitesse d'entrainement : c'est la vitesse de (R') par rapport à (R),
- $\vec{v}_r(t)$ vitesse relative : c'est la vitesse de M par rapport à (R').

et par suite:

$$\vec{v}_a(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad : \text{ vitesse du point } M \text{ par rapport à } (R),$$

$$\vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \quad : \text{ vitesse du point } M \text{ par rapport à } (R')/(R).$$

$$\vec{v}_r(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' \quad : \text{ vitesse du point } M \text{ par rapport à } (R'),$$

La vitesse absolue du point coïncidant s'appelle aussi vitesse d'entrainement.
Soit P le point coïncidant avec M à l'instant t et qui reste fixe dans (R').
Les coordonnées de P dans (R'), x', y' et z' sont donc constantes.

$$\left.\overrightarrow{v_a}(t)\right|_M = \left.\overrightarrow{v_a}(t)\right|_P + \left.\overrightarrow{v_r}(t)\right|_M. \quad (2\text{-}190)$$

La vitesse absolue du point coïncidant $\left.\overrightarrow{v_a}(t)\right|_P$ s'appelle aussi vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}(t)$.

La relation qui lie les trois vitesses et qu'on appelle loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a(t) = \vec{v}_e(t) + \vec{v}_r(t). \quad (2\text{-}191)$$

Le vecteur de la vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs de la vitesse d'entrainement et celui de la vitesse relative.

Remarques :

- ☑ Si les coordonnées de M dans (R') sont constants, c'est-à-dire si le point M est fixe par rapport à (R'), on a donc : $\vec{v}_r(t)=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}_a(t)=\vec{v}_e(t)$.
- ☑ Si (R') est fixe par rapport (R) , on a donc : $\vec{v}_e(t)=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}_a(t)=\vec{v}_r(t)$.
- ☑ Si le mouvement $(R')/(R)$ d'entrainement est un mouvement de translation (quel soit uniforme ou non), les vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ soient constantes ou sont parallèles et dans des directions fixes, alors $\vec{v}_e(t)$ est indépendante de M de sorte que :
  $\frac{d\vec{i}'}{dt}=\frac{d\vec{j}'}{dt}=\frac{d\vec{k}'}{dt}=\vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e(t)=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$.

2.5.3 Loi de composition des accélérations

On obtient la relation entre les différentes accélérations par rapport aux deux référentiels par la dérivée par rapport au temps, l'expression de la relation qui lie les trois vitesses :

Comme :
$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\overrightarrow{OM}}{dt}\right). \tag{2-192}$$

Alors en dérivant par rapport au temps l'expression :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}+\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'+\dot{z}'\vec{k}'. \tag{2-193}$$

On obtient :

$\vec{a}_a(t)=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$: accélération absolue : c'est l'accélération de M par rapport à (R),

$\vec{a}_e(t)=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$: accélération d'entrainement: $\vec{a}(t)$ de $(R')/(R)$,

$\vec{a}_r(t)=\ddot{x}'\vec{i}'+\ddot{y}'\vec{j}'+\ddot{z}'\vec{k}'$: accélération relative : c'est l'accélération de M par rapport à (R'),

$\vec{a}_C(t)=2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}'}{dt}+\dot{y}'\frac{d\vec{j}'}{dt}+\dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$: accélération de Coriolis ou accélération complémentaire.

La relation qui lie les quatre accélérations et qu'on résulte la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_a(t)=\vec{a}_e(t)+\vec{a}_r(t)+\vec{a}_C(t). \tag{2-194}$$

Remarque : l'accélération de Coriolis s'annule dans les cas suivants :

- ☑ Si M est fixe par rapport à (R'), c'est-à-dire les coordonnées de M dans (R') sont constants: $\dot{x}' = \dot{y}' = \dot{z}' = 0$, on a donc : $\vec{a}_C(t) = \vec{0}$.
- ☑ Si le mouvement $(R')/(R)$ d'entrainement est un mouvement de translation (quel soit uniforme ou non), les vecteurs $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ soient constantes ou sont parallèles et dans des directions fixes, alors: $\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{j}'}{dt} = \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_C(t) = \vec{0}$, donc : $\vec{a}_a(t) = \vec{a}_e(t) + \vec{a}_r(t)$.

2.5.4 Cas particuliers

a°) Cas de translation :

(R') est en mouvement de translation par rapport à (R), si tout vecteur fixe dans (R') reste constant dans (R).

Donc pour $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ on aura :

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_{(R)} = \left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_{(R)} = \vec{0}. \tag{2-195}$$

D'où :

$$\vec{a}_a(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}', \tag{2-196}$$

soit :

$$\vec{a}_a(t) = \vec{a}_e(t) + \vec{a}_r(t) \text{ et } \vec{a}_C(t) = \vec{0}. \tag{2-197}$$

Si (R') est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à (R) alors $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$ est un vecteur constant, $\vec{a}_e(t) = \vec{0}$, d'où $\vec{a}_a(t) = \vec{a}_r(t)$.

b°) Cas de rotation autour d'un axe fixe dans (R):

Le référentiel relatif (R') tourne autour de l'axe (Oz), confondu avec l'axe $(O'z')$, avec la vitesse angulaire :

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}. \tag{2-198}$$

Nous pouvons considérer la vitesse angulaire comme étant une grandeur vectorielle, telle que sa direction soit orthogonale au plan du mouvement et dont le sens est défini par de la main droite (ou toute autre règle correspondante) qui indique le sens du vecteur résultat du produit vectoriel.

D'après la figure (2-16a) nous pouvons écrire :

$$R = r\sin\alpha. \tag{2-199}$$

Sachant que :

$$v = \omega R. \tag{2-200}$$

Donc : $$v = \omega r \sin\alpha \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}\,. \qquad (2\text{-}201)$$

Sur la figure (2-16b), considérons deux référentiels en mouvement de rotation uniforme relatif sans translation, l'un par rapport à l'autre.

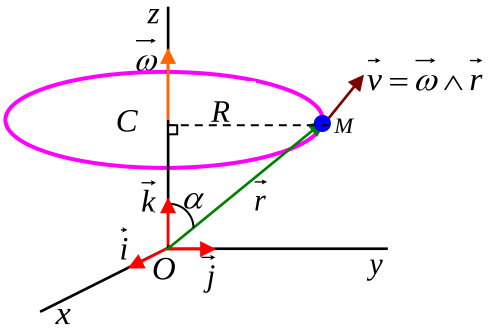


Figure 2-16a *Le vecteur de la vitesse de rotation.*

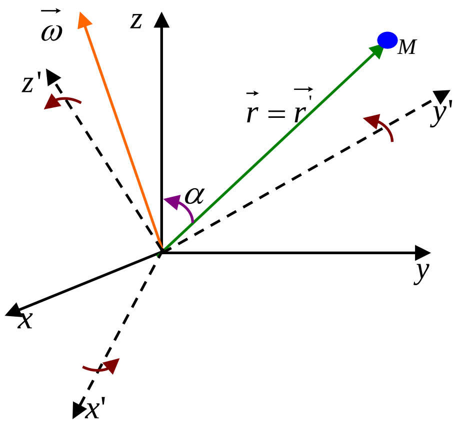


Figure 2-16b *Deux référentiels en mouvement de rotation uniforme relatif.*

Les extrémités des vecteurs unitaires $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ *de* (R') effectuent un mouvement circulaire uniforme avec une vitesse angulaire ω. En d'autre terme, le rapport $\frac{d\vec{i}'}{dt}$ représente la vitesse d'un point situé à une distance égale à l'unité de O et se déplace avec un mouvement circulaire uniforme à la vitesse ω.
Par analogie avec l'équation de la vitesse linéaire $\vec{v}(t) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Leftrightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{A}\,. \qquad (2\text{-}202)$$

Alors: $$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}',\ \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \text{ et } \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'\,. \qquad (2\text{-}203)$$

Loi de composition des vitesses dans le cas de rotation :

Nous pouvons écrire l'expression de la vitesse d'entrainement:

$$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = x'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}'\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}'\right) + z'\left(\vec{\omega} \wedge \vec{k}'\right) \qquad (2\text{-}204)$$

D'où : $$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge x'\vec{i}' + \vec{\omega} \wedge y'\vec{j}' + \vec{\omega} \wedge z'\vec{k}'\,. \qquad (2\text{-}205)$$

Alors : $$x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\right). \qquad (2\text{-}206)$$

Donc l'expression le la vitesse d'entrainement dans le cas de rotation, si $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$:

$$\overrightarrow{v_e}(t) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}' . \qquad (2\text{-}207)$$

Par contre si $\overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}$, l'expression le la vitesse d'entrainement dans le cas de rotation devient :

$$\overrightarrow{v_e}(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \Leftrightarrow \vec{v}(t)\Big|_{(R')/(R)} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} . \qquad (2\text{-}208)$$

Alors l'expression qui exprime la relation entre les vitesses du point M en mouvement relatif de rotation devient :

$$\overrightarrow{v_a}(t) = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' . \qquad (2\text{-}209)$$

Avec : $\overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}$.

La vitesse de rotation instantanée :

Si $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ est variable avec le temps, alors $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{k}$ représente la vitesse de rotation instantanée. Pour discerner la vitesse angulaire constante dans le mouvement circulaire uniforme de la vitesse de rotation instantanée, on note cette dernière conventionnellement par $\vec{\Omega}(t)$.

Loi de composition des accélérations dans le cas de rotation :

Pour arriver à la relation qui entre les différents accélérations nous avons suivre la même méthode que celle des vitesses.
En dérivant les vecteurs unitaires $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ de (R'), nous obtenons :

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i}'\right). \qquad (2\text{-}210)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i}'}{dt} . \qquad (2\text{-}211)$$

Par analogie pour les autres dérivées des vecteurs unitaires de (R'), nous pouvons écrire :

$$\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{j}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{j}'}{dt} \text{ et } \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{k}'}{dt} . \qquad (2\text{-}212)$$

Nous pouvons écrire pour le deuxième terme de l'expression le l'accélération d'entrainement:

$$x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = x'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i}'}{dt}\right) + y'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{j}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{j}'}{dt}\right) +$$
$$z'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{k}'}{dt}\right). \qquad (2\text{-}213)$$

D'où: $$x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}=\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x'\vec{i}'+\vec{\omega}\wedge x'\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y'\vec{j}'+\vec{\omega}\wedge y'\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z'\vec{k}'+\vec{\omega}\wedge z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right). \quad (2\text{-}214)$$

D'où: $$x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x'\vec{i}'+\vec{\omega}\wedge x'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}'\right)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y'\vec{j}'+\vec{\omega}\wedge y'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}'\right)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z'\vec{k}'+\vec{\omega}\wedge z'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}'\right). \quad (2\text{-}215)$$

D'où: $$x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge x'\vec{i}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge x'\vec{i}'\right)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge y'\vec{j}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge y'\vec{j}'\right)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge z'\vec{k}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge z'\vec{k}'\right). \quad (2\text{-}216)$$

D'où: $$x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\left(x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}'\right)+\vec{\omega}\wedge\left[\vec{\omega}\wedge\left(x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}'\right)\right]. \quad (2\text{-}217)$$

D'où: $$x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}+y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}+z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right). \quad (2\text{-}218)$$

Accélération de Coriolis ou complémentaire $\vec{a}_c(t)$:

$$\vec{a}_c(t)=2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}'}{dt}+\dot{y}'\frac{d\vec{j}'}{dt}+\dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)\Leftrightarrow\vec{a}_C(t)=2\left[\dot{x}'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{i}'\right)+\dot{y}'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{j}'\right)+\dot{z}'\left(\vec{\omega}\wedge\vec{k}'\right)\right]. \quad (2\text{-}219)$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}_C(t)=2\left[\left(\vec{\omega}\wedge\dot{x}'\vec{i}'\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\dot{y}'\vec{j}'\right)+\left(\vec{\omega}\wedge\dot{z}'\vec{k}'\right)\right]. \quad (2\text{-}220)$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}_C(t)=2\vec{\omega}\wedge\left(\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'+\dot{z}'\vec{k}'\right). \quad (2\text{-}221)$$

$$\Leftrightarrow\vec{a}_C(t)=2\left[\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r(t)\right]. \quad (2\text{-}222)$$

Alors l'expression qui exprime la relation entre les accélérations du point M en mouvement relatif de rotation devient :

$$\vec{a}_a(t)=\underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{r}'+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\vec{r}'\right)}_{\vec{a}_e(t)}+\underbrace{\ddot{x}'\vec{i}'+\ddot{y}'\vec{j}'+\ddot{z}'\vec{k}'}_{\vec{a}_r(t)}+\underbrace{2\left[\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r\right]}_{\vec{a}_C(t)},\ \text{si}\ \overrightarrow{OO'}\neq\vec{0}. \quad (2\text{-}223)$$

2.6 Exercices

Exercice 1 :

Une rame de tramway démarre d'une station A à $t = 0s$ et arrive à une station B au bout d'un temps t_1 que l'on déterminera.
Le graphe de son accélération en fonction du temps est donné sur la figure (2-17).

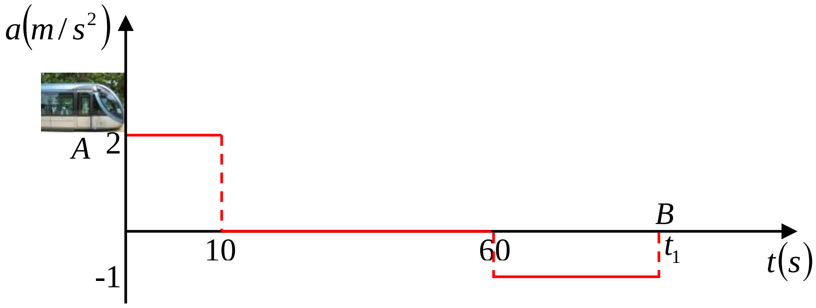


Figure 2-17 *Graphe de l'accélération en fonction du temps d'une rame de tramway.*

1°) Donner l'équation de la vitesse en fonction du temps, ainsi que la nature du mouvement dans chaque phase.
2°) Tracer le graphe de $v(t)$,
3°) Déduire le temps t_1,
4°) A quelle distance de la gare A est située la gare B,
5°) Déterminer les équation horaires $x(t)$ de chaque phase,
6°) Tracer qualitativement le diagramme des espaces $x(t)$.

Exercice 2 :

Un vibreur sinusoïdal représenté par l'équation $x(t) = 2\sin(0{,}1t + 0{,}5)$, (toutes les unités sont dans le système international SI).
Trouver :
a) l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement,
b) la vitesse et l'accélération,
c) les conditions initiales,
d) la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$,
e) dessiner les diagrammes du mouvement.

Exercice 3 :

On donne les équations paramétriques du mobile M par rapport un référentiel : $x = 2t^2 + 1$ et $y = t$.
1°) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire. Quelle est son allure?
2°) Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.
3°) Déterminer la vitesse du mobile $\vec{v}(t)$.
4°) Déterminer l'accélération du mobile $\vec{a}(t)$.
5°) Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération.
6°) Déduire le rayon de courbure $\rho(t)$.

Exercice 4 :

Un point matériel M se déplace sur le plan (Oxy) suivant sa trajectoire définit en coordonnées polaires par l'équation $r = b - c.\cos\varphi$ tel que : $\varphi = \omega t$ et b, c et ω sont des constantes positives.

1°) Ecrire les expressions générales du vecteur vitesse et accélération dans le repère des coordonnées polaires.

2°) Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ et du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du mouvement dans le repère des coordonnées polaires puis déduire $\|\vec{v}(t)\|$ et $\|\vec{a}(t)\|$.

3°) Quelle est la condition nécessaire pour que le mouvement du point M soit circulaire?

4°) Supposant que le mouvement est circulaire, écrire les expressions de $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ puis tracer un schéma expliquant ces gradeurs.

Exercice 5 :

On donne les coordonnées d'un point M suivant ces relations : $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ et $z = h\varphi$.

1°) Ecrire le vecteur position du point M dans le repère des coordonnées cylindriques puis calculer $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$.

2°) Monter que le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ forme un angle constant avec le plan (Oxy).

3°) Comment devient il le vecteur d'accélération $\vec{a}(t)$ si la vitesse angulaire est constante?

4°) Calculer le rayon de courbure $\rho(t)$.

Exercice 6 :

1°) La masse m d'un objet sphérique, de rayon R et de centre O est répartie avec une densité volumique $\rho = \dfrac{dm}{dV}$ (dm est la masse d'un élément de volume dV de la sphère), ρ est donnée en tout point M ($\|\overrightarrow{OM}\| = r$) de la sphère par :

$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r}{R}}$, ρ_0 est une constante.

a°) Tracer qualitativement ρ en fonction de r,

b°) Déterminer la masse m de la sphère.

2°) En utilisant le système de coordonnées, polaires, cylindriques ou sphériques, déterminé :

a°) l'aire de la surface comprise entre deux cercles concentriques (de même centre) de rayons R_1 et $R_2 = 2R_1$.

b°) l'aire de la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.

Exercice 7 :

Soit un référentiel $R(Oxy)$ fixe et un $R'(Ox'y')$ mobile. Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux selon (Ox) et (Oy) respectivement. Les vecteurs unitaires $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ sont perpendiculaires entre eux selon (Ox') et (Oy'), respectivement. (Figure 2-18). Le référentiel R' tourne par rapport à R autour de l'axe (Oz) perpendiculaire au plan (Oxy) avec une vitesse angulaire ω

constante. Un point M est mobile sur l'axe (Ox') suivant la loi $\overrightarrow{OM} = ae^{\theta}\vec{i}'$ avec a est un constante et $\theta = \omega t$.

1°) Déterminer la vitesse absolue $\vec{v}_a$ et l'accélérations absolue $\vec{a}_a$ du point matériel M de façon direct.

2°) Déterminer la vitesse relative $\vec{v}_r$, la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ de M, puis déduire sa vitesse absolue.

3°) Déterminer l'accélération relative $\vec{a}_r$, l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e$, et l'accélération de Coriolis $\vec{\gamma}_C$ puis déduire son accélération absolue.

4°) Vérifier que $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$.

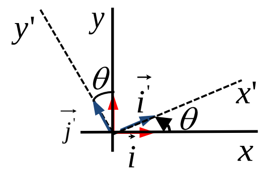


Figure 2-18 *Référentiel $R(Oxy)$ fixe et un $R'(Ox'y')$ mobile et les vecteurs unitaires $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ sont perpendiculaires entre eux selon (Ox') et (Oy').*

Exercice 8 :

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. Dans un référentiel $R(Oxy)$ lié à cet immeuble, la chute de celle-ci s'effectue verticalement selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{g} = -g\vec{k}$ (voir la figure 2-19).

1°) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans un référentiel $R'(Ox'y')$.

Quelle est la nature de la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une $R'(Ox'y')$ lié à une voiture de déplaçant suivant un mouvement rectiligne de vitesse $\vec{v} = v\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher.

Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(Ox'y')$.

2°) Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans le même référentiel $R'(Ox'y')$ si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{a}_e = a_e\vec{i}$. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(Ox'y')$.

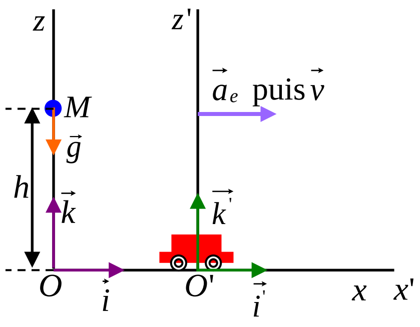


Figure 2-19

Exercice 9 :

Un panneau de faibles dimensions, assimilable à un point matériel M de masse m, glisse sans frottement sur une tige rigide (D). La tige (D) tourne dans un plan horizontal (xOy) autour de l'axe vertical (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, θ représente l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{U}_r)$ et $\vec{U}_r$ un vecteur unitaire de (D) (Figure 2-20).

Le mouvement du point matériel M sur la droite (D) est décrit par l'équation horaire : $r = r_0[1+\sin(\omega t)]$, où r_0 est une constante positive et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r$.

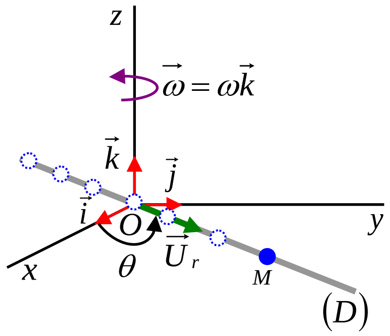


Figure 2-20

On appelle mouvement relatif de M son mouvement sur la droite (D) et mouvement absolu son mouvement par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer, pour l'anneau dans la base $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$:

1°) La vitesse et accélération relatives,
2°) La vitesse et accélération d'entraînement,
3°) L'accélération de Coriolis.

Exercice 10 :

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel (R) muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par: $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t + 1 \\ y(t) = -2t^4 \\ z(t) = 3t^2 \end{cases}$.

Dans un deuxième référentiel (R') muni du repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, avec $\vec{i} = \vec{i}'$, $\vec{j} = \vec{j}'$, $\vec{k} = \vec{k}'$, elles ont pour expression : $\begin{cases} x'(t) = t^2 + t + 2 \\ y'(t) = -2t^4 + 5 \\ z'(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$.

1°) Déterminer les expressions des vitesses $\vec{v}(t)\big|_{M/(R)}$ et $\vec{v}(t)\big|_{M/(R')}$,

2°) Exprimer la vitesse $\vec{v}(t)\big|_{M/(R)}$ en fonction de la vitesse $\vec{v}(t)\big|_{M/(R')}$,

3°) Exprimer l'accélération $\vec{a}(t)\big|_{M/(R)}$ en fonction de l'accélération $\vec{a}(t)\big|_{M/(R')}$,

4°) Quelle est la nature du mouvement du référentiel (R') par rapport au référentiel (R) ?

5°) Supposons (R) Galiléen. (R') est-il aussi Galiléen ? Justifier votre réponse?

Exercice 11 :

Un point O' décrit un cercle de centre O et de rayon r dans le plan xOy autour de Oz. Il tourne avec une vitesse angulaire ω_0 constante et $\theta = \omega_0 t$. Soit un repère $R'(O'x'y'z')$ lié au point O' dans les axes sont parallèles deux à deux à ceux de (R). Un point M se déplace avec une accélération a constante sur l'axe $(O'y')$ parallèle à (Oy). A t=0 s, M coïncide avec O' (voir figure 2-21). Déterminer :

1°) l'expression de vecteur position dans le repère fixe,

2°) les vitesses absolue $\vec{v}_a$, relative $\vec{v}_r$ et d'entraînement $\vec{v}_e$ de M,

3°) les accélérations absolue $\vec{a}_a$, relative $\vec{a}_r$, d'entraînement $\vec{a}_e$, et Coriolis $\vec{a}_C$.

4°) vérifier que $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ et que $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$.

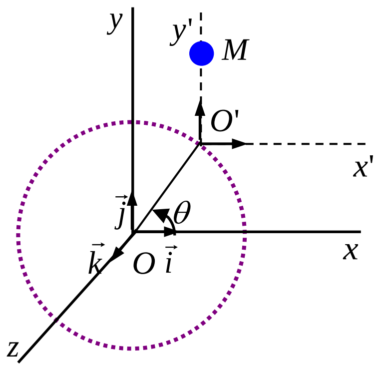


Figure 2-21

Exercice 12 :

Dans le repos un ascenseur commence à descendre du haut d'un immeuble de hauteur h, et au même moment zéro, une voiture passe parallèlement devant cette immeuble avec une vitesse v'.

1°) Si l'ascenseur descende avec une vitesse uniforme v, déterminer sa trajectoire par rapport au conducteur de la voiture,

2°) Répondre sur la même question si l'ascenseur descende avec une accélération $a_a \equiv \gamma_a$ uniforme et une vitesse initiale v_0.

Exercice 13 :

Nous nommerons l'aiguille lent d'une montre par O de longueur L et l'aiguille rapide par M de longueur l (Figure 2-22).

Trouver l'équation de la trajectoire et la vitesse du point M par rapport au repère fixé en O.

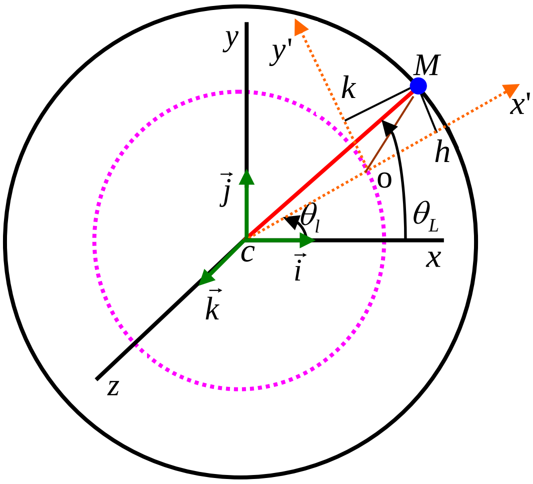


Figure 2-22 *Schéma d'une montre.*

Exercice 14 :

Soit un repère fixe $(Oxyz)$, un point O'se déplace sur l'axe (Oy)avec une vitesse v_0 constante. On lie à O' le repère $R'(O'x'y'z')$ qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse ω constante. Les coordonnées d'un point mobile M dans le repère mobile sont: $x' = at$ et $y' = bt^2$ (a, b constantes positives). A l'instant $t = 0s$ $(O'x')$ est confondu avec (Ox).

Déterminer dans le repère mobile :

1°) La vitesse relative $\vec{v}_r$, d'entraînement $\vec{v}_e$ et en déduire $\vec{v}_a$,

2°) L'accélération relative $\vec{a}_r$, d'entraînement $\vec{a}_e$, de Coriolis $\vec{a}_C$ et en déduire $\vec{a}_a$.

Exercice 15 :

Un point O' décrit un cercle de centre O et de rayon R dans le plan (xOy) autour de l'axe (Oz). Il tourne avec une vitesse angulaire Ω constante et $\theta = \omega_0 t$. Les axes $(O'x')$, $(O'y')$ et $(O'z')$ sont tous le temps parallèles à (Ox), (Oy) et (Oz), un point M décrit un cercle de centre O' et de rayon d dans le plan $(x'O'y')$, il tourne autour de $(O'z')$ avec une vitesse angulaire ω constante. Déterminer :

1°) les vitesses absolue $\vec{v}_a$, relative $\vec{v}_r$ et d'entraînement $\vec{v}_e$ de M et vérifier que $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

2°) les accélérations absolue $\vec{a}_a$, relative $\vec{a}_r$, d'entraînement $\vec{a}_e$, et Coriolis $\vec{a}_C$ et vérifier que $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$.

Exercice 16 :

Dans le plan fixe (Oxy) on considère un système d'axes mobiles $(Ox'y')$ de même origine O et tel que (Ox) fasse un angle variable θ avec (Ox'). Un point M, mobile sur l'axe (Ox') est repère par $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \rho$.

Déterminer :

1°) La vitesse et l'accélération relatives de M,

2°) La vitesse et l'accélération d'entraînement de M,

3°) L'accélération de Coriolis, en déduire $\vec{v}_a$ et $\vec{a}_a$ (composante de v et de a en cordonnées polaires).

2.7 Solutions

Exercice 1 :

1°) Equations de la vitesse et nature :

Temps	$a(m/s^2)$	$v(m/s)$	**Nature du mouvement**
[0,10s]	2	$2t$	$v.a\rangle 0$; mouvement uniformément accéléré
[10,60s]	0	20	mouvement uniforme
$[60, t_1]$	-1	$-t+80$	$v.a\langle 0$; mouvement uniformément retardé

Tableau 2-3 *Equations de la vitesse et la nature du mouvement pour chaque intervalle de temps.*

2°) Graphe de la vitesse $v(t)$:

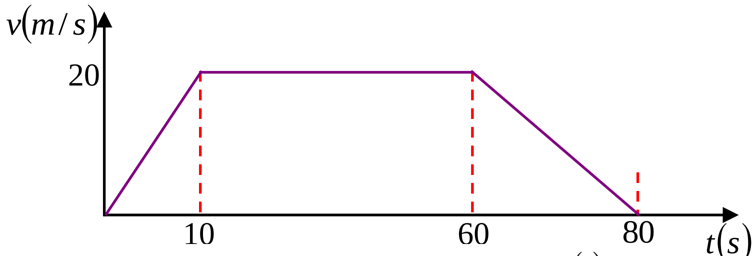


Figure 2-23 *Graphe de la vitesse* $v(t)$.

3°) Valeur de t_1:

Pour $t = t_1$, on a : $v(t_1) = 0$, donc : $t_1 = 80s$.

4°) Distance AB est aire sous $v(t) = 1300 m/s$.

5°) Equations horaires :

Temps	$x(m)$
[0,10s]	t^2
[10,60s]	$20t - 100$
$[60, t_1]$	$-\frac{t^2}{2} + 80t - 1900$

Tableau 2-4 *Equations horaires pour chaque intervalle de temps.*

6°) Graphe de $x(t)$:

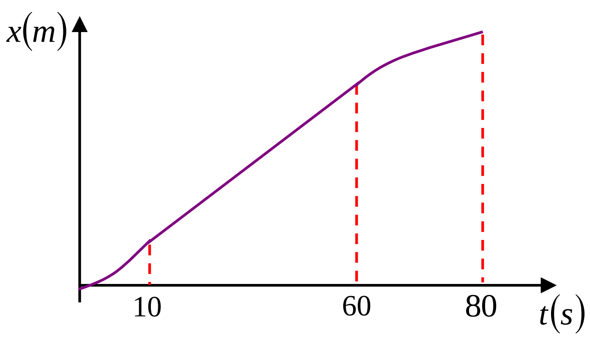


Figure 2-24 *Graphe de* $x(t)$.

Exercice 2 :

L'équation horaire générale du mouvement rectiligne sinusoïdal peut s'écrire : $x(t) = X_{max} \sin(\omega t + \varphi)$.

On a : $x(t) = 2\sin(0{,}1t + 0{,}5)$.

Par identification on trouve :

a) l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale du mouvement :

$$X_{max} = 2m,\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 62{,}8s,\ f = \frac{1}{T} = 1{,}59\ 10^{-2}\ Hz \text{ et } \varphi = 0{,}5rad.$$

b) Calcul de la vitesse et de l'accélération :

$$v(t) = \dot{x}(t) = 0{,}2\cos(0{,}1t + 0{,}5).$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -0{,}02x(t).$$

c) Démonstration des conditions initiales :

$$\text{A}\ t = 0s \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2\sin(0{,}5) \\ v_0 = 0{,}2\cos(0{,}5) \end{cases},$$

$$\text{Donc :} \begin{cases} x_0 = 0{,}95m \\ v_0 = 0{,}17m.s^{-1} \end{cases}.$$

d) Désignation de la position, la vitesse et l'accélération au temps $t = 5s$:

$$\text{A}\ t = 5s \Rightarrow \begin{cases} x = 1{,}68m \\ v = 0{,}11m.s^{-1} \\ a = 0{,}016m.s^{-2} \end{cases}.$$

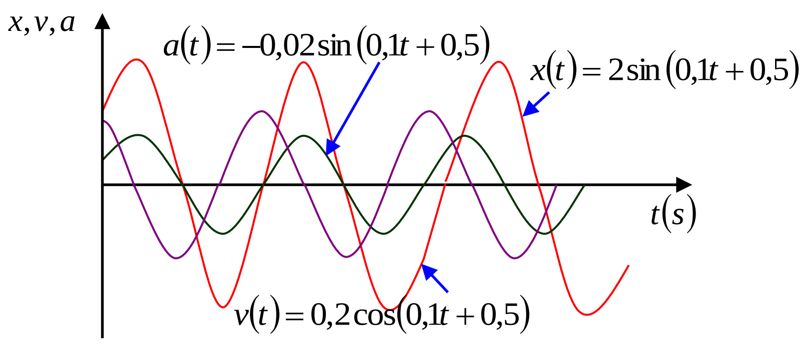


Figure 2-25 *Diagrammes du mouvements.*

Exercice 3 :

Nous avons les équations paramétriques du mobile :

$$\begin{cases} x(t) = 2t^2 + 1. & (1) \\ y(t) = t. & (2) \end{cases}$$

1°/a) Equation de la trajectoire :

On tire le temps de l'équation (2) et en remplacent dans l'équation (1) :

Donc : $x(y) = 2y^2 + 1$, alors l'équation parabolique $x = f(y)$.

1°/b) L'allure de la trajectoire : l'allure de la trajectoire est une parabole.

2°) Expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\left.\overrightarrow{OM}\right|_{(R)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Donc : $\left.\overrightarrow{OM}\right|_{(R)} = (2t^2 + 1)\vec{i} + t\vec{j}$.

3°) Vitesse du mobile $\left.\vec{v}(t)\right|_{(R)}$:

$$\left.\vec{v}(t)\right|_{(R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)} = \frac{d}{dt}\left[(2t^2 + 1)\vec{i} + t\vec{j}\right] = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{(R)}\vec{i} + \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{(R)}\vec{j}.$$

Donc : $\left.\vec{v}(t)\right|_{(R)} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} = 4t\vec{i} + \vec{j}$.

4°) Accélération du mobile $\left.\vec{a}(t)\right|_{(R)} = \left.\vec{\gamma}(t)\right|_{(R)}$:

$$\left.\vec{a}(t)\right|_{(R)} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{(R)} = \left.\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|_{(R)} = \frac{d^2}{dt^2}\left[(2t^2 + 1)\vec{i} + t\vec{j}\right].$$

$$= \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} = \left.\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right|_{(R)}\vec{i} + \left.\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right|_{(R)}\vec{j}.$$

Donc : $\left.\vec{a}(t)\right|_{(R)} = \left.\vec{\gamma}(t)\right|_{(R)} = 4\vec{i} \quad \Rightarrow$ vecteur fixe.

Puisque le vecteur d'accélération dépend un seul vecteur unitaire, alors est un vecteur fixe, donc l'accélération est constante.

5°) Composantes tangentielle et normale de l'accélération $\left.\vec{a}(t)\right|_{(R)}$:

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_T(t)+\vec{a}_N(t)=\left\|\vec{a}_T(t)\right\|\vec{U}_T+\left\|\vec{a}_N(t)\right\|\vec{U}_N \text{ , d'où : } \left\|\vec{a}(t)\right\|^2=\left\|\vec{a}_T(t)\right\|^2+\left\|\vec{a}_N(t)\right\|^2.$$

5°/a) Composante tangentielle de l'accélération $\left\|\vec{a}_T(t)\right\|$:

$$\left\|\vec{a}_T(t)\right\|=\frac{d\left\|\vec{v}(t)\right\|}{dt}=\frac{dv}{dt}.$$

Nous avons : $\left.\vec{v}(t)\right|_{(R)}=4t\vec{i}+\vec{j}$, alors le module de $\left.\vec{v}(t)\right|_{(R)}$ est donc :

$$\left\|\vec{v}(t)\right\|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(4t)^2+(1)^2}=\sqrt{16t^2+1}.$$
$$\left\|\vec{v}(t)\right\|=\sqrt{16t^2+1}.$$

D'où : $$\left\|\vec{a}_T(t)\right\|=\frac{d\left\|\vec{v}(t)\right\|}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{16t^2+1}\right)=\frac{32t}{2\sqrt{16t^2+1}}.$$

Donc : $$\left\|\vec{a}_T(t)\right\|=\frac{16t}{\sqrt{16t^2+1}}.$$

5°/b) Composante normale de l'accélération $\left\|\vec{a}_N(t)\right\|$:

Nous avons : $\left\|\vec{a}(t)\right\|^2=\left\|\vec{a}_T(t)\right\|^2+\left\|\vec{a}_N(t)\right\|^2$.

$$\left\|\vec{a}(t)\right\|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(4)^2+(0)^2}=4m/s^2.$$

$$\left\|\vec{a}(t)\right\|^2=\left\|\vec{a}_T(t)\right\|^2+\left\|\vec{a}_N(t)\right\|^2\Rightarrow\left\|\vec{a}_N(t)\right\|^2=\left\|\vec{a}(t)\right\|^2-\left\|\vec{a}_T(t)\right\|^2,$$

$$\Rightarrow\left\|\vec{a}_N(t)\right\|=\sqrt{\left\|\vec{a}(t)\right\|^2-\left\|\vec{a}_T(t)\right\|^2},$$

$$\Rightarrow\left\|\vec{a}_N(t)\right\|=\sqrt{(4)^2-\left(\frac{16t}{\sqrt{16t^2+1}}\right)^2},$$

Donc : $$\left\|\vec{a}_N(t)\right\|=\frac{4}{\sqrt{16t^2+1}}.$$

6°) Rayon de courbure $\rho(t)$:

$$\rho(t)=\frac{v^2}{a_N}=\frac{\left\|\vec{v}(t)\right\|^2}{\left\|\vec{a}_N(t)\right\|},$$

d'où : $\rho(t)=\dfrac{\left(\sqrt{16t^2+1}\right)^2}{\dfrac{4}{\sqrt{16t^2+1}}}=\dfrac{\left(16t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{4}$, donc : $\rho(t)=\dfrac{\left(16t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{4}$.

Exercice 4 :

On a : $r=b-c.\cos\varphi$ et $\varphi=\omega t$.

1°) Expressions générales du vecteur vitesse et accélération dans le repère des coordonnées polaires :

1°/a) On coordonnées polaires la vitesse peut s'écrire : $\vec{v}(t)=\dot{r}\vec{U}_r+r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi$.

1°/b) On coordonnées polaires l'accélération peut s'écrire : $\vec{a}(t)=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\vec{U}_r+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)\vec{U}_\varphi$.

2°) Expressions des composantes du vecteur vitesse et accélération dans le repère des coordonnées polaires :

$$\vec{v}(t)=\dot{r}\vec{U}_r+r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi=c\omega\sin\varphi\vec{U}_r+\omega(b-c.\cos\varphi)\vec{U}_\varphi \Leftrightarrow \vec{v}(t)=\begin{pmatrix} c\omega\sin\varphi \\ \omega(b-c.\cos\varphi)\end{pmatrix},$$ avec : $\dot{\varphi}=\omega$.

On déduire : $\left\|\vec{v}(t)\right\|=\sqrt{c^2\omega^2\sin^2\varphi+\omega^2(b-c.\cos\varphi)^2}=\omega\sqrt{c^2+b^2}$.

On coordonnées polaires l'accélération peut s'écrire :

$$\vec{a}(t)=\left(\ddot{r}-r\dot{\varphi}^2\right)\vec{U}_r+\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)\vec{U}_\varphi=\begin{pmatrix}\ddot{r}-r\dot{\varphi} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\end{pmatrix}\Leftrightarrow \vec{a}(t)=\begin{pmatrix} c\omega^2\cos\varphi-\omega(b-c.\cos\varphi) \\ 2c\omega^2\sin\varphi\end{pmatrix},$$ avec : $\ddot{\varphi}=0$.

On déduire : $\left\|\vec{a}(t)\right\|=\omega^2\sqrt{4c^2+b^2}$.

3°) La condition nécessaire pour que le mouvement du point M soit circulaire :

$$\frac{d\left\|\vec{v}(t)\right\|}{d\varphi}=0 \Rightarrow c\sin\varphi=0.$$

$\Rightarrow c=0$, avec φ est une variable.

Donc : $r=b$.

4°) Les expressions de $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ si le mouvement est circulaire :

$\vec{r}(t) = r\vec{U}_r = b\vec{U}_r$.
$\vec{v}(t) = b\omega\vec{U}_\varphi$.
$\vec{a}(t) = -b\omega^2\vec{U}_r$.

Schéma expliquant les gradeurs $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$:

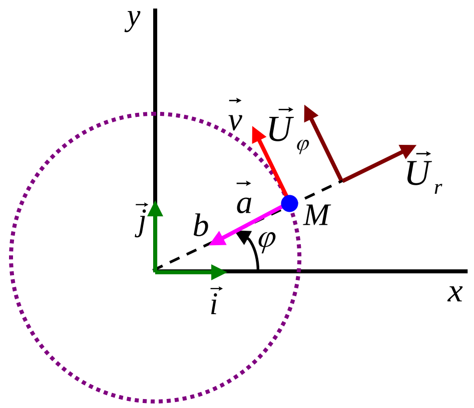


Figure 2-26 *Schéma expliquant les gradeurs* $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ *et* $\vec{a}(t)$.

Exercice 5 :

On a les coordonnées suivantes : $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ et $z = h\varphi$.
$\varphi = \omega t$.

1°/a) Expression du vecteur position du point M dans le repère des coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{U}_\rho + z\vec{k} \text{ avec } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = a = C^{ste}.$$

1°/b) Expression du vecteur vitesse du point M dans le repère des coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\vec{U}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi + \dot{z}\vec{k} \text{ et donc : } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\rho} = \dot{a} \\ \rho\dot{\varphi} = a\dot{\varphi} \\ \dot{z} = h\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ h\omega \end{pmatrix}.$$

1°/c) Expression du vecteur accélération du point M dans le repère des coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2\right)\vec{U}_\rho + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\ddot{\varphi}\right)\vec{U}_\varphi + \ddot{z}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \dot{\rho}\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

Alors : $\vec{a}(t)=\begin{pmatrix} -a\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=-a\omega^2\vec{U}_\rho$.

$\left\|\vec{v}(t)\right\|=\omega\sqrt{a^2+h^2}=C^{ste}$.

2°) Démonstration que le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ forme un angle constant avec le plan (Oxy) :
$\vec{v}(t)\perp\vec{U}_\rho$ donc l'angle qu'il fait avec le plan (Oxy) st donnée par : $\alpha=\left(\vec{U}_\varphi,\vec{v}\right)$.

$$\tan\alpha=\frac{v_z}{v_\varphi}=\frac{h\omega}{a\omega}=\frac{h}{a}\Rightarrow\tan\alpha=C^{ste}.$$

$$\Rightarrow\alpha=C^{ste}.$$

3°) Si la vitesse angulaire est constante, le vecteur d'accélération $\vec{a}(t)$ devient :
$\vec{a}(t)//(Oxy)$ et passe par l'axe du cylindre $\vec{a}(t)=-a\omega^2\vec{U}_\rho$.

4°) Rayon de courbure $\rho(t)$:

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_T(t)+\vec{a}_N(t)=\left\|\vec{a}_T(t)\right\|\vec{U}_T+\left\|\vec{a}_N(t)\right\|\vec{U}_N.$$

$$\left\|\vec{a}_T(t)\right\|=\frac{d\left\|\vec{v}(t)\right\|}{dt}=0,$$

$$\left\|\vec{a}_N(t)\right\|=\frac{v^2}{\rho(t)}\Rightarrow\rho(t)=\frac{v^2}{\left\|\vec{a}_N(t)\right\|}=\frac{\omega^2\left(a^2+h^2\right)}{a\omega^2}.$$

Donc: $\rho(t)=\dfrac{a^2+h^2}{a}=R$.

Exercice 6 :

1°/a) La variation de ρ en fonction de h :

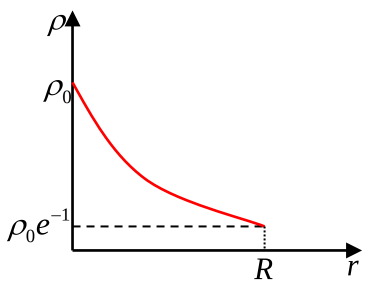


Figure 2-27 *Variation de ρ en fonction de h.*

1°/b) La masse m de la sphère :

On a : $\rho(r)=\rho_0 e^{-\frac{r}{R}}$ et $\rho=\frac{dm}{dV} \Rightarrow dm=\rho dV$.

$$\Rightarrow m=\int \rho dV .$$

En coordonnées sphériques : $dV=r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta$,

d'où : $m=\int \rho dV \Rightarrow m=\int_0^R \rho_0 r^2 e^{-\frac{r}{R}}dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=4\pi\rho_0\int_0^R \rho_0 r^2 e^{-\frac{r}{R}}dr$.

A l'aide de l'intégrale par partie (deux fois), on trouve : $m=4\pi\rho_0 R^3\left(2-5e^{-1}\right)$.

2°/a) A l'aide de la surface comprise entre deux cercles concentriques (de même centre) de rayons R_1 et $R_2=2R_1$.

En fonction des coordonnées polaires (ρ,φ), on a :

$$dS=rdrd\varphi \Rightarrow S=\int_{R_1}^{R_2} rdr\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]^{R_2=2R_1}=3\pi R_1^2 .$$

2°/b) A l'aide de la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.

En fonction des coordonnées cylindriques (ρ,φ,z), on a :

$$dS=Rd\varphi dz .$$

Elément de surface latérale du cylindre $\Rightarrow S=\int_0^h Rdz\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi Rh$.

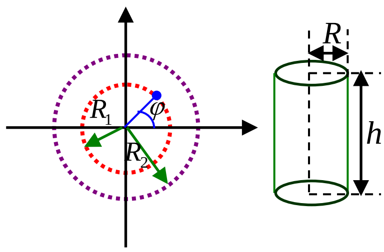


Figure 2-28

Exercice 7 :

1°/a) Vitesse absolue $\vec{v}(t)\Big|_{(R)}$:

Nous avons : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'M}=ae^{\theta}\vec{i}'$, avec $\overrightarrow{OO'}=\vec{0}$.

$$\vec{v}(t)\Big|_{(R)}=\vec{v}_a(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Bigg|_{(R)}=a\dot{\theta}e^{\theta}\vec{i}'+ae^{\theta}\frac{d\vec{i}'}{dt}\Bigg|_{(R)} .$$

Donc : $\vec{v}(t)\Big|_{(R)}=\vec{v}_a(t)=a\omega e^{\theta}\left[\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right]+a\omega e^{\theta}\left[-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right]$.

$$\vec{i}'=\left\|\overrightarrow{i'_x}\right\|\vec{i}+\left\|\overrightarrow{i'_y}\right\|\vec{j}=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j} .$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\vec{j} = \theta\overrightarrow{U_\theta}.$$

1°/b) Accélération absolue $\vec{a}(t)\big|_{(R)}$:

$$\vec{a}(t)\big|_{(R)} = \vec{a}_a(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}\bigg|_{(R)} = \frac{d\vec{v}_a(t)}{dt}.$$

$$\vec{a}_a(t) = a\omega^2 e^\theta\left[\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right] + a\omega e^\theta\left[-\dot{\theta}\sin\theta\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\vec{j}\right]$$
$$+ a\omega^2 e^\theta\left[-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right] + a\omega e^\theta\left[-\dot{\theta}\cos\theta\vec{i} - \dot{\theta}\sin\theta\vec{j}\right].$$

Donc : $\vec{a}_a(t) = 2a\omega^2 e^\theta\left[-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right].$

2°/a) Vitesse relative $\vec{v}(t)\big|_{(R')}$:

$$\vec{v}(t)\big|_{(R')} = \overrightarrow{v_r}(t) = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\bigg| = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\bigg|_{(R)}.$$

Donc : $\overrightarrow{v_r}(t) = a\dot{\theta}e^\theta\vec{i}' = a\omega e^\theta\vec{i}'.$

2°/b) Vitesse d'entraînement $\vec{v}(t)\big|_{(R')/(R)}$:

$$\vec{v}(t)\big|_{(R')/(R)} = \vec{v}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}.$$

Nous avons : $\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$, donc : $\vec{v}_e(t) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = a\omega e^\theta\vec{j}'.$

3°/a) Accélération relative $\vec{a}(t)\big|_{(R')}$:

$$\vec{a}(t)\big|_{(R')} = \overrightarrow{a_r}(t) = \frac{d\overrightarrow{v_r}(t)}{dt}\bigg|_{(R')} = a\omega^2 e^\theta\vec{i}'.$$

Donc: $\vec{a}_r(t) = a\omega^2 e^\theta\vec{i}'.$

3°/b) Accélération d'entraînement $\vec{a}(t)\big|_{(R')/(R)}$:

$$\vec{a}(t)\big|_{(R')/(R)} = \vec{a}_e(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right).$$

Nous avons : $\overrightarrow{OO'}=\vec{0}$, d'où : $\vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\vec{a}_e(t)=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)=\vec{\omega}\wedge\vec{v}_e(t)$

Donc : $\vec{a}_e(t)=-a\omega^2e^{\theta}\vec{j}'$.

3°/c) Accélération de Coriolis ou complémentaire $\vec{a}_C(t)$:

$\vec{a}_C(t)=2\left[\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r(t)\right]$.

Donc : $\vec{a}_C(t)=2a\omega^2e^{\theta}\vec{j}'$.

4°) Vérification :

4°/a) Loi de la composition des vitesses : $\vec{v}_a(t)=\vec{v}_r(t)+\vec{v}_e(t)=a\omega e^{\theta}\vec{i}'+a\omega e^{\theta}\vec{j}'$.

$$\begin{cases}\vec{i}'=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\\ \vec{j}'=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\end{cases}.$$

Donc : $\vec{v}_a(t)=a\omega e^{\theta}\left[\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right]+a\omega e^{\theta}\left[-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right]$.

4°/b) Loi de la composition des accélérations : $\vec{a}_a(t)=\vec{a}_r(t)+\vec{a}_e(t)+\vec{a}_C(t)$.

D'où : $\vec{a}_a(t)=a\omega^2e^{\theta}\vec{i}'-a\omega^2e^{\theta}\vec{j}'+2a\omega^2e^{\theta}\vec{j}'$.

D'où : $\vec{a}_a(t)=a\omega^2e^{\theta}\left[\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right]-a\omega^2e^{\theta}\left[-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right]$
$+2a\omega^2e^{\theta}\left[-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right]$.

Donc : $\vec{a}_a(t)=2a\omega^2e^{\theta}\left[-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}\right]$.

Exercice 8 :

Le vecteur position de la bille dans le référentiel $R'(Ox'y')$ est :

$\overrightarrow{O'M}=x'\vec{i}'+z'\vec{k}'$ or $\vec{i}=\vec{i}'$ et $\vec{k}=\vec{k}'$ alors $\overrightarrow{O'M}=x'\vec{i}+z'\vec{k}$.

1°) On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{O'M}\Rightarrow\overrightarrow{O'M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{O'O}$ où $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur position de la bille dans le référentiel $R(Oxy)$. La bille est en mouvement de chute libre sans vitesse initiale dans $R(Oxy)$:

$$\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{g}{2}t^2+h\right)\vec{k}.$$

Dans le premier cas :

$\dfrac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}=\vec{v}(t)=v\vec{i}\Rightarrow\overrightarrow{O'O}=\vec{v}(t)t=vt\vec{i}$, car à $t=0s$: O' est confondu à O.

Ainsi, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + z'\vec{k} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'O} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = \left(-\frac{g}{2}t^2 + h\right)\vec{k} - vt\vec{i}$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x' = -vt \\ z' = -\frac{g}{2}t^2 + h \end{array}\right.,$$

$\Rightarrow z'(x') = -\frac{g}{2v}x' + h$ la trajectoire est une parabole.

2°) Dans le deuxième cas :

$$\frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2} = \vec{a}_e = a_e\vec{i} \Rightarrow \overrightarrow{O'O} = \frac{a_e}{2}t^2\vec{i}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + z'\vec{k} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{O'O} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'M} = \left(-\frac{g}{2}t^2 + h\right)\vec{k} - \frac{a_e}{2}t^2\vec{i}$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x' = -\frac{a_e}{2}t^2\vec{i} \\ z' = -\frac{g}{2}t^2 + h \end{array}\right.,$$

$\Rightarrow z'(x') = -\frac{g}{a_e}x' + h$ la trajectoire est une droite.

Exercice 9 :

1°) Vitesse relative $\vec{v}_r$:

On a le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'M}$.

A $t = 0s$: O' est confondu à O, alors $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M}$.

Donc la vitesse relative est donnée par: $\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\vec{U}_r = \overrightarrow{C^{ste}}} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r = r_0\omega\cos(\omega t)\vec{U}_r$.

L'accélération relative $\vec{a}_r$ est donc :

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{\vec{U}_r = \overrightarrow{C^{ste}}} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{U}_r = -r_0\omega^2\sin(\omega t)\vec{U}_r.$$

2°) Vitesse d'entraînement est telle que :

$\vec{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{r = C^{ste}} = r\frac{d\vec{U}_r}{dt} = r\omega\vec{U}_\theta = r_0\omega[1 + \sin(\omega t)]\vec{U}_\theta$ et l'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right|_{r=C^{ste}} = r\frac{d\vec{U}_\theta}{dt} = r\omega\vec{U}_\theta = -r\omega^2\vec{U}_r = r_0\omega^2[1+\sin(\omega t)]\vec{U}_r .$$

3°) Accélération de Coriolis est :

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r) = 2r_0\omega^2\cos(\omega t)\vec{k}\wedge\vec{U}_r = 2r_0\omega^2\cos(\omega t)\vec{U}_\theta .$$

Exercice 10 :

Soient : $\begin{cases} x(t) = t^2 - 4t + 1 \\ y(t) = -2t^4 \\ z(t) = 3t^2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x'(t) = t^2 + t + 2 \\ y'(t) = -2t^4 + 5 \\ z'(t) = 3t^2 - 7 \end{cases}$.

5°) Expressions des vitesses $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)}$ et $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')}$:

1°/a) L'expression de la vitesse $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)}$:

$$\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{M/(R)} = \frac{d}{dt}\left[(t^2-4t+1)\vec{i} - 4t^4\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right] \Rightarrow \left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)} = (2t-4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k} .$$

1°/b) L'expression de la vitesse $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')}$:

$$\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{M/(R')} = \frac{d}{dt}\left[(t^2+t+2)\vec{i} + (5-2t^4)\vec{j} + (3t^2-7)\vec{k}\right]_{(R')} .$$

$$\Rightarrow \left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')} = (2t+1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k} .$$

2°) Expression de la vitesse $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)}$ en fonction de la vitesse $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')}$:

On a $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)} = (2t-4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k} = (2t+1)\vec{i} - 5\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k} \Rightarrow \left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)} = \left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')} - 5\vec{i}$.

3°) Expression de l'accélération $\left.\vec{a}(t)\right|_{M/(R)}$ en fonction de l'accélération $\left.\vec{a}(t)\right|_{M/(R')}$:

$$\left.\vec{a}(t)\right|_{M/(R)} = \left.\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right|_{M/(R)} = \frac{d}{dt}\left(\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')} - 5\vec{i}\right) \Rightarrow \left.\vec{a}(t)\right|_{M/(R)} = \left.\vec{a}(t)\right|_{M/(R')} .$$

Où bien : on a $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R)} = (2t-4)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$ et $\left.\vec{v}(t)\right|_{M/(R')} = (2t+1)\vec{i} - 8t^3\vec{j} + 6t\vec{k}$.

$\vec{a}(t)\Big|_{M/(R)} = 2\vec{i} - 24t^2\vec{j} + 6\vec{k}$ et $\vec{a}(t)\Big|_{M/(R')} = 2\vec{i} - 24t^2\vec{j} + 6\vec{k}$.

Finalement : $\vec{a}(t)\Big|_{M/(R)} = \vec{a}(t)\Big|_{M/(R')}$.

4°) La nature du mouvement du $(R')/(R)$:

On a :

- ☑ $\vec{\omega}(R'/R) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ translation.
- ☑ $\vec{v}(t)\Big|_{M/(R)} - \vec{v}(t)\Big|_{M/(R')} = 5\vec{i}$ $\Rightarrow$ rectiligne.
- ☑ $\vec{a}(t)\Big|_{M/(R)} = \vec{a}(t)\Big|_{M/(R')}$ $\Rightarrow$ uniforme.

(R') est en mouvement de translation rectiligne uniforme.

5°) Si (R) est galiléen alors (R') est aussi galiléen.
Car (R') est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à (R).

Exercice 11 :

On a : $\theta = \omega_0 t$ et $\vec{i} = \vec{i}'$, $\vec{j} // \vec{j}'$, $\vec{k} = \vec{k}'$.

1°) Expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le repère fixe (R) :

D'après la relation de Charles : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'M}$.

$$\overrightarrow{OO'} = \left\|\overrightarrow{OO'}\right\|_x \vec{i} + \left\|\overrightarrow{OO'}\right\|_y \vec{j} .$$

En utilisant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \left\|\overrightarrow{OO'}\right\|_x = r\cos\theta \\ \left\|\overrightarrow{OO'}\right\|_y = r\sin\theta \end{cases},$$

D'où : $\overrightarrow{OO'} = r\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)$.

$$\overrightarrow{O'M} = \left\|\overrightarrow{O'M}\right\|_{x'} \vec{i}' + \left\|\overrightarrow{O'M}\right\|_{y'} \vec{j}' .$$

Le point M se déplace sur l'axe $(o'y') \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = \left\|\overrightarrow{O'M}\right\|_{y'} \vec{j}'$, car : $\left\|\overrightarrow{O'M}\right\|_{x'} \vec{i}' = \vec{0}$.

Le point M se déplace avec une accélération a constante sur l'axe $(O'y')$ parallèle à (Oy), alors :

$$y'(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y'_0 .$$

On sait qu'à $t = 0s$, M coïncide avec $O' \Rightarrow y'_0 = 0$, sa vitesse initiale $v_0 \rangle 0$. On peut alors écrire que :

$y'(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t=\left\|\overrightarrow{O'M}\right\|_{y'}$ et donc : $\overrightarrow{O'M}=\left(\frac{1}{2}at^2+v_0t\right)\vec{j}'$.

On a aussi : $(O'y')//(Oy) \Rightarrow \vec{j}//\vec{j}' \Rightarrow \vec{j}=\vec{j}'$, on obtient alors : $\overrightarrow{O'M}\Big|_{(R')}=\left(\frac{1}{2}at^2+v_0t\right)\vec{j}$.

On remplace les expressions de $\overrightarrow{OO'}$ et $\overrightarrow{O'M}$ dans l'équation de $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OM}\Big|_{(R)}=r(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})+\left(\frac{1}{2}at^2+v_0t\right)\vec{j}$,

Donc l'expression du vecteur position devient : $\overrightarrow{OM}\Big|_{(R)}=r\cos\theta\vec{i}+\left(\frac{1}{2}at^2+v_0t+r\sin\theta\right)\vec{j}$.

2°) Les vitesses absolue $\vec{v}_a$, relative $\vec{v}_r$ et d'entraînement $\vec{v}_e$ de M :

2°/a) Expression du vecteur vitesse absolue $\vec{v}_a(t)$ dans le repère fixe (R) :

Par définition : $\vec{v}(t)\Big|_{M/(R)}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Bigg|_{M/(R)}$.

Alors : $\vec{v}(t)\Big|_{M/(R)}=\frac{d}{dt}\left[r\cos\theta\vec{i}+\left(\frac{1}{2}at^2+v_0t+r\sin\theta\right)\vec{j}\right]$,

Donc: $\vec{v}(t)\Big|_{M/(R)}=-r\omega_0\sin\theta\vec{i}+(at+v_0+r\omega_0\cos\theta)\vec{j}$.

2°/b) Expression du vecteur vitesse relative $\vec{v}_r(t)$ dans le repère mobile (R') :

$\vec{v}(t)\Big|_{M/(R')}=\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\Bigg|_{M/(R')}=\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{2}at^2+v_0t\right)\vec{j}\right]\Bigg|_{(R')}$,

Donc: $\vec{v}(t)\Big|_{M/(R')}=(at+v_0)\vec{j}$.

2°/c) Expression du vecteur vitesse d'entrainement $\vec{v}_e(t)$:

$\vec{v}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\vec{v}_e(t)=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$.

$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}=\vec{0}$, car il n'ya pas de rotation de $(R')/(R)$ (les axes restent parallèles deux à deux durant tout le mouvement $\Rightarrow \vec{\omega}=\vec{0}$.

Alors : $\vec{v}_e(t)=\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}=\frac{d}{dt}[r(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j})]\Rightarrow \vec{v}_e(t)=r\omega_0(-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j})$.

3°) Les accélérations absolue $\vec{a}_a$, relative $\vec{a}_r$, d'entraînement $\vec{a}_e$, et Coriolis $\vec{a}_C$:

3°/a) Expression du vecteur accélération absolue $\vec{a}_a(t)$ dans le repère fixe (R) :

$$\vec{a}(t)\Big|_{(R)} = \overrightarrow{a_a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}\Bigg|_{(R)} = \frac{d\vec{v}_a(t)}{dt} \Rightarrow \overrightarrow{a_a}(t) = \frac{d}{dt}\left[-r\omega_0 \sin\theta\vec{i} + (at + v_0 + r\omega_0\cos\theta)\vec{j}\right],$$

Donc : $\overrightarrow{a_a}(t) = -r\omega_0^2\cos\theta\vec{i} + \left(a - r\omega_0^2\sin\theta\right)\vec{j}$, car : $\dfrac{d\vec{i}}{dt} = \dfrac{d\vec{j}}{dt} = \vec{0}$.

3°/b) Expression du vecteur accélération relative $\vec{a}_r(t)$ dans le repère mobile (R') :

$$\vec{a}(t)\Big|_{(R')} = \overrightarrow{a_r}(t) = \frac{d\overrightarrow{v_r}(t)}{dt}\Bigg|_{(R')} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a_r}(t) = \frac{d}{dt}\left[(at + v_0)\vec{j}\right],$$

Donc: $\overrightarrow{a_r}(t) = a\vec{j}$, car : $(O'y') // (Oy) \Rightarrow \vec{j} // \vec{j'} \Rightarrow \vec{j} = \vec{j'}$.

3°/c) Expression du vecteur accélération d'entraînement $\vec{a}_e(t)$:

$$\vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)} = \vec{a}_e(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right).$$

On a : $\vec{\omega} = \vec{0}$, d'où : $\left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \vec{0}$ et $\vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \vec{0}$.

Alors: $\vec{a}_e(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \dfrac{d^2}{dt}\left[r\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)\right],$

Donc : $\vec{a}_e(t) = -r\omega_0^2\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right).$

3°/d) Expression du vecteur accélération Coriolis $\vec{a}_C(t)$:

$\vec{a}_C(t) = 2\left[\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(t)\right] = \vec{0}$, car : $\vec{\omega} = \vec{0}$.

4°) Vérification que $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ et $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Leftrightarrow (at + v_0)\vec{j} + r\omega_0\left(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}\right) = -r\omega_0\sin\theta\vec{i} + (at + v_0 + r\omega_0\cos\theta)\vec{j} = \vec{v}_a,$$

Donc: $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C \Leftrightarrow a\vec{j} + \left[-r\omega_0^2\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)\right] + \vec{0} = -r\omega_0^2\cos\theta\vec{i} + \left(a - r\omega_0^2\sin\theta\right)\vec{j} = \vec{a}_a .$$

Conclusion : on vérifie bien les lois de composition des vitesses et des accélérations.

Exercice 12 :

Soit $R(Oxyz)$ le repère fixe de l'immeuble et $R'(O'x'y'z')$ le repère de la voiture.
A $t = 0s$: (Ox) se confond avec (Ox') et sont supposée sur la terre,
(Oy) se confond avec (Oy') et sont supposée sur la terre.

La vitesse de l'origine O' par rapport (R) est $\vec{v}(O')\big|_{(R)} = v't$, car $\vec{i} // \vec{i'}$ et $\vec{j} // \vec{j'}$.

Le mouvement de l'ascenseur par rapport à (R) est rectiligne mais par rapport à (R'), c'est une chute.

1°) Equation de la trajectoire :
Si l'ascenseur descende avec une vitesse v.

Sa vitesse par rapport à (R) est : $\vec{v}(t)\big|_{(R)} = \vec{v}_a = -v\vec{j}$.

Sa vitesse par rapport à (R') est : $\vec{v}(t)\big|_{(R')} = \vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e$, avec $\vec{v}_e = \vec{v}(O') = v'\vec{i}$.

$\vec{v}_r = -v'\vec{i} - v\vec{j}$.

D'où : $\begin{cases} x'(t) = -v't \\ y'(t) = -vt + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{x'}{v'} \\ dy' = -vdt \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^h dy' = -\int_0^t vdt.$$

Donc l'expression de l'équation de la trajectoire est : $y'(x') = -\dfrac{v}{v'}x' + h$.

2°) Equation de la trajectoire :
Si l'ascenseur descende avec une accélération a et une vitesse initiale v_0.

Sa vitesse par rapport à (R) est : $\vec{v}(t)\big|_{(R)} = \vec{v}_a = ?$.

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} \Rightarrow d\vec{v}_a = \vec{a}_a dt.$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_a} dv_a = \int_0^t a_a dt.$$

$$\Rightarrow v_a - v_0 = -a_a t.$$

$$\Rightarrow v_a = -a_a t + v_0.$$

Sa vitesse par rapport à (R') est : $\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e = v'\vec{i} - (a_a t + v_0)\vec{j}$.

D'où : $\begin{cases} x'(t) = -v't \\ y'(t) = -\dfrac{1}{2}a_a t^2 + v_0 t + h \end{cases}$.

Donc l'expression de l'équation de la trajectoire est : $y'(x') = -\frac{a_a}{2v'}x'^2 + \frac{v_0}{v'}x' + h$.

Exercice 13 :

Soient ω_l la vitesse angulaire de l'aiguille lente, avec : $\theta_l = \omega_l t$,

ω_L la vitesse angulaire de l'aiguille rapide, avec : $\theta_L = \omega_L t$.

Donc : l'angle entre les deux aiguille est $\theta_L - \theta_l = (\omega_L - \omega_l)t$.

Les coordonnées de M par rapport à (R') sont :

$$\begin{cases} x' = oh = ck - co \\ y' = ok \end{cases}, \quad (1)$$

avec : $\begin{cases} oM = L \\ co = l \end{cases}$.

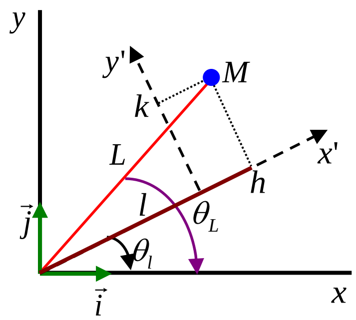


Figure 2-29

$$\begin{cases} ch = cM\cos(\theta_L - \theta_l) = L\cos(\omega_L - \omega_l)t \\ ok = cM\sin(\theta_L - \theta_l) = L\sin(\omega_L - \omega_l)t \end{cases}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} x' = L\cos(\omega_L - \omega_l)t - l \\ y' = L\sin(\omega_L - \omega_l)t \end{cases}. \quad (3)$$

Donc l'équation de la trajectoire de M par rapport à (R') est :

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} x' + l = L\cos(\omega_L - \omega_l)t \\ y' = L\sin(\omega_L - \omega_l)t \end{cases}, \quad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x'+l)^2 = [L\cos(\omega_L - \omega_l)t]^2 \\ (y')^2 = [L\sin(\omega_L - \omega_l)t]^2 \end{cases}, \quad (5)$$

et $(x'+l)^2 + (y')^2 = [L\cos(\omega_L - \omega_l)t]^2 + [L\sin(\omega_L - \omega_l)t]^2 \Rightarrow (x'+l)^2 + (y')^2 = L^2$. (6)

L'équation d'une cercle de centre $(l,0)$ et de rayon $R = L$ et l'équation par rapport à (R) sera la même.

Exercice 14 :

Les coordonnées de M dans (R') sont :

$$\begin{cases} x'(t) = at \\ y'(t) = bt^2 \end{cases}.$$

À $t = 0s$ l'axe (Ox') est confondu à (Ox).

1°) La vitesse $\vec{v}_r$, $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_a$:

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

$\overrightarrow{OO'} = v.t.\vec{j}$

Par rapport à (R') : $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{U}_r + y'\vec{U}_\theta + z'\vec{U}_z$.

$\overrightarrow{O'M} = at\vec{U}_r + bt^2\vec{U}_\theta$.

et donc : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = vt\vec{j} + at\vec{U}_r + bt^2\vec{U}_\theta$.

On a : $\begin{cases} \vec{U}_r = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \\ \vec{U}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\theta\vec{U}_r = \sin\theta(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}) \\ \cos\theta\vec{U}_\theta = \cos\theta(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) \end{cases}$.

Par addition les deux équations en trouve l'expression de $\vec{j}$ par rapport à (R') : $\vec{j} = \sin(\omega t)\vec{U}_r + \cos(\omega t)\vec{U}_\theta$, avec : $\theta = \omega t$.

Donc : $\overrightarrow{OM} = vt\left[\sin(\omega t)\vec{U}_r + \cos(\omega t)\vec{U}_\theta\right] + at\vec{U}_r + bt^2\vec{U}_\theta$.

D'où : $\overrightarrow{OM} = \left[vt\sin(\omega t) + at\right]\vec{U}_r + \left[vt\cos(\omega t) + bt^2\right]\vec{U}_\theta$.

Alors :
1°/a) La vitesse relative $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}_r(t) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')} = \frac{d}{dt}\left(at\vec{U}_r + bt^2\vec{U}_\theta\right) ; \left.(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)\right|_{(R')} \rightarrow \text{fixe} = C^{ste}.$$

Donc : $\vec{v}_r(t) = a\vec{U}_r + 2bt\vec{U}_\theta$.

1°/b) La vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$:

$$\vec{v}_e(t)=\vec{v}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\left.\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}\right|_{(R')/(R)}+\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)=v\vec{j}+\begin{vmatrix}\vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{U}_z\\ 0 & 0 & \omega\\ at & bt^2 & 0\end{vmatrix}.$$

$$\vec{v}_e(t)=\frac{d}{dt}\left\{vt\left[\sin(\omega t)\vec{U}_r+\cos(\omega t)\vec{U}_\theta\right]\right\}+\begin{vmatrix}0 & \omega\\ bt^2 & 0\end{vmatrix}\vec{U}_r-\begin{vmatrix}0 & \omega\\ at & 0\end{vmatrix}\vec{U}_\theta+\begin{vmatrix}0 & 0\\ at & bt^2\end{vmatrix}\vec{U}_z.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e(t)=v\vec{j}-b\omega t^2\vec{U}_r+a\omega t\vec{U}_\theta=v\left[\sin(\omega t)\vec{U}_r+\cos(\omega t)\vec{U}_\theta\right]-b\omega t^2\vec{U}_r+a\omega t\vec{U}_\theta.$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e(t)=\left[v\sin(\omega t)-b\omega t^2\right]\vec{U}_r+\left[v\cos(\omega t)+a\omega t\right]\vec{U}_\theta.$$

1°/c) La vitesse absolue $\vec{v}_a$:

On a : $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e=a\vec{U}_r+2bt\vec{U}_\theta+\left[v\sin(\omega t)-b\omega t^2\right]\vec{U}_r+\left[v\cos(\omega t)+a\omega t\right]\vec{U}_\theta$.

Donc : $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e=\left[a-b\omega t^2+v\sin(\omega t)\right]\vec{U}_r+\left[a\omega t+2bt+v\cos(\omega t)\right]\vec{U}_\theta$.

2°) L'accélération $\vec{a}_r$, $\vec{a}_e$, $\vec{a}_C$ et $\vec{a}_a$:

2°/a) L'accélération relative $\vec{a}_r$:

$$\vec{a}_r(t)=\vec{a}(t)\Big|_{(R')}=\left.\frac{d\vec{v}_r(t)}{dt}\right|_{(R')}=\frac{d}{dt}\left(a\vec{U}_r+2bt\vec{U}_\theta\right).$$

Donc : $\vec{a}_r(t)=2b\vec{U}_\theta$.

2°/b) L'accélération d'entrainement $\vec{a}_e$:

On a : $\vec{a}_e(t)=\vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\left.\frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2}\right|_{(R')/(R)}+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right).$

$$\overrightarrow{OO'}=v.t.\vec{j}\Rightarrow\left.\frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2}\right|_{(R')/(R)}=\vec{0}\ \text{ et }\ \vec{\omega}=\omega\vec{U}_z\Rightarrow\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{0}.$$

Alors, l'expression de l'accélération d'entraînement devient : $\vec{a}_e(t)=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$.

D'où : $\vec{a}_e(t)=\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)=\omega\vec{U}_z\wedge\left(-b\omega t^2\vec{U}_r+a\omega t\vec{U}_\theta\right)=\begin{vmatrix}\vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{U}_z\\ 0 & 0 & \omega\\ -b\omega t^2 & a\omega t & 0\end{vmatrix}.$

Donc : $\vec{a}_e(t) = -a\omega^2 t\vec{U}_r - b\omega^2 t^2 \vec{U}_\theta$.

2°/c) L'accélération de Coriolis $\vec{a}_C$:

On a : $\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) = 2\begin{vmatrix} \vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{U}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ a & 2bt & 0 \end{vmatrix}$.

Donc : $\vec{a}_C = -4b\omega t\vec{U}_r + 2a\omega\vec{U}_\theta$.

2°/d) L'accélération absolue $\vec{a}_a$:

$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C \Leftrightarrow \vec{a}_a = 2b\vec{U}_\theta - a\omega^2 t\vec{U}_r - b\omega^2 t^2 \vec{U}_\theta - 4b\omega t\vec{U}_r + 2a\omega\vec{U}_\theta$.

Finalement, l'expression de l'accélération absolue devient :

$\vec{a}_a = -(a\omega^2 t + 4b\omega t)\vec{U}_r + (2a\omega + 2b - b\omega^2 t^2)\vec{U}_\theta$.

Exercice 15 :

1°) Les vitesses $\vec{v}_r$, $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_a$:

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

Avec : $\overrightarrow{OO'} = R\cos(\Omega t)\vec{i} + R\sin(\Omega t)\vec{j}$.

$\overrightarrow{O'M} = d\cos(\omega t)\vec{i'} + d\sin(\omega t)\vec{j'}$.

et puisque les axes : (Ox) et $(O'x')$ sont parallèles,
(Oy) et $(O'y')$ sont parallèles.

Alors : $\vec{i} = \vec{i'}$ et $\vec{j} = \vec{j'}$.

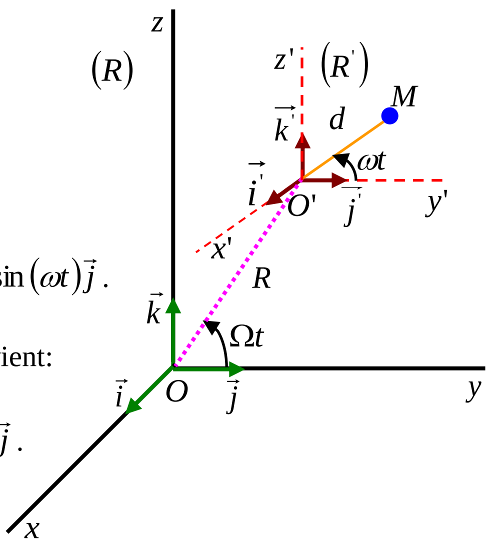


Figure 2-30

D'où : $\overrightarrow{OM} = R\cos(\Omega t)\vec{i} + R\sin(\Omega t)\vec{j} + d\cos(\omega t)\vec{i} + d\sin(\omega t)\vec{j}$.

Donc l'expression de vecteur position par rapport à (R) devient:

$\overrightarrow{OM} = [R\cos(\Omega t) + d\cos(\omega t)]\vec{i} + [R\sin(\Omega t) + d\sin(\omega t)]\vec{j}$.

Alors :
1°/a) La vitesse relative $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}_r(t)=\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{(R')}=\frac{d}{dt}\left(d\cos(\omega t)\vec{i}+d\sin(\omega t)\vec{j}\right).$$

Donc : $\vec{v}_r(t)=d\omega\left[-\sin(\omega t)\vec{i}+\cos(\omega t)\right]\vec{j}$.

1°/b) La vitesse d'entrainement $\vec{v}_e$:

$$\vec{v}_e(t)=\vec{v}(t)\big|_{(R')/(R)}=\left.\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}\right|_{(R')/(R)}+x'\frac{d\vec{i}'}{dt}+y'\frac{d\vec{j}'}{dt}+z'\frac{d\vec{k}'}{dt}=R\Omega\left[-\sin(\Omega t)\vec{i}+\cos(\Omega t)\vec{j}\right],$$

avec : $\frac{d\vec{i}'}{dt}=\vec{0}$, $\frac{d\vec{j}'}{dt}=\vec{0}$ et $\frac{d\vec{k}'}{dt}=\vec{0}$.

Donc : $\vec{v}_e(t)=R\Omega\left[-\sin(\Omega t)\vec{i}+\cos(\Omega t)\vec{j}\right]$.

1°/c) La vitesse absolue $\vec{v}_a$:

$$\vec{v}_a(t)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{(R)}=\frac{d}{dt}\left\{\left[R\cos(\Omega t)+d\cos(\omega t)\right]\vec{i}+\left[R\sin(\Omega t)+d\sin(\omega t)\right]\vec{j}\right\}.$$

Donc: $\vec{v}_a(t)=-\left[R\Omega\sin(\Omega t)+d\omega\sin(\omega t)\right]\vec{i}+\left[R\Omega\cos(\Omega t)+d\omega\cos(\omega t)\right]\vec{j}$.

1°/d) Vérification que $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$:

On a : $\vec{v}_r+\vec{v}_e=d\omega\left[-\sin(\omega t)\vec{i}+\cos(\omega t)\right]\vec{j}+R\Omega\left[-\sin(\Omega t)\vec{i}+\cos(\Omega t)\vec{j}\right]$.

D'où : $\vec{v}_r+\vec{v}_e=-\left[R\Omega\sin(\Omega t)+d\omega\sin(\omega t)\right]\vec{i}+\left[R\Omega\cos(\Omega t)+d\omega\cos(\omega t)\right]\vec{j}=\vec{v}_a$.

Donc la loi de composition des vitesses $\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$ est vérifiée.

2°) Les accélérations $\vec{a}_r$, $\vec{a}_e$, $\vec{a}_C$ et $\vec{a}_a$:
2°/a) L'accélération relative $\vec{a}_r$:

$$\vec{a}_r(t)=\vec{a}(t)\big|_{(R')}=\left.\frac{d\vec{v}_r(t)}{dt}\right|_{(R')}=-d\omega^2\cos(\omega t)\vec{i}-d\omega^2\sin(\omega t)\vec{j}\ .$$

Donc : $\vec{a}_r(t)=-d\omega^2\left[\cos(\omega t)\vec{i}+\sin(\omega t)\vec{j}\right]$.

2°/b) L'accélération d'entrainement $\vec{a}_e$:

On a : $\vec{a}_e(t) = \vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)} = \dfrac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2}\Bigg|_{(R')/(R)} + \left(\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$ et $\vec{\omega} = \vec{0}$.

Alors, l'expression de $\vec{a}_e$ devient de la forme suivante :

$$\vec{a}_e(t) = \vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)} = \frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2}\Bigg|_{(R')/(R)} \Leftrightarrow \vec{a}_e(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left\{R\Omega\left[-\sin(\Omega t)\vec{i} + \cos(\Omega t)\vec{j}\right]\right\}.$$

Donc : $\vec{a}_e(t) = -R\Omega^2\left[\cos(\Omega t)\vec{i} + \sin(\Omega t)\vec{j}\right]$.

2°/c) L'accélération de Coriolis $\vec{a}_C$:

On a : $\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r)$ et $\vec{\omega} = \vec{0}$.

Donc : $\vec{a}_C = \vec{0}$.

2°/d) L'accélération absolue $\vec{a}_a$:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C \Leftrightarrow \vec{a}_a = -d\omega^2\left[\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j}\right] - R\Omega^2\left[\cos(\Omega t)\vec{i} + \sin(\Omega t)\vec{j}\right] + \vec{0}.$$

Finalement, l'expression de l'accélération absolue devient :

$$\vec{a}_a = -\left[d\omega^2\cos(\omega t) + R\Omega^2\cos(\Omega t)\vec{i}\right] - \left[d\omega^2\sin(\omega t) + R\Omega^2\sin(\Omega t)\right]\vec{j}.$$

Exercice 16 :

La vitesse et l'accélération de M :

On a : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \rho$ sur (Ox),

Donc $\vec{v}_r(t) = \vec{v}(t)\Big|_{(R')} = \dfrac{d}{dt}\left(\rho\vec{U}_r\right) = \dot{\rho}\vec{U}_r \Rightarrow \vec{v}_r(t)\begin{pmatrix}\dot{\rho}\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_r(t) = \vec{a}(t)\Big|_{(R')} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{U}_r\right) = \ddot{\rho}\vec{U}_r \Rightarrow \vec{a}_r(t)\begin{pmatrix}\ddot{\rho}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La vitesse et l'accélération d'entrainement de M :

$$\vec{v}_e(t)=\vec{v}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\left.\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}\right|_{(R')/(R)}+\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$, les deux repères sont confondus alors: $\frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt}=\vec{0}$.

$$\vec{v}_e(t)=\vec{v}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\,.$$

On a : $\theta=\omega t \Rightarrow \omega=\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$.

Donc : $\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}=\begin{vmatrix}\vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{k}\\ 0 & 0 & \dot{\theta}\\ \rho & 0 & 0\end{vmatrix}=\rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta=\begin{pmatrix}0\\ \rho\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_e(t)=\vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\left.\frac{d^2\overrightarrow{O'O}}{dt^2}\right|_{(R')/(R)}+\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)+\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right).$$

Avec : $\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\ddot{\theta}\vec{k}$.

$$\vec{a}_e(t)=\vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)}=\ddot{\theta}\vec{k}\wedge\rho\vec{U}_r+\dot{\theta}\vec{k}\wedge\rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta.$$

$$\ddot{\theta}\vec{k}\wedge\rho\vec{U}_r=\begin{vmatrix}\vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{k}\\ 0 & 0 & \ddot{\theta}\\ \rho & 0 & 0\end{vmatrix}=\rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta=\begin{pmatrix}0\\ \rho\ddot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}.$$

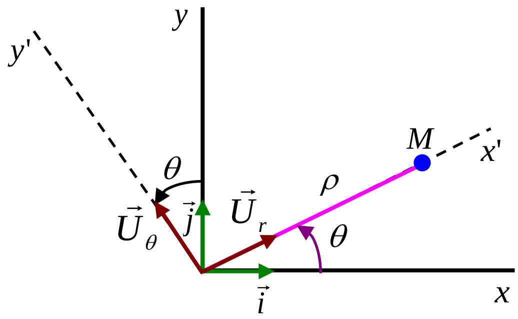


Figure 2-31

$$\dot{\theta}\vec{k}\wedge\rho\dot{\theta}\vec{U}_\theta=\begin{vmatrix}\vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{k}\\ 0 & 0 & \dot{\theta}\\ 0 & \rho\dot{\theta} & 0\end{vmatrix}=-\rho\dot{\theta}^2\vec{U}_r=\begin{pmatrix}-\rho\dot{\theta}^2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Donc : $\vec{a}_e(t)=\vec{a}(t)\Big|_{(R')/(R)}=-\rho\dot{\theta}^2\vec{U}_r+\rho\ddot{\theta}\vec{U}_\theta=\begin{pmatrix}-\rho\dot{\theta}^2\\ \rho\ddot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_C=2\left(\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r\right)=2\begin{vmatrix}\vec{U}_r & \vec{U}_\theta & \vec{k}\\ 0 & 0 & \dot{\theta}\\ \dot{\rho} & 0 & 0\end{vmatrix}=2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{U}_\theta=\begin{pmatrix}0\\ 2\dot{\rho}\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}.$$

En déduire : $\vec{v}_a=\vec{v}\big|_{(R)}=\vec{v}_r+\vec{v}_e=\begin{pmatrix}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_a=\vec{a}\big|_{(R)}=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_C=\begin{pmatrix}-\rho\dot{\theta}^2+\ddot{\rho}\\ \rho\ddot{\theta}+2\dot{\rho}\dot{\theta}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Chapitre 3

Dynamique du Point

Chapitre 3 Dynamique du Point

La cinématique a pour objet l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui provoquent.
La dynamique est la science qui s'intéresse aux forces qui provoquent les mouvements. La masse du système en mouvement intervient alors dans l'étude de son mouvement.
La dynamique est étude des mouvements en tenant compte des causes qui leurs donnent naissance.

Système matériel :

Un système matériel est un ensemble de points matériels. On distingue :

- ☑ Le système matériel indéformable : tous les points matériels constituant le système restent fixes les uns par rapport aux autres. Ceci correspond à la définition d'un solide en mécanique.
- ☑ Le système matériel déformable : tout système ne correspondant pas à un solide. Exemple : l'ensemble de deux mobiles autoporteurs indépendants forment un système déformable.

Le système matériel peut subir des actions ou pas de la part de l'extérieur.

En particulier, on distingue :

- ☑ Le système matériel isolé (ou fermé) : il n'existe aucune action venant de l'extérieur et s'exerçant sur le système.
- ☑ Le système matériel pseudo-isolé : les actions extérieures agissant sur le système se compensent (tout se passe comme si il était isolé).

Ainsi, sur la terre, un système ne peut pas être rigoureusement isolé puisqu'il subit obligatoirement son poids. Un mobile autoporteur sur un plan horizontal est pseudo isolé : la soufflerie du mobile compense le poids et le mobile se déplace dans le plan horizontal comme si il était isolé (les principales forces de frottement solide sont éliminées).

3.1 Principe d'inertie et les référentiels galiléens ($1^{ière}$ loi de Newton)

3.1.1 Principe d'inertie

Si le corps matériel n'est soumis à aucune force, il est :

- ☑ soit en mouvement rectiligne uniforme,
- ☑ soit au repos, s'il était initialement au repos.

C'est pour cette raison qu'une particule accélérée n'est ni libre ni isolée mais, soumise sans aucun, doute, à une force.

Et puisque le mouvement est une notion relative, il est indispensable de définir un repère auquel sera rapporté le mouvement de la particule libre : ce repère, à son tour, doit être libre (c'est pour cette raison qu'on l'appelle galiléen ou d'inertie, et dans lequel la particule libre est fixe ou se déplace à vitesse constante).

3.1.2 Référentiels d'inertie ou galiléens

On appelle référentiel d'inertie, un système de référence (au repos) dans lequel la première loi de Newton est applicable. D'après cette définition, un référentiel d'inertie n'existe pas, car on ne dispose que de référentiels approximatifs.

1°) Enoncé :

Un référentiel Galiléen est un référentiel dans lequel, tout point isolé, ou quasi-isolé est : soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

2°) Propriété :

Soit (R) un référentiel Galiléen, alors tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à (R) est Galiléen.

3°) Exemples de référentiels Galiléen :

α- Référentiel de Copernic : c'est un référentiel d'origine le barycentre du système solaire et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines (repère sidéral). Ce référentiel est Galiléen.

β- Référentiel géocentrique : c'est un référentiel d'origine le barycentre de la Terre et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Le référentiel géocentrique effectue un mouvement de translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic.

γ-Référentiel terrestre : c'est un référentiel lié à la terre, il n'est pas rigoureusement Galiléen, mais on pourra le considérer ainsi avec une approximation moins bonne (rotation de la terre sur elle-même et autour du soleil).

3.2 Le principe de conservation de la quantité de mouvement

3.2.1 Quantité de mouvement

Soit M un point matériel, de masse m en mouvement par rapport à O. La quantité de mouvement de M par rapport à O est un vecteur noté : $\vec{P} = m.\vec{v}$.

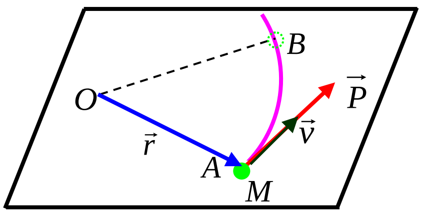


Figure 3-1 *Quantité de mouvement.*

Unité de la quantité de mouvement $\|\vec{P}\|$: $kg.m.s^{-1}$,

Dimension de la quantité de mouvement $\|\vec{P}\|$:

$$[P] = [m].[v] = MLT^{-1}. \quad (3\text{-}1)$$

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est défini par le vecteur $\vec{P}$ donné par :

$$\vec{P} = m.\vec{v}. \tag{3-2}$$

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle qui a la même direction que la vitesse.

Le principe d'inertie peut s'énoncer alors de la façon suivante :

«Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen».

Ou encore la quantité de mouvement totale d'un système, se conserve si le principe d'inertie est vérifié.

3.2.2 Conservation de la quantité de mouvement

S'il y a variation de la vitesse ou de la quantité de mouvement cela implique que la particule n'est pas libre.
Soient deux particules libres de masse m_1 et m_2 qui ne sont soumises qu'aux influences mutuelles entre elles; elles sont donc isolées du reste de l'univers :

Au temps t : $$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \tag{3-3}$$

Au temps t': $$\vec{P'} = m_1.\vec{v_1'} + m.\vec{v_2'}. \tag{3-4}$$

Toute la quantité de mouvement d'un système composé de deux particules, soumises à leurs seules influences mutuelles, reste constante, c'est-à-dire $\vec{P} = \vec{P'}$.

Le principe de conservation de la quantité de mouvement s'énonce ainsi :
« La quantité de mouvement d'un système isolé constitué de particules est constante».

On peut exprimer mathématiquement ce principe de la conservation de la quantité de mouvement comme suit :

$$\vec{P} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} + \ldots + \vec{P_n} = C^{ste}. \tag{3-5}$$

Dans le cas de deux particules :

$$\vec{P_1} + \vec{P_2} = C^{ste}. \tag{3-6}$$

Entre les instants t et t' : $$\vec{P_1} + \vec{P_2} = \vec{P_1'} + \vec{P_2'} \Rightarrow \vec{P_1'} - \vec{P_1} = \vec{P_2} - \vec{P_2'}, \tag{3-7}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{P_1} = -\Delta\vec{P_2}. \tag{3-8}$$

Résumé :

«Dans un système isolé de deux particules, la variation de la quantité de mouvement d'une particule au cours d'un certain temps est égale et de sens opposé à la variation de la quantité de mouvement de l'autre particule au cours du même temps».

Remarque : le principe de conservation de la quantité de mouvement ne s'applique qu'à un système isolé.

Exemple : un fusil avec une masse de $m_1 = 0{,}4kg$ tire une bille de masse $m_2 = 0{,}08kg$ et une vitesse de 350 m/s à la sortie.
Calculer la vitesse de recul du fusil à l'instant de la sortie de la bille.

Solution :
Calcul de la vitesse de recul du fusil :
On a :

Avant la sortie :

$m_1 = 0{,}4kg$ et $v_1 = 0m/s$.
$m_2 = 0{,}08kg$ et $v_2 = 0m/s$.
La quantité de mouvement : $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$.

Après la sortie :

$m_1 = 0{,}4kg$ et $v_1^{'} = ?$
$m_2 = 0{,}08kg$ et $v_2^{'} = 350m/s$.

La quantité de mouvement : $\overrightarrow{P^{'}} = m_1.\overrightarrow{v_1^{'}} + m.\overrightarrow{v_2^{'}}$.

En appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{P} = \overrightarrow{P^{'}} \Leftrightarrow \overrightarrow{P^{'}} = \vec{0} = m_1.\overrightarrow{v_1^{'}} + m.\overrightarrow{v_2^{'}} \Rightarrow \overrightarrow{v_1^{'}} = -\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{v_2^{'}}.$$

$$\Rightarrow v_1^{'} = \frac{m_2}{m_1}v_2^{'}.$$

Application numérique :

$$v_1^{'} = \frac{0{,}08}{0{,}4} \times 350 = 70.$$

Donc : $v_1^{'} = 70m/s$.

3.3 Définition Newtonienne de la force (3 lois de Newton)

3.3.1 Définition de la force

Toute action capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un point matériel est représentée par une grandeur vectorielle qui définit la force exercée sur ce point matériel.

Toute cause capable de modifier, dans un référentiel galiléen, le vecteur de la quantité de mouvement d'un point matériel est appelée force.

3.3.2 Principe d'inertie (1ière loi de Newton)

Le principe d'inertie c'est Galilée est le premier suggéré ce principe. Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit :

«Une particule libre et isolée ou quasi-isolé se déplace en mouvement rectiligne avec une vitesse et une quantité de mouvement constantes».

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est nulle.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}. \qquad (3\text{-}9)$$

Avec : la vitesse et la quantité de mouvement sont constantes.

3.3.3 Principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton)

Loi fondamentale de la dynamique ou principe fondamental de la dynamique (PFD).
Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur de la quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

On peut très bien définir une force moyenne, telle que :

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P}(t') - \vec{P}(t)}{t' - t}. \qquad (3\text{-}10)$$

Ou encore, force instantanée, telle que :

$$\vec{F}(t) = \lim_{t' \to t} \vec{F}_{moy} = \frac{d\vec{P}(t)}{dt}. \qquad (3\text{-}11)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \qquad (3\text{-}12)$$

«La dérivée de la quantité de mouvement s'appelle force».

Exemple :

Un objet de masse $10kg$, soumis à une force $F = (120t + 40)N$ se déplace suivant une ligne droite. A l'instant $t = 0s$ l'objet se trouve à $x_0 = 5m$ avec une vitesse $v_0 = 6m/s$.
Trouver la vitesse et la position de l'objet en fonction du temps.

Solution :

On a : $m = 10kg$, $F = (120t + 40)N$ et au $t = 0s$; $x_0 = 5m$ et $v_0 = 6m/s$.
a°) Vitesse $v(t)$:

Première méthode :

D'après le PFD : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{1}{m}\vec{F}dt$.

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv = \frac{1}{m}\int_0^t F dt = \frac{1}{m}\int_0^t (120t + 40)dt.$$

$$\Rightarrow v(t) - v_0 = \frac{1}{m}(60t^2 + 40t).$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{m}(60t^2 + 40t) + v_0.$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{10}\left(60t^2 + 40t\right) + 6 .$$

On trouve donc : $$v(t) = 6t^2 + 4t + 6 \ (m/s).$$

Deuxième méthode :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow d\vec{P} = \vec{F}dt .$$

$$\Rightarrow \int_{P_0}^{P} dP = \int_0^t (120t + 40)dt .$$

On trouve donc : $P - P_0 = 60t^2 + 40t$.

$$P - P_0 = m(v - v_0) \Rightarrow v - v_0 = \frac{P - P_0}{m} .$$

$$\Rightarrow v = \frac{P - P_0}{m} + v_0 .$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{60t^2 + 40t}{10} + 6 .$$

On trouve donc : $v(t) = 6t^2 + 4t + 6 \ (m/s)$.

b°) Position $x(t)$:

On intègre de nouveau, mais cette fois, l'expression obtenue de la vitesse pour trouver la position du mobile à chaque instant :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow dx(t) = v(t)dt .$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx(t) = \int_0^t v(t)dt .$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx(t) = \int_0^t \left(6t^2 + 4t + 6\right)dt .$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = 2t^3 + 2t^2 + 6t .$$

On trouve donc : $x(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5 \ (m)$.

3.3.4 Principe de l'action et la réaction (3^{ième} loi de Newton)

Le principe de l'action et la réaction, ou principe des actions réciproques, a été énoncé par Newton (troisième loi de Newton).

Soient deux points matériels de masse m_1 et m_2 interagissant entre eux; $\vec{F}_{1/2}$ l'action exercée par m_1 sur m_2 est égale et opposée à celle exercée par m_2 sur m_1 $\vec{F}_{2/1}$, soit :

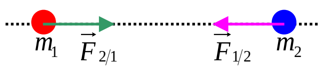


Figure 3-2 *Réaction réciproque.*

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \;, \qquad (3\text{-}13)$$

ainsi : $\left\|\vec{F}_{1/2}\right\| = \left\|\vec{F}_{2/1}\right\|$.

Ces deux forces s'exercent simultanément, sont de même nature et elles ont le même support.

Conclusion : la quantité de mouvement, par rapport à un référentiel, d'un système isolé, est conservée.

3.3.5 Différentes types de forces existants

- ☑ Forces d'interaction à distance (Forces de gravitation),
- ☑ Forces électromagnétiques,
- ☑ Forces nucléaires,
- ☑ Forces de contact (forces de frottement)
- ☑ Etc…

3.4 Quelque lois de forces

3.4.1 Forces d'interaction à distances

1°) Force de gravitation universelle : on appelle force de gravitation, la force exercée par une masse m sur une autre masse M . Cette force d'interaction suit une loi énoncée par Newton en 1650 et qui précise que deux masses M et m interagissent entre elles de façon d'autant plus forte que les masses sont grandes et que la distance qui les sépare est petite. La loi qu'il a formulée est dite « loi de la gravitation de Newton» ou «loi d'attraction universelle». Elle s'énonce de la façon suivante :

Loi de gravitation universelle

« Les masses de deux corps s'attirent en raison de leurs masses et de l'inverse du carré de leur distance selon une direction qui passe par leurs centres de masses ».

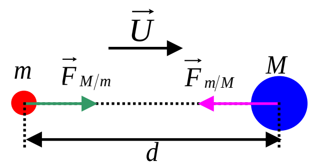


Figure 3-3 *Forces de gravitation d'un objet de masse M sur un objet de masse m.*

La loi d'attraction universelle s'exprime analytiquement de la façon suivante :

$$\vec{F}_{m\to M} = -G\frac{mM}{d^2}\vec{U} \;, \qquad (3\text{-}14)$$

Avec : $\vec{U}$ est vecteur unitaire,

G constante de gravitation; $G = 6{,}67\times 10^{11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$.

$\vec{F}_{m\to M}$ est toujours attractif.

Champ de pesanteur : soit le cas d'un objet sur la surface de la terre.

$$\vec{F}_{M\to m} = -G\frac{mM}{R^2}\vec{U} \quad . \qquad (3\text{-}15)$$

Avec : M est la masse de la terre,

m est la masse de l'objet,
R est le rayon de la terre.

La force du poids de l'objet est : $\vec{P} = m\vec{g}$.

$\vec{F}_{M\to m} = \vec{P} = m\vec{g}$,

d'où :

$\vec{g} = -G\dfrac{M}{R^2}\vec{U}$ est le champ de pesanteur.

Si l'objet se trouve à une hauteur z par rapport à la surface de la terre, alors :

$$\vec{F}_{M\to m} = -G\frac{mM}{(R+z)^2}\vec{U}. \qquad (3\text{-}16)$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{g}\| = G\frac{M}{(R+z)^2} = \frac{GM}{R^2}.\frac{R^2}{(R+z)^2}. \qquad (3\text{-}17)$$

$$g = g_0\frac{R^2}{(R+z)^2} \ , \qquad (3\text{-}18)$$

Avec: g_0 est le champ à la surface de terre.

Ainsi que, on peut écrire : $$g = g_0\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2}. \qquad (3\text{-}18a)$$

2°) Force électrostatique (Interaction coulombienne) :

Soient deux charges A_1 et A_2 portants respectivement les charges q_1 et q_2. Interaction coulombienne est l'analogue de l'interaction gravitationnelle pour les charges électriques.

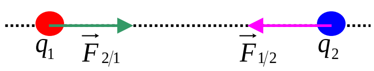


Figure 3-4 *Force exercée par une charge q_1 sur une autre charge q_2.*

Cette force d'interaction suit une loi énoncée par Coulomb :

$$\left\|\vec{F}_{q_1\to q_2}\right\| = K\frac{q_1q_2}{r^2}. \qquad (3\text{-}19)$$

Avec : $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 \ Nm^2C^{-2}$.

ε_0 : représente la permittivité du vide.

$\vec{F}_{q_1\to q_2}$: peut être attractive ou répulsive. Sur la figure, est représenté le cas attractif.

Champ électrique : il est possible de faire apparaître, comme dans le cas de la pesanteur, un champ créé par une charge ponctuelle q_1 en tout point M de l'espace. Ce champ, appelé champ électrique, s'écrit :

$$\vec{F}_{q_1 q_2} = q_1 \vec{E}, \tag{3-20}$$

Avec : $\vec{E} = K \dfrac{q_2}{r^2}\vec{U} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\dfrac{q_2}{r^2}\vec{U}$.

3°) Force de magnétique : soit une particule chargée A de charge q, est en mouvement dans un référentiel (R) où il existe l'interaction magnétique $\vec{B}$. La force magnétique exercée sur A est donnée par :

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v}_{A/(R)} \wedge \vec{B}. \tag{3-21}$$

4°) Force de Lorentz (Interaction électromagnétique) : la force que subit une charge électrique placée dans des champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ est appelée forces électromagnétique ou force de Lorentz et s'écrit :

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right), \tag{3-22}$$

Avec : $\vec{v}$ est vecteur vitesse de la charge dans le référentiel où $\vec{E}$ est le champ électrique et $\vec{B}$ est le champ magnétique.

3.4.2 Force de contact

1°) Réaction du support : la force qui subit un objet, posé sur un support horizontal, en provenance du support s'appelle réaction du support. La réaction du support sur l'objet de masse m est répartie sur toute la surface de contact support-objet.

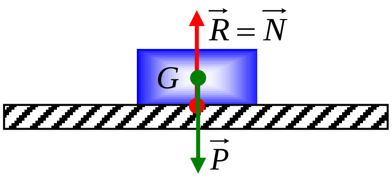


Figure 3-5 *Réaction d'un support.*

L'objet étant en équilibre :

$$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{R}. \tag{3-23}$$

Avec : $\vec{R}$, représente la résultante de toutes les actions exercées sur la surface de contact,

$\vec{N}$, représente la force de réaction normale,

$\vec{P}$ est la force de pesanteur ou le poids.

2°) Forces de frottement : les forces de frottement sont des forces qui apparaissaient soit lors du mouvement d'un objet soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement.

On distingue deux types de frottement :

- ☑ Frottement visqueux (contact solide-fluide),

☑ Frottement solide (contact solide-solide).

a°) Frottement visqueux : lorsqu'un solide se déplace dans un fluide (gaz comme l'air ou liquide comme l'eau), il subit, de la part du fluide, des forces de frottement. Dans ce type de frottement la force est proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{F} = -k\eta\vec{v}\,. \tag{3-24}$$

Avec : $\vec{F}$ est la force de frottement,

k est un coefficient qui dépend de la forme du corps solide en mouvement dans le fluide.

Pour une sphère, par exemple, on trouve. $k = 6\pi R$, et par conséquent :

$$\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}\,. \tag{3-24a}$$

Cette loi est connue sous le nom de Loi de Stockes.

η : Coefficient qui dépend des frottements internes dans le fluide (c'est à dire les frottements entre les différentes couches qui sont en mouvement avec différentes vitesses). Le frottement interne au fluide s'appelle la viscosité, et c'est pour cette raison que η s'appelle le coefficient de viscosité. Dans les liquides, le coefficient de viscosité diminue avec l'élévation de température, par contre il augmente avec la diminution de la température pour les gaz.

Cette force n'existe que s'il y a mouvement.

b°) Frottement solide (force de contact solide-solide)

Frottement statique :

Une réaction normale $\vec{N}$ perpendiculaire à la surface de contact n'est pas suffisante pour maintenir l'équilibre relatif entre deux solides. Toutefois l'équilibre peut être maintenir par le développement de frottements l'intensité dépend de la nature des surfaces en contact.
La force de frottement statique est tangente à la surface de contact. On définit classiquement le coefficient de frottement statique μ_S comme le rapport de la force de frottement $\vec{F}_{frot}$ à la réaction normale $\vec{N}$, soit $\left\|\vec{F}_{frot}\right\| \leq \mu_S \left\|\vec{N}\right\|$ (la limite supérieure correspondant en déséquilibre), où μ_S est le coefficient de frottement statique.

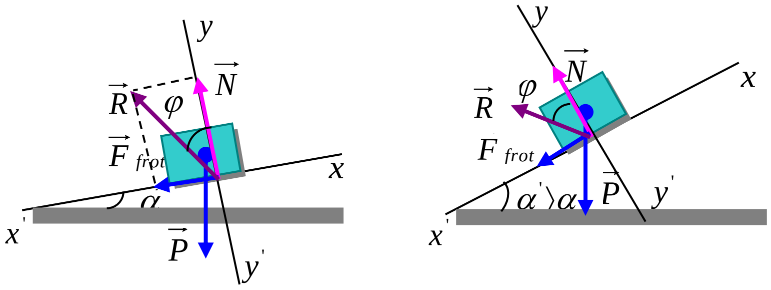


Figure 3-6 *Frottement statique.*

Le sens de la force de frottement statique est contraire au sens du mouvement qui tend à s'établir.
La force de frottement statique est la force qui maintient le corps en état de repos même en présence d'une force extérieure. Considérons le corps de la figure (3-7), le bloc solide est en mouvement sous l'action de la force d'entrainement $\vec{F}_e$. Il est soumis à quatre forces illustrées sur la figure (3-7).

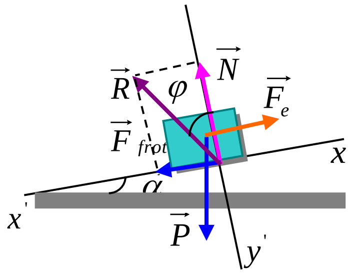


Figure 3-7 *Frottement solide.*

Avec : $\vec{F}_e$ *est force d'entrainement.*

$\vec{N}$ *est la force de réaction normale,*

$\vec{R}$ *est la force de réaction ou la résultante de deux forces :* $\vec{R} = \vec{F}_{frot} + \vec{N}$,

φ *est l'angle de frottement,*

$\vec{P}$ est le poids,

$\vec{F}_{frot}$ *est la force de frottement,*

$\vec{F}_{frot} = \mu\vec{N}$.

Avec : μ coefficient de frottement ou coefficient de friction : c'est une constante qui dépend de la nature de la surface de contact.

On a : $\dfrac{F_{frot}}{N} = tg\varphi = \mu$.

Résumé quelques valeurs de μ dans le tableau (3-1):

Matériaux en contact	μ
Acier-Acier	0.2
Chêne-Sapin	0.67
Caoutchouc-Bitume	0.6

Tableau 3-1 *Quelques valeurs de* μ .

$\vec{F}_{frot}$ est maximale quant sous l'action de $\vec{F}_e$ le corps solide est toujours en équilibre (pas de mouvement). A partir de cette valeur, si $\vec{F}_e$ augmente, le corps solide bouge de sa position d'équilibre.

Condition d'équilibre :

$$\begin{cases} N = P = mg \\ F_{frot} = F_e \end{cases} \Rightarrow \frac{F_{frot}}{N} = tg(\varphi) = \frac{F_e}{P} .$$

Frottement cinétique ou dynamique :

Lorsque les frottements ne sons pas suffisants, l'équilibre n'est plus possible et le mouvement relatif des deux solides se déclenche. Les frottements sont toujours présents, l'expérience montre que $\left\|\vec{F}_{frot}\right\| = \mu_C \left\|\vec{N}\right\|$ où $\mu_C = \mu_d$ est le coefficient de frottement cinétique ou dynamique.

Souvent : $\mu_S \geq \mu_C$.

On regroupe dans le tableau (3-2) les coefficients de frottement statique et cinétique de différents types des matériaux : acier/acier et téflon/téflon.

Acier/Acier	Téflon/Téflon
$\mu_S = 0.8 / \mu_C = 0{,}4$	$\mu_S \approx \mu_C \approx 0{,}04$

Tableau 3-2 *Coefficients de frottement statique et cinétique.*

Remarque : plus μ_S est faible (devant 1) plus le déséquilibre est facile à produire.

3.4.3 Force de rappel ou force de tension

L'exemple le plus simple est la force de rappel du ressort.

$$\vec{F}_{el} = -k(l - l_0)\vec{U}. \tag{3-25}$$

Avec : k est constante de raideur du ressort ou coefficient d'allongement.

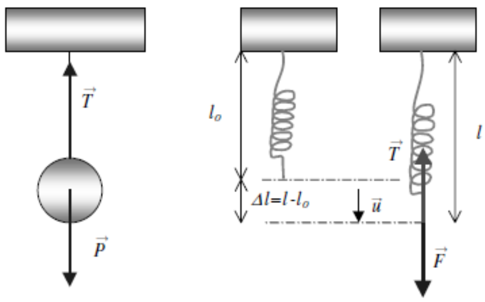


Figure 3-8 *Tension d'un fil et d'un ressort.*

3.4.4. Moment d'une force

Soit la figure (3-9) où (Δ) est un l'axe de rotation et de vecteur unitaire $\vec{U}$; (Δ) et $\vec{U}$ sont de même sens. Soit un point matériel M, se déplaçant à la force $\vec{F}$ et ayant une masse m par rapport à O.

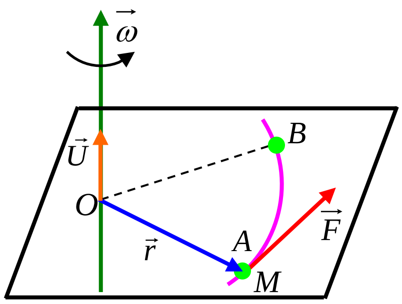


Figure 3-9 *Moment d'une force.*

Définition : on définit le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M par rapport à l'axe (Δ) la grandeur physique vectorielle $\vec{\mathrm{M}}_{/(\Delta)}(\vec{F})$.

$$\vec{\mathrm{M}}_{/(\Delta)}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \ , \tag{3-26}$$

Avec : $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur position.
Le module du moment d'une force :

$$\left\|\vec{\mathrm{M}}_{/(\Delta)}(\vec{F})\right\| = \left\|\vec{r} \wedge \vec{F}\right\| = \|\vec{r}\|.\left\|\vec{F}\right\|.\sin\left(\vec{r}, \vec{F}\right). \tag{3-27}$$

3.4.5 Moment cinétique

Définition : soit un point matériel M , se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ et ayant une masse m par rapport à O est défini par : $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$.

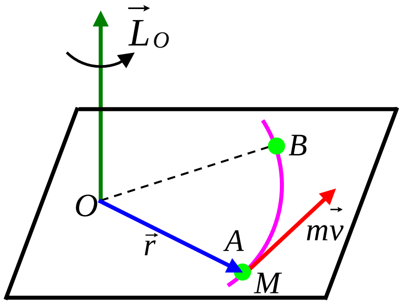


Figure 3-10 *Moment cinétique.*

Le module du moment cinétique :

$$\left\|\vec{L}_O\right\| = \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\| = \|\vec{r}\|.\|m\vec{v}\|.\sin(\vec{r}, \vec{v}) = m\|\vec{r}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{r}, \vec{v}) \tag{3-28}$$

Si : $\sin(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$, le module du moment cinétique devient :

$$\left\|\vec{L}_O\right\| = m\|\vec{r}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{r}, \vec{v}) = m.r.v \Leftrightarrow \left\|\vec{L}_O\right\| = m.r.r.\omega = mr^2\omega. \tag{3-29}$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\vec{C} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{C} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{3-30}$$

$$\Leftrightarrow \vec{C} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{3-31}$$

$$\text{Donc : } \vec{C} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad \text{avec : } \vec{P} = m.\vec{v} \ . \tag{3-32}$$

Rappel : $\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}$.

Alors, $$\vec{C} = \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{C} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} \Leftrightarrow \vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{M}}_{/O}(\vec{F}). \qquad (3\text{-}33)$$

Remarque : l'étude des systèmes dynamiques, on utilise généralement ces deux théorèmes et le principe fondamental de la dynamique noté PFD.

Enoncé :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M , relativement à un point fixe O, est égale au moment par rapport à O de la résultante des forces appliquées sur M .

Méthode d'application des lois fondamentales de la dynamique :

Pour pouvoir appliquer la P.F.D ou le T.M.C, il convient à procéder de la démarche systématique suivante :

- ☑ Identifier le système d'étude,
- ☑ Identifier le référentiel d'étude et vérifier s'il est galiléen ou pas,
- ☑ Faire l'inventaire des forces exercées sur le système dans le référentiel d'étude,
- ☑ Appliquer le principe de la dynamique (P.F.D) ou le théorème du moment cinétique (T.M.C) , c.-à-d les relations vectorielles,
- ☑ Préciser une base de projection (la base la plus commode est celle dans laquelle les vecteurs qui interviennent dans la relation vectorielle, présentent les expressions les plus simples que possible),
- ☑ Résoudre les équations différentielles obtenues après projection,
- ☑ Analyser physiquement les résultats,
- ☑ Homogénéité des formules,
- ☑ Applications numériques et vérification des ordres de grandeurs.

3.5 Exercices

Exercice 1 :

1°) Énoncer les trois lois de Newton.
2°) Citer les différents types de forces.

Exercice 2 :

Un corps de masse $m = 0{,}8kg$ se trouve dans un plan incliné de $\alpha = 30°$.
Qu'elle force doit on applique pour qu'il se déplace vers le haut? On donne :
$\gamma = 0{,}2\, m/s^2$, et le coefficient de frottement cinétique est $0{,}3$. On prend $g = 10\, m/s^2$.

Exercice 3 :

A°) On se propose d'étudier le mouvement des deux masses représentées dans la figure (3-11).
Si: μ_1 est facteur de frottement entre m_1 et m_2 ,
μ_2 est facteur de frottement entre m_2 et la surface inclinée.
A/1°) Déterminer les forces exercées sur m_1 et m_2 ,

A/2°) Trouver les accélération de m_1 et celle de m_2 ($tg\theta \rangle \mu_1 \rangle \mu_2$) .
A.N : $\theta = 30°$, $m_1 = 5kg$, $m_2 = 10kg$, $\mu_1 = 0{,}2$ et $\mu_2 = 0{,}3$.

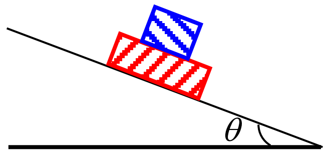


Figure 3-11 *Deux masses* m_1 et m_2 *sur un plan incliné.*

B°) On considère un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 , dont les extrémités sont reliées à un point fixé O et à un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe Ox sur le plan incliné (voir la figure 3-12).

B/1°) Déterminer l'abscisse x_0 du point M à l'équilibre en fonction de l_0 , m , g , k et α .

A partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance

B/2°) d comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale.

B/3°) Etablir d'équation horaire $x(t)$ en fonction d , k , m et x_0 .

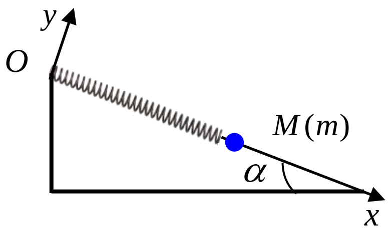


Figure 3-12 *Un ressort de raideur* k *et de longueur, dont les extrémités sont reliées à un point fixé* O *et à un point matériel* M *de masse* m.

Exercice 4 :

Deux billes identiques de masse m sont lâchées à $t = 0s$ sans vitesse initiale du même point O d'altitude h sur deux plans inclines de pentes différentes et repères par leur angle avec la verticale φ_1 et φ_2 avec $\varphi_1 < \varphi_2$. On notera x_1 et x_2 les positions respectives des deux billes le long de leur plan incline, en prenant le point O pour origine. On considère leur arrivée aux deux points A et B du sol supposé horizontal. L'accélération de la pesanteur supposée constante sera notée g . On supposera que les deux billes restent constamment en contact avec les plans inclinés.

1°) En négligeant les frottements, exprimer:

1°/a) les accélérations $\ddot{x}_1(t)$ et $\ddot{x}_2(t)$ des deux billes.

1°/b) les vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ des deux billes.

1°/c) les positions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des deux billes.

2°) Toujours en négligeant les frottements, exprimer en fonction de g , h , φ_1 et φ_2 :

2°/a) les accélérations des deux billes en A et B . Comparer ces deux accélérations.

2°/b) les temps de parcours des deux billes. Comparer ces deux temps.

2°/c) les vitesses des deux billes en A et B . Comparer ces deux vitesses.

3°) On considère maintenant que les deux billes sont soumises en plus à une force de frottement solide. On prendra la même valeur μ_C pour le coefficient de frottement solide de chacune des deux billes sur son plan incliné. Exprimer l'accélération des deux billes et comparer à nouveau ces deux accélérations.

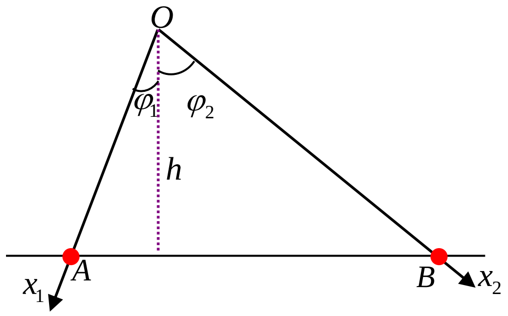


Figure 3-13 *Deux billes identiques de masse* m *sont lâchées à* $t = 0s$ *sans vitesse initiale du même point* O *d'altitude* h *sur deux plans inclines de pentes différentes et repères par leur angle avec la verticale* φ_1 *et* φ_2 *avec* $\varphi_1 < \varphi_2$.

Exercice 5 :

Un pendule simple est constitué d'une boule sphérique de rayon r, de masse m suspendue par un fil de masse négligeable, de longueur l ; l'autre extrémité du fil est accrochée à un point fixe O. On prendra $l \rangle\rangle r$ de telle sorte que la boule pourra être assimilée à un point matériel. Le système est dans le champ de pesanteur terrestre et on néglige tout frottement.

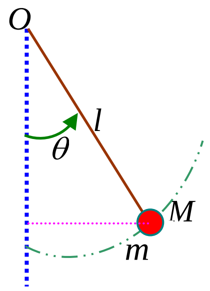


Figure 3-14 *Pendule simple.*

On étudie le mouvement dans le plan vertical Oxy d'un référentiel local supposé galiléen pour la durée du mouvement.

1°) Faire le bilan des forces appliquées à la boule.

2°) On utilise un repérage cartésien $M(x, y)$. Etablir l'équation du mouvement à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

3°) On utilise un repérage polaire $M(l, \theta)$ avec $\theta = (\vec{i}, \vec{U}_r)$.

Calculer le moment cinétique de la boule par rapport à O. En déduire l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique.

4°) Etudier le cas des petites oscillations ($\sin\theta$ de l'ordre de θ).

Exercice 6 :

Dans un référentiel R, on considère un système d'un point matériel de masse m, de position $\vec{r}$ et de vitesse $\vec{v}$.

1°) Quel est par rapport à l'origine de R le moment cinétique $\vec{L}$?

2°) Citer deux situations différentes pour laquelle $\vec{L}$ se conserve au cours du temps ?

3.6 Solutions

Exercice 1 :

1°) Les trois de Newton sont :

a. Le principe d'inertie $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$,

b. Le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} = m\vec{\gamma}$,

c. Le principe de l'action et de la réaction $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$.

2°) Les différents types de forces sont :

- ✓ Force de gravitation $\vec{F} = G.\frac{m_1.m_2}{d^2}.\vec{U}$,
- ✓ Force élastique $\vec{F} = -k.\overrightarrow{AB}$,
- ✓ Force de la pesanteur $\vec{F} = \vec{P} = m.\vec{g}$,
- ✓ Force de frottement $\overrightarrow{F_f} = \mu.\vec{N}$,
- ✓ Force de réaction $\vec{R} = \overrightarrow{F_{frot}} + \vec{N}$,
- ✓ Force de Coulomb $\vec{F} = k.\frac{q_1.q_2}{r^2}.\vec{U} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{d^2}.\vec{U}$,
- ✓ Force électrostatique $\vec{F} = q.\vec{E}$,
- ✓ Force magnétique $\vec{F} = q.(\vec{v} \wedge \vec{B})$,
- ✓ Force électromagnétique ou force de Lorentz $\vec{F} = q.[\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{B})]$.

Exercice 2 :

On a : $m = 0{,}8kg$,

$\alpha = 30°$,

$a = \gamma = 0{,}2m/s^2$; accélération,

$\mu_C = 0{,}3$,

$g = 10m/s^2$.

Calcul de la force $\vec{F}$ pour qu'il le corps se déplace vers le haut :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (P.F.D) ou la deuxième loi de Newton :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{R} = m.\vec{a},$$

Avec : $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j}$, $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{frot}$ et $\vec{F}_{frot} = \mu_C.\vec{N}$.

D'où : $\vec{P} + \vec{F}_e + \vec{R} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{F}_e + (1 + \mu_C)\vec{N} = m.\vec{a}$.

En projetant cette dernière équation vectorielle sur les deux axes :

$$\begin{cases}(xx'): F_e - P_x - \mu_C.N = m\gamma = m.a \\ (yy'): N - P_y = 0\end{cases},$$

Avec : $\begin{cases}P_x = mg\sin\alpha \\ P_y = mg\cos\alpha\end{cases},$

D'où : $F_e = m[g(\sin\alpha + \mu_C\cos\alpha) + a]$.

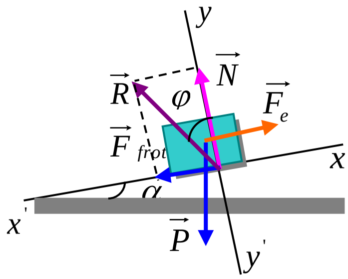


Figure 3-7

Application numérique :

$F_e = 0{,}8[10(\sin(30°) + 0.3\cos(30°)) + 0{,}2] = 6{,}23$.

Donc : $F_e = 6{,}23N$.

Exercice 3 :

A/1°) Les forces exercées sur m_1 et m_2 :

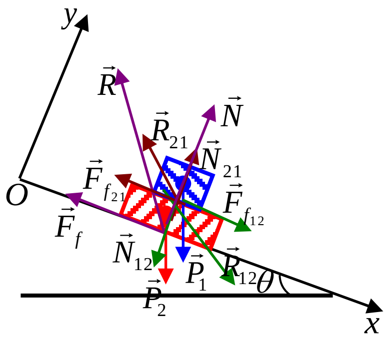


Figure 3-11

Masse m_1 :

$m_1\vec{g} + \vec{R_{21}} = m_1\vec{a_1}$,

Avec : $\vec{R} = \vec{F_f} + \vec{N}$ et $\vec{F_f} = \mu.\vec{N}$.

Masse m_2 :

$m_2\vec{g} + \vec{R} + \vec{R_{12}} = m_2\vec{a_2}$.

$\vec{R_{12}} = -\vec{R_{21}}$.

A/2°) Les accélération de m_1 et m_1:

Masse m_1 :

Projection sur les axes :

Par rapport (Ox) : $m_1.g.\sin\theta + F_{f\,21} = m_1.a_1$.

Par rapport (Oy) : $-m_1.g.\cos\theta + N_{21} = 0 \Rightarrow N_{21} = m_1.g.\cos\theta$.

$\vec{F_{f\;21}} = \mu_1.\vec{N}_{21} \Rightarrow \mu_1 = \dfrac{F_{f\,21}}{N_{21}}$.

$$\Rightarrow a_1 = g.(\sin\theta - \mu_1.\cos\theta).$$

Masse m_2 :

Projection sur les axes :

$$\begin{cases} m_2.g.\sin\theta - F_f + F_{f\,21} = m_2.a_2 \\ -m_2.g.\cos\theta + N - N_{21} = 0 \end{cases}.$$

On déduit que : $N = m_2.g.\cos\theta + N_{21} = m_2.g.\cos\theta + m_1.g.\cos\theta$.

Donc : $N = (m_1 + m_2).g.\cos\theta$.

$F_f = \mu_2.N = \mu_2.(m_1 + m_2)g.\cos\theta$.

$m_2.g.\sin\theta - \mu_2.(m_1 + m_2)g.\cos\theta + \mu_1.m_1.g.\cos\theta = m_2.a_2$.

B /1°) Abscisse x_0 du point M à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et α .

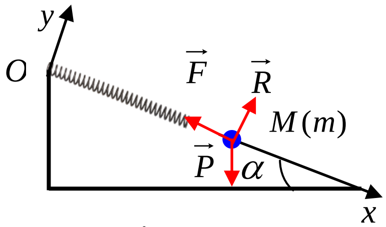


Figure 3-12

Cas statique : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow -k(l - l_0) + mg\sin\alpha = 0.$$

$$\Rightarrow l - l_0 - \frac{mg}{k}\sin\alpha = 0.$$

$$\Rightarrow x_0 = l = l_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha.$$

B/2°) Equation horaire $x(t)$ en fonction d , k, m et x_0.

Cas dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m.\vec{a}$.

Projection sur l'axe (Ox) : $-k.x + mg\sin\alpha = m.\ddot{x} \Rightarrow .\ddot{x} + \frac{k}{m}.x = g.\sin\alpha$.

On pose : $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

A $t = 0\,\text{s}$: $x = d + x_0$ d'où l'équation s'écrit : $x(t) = d\cos(\omega t) + x_0$.

Exercice 4 :

1°/a) Accélérations $\ddot{x}_1(t)$ et $\ddot{x}_2(t)$ des deux billes :

Pas de frottements $\Rightarrow \vec{R}_1 \perp (Ox_1)$ et $\vec{R}_2 \perp (Ox_2)$.

$\varphi_1 \langle \varphi_2$.

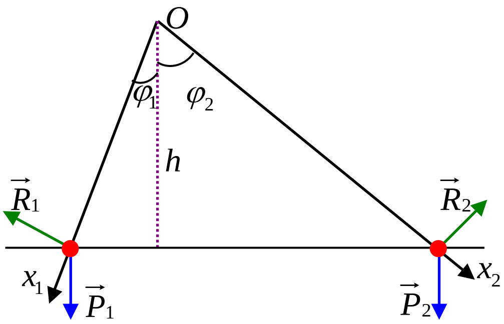


Figure 3-13

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (P.F.D) ou la deuxième loi de Newton.

Suivant l'axe (Ox_1):

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{P}_1 + \vec{R}_1 = m\vec{a}_1$.

En projetant sur (Ox_1), il vient alors : $mg\cos\varphi_1 = ma_1 = m\ddot{x}_1$, avec : $P_{1x} = mg\cos\varphi_1$.

Donc : $\left[\begin{array}{l} \ddot{x}_1(t) = g\cos\varphi_1 \\ \dot{x}_1(t) = g\cos\varphi_1 t \\ x_1(t) = \frac{1}{2} g\cos\varphi_1 t^2 \end{array}\right.$.

Suivant l'axe (Ox_2):

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{P}_2 + \vec{R}_2 = m\vec{a}_2$.

En projetant sur (Ox_2), il vient alors : $mg\cos\varphi_2 = ma_2 = m\ddot{x}_2$, avec : $P_{2x} = mg\cos\varphi_2$.

Donc : $\left[\begin{array}{l} \ddot{x}_2(t) = g\cos\varphi_2 \\ \dot{x}_2(t) = g\cos\varphi_2 t \\ x_2(t) = \frac{1}{2} g\cos\varphi_2 t^2 \end{array}\right.$.

Car : $\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$ et $x_1(t=0) = x_2(t=0) = 0$.

2°/a) Accélérations des deux billes en A et B :

En A : $\ddot{x}_1 = g\cos\varphi_1$

En B : $\ddot{x}_2 = g\cos\varphi_2$

On a aussi: $\varphi_1 \langle \varphi_2 \Rightarrow \cos\varphi_1 \rangle \cos\varphi_2$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 \rangle \ddot{x}_2$.

2°/b) Temps de parcours des deux billes :

$$\left[\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \dfrac{h}{OA} \\ \cos\varphi_2 = \dfrac{h}{OB} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} OA = \dfrac{h}{\cos\varphi_1} \\ OB = \dfrac{h}{\cos\varphi_2} \end{array}\right. .$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} g\cos\varphi_1 t^2 \Rightarrow \frac{h}{\cos\varphi_1} = \frac{1}{2} g\cos\varphi_1 t_A^2 .$$

$$\Rightarrow t_A = \frac{1}{\cos(\varphi_1)}\sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

de même: $t_B = \dfrac{1}{\cos(\varphi_2)}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$.

$\cos\varphi_1 \rangle \cos\varphi_2 \Rightarrow t_A \langle t_B$.

2°/c) Vitesses des deux billes en A et B :

$$\dot{x}_1(t = t_A) = g\cos\varphi_1 t_A = g\cos\varphi_1 \frac{1}{\cos\varphi_1}\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \dot{x}_1(t = t_A) = \sqrt{2gh}.$$

De même : $\dot{x}_2(t = t_B) = \sqrt{2gh}$.

Finalement : $\dot{x}_1(t = t_A) = \dot{x}_2(t = t_B)$.

On peut même généraliser ce résultat pour n'importe quelle attitude.

En effet la conversion de l'énergie s'écrit : $\frac{1}{2}m.\dot{x}^2(t) + mgz(t) = mgh \Rightarrow \dot{x}_A^2(t) = \dot{x}_B^2(t) = 2mg(h - z)$.

Donc : la vitesse des deux masses ne dépend que de l'altitude $z(t)$.

3°/a) Accélérations des deux billes :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (P.F.D) ou la deuxième loi de Newton.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{frot} = m\vec{a}.$$

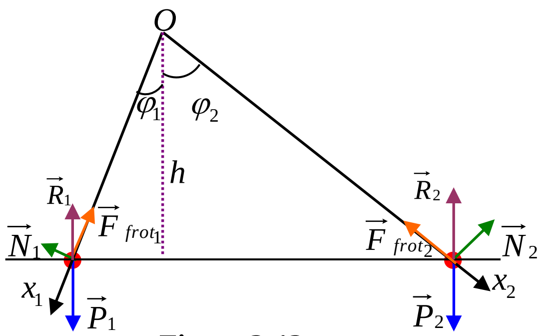


Figure 3-13

Avec : $\vec{P}$ est la force de pesanteur (le poids),

$\vec{N}$ est une force de réaction normale,

$\vec{F}_{frot}$ est une force de frottement,

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{frot}$ est la force réaction.

Pendant de la phase de glissement, on a la relation :
$\vec{F}_{frot} = \mu_C \vec{N}$; $\vec{N}$ est une force de réaction normale.
La projection de la P.F.D le long du plan incliné et de sa perpendiculaire donne :

$$\begin{cases} mg\cos\varphi - F_{frot} = m\ddot{x} \\ N - mg\sin(\varphi) = 0 \end{cases}.$$

Puisque $\vec{F}_{frot} = \mu_C \vec{N} \Leftrightarrow F_{frot} = \mu_C N$, on obtient :

$$mg\cos\varphi - \mu_C mg\sin\varphi = m\ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{x} = g[\cos\varphi - \mu_C \sin\varphi].$$

Donc pour les deux billes on trouve:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = g[\cos\varphi_1 - \mu_C.\sin\varphi_1] \\ \ddot{x}_2(t) = g[\cos\varphi_2 - \mu_C\sin\varphi_2] \end{cases}.$$

3°/b) Comparaison ente les deux accélérations :

$$\varphi_1 \langle \varphi_2 \Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi_1 \rangle \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_1 \langle \sin\varphi_2 \end{cases},$$

On a donc : $\ddot{x}_1 \rangle \ddot{x}_2$.

Exercice 5 :

1°) La masse m est soumise au poids $\vec{P} = mg\vec{j}$ et à la tension du fil : $\vec{T} = -\frac{T}{l}\overrightarrow{OM} = -\frac{T}{l}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$.

2°) La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} = m.\vec{a}.$$

$$\Leftrightarrow mg\vec{i} - \frac{T}{l}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = m.\left(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}\right).$$

Soit : $\begin{cases} mg - \frac{T}{l}x = m\ddot{x} \\ -\frac{T}{l}y = m\ddot{y} \end{cases}$.

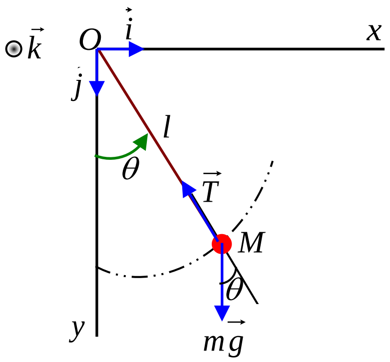


Figure 3-14 *Pendule simple.*

3°) Moment cinétique : $\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \Leftrightarrow \vec{L}_O = l\vec{U}_\rho \wedge m.l.\dot{\theta}.\vec{U}_\theta = ml^2\dot{\theta}\left(\vec{U}_\rho \wedge \vec{U}_\theta\right)$;

Avec : $v = l\dot{\theta} = l\omega$ et ω est la vitesse angulaire.

Soit : $\vec{L}_O = m.l^2.\dot{\theta}.\vec{k}$.

4°) Par application du théorème du moment cinétique : $\vec{C} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = l\vec{U}_\sigma \wedge \left(-T\vec{U}_\rho + mg\vec{i}\right)$.

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\theta}\vec{k}\right) = mgl\vec{U}_\rho \wedge \vec{i} = mgl\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right) \wedge \vec{i}.$$

$$ml^2\ddot{\theta}\vec{k} = -mgl\sin\theta\vec{k}.$$

d'où : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$,

Avec : $\sin\theta \approx \theta$,

et en posant : $\omega^2 = \frac{g}{l}$, $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ dont la solution est : $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$.

Exercice 6 :

1°) Moment cinétique $\vec{L}$:

$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$.

2°) $\vec{L}$ se conserve si :

☑ le système est isolé,
☑ le système est soumis à une force centrale, le centre étant l'origine de $\vec{r}$.

Chapitre 4

Travail et énergie

dans le cas d’un Point Matériel

Chapitre 4 **Travail et énergie dans le cas d'un point matériel**

Dans le chapitre précédent, consacré à la dynamique, nous avons établi les relations qui existent entre un mouvement et les forces qui en sont la cause. En particulier, nous avons vu que la connaissance des forces qui agissent sur une particule et des conditions initiales (position et vitesse) peut permettre de prédire son mouvement. Cependant, on ne connait pas toujours toutes les forces en présence et même si c'est le cas, il arrive que les équations à résoudre soient difficiles à traiter. Dans ces conditions, on peut faire appel à des notions telles que le travail et l'énergie qui font l'objet de ce chapitre.

4.1 Travail d'un point matériel

Considérons un point matériel M repéré dans un référentiel donné $\Re$ par un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et qui décrit une trajectoire C dans $\Re$ entre t_1 et t_2 étant soumis à la force $\vec{F}$. Pendant un temps infinitésimal dt, le point M se déplace selon le vecteur élémentaire $d\vec{r}$. Par définition le travail élémentaire $dW_{(\vec{F}/\Re)}$ d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point *A*, pour produire un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ dans un repère fixe $\Re_0(Oxyz)$, pendant le temps dt est définie par le produit scalaire $\vec{F}$ et $d\vec{r}$:

$$dW_{(\vec{F}/\Re)} = \vec{F}.d\vec{r} = F.dr.\cos\left(\vec{F},d\vec{r}\right). \tag{4-1}$$

On pose : $\theta = \left(\vec{F},d\vec{r}\right)$.

Alors, le travail élémentaire devient : $$dW_{(\vec{F}/\Re)} = F.dr.\cos\theta. \tag{4-2}$$

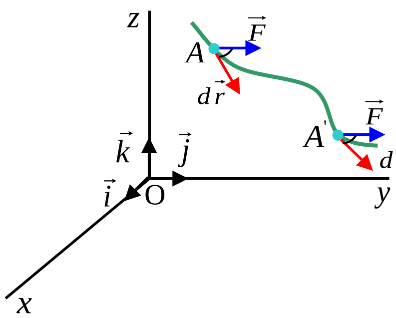


Figure 4-1 *Force variable sur un déplacement AA' quelconque. Sur un déplacement élémentaire suffisamment petit la force peut être considérée comme constante.*

La définition du travail élémentaire dW de la force correspond à la définition plus générale de «circulation élémentaire du vecteur force».

Le travail de la force $\vec{F}$ ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale.

Si le mouvement de A sur sa trajectoire C est connu, $d\vec{r}$ peut être lié à l'accroissement du temps par :

$$d\vec{r} = \vec{v}.dt\,. \tag{4-3}$$

Et par la suite la relation $dW_{(\vec{F}/\Re)} = \vec{F}.d\vec{r} = F.dr.\cos(\vec{F}, d\vec{r})$ devient :

$$dW_{(\vec{F}/\Re)} = \vec{F}.\vec{v}.dt = P(\vec{F})dt\,. \tag{4-4}$$

$P(\vec{F})$ est la puissance de la force $\vec{F}$.

1°) Puissance :

On définit la puissance instantanée et la puissance moyenne.

a°) Puissance instantanée :

Elle est définie par le rapport du travail par unité de temps :

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F}.d\vec{r}). \tag{4-5}$$

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{F}.d\vec{r}) \Leftrightarrow P_{inst} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}\,. \tag{4-6}$$

b°) Puissance moyenne :

Si le travail effectué pendant la durée Δt, la puissance moyenne P_{moy} de la force est définie par :

$$P_{moy} = \frac{\Delta W}{\Delta t}\,. \tag{4-7}$$

L'unité de la puissance est le Watt (symbole W) correspondant à un travail de $1J$ effectué en $1s$.

Par ailleurs, comme $d\vec{r} = \vec{v}.dt$ (où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse), on a aussi $dW_{(\vec{F}/\Re)} = \vec{F}.\vec{v}.dt$. Pour obtenir le travail d'une force sur un trajet fini de point A vers le point B, il suffit d'intégré l'expression ci-dessus par rapport à au déplacement élémentaire $dr = |d\vec{r}|$, ou par rapport au temps dt.

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} = \int_A^B \|\vec{F}\|.\cos(\vec{F}, d\vec{r})dr \quad \text{ou} \quad W_{A\to B} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}.\vec{v}.dt = \int_{t_A}^{t_B} \|\vec{F}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{F}, \vec{v})dt\,. \tag{4-8}$$

L'unité d'un travail est le Joule (J). Sa dimension est $M.L^2.T^{-2}$.

On note que la quantité $\frac{dW}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$ est homogène à une puissance.

Exemple :

Une particule se déplace sous l'action d'une force $\vec{F} = 2x.\vec{i} + y.\vec{j}$, avec $y = 2x$.
Déterminer le travail effectué par la force pendant le déplacement de point O vers le point $A(2,4)$.

Solution :

Le déplacement élémentaire est défini par : $d\vec{r} = dx.\vec{i} + dy\,\vec{j}$.
A partir de l'équation $y = 2x$ en déduire que :

$y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$,

Alors le travail élémentaire effectué par la force est :

$$\begin{aligned} dW = \vec{F}.d\vec{r} \Leftrightarrow\ & dW = \left(2x.\vec{i} + y.\vec{j}\right)\left(dx.\vec{i} + dy\,\vec{j}\right) \\ \Leftrightarrow\ & dW = \left(2x.\vec{i} + 2x.\vec{j}\right)\left(dx.\vec{i} + 2dx\,\vec{j}\right) \\ \Leftrightarrow\ & dW = 2xdx + 4xdx = 6xdx. \end{aligned}$$

Par intégration : $\int_O^A dW = \int_0^2 6xdx \Leftrightarrow W_{O\to A}\left(\vec{F}\right) = 3x^2\Big|_0^2 = 12J$.

2°) Travail de la force de pesanteur :

Considérons un point M de masse m se déplaçant d'un point A à un point B et calculons le travail du poids de ce point matériel au cours de ce déplacement (voir figure 4-2). Le déplacement de A à B est supposé quelconque c'est-à-dire que le chemin qui mène de A à B peut prendre différentes trajectoires.

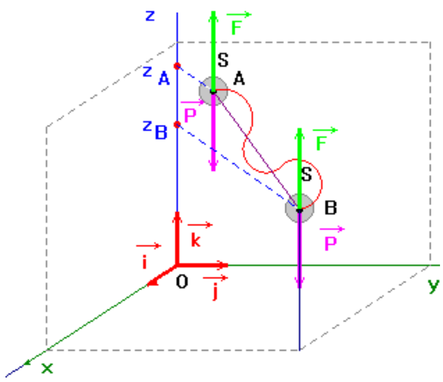


Figure 4-2 *Travail du poids d'un point matériel.*

Les composantes des vecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{AB}$ dans la base cartésienne du repère (O,x,y,z) (voir figure 4-2).

$$\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix} \text{ et } \vec{P} = m\vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{vmatrix}.$$

D'après la définition du travail, on peut écrire :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A). \qquad (4\text{-}9)$$

$W_{A\to B}(\vec{P}) = -mgh$, avec $h = z_B - z_A$ est la différence d'altitude entre le point d'arrivée B et le point de départ A.

3°) Travail d'une force élastique :

Considérons un ressort de raideur k, de longueur au repos l_0, au bout duquel est accrochée une masse m (voir figure 4-3). Le ressort et la masse sont sur un plan horizontal et nous nous intéressons uniquement à la force élastique.

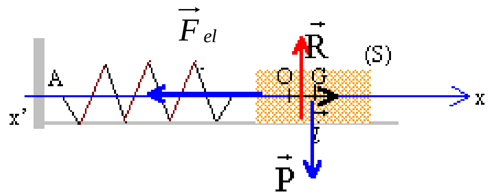


Figure 4-3 *Système masse-ressort.*

La force élastique peut être exprimer par : $\vec{F}_{el} = -k.\vec{r} = -k.x.\vec{i}$. (4-10)

Le travail élémentaire de la force élastique :

$$dW = \vec{F}_{el}\, d\vec{r} \Leftrightarrow dW = -kxdx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right). \qquad (4\text{-}11)$$

Lorsque $\vec{F}_{el}$ passe d'une position x_A à x_B, on a :

$$W_{A\to B}(\vec{F}_{el}) = \int_{x_A}^{x_B} -kxdx = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right). \qquad (4\text{-}12)$$

Nous remarquons que le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi, car il dépend uniquement des positions, initiale et finale du ressort.

4.2 Energie cinétique

4.2.1 Introduction

Deux types d'énergie seront introduits ici : l'énergie cinétique E_C liée au mouvement de l'objet et l'énergie potentielle E_P liée à sa position. L'énergie mécanique d'un système est alors définie par la somme des énergies cinétique et potentielle.

Considérons un point matériel M de masse m, se déplaçant dans un repère Galiléen $\Re(Oxyz)$, sous l'action d'un ensemble de forces extérieures pendant l'intervalle de temps dt et de déplacement élémentaire $d\vec{r}$, le travail de cette force est :

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} \tag{4-13}$$

Le mouvement de ce point est régi par le principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{4-14}$$

Au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{r}$, la somme des travaux élémentaires des forces extérieures est donnée par :

$$\sum \vec{F}_{ext}.d\vec{r} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{r} = m.d\vec{v}.\frac{d\vec{r}}{dt} = m.\vec{v}.d\vec{v}. \tag{4-15}$$

Par intégration de cette relation sur un trajet AB nous obtenons :

$$m\int_{v_A}^{v_B} \vec{v}.d\vec{v} = \sum \int_A^B \overrightarrow{F_{ext}}.d\vec{r} = \sum W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \sum W\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right). \tag{4-16}$$

La quantité $\frac{1}{2}mv^2$ représente l'énergie cinétique du point matériel.

4.2.2 Définition de l'énergie cinétique

On définit l'énergie cinétique E_C pour un point matériel de masse m se déplacement à la vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel Galiléen, par :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2. \tag{4-17}$$

Donc, la variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures :

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right) \Leftrightarrow \Delta E_C = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right). \tag{4-18}$$

Unité de l'énergie cinétique est le Joule.
Nous savons que, la quantité du mouvement $\vec{p} = m.\vec{v}$, alors l'énergie cinétique s'écrit :

$$E_C = \frac{p^2}{2m}. \tag{4-19}$$

4.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel Galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre la position A et B, est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points : $\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W\left(\vec{F}_{ext}\right)$.

4.3 Energie potentielle de gravitation et élastique

4.3.1 Energie potentielle de gravitation

En prenant les résultats obtenus sur le travail de la force de pesanteur donné par :

$$W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)=mg\left(z_A-z_B\right)=E_P(A)-E_P(B). \tag{4-20}$$

Nous pouvons définir l'énergie potentielle $E_P(z)$ en fonction de la hauteur z par :

$$E_{PP}(z)=mgz+C^{ste}, \tag{4-21}$$

si $E_{PP}(0)=0 \Rightarrow C^{ste}=0$.

Pour déterminer l'énergie potentielle d'un point matériel *A* dans un référentiel *R*, il faut procéder de la manière systématique suivante :

- ☑ Faire le bilan des forces,
- ☑ Distinguer les forces conservatives des forces non conservatives,
- ☑ L'énergie potentielle de *A* dans *R* est donc la somme des énergies potentielles dont dérivent chacune des forces conservatives.

4.3.2 Energie potentielle élastique

Considérons un ressort de raideur (constante élastique) k. La force élastique d'un ressort est une force de rappel : $\vec{F}_{el}=-k.\vec{r}$, (voir figure 4-3).

Maintenant on calcule l'énergie potentielle élastique :
Par définition on a : le travail élémentaire de la force élastique est :

$$dW=\vec{F}_{el}\,d\vec{r}. \tag{4-22}$$

Le déplacement élémentaire et la force élastique sont définis respectivement : $d\vec{r}=dx.\vec{i}$ et

$$\vec{F}_{el}=-k.\vec{r}=-k.x.\vec{i}. \tag{4-23}$$

Alors, le travail élémentaire de la force élastique devient : $dW=-k.x.dx$.

Ainsi, par intégration : $$\int dW=-k.\int_A^B x.dx=\frac{1}{2}k.x_A^2-\frac{1}{2}k.x_B^2. \tag{4-24}$$

La quantité $\frac{1}{2}k.x^2$ représente l'énergie potentielle E_{pe}, donc :

$$E_{pe}=\frac{1}{2}k.x^2. \tag{4-25}$$

$$\int_A^B dW\left(\vec{F}_{el}\right)=-k.\int_A^B x.dx \Leftrightarrow W_{A\to B}\left(\vec{F}_{el}\right)=\frac{1}{2}k.x_A^2-\frac{1}{2}k.x_B^2. \tag{4-26}$$

$$\Leftrightarrow W_{A\to B}\left(\vec{F}_{el}\right)=-\Delta E_{pe}. \tag{4-27}$$

En effet on trouve :

Energie cinétique correspondante au travail de force d'inertie :

$$W_i = \int m.\frac{dv}{dt}.dx = \int m.v.dv = \frac{1}{2}m.v^2 + C^{ste}. \qquad (4\text{-}28)$$

Energie potentielle correspondante au travail de force élastique ou de rappel :

$$W_{el} = -\int -k.x.dx = \frac{1}{2}k.x^2 + C^{ste}. \qquad (4\text{-}29)$$

Bilan d'énergie :

1°) Energie cinétique :

$E_C = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}m.\dot{x}^2$; correspondante au cas de translation.

$E_C = \frac{1}{2}.J.\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}.m.R^2.\dot{\varphi}^2$; correspondante au cas de rotation.

Avec : J est le moment d'inertie.

Exemple : le moment d'inertie d'un point matériel est : $J = m.R^2$.

2°) Energie potentielle :

$E_{pp} = m.g.z$; correspondante au travail de la force de pesanteur.

$E_{pe} = \frac{1}{2}k.x^2$; correspondante au travail de force élastique.

3°) Energie mécanique totale :

A partir du théorème de l'énergie cinétique $\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$ et la relation du travail entre deux points :

$$\sum W(\vec{F}_{ext}) = -\Delta E_p. \qquad (4\text{-}30)$$

En déduire que : $\Delta E_C = -\Delta E_p \Leftrightarrow E_C(B) - E_C(A) = E_P(A) - E_P(B).$

$\Leftrightarrow E_C(A) + E_P(B) = E_C(B) + E_P(B).$

La quantité $(E_C + E_P)$ est l'énergie mécanique totale elle reste constante.

$$E_M = E_T = E_C + E_P. \qquad (4\text{-}31)$$

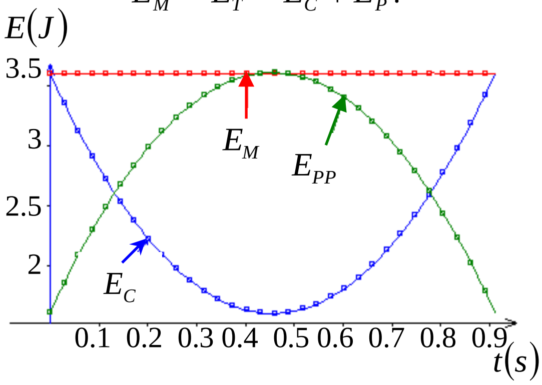


Figure 4-4 *Diagrammes énergétiques*.

Où on a l'équation différentielle d'un système harmonique libre correspondant au système de masse et ressort (Figure 4-3) :

$$m\ddot{x}+kx=0. \tag{4-32}$$

En multipliant par : $v=\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$.

$$m\ddot{x}+kx=0 \Leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0. \tag{4-33}$$

$$\Leftrightarrow m.\frac{dx}{dt}.\frac{d^2x}{dt^2}+k.\frac{dx}{dt}.x=0. \tag{4-34}$$

$$\Rightarrow m.v.dv+k.x.dx=0. \tag{4-35}$$

Ainsi, par intégration :

$$m.v.dv+k.x.dx=0 \Leftrightarrow d\left(\frac{1}{2}.mv^2+\frac{1}{2}.k.x^2\right)=d\left(C^{ste}\right). \tag{4-36}$$

$$\Leftrightarrow dE_M=d\left(C^{ste}\right). \tag{4-37}$$

$$\Rightarrow E_M=\frac{1}{2}.mv^2+\frac{1}{2}.k.x^2=E_C+E_P=C^{ste}. \tag{4-38}$$

Cette équation traduit le principe de conservation de l'énergie mécanique totale du système.

4°) Principe de la conservation de l'énergie mécanique :

L'énergie mécanique, qui est définie comme la somme des énergies, cinétique et potentielle, de la particule soumise à une force conservative, se préserve au cours du mouvement.

$$E_M(A)=E_M(B)=C^{ste} \Rightarrow E_C(A)+E_P(A)=E_C(B)+E_P(B). \tag{4-39}$$

$$\Rightarrow \Delta E_C+\Delta E_P=0. \tag{4-40}$$

4.4 Champ de forces

4.4.1 Forces conservatives

Une force s'exerçant sur un point matériel A dans un référentiel $\Re$ est dite conservative si et seulement si : il existe une fonction E_P de coordonnées de A (champ scalaire), telle que :

$$dW_{\left(\vec{F}/\Re\right)}=-dE_P. \tag{4-41}$$

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, il ne dépend que de la position initiale et la position finale.

La variation de l'énergie potentielle :

$$\Delta E_p=-\sum W\left(\vec{F}_{ext}^{Cons}\right). \tag{4-42}$$

Où : $\vec{F}_{ext}^{Cons}$ est une force conservative.

En explicitant le travail, à la définition intégrale de l'énergie potentielle :

$$\Delta E_p = -\sum W\left(\overrightarrow{F}_{ext}^{Cons}\right) \Leftrightarrow E_p(B) - E_p(A) = -\int_A^B \overrightarrow{F}_{ext}^{Cons}.d\vec{r}\ . \qquad (4\text{-}43)$$

On déduit la définition différentielle de l'énergie potentielle en fonction du travail élémentaire de la force conservative :

$$dE_p = -\overrightarrow{F}_{ext}^{Cons}.d\vec{r}\ . \qquad (4\text{-}44)$$

Cette dernière relation peut s'écrire en fonction du gradient de l'énergie potentielle E_P.
La différentielle totale de la fonction $E_P(x, y, z)$ est définie par :

$$dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz\ . \qquad (4\text{-}45)$$

Le champ de force est définie par :

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\ . \qquad (4\text{-}46)$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est défini par :

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\ . \qquad (4\text{-}47)$$

Alors :

$$dE_p = -\overrightarrow{F}_{ext}^{Cons}.d\vec{r} \Leftrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -\left[\left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right).\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)\right]. \qquad (4\text{-}48)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right). \qquad (4\text{-}49)$$

Par identification:

$$\left[\begin{array}{l} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_x\vec{i} = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} \\ F_y\vec{j} = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} \\ F_z\vec{k} = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} \end{array}\right. . \qquad (4\text{-}50)$$

$$\Rightarrow F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}\right). \qquad (4\text{-}51)$$

Le gradient d'une énergie potentielle en coordonnées cartésiennes, s'écrire:

$$\overrightarrow{grad}(E_P) = \vec{\nabla} E_P = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4\text{-}52)$$

Donc :

$$\vec{F}_{ext}^{Cons} = -\overrightarrow{grad}(E_P). \qquad (4\text{-}53)$$

On dit que : la force $\vec{F}_{ext}^{Cons}$ dérive d'une énergie potentielle E_P, on écrit généralement : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P)$ est un champ de force.

Remarque :

Si le déplacement se fait par un chemin curviligne en peut utiliser les cordonnées cylindriques (ρ, φ, z) ou les cordonnées sphériques (r, φ, θ).

Gradient en fonction des cordonnées cylindriques (ρ, φ, z) :

Champ de force en fonction des cordonnées cylindriques, s'écrire:

$$\vec{F}(\rho, \varphi, z) = F_\rho \vec{U}_\rho + F_\varphi \vec{U}_\varphi + F_z \vec{k}. \qquad (4\text{-}54)$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ en fonction des cordonnées cylindriques, s'écrire :

$$d\vec{r}(\rho, \varphi, z) = d\rho \vec{U}_\rho + \rho d\varphi \vec{U}_\varphi + dz\vec{k}. \qquad (4\text{-}55)$$

La différentielle totale de la fonction $E_P(\rho, \varphi, z)$, s'écrire:

$$dE_P(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial E_P}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial E_P}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial E_P}{\partial z} dz. \qquad (4\text{-}56)$$

On a : $dE_p = -\vec{F}_{ext}^{Cons}.d\vec{r} \Leftrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial E_P}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial E_P}{\partial z} dz = -(F_\rho d\rho + \rho F_\varphi d\varphi + F_z dz)$.

Par identification :

$$\begin{cases} F_\rho = -\dfrac{\partial E_P}{\partial \rho} \\ F_\varphi = -\dfrac{1}{\rho}.\dfrac{\partial E_P}{\partial \varphi} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases}. \qquad (4\text{-}57)$$

Alors, le gradient en fonction des cordonnées cylindriques, s'écrire :

$$\overrightarrow{grad}(E_P) = \frac{\partial E_P}{\partial \rho}\vec{U}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_P}{\partial \varphi}\vec{U}_\varphi + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k}. \qquad (4\text{-}58)$$

Gradient en fonction des cordonnées sphériques (r, φ, θ) :

Champ de force en fonction des cordonnées sphériques (r, φ, θ), s'écrire :

$$\vec{F}(r,\varphi,\theta) = F_r\vec{U}_r + F_\varphi\vec{U}_\varphi + F_\theta\vec{U}_\theta. \tag{4-59}$$

Le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ en fonction des cordonnées sphériques (r,φ,θ), s'écrire :

$$d\vec{r} = dr\vec{U}_r + r\sin\theta d\varphi\vec{U}_\varphi + rd\theta\vec{U}_\theta. \tag{4-60}$$

La différentielle totale en fonction des coordonnées sphériques (r,φ,θ), s'écrire :

$$dE_P(r,\varphi,\theta) = \frac{\partial E_P}{\partial r}dr + \frac{\partial E_P}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta. \tag{4-61}$$

On a : $dE_p = -\vec{F}_{ext}^{Cons}\, d\vec{r} \Leftrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial r}dr + \frac{\partial E_P}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial E_P}{\partial \theta}d\theta = -\left[F_r dr + rF_\varphi \sin\theta d\varphi + rF_\varphi d\theta\right].$

Par identification :

$$\begin{cases} F_r = -\dfrac{\partial E_P}{\partial r} \\ F_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial E_P}{\partial \varphi} \\ F_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_P}{\partial \theta} \end{cases}. \tag{4-62}$$

Alors, le gradient en fonction des cordonnées sphériques (r,φ,θ), s'écrire :

$$\overrightarrow{grad}(E_P) = \frac{\partial E_P}{\partial r}\vec{U}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_P}{\partial \varphi}\vec{U}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial E_P}{\partial \theta}\vec{U}_\theta. \tag{4-63}$$

Résumé :

- ✓ La condition pour qu'un champ de forces soit conservatif est que son rotationnel soit nul :

$$\vec{F} \text{ conservative} \Leftrightarrow \overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P).$$

- ✓ Le travail d'une force conservative est nul sur une courbe C fermée : $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$.

Rappel :

Pour déterminer le produit vectoriel en utilisant la méthode de déterminant :

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_y & F_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ F_x & F_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}\vec{k}. \tag{4-64}$$

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_y & F_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ F_x & F_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}\vec{k} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + 0.\vec{k}. \tag{4-65}$$

Par identification on obtient : $\begin{cases} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}$. (4-66)

Exemples :

☑ Force gravitationnelle :
La force gravitationnelle est donc conservative et dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^2}\vec{U}_r \Rightarrow dW_{(\vec{F}/\Re)} = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}\Big)_{\Re} = -d\left[-G\frac{mM}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|}\right]. \qquad (4\text{-}67)$$

☑ Force électrostatique,
☑ Force de pesanteur.

Champ de gravitation universelle $\vec{g}$:

On a le champ de force dérive d'une énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P) \Leftrightarrow m\vec{g} = -\overrightarrow{grad}(mU). \qquad (4\text{-}68)$$

$$\Leftrightarrow \vec{g} = -\overrightarrow{grad}(U). \qquad (4\text{-}69)$$

Le champ de gravitation $\vec{g}$ dérive d'un potentiel U ou V .

$$\vec{g} = -\overrightarrow{grad}(V).$$

Champ électrique $\vec{E}$:

Par analogie électrique, le champ électrique $\vec{E}$, avec $\vec{F} = q\vec{E}$ et $E_P = qU$.

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}(qU) \Leftrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}(U) = -\overrightarrow{grad}(V). \qquad (4\text{-}70)$$

Donc :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V). \qquad (4\text{-}71)$$

4.5 Forces non conservatives

En mécanique, la plus part des forces étudiées sont conservatives et dérivent donc d'une énergie potentielle indépendant du temps. Cependant, certaines forces ne sont pas conservatives :
☑ Les forces de frottement,

☑ La force de magnétique qu'exerce un champ magnétique sur une charge électrique q, animé d'une vitesse $\vec{v}$ s'écrit :

$$\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}. \tag{4-72}$$

On peut montrer que le rotationnel de cette force n'est pas nul.

Dans le cas des forces de frottements, le travail effectué dépend du chemin suivi. Le travail de la force dissipative $\vec{F}_{frot}$ est égale à :

$$\sum W\left(\vec{F}_{frot}\right) = E_M(B) - E_M(A) = \Delta E_M. \tag{4-73}$$

« La perte de l'énergie mécanique est mesurée par le travail des forces dissipatives».

4.6 Exercices

Exercice 1 :

Une particule matérielle de masse m se déplace sous l'action de la force: $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ du point $A(1,2,-1)$ au point $D(2,4,-2)$.
Calculer le travail de la force suivant chacun des trajets suivants :
1°) la ligne brisée $ABCD$ où $B(2,2,-1)$ et $C(2,4,-1)$,

2°) la courbe définie par les équations paramétriques : $x = t$, $y = t^2$ et $z = t$, sachant que la particule quitte le point A à l'instant $t_A = 0s$ et atteint le point D à l'instant $t_D = 2s$,

Exercice 2 :

Un chariot de masse 15 kg est tiré par une force le long d'une colline incliné de 5° par rapport à l'horizontal. Le chariot monte à une vitesse constante de 6 m/s. On néglige les frottements.
1°) Calculer le travail effectué par la force en une minute,
2°) Calculer la puissance dissipée.

Exercice 3 :

On laisse glisser une masse ponctuelle m sur une surface sphérique lisse de rayon R sans frottement; comme le montre la figure (4-5). Supposons que le mouvement commence du sommet de la sphère et sans vitesse initiale.
1°) En utilisant le principe de la dynamique, trouver la vitesse du corps pour que le la masse quitte la surface,
2°) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique entre S et Q, trouver la hauteur pour lequel la mase quitte la surface.

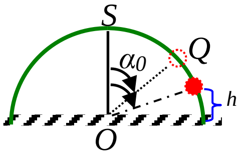


Figure 4-5 *Une masse ponctuelle* m *glisse sans frottement sur une surface demie sphérique de rayon* R.

Exercice 4 :

Sur la piste de la figure ci-contre, une masse ponctuelle est abandonnée sans vitesse initiale du point A et parvient au point B avec une vitesse $v_B = 6m/s$. La différence d'altitudes entre A et B est $h = 2m$. On prendra $g = 10m/s^2$.

1°) Monter que le point est soumis à des forces de frottements.
2°) Calculer le travail de ces forces entre A et B si la masse est $m = 3kg$.

Exercice 5 :

Soit un satellite de masse m tournant autour de la terre de masse M à distance r du centre de la terre. En supposant que sa trajectoire est circulaire :

1°) Déterminer, en fonction de la constante universelle de gravitation G, des masses M, m et du rayon r de l'orbite:
   a. La vitesse linéaire v et de la vitesse angulaire ω du satellite,
   b. La durée T d'une révolution autour de la terre (période),

2°) Donner les expressions de l'énergie cinétique E_C et potentielle E_P correspondant à la force de gravitation entre le satellite et la terre.

3°) Donner l'énergie mécanique totale E_M en fonction de G, M, m et r.

4°) Application numérique : Si le satellite est à une altitude h, calculer v, ω, T, E_C, E_P et E_M

On donne : $M = 6\ 10^{24}\ kg$, $R_T = 6400\ km$, $m = 100\ kg$, $G = 6{,}67\ 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$ et $h = 800km$.

Exercice 6 :

Un objet suspendu à un fil de longueur l est écarté de la verticale d'un angle α_0. De cette position, l'objet est lâché sans vitesse initiale. En utilisant trois méthodes différentes,
1°) Le principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton),
2°) Le théorème de l'énergie cinétique,
3°) La conservation de l'énergie mécanique.
Déterminer la vitesse de l'objet au moment où le fil forme un angle α_1 avec la verticale.

Exercice 7 :

Un point matériel M de masse m se déplace sous l'action d'une force : $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + 3xy\vec{j}$ du point $O(0,0)$ vers $A(2,4)$, suivant chacun des deux chemins : $y = 2x$ et $y = x^2$.
Cette force est-elle conservative?

Exercice 8 :

Un point matériel de masse 5 g se déplace sous l'action d'une force : $\vec{F} = (x^2 + \alpha y)\vec{i} + 2x\vec{j}$.

1°) Déterminer la valeur de α, pour que la force $\vec{F}$ soit conservative.
2°) Trouver l'expression de l'énergie potentielle $E_P(x, y)$, dont dérive la force sachant que $E_P(0,0) = 0$.

Exercice 9 :

Un point matériel de masse 10g se déplace sous l'action d'une force : $\vec{F} = (x + 3y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x + z)\vec{j} + (2x + \gamma y)\vec{k}$.

1°) Déterminer les valeurs de α, β et γ pour que la force $\vec{F}$ soit conservative.

2°) Trouver l'expression de l'énergie potentielle $E_P(x,y,z)$, dont dérive la force sachant que $E_P(0,0,0)=0$.

Exercice 10 :

Un point matériel de masse m se déplace sous l'action d'une force $\vec{F}$ et de l'énergie potentielle $E_P(x,y,z)=2x^2-xy+yz$.

Trouver l'expression de la force $\vec{F}$ dans le système des coordonnées cartésiennes.

Exercice 11 :

On laisse glisser une bille métallique de masse m, du point A se trouvant dans une demi sphère de rayon $R=1{,}25m$; voir la figure (4-6) ci-dessous.

La vitesse au point A est $v_A=0m/s$ et elle arrive au point B à une vitesse $v_B^{'}=4m/s$.

1°) Montrer que la bille est bien soumise à une force de frottement.

2°) Quel est le travail de cette force. On donne : $g=10m/s^2$.

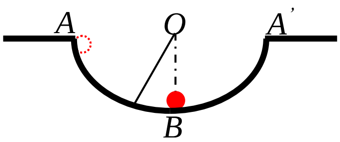


Figure 4-6 *Une bille métallique glissée sur une demi-sphére.*

Exercice 12 :

Un point matériel de masse m se déplace sans frottements sur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon R sous l'action d'une force (voir la figure 4-7 ci-dessous). La vitesse au point A est v_A.

1°) Déterminer le travail du poids lorsque m se déplace de point A vers le point M en fonction de θ,

2°) Déterminer l'énergie potentielle de m au point M avec $E_{PP}(A)=0J$,

3°) Déterminer la vitesse de m au point. En déduire l'énergie cinétique de m au point M,

4°) Déterminer l'énergie totale. Conclure,

5°) Déterminer la l'hauteur maximale h_{max} à laquelle parvient la masse m,

6°) Déterminer l'équation de la trajectoire.

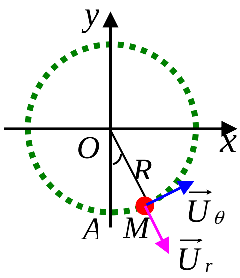


Figure 4-7 *Point matériel de masse m se déplace sans frottements sur une trajectoire circulaire.*

Exercice 13 :

Un point matériel M, de masse m et soumis à une force centrale $\vec{F}$ de centre O, a une énergie potentielle E_P telle que :

$E_P = -a/r$ où a est une constante positive et $r = \left\|\vec{r}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ est le module de vecteur position. Soit φ l'angle entre l'horizontale et $\overrightarrow{OM}$; $\varphi = \omega t$, avec ω la vitesse angulaire constante et t le temps.

1°) Donner l'expression de la force $\vec{F}$,
2°) Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées polaires,
3°) Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en fonction des coordonnées polaires,
4°) Montrer que le vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = m.\vec{r} \wedge \vec{v}$ est constant,
5°) Le vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = m.c.\vec{k}$, où m est la masse, c est une constante physique et $\vec{k}$ un vecteur unitaire. Donner la dimension de la grandeur c .

4.7 Solutions

Exercice 1 :

On a : $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
Les différent points $A(1,2,-1)$, $B(2,2,-1)$, $C(2,4,-1)$ et $D(2,4,-2)$.

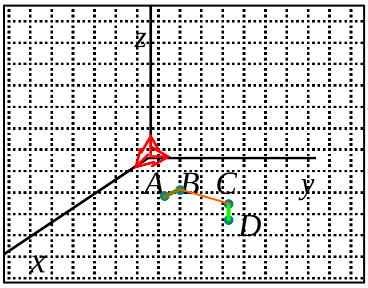


Figure 4-8 *Représentation des points A , B , C et D dans le repère cartésienne $R(Oxyz)$.*

1°) Calcul de travail de la force suivant différents trajets :

La ligne AB :

$A(1,2,-1)$ et $B(2,2,-1)$; x est variable, $y = 2$ et $z = -1$ sont constants.

Le travail élémentaire est définie par : $dW = \vec{F}.d\vec{r}$.

$\vec{F} = (x^2 + 4)\vec{i} - x\vec{j} + 2x\vec{k}$ et $d\vec{r} = dx\vec{i}$.

Alors, $dW = \left[(x^2 + 4)\vec{i} - x\vec{j} + 2x\vec{k}\right].(dx\vec{i}) \Leftrightarrow dW = (x^2 + 4)dx$.

Par intégration la relation: $dW = (x^2 + 4)dx \Leftrightarrow \int_A^B dW = \int_1^2 (x^2 + 4)dx$.

$$\Leftrightarrow \sum W_{A \to B}(\vec{F}) = \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_1^2 .$$

$$\Leftrightarrow \sum W_{O\to A}\left(\vec{F}\right)=\frac{19}{3}J .$$

La ligne BC :

$B(2,2,-1)$ et $C(2,4,-1)$; y est variable, $x=2$ et $z=-1$ sont constants.

Le travail élémentaire est définie par : $dW=\vec{F}.d\vec{r}$.

$\vec{F}=\left(4+y^2\right)\vec{i}-2\vec{j}+2y\vec{k}$ et $d\vec{r}=dy\vec{j}$.

Alors, $dW=\left[\left(4+y^2\right)\vec{i}-2\vec{j}+2y\vec{k}\right]\left(dy\vec{j}\right)\Leftrightarrow dW=-4dy$.

Par intégration la relation: $dW=-4dy \Leftrightarrow \int_B^C dW=\int_2^4(-4)dy=-4\int_2^4 dy$.

$$\Leftrightarrow \sum W_{B\to C}\left(\vec{F}\right)=\left(-4y\right)\Big|_2^4 .$$
$$\Leftrightarrow \sum W_{O\to A}\left(\vec{F}\right)=-8J .$$

La ligne CD:

$C(2,4,-1)$ et $D(2,4,-2)$; z est variable, $x=2$ et $y=4$ sont constants.

Le travail élémentaire est défini par : $dW=\vec{F}.d\vec{r}$.

$\vec{F}=20\vec{i}+2z\vec{j}+8\vec{k}$ et $d\vec{r}=dz\vec{k}$.

Alors, $dW=\left[20\vec{i}+2z\vec{j}+8\vec{k}\right]\left(dz\vec{k}\right)\Leftrightarrow dW=8dz$.

Par intégration la relation: $dW=8dz \Leftrightarrow \int_C^D dW=\int_{-1}^{-2}8dz$.

$$\Leftrightarrow \sum W_{B\to C}\left(\vec{F}\right)=8z\Big|_{-1}^{-2} .$$
$$\Leftrightarrow \sum W_{O\to A}\left(\vec{F}\right)=-8J .$$

2°) On a les équations paramétriques : $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t \end{cases}$.

Sachant que la particule quitte le point A à l'instant $t_A=0s$ et atteint le point D à l'instant $t_D=2s$.

On fait alors le changement de variable :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2tdt \\ dz = dt \end{cases}.$$

La force $\vec{F}$ et le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ sont deviens, respectivement: $\vec{F} = (t^2 + t^4)\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$ et $d\vec{r} = dt\vec{i} + 2tdt\vec{j} + dt\vec{k}$.

Alors, le travail élémentaire est :

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} \Leftrightarrow dW = \left[(t^2 + t^4)\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}\right]\left[dt\vec{i} + 2tdt\vec{j} + dt\vec{k}\right].$$

$$\Leftrightarrow dW = (t^2 + t^4)dt + t^3dt + t^3dt.$$

$$\Leftrightarrow \int_A^D dW(\vec{F}) = \int_0^2 \left[(t^2 + t^4)dt + t^3dt + t^3dt\right].$$

$$\Leftrightarrow W_{A\to D}(\vec{F}) = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{2}\right)\Bigg|_0^2.$$

$$\Leftrightarrow W_{A\to D}(\vec{F}) = 17.06J.$$

Exercice 2 :

On a : $15kg$, $\alpha = 5°$, $v = 6m/s$ et $t = 2\min$.

1°) Calcul de travail effectué :

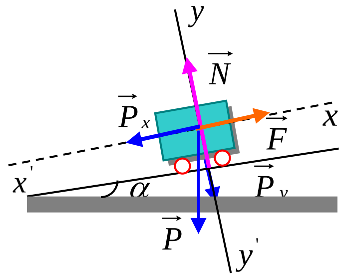


Figure 4-9 *Un chariot est tiré par une force sur un plan incliné.*

On a : $v = C^{ste} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$,

$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = \vec{0}.$$

La force de réaction : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{frot}$, on néglige les frottements $\Rightarrow \vec{R} = \vec{N}$.

En projetant sur l'axe (xx'), on a : $F - P_x = 0 \Rightarrow F = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$.

Le travail élémentaire est défini par : $dW = \vec{F}.d\vec{r} = F.dS$.

La vitesse linaire est définie par : $v = \dfrac{dS}{dt} \Rightarrow dS = vdt$.

D'où : $\int_A^B dW = \int_0^t F.vdt = \int_0^t mg\sin\alpha.vdt \Leftrightarrow W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = mg\sin\alpha.v.t$.

Application numérique : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = 15\times 10\times \sin\left(5°\right)\times 6\times 120$,

Donc : $W_{A\to B}\left(\vec{F}\right) = 4680J$.

2°) Calcul de la puissance dissipée :

$$P = \frac{dW}{dt} = mg\sin\alpha.v.$$

Application numérique : $P = 15\times 10\times \sin\left(5°\right)\times 6$,

Donc : $P = 78Watt$.

Exercice 3 :

1°) La vitesse du corps pour que le la masse quitte la surface :
D'après le principe de la dynamique (deuxième loi de Newton):

$$\sum\vec{F} = m.\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{N} = m.\vec{a}.$$

Par projection sur l'axe (OP), on trouve :

$$N - m.g.\cos(\alpha) = -m.\frac{v^2}{R}.$$

La masse quitte la sphère $\Rightarrow N = 0$, au l'angle α_0.

$$v_0^2 = R.g.\cos\alpha_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{Rg\cos\alpha_0}. \qquad (1)$$

2°) La hauteur pour lequel la mase quitte la surface :

En appliquant théorème de l'énergie cinétique entre S et Q.

$$\Delta E_C = \sum W_{S\to Q}\left(\vec{F}_{ext}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_S^2 = \frac{1}{2}mgR\cos\alpha_0 = mg(R-h). \qquad (2)$$

A partir de l'équation (1) et (2), on trouve : $\left[\begin{array}{l} h = \frac{2}{3}R \\ \cos\alpha_0 = \frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Exercice 4 :

1°) Choisissons l'énergie potentielle nulle en B.
L'énergie mécanique en A et B est :

$E_M(A) = mgh = 20.m$,

$E_M(B) = mgh = 18.m$,

$E_M(B) \langle E_M(A) \Rightarrow$ Perte d'énergie,

$\Rightarrow$ Présence des frottements.

2°) Travail des forces de frottement est :

$$W\left(\vec{F}_{frot}\right) = \Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = -6 .$$

$$W\left(\vec{F}_{frot}\right) = -6J .$$

Exercice 5 :

1°) a/ La vitesse linéaire v et de la vitesse angulaire ω du satellite :

Vitesse linéaire :

La seule force agissant sur le satellite est la force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G\frac{M.m}{r^2}\vec{U} .$$

L'accélération : $\vec{a} = \vec{a}_N = -\dfrac{v^2}{r}\vec{U}$.

D'après le principe fondamental de la dynamique (PFD) ou la deuxième loi de Newton :

$$G\frac{M.m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{r}} .$$

Vitesse angulaire :

La relation liant la vitesse linéaire avec la vitesse angulaire est donnée par : $v = r.\omega$.

Alors : $v = r.\omega \Rightarrow \omega = \dfrac{v}{r} = \sqrt{\dfrac{G.M}{r^3}}$.

1°) b/ La période T :

On a : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{G.M}}$.

2°) Les expressions de l'énergie cinétique E_C et potentielle E_P correspondant à la force de gravitation entre le satellite et la terre.

a) Energie cinétique E_C :

On a : $E_C=\frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow E_C=\frac{1}{2}G.\frac{M.m}{r}$.

b) Energie potentielle E_P :

$$E_P=-G\frac{M.m}{r}\propto\frac{1}{r}$$, car le potentiel à l'infini est nul.

3°) Energie mécanique totale E_M :

$$E_M=E_C+E_P=-\frac{1}{2}G\frac{M.m}{r}.$$

4°) Application numérique :

Avec $r=R+h$, on trouve :

$v=7{,}47\ 10^3\ m/s,\quad E_C=2{,}79\ 10^9\ J$,
$\omega=10^{-3}\ rad/s,\quad E_P=-5{,}58\,10^9\ J$,
$T=6{,}28\,10^3\ s,$ et $E_M=-2{,}79\,10^9\ J$.

Exercice 6 :

Dans le repère (Oxy), l'axe (Oy) est vertical et est dirigé vers le bas.
On désira le point O comme référence d'énergie potentielle nulle.
On notera m la masse de l'objet et $\vec{T}$ la tension du fil.
1°) Le principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton) : $\sum\vec{F}=m\vec{a}$.
Dans la position α, on a : $m\vec{g}+\vec{T}=m\vec{a}$, $\vec{a}$ étant l'accélération.
En projetant sur l'axe tangentiel, on a :

$$m\sin(\alpha)=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=-m\frac{dv}{d\alpha}\frac{v}{l}$$, car $\frac{d\alpha}{dt}=\dot{\alpha}=\omega=\frac{v}{l}$ est la vitesse angulaire.

Ainsi, $vdv=-gl\sin\alpha.d\alpha \Leftrightarrow \int_0^v vdv=-gl\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\sin\alpha.d\alpha$.

$$\Leftrightarrow \frac{v^2}{2}=gl[\cos\alpha_1-\cos\alpha_0].$$

Soit : $v^2=2gl[\cos\alpha_1-\cos\alpha_0]$.

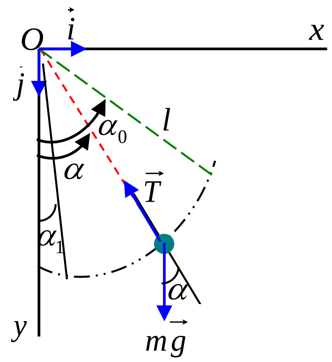


Figure 4-10 *Pendule simple.*

2°) Le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_C=\sum W(\vec{F}_{ext})\Leftrightarrow\frac{1}{2}mv^2-0=W(m\vec{g})+W(\vec{T}).$$

Le travail de la tension est nul : $W(\vec{T})=0$.

Le travail du poids est :

$$W(m\vec{g}) = \int m\vec{g}.d\vec{r} \Leftrightarrow W(m\vec{g}) = \int mg\vec{j}.(dx\vec{i} + dy\vec{j}).$$

$$\Leftrightarrow W(m\vec{g}) = \int_{y(\alpha_0)}^{y(\alpha_1)} mgdy = mg[y(\alpha_1) - y(\alpha_0)].$$

$$\Leftrightarrow W(m\vec{g}) = mg[l\cos\alpha_1 - l\cos\alpha_0].$$

Ainsi, $\frac{1}{2}mv^2 = mg[l\cos\alpha_1 - l\cos\alpha_0]$.

Soit : $v^2 = 2gl[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0]$.

3°) La conservation de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_M = 0 \Leftrightarrow E_M(\alpha_0) = E_M(\alpha_1).$$

$$\Leftrightarrow E_C(\alpha_0) + E_P(\alpha_0) = E_C(\alpha_1) + E_P(\alpha_1).$$

En α_0, l'énergie mécanique est : $E_M(\alpha_0) = -mgl\cos\alpha_0$.

En α_1, l'énergie mécanique est : $E_M(\alpha_1) = -mgl\cos\alpha_1 + \frac{1}{2}mv^2$.

On a donc : $-mgl\cos\alpha_0 = -mgl\cos\alpha_1 + \frac{1}{2}mv^2$.

Soit : $v^2 = 2gl[\cos\alpha_1 - \cos\alpha_0]$.

Exercice 7 :

On a :

- $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + 3xy\vec{j}$,
- point matériel se déplace de $O(0,0)$ vers $A(2,4)$,
- deux chemins $y = 2x$ et $y = x^2$.

Cette force est elle conservative?

Calcul du travail suivant les deux chemins :

a/ Suivant le premier chemin $y = 2x$:

Le travail élémentaire est définie par : $dW = \vec{F}.d\vec{r}$.

$\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + 3xy\vec{j}$ et $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$.

On fait alors le changement de variable : $y = 2x \Rightarrow dy = 2dx$.

d'où, le déplacement élémentaire devient : $d\vec{r} = dx\vec{i} + 2dx\vec{j}$.

Alors, $dW = \left[\left(-3x^2\right)\vec{i} + 6x^2\vec{j}\right]\left[dx\vec{i} + 2dx\vec{j}\right] \Leftrightarrow dW = -3x^2dx + 12x^2dx = 9x^2dx$.

Par intégration la relation: $dW = 9x^2dx \Leftrightarrow \int_O^A dW = \int_0^2 9x^2dx$.

$$\Leftrightarrow \sum W_{O\to A}\left(\vec{F}\right) = 3x^3\Big|_0^2 .$$
$$\Leftrightarrow \sum W_{O\to A}\left(\vec{F}\right) = 24J .$$

b/ Suivant le premier chemin $y = x^2$:

On fait alors le changement de variable : $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$.

La force devient et le déplacement élémentaire deviens, respectivement : $\vec{F} = \left(x^2 - x^4\right)\vec{i} + 3x^3\vec{j}$ et $d\vec{r} = dx\vec{i} + 2xdx\vec{j}$.

Alors, le travail élémentaire est :

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} \Leftrightarrow dW = \left[\left(x^2 - x^4\right)\vec{i} + 3x^3\vec{j}\right]\left[dx\vec{i} + 2xdx\vec{j}\right].$$
$$\Leftrightarrow dW = \left(x^2 - x^4\right)dx + 6x^4dx = \left(x^2 + 5x^4\right)dx .$$

Par intégration la relation: $dW = \left(x^2 + 5x^4\right)dx \Leftrightarrow \int_O^A dW = \int_0^2 \left(x^2 + 5x^4\right)dx$.

$$\Leftrightarrow \sum W_{O\to A}\left(\vec{F}\right) = \left(\frac{x^3}{3} + x^5\right)\Bigg|_0^2 .$$
$$\Leftrightarrow \sum W_{O\to A}\left(\vec{F}\right) = 34{,}66J .$$

Les deux travaux suivant les deux chemins ne sons pas égaux, donc la force $\vec{F} = \left(x^2 - y^2\right)\vec{i} + 3xy\vec{j}$ dans ce cas n'est pas conservative, car le travail de cette force dépend du chemin suivi.

Exercice 8 :

Nous avons : $\vec{F} = \left(x^2 + \alpha y\right)\vec{i} + 2x\vec{j}$.

1°) Valeur de α pour que la force $\vec{F}$ soit conservative :

$\vec{F}$ est conservative il suffit que le rotationnel de $\vec{F}$ est nul $\Leftrightarrow \overrightarrow{Rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$.

Pour déterminer le produit vectoriel de en utilisant la méthode de déterminant :

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_y & F_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\partial/\partial x & \partial/\partial z\\ F_x & F_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\partial/\partial x & \partial/\partial y\\ F_x & F_y\end{vmatrix}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{Rot}\left(\vec{F}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\partial/\partial y & \partial/\partial z\\ F_y & F_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}\partial/\partial x & \partial/\partial z\\ F_x & F_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}\partial/\partial x & \partial/\partial y\\ F_x & F_y\end{vmatrix}\vec{k}=0.\vec{i}+0.\vec{j}+0.\vec{k}.$$

Par identification en obtient : $\left[\begin{array}{l}\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}\end{array}\right.$.

Nous avons : $\vec{F}$ dépend de deux composantes F_x et F_y, alors la condition suffisante pour que $\vec{F}$ soit conservative est : $\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}$.

$\frac{\partial F_y}{\partial x}=2$ et $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\alpha$.

$\vec{F}$ est conservative $\Leftrightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}$.

Donc : $\alpha=2$.

Donc, $\vec{F}$ devient : $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\vec{i}+2x\vec{j}$.

2°) Expression de l'énergie potentielle $E_P(x,y)$:

$\vec{F}$ conservative dérive d'une énergie potentielle $E_P(x,y)$ $\Leftrightarrow \vec{F}=-\overrightarrow{grad}(E_P)$.

Ou champ de gravitation $\vec{g}$ dérive d'un potentiel $U(x,y)$ $\Leftrightarrow \vec{g}=-\overrightarrow{grad}(U)$, par analogie électrique, le champ électrique $\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(U)$.

$\vec{F}=-\overrightarrow{grad}(E_P)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}F_x=-\frac{\partial E_P}{\partial x}\\ F_y=-\frac{\partial E_P}{\partial y}\end{array}\right.$, alors :

$$\begin{cases}\frac{\partial E_P}{\partial x}=-x^2-2y. & (1)\\ \frac{\partial E_P}{\partial y}=-2x. & (2)\end{cases}$$

De (1) on a : $dE_P = -F_x.dx \Leftrightarrow dE_P = -(x^2 + 2.y).dx$.

$$\Leftrightarrow \int_{(C)} dE_P = -\int_{(C)} (x^2 + 2.y).dx.$$

$$\Leftrightarrow E_P(x,y) = -\frac{x^3}{3} - 2.x.y + \varphi(y). \qquad (3)$$

On dérive l'équation (3) par rapport à y :

$$\frac{\partial E_P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{x^3}{3} - 2xy + \varphi(y)\right] = -2x \Rightarrow \frac{\partial E_P(x,y)}{\partial y} = -2.x + \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = -2.x.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} = 0.$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = c.$$

Donc l'expression de l'énergie potentielle est : $E_P(x,y) = -\frac{x^3}{3} - 2xy + c$.

Sachant que : $E_P(0,0) = 0$ d'où $c = 0$.

Donc l'expression de l'énergie potentielle devient :

$$E_P(x,y) = -\frac{x^3}{3} - 2xy.$$

Exercice 9 :

Soit : $\vec{F} = (x + 3y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x + z)\vec{j} + (2x + \gamma y)\vec{k}$.

1°) Valeurs de α, β et γ pour que la force $\vec{F}$ soit conservative :

$\vec{F}$ est conservative il suffit que le rotationnel de $\vec{F}$ est nul $\Leftrightarrow \overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha = 2 \\ \beta = 3 \end{cases}.$$

Donc $\vec{F}$ devient : $\vec{F} = (x + 3y + 2z)\vec{i} + (3x + z)\vec{j} + (2x + y)\vec{k}$.

2°) Expression de l'énergie potentielle $E_P(x,y,z)$:

$\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $E_P(x,y,z) \Leftrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P)$.

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} = x + 3y + 2z\,. & (1) \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} = 3x + z\,. & (2) \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} = 2x + y\,. & (3) \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_P}{\partial x} = -x - 3y - 2z\,. & (4) \\ \dfrac{\partial E_P}{\partial y} = -3x - z. & (5) \\ \dfrac{\partial E_P}{\partial z} = -2x - y\,. & (6) \end{cases}$$

De (4) on a : $dE_P = -F_x.dx \Leftrightarrow dE_P = -(x + 3y + 2z).dx$.

$$\Leftrightarrow \int_{(C)} dE_P = -\int_{(C)} (x + 3y + 2z).dx\,.$$

$$\Leftrightarrow E_P(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} - 3.x.y - 2xz + \varphi(y,z)\,. \tag{7}$$

On dérive l'équation (7) par rapport à y :

$$\frac{\partial E_P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{x^2}{2} - 3xy - 2xz + \varphi(y,z)\right] = -3x - z\,.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_P(x,y,z)}{\partial y} = -3x + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = -3x - z\,.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = -z\,.$$

$$\Rightarrow \varphi(y,z) = -zy + \phi(z)\,.$$

Donc, l'expression de l'énergie potentielle est :

$$E_P(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} - 3xy - 2xz - zy + \phi(z)\,. \tag{8}$$

On dérive l'équation (8) par rapport à z :

$$\frac{\partial E_P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{x^2}{2} - 3xy - 2xz - zy + \phi(z)\right] = -2x - y\,.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_P(x,y,z)}{\partial z} = -2x - y + \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = -2x - y\,.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = 0 .$$

$$\Rightarrow \phi(z) = c .$$

Donc, l'expression de l'énergie potentielle est : $E_P(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} - 3xy - 2xz - zy + c$.

Sachant que : $E_P(0,0,0) = 0$ d'où $c = 0$.

Donc, l'expression de l'énergie potentielle devient :

$$E_P(x,y,z) = -\frac{x^2}{2} - 3xy - 2xz - zy .$$

Exercice 10 :

On a : $E_P(x,y,z) = 2x^2 - xy + yz$.

Cherchons les composantes de la force en exploitant les expressions suivantes :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P) \Leftrightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases} .$$

D'où : $\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x} = -4x + y \\ F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y} = x - z \\ F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z} = -y \end{cases}$.

Donc, l'expression de la force est : $\vec{F} = (y - 4x)\vec{i} + (x - z)\vec{j} - y\vec{k}$.

Exercice 11 :

On a : $R = 1{,}25m$.

Au point A : la bille lisse sans vitesse initiale, $v_A = 0m/s$.

Au point B : la bille a une vitesse $v_B^{'} = 4m/s$ et $g = 10m/s^2$.

1°) Démonstration que la bille est bien soumise à une force de frottement :

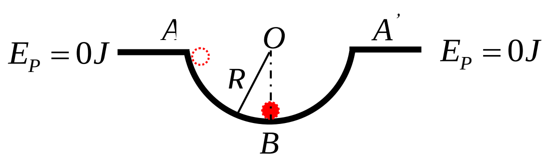


Figure 4-11 *Une bille métallique glissée sur une demi-sphère.*

On néglige les forces de frottements :

$$\Delta E_m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.mv_B^2 - m.g.R = 0.$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2.g.R}\,.$$

Application numérique :

$v = \sqrt{2.g.h} = \sqrt{2{,}10.1{,}25} = 5$, donc: $v = 5m/s$.

On remarque que la vitesse trouvée est supérieure que la vitesse $v_B^{'} = 4m/s$, donc ça prouve qu'il existe des frottements.

2°) Travail de cette force de frottement :

$$\Delta E_m = \sum W\left(\vec{F}_{frot}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv'^2_B - m.g.R = W\left(\vec{F}_{frot}\right).$$

Application numérique :

$W\left(\vec{F}_{frot}\right) = -45.10^{-3}J \langle 0$; le travail résistant.

Exercice 12 :

1°) Travail du poids :

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} \Leftrightarrow dW = \vec{P}.d\vec{r}.$$
$$\Leftrightarrow \int_A^M dW = \int_{y_A}^{y_M} \vec{P}.d\vec{r}.$$
$$\Leftrightarrow \int_A^M dW = -\int_{y_A}^{y_M} mg\vec{j}\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right).$$
$$\Leftrightarrow \int_A^M dW = -\int_{y_A}^{y_M} mgdy.$$
$$\Leftrightarrow W_{A\to M}\left(\vec{P}\right) = -mgy\Big|_{y_A}^{y_M}.$$
$$\Leftrightarrow W_{A\to M}\left(\vec{P}\right) = mgy_A - mgy_M.$$

Donc : $W_{A\to M}\left(\vec{P}\right) = mgR(\cos\varphi - 1)$.

2°) Energie potentielle :

$E_{PP}(A) = 0J$.

Energie potentielle du poids :

$$\sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right) = -\Delta E_p \Leftrightarrow W_{A\to M}\left(\vec{P}\right) = -E_{PP}(M) - E_{PP}(A).$$

$$\Leftrightarrow W_{A\to M}\left(\vec{P}\right)=-E_{PP}(M)-E_{PP}(A).$$

Finalement : $E_{PP}(M)=m.g.R(1-\cos\varphi)$.

3°/b) La vitesse de m au point :

$$\vec{v}(t)=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Leftrightarrow \vec{v}(t)=\frac{d}{dt}\left(R\vec{U}_r\right)=\frac{dR}{dt}\vec{U}_r+R\frac{d\vec{U}_r}{dt}\ .$$

La dérivée de vecteur unitaire $\vec{U}_r$ est :

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt}=\frac{d\vec{U}_r}{dt}.\frac{d\varphi}{d\varphi}=\frac{d\vec{U}_r}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}\frac{d\vec{U}_r}{d\varphi},$$

$\vec{U}_r=\cos\varphi.\vec{i}+\sin\varphi.\vec{j}\Rightarrow\dfrac{d\vec{U}_r}{d\varphi}=-\sin\varphi\vec{i}+\cos\varphi\vec{j}=\vec{U}_\varphi$, car : $\left(\vec{U}_r,\vec{U}_\varphi\right)=\dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi=\omega t$.

Finalement : $\vec{v}(t)=R\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi=v\vec{U}_\varphi$, avec : $v=R\dot{\varphi}=R\omega$ et ω est la vitesse angulaire.

3°/b) Energie cinétique de m au point M :

$$E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2\ .$$

4°) Energie totale : $E_T=E_M$.

$E_T=E_C+E_P=C^{ste}$, car $\vec{P}$ est une force conservative.

D'après le principe de conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\Delta E_M=\Delta E_T=0 &\Leftrightarrow E_T(A)=E_T(M)\\ &\Leftrightarrow E_C(A)+E_{PP}(A)=E_C(M)+E_{PP}(M)\\ &\Rightarrow E_T=\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2+mgR(1-\cos\varphi)=C^{ste}.\end{aligned}$$

5°) Hauteur maximale : $h_{\max}=y_{\max}$

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2=mgy_{\max}\Rightarrow y_{\max}=h_{\max}=\frac{1}{2g}R^2\dot{\varphi}^2\ .$$

6°) Equation de la trajectoire :

D'après le principe de conservation de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_T = 0 \Leftrightarrow \frac{dE_T}{dt} = 0 .$$

$$mgR\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0 .$$

$$g\sin\varphi + R\ddot{\varphi} = 0 .$$

Pour des faibles oscillations $\varphi \langle\langle \Rightarrow \sin\varphi \approx \varphi$.

D'où : $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{R}\varphi = 0$.

et en posant : $\omega^2 = \dfrac{g}{R}$, $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$ dont la solution est : $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \phi)$.

Exercice 13 :

On a : $E_P = -\dfrac{a}{r}$.

1°) Expression de la force $\vec{F}$:

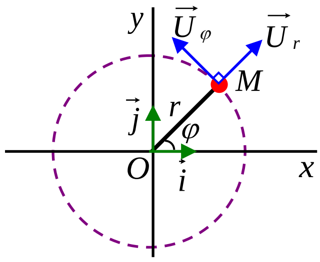


Figure 4-12 *Point matériel de masse* m *se déplace sur une trajectoire circulaire.*

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P) \Rightarrow F_r = -\frac{dE_P}{dr} .$$

$$\Rightarrow F_r = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{a}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{a}{r}\right) = -\frac{a}{r^2} .$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{a}{r^2}\vec{U}_r \text{, avec : } \left\|\vec{U}_r\right\| = 1 .$$

2°) Expression de $\overrightarrow{OM}$ en fonction des coordonnées polaires :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM} = r\vec{U}_r .$$

3°) Expression de $\vec{v}(t)$ en fonction des coordonnées polaires :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\vec{U}_r\right) \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\vec{U}_r}{dt} \text{, avec : } \frac{dr}{dt} = \dot{r} .$$

La dérivée de vecteur unitaire $\vec{U}_r$ est :

$$\frac{d\vec{U}_r}{dt} = \frac{d\vec{U}_r}{dt}\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{d\vec{U}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d\vec{U}_r}{d\varphi}.$$

Finalement, l'expression de $\vec{v}(t)$ en fonction des coordonnées polaires est :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi .$$

4°) Démonstration que le vecteur moment cinétique est constant :

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v} \Leftrightarrow \vec{L}_O = mr\vec{U}_r \wedge \left(\dot{r}\vec{U}_r + r\dot{\varphi}\vec{U}_\varphi\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{L}_O = mr\dot{r}\vec{U}_r \wedge \vec{U}_r + mr^2\dot{\theta}\vec{U}_r \wedge \vec{U}_\varphi \text{, avec : } \vec{U}_r \wedge \vec{U}_r = \vec{0}.$$

$$\vec{U}_r \wedge \vec{U}_\varphi = \left(\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}\right) \wedge \left(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right) = \cos^2\varphi\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) - \sin^2\varphi\left(\vec{j} \wedge \vec{i}\right).$$

Rappel :

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ et $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$.

Alors : $\vec{U}_r \wedge \vec{U}_\varphi = \cos^2\varphi\vec{k} - \sin^2\varphi\left(-\vec{k}\right) = \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\vec{k}$,

d'où : $\vec{U}_r \wedge \vec{U}_\varphi = \vec{k}$.

Finalement : $\vec{L}_O = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}$, donc le vecteur moment cinétique est un vecteur constant.

5°) Dimension de la grandeur c :

$$\vec{L}_O = mc\vec{k} \Leftrightarrow \vec{L}_O = mr^2\dot{\varphi}\vec{k}.$$

Par identification : $c = r^2\dot{\varphi}$.

$$c = r^2\dot{\varphi} = r^2\frac{v}{r} = rv \Leftrightarrow [c] = [r].[v] \;;\; [r] = L \text{ et } [v] = LT^{-1}.$$

On trouve donc : $[c] = L^2T^{-1}$.

Références

Références

[1] C. EMST, M. GABRMIEL, G. GEMAIN, Physique: mécanique, thermodynamique, électricité, mouvements vibratoires, optique, radioactivité, cours exercices tests. Masson, 1 janvier 1981.

[2] A. FIZAZI, Mécanique du point matériel cours et exercices, 27 mars 2014.

[3] M. TENG, Cours de Physique avec exercices, Edition Heures de France, 1997.

[4] G. VINCENT, Cours de mécanique du point, Université Joseph Fourier – Grenoble 1 Licence 1ère année, 5ème édition, 2007-2008.

[5] C. PASQUIER, Cours de mécanique, Université d'Orsay, PeiP Polytech Paris-Sud, 2011-2012.

[6] J.P. PERER, O. PUJOL, C. LAGOUTE, P. PUECH et E. ANTERRIEU, Physique, une introduction, 1ère édition, Groupe De Boeck, Bruxelles, 2008.

[7] M. DUBESSET, Le manuel du système international d'unités: lexique et conversions, Editions Technip Paris 2000.

[8] S. TISSAERAND, Physique; problèmes et exercices, Bréal, DL 2015, cop. 2014.

[9] J.M. BREBEC, Mécanique MPSI - PCSI - PTSI, 1ère année : Cours et exercices corrigés, 16 juillet 2003.

[10] A. THIONNET, Mécanique du point, Niveau L, Ellipses Market, 19 octobre 2008.

[11] J.L. CAUBARRERE, H. DJELLOUAH, J. FOURNY, F.Z. KHELLADI, Introduction à la mécanique, 5ème édition, 1986.

[12] M.A. RUDERMAN, C. KITTEL, W.D. KNIGHT, Cours de physique de Berkeley Tome 1, Mécanique, Dunod, 23/01/2001.

[13] M. HENRY et N. DELORME, Mini Manuel de mécanique du point - Cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 24 septembre 2008.

[14] A. GIBAUD et M. HENRY, Cours et exercices corrigés-Cours de physique-Mécanique du point, Licence 1ère et 2ème Année, 2ème édition, Dunod, Paris, 16 août 2007.

[15] J.M. BREBEC, Mécanique MPSI - PCSI - PTSI, 1ère année : Cours et exercices corrigés, 16 juillet 2003.

[16] P. VANDERWEGEN, Mécanique du point - Cours et exercices résolus, Elsevier Masson, 01/01/1996.

[17] A. MHIRECH, Cours de mécanique du point matériel pour le premier semestre des filières SM et SMI, Université Mohamed V, Année Universitaire 2004/2005.

[18] M. EL BAZ, Cours de mécanique du point matériel, SMPC1 Module 1: Mécanique, Université Mohamed V, Automne 2014.