République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha STAMBOULI de Mascara

Faculté des Sciences et de la Technologie

Polycopié de Cours

Physique 2
Cours et exercices corrigés

Présenté par :

Dr. BOUGUENNA Driss

Ce cours est destiné aux étudiants de première année
Licence Sciences et Techniques

Algérie
2022

Avant-propos

Ce polycopié de cours correspond au programme officiel de la matière "**Physique 2**" est destiné aux étudiants de première année LMD, domaine : sciences et techniques (ST). enseigné en première année ST. Il a été rédigé dans le but de permettre d'avoir un outil de travail et de référence recouvrant les connaissances qui leur sont demandés. Il s'agit de l'électricité générale, dont l'objectif est de mettre à la disposition des étudiants un document de première nécessité qui peut apporter un appui non négligeable aux étudiants et leurs permettre une illustration de toutes les parties enseignées en matière.

Le manuscrit contient des rappels mathématiques et trois chapitres :

- Electrostatique.
- Electrocinétique.
- Electromagnétisme.

Afin de permettre à des étudiants d'assimiler le cours, chaque chapitre contient de nombreux exercices corrigés qui ont été choisis pour aider les étudiants à organiser logiquement les concepts de base ont été traités.

Sommaire

Sommaire

Chapitre II Electrocinétique

Chapitre III Electromagnétisme

Rappels mathématiques

1 Déplacement, surface et volume élémentaires dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

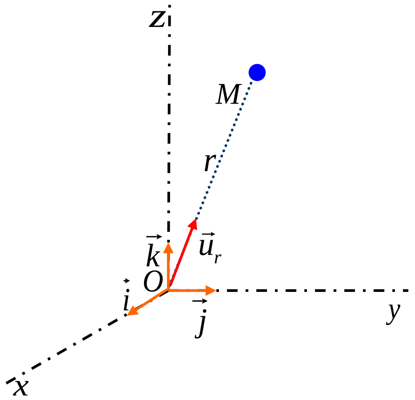
1.1 Déplacement élémentaire dans des systèmes de coordonnées

a) Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

Le vecteur position : $$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1}$$

Le vecteur vitesse : $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{2}$$

Le vecteur de déplacement : $$\boxed{d\vec{r}(t) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}} \tag{3}$$



$-\infty \leq x \leq +\infty$
$-\infty \leq y \leq +\infty$
$-\infty \leq z \leq +\infty$

Figure 1 : *système cartésien.*

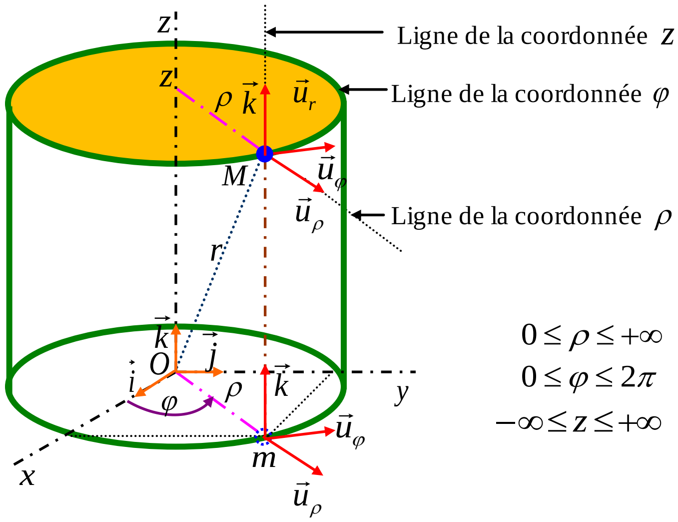
b) Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

Le vecteur position : $$\overrightarrow{OM} = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k} = r\vec{u}_r \tag{4}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{u}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \tag{5}$$

Le vecteur vitesse : $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k} \tag{6}$$

Le vecteur de déplacement : $$\boxed{d\vec{r}(t) = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\varphi\vec{u}_\varphi + dz\vec{k}} \tag{7}$$



$0 \leq \rho \leq +\infty$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$-\infty \leq z \leq +\infty$

Figure 2 : *système cylindrique.*

c) Coordonnées sphériques (r,φ,θ)

Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r(\cos\varphi\sin\theta\vec{i} + \sin\varphi\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}) = r\vec{u}_r$ (8)

Le vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\dfrac{d\varphi}{dt}\sin\theta\vec{u}_\varphi + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ (9)

Le vecteur de déplacement : $\boxed{d\vec{r}(t) = dr\vec{u}_r + rd\varphi\sin\theta\vec{u}_\varphi + rd\varphi\vec{u}_\theta}$ (10)

$0 \le r \le +\infty$
$0 \le \varphi \le 2\pi$
$0 \le \theta \le \pi$

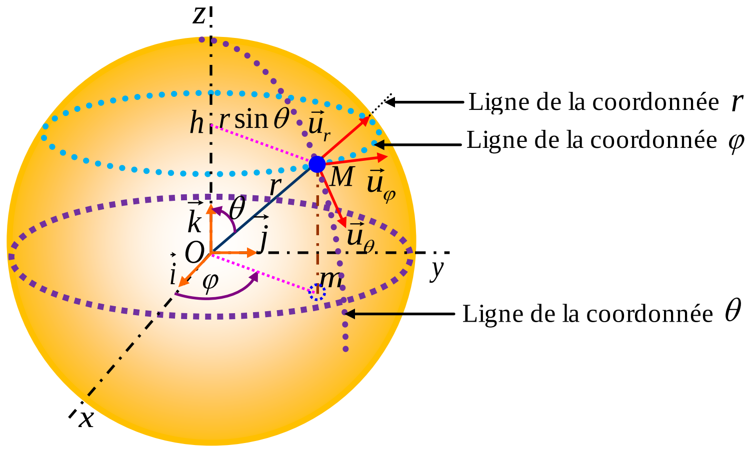


Figure 3 : *système sphérique.*

Tableau 1 : *déplacement, surface et volume élémentaires dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.*

Coordonnées	Déplacement	Surface	Volume
Cartésiennes	$d\vec{r}(t) = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$	$dS = \begin{cases} dxdy \\ dxdz \\ dydz \end{cases}$	$dV = dxdydz$
Cylindriques	$d\vec{r}(t) = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\varphi\vec{u}_\varphi + dz\vec{k}$	$dS = \begin{cases} \rho d\rho d\varphi \\ d\rho dz \\ \rho d\varphi dz \end{cases}$	$dV = \rho d\rho d\varphi dz$
Sphériques	$d\vec{r}(t) = dr\vec{u}_r + r\sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi + rd\theta\vec{u}_\theta$	$dS = \begin{cases} rdrd\varphi \\ r\sin\theta drd\varphi \\ r^2 d\varphi d\theta \end{cases}$	$dV = r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta$

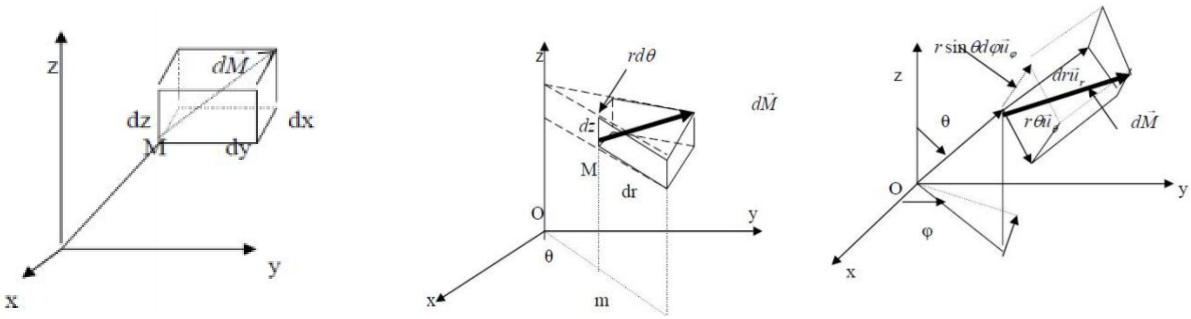


Figure 4 : *déplacement, surface et volume élémentaires dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.*

2 Angle solide

L'angle solide est défini dans l'espace tridimensionnel (3D) comme le rapport de la superficie d'une partie d'une sphère sur le rayon au carré. Son unité est le stéradian noté st.

$$\boxed{\Omega = \frac{S}{r^2}} \tag{11}$$

L'angle solide est l'analogue tridimensionnel de l'angle plan bidimensionnel.

$$\Omega = \iint_{(S)} \frac{dS\ \vec{n}.\vec{u}_r}{r^2} \tag{12}$$

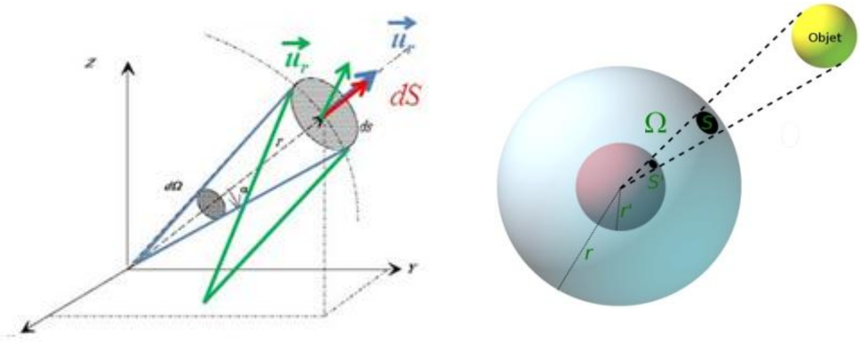


Figure 5 : *angle solide.*

Propriétés:

- L'angle solide est indépendant de la surface choisi.
- L'angle solide sous lequel d'un point intérieur à une surface fermée on voit cette surface vaut.
- L'angle solide sous lequel d'un point extérieur à une surface fermée on voit cette surface vaut 0.
- L'angle solide sous lequel d'un point on voit un plan vaut 2π.

3 Les opérateurs (Nabla, Laplacien, gradient, divergence, et rotationnel).

3.1 Opérateur vectoriel «Nabla»

Dans un repère cartésien orthonormé, l'opérateur vectoriel **Nabla** noté par $\vec{\nabla}$ est donnée par:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}} \tag{13}$$

Cet opérateur possède des propriétés analogues à celles des vecteurs ordinaires. Il est utile pour définir la divergence, le gradient et le rotationnel.

3.2 Laplacien

Le **Laplacien** Δ s'applique au champ scalaire $f(x,y,z)$ et vectoriel $\vec{A}(x,y,z)$.

Il s'écrit en cartésien sous forme :

$$\boxed{\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.} \qquad (14)$$

$$\Delta f = (\vec{\nabla}.\vec{\nabla}) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (15)$$

$$\Delta\vec{A} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\vec{k} \qquad (16)$$

3.3 Gradient

Le **gradient** d'un champ scalaire ou d'une fonction scalaire $f(x,y,z)$ en coordonnées cartésiennes est donné par:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (17)$$

Le gradient en **coordonnées cylindriques** est donné par:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\varphi \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (18)$$

Le gradient en **coordonnées sphériques** est donné par:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta \qquad (19)$$

- ***Le gradient mesure le taux de variation d'un champ scalaire (norme).***

3.4 Divergence

La **divergence** d'un champ de vecteurs $\vec{A}(x,y,z)$ en **coordonnées cartésiennes** est la fonction scalaire $div\vec{A}$:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (20)$$

La divergence en **coordonnées cylindriques** est donnée par :

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (21)$$

La divergence en **coordonnées sphériques** est donnée par :

$$div\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}(r,\varphi,\theta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} \qquad (22)$$

- ***La divergence mesure les sources implicites dans la structure du champ.***

3.5 Rotationnel

Le rotationnel d'un champ de vecteur $\vec{A}(x,y,z)$ en **coordonnées cartésiennes** est la fonction vectorielle $\overrightarrow{Rot}(\vec{A})$:

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial \rho A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \qquad (23)$$

Le rotationnel en **coordonnées cylindriques** est donné par :

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{u}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho A_\varphi}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{k} \qquad (24)$$

Le rotationnel en **coordonnées sphériques** est donné par :

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{A}) = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta \qquad (25)$$

- ***Le rotationnel mesure le taux de rotation local du champ de vecteur.***

4 Applications sur les intégrales

4.1 Intégrale simple

Calculer le périmètre d'un cercle C de rayon R.

Solution :

On a : $dl = Rd\theta$ et $v = \frac{dl}{dt} = R\omega_0 = R\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$.

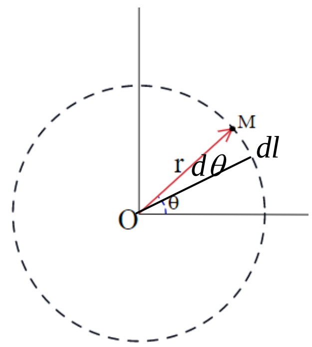


Figure 6 : *cercle de rayon* R.

$$C = \int_0^{2\pi} Rd\theta = 2\pi R \qquad (26)$$

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

4.2 Intégrale double de surface

Calculer l'aire d'un disque S de rayon.

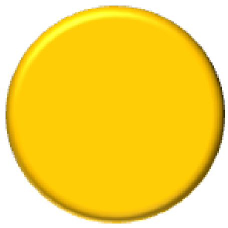


Figure 7 : *disque.*

Solution

: On a : $dS = \rho d\rho d\theta$.

$$S = \iint_S \rho d\rho d\theta = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2 \tag{27}$$

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

4.3 Intégrale triple de volume

Calculer le volume d'un cylindre V de rayon R et de hauteur h.

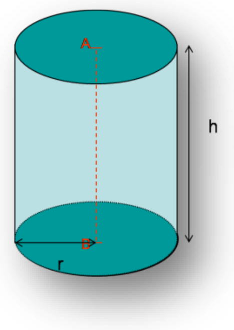


Figure 8 : *cylindre*

Solution :

On a : $dV = \rho d\rho d\theta dz$.

$$V = \iiint_V \rho d\rho d\theta dz = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \pi h R^2 \tag{28}$$

$$\boxed{V = \pi h R^2}$$

Chapitre I

Electrostatique

I.1 Introduction

L'**électrostatique** est une branche de la physique dans laquelle on étudie les interactions entre les charges électriques immobiles.

Applications

- Les photocopieurs, la pulvérisation de peinture, le dépoussiéreur électrostatique, etc.
- Les périphériques informatiques (écran à cristaux liquides (LCD), clavier et les tablettes).
- Les activités agricoles telles que la pulvérisation sur les plantes, le tri des semences, etc.
- Les composants électroniques tels que les condensateurs.

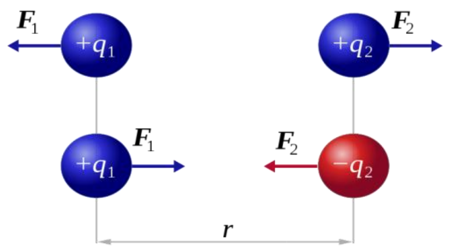
I.2 Charge électrique et force d'interaction électrostatique-Loi de Coulomb

I.2.1 Charge électrique

La **charge ponctuelle** est une caractéristiques intrinsèques des particules fondamentales qui consistent des objets, peu importe où ces particules se trouvent ou un corps chargé dont les dimensions sont négligeables devant la distance d'interaction.

Il existe deux sortes de charges électriques, appelées, par convention, positives et négatives.

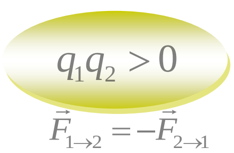
- Deux charges de même signe se repoussent.
- Deux charges de signe contraire s'attirent.



I.2.2 Force d'interaction électrostatique-Loi de Coulomb

La force d'interaction entre deux charges ponctuelles placées dans le vide est donnée par la loi de Coulomb (1785).

$$\boxed{\vec{F}_{1\to 2}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{1\to 2}} \quad \text{(I-1)}$$



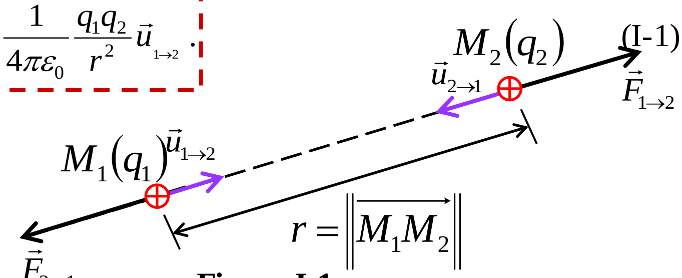


Figure I-1

Avec : $\varepsilon_0=8{,}854\,10^{-12}$ est la permittivité du vide et $K=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9.10^9$.

I.2.3 Principe de superposition

La force avec laquelle interagissent deux charges n'est pas affectée par la présence d'une troisième charge.

1ère configuration :

$$\vec{F}_{21} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{21} \quad \text{(I-2)}$$

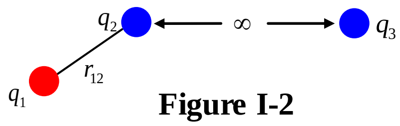


Figure I-2

2ème configuration :

$$\vec{F}_{31} = K\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\vec{u}_{31} \quad \text{(I-3)}$$

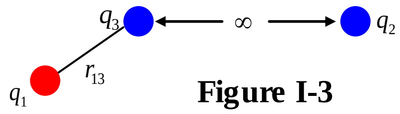


Figure I-3

3ème configuration :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} \quad \text{(I-4)}$$

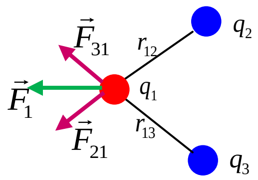


Figure I-4

D'une manière plus générale :

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{i1}} \quad \text{(I-5)}$$

Considérons plusieurs charges ponctuelles immobiles.

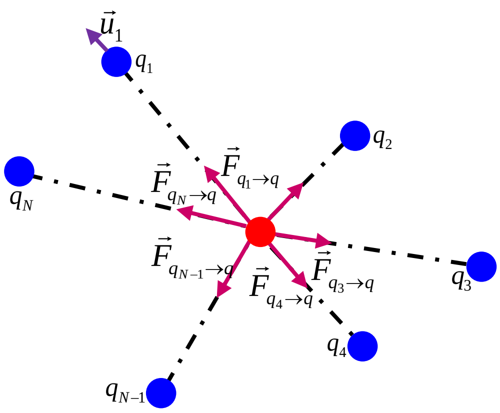
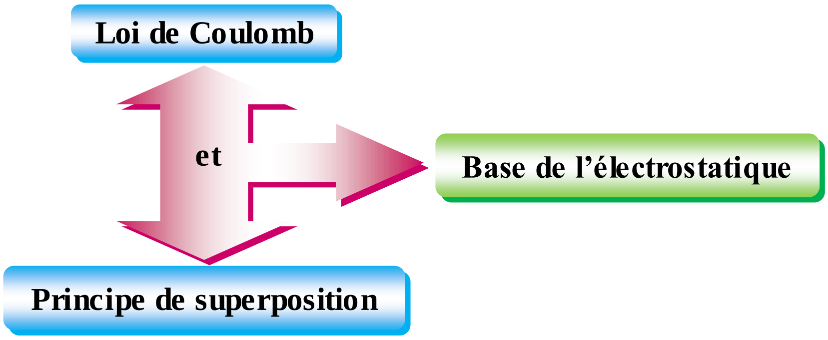


Figure I-5



I.3 Champ et potentiel électrostatique

I.3.1 Champ électrostatique

a) Cas d'une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle q immobile placée à l'origine O d'un repère galiléen.

Soit q' **une charge test** placée en un point M qui peut varier dans l'espace.

La charge test q' est soumise à la **force de Coulomb** :

$$\boxed{\vec{F}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_r} \qquad \text{(I-6)}$$

Le **champ électrique** créé par la charge q placée en O au point M est, par définition :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}(M)}{q'}} \qquad \text{(I-7)}$$

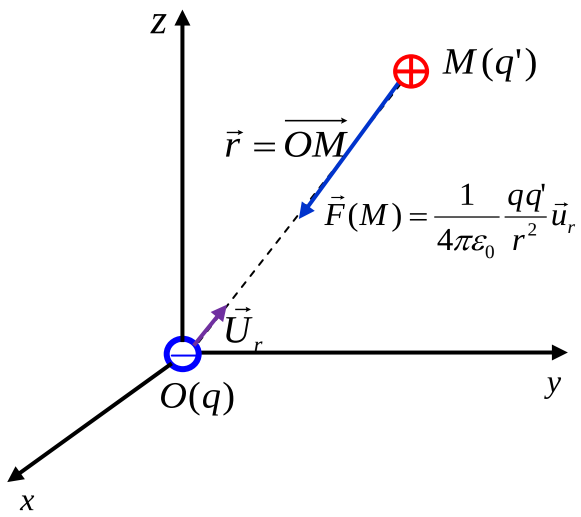


Figure I-6

b) Cas d'un ensemble de charges ponctuelles

On considère un ensemble de charges ponctuelles (O_i, q_i) :

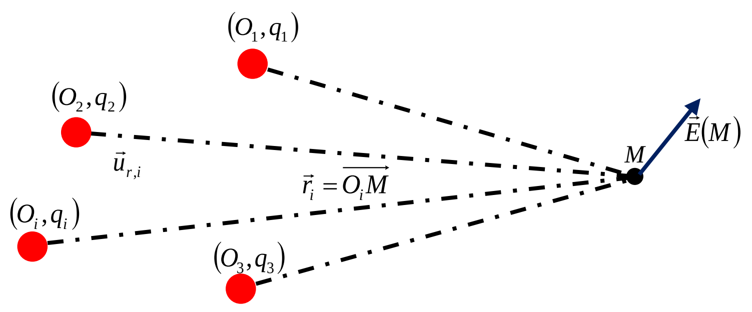


Figure I-7

Principe de superposition du champ :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r,i}} \qquad \text{(I-8)}$$

c) Lignes de champ électrostatique

Les lignes de champ sont des lignes de l'espace telle qu'en tout point M de cette ligne, la tangente et le champ $\vec{E}$ en ce point sont parallèles. Cette ligne est orientée dans le sens du champ.

Soit : $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$. Ce champ est défini partout (sauf en O), **même en l'absence de charge test**.

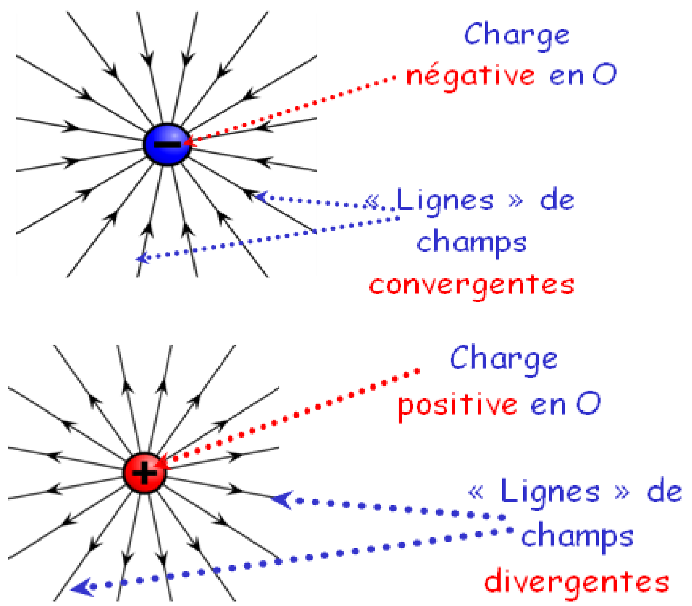


Figure I-8

I.3.2 Potentiel électrostatique

a) Cas d'une charge ponctuelle

On considère une charge ponctuelle q immobile placée à l'origine O d'un repère galiléen.

Soit q' **une charge test** placée en un point M qui peut varier dans l'espace.

L'**énergie potentielle** de la particule «test» vaut :

$$\boxed{E_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}} \qquad \text{(I-9)}$$

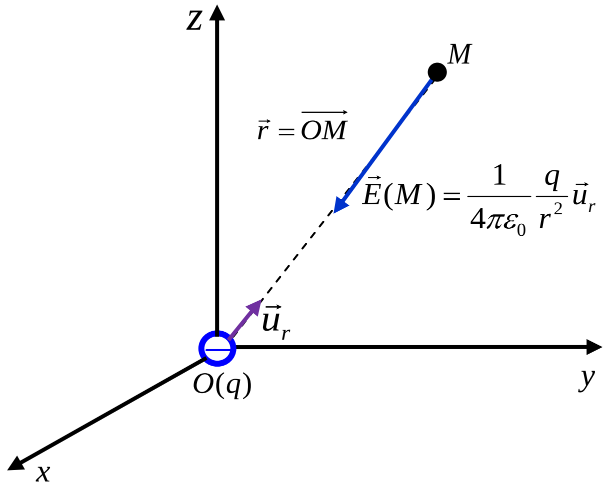


Figure I-9

- **Energie potentielle** est reliée à la force coulombienne par (voir cours de Physique 1; comme rappel ***«force dérive d'une énergie potentielle»***) :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P) \Leftrightarrow F = -\frac{dE_P}{dr} \qquad \text{(I-10)}$$

Le **potentiel électrostatique** V créé par la charge q placée en O au point M est par définition :

$$\boxed{V(M) = \frac{E_P(M)}{q'}} \qquad \text{(I-11)}$$

I.3.3 Relation intrinsèque entre le champ et le potentiel

La relation démontrée dans le cas d'une répartition discrète de charges ponctuelles reste valable dans le cas d'une distribution continue :

$$\begin{cases} \vec{F} = q\vec{E} \\ E_P = qV \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)} \qquad \text{(I-12)}$$

On se place en **coordonnées cartésiennes** :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} \\ \overrightarrow{grad}(V) = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \end{cases} \qquad \text{(I-13)}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad \text{(I-14)}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{(I-15)}$$

Expressions de l'opérateur gradient en :

Coordonnées polaires (ρ, φ) ou (r, θ)

Rayon polaire : $\rho = r$ et angle polaire : $\varphi = \theta$.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E_\rho\vec{u}_\rho + E_\varphi\vec{u}_\varphi = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi\right) \qquad \text{(I-16)}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases} \qquad \text{(I-17)}$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta\right) \qquad \text{(I-18)}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \qquad \text{(I-19)}$$

Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E_\rho\vec{u}_\rho + E_\varphi\vec{u}_\varphi + E_z\vec{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) \qquad \text{(I-20)}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \qquad \text{(I-21)}$$

Coordonnées sphériques (r,φ,θ)

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E_r\vec{u}_r + E_\varphi\vec{u}_\varphi + E_\theta\vec{u}_\theta = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta\right) \quad \text{(I-24)}$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} \end{cases} \quad \text{(I-25)}$$

I.4 Distributions continues de charges

I.4.1 Distribution linéique de charges

Soit une distribution linéique de charges électriques.

On note la charge électrique totale Q et L sa longueur totale.

On peut définir une **densité linéique de charges** λ telle que :

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{L}} \quad \text{(I-26)}$$

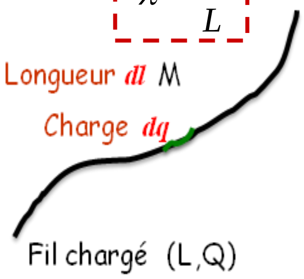


Figure I-10 : *distribution linéique de charges.*

On note dq la charge portée par la longueur élémentaire dl. La **densité linéique de charges** électriques au point M est définie par :

$$\boxed{\lambda = \frac{dq}{dl}} \quad (\lambda \ en\ C.m^{-1}) \quad \text{(I-27)}$$

La **charge totale** portée par le corps est alors :

$$dq = \lambda dl \ soit \ Q = \int \lambda dl$$

I.4.2 Distribution surfacique de charges

Soit une distribution surfacique de chargés électriques.

On note la charge électrique totale Q et S sa surface totale.

On peut définir une **densité surfacique de charges** σ telle que :

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S}} (\sigma \ en\ C.m^{-2}) \quad \text{(I-28)}$$

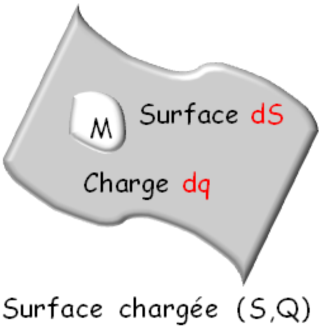


Figure I-11 : *distribution surfacique de charges.*

On note dq la charge portée par la **surface élémentaire** dS. La **densité surfacique de charges électriques** σ est définie par :

$$\boxed{\sigma = \frac{dq}{dS}} \ (\sigma \ \ en\ C.m^{-2}) \qquad \text{(I-29)}$$

La **charge totale** portée par le corps est alors :

$$dq = \sigma\, dS \ \ soit \quad Q = \iint_{(S)} dq$$

$$\boxed{Q = \iint \sigma dS} \qquad \text{(I-30)}$$

I.4.3 Distribution volumique de charges

Soit une distribution volumique de chargés électriques.

On note la charge électrique totale Q et $\boldsymbol{V}$ son volume total.

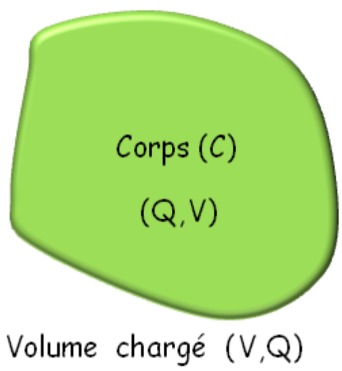


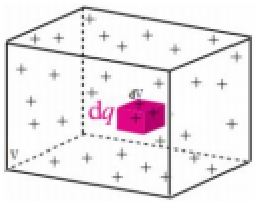
Figure I-12 : *distribution volumique de charges.*

On peut définir une **densité volumique de charges** ρ telle que :

$$\boxed{\rho = \frac{Q}{V}} \ (\rho \ \ en\ C.m^{-3}). \qquad \text{(I-31)}$$

On considère un volume élémentaire $d\tau$ (autour de M), petit vis-à-vis du volume occupé par tout le corps chargé, mais grand par rapport à la taille d'une molécule (échelle microscopique).

On note dq la charge élémentaire de ce volume élémentaire $d\tau$



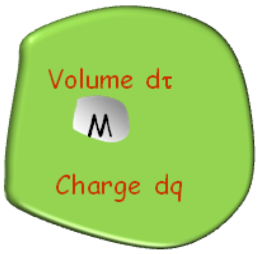


Figure I-13

La **densité volumique élémentaire de charges électriques** au point M est définie par :

$$\boxed{\rho = \frac{dq}{d\tau}} \qquad \text{(I-32)}$$

La charge totale portée par le corps est alors :

$$dq = \rho\, d\tau \quad soit \quad \boxed{Q = \iiint \rho\, d\tau} \qquad \text{(I-33)}$$

I.4.4 Champ électrostatique

a) Distribution linéique

La charge élémentaire dans le cas de la distribution linéique est : $dq = \lambda dl$

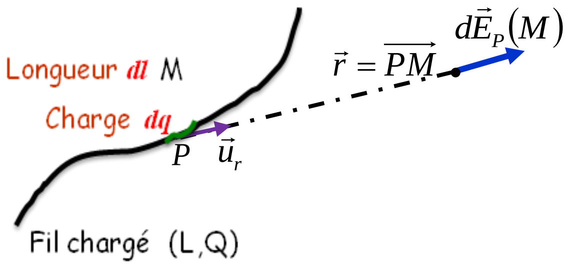


Figure I-14

Le champ élémentaire créé par la charge élémentaire dq centrée autour de P au point M vaut

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{(I-34)}$$

Le principe de superposition permet d'en déduire le champ total créé par tout le fil chargé au point M

$$\vec{E}(M) = \sum d\vec{E}_P(M) \qquad \text{(I-35)}$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_r} \qquad \text{(I-36)}$$

b) Distribution surfacique

La charge élémentaire dans le cas de la distribution surfacique est : $dq=\sigma\, dS$

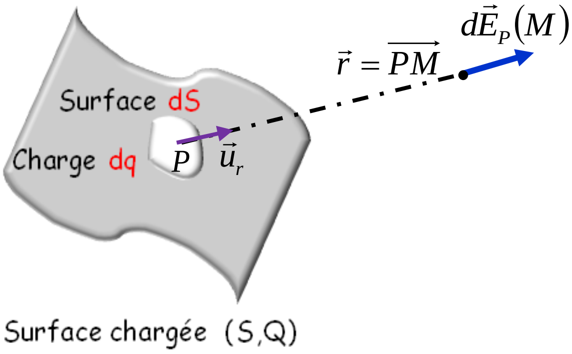


Figure I-15

Le champ élémentaire créé par la charge élémentaire dq centrée autour de P au point M vaut:

$$d\vec{E}_P(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{(I-37)}$$

Le principe de superposition permet d'en déduire le champ total créé par tout le corps chargé au point M

$$\vec{E}(M)=\sum d\vec{E}_P(M)$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\sigma dS}{r^2}\vec{u}_r} \qquad \text{(I-38)}$$

c) Distribution volumique

La charge élémentaire dans le cas de la distribution volumique est : $dq=\rho\, d\tau$

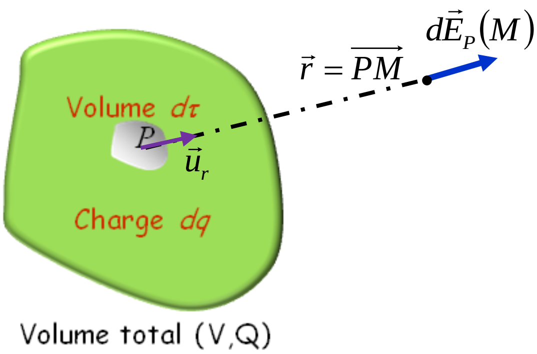


Figure I-16

Le champ élémentaire créé par la charge élémentaire dq centrée autour de P au point M vaut:

Le principe de superposition permet d'en déduire le champ total créé par tout le corps chargé au point M :

$$d\vec{E}_P(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{u}_r \tag{I-39}$$

$$\vec{E}(M) = \sum d\vec{E}_P(M).$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho d\tau}{r^2}\vec{u}_r} \tag{I-40}$$

I.4.5 Potentiel électrostatique

a) Distribution linéique

Le potentiel élémentaire créé par la charge élémentaire dq centrée autour de P au point M vaut

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r} \tag{I-41}$$

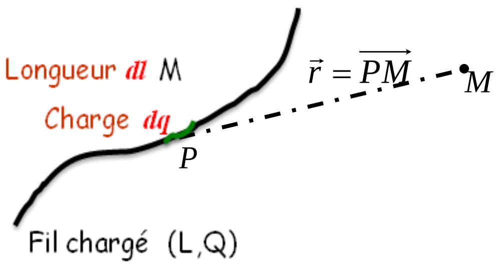


Figure I-17

Le **principe de superposition** permet d'en **déduire le potentiel total** créé par tout le fil chargé au point M :

$$V(M) = \sum dV(M) \tag{I-42}$$

Le **potentiel total** s'en déduit («**simple intégrale**» scalaire) :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda dl}{r}} \tag{I-43}$$

b) Distribution surfacique

Le potentiel élémentaire créé par la charge élémentaire dq centrée autour de P au point M vaut

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r} \qquad \text{(I-44)}$$

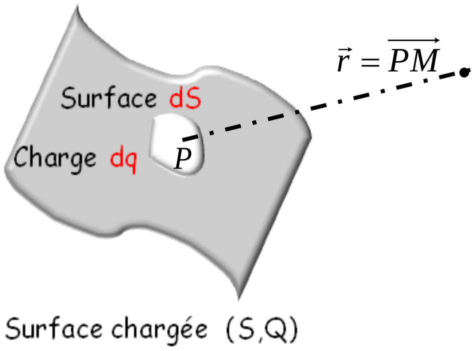


Figure I-18

Le **principe de superposition** permet d'en **déduire le potentiel total** créé par tout le fil chargé au point M

$$V(M) = \sum dV(M).$$

Le **potentiel total** s'en déduit («**intégrale double**» scalaires) :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma\, dS}{r}} \qquad \text{(I-45)}$$

c) Distribution volumique

Le potentiel élémentaire créé par la charge élémentaire dq centrée autour de P au point M vaut

$$dV(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\tau}{r} \qquad \text{(I-46)}$$

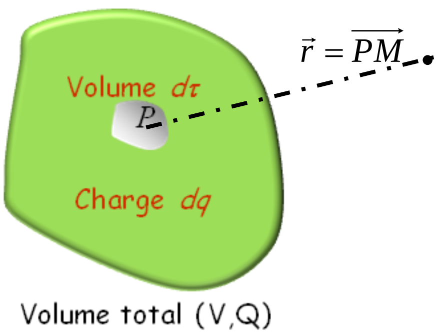


Figure I-19

Le **principe de superposition** permet d'en **déduire le potentiel total** créé par tout le fil chargé au point M

$$V(M) = \sum dV(M).$$

Le **potentiel total** s'en déduit («**intégrale triple**» scalaires) :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho d\tau}{r}} \qquad \text{(I-47)}$$

I.5 Dipôle électrique

I.5.1 Définition et approximation dipolaire

On appelle «**dipôle électrostatique**» un ensemble rigide de deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$, distantes de $d = 2a$, comme l'indique la figure (I-20).

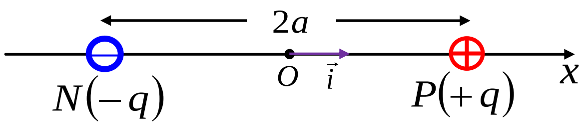


Figure I-20

Un tel dipôle permet d'étudier :

Les molécules polaires (par exemple : HCl et H_2O).

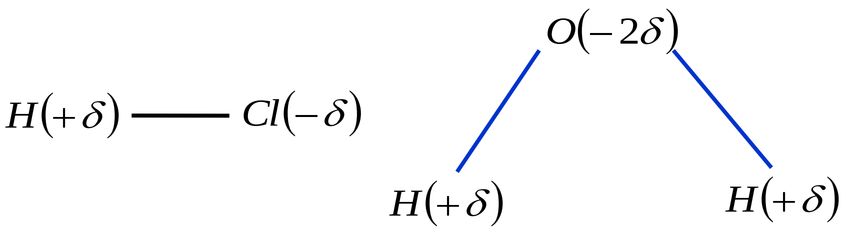


Figure I-21

La polarisation des atomes dans un champ électrique extérieur (phénomène de solvatation des ions).

On calcule le potentiel puis le champ électrique ($\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$) créé par le dipôle en un point M de l'espace.

Symétrie de révolution autour de l'axe (Ox) : on choisit $M(r,\theta)$ dans le plan des deux charges.

Approximation dipolaire : $r >> a$ (on se place «loin» des charges, c'est-à-dire à des distances bien supérieures à quelques nm).

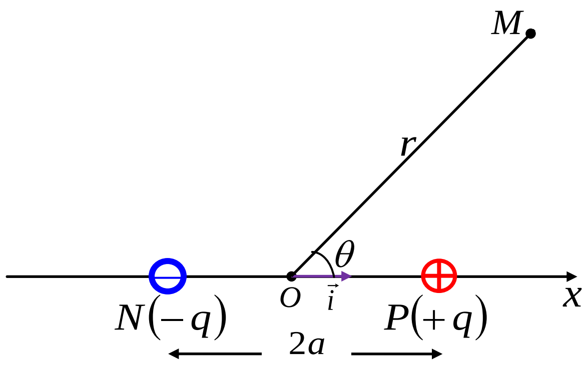


Figure I-22

a) Calcul du potentiel dans le cadre de l'approximation dipolaire

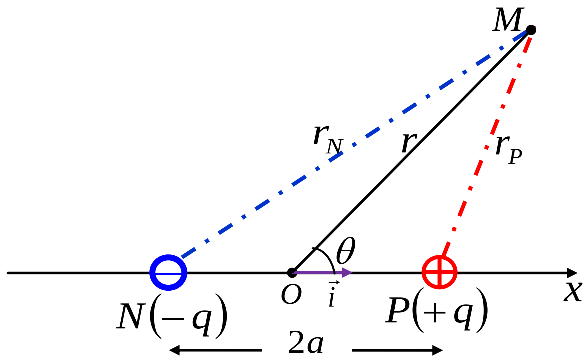


Figure I-23

D'après le principe de superposition, le potentiel au point M est $V(M)$

$$V(M)=V(P)+V(N)=K\frac{q}{r_P}-K\frac{q}{r_N} \qquad \text{(I-48)}$$

$$\boxed{V(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_N}\right)} \qquad \text{(I-49)}$$

Avec : $r_P = PM$ *et* $r_N = NM >> a$.

Calcul des distances r_P et r_N

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\vec{r}-a\vec{i}$. (I-50)

$$\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 = r^2+a^2-2\vec{r}\,a\vec{i} \ . \qquad \text{(I-51)}$$

$$r_P^2=\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 = r^2+a^2-2ra\cos\theta . \qquad \text{(I-52)}$$

On calcule en suite $\frac{1}{r_P}$. $\quad \frac{1}{r_P}=\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2r\,a\cos\theta}}$ (I-53)

$$\frac{1}{r_P}=\left(r^2+a^2-2ra\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(I-54)}$$

On rappelle le développement limité (DL) (à l'ordre 1) de :

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x \ (x << 1) \qquad \text{(I-55)}$$

On pose $x = a/r \ (x << 1)$, alors :

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{(I-56)}$$

Un DL au 1^er ordre en x donne :

$$\boxed{\frac{1}{r_P} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)} \qquad \frac{a^2}{r^2} = x^2 \to 0 \ (x << 1) \qquad \text{(I-57)}$$

De la même manière (il suffit de remplacer θ par $(\pi - \theta)$ et donc par cos θ

$$\boxed{\frac{1}{r_N} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)} \qquad \text{(I-58)}$$

Par conséquent :
$$\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_N} = 2\frac{a}{r^2}\cos\theta \qquad \text{(I-59)}$$

D'où le potentiel est :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{r^2}\cos\theta} \qquad \text{(I-60)}$$

On définit le vecteur **moment dipolaire du dipôle électrostatique** (vecteur dirigé de la charge négative vers la charge positive) :

$$\vec{p} = 2aq\vec{i} = q\overrightarrow{NP} \qquad \text{(I-61)}$$

Alors (décroissance du potentiel en $1/r^2$) :

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^2}\cos\theta} \qquad \text{(I-62)}$$

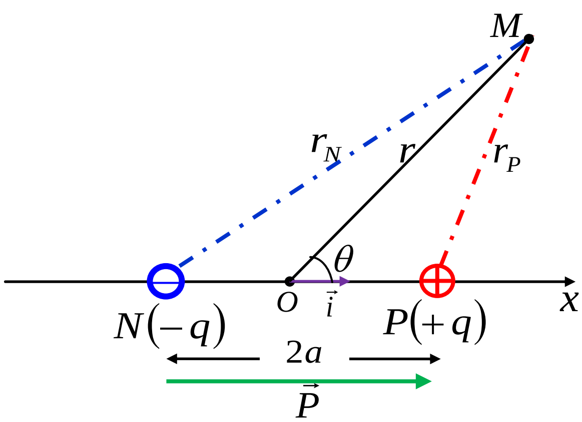


Figure I-24

En notant $\vec{u}_r = \vec{r}/r$:

$$\boxed{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\,\vec{u}_r}{r^2}} \qquad (\vec{i}.\vec{u}_r = \cos\theta) \qquad \text{(I-63)}$$

b) Calcul du champ dans le cadre de l'approximation dipolaire

La relation intrinsèque $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$ permet de calculer le champ (en coordonnées polaires)

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases} \qquad \text{(I-64)}$$

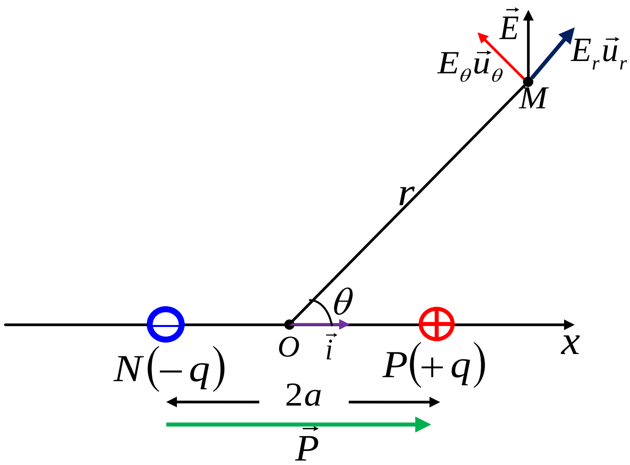


Figure I-25

Par conséquent : $$\begin{cases} E_r(r,\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p}{r^3}\cos\theta \\ E_\theta(r,\theta) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{r^3}\sin\theta \end{cases} \qquad \text{(I-65)}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta)} \qquad \text{(I-66)}$$

I.6 Théorème de Gauss

I.6.1 Flux d'un champ électrostatique

a) Définition

Soit $\vec{E}(M)$ un champ électrostatique défini dans un domaine de l'espace.

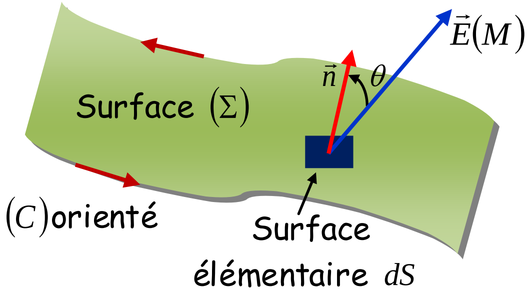


Figure I-26

Soit (Σ) une surface dont le contour (C) est orienté de manière arbitraire.

Le choix de cette orientation conditionne le choix du vecteur normal unitaire à la surface élémentaire dS centrée en M (règle du tire-bouchon ou de la main droite).

On appelle flux élémentaire $d\Phi$ du champ $\vec{E}(M)$ à travers la surface dS orientée la quantité :

$$d\Phi = \vec{E}(M)dS\vec{n} \tag{I-67}$$

Le flux total du champ $\vec{E}(M)$ à travers toute la surface est alors :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E}(M)dS\vec{n} \tag{I-68}$$

Intérêt physique du flux :

$$d\Phi = E(M)dS\cos\theta \tag{I-69}$$

Le flux «compte» les lignes de champ qui traversent la surface (le flux est maximal lorsque q =0 et nul pour $q = \pi/2$).

Cas d'une surface fermée :

Exemples de surfaces fermées (elles délimitent un volume fini)

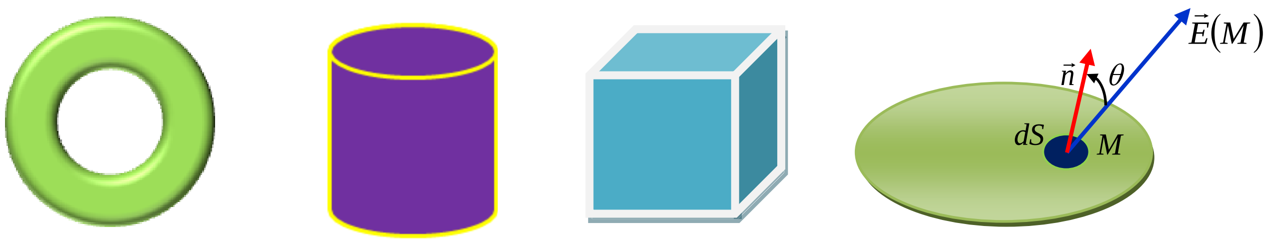


Figure I-27 : *exemples surfaces fermées.*

Le vecteur normal $\vec{n}$ est choisi, par convention, **dirigé vers l'extérieur** du volume délimité par la surface fermée.

On définit alors le **flux sortant** à travers la **surface fermée**, que l'on note :

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS\vec{n} \tag{I-70}$$

Le théorème de Gauss permet d'évaluer le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée, en fonction des charges contenues à l'intérieur de cette surface.

On considère une charge ponctuelle q placée en O et on choisit comme surface fermée la sphère $\Sigma(O,r)$ de centre O et de rayon r

On évalue le flux sortant du champ électrique à travers $\Sigma(O,r)$.

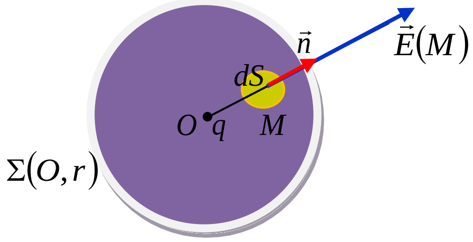


Figure I-28

$$d\Phi_S = \vec{E}(M).dS\vec{n} = \vec{E}(M).\vec{u}_r.dS \qquad \text{(I-71)}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{(I-72)}$$

$$d\Phi_S = \vec{E}(M).dS.\vec{n} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dS \qquad \text{(I-73)}$$

En intégrant sur toute la sphère (sur laquelle r est constant) :

$$\Phi_S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}S_{Sphère} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}(4\pi r^2) \qquad \text{(I-74)}$$

$$\text{Soit : } \boxed{\Phi_S = \frac{q}{\varepsilon_0}} \qquad \text{(I-75)}$$

où la surface d'une sphère $S_{Sphère} = 4\pi r^2$

Généralisation : on considère des **charges ponctuelles** q_{int} placées à l'intérieur d'un volume délimité par une surface fermée (Σ) quelconque.

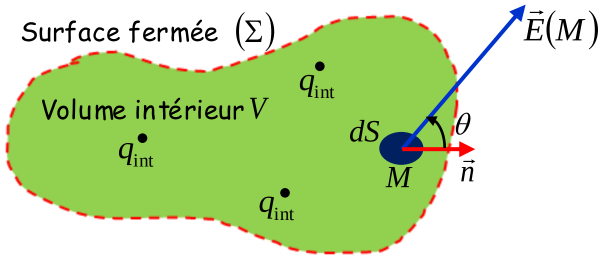


Figure I-29

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS.\vec{n} \tag{I-76}$$

$$\boxed{\Phi_S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{int}}} \tag{I-77}$$

Cas de charges **extérieures à la surface fermée** :

Le flux sortant du champ créé par la charge q_{ext} à travers la surface fermée est nul (les flux à travers dS_1 et dS_2 se compensent deux à deux : les champs diminuent comme $1/r^2$ mais les surfaces dS augmentent comme r^2)

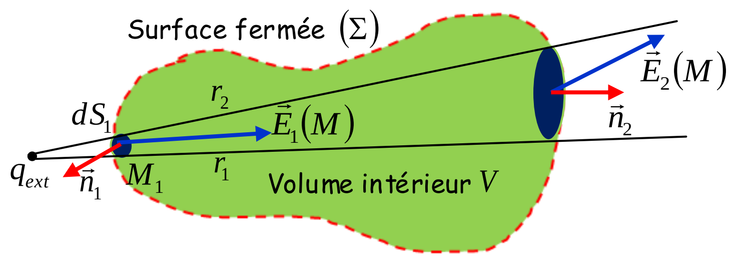


Figure I-30

I.6.2 Énoncé du théorème de Gauss

Le flux du champ sortant d'une surface fermée est égal au produit par $1/\varepsilon_0$ de la somme des charges intérieures à la surface; ce flux est indépendant de leur position et de la présence de charges extérieures.

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Les charges q_{int} et q_{ext} créent un champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

Cas d'une répartition volumique de charges :

Soit ρ la densité volumique de charges.

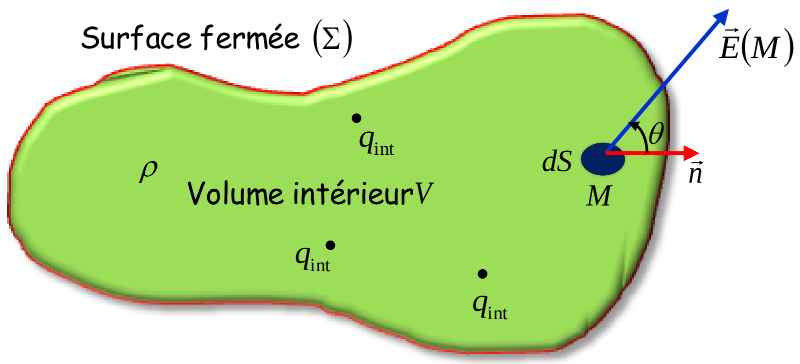


Figure I-31

D'après théorème de Gauss :

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I-78)}$$

Avec :

$$\sum q_{\text{int}} = \iiint_{(V)} \rho(P)d\tau \qquad \text{(I-79)}$$

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} E(M)\vec{u}_r.dS\vec{n} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{(V)} \rho(P)d\tau \qquad \text{(I-80)}$$

I.6.3 Applications du théorème de Gauss

Méthode de raisonnement : choix d'une surface de Gauss (Σ) puis :

$$\Phi_S = \underbrace{\boxed{\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS.\vec{n}}} = \underbrace{\boxed{\frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}}$$

Calcul direct du flux en utilisant les **propriétés de symétrie** fortes du champ (si elles existent !)

Calcul des charges **intérieures à la surface de Gauss** choisie.

L'identification des deux expressions du flux sortant donne ensuite la valeur du champ en tout point de l'espace.

a) Disque uniformément chargé

L'application du théorème de Gauss donne alors :

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I-81)}$$

On a une distribution surfacique, alors la charge est donnée par :

$$Q = \sigma S \qquad \text{(I-82)}$$

1) Détermination d'un champ électrostatique $E(r)$

Pour $r > R$ (à l'extérieure du disque) :

La charge **intérieure** totale est :

$$Q = \sum q_{\text{int}} = \pi\sigma R^2 \qquad \text{(I-83)}$$

Surface d'un système de disque de rayon R

$$S_{Disque} = \pi R^2 \qquad \text{(I-84)}$$

Surface d'un disque de Gauss de rayon r

$$S_{\Sigma(O,r)} = \pi r^2 \qquad \text{(I-85)}$$

$$E(r).S_{\Sigma(O,r)} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r).\pi r^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I-86)}$$

Soit : $\boxed{E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$ (I-87)

Pour $r < R$ (à l'intérieure du disque) :

La charge **intérieure** totale est :

$$Q = \sum q_{\text{int}} = \pi\sigma r^2 \qquad \text{(I-88)}$$

$$E(r).S_{\Sigma(O,r)} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r).\pi r^2 = \frac{\sigma \pi r^2}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I-89)}$$

Soit : $\boxed{E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ (I-90)

2) Représentation graphique du champ $E(r)$ (pour $Q > 0$) :

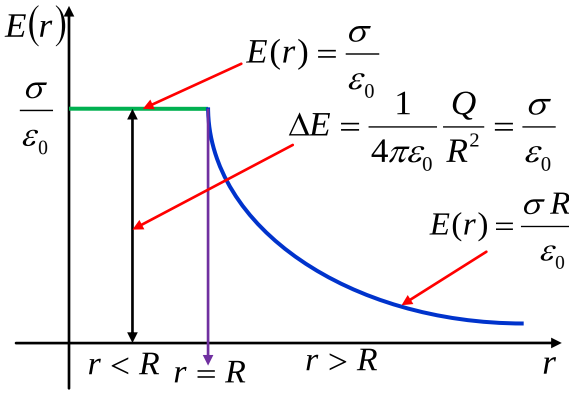


Figure I-32 : *représentation graphique du champ* $E(r)$.

3) Détermination du potentiel $V(r)$

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V) \quad \text{(I-91)}$$

$$\Rightarrow E=-\frac{dV}{dr} \quad \text{(I-92)}$$

Pour $r>R$ (à l'extérieure du disque) :

$$E(r)=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad \text{(I-93)}$$

$$\Rightarrow \int dV=-\int E(r)dr \quad \text{(I-94)}$$

$$\Rightarrow V(r)=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}+C_1 \quad \text{(I-95)}$$

$V(r)$ **nul à l'infini** (pas de charges à l'infini), c'est-à-dire $C_1=0V$.

Pour $r<R$ (à l'intérieure du disque) :

$$E(r)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{(I-96)}$$

$$\Rightarrow \int dV=-\int E(r)dr \quad \text{(I-97)}$$

$$\Rightarrow V(r)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}r+C_2 \quad \text{(I-98)}$$

Par **continuité du potentiel en** $r=R$, on obtient :

$$\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}+C_2 \Rightarrow C_2=0 \quad \text{(I-99)}$$

Soit : $\boxed{V(r)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}r}$ (I-95)

4) Représentation graphique du potentiel $V(r)$ (pour $Q>0$) :

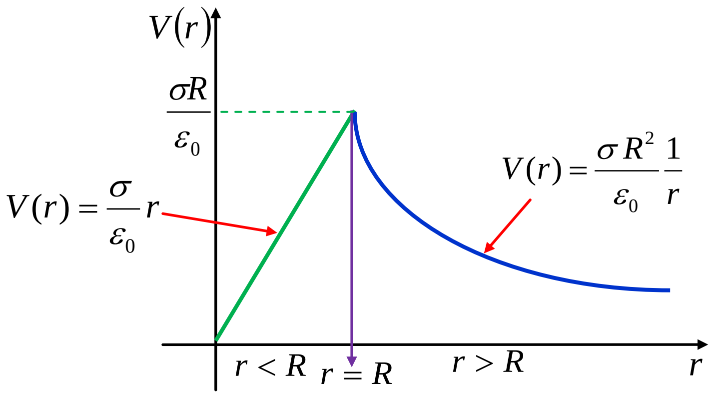


Figure I-33 : *représentation graphique du potentiel* $V(r)$.

b) Cylindre infini uniformément chargé en volume

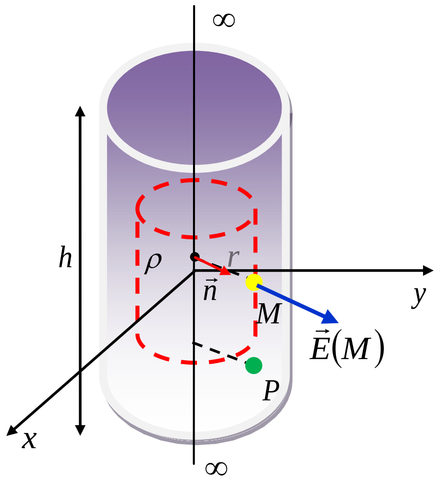


Figure I-34 : *cas* $r<R$.

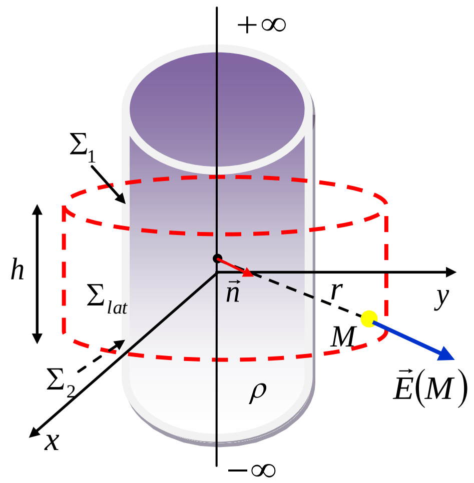


Figure I-35 : $cas\ \ r > R$.

1) Calcul direct du flux sortant

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS\,\vec{n} \qquad \text{(I-96)}$$

$$\Phi_S = \underbrace{\oiint_{(\Sigma_1)} E(M)\vec{u}_r.dS\,\vec{n}_1}_{=0\ ;\ \vec{u}_r \perp \vec{n}_1} + \underbrace{\oiint_{(\Sigma_2)} E(M)\vec{u}_r.dS\,\vec{n}_2}_{=0\ ;\ \vec{u}_r \perp \vec{n}_2} + \underbrace{\oiint_{(\Sigma_{lat})} E(M)\vec{u}_r.dS\,\vec{n}}_{\neq 0\ ;\ \vec{u}_r // \vec{n}} \qquad \text{(I-97)}$$

$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma_{lat})} E(r)\vec{u}_r.dS\,\vec{n} = E(r)\oiint_{(\Sigma_{lat})} dS = 2\pi\, rh\, E(r) \qquad \text{(I-98)}$$

$$S = \oiint_{(\Sigma_{lat})} dS \qquad \text{(I-99)}$$

$$\boxed{\Phi_S = 2\pi\, rhE(r)} \qquad \text{(I-100)}$$

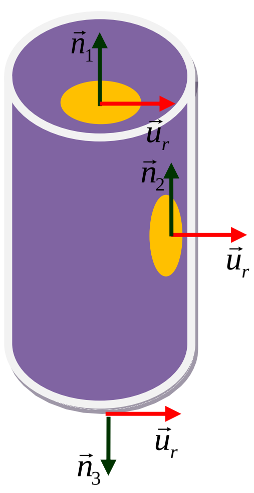


Figure I-36

2) Détermination du champ $E(r)$

Volume du système cylindrique de rayon r et hauteur h

$$V = \pi r^2 h \tag{I-101}$$

Surface du cylindre de Gauss de rayon r

$$S_{\Sigma(O,r)} = 2\pi r h \tag{I-102}$$

Pour $r > R$ (à l'extérieure de cylindre) :

$$\Phi_S = 2\pi r h E(r) \tag{I-103}$$

La charge intérieure totale **:**

$$Q = \sum q_{\text{int}} = \rho V = \pi \rho R^2 h \tag{I-104}$$

$$Q = \pi \rho R^2 h \tag{I-105}$$

$$E(r) S_{\Sigma(O,r)} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{I-106}$$

$$E(r).2\pi h r = \frac{\pi \rho h R^2}{\varepsilon_0} \tag{I-107}$$

Soit : $$\boxed{E(r) = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r}} \tag{I-108}$$

Pour $r < R$ (à l'intérieure du disque) :

.

$$\Phi_S = 2\pi r h E(r) \tag{I-109}$$

La charge intérieure totale :

$$Q = \sum q_{\text{int}} = \pi \rho r^2 h \tag{I-110}$$

$$E(r).2\pi h r = \frac{\pi \rho h r^2}{\varepsilon_0} \tag{I-111}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r} \tag{I-112}$$

3) Détermination du potentiel $V(r)$

Pour $r > R$ (à l'extérieure de cylindre) :

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V) \tag{I-113}$$

$$\Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr} \tag{I-114}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \tag{I-115}$$

$$\Rightarrow \int dV = \int E(r)dr \qquad \text{(I-116)}$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\ln(r) + C_1 \qquad \text{(I-117)}$$

$$\text{Soit : } \boxed{V(r) = -\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\ln(r)} \qquad \text{(I-118)}$$

$V(r)$ **nul à l'infini** (pas de charges à l'infini).

Pour $r < R$ (à l'intérieure du disque) :

$$E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r \qquad \text{(I-119)}$$

Soit :

$$V(r) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + C_2 \qquad \text{(I-120)}$$

Par continuité du potentiel en $r = R$, on obtient :

$$-\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\ln(R) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} + C_2 \qquad \text{(I-121)}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}[\frac{1}{2} - \ln(R)]. \qquad \text{(I-122)}$$

(II-121)

$$\text{Soit : } \boxed{V(r) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}[\frac{1}{2} - \ln(R)]} \qquad \text{(I-123)}$$

c) Sphère uniformément chargée en surface

Pour $r > R$ (à l'extérieure de la sphère) :

La charge intérieure totale si la **distribution surfacique** est :

$$Q = \sum q_{\text{int}} = 4\pi R^2 \sigma \qquad \text{(I-124)}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{(I-125)}$$

$$\text{Soit : } \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}} \qquad \text{(I-126)}$$

C'est équivalent au champ et au potentiel dus à une charge ponctuelle placée en O.

Pour $r < R$ (à l'intérieure de la sphère) :

La charge totale si la **distribution surfacique** est :

$$Q = \sigma S \qquad \text{(I-127)}$$

Surface d'une sphère de rayon R

$$S_{Sphère} = 4\pi R^2 \qquad \text{(I-128)}$$

Le champ électrostatique $E(r)$

$$\sum q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E(r) = 0V/m \qquad \text{(I-129)}$$

Le potentiel électrostatique $V(r)$

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = cte} \qquad \text{(I-130)}$$

Le champ est donc nul à l'intérieur de la sphère chargée en surface.

Il y a continuité du potentiel pour $r = R$.

4) Représentation graphique du champ $E(r)$ (pour $Q > 0$).

Le champ électrostatique est discontinu «habituelle» en $r = R$.

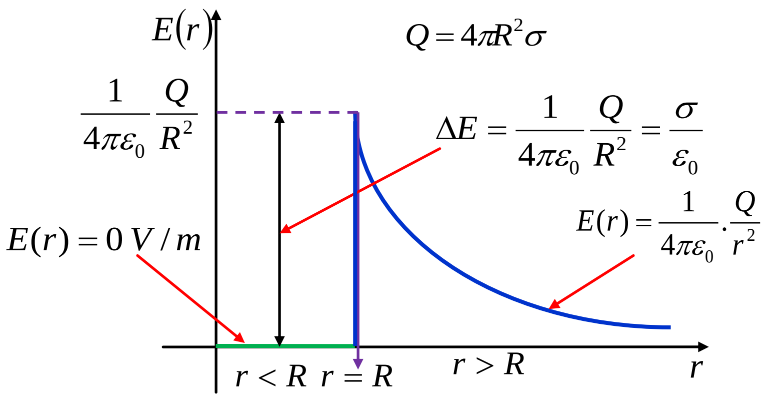


Figure I-37 : *représentation graphique du champ* $E(r)$.

5) Représentation graphique du potentiel $V(r)$ (pour $Q > 0$) :

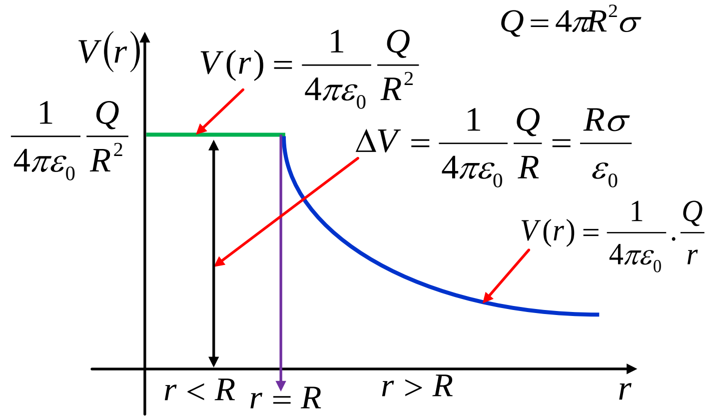


Figure I-38 : *représentation graphique du potentiel* $V(r)$.

Le potentiel $V(r)$ est continu en $r = R$.

d) Sphère uniformément chargée en volume

Surface d'une sphère de Gauss de rayon r

$$S_{\Sigma(O,r)} = 4\pi r^2 \qquad \text{(I-131)}$$

La charge totale si la **distribution volumique** est :

$$Q = \rho V \tag{I-132}$$

Pour $r > R$ (à l'extérieure de la sphère) :

La charge intérieure totale est :

$$Q = \sum q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{I-133}$$

Pour $r < R$ (à l'intérieure de la sphère) :

La charge intérieure totale est :

$$Q = \sum q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \tag{I-134}$$

Q désignant la charge totale portée par la sphère $\Sigma(O,r)$

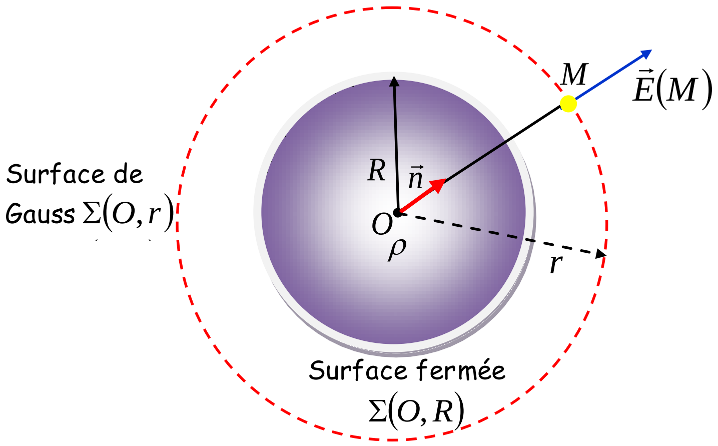


Figure I-39 : *cas* $r > R$.

1) Détermination du champ $E(r)$

Pour $r > R$ (à l'extérieure de la sphère) :

$$E(r).S_{\Sigma(O,r)} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{I-135}$$

$$E(r).4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0} \tag{I-136}$$

$$\text{Soit : } \boxed{E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}} \tag{I-137}$$

C'est équivalent au champ dû à une charge ponctuelle Q placée en O.

Pour $r < R$ (à l'intérieure de la sphère) :

$$Q = \sum q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{I-138}$$

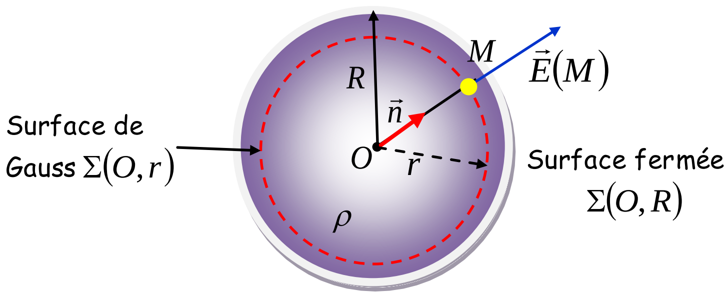


Figure I-40 : *cas* $r < R$.

$$E(r).S_{\Sigma(O,r)} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{(I-139)}$$

$$\Rightarrow E(r).4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad \text{(I-140)}$$

$$\text{Soit : } \boxed{E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r} \quad \text{(I-141)}$$

Le champ varie linéairement avec la distance au centre r (il est notamment nul au centre de la sphère).

2) Représentation graphique du champ $E(r)$ (pour $Q > 0$) :

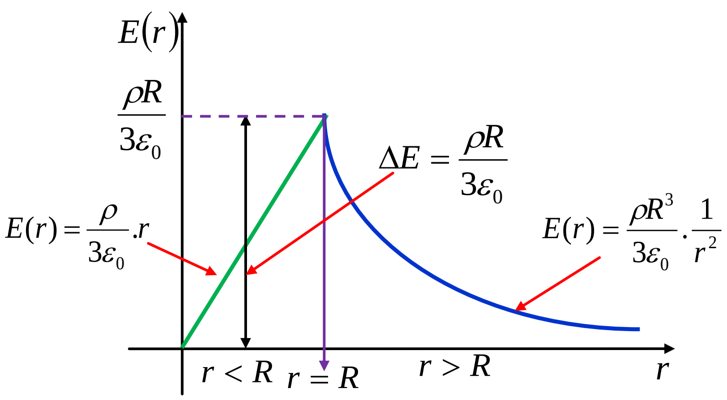


Figure I-41 : *représentation graphique du champ* $E(r)$.

3) Détermination du potentiel $V(r)$

Pour $r > R$ (à l'extérieure de la sphère) :

$$E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad \text{(I-142)}$$

$$\Rightarrow \int dV = -\int E(r)dr \qquad \text{(I-143)}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_1 \qquad \text{(I-144)}$$

En ayant choisit $V(r)$ **<u>nul à l'infini</u>** (pas de charges à l'infini), c'est-à-dire $C_1^{\cdot} = 0V$.

On retrouve l'expression du potentiel créé par une charge ponctuelle Q placée en O.

$$\text{Soit : } \boxed{V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}} \qquad \text{(I-145)}$$

Pour $r < R$ (à l'intérieure de la sphère) :

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad \text{(I-146)}$$

$$\Rightarrow \int dV = -\int E(r)dr \qquad \text{(I-147)}$$

$$V(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}.r^2 + C_2 \qquad \text{(I-148)}$$

La constante C_2 s'obtient en écrivant la continuité du potentiel en $r = R$:

$$\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{R} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_2 \qquad \text{(I-149)}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}R^2 \qquad \text{(I-150)}$$

$$\text{Soit : } \boxed{V(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}} \qquad \text{(I-151)}$$

4) Représentation graphique du potentiel $V(r)$ (pour $Q > 0$) :

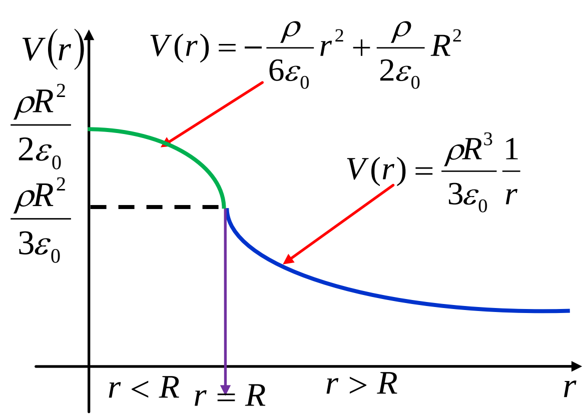


Figure I-42 : *représentation graphique du potentiel* $V(r)$.

I.6.4 Théorème de Gauss pour le champ gravitationnel

Analogies électrique/mécanique

$$\vec{F}_{électros} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_r \qquad\qquad \vec{F}_{gravita} = G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r$$

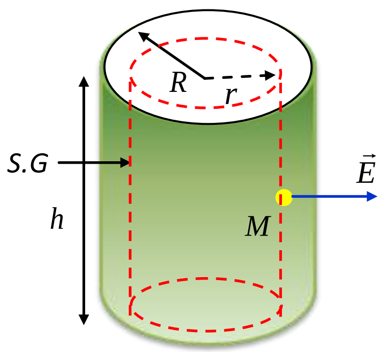
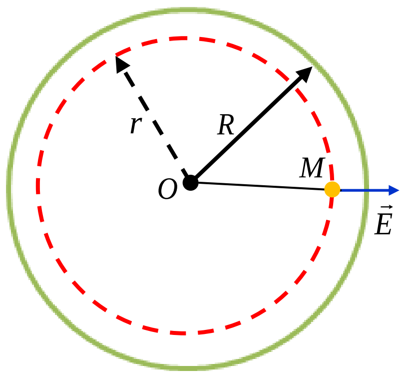
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad G$$

$$q \quad \Leftrightarrow \quad m$$

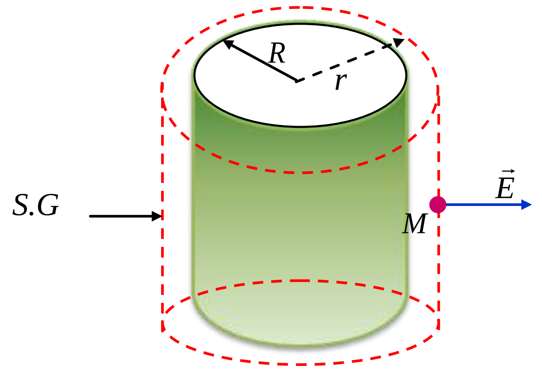
$$\Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M).dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \Phi_S = \oiint_{(\Sigma)} \vec{g}(M).dS.\vec{n} = 4\pi\, G \sum m_{\text{int}}$$

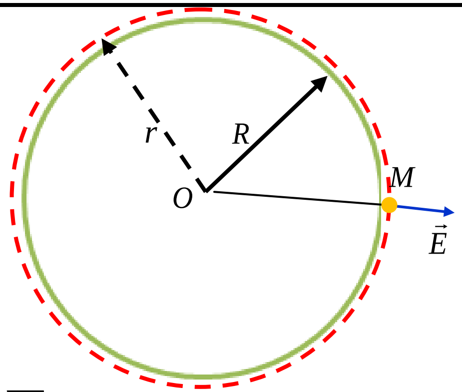
Enoncé du théorème de Gauss : *le flux du champ électrostatique* $\vec{E}(r)$ *sortant à travers toute surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface fermée, divisé par la permittivité du vide* ε_0 *, est donné par :*

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$$

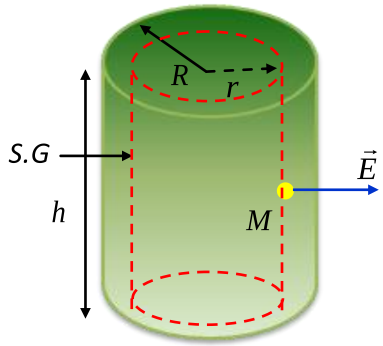
Système	Cylindrique	Sphérique
Surface	$S = 2\pi R.h$	$S = 4\pi R^2$
Volume	$V = \pi R^2 h$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Symétrie	Symétrie cylindrique	Symétrie sphérique
Surface de Gauss	$S_G = 2\pi r.h$	$S_G = 4\pi r^2$
Distribution surfacique **Cas** $r < R$ **:** **(Intérieur d'un système de rayon R)** $\sum q_{\text{int}.S.Gasss} = 0$	 $E(r)2\pi r h = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = 0V/m$	 $E(r)4\pi r^2 = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = 0V/m$

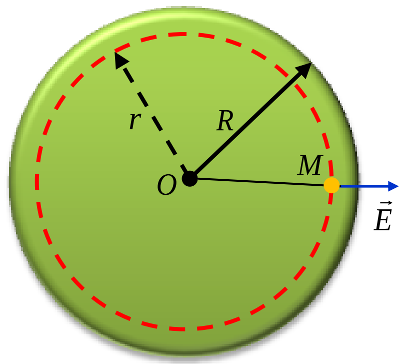
<table>
<tr>
<td>Distribution surfacique</td>
<td>Cas $r > R$:

(Extérieur d'un système de rayon R)</td>
<td>

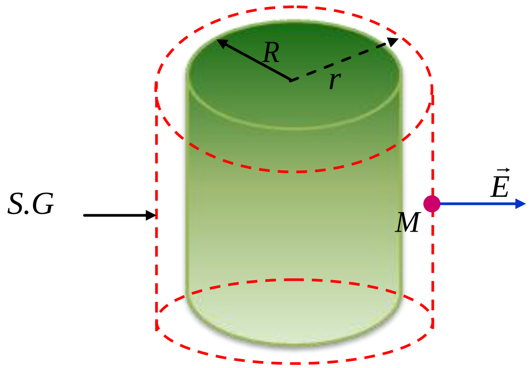
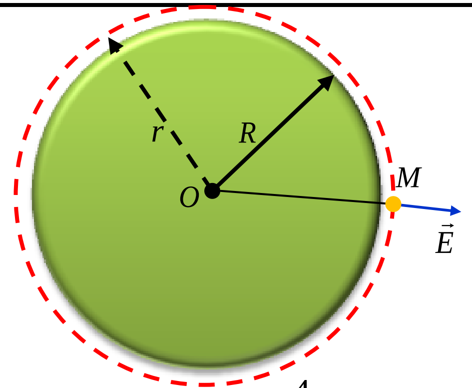
$$\sum q_{int.S.Gasss} = \sigma S = 2\pi \sigma R h$$
$$E(r)2\pi r h = \frac{2\pi \sigma R h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}.\frac{1}{r}$$</td>
<td>

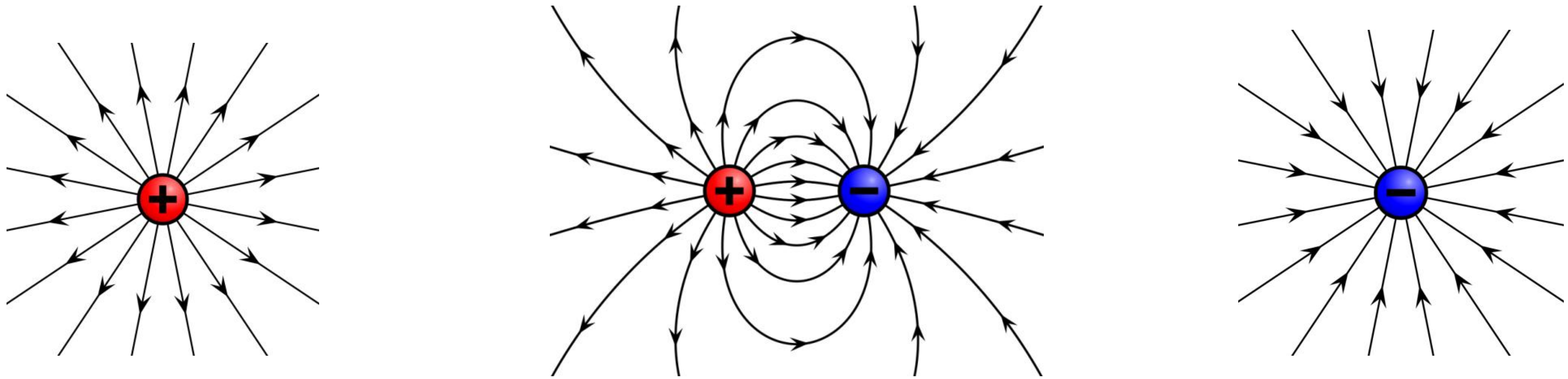
$$\sum q_{int.S.Gasss} = \sigma S = 4\pi \sigma R^2$$
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi \sigma R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\frac{R^2}{r^2}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Distribution volumique</td>
<td>Cas $r < R$:

(Intérieur d'un système de rayon R)</td>
<td>

$$\sum q_{int.S.Gass} = \rho V = \pi \rho r^2 h$$
$$E(r).2\pi r h = \frac{\pi \rho r^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}.r$$</td>
<td>

$$\sum q_{int.S.Gass} = \rho V = \frac{4}{3}\rho \pi r^3$$
$$E(r).4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho r^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$</td>
</tr>
</table>

Distribution volumique	**Cas** $r > R$ **:** **(Extérieur d'un système de rayon R)**	 $\sum q_{int.S.Gasss} = \rho V = \pi\rho R^2 h$ $E(r).2\pi r h = \frac{\pi\rho R^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}.\frac{1}{r}$	 $\sum q_{int.S.Gasss} = \rho V = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$ $E(r).4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}.\frac{1}{r^2}$



I.7 Conducteurs en équilibre

I.7.1 Objectifs

- ❑ Etablir les propriétés électrostatiques des conducteurs : champ, potentiel, et énergie.
- ❑ Etudier les propriétés d'un système de deux conducteurs en influence.
- ❑ Appliquer ces résultats aux condensateurs : propriétés, capacité, forces sur les armatures.

I.7.2 Définitions

- ❑ Un conducteur est un matériau qui contient des charges mobiles. Ces charges se mettent en mouvement dès qu'elles sont dans un champ électrostatique.
- ❑ Un conducteur est en équilibre électrostatique s'il n'y a pas de déplacement de charges mobiles. La répartition des charges est constante dans le temps.
- ❑ Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale.

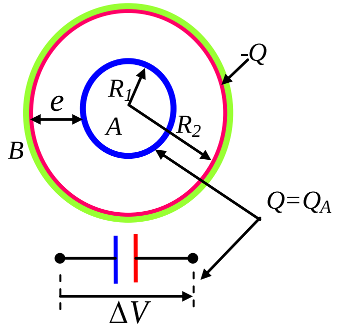


Figure I-43

Exemples :

métal : porteurs de charge = e^- libres
gaz ionisé : porteurs de charge = ions
électrolytes : porteurs de charge = ions

- **Un conducteur est en équilibre** lorsque les charges libres qu'il contient sont toutes au repos.
- **Charge libre:** barycentre d'un ensemble de porteurs de charge.

I.7.3 Propriétés d'un conducteur en équilibre

Le **champ électrostatique** est nul à l'intérieur de tout conducteur en équilibre:

Charges libres au repos $\Rightarrow \vec{F}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{E}=\vec{0}$

Le **potentiel électrostatique** est constant à l'intérieur sur la surface d'un conducteur en équilibre.

$$\vec{E}=\vec{0} \Rightarrow V=C^{te} \quad \text{à l'intérieur}$$

$$\text{Par continuité de } V \Rightarrow V=C^{te} \quad \text{à la surface}$$

- La surface d'un conducteur en équilibre est une équipotentielle.
- Les lignes de champ sont **normales à la surface** pour un conducteur chargé.

Si le **conducteur en équilibre** est **chargé** ne peut être que **surfacique.**

$$div(\vec{E})=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho=0 \text{ car } \vec{E}=\vec{0}$$

Cas d'un **conducteur creux chargé** :

$$\vec{E}=\vec{0} \Rightarrow V=C^{te} \quad \text{Par tout}$$

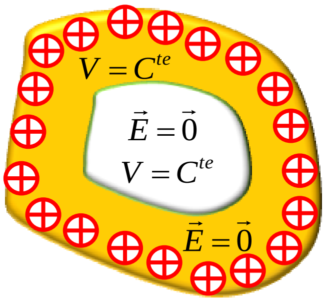


Figure I-44

La surface intérieur d'un conducteur en équilibre est une **équipotentielle**.

Il ne peut pas y avoir de charges sur la **surface intérieur** de la cavité.

I.7.4 Applications

- Charge d'un conducteur en équilibre initialement neutre, par contact.
- Cage de Faraday.

Champ au voisinage d'un condensateur

Théorème de Coulomb

Le champ électrostatique présente une discontinuité à la surface d'un condensateur en équilibre :

$$S \text{ la surface fermée} = \Sigma + \text{tube} + \Delta S \qquad \text{(I-152)}$$

M infiniment voisin de la surface du condensateur.

$\vec{n}$ normale à la surface en M .

$$\Phi_{E/S}=\iint_S \vec{E}.dS.\vec{n}=\Phi_{E/dS}+\Phi_{E/tube}+\Phi_{E/\Sigma}=\frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0} \qquad \text{(I-153)}$$

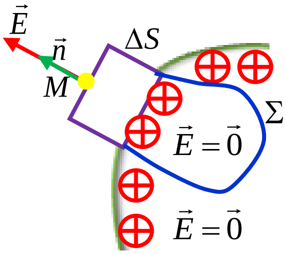


Figure I-45

D'où : $\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ est le champ au voisinage d'un condensateur en équilibre.

I.8 Pression électrostatique

Au voisinage de la surface:

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}=\vec{E}_1(M)+\vec{E}_2(M) \qquad \text{(I-154)}$$

$\vec{E}_1(M)$ est le champ crée par la surface dS .

$\vec{E}_2(M)$ est le champ crée par le reste de la surface.

$$\vec{E}_2(M)=\vec{E}-\vec{E}_1(M)=\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{n}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \qquad \text{(I-155)}$$

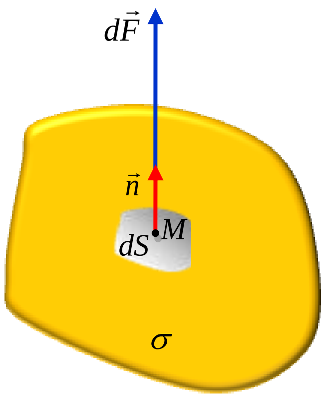


Figure I-46

L'élément de surface va subir une force :

$$d\vec{F}=dq\vec{E}_2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}dS\,\vec{n} \qquad \text{(I-156)}$$

Par définition la pression électrostatique est définie par :

$$\boxed{p=\frac{dF}{dS}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}} \qquad \text{(I-157)}$$

Avec : $d\vec{F}$ est toujours dirigée suivant $\vec{n}$.

Si $\sigma >>$ (densité surfacique est très grande), les charges quittent le conducteur.

Emission par effet de champ.

I.9 Capacité d'un conducteur et d'un condensateur

I.9.1 Capacité d'un condensateur en équilibre

En un point M d'un conducteur en équilibre, de surface S et de densité surfacique σ, le potentiel s'écrit :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\sigma\, dS}{r} \qquad \text{(I-158)}$$

Sa chargé totale est :

$$Q = \iint_{(S)}\sigma\, dS \qquad \text{(I-159)}$$

Si $\sigma' \to K\sigma$ alors : $\begin{cases} V'(M) = KV(M) \\ Q' = KQ \end{cases}$ d'où $\frac{V'}{V} = \frac{Q'}{Q} = C^{te}$ (I-160)

On pose : $\frac{Q}{V} = C$ **capacité d'un condensateur isolé en équilibre**.

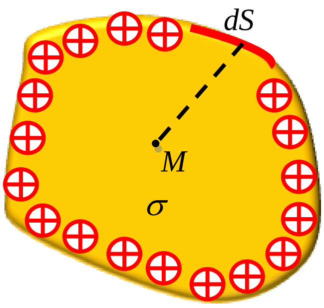


Figure I-47

I.9.2 Energie d'un système de conducteurs chargé en équilibre

La distribution est surfacique et V constante sur la surface.

Cas d'un seul conducteur :

$$E_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma V dS = \frac{1}{2}V\iint_S \sigma dS = \frac{1}{2}QV \qquad \text{(I-161)}$$

$$\boxed{E_e = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}} \qquad \text{(I-162)}$$

Cas d'un système de n conducteurs :

Conducteur A, charge Q_i, et potentiel V_i en équilibre initialement :

$$E_e(i) = \frac{1}{2} Q_i V_i = \frac{1}{2} C_i V_i^2 = \frac{Q_i^2}{2C_i} \qquad \text{(I-163)}$$

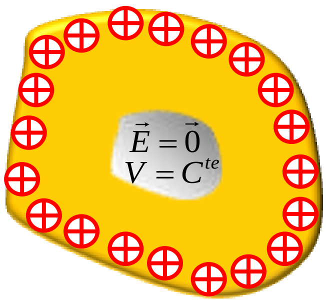


Figure I-48

I.9.3 Influence électrostatique

Expérience fondamentale, définition de l'influence :

- Conducteur A isolé; **neutre** en équilibre.
- Conducteur B isolé; **chargé** en équilibre.

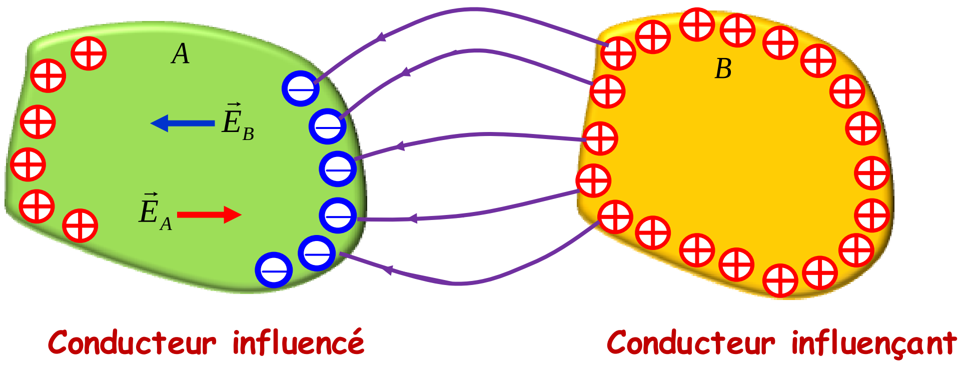


Figure I-49

Pour un conducteur isolé, l'influence conserve la charge totale mais modifie la répartition des charges sur la surface et donc son potentiel à la charge constante, la densité surfacique et le potentiel varie déplacement des charges libres de A sous l'influence de $\vec{E}_B$.

À l'équilibre $\vec{E}_A = -\vec{E}_B$.

La répartition des charges superficielles du conducteurs A est modifiée A a été influencé par le champ de B.

I.9.4 Etats possibles d'un conducteur

a) Conducteur isolé

Initialement le conducteur A isolé et neutre $Q_A = V_A = 0$.

Après l'influence par B chargé $V_A^{'} \neq 0$ alors que $Q_A^{'} = 0$.

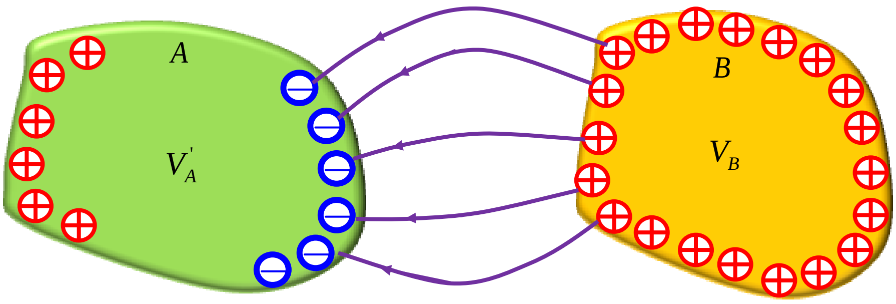


Figure I-50

b) Conducteur à potentiel constant

- Les charges **positives** de A **s'écoulent** vers la terre.

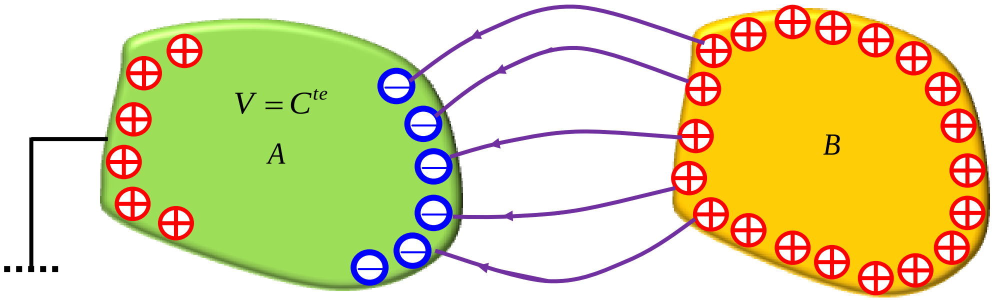


Figure I-51

L'influence modifiée la charge totale d'un conducteur maintenu à un potentiel constant, la densité surfacique et la charge peuvent varier.

c) Influence totale

- Il y a **influence totale** lorsque le conducteur A (influencé) entoure complètement le conducteur B (influençant).

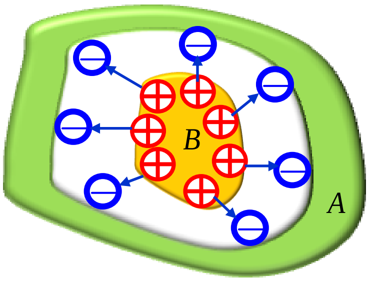


Figure I-52

D'après le théorème des éléments correspondants : la charge Q_B sur la surface intérieure de A

- ❑ Face extérieure de A ; différents cas :

$V_A = 0 \Rightarrow Q_{ext} = 0$ et A relié au sol.

- ❑ A isolé et initialement neutre :

$$Q_{ext} = -Q_{\text{int}} = +Q_B \tag{I-164}$$

$$Q_{ext} = Q_0 + Q_B \tag{I-165}$$

- ❑ A isolé et initialement chargé Q_0.

I.10 Propriétés d'un conducteur en équilibre

C_{11} est la capacité du conducteur A, en présence de B.

C_{22} est la capacité du condensateur B, en présence de A.

C_{12} est le coefficient d'influence de B sur A.

C_{21} est le coefficient d'influence de A sur B.

$Q_{11} = C_{11}V_1$ est la charge propre du conducteur A.

$Q_{12} = C_{12}V_2$ est la charge qui apparait sur A influencé par B.

Q_{12} de signe opposé à V_2 .

C_{12} et C_{21} sont toujours < 0.

Généralisation

Pour un système de n conducteurs en influence, on a :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \ldots + C_{1n}V_n \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \ldots + C_{2n}V_n \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad\quad . \\ Q_n = C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \ldots + C_{nn}V_n \end{cases} \tag{I-166}$$

C'est-à-dire :

$$Q_i = \sum_{i=1}^{n} C_{ij}V_j \tag{I-167}$$

Avec :

$$\begin{cases} C_{ij} = C_{ji} < 0 \\ C_{ii} > 0 \end{cases} \tag{I-168}$$

- ❑ L'indice i correspond au conducteur influencé, et l'indice j au conducteur influençant.
- ❑ Les charges sont des fonctions linaires et homogènes des potentiels.

I.10.1 Capacité d'un condensateur en équilibre

a) Définition

Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs en influence totale.

A est l'armature interne de charge Q_1.

B est l'armature externe de charge Q_2.

$$Q_2 = Q_1 + Q_{2ext} \tag{I-169}$$

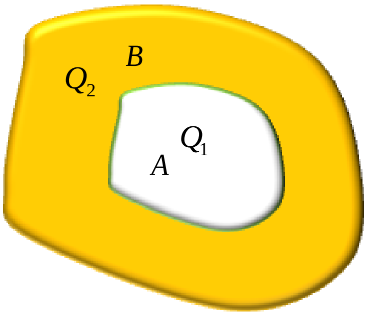


Figure I-53

$Q_1 = Q$ est la charge du condensateur.

Relations générales :

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases} \tag{I-170}$$

On peut réaliser un **état d'équilibre** où on a :

$$\begin{cases} V_1 \neq 0 \\ V_2 = 0 \end{cases} \tag{I-171}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 \\ Q_2 = C_{21}V_1 \end{cases} \tag{I-172}$$

Avec : $Q_1 = -Q_2$ car $Q_{2ext} = 0$ le potentiel à l'infini est nul $V_2 = 0$.

b) Capacité d'un condensateur

$$C_{11}V_1 = -C_{21}V_1 \tag{I-173}$$

$$C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C \tag{I-174}$$

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V \tag{I-175}$$

$$\text{Soit : } Q = (V_1 - V_2)C \tag{I-176}$$

- La charge d'un condensateur est proportionnelle à la différence de potentiel qui existe entre ses armatures.

- La capacité C dépend de la capacité géométrique (forme) des armatures.

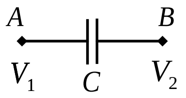


Figure I-54 : *symbole électronique d'un condensateur.*

I.10.2 Calcul de la capacité C d'un condensateur

Méthode générale :

1) Calcul du champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures par l'application du théorème de Gauss.

2) Calcul de la circulation du champ $\vec{E}$ entre les armatures.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V). \tag{I-177}$$

$$\Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}. \tag{I-178}$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = \int_A^B \vec{E}.d\vec{r} \tag{I-179}$$

$$Q = \iint_S \sigma \, dS \tag{I-180}$$

$$\text{Soit : } \boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2}} \tag{I-181}$$

a) Condensateur plan

- Armatures A et B : plans de surface S séparés d'une distance e ($S >> e$) et portés aux potentiels V_1 et V_2.
- Densités surfaciques de charges uniformes : $+\sigma$ sur A et $-\sigma$ sur B.

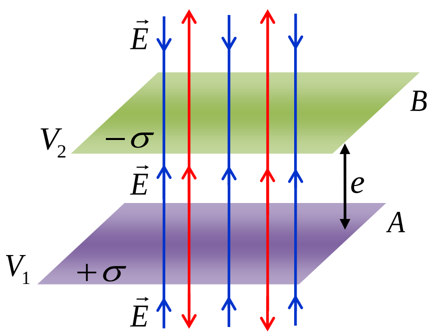


Figure I-55 : *condensateur plan.*

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \pm \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \\ \vec{E}_2 = \pm \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \end{cases}. \tag{I-182}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} \tag{I-183}$$

$$V_1 - V_2 = \int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = E\,e = \frac{\sigma\,e}{\varepsilon_0} \tag{I-184}$$

$$Q = \sigma S \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}} \tag{I-185}$$

b) Condensateur cylindrique

On calcul d'abord le champ électrostatique entre les armatures :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{rh}\vec{u}_r$$

- ❑ On calcul la ddp (différence de potentiel) entre les armatures :

$$V_1 - V_2 = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right) \tag{I-186}$$

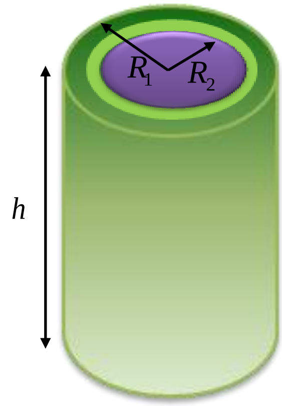


Figure I-56 : *condensateur cylindrique.*

On en déduit la capacité d'un condensateur cylindrique :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \tag{I-187}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{I-188}$$

$$\text{Soit : } \boxed{C = 2\pi\varepsilon_0 h \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \tag{I-189}$$

c) Condensateur sphérique

- ❑ Armature A: sphère de rayon R_1.
- ❑ Armature B: sphère de rayon R_2.

- Σ surface de Gauss de rayon r.
- Circulation de $\vec{E}$ entre A et B.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{(I-190)}$$

$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \qquad \text{(I-191)}$$

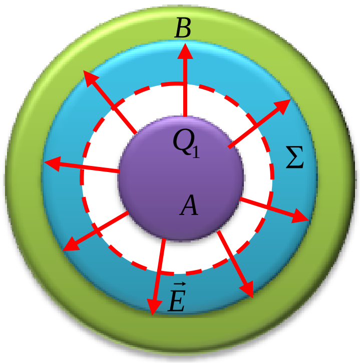


Figure I-57 : *condensateur sphérique.*

Capacité d'un condensateur sphérique est :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} \qquad \text{(I-192)}$$

Soit : $$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}\right)} \qquad \text{(I-193)}$$

I.10.4 Assemblage des condensateurs

a) *Capacité équivalente* C_{eq}

Enoncé des lois de Kirchhoff :

1°) Loi des mailles :

La somme de différences de potentiels (ddp) aux bornes des branches qui consistent la maille est nulle.

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \qquad \text{(I-194)}$$

2°) Loi des nœuds :

Dans un nœud N, la somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants :

$$\sum_{i=1}^{n} I_{i\ Entrant} = \sum_{i=1}^{n} I_{i\ Sortant} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} Q_{i\ Entrant} = \sum_{i=1}^{n} Q_{i\ Sortant} \qquad \text{(I-195)}$$

Soit le branchement de condensateurs ci-dessous :

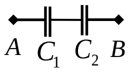


Figure I-58

Donc, d'après la loi des mailles ; la tension totale (ddp) est : $U_T = U_{AB} = U_1 + U_2$,

En plus, en série les charges Q_1 et Q_2 sont égaux.

En série :

La charge totale est :

$$Q_T = Q_1 = Q_2 . \quad \text{(I-196)}$$

$$\text{Donc, } U_{AB} = U_1 + U_2 \Leftrightarrow \frac{Q_T}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} . \quad \text{(I-197)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} .} \quad \text{(I-198)}$$

Soit le branchement de condensateurs ci-dessous.

Le condensateur C_1 porte une charge Q_1 et le condensateur C_2 porte une charge Q_2 .

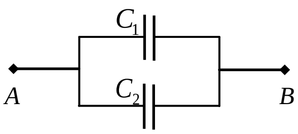


Figure I-59

Donc, d'après la loi des nœuds; la charge totale est :

$$Q_T = Q_1 + Q_2 \quad \text{(I-199)}$$

En plus, en parallèle les différences de potentiels (d.d.p) aux bornes des condensateurs C_1 et C_2 sont égaux.

En parallèle :

$$U_T = U_{AB} = U_1 = U_2 \quad \text{(I-200)}$$

et par définition :

$$Q = C.U \quad \text{(I-201)}$$

Donc,

$$Q_T = Q_1 + Q_2$$

$$C_{eq}.U_{AB} = C_1.U_1 + C_2.U_2 \quad \text{(I-202)}$$

Soit : $\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$. (I-203)

Résumé :

En série :

$Q_T = Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n$, $U_T = U_{AB} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ et $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \ldots + \frac{1}{C_n}$ (I-204)

En parallèle (//) :

$Q_T = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$, $U_T = U_{AB} = U_1 = U_2 = \ldots = U_n$ et $C_{eq} = C_1 + C_1 + \ldots + C_n$ (I-205)

On groupe les condensateurs pour obtenir un condensateur équivalent.

- ❑ Capacité plus grande (groupement parallèle).
- ❑ ddp plus élevé (groupement série).

b) Assemblage des condensateurs en parallèle

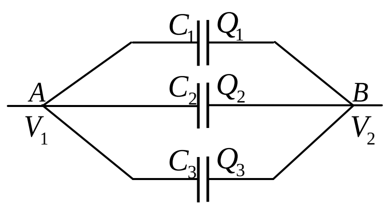


Figure I-60 : *montage parallèle des condensateurs.*

La charge totale du montage des condensateurs parallèle est :

$$Q_{Totale} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \text{(I-206)}$$

$$U_{Totale} = U_1 = U_2 = U_3 \quad \text{(I-207)}$$

$$Q = CU = C\Delta V = C(V_1 - V_2) \quad \text{(I-208)}$$

$$Q_{Totale} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)(V_1 - V_2). \quad \text{(I-209)}$$

Pour n condensateurs groupés en parallèle, la capacité équivalente d'un condensateur est:

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i} \quad \text{(I-210)}$$

c) Assemblage des condensateurs en série

Armature interne d'un condensateur est reliée à l'armature externe du suivant, etc.…

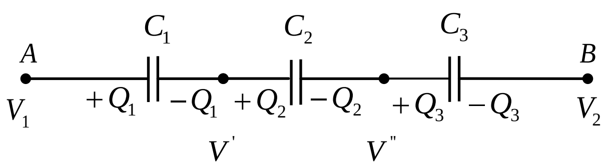


Figure I-61 : *montage série des condensateurs.*

$$Q_{Totale} = Q_1 = Q_2 = Q_3 \quad \text{(I-211)}$$

$$U_{Totale} = U_1 + U_2 + U_3 \qquad \text{(I-212)}$$

Tous les condensateurs portent la même charge :

$$V_1 - V_2 = (V_1 - V^{'}) + (V^{'} - V^{"}) + (V^{"} - V_2) \qquad \text{(I-213)}$$

$$\frac{Q_{Totale}}{C_{eq}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} \qquad \text{(I-214)}$$

$$\text{d'où : } V_1 - V_2 = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) = \frac{Q_1}{C_{eq}} \qquad \text{(I-215)}$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad \text{(I-216)}$$

Pour n condensateurs groupés en série, la capacité équivalente d'un condensateur est:

$$\boxed{\frac{1}{c_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \qquad \text{(I-217)}$$

I.10.5 Energie d'un condensateur

Condensateur est un système de deux conducteurs en influence.

$$E_e = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 \qquad \text{(I-217)}$$

En général, on a $Q_1 = Q_2 = Q$ charge du condensateur :

$$E_e = \frac{1}{2} QU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} \qquad \text{(I-217)}$$

Avec : $Q = Q_1$ et $U = V_1 - V_2 = \Delta V$ (ddp).

Localisation de l'énergie électrostatique :

$$\Delta E_e = W(\vec{F}_{ext}) \qquad \text{(I-218)}$$

Avec : $W(\vec{F}_{ext})$ est le travail des forces électrostatiques.

$$\vec{F} \neq \vec{0} \qquad \text{(I-219)}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \neq \vec{0} \qquad \text{(I-220)}$$

- *L'énergie électrostatique est localisée (ou stockée) dans les régions où le champ n'est pas nul.*

Exemple : condensateur plan.

$$\begin{cases} C = \varepsilon \dfrac{S}{e} \\ V_1 - V_2 = V = E.e \end{cases} \qquad \text{(I-221)}$$

$$\Rightarrow E_e = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 v \qquad \text{(I-222)}$$

Avec : $v = S\,e$ est le volume du condensateur où est localisée E_e

Plus généralement, on définit la densité d'énergie électrostatique par :

$$\frac{dE_e}{dv} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \qquad \text{(I-223)}$$

La capacité d'un condensateur est donnée par cette expression :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_A - V_B} \qquad \text{(I-224)}$$

Avec Q est la charge des armatures du condensateur (figure I-59) et ΔV est la différence de potentiel entre ses bornes tel que :

$$\Delta V = V_A - V_B = V_0 \qquad \text{(I-225)}$$

et l'épaisseur du matériau diélectrique :

$$e = R_2 - R_1 \approx R \qquad \text{(I-226)}$$

La capacité d'un condensateur plan est donnée par cette expression :

$$C = \frac{\varepsilon S}{e} = \frac{Q}{V_0} \qquad \text{(I-227)}$$

- ***Le conducteur sphérique de rayon R_1 pris tout seul, peut être considéré comme une armature d'un condensateur sphérique dont la deuxième armature de rayon R_2 est rejetée à l'infini. En faisant tendre R_2 vers l'infini dans l'expression précédente, on retrouve bien la capacité d'un conducteur sphérique*** $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$.

Expression du potentiel dans le cas de la sphère est donnée par :

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \qquad \text{(I-228)}$$

Les deux armatures du condensateur sont deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2. Pour un point *M*, situé entre les deux armatures (figure I-59) et tel que *OM=r*, on peut écrire :

$$\vec{E}(r) = \frac{KQ_1}{r^2} \vec{u}_r \qquad \text{(I-229)}$$

et
$$dV = -E\,dr \qquad \text{(I-230)}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{KQ_1}{r} + Cte \qquad \text{(I-231)}$$

Exercices

Exercice 1

Sur un axe yOy sont placées une charge ponctuelle q_1 au point O, une charge ponctuelle q_2 au point $A(0,4)$.

Déterminer l'expression de la force électrostatique agissante sur une charge ponctuelle q_3 placée sur l'axe yOy au point $B(0,2)$. On donne : $q_1 = 3q$, $q_2 = -2q$ et $q_3 = q$ avec $q > 0$.

Exercice 2

A/ Soient quatre charges ponctuelles situées aux sommets d'un rectangle comme l'indique la figure (I-62). On donne $Q = 4nC$. Quelle est la force électrostatique résultante, issue des trois autres charges, exercée sur la charge de $-2Q$?

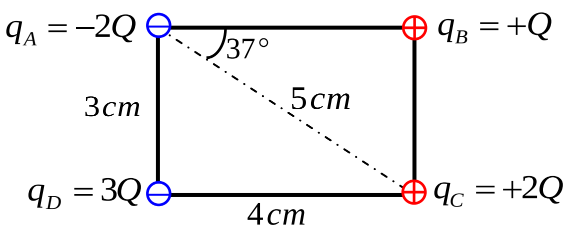


Figure I-62

B/ Soient deux charges ponctuelles situées aux sommets d'un triangle équilatérale. On donne $Q = 2\,\mu C$ et $a = 3cm$. Quelle est la force électrostatique résultante exercée sur la charge de $3Q$?

Exercice 3

Soit une charge Q crée un champ électrostatique $\vec{E}$ en point M de l'espace.

1) Donner l'expression du champ électrostatique.

2) Donner l'expression du potentiel électrostatique.

3) Donner l'expression générale reliant un champ électrostatique et le potentiel électrostatique.

4) Donner l'expression générale reliant un champ de force et l'énergie potentielle associée.

Exercice 4

On considère une charge électrique ponctuelle q_2, située en un point M de l'espace, et soumise au champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q_1 placée en un point P.

1) Etablir l'expression de l'énergie potentielle $E_P(M)$ de la charge q_2 dans le champ de force électrostatique généré par la charge q_1.

2) Donner l'expression générale reliant un champ de force et l'énergie potentielle associée.

Exercice 5

Trois charges ponctuelles sont placées aux coins d'un rectangle, de largeur d et de longueur $2d$, comme montre la figure ci-contre. $q_1 = q$, $q_2 = 2q$ et $q_3 = -2q$ ($q > 0$).

1) Exprimer le champ résultant au point *P*.

2) Déduire l'expression de la force appliquée sur une charge $q_4 = -q$ placée en *P*.

3) Ou doit-on placer une charge $q_5 = 2q$ pour que la force résultante appliquée sur q_4 soit nulle.

Exercice 6

Trois charges ponctuelles q_A, q_B et q_C sont placées aux points A, B et C sommets d'un triangle d'arête a (voir la figure I-63).

1) Représenter graphiquement les vecteurs $\vec{E}_A, \vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ au point *O*.

On donne : $q_A = q_B = q$ et $q_C = -q$ ($q > 0$).

2) Déterminer l'expression du vecteur champ $\vec{E}_O$ créé par cette distribution de charges à l'origine O d'un triangle *ABC* dû aux trois charges q_A, q_B et q_C.

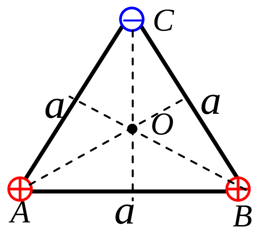


Figure I-63

3) Déduire les expressions du potentiel V_O et de la force appliquée sur une charge $q_O = q$ placée en *O*.

Exercice 7

Quatre charges ponctuelles q_A, q_B, q_C et q_D sont placées aux points A, B, C et D sommets d'un carré $ABCD$ de coté a, comme l'indique la figure (I-64).

1) Représenter graphiquement les vecteurs $\vec{E}_A, \vec{E}_B, \vec{E}_C$ et $\vec{E}_D$.

2) On donne : $q_A = q_B = q$ et $q_C = q_D = -q$.
Déterminer l'expression du vecteur champ électrique $\vec{E}_O$ créé par cette distribution de charges à l'origine O d'un carré $ABCD$ dû aux quatre charges q_A, q_B, q_C et q_D.

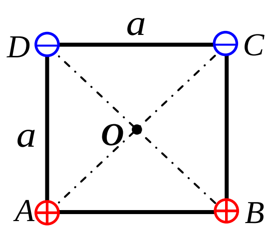


Figure I-64

Exercice 8

Monter que l'expression de la surface élémentaire dS en cordonnées polaires (r,φ) est donnée par : $dS = rdrd\varphi$.

2) Donner l'expression de la charge dq si la distribution est surfacique en coordonnées polaires (r, φ).

Exercice 9

Donner l'expression de la charge totale Q, si la distribution est :

1) linéique.

2) surfacique.

3) volumique.

Exercice 10

Une charge positive q est uniformément répartie le long d'un demi-anneau ABC de rayon R comme l'indique la figure (I-65). Déterminer l'expression du vecteur champ électrique $\vec{E}_0$.

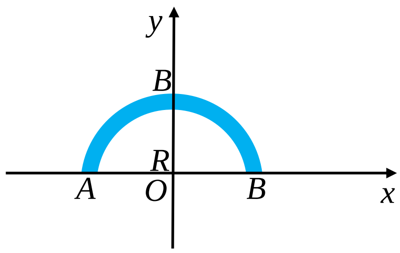


Figure I-65

Exercice 11

Un anneau de centre O et de rayon r, porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique.

1) Calculer le potentiel crée au point M de l'axe (Oz) et situé à la distance z de O.

2) Déduire le vecteur champ au M.

Exercice 12

Un anneau de centre O et de rayon R, porte une charge q répartie uniformément avec une densité linéique $\lambda > 0$. Calculer le champ et le potentiel crées par cette distribution, en un point M de l'axe (Oz).

Exercice 13

Soit un disque centre de O et de rayon R, uniformément chargé en surface (figure I-66). La densité surfacique de charge est $\sigma > 0$. Voir la figure ci-contre. Calculer le champ et le potentiel crées par cette distribution, en un point M de l'axe (Oz).

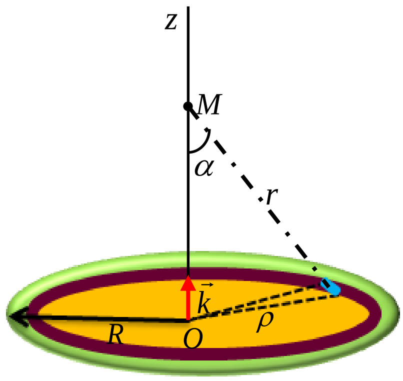


Figure I-66

Exercice 14

A/ Déterminer la surface de Gauss (S_G) de chaque système: disque, cylindre et sphère.

B/ Un disque de rayon R est chargé en surface avec densité surfacique σ positive (figure I-67).

1) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer les expressions du champ électrique $E(x)$ en un point M placé à une distance x du centre dans les deux cas : $x < R$ et $x > R$.

2) Représenter la l'allure de l'intensité du champ électrostatique dans les deux cas : $x < R$ et $x > R$.

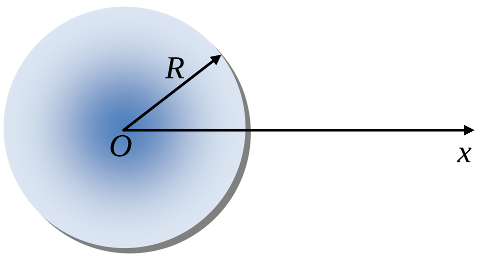


Figure I-67

Exercice 15

Considérons un cylindre de hauteur h et de rayon R, est chargé en volume avec densité volumique $\rho > 0$.

Déterminer les expressions du champ électrique $E(r)$ en un point M placé à une distance r du centre dans les deux cas : $r < R$ et $r > R$.

Exercice 16

On considère deux cylindres concentriques de même hauteur h, de rayon R_1 et R_2, chargé en volume avec une densité volumique ρ constante et l'autre chargé en surface avec une densité surfacique σ constante, respectivement avec $R_1 < R_2$ (voir la figure I-68).

Déterminer les expressions du champ électrique $E(r)$ en un point M placé à une distance r du centre dans les trois cas : $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.

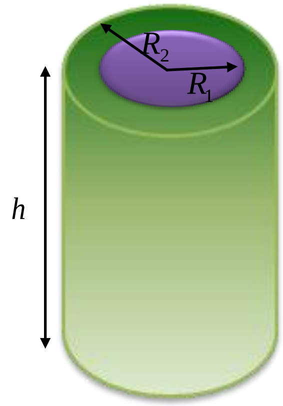


Figure I-68

Exercice 17

1) Déterminer la surface de Gauss pour les deux différents systèmes :

a) Système cylindrique.

b) Système sphérique.

2) Considérons une sphère de centre O, de rayon R et de densité surfacique de charges σ. Soit Q sa charge totale. En supposant que σ est constante, calculer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ produit par cette distribution de charge en un point M situé à la distance r de l'origine O dans les deux cas : $r > R$ et $r < R$ (en utilisant le théorème de Gauss).

Exercice 18

On considère deux sphères concentriques (de même centre O) et de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) est chargé uniformément par une densité volumique de charges constante (ρ) (voir figure I-69) .

Le reste de l'espace (intérieur de la sphère de rayon R_1 et de volume extérieur à la sphère de rayon R_2) ne comporte aucune charge.

Calculer à l'aide du théorème de Gauss le champ électrique $\vec{E}$ à la distance r du centre.

Distinguer les trois cas : $x < R_1$, $R_1 < x < R_2$ et $x > R_2$.

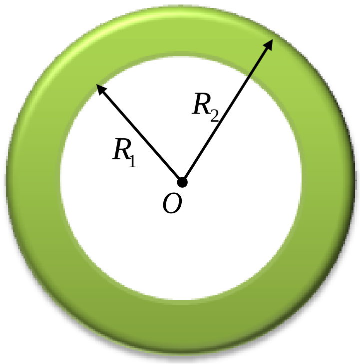


Figure I-69

Exercice 19

Une sphère S_1 de rayon R_1 chargée en volume de densité uniforme $\rho > 0$ est entourée d'une autre sphère conductrice creuse S_2 de rayon R_2 qui porte une charge $+Q$. En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique en tout point de l'espace ($r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$).

Exercice 20

Considérons une sphère de rayon R est chargée en volume avec densité volumique $\rho > 0$.

1) Déterminer les expressions du champ électrique $E(r)$ en un point M placé à une distance r du centre dans les deux cas : $r < R$ et $r > R$.

2) Représenter la l'allure de l'intensité du champ électrostatique dans les deux cas : $r < R$ et $r > R$.

Exercice 21

1) Quelle est la charge Q_1 d'une sphère métallique (A) de rayon $R_1 = 6cm$ lorsqu'elle est portée au potentiel $V_0 = 45kV$?

2) On entoure la sphère (A) par une autre sphère métallique creuse (B) concentrique, de rayons $R_2 = 12cm$ et $R_3 = 15cm$, initialement neutre et isolée.

a) Quelles sont les charges portées par (B) ?

b) En déduire les potentiels V_A et V_B des deux sphères.

c) Déterminer et représenter graphiquement le potentiel $V(r)$ et la somme du champ $E(r)$ en tout point *M* de l'espace, tel que *OM=r*.

3) La sphère (B) est reliée à la terre ($V_B = 0$). Quelle est le nouveau potentiel V_A' de la sphère (A) ?

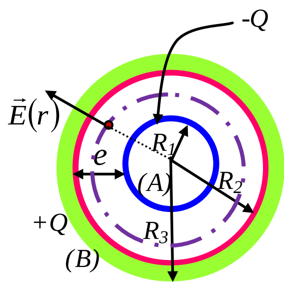


Figure I-70

Exercice 22

Soit un conducteur sphérique S_1 de centre O_1, de rayon R_1 et de potentiel V_1 constant. On met ce conducteur en présence d'un autre conducteur sphérique S_2 de centre O_2 et de rayon R_2 isolé de charge Q_2 soit $d = \left\| \overrightarrow{O_1O_2} \right\|$ tel que $d > R_1 + R_2$. On suppose que toute la charge de la sphère est concentrée en son centre. Trouver les expressions de Q_1 de S_1 et le potentiel V_2 de S_2.

Exercice 23

A/ Une sphère conductrice de rayon $R_1 = 9cm$ est portée au potentiel $V = 2850 Volts$.

1) Calculer sa capacité C.
2) Quelle est son énergie électrostatique E_P ?

B/ On considère un condensateur dont l'armature interne est constituée par la sphère précédente l'armature
externe ayant pour rayon $R_2 = 9{,}1cm$.

1) Calculer le champ entre les armatures.
2) Calculer la capacité C' du condensateur ainsi formé.
3) Quelle doit être la différence de potentiel V' entre les armatures, pour que l'énergie du condensateur soit la même que celle donc sphère conductrice.

Exercice 24

Soit le montage ci-contre. Initialement, les condensateurs C_1 et C_2 étaient non chargés et le condensateur : C_1 portait la charge Q_0.

On prendra $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

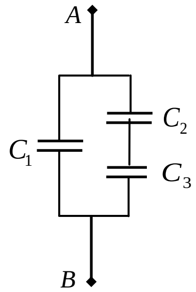


Figure I-71

A l'équilibre, déterminer la différence de potentiel (ddp ou la tension) $U_{AB} = V_A - V_B$ et les charges Q_1, Q_2 et Q_3 des trois condensateurs en fonction de C et Q_0 .

Exercice 25

Dans le montage de la figure (I-72), on donne :

$C_1 = 12\mu F$, $C_2 = C_4 = 4\mu F$, $C_3 = 5\mu F$, et $V_{AB} = 48V$.

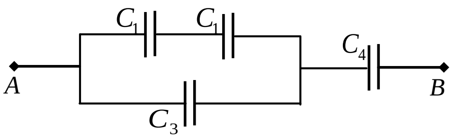


Figure I-72

1) Calculer la capacité équivalente C_{eq} des quartes condensateurs.

2) Calculer la charge Q_i de chaque condensateur et la différence de potentiel (la tension) U_i entre les armatures (i=1,2,3, et 4).

3) Calculer l'énergie électrique totale emmagasinée dans les condensateurs.

Exercice 26

Supposons que, dans la figure ci-contre (figure I-73), $C_1 = C_3 = 10\mu F$, que $C_2 = C_4 = 20\mu F$ et que $Q_2 = 30\mu C$, calculer :

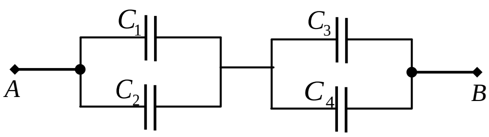


Figure I-73

1) la capacité équivalente C_{eq} entre A et B,

2) la charge de chacun des autres condensateurs,

3) la tension entre leurs armatures et

4) la tension U_{AB} que subit l'ensemble du système.

Exercice 27

Soit le branchement de condensateurs (voir la figure I-74).

Sachant que $U_{AB} = 30V$, $C_1 = C_3 = 50\mu F$, $C_2 = C_4 = 150\mu F$ et $C_5 = 50\mu F$.

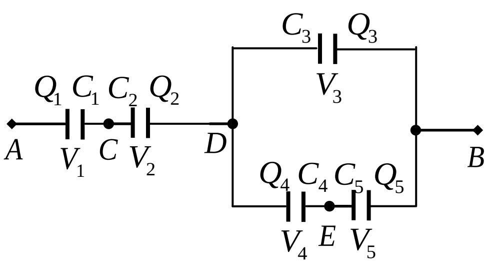


Figure I-74

1) Calculer la capacité équivalente C_{eq} .

2) Calculer la charge et la tension aux bornes des deux condensateurs C_3 et C_5 .

3) Calculer l'énergie totale emmagasinée.

Exercice 28

Soit le branchement de condensateurs comme montre la figure (I-75).

Sachant que $U_{DB} = 24V$, $C_1 = C_3 = 30\mu F$, $C_2 = C_4 = 15\mu F$ et $C_5 = 10\mu F$.

1) Calculer la capacité équivalente C_{eq} .

2) Calculer la différence de potentiel (ddp) U_{AB} si la charge au borne de C_1 ($Q_1 = 360\mu C$).

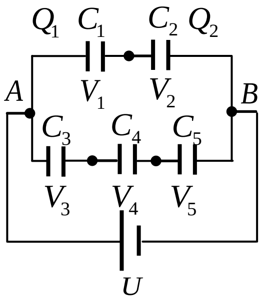


Figure I-75

3) Calculer la charge Q_3 et la ddp U_{AE} aux bornes du condensateur C_3 .

4) Calculer l'énergie totale emmagasinée.

Exercice 29

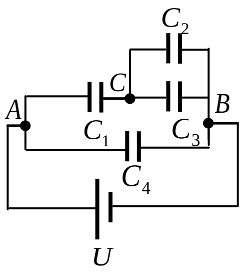


Figure I-76

Soit le branchement de condensateurs illustre dans la figure (I-76).

Sachant que : $U_{AB} = 90V$, $C_1 = C_4 = 4\mu F$, $C_2 = 6\mu F$ et $C_3 = 2\mu F$.

1) Calculer la capacité équivalente C_{eq} .

2) Calculer la charge Q_i et la différence de potentiel entre ses armatures.

3) Calculer l'énergie totale emmagasinée.

Exercice 30

Soit le branchement de condensateurs montré dans la figure (I-77).

Sachant que : $C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 2\mu F$, $C_3 = 6\mu F$ et $C_4 = C_5 = 0{,}5\mu F$.

1) Calculer la capacité C_6 , sachant que la capacité équivalente $C_{eq} = 1\mu F$.

2) Calculer les charges Q_2 , Q_6 et Q_{Totale} sachant que $Q_1 = 140\mu C$, $Q_3 = 240\mu C$, $Q_4 = 80\mu C$ et

$Q_5 = 70\mu C$.

3) Calculer l'énergie totale emmagasinée.

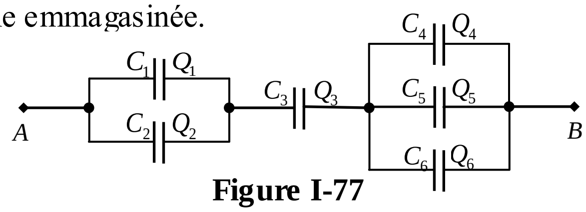


Figure I-77

Corrigés

Exercice 1

On a : $q_1 = 3q$, $q_2 = -2q$ et $q_3 = q$ avec $q > 0$.

Expression de la force électrostatique agissante sur une charge ponctuelle q_3

D'après le principe de superposition des forces :

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{O/B} + \vec{F}_{A/B}$$

$$\vec{F}_{O/B} = K\frac{q_O q_B}{r_{OB}^2}\vec{u}_O \ ; \ \vec{u}_O = \vec{j} \text{ et } r_{OB}^2 = 4$$

$$\vec{F}_{O/B} = K\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\vec{u}_A ; \ \vec{u}_A = -\vec{j} \text{ et } r_{AB}^2 = 4$$

$$\vec{F}_B = K\frac{3qq}{4}\vec{j} - K\frac{(-2q)q}{4}\vec{j}$$

Donc l'expression de la force électrostatique est :

$$\boxed{\vec{F}_B = \frac{5}{4}Kq^2\vec{j}}$$

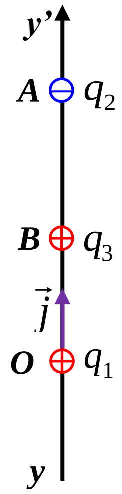


Figure I-78

Exercice 2

A/ Calcul de la force résultante $\vec{F}_A$

D'après le principe de superposition des forces:

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_A = \vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{C/A} + \vec{F}_{D/A}}$$

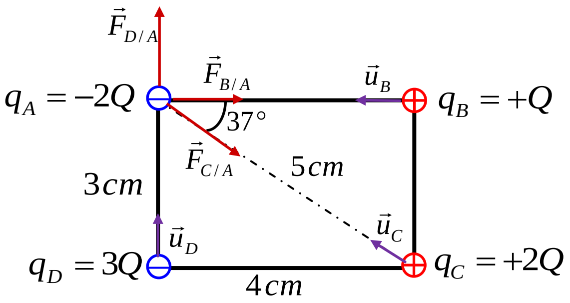


Figure I-79

$\vec{F}_{B/A} = K\frac{q_B q_A}{r_B^2}\vec{u}_B$	$\vec{u}_B = -\vec{i}$	$r_B^2 = 16.10^{-4}\, m^2$
$\vec{F}_{C/A} = K\frac{q_C q_A}{r_C^2}\vec{u}_C$	$\vec{u}_C = \cos(37°)\vec{i} - \sin(37°)\vec{j}$	$r_C^2 = 25.10^{-4}\, m^2$
$\vec{F}_{D/A} = K\frac{q_D q_A}{r_D^2}\vec{u}_D$	$\vec{u}_D = \vec{j}$	$r_D^2 = 9.10^{-4}\, m^2$

Avec : $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\, m/F$.

Donc la force résultante appliquée sur q_A est :

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_A = \left(364\vec{i} + 822\vec{j}\right)\mu N}$$

B/ La force électrostatique résultante exercée sur la charge de $3Q$

$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_B = \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{C/B}}$$

D'après le principe de superposition des forces:

$\vec{F}_{A/B} = K\dfrac{q_A q_B}{r_A^2}\vec{u}_A$ $\quad$ $\vec{u}_A = \cos(60°)\vec{i} - \sin(60°)\vec{j}$ $\quad$ $r_A^2 = a^2 = 9.10^{-4}\, m^2$

$\vec{F}_{C/B} = K\dfrac{q_C q_B}{r_C^2}\vec{u}_C$ $\quad$ $\vec{u}_C = \vec{i}$ $\quad$ $r_C^2 = a^2 = 9.10^{-4}\, m^2$

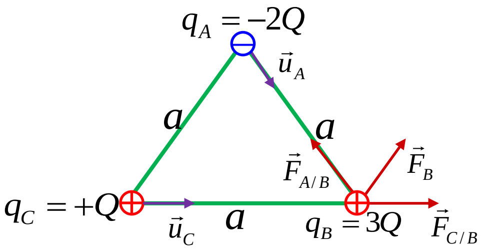


Figure I-80

Exercice 3

Soit la charge Q crée un champ électrostatique $\vec{E}(r)$ en point M de l'espace.

1) Expression du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ est :

$$\vec{E}(r) = \frac{K\,Q}{r^2}\vec{u}_r$$

2) Expression du potentiel électrostatique $V(r)$:

$$V(r) = \frac{K\,Q}{r}$$

3) Relation générale reliant un champ électrostatique $\vec{E}(r)$ et le potentiel électrostatique $V(r)$:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$$

4) Relation générale reliant un champ de force $\vec{F}$ et l'énergie potentielle associée :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$$

Exercice 4

1) Expression de l'énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 . q_2}{r}$$

2) Relation générale reliant un champ de force $\vec{F}$ et l'énergie potentielle associée :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P)$$

Exercice 5

On a : $q_1 = q$, $q_2 = 2q$ et $q_3 = -2q$ ($q > 0$).

Représentation graphiquement des vecteurs $\vec{E}_A, \vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ au point *p*.

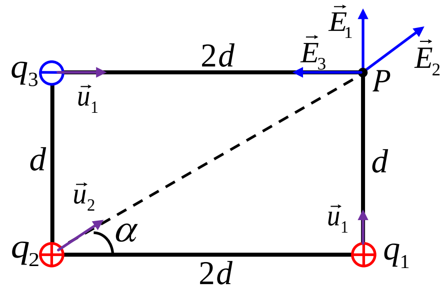


Figure I-81

1) Expression du vecteur champ électrique $\vec{E}(P)$

D'après le principe de superposition des champs :

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

$$\vec{E}_1 = K\frac{q_1}{r_1^2}\vec{u}_1 \;;\; \vec{u}_1 = \vec{j} \text{ et } r_1^2 = d^2$$

$$\vec{E}_1 = K\frac{q}{d^2}\vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{q_2}{r_2^2}\vec{u}_2 \;;\; \vec{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \text{ et } r_2^2 = 5d^2$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{\sqrt{2}q}{5d^2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_3 = K\frac{q_3}{r_3^2}\vec{u}_3 \;;\; \vec{u}_3 = \vec{i} \text{ et } r_3^2 = 4d^2$$

$$\vec{E}_C = -K\frac{q}{2d^2}\vec{i}$$

$$\vec{E}(P) = K\frac{q}{d^2}\vec{j} + K\frac{\sqrt{2}q}{5d^2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right) - K\frac{q}{2d^2}\vec{i}$$

Donc l'expression du champ est : $\boxed{\vec{E}(P) = K\frac{q}{d^2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{5} - \frac{1}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{5} + 1\right)\vec{j}\right]}$

2) Expression de la force appliquée sur une charge $q_4 = -q$ placée en P.

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}(P)}{q_4} \Rightarrow \vec{F}(P) = q_4\vec{E}(P)$$

Donc l'expression de la force est : $\boxed{\vec{F}(P) = -K\frac{q^2}{d^2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{5}+1\right)\vec{j}\right].}$

3) Position de la charge $q_5 = 2q$ pour que la force résultante appliquée sur q_4 soit nulle.

La force résultante appliquée sur q_4.

$$\vec{F} = \vec{F}_4 + \vec{F}_{5/4} = \vec{0}$$

$$\vec{F}_4 = -K\frac{q^2}{d^2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{5}+1\right)\vec{j}\right]$$

$$\vec{F}_{5/4} = -K\frac{2q^3}{r_5^2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{1}{2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\sqrt{2}}{5}+1\right)\vec{j}\right]$$

$$\vec{F} = \vec{F}_4 + \vec{F}_{5/4} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{2q}{r_5^2}$$

Donc la position de la charge q_5 est : $\boxed{r_5 = \sqrt{2q}\, d\,.}$

Exercice 6

On a : $q_A = q_B = q$ et $q_C = -q$ ($q > 0$).

1) Représentation graphiquement des vecteurs $\vec{E}_A, \vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ au point O.

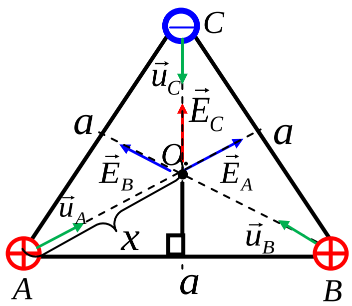


Figure I-82

2) Expression du vecteur champ $\vec{E}(P)$ créé par cette distribution de charges à l'origine O.

D'après le principe de superposition des champs :

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C$$

$$\vec{E}(P) = K\frac{q_A}{r_{OA}^2}\vec{u}_A + K\frac{q_B}{r_{OB}^2}\vec{u}_B + K\frac{q_C}{r_{OC}^2}\vec{u}_C$$

$$r_{OA} = r_{OB} = r_{OC} = x = \frac{a}{2}\Big/\cos(30°) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\vec{u}_A = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right),\;\; \vec{u}_B = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right) \text{ et } \vec{u}_C = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Donc l'expression du champ électrostatique est : $\boxed{\vec{E}_O = \frac{3Kq}{2a^2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + 3\vec{j}\right)}$

Exercice 7

A°)

1) Représenter graphiquement les vecteurs $\vec{E}_A, \vec{E}_B, \vec{E}_C$ et $\vec{E}_D$.

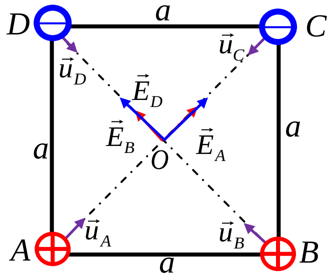


Figure I-83

2) Expression du vecteur champ électrique $\vec{E}_O$.

On a : $q_A = q_B = q$ et $q_C = q_D = -q$.

D'après le principe de superposition des champs :

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D$$

$$\vec{E}_A = K\frac{q_A}{r_{OA}^2}\vec{u}_A \ ; \ \vec{u}_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \text{ et } r_{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\vec{E}_A = K\frac{2q}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_B = K\frac{q_B}{r_{OB}^2}\vec{u}_B \ ; \ \vec{u}_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \text{ et } r_{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\vec{E}_B = K\frac{2q}{a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_C = K\frac{q_C}{r_{OC}^2}\vec{u}_C \ ; \ \vec{u}_C = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \text{ et } r_{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\vec{E}_C = -K\frac{2q}{a^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_D = K\frac{q_D}{r_{OD}^2}\vec{u}_D \ ; \ \vec{u}_D = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \text{ et } r_{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\vec{E}_D = K\frac{\sqrt{2}q}{a^2}\left(\vec{j} - \vec{i}\right)$$

$$\vec{E}_O = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D = 4\sqrt{2}K\frac{q}{a^2}\vec{j}$$

Donc l'expression du champ est : $\boxed{\vec{E}_O = 4\sqrt{2}K\frac{q}{a^2}\vec{j}}$

Exercice 8

1) Démonstration que l'expression de la surface élémentaire dS en cordonnées polaires (r,φ) est donnée par :

$$dS = rdrd\varphi$$

On a l'expression du vecteur vitesse en cordonnées polaires (r,φ) est définie par :

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{U}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{U}_\varphi$, alors le vecteur de déplacement en cordonnées polaires est : $d\vec{r} = dr\vec{U}_r + rd\varphi\vec{U}_\varphi$, donc : $dS = rdrd\varphi$.

2) Expression de la charge dq si la distribution est surfacique en coordonnées polaires (r,φ)

$dq = \sigma\, dS = \sigma\, rdrd\varphi$.

Exercice 9

Expression de la charge totale Q, si la distribution est :

1) linéique :

$Q = \lambda\, l$

2) surfacique :

$Q = \sigma\, S$

3) volumique :

$Q = \rho V = \rho\, \tau$

Exercice 10

On a la charge q est positive ; $\lambda > 0$

Distribution linéique, alors la charge élémentaire :

$$dq = \lambda\, dl$$

Expression du champ électrique $\vec{E}_O$:

Le champ élémentaire $d\vec{E}(O)$ crée par l'élément de charge dq :

$$d\vec{E}_O = \frac{K\, dq}{r^2}\vec{u}_r = \frac{K\, \lambda dl}{r^2}\vec{j}\ ;\ dE_x(O) = 0$$

$$dE_y(O) = d\vec{E}_O \sin\theta\, \vec{j} = \frac{K\, \lambda dl}{r^2}$$

$$dl = R\, d\theta \text{ et } r = R$$

$$\text{Alors : } dE_y(O) = \frac{K\, \lambda R \sin\theta\, d\theta}{R^2} = \frac{K\lambda \sin\theta\, d\theta}{R}$$

$$\text{D'où: } E_y(O) = \frac{K\lambda}{R}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$$

Donc : $\boxed{E_y(O)=\dfrac{2K\lambda}{R}}$

Donc l'expression du champ électrique $\vec{E}_O$ est :

$$\vec{E}_O=\frac{2K\lambda}{R}\vec{j}\,.$$

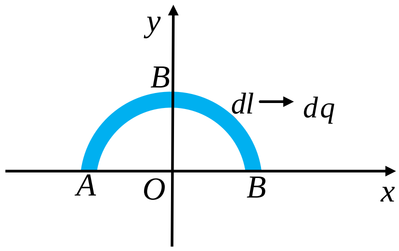


Figure I-84

Exercice 11

1) Calcul du potentiel crée au point M

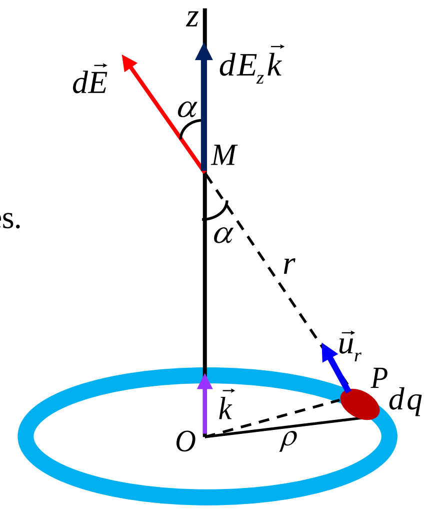


Figure I-85

Pour le point donné M , les grandeurs ρ , z , r sont constantes.

Partant de la figure ci-contre et en posant :

$$\sin\theta\approx\theta\approx d\theta=\frac{dl}{\rho}\ \Rightarrow\ dl=\rho d\theta \ \text{ car } \ \theta\le 10°.$$

$$dV=K\frac{dq}{r}\ \Leftrightarrow\ \int_{(C)}dV=K\int_0^{2\pi}\frac{\lambda dl}{r}.$$

Sur la figure on peut voir que : $r=\sqrt{\rho^2+z^2}$.

$$\int_{(C)}dV=K\int_0^{2\pi}\frac{\lambda dl}{r}\Leftrightarrow\int_{(C)}dV=K\int_0^{2\pi}\frac{\lambda\rho d\theta}{\sqrt{\rho^2+z^2}}=K\frac{\lambda\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$\boxed{V=\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}+C^{te}}\ \text{ soit }\quad K=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

2) Vecteur du champ au point M

Reste maintenant à déterminer le module du champ. Pour cela il suffit de dériver l'expression de V par rapport à z en exploitant la relation :

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}(V)\Rightarrow E=-\frac{dV}{dz}$$

$$\boxed{\vec{E}(M)=\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda\rho}{\sqrt[3]{\rho^2+z^2}}\vec{u}_r}$$

Exercice 12

Calcul du champ crée au point M

Pour le point donné M , les grandeurs ρ , z , r sont constantes.

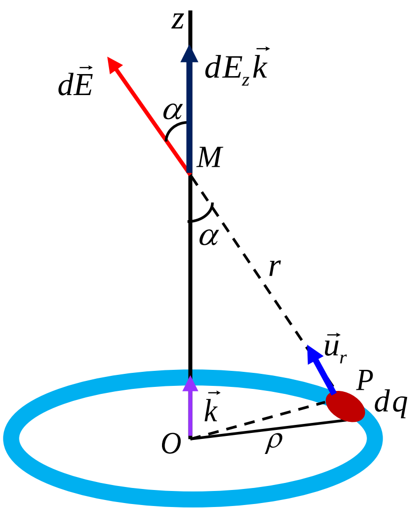


Figure I-86

Partant de la figure ci-contre et en posant

$$\sin\theta \approx \theta \approx d\theta = \frac{dl}{R} \Rightarrow dl = Rd\theta \text{ car } \theta \leq 10° \text{ et } r = \sqrt{R^2 + z^2}.$$

$$\vec{E}(M) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$$

Axe (Oz) est l'axe de symétrie, car $E_x = E_y = 0V/m$

Soit : $dq = \lambda dl$ et $\cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$

$$d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = K\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = K\frac{\lambda R d\theta}{r^2}\vec{u}_r \text{ et } K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

$$\vec{E}(M) = E_z\vec{k}$$

En déduire le potentiel crée au un point M est déduit du champ par intégration :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V(M)) = -\frac{dV}{dz}\vec{k} \Rightarrow dV(M) = -E(M)dz \Rightarrow \boxed{V(M) = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}} + C^{te}.}$$

Exercice 13

Le champ et potentiel créés par un disque.

Calcul du champ crée au point M.

La distribution présente une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz). Donc le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe (Oz) est porté par :

$\vec{E}(M) = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k}$ et l'axe est l'axe de symétrie (Oz), car $E_x = E_y = 0$.

Donc $\vec{E}(M) = E_z\vec{k}$.

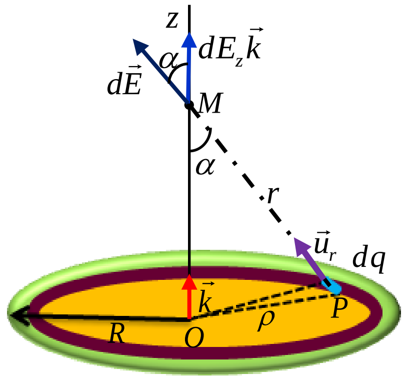


Figure I-87

La charge élémentaire dq crée en un point M de l'axe (Oz) du disque un champ élémentaire $d\vec{E}$ donné par :

$$d\vec{E} = K\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r \text{ avec } dS = \rho d\rho d\theta \text{ et } r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\text{et } dq = \sigma(P)dS$$

$$\text{d'où : } d\vec{E} = K\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{\rho^2+z^2}\vec{u}_r$$

$$dE_z = dE\cos\alpha = K\frac{\sigma\rho d\rho d\theta}{\rho^2+z^2}\cos\alpha \text{ et comme } \cos\alpha = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

$$\vec{E}(M) = E_z\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = \iint dE_z\vec{k} = \iint d\vec{E}\cos\alpha = K\sigma z\int_0^R \frac{\rho}{\sqrt[3]{\rho^2+z^2}}d\rho\int_0^{2\pi} d\theta\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\vec{k}.}$$

En déduire le potentiel crée au un point M est déduit du champ par intégration :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}(V(M)) = -\frac{dV}{dz}\vec{k} \Rightarrow \boxed{V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[z - \sqrt{R^2+z^2}\right]}.$$

Exercice 14

A/ **Surface de Gauss** pour les deux différents systèmes :

a) ***Système disque*** $\Rightarrow$ ***Surface de Gauss*** *est une surface d'un disque de rayon* x ; $\boxed{S_G = \pi x^2}$

.

b) *Système cylindrique* $\Rightarrow$ ***Surface de Gauss*** *est une surface d'un cylindre de rayon* x ;
$\boxed{S_G = 2\pi x h.}$

c) *Système sphérique* $\Rightarrow$ ***Surface de Gauss*** *est une surface d'une sphère de rayon* x ;
$\boxed{S_G = 4\pi x^2.}$

B/ Un disque de rayon R est chargé en surface avec densité surfacique σ positive.

1) Expressions du champ $E(x)$ dans les deux cas $x < R$ et $x > R$:

Théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \dfrac{\sum q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q_{\text{int}.S.Gass}}{\varepsilon_0}$.

Le champ électrostatique $E(r)$ à partir de l'équation précédente dépend de la possibilité de trouver une surface fermée ($S.G$) qui permet d'extérieur $E(x)$.

Cas $x < R$ (à l'intérieur d'un disque de rayon R):

Surface de Gauss considérée : disque de rayon x

La surface d'une disque de rayon x : $S_G = \pi x^2$

Flux du champ électrostatique :

Théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \dfrac{Q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}} = \sigma S = \sigma \pi x^2}$$

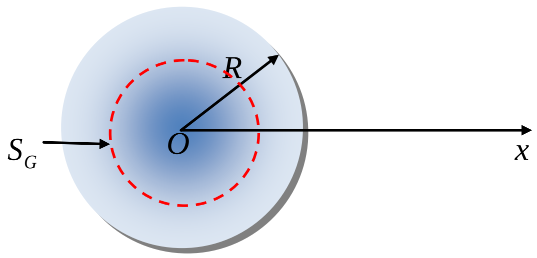


Figure I-88 : *cas* $x < R$.

Soit : $E(x)\pi x^2 = \dfrac{\sigma \pi x^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(x) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

Cas $x > R$ (à l'extérieur d'un disque de rayon R):

La surface d'une disque de rayon x : $S_G = \pi x^2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}} = \sigma S = \sigma \pi R^2}$$

Soit : $E(x)\pi x^2 = \frac{\sigma\,\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(x) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}}$

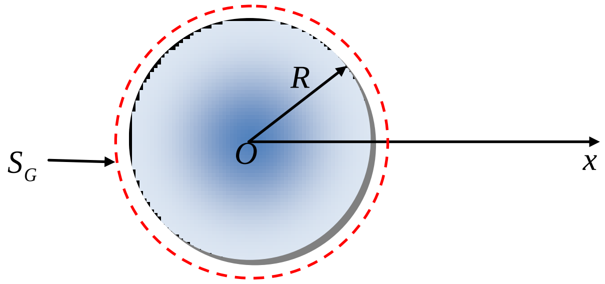


Figure I-89 : *cas* $x > R$.

L'allure de l'intensité du champ électrostatique dans les deux cas : $x < R$ et $x > R$

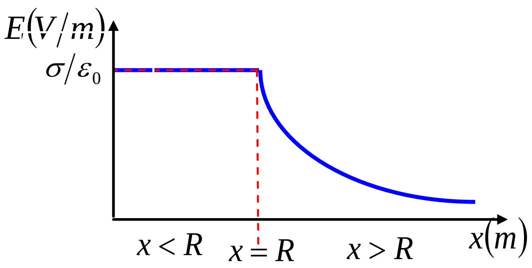


Figure I-90 : *représentation graphique du champ.*

Exercice 15

Expressions du champ dans les deux cas $r < R$ et $r > R$:

Le théorème de Gauss : $\Phi = \frac{\sum q_{int.S.Gauss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int.S.Gauss}}{\varepsilon_0}$

Le champ électrostatique $E(r)$ à partir de l'équation précédente dépend de la possibilité de trouver une surface fermée ($S.G$) qui permet d'extérieur $E(r)$ (ou plutôt $E(r)$ de l'intégrale).

Pour $r < R$ (à l'intérieur d'un cylindre de rayon R) :

Surface de Gauss considérée : cylindre de rayon r.

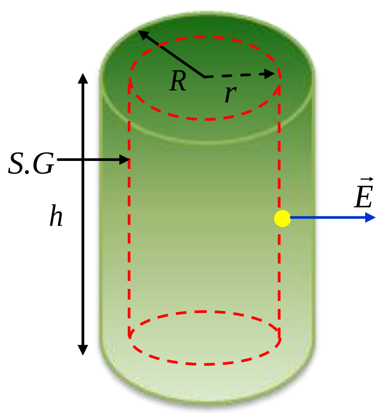


Figure I-91 : *cas* $r < R$.

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}} = \rho V = \rho \pi r^2 h}$$

$$\text{Soit : } E(r)2\pi rh = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r}$$

.

Pour $r > R$ (à l'extérieur d'un cylindre de rayon R):

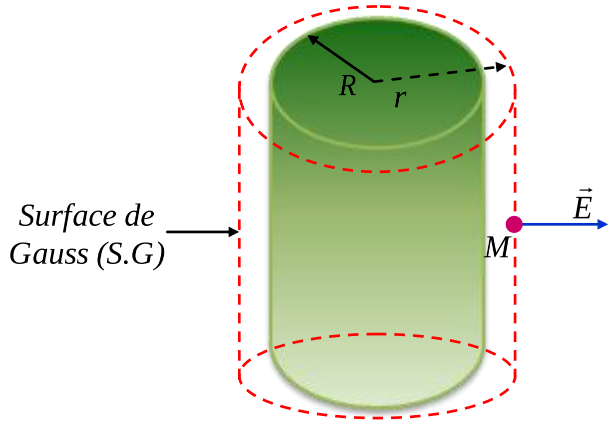


Figure I-92 : *cas* $r > R$.

Surface de Gauss considérée : cylindre de rayon r

La surface d'un cylindre de rayon r *:* $\boxed{S_G = 2\pi rh}$

Flux du champ électrostatique :

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$$

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}} = \rho V = \rho \pi R^2 h\,.}$$

$$\text{Soit : } E(r)S_G = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r)2\pi rh = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

On a le système d'un cylindre chargé on volume (on suppose $\rho > 0$).

$$E(r)2\pi rh = \frac{\pi R^2 h\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

Exercice 16

Expressions du champ $E(r)$ dans les trois cas $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$:

Le théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{it}.S.Gass}}{\varepsilon_0}$.

Le champ électrostatique $E(r)$ à partir de l'équation précédente dépend de la possibilité de trouver une surface fermée ($S.G$) qui permet d'extérieur $E(r)$ (ou plutôt $E(r)$ de l'intégrale).

On a un cylindre de rayon R_1 chargé en volume avec une densité volumique ρ constante.

Pour $r < R_1$ (à l'intérieur d'un cylindre de rayon R_1) :

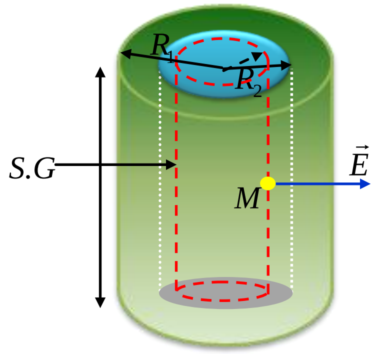


Figure I-93 : *cas* $r < R_1$.

Surface de Gauss considérée : cylindre de rayon r.

La surface d'un cylindre de rayon r *:* $\boxed{S_G = 2\pi r h}$

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}.S.Gass} = \rho V = \rho \pi r^2 h}$$

Théorème de Gauss : $E(r).S_G = \dfrac{\sum q_{\text{int}.S.Gass}}{\varepsilon_0}$; si $\vec{E} \,//\, dS.\vec{n}$

Soit : $E(r).2\pi rh = \dfrac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r}$

Pour $R_1 < r < R_2$ (à l'extérieur d'un cylindre de rayon R_1):

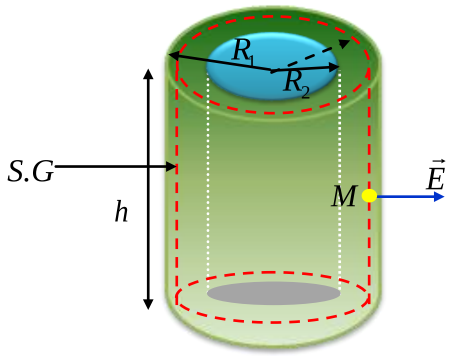


Figure I-94 : *cas* $R_1 < r < R_2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}.S.Gass} = \rho V = \rho \pi R_1^2 h}$$

On a, le système d'un cylindre chargé on volume (on suppose $\rho > 0$).

$$E(r).2\pi rh = \frac{\pi R^2 h \rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

On a deux cylindres concentriques de rayon R_1 et R_2 chargé en volume avec une densité volumique ρ constant et l'autre chargé en surface avec une densité surfacique σ constant, respectivement.

Pour $r > R_2$ (à l'extérieur d'un cylindre de rayon R_2) :

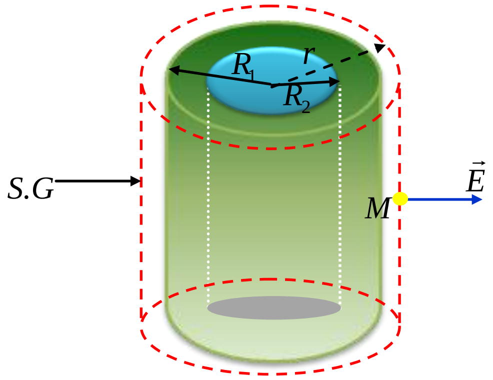


Figure I-95 : *cas* $r > R_2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int.}S.Gasss} = \rho V + \sigma S = \rho\pi R_1^2 h + 2\pi\sigma R_2 h}$$

Soit : $E(r).S_G = \dfrac{\sum q_{\text{int.}S.Gasss}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E(r) 2\pi rh = \dfrac{\pi h\left(\rho R_1^2 + 2\sigma R_2\right)}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho\left(\rho R_1^2 + 2\sigma R_2\right)}{2\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

Exercice 17

1) Surface de Gauss pour les deux différents systèmes :

a) Système cylindrique $\Rightarrow$ *Surface de Gauss est une surface d'un cylindre de rayon* r ; $S_G = 2\pi r h$.

b) Système sphérique $\Rightarrow$ *Surface de Gauss est une surface d'une sphère de rayon* r ; $S_G = 4\pi r^2$.

2) Expressions du champ dans les deux cas $r > R$ et $r < R$:

Le théorème de Gauss : $E(r).S_G = \dfrac{\sum q_{\text{int}\ .S.Gass}}{\varepsilon_0}$.

Pour $r < R$ (à intérieur de la sphère de rayon *R*) :

Surface de Gauss considérée : sphère de rayon r

La surface d'une sphère de rayon r *:* $S_G = 4\pi r^2$.

Théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \dfrac{Q_{int.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$.

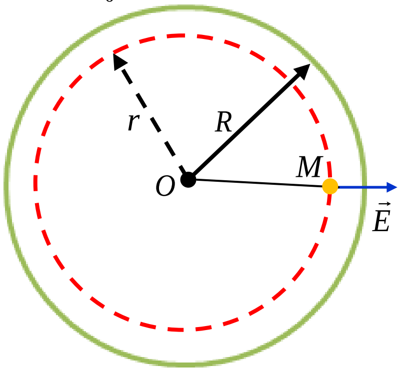


Figure I-96 : *cas* $r < R$.

Charge intérieure de la surface de Gauss : $\boxed{\sum q_{int} = 0}$

Soit : $E(r)4\pi r^2 = \dfrac{0}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \boxed{E(r) = 0V/m}$

Pour $r > R$ (à l'extérieur d'une sphère de rayon R):

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{int} = \sigma S = \sigma 4\pi R^2}$$

Soit : $E(r)4\pi r^2 = \dfrac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}}$

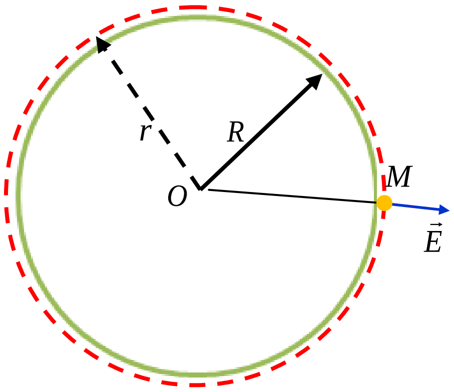


Figure I-97 : *cas* $r > R$.

Exercice 18

Expressions des champs électrostatiques $\vec{E}(r)$ dans les trois cas.

pour déterminer les expression des champs en utilisant théorème de Gauss.

Enoncé du théorème de Gauss : *le flux du champ électrostatique* $\vec{E}(r)$ *sortant à travers toute surface fermée est égal à la charge contenue dans le volume délimité par la surface fermée, divisé par la permittivité du vide* ε_0 *, est donné par :*

$$\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{int.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$$

Surface de Gauss considérée est une sphère de rayon x, donc la surface d'une sphère de rayon x :

$$S_G = 4\pi x^2.$$

Pour $r < R_1$ (à l'intérieur de la sphère de rayon R_1) :

D'après théorème de Gauss :

$$\boxed{E\,S_G = \frac{\sum q_{int.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int.S.Gasss}}{\varepsilon_0}}$$

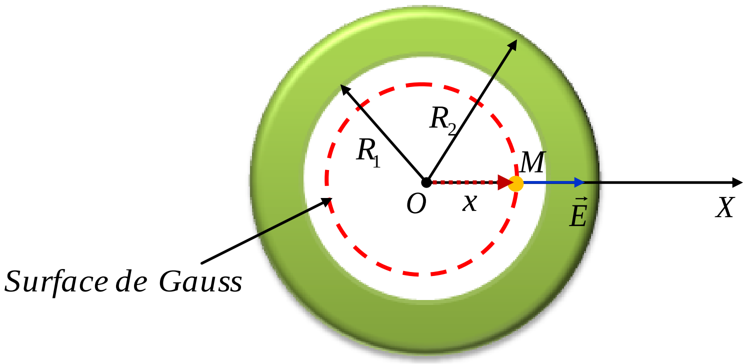


Figure I-98 : *cas* $x < R_1$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $x < R_1$:

$$\boxed{Q_{int.S.Gasss} = 0C}$$

Soit : $E(x)4\pi x^2 = \dfrac{0}{\varepsilon_0} = 0 \;\Rightarrow E(x) = 0V/m.$

Pour $R_1 < x < R_2$:

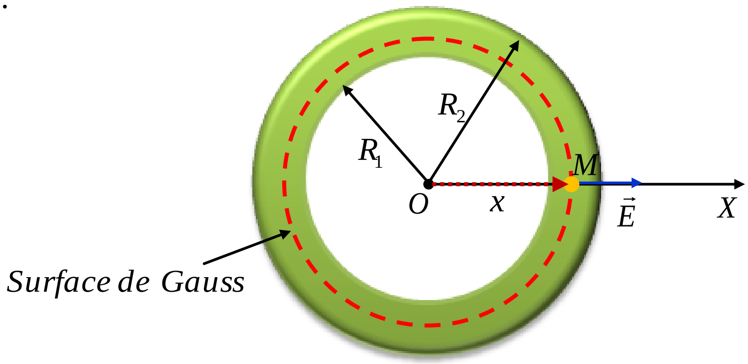


Figure I-99 : *cas* $R_1 < x < R_2$.

Charge intérieure de la surface de Gauss dans le cas $R_1 < x < R_2$:

$$Q_{int.S.Gasss} = \sigma S + \rho V \Leftrightarrow Q_{int.S.Gasss} = 4\pi\sigma R_1^2 + \frac{4}{3}\pi\rho x^3.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q_{int.S.Gasss} = 4\pi\left(\sigma R_1^2 + \frac{\rho x^3}{3}\right)}$$

Soit : $E(x)4\pi x^2 = \dfrac{4\pi\left(\sigma R_1^2 + \dfrac{\rho x^3}{3}\right)}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow E(x) = \dfrac{\sigma R_1^2 + \dfrac{\rho x^3}{3}}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{E(x)=\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}+\frac{\rho}{3\varepsilon_0}x}.$$

Pour $x > R_2$ (à l'extérieur d'une sphère de rayon R_2):

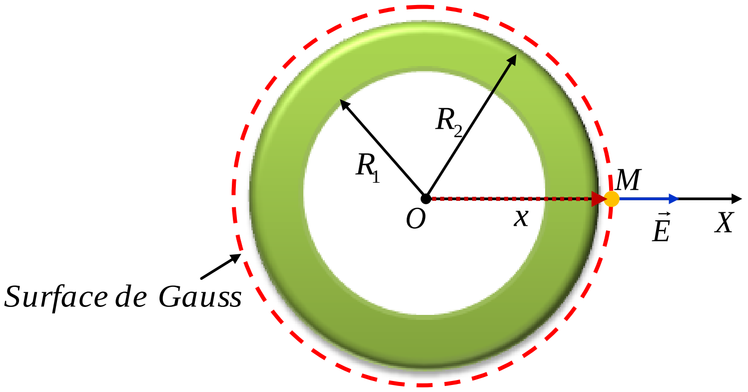


Figure I-100 : *cas* $x > R_2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $x > R_2$:

$$Q_{\text{int}.S.Gasss}=\sigma S+\rho V \Leftrightarrow Q_{\text{int}.S.Gasss}=4\pi\sigma R_1^2+\frac{4}{3}\pi\rho(R_2-R_1)^3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q_{\text{int}.S.Gasss}=4\pi\left(\sigma R_1^2+\frac{\rho(R_2-R_1)^3}{3}\right)}$$

Soit : $E(x)4\pi x^2=\dfrac{4\pi\left(\sigma R_1^2+\dfrac{\rho(R_2-R_1)^3}{3}\right)}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E(x)=\dfrac{\left(\sigma R_1^2+\dfrac{\rho(R_2-R_1)^3}{3}\right)}{\varepsilon_0}\dfrac{1}{x^2}}$

Exercice 19

1) Expressions des champs électrostatiques $\vec{E}(r)$ dans les trois cas :

Pour déterminer les expressions des champs en utilisant théorème de Gauss.

La surface de Gauss considérée comme une sphère de rayon r est donnée par:

$$S_G=4\pi r^2.$$

Pour $r < R_1$ (à l'intérieur de la sphère de rayon R_1) :

D'après théorème de Gauss on a : $E S_G=\dfrac{\sum q_{\text{int}.S.Gass}}{\varepsilon_0}=\dfrac{Q_{\text{int}.S.Gass}}{\varepsilon_0}$

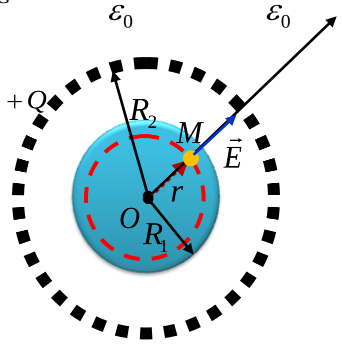


Figure I-101 : *cas* $r < R_1$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r < R_1$:

$$\boxed{Q_{\text{int}.S.Gasss} = \rho V = \frac{4\pi}{3}\rho r^3}$$

$$\text{Soit : } E(r)4\pi r^2 = \frac{\frac{4\pi}{3}\rho r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r}$$

Pour $R_1 < r < R_2$:

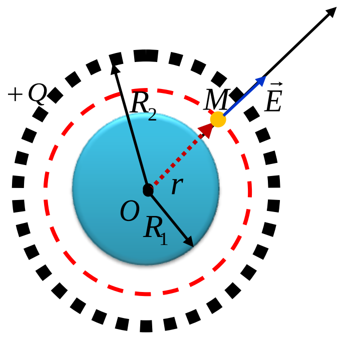


Figure I-102 : *cas* $R_1 < r < R_2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $R_1 < r < R_2$:

$$\boxed{Q_{\text{int}.S.Gasss} = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3}$$

$$\text{Soit : } E(r)4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi \rho R_1^3}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$$

Pour $r > R_2$ (à l'extérieur d'une sphère de rayon R_2) :

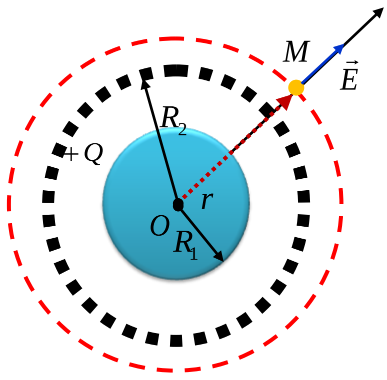


Figure I-103 : *cas* $r > R_2$.

Charge intérieure à la surface de Gauss dans le cas $r > R_2$:

$$Q_{\text{int}.S.Gasss} = \rho V + \sigma S \Leftrightarrow \boxed{Q_{\text{int}.S.Gasss} = \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3 + \sigma \pi R_2^2}$$

$$\text{Soit : } E(r)4\pi r^2 = \frac{\sigma \pi R_2^2 + \frac{4}{3}\pi\rho R_1^3}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E(r) = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$$

1) L'allure de l'intensité du champ électrostatique dans les trois cas :

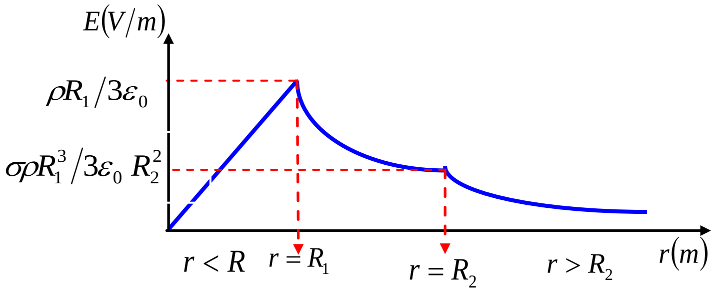


Figure I-104 : *représentation graphique du champ* $E(r)$.

3) Expressions des potentiels électrostatiques $V(r)$ dans les trois cas :

Le potentiel en M se déduit de $E(r)$ par :

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V) \Rightarrow dV = -E(r)dr$$

Pour $r > R_2$ (à l'extérieur de la sphère de rayon R_2):

$$\text{D'où : } V(r) = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\int\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_1$$

Lorsque: $r \to +\infty$ $V(r) \to 0$ alors $C_1 = 0$.

$$\text{Donc : } \boxed{V(r) = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}}$$

Pour $R_1 < r < R_2$:

$$V(r) = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\int\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2$$

Pour déterminer le constant C_2 en utilisant la continuité du potentiel à l'interface

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\rho R_1^3 + \sigma R_2^2\right)}{\varepsilon_0} - \frac{\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{V(r) = \frac{4\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}}$$

Pour $r < R_1$ (à l'intérieur de la sphère de rayon R_1) :

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2 + C_3$$

Pour déterminer le constant C_3 en utilisant la continuité de potentiel à l'interface

$$\frac{4\rho R_1^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r}+\frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r^2+C_3 \Rightarrow \frac{\rho R_1^2}{\varepsilon_0}+\frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{V(r)=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{3}r^2+\rho R_1^2+\sigma R_2^2\right)}$$

4) L'allure du potentiel électrostatique dans les trois cas :

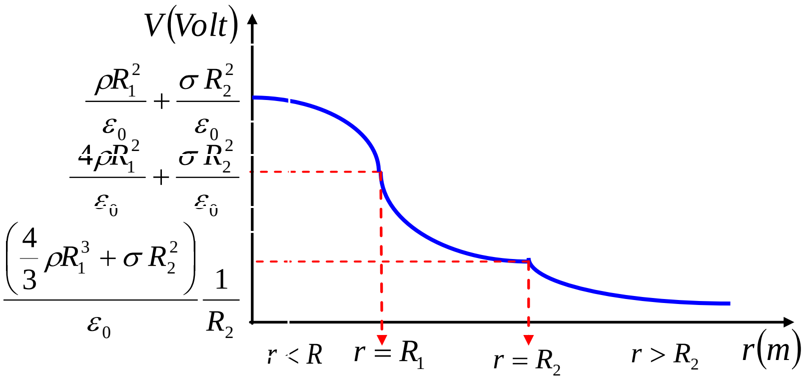


Figure I-105 : *représentation graphique du potentiel* $V(r)$.

Exercice 20

1) Expressions du champ dans les deux cas $r < R$ et $r > R$:

Le théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \frac{\sum q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}.S.Gass}}{\varepsilon_0}$.

Le champ électrostatique $E(r)$ à partir de l'équation précédente dépend de la possibilité de trouver une surface fermée ($S.G$) qui permet d'extérieur $E(r)$ (ou plutôt $E(r)$ de l'intégrale).

Pour $r < R$ (Intérieur de la sphère de rayon R) :

Surface de Gauss considérée : sphère de rayon r

La surface d'une sphère de rayon r : $S_G = 4\pi r^2$

Flux du champ électrostatique :

Théorème de Gauss : $\Phi = \oiint_{S.G} \vec{E}.dS.\vec{n} = \frac{Q_{\text{int}.S.Gasss}}{\varepsilon_0}$

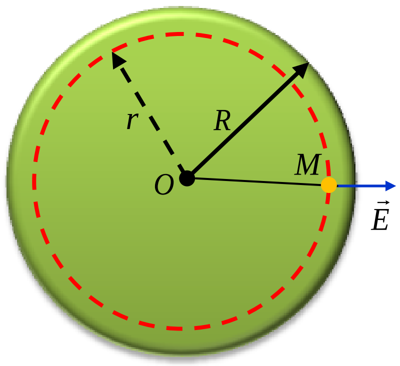


Figure I-106 : *cas* $r < R$.

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}} = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho r^3}$$

Soit : $E(r)4\pi r^2 = \dfrac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r}$

Pour $r > R$ (à l'extérieur d'une sphère de rayon R) :

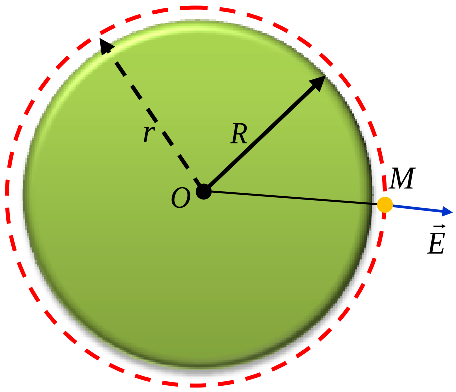


Figure I-107 : *cas* $r > R$.

Charge intérieure à la surface de Gauss :

$$\boxed{\sum q_{\text{int}} = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3}$$

Soit : $E(r).4\pi r^2 = \dfrac{\frac{4}{3}\pi\rho R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}}$

5) Allure de l'intensité du champ dans les deux cas $r < R$ et $r > R$:

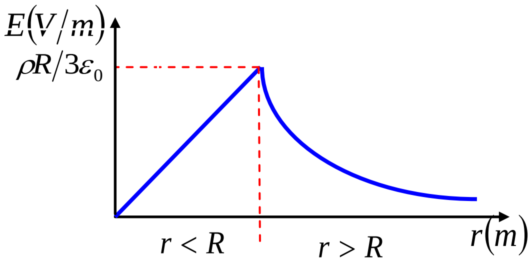


Figure I-108 : *représentation graphique du champ* $E(r)$.

Exercice 21

On a : $R_1 = 6cm$, $V_0 = 45kV$, $R_2 = 12cm$ et $R_3 = 15cm$.

1) Charge Q_1 d'une sphère métallique (A)

La capacité de la sphère **(A)** est donnée par :

$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$, A.N : $C_1 = 4\pi \times 8.82 \times 10^{-12} \times 6 \times 10^{-2} = 6{,}67 pF$.

Donc, la charge : $Q_1 = C_1 V_0$, A.N : $Q_1 = 6{,}67 \times 10^{-12} \times 45 \times 10^3 = 0{,}3 \mu F$

2/a) Charges portées par (B)

Par l'influence totale entre (A) et (B) :

* la surface interne de (B) prend la charge $-Q$.
* la surface externe prend la charge $+Q$.

2/b) Potentiels V_A et V_B des deux sphères

On a : $V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$, alors $V_A = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{KQ_1}{R_2} + \frac{KQ_1}{R_3} = 40{,}5 kV$, avec $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

$$V_B = \frac{KQ_1}{R_3} = \frac{KQ_1}{R_1}\frac{R_1}{R_3} = 18kV \text{ , car } V(r) = \frac{KQ_1}{r} \text{ et } V(\infty) = 0$$

2/c) Potentiel $V(r)$ et champ $E(r)$

Pour $0 < r < R_1$: $V(r) = V_A = 40{,}5 kV$ et $\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow \vec{E}(r) = \vec{0}$.

Pour $R_1 < r < R_2$: en appliquant le théorème de Gauss pour déterminer le champ $E(r)$.

$E\,S_G = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$; $S_G = 4\pi r^2$ surface d'une sphère, alors $E\,4\pi r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$

$$\text{Donc, } \vec{E}(r) = \frac{Q_1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{U}_r = \frac{KQ_1}{r^2}\vec{U}_r$$

$$\text{D'où : } V(r) = \frac{KQ_1}{r} + C_1 \text{ , car } \vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V)$$

Pour déterminer la constante de l'intégrale C_1 en utilisant la continuité de potentiel V.

La discontinuité pour $r = R_1$ s'écrit : $V(R_1) = V_A$

$$V(r = R_1) = \frac{KQ_1}{R_1} + C_1 = V_A \Rightarrow C_1 = V_A - V_0 = -4{,}5 kV \text{ , donc : } V(r) = \frac{KQ_1}{r} - 4{,}5$$

Pour $R_2 < r < R_3$: le conducteur est équipotentiel, soit :

$$V(r) = V(R_2) = V(R_3) = V_B = 18kV \text{ et } \vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow \vec{E}(r) = \vec{0}.$$

Pour $r > R_3$: on obtient de même par le théorème de Gauss : $\vec{E}(r) = \frac{KQ_1}{r^2}\vec{U}_r$

D'où : $V(r) = \frac{KQ_1}{r} + V_2$, car $\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V)$ et $V(\infty) = 0$ alors $V_2 = 0$.

Donc : $V(r) = \frac{KQ_1}{r}$

Discontinuité de champ $\vec{E}(r)$ au passage des surfaces des conducteurs :

Surface $r = R_1$ $\quad E(r < R_1) = 0 \qquad E(r = R_1) = \frac{KQ_1}{R_1^2} = 750 kV/m$

Surface $r = R_2$ $\quad E(r < R_2) = \frac{KQ_1}{R_2^2} = \frac{KQ_1}{R_1^2}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = 187{,}5\, kV/m \qquad E(r = R_2) = 0$

Surface $r = R_3$ $\quad E(r < R_3) = 0$

$$E(r = R_1) = \frac{KQ_1}{R_3^2} = \frac{KQ_1}{R_1^2}\left(\frac{R_1^2}{R_3^2}\right) = 120 kV/m$$

Représentation graphiques de $V(r)$ et $E(r)$

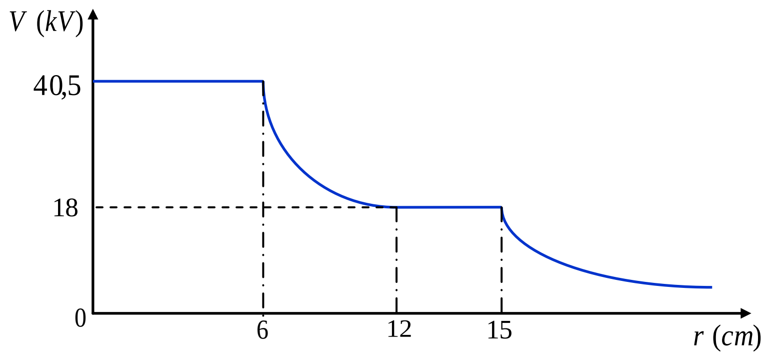


Figure I-109 : *variation du potentiel en fonction de r***.**

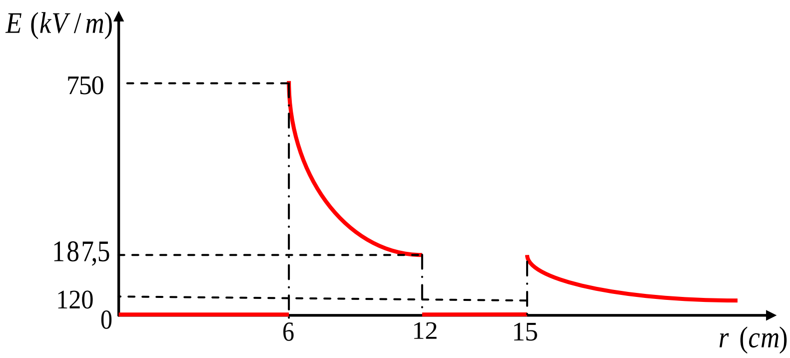


Figure I-110 : *variation du champ en fonction de r.*

3) La sphère (B) est reliée à la terre ($V_B = 0$), elle perd sa charge extérieure $+Q_1$. le potentiel V_A' de la sphère (A) devient : $V_1' = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{KQ_1}{R_2} = V_0\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$

Donc, $V_1' = 22{,}5kV$

Exercice 22

Expressions de Q_1 de S_1 et le potentiel V_2 de S_2

Les charges de Q_1 et Q_2 sont non nulles, alors :

Avant l'influence : $V_1 = \frac{KQ_1}{R_1}$ et $V_2 = \frac{KQ_2}{R_2}$

Après l'influence : $V_1' = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{d}$ et $V_2' = \frac{KQ_2}{R_2} + \frac{KQ_1}{d}$

Par l'influence totale : $V_1 = V_1' \Leftrightarrow V_1 = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{KQ_2}{d}$

$$\Rightarrow \frac{KQ_1}{R_1} = V_1 - \frac{KQ_2}{d}$$

$$\Rightarrow Q_1 = R_1\left(\frac{V_1}{K} - \frac{Q_2}{d}\right)$$

$$V_2' = \frac{KQ_2}{R_2} + \frac{KQ_1}{d} \Leftrightarrow V_2' = \frac{KQ_2}{R_2} + \frac{KR_1}{d}\left(\frac{V_1}{K} - \frac{Q_2}{d}\right)$$

$$\Rightarrow V_2' = \frac{R_1}{d}V_1 + K\left(\frac{1}{R_2} - \frac{R_1}{d^2}\right)Q_2$$

Exercice 23

A/

On a : $R_1 = 9cm$ et $V = 2850 Volts$

1) Calcul de la capacité C

La capacité de la sphère est donnée par : $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$

$$\text{A.N : } C = 4\pi \times 8.82 \times 10^{-12} \times 9 \times 10^{-2} = 10^{-11} F$$

2) Energie électrostatique E_P

La énergie électrostatique est donnée par : $E_P = \frac{1}{2}CV^2$

$$\text{A.N : } E_P = \frac{1}{2}10^{-11} \times (2850)^2 = 4{,}061.10^{-5}\ J$$

B/

On a : $R_2 = 9{,}1cm$.

1) Calcul du champ entre les armatures

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow E = -\frac{\Delta V}{\Delta R} = \frac{V_1 - V_2}{R_2 - R_1} = \frac{V}{R_2 - R_1} = 2{,}86.10^4 \ V/m$$

2) Calcul de la capacité $C^{'}$ du condensateur sphérique

D'après le théorème de Gauss : $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{KQ}{r^2}$ avec $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{grad}(V) \Leftrightarrow \frac{KQ}{r^2} = -\frac{dV}{dr}$$

$$\Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = KQ\int_{R_1}^{R_2}\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr$$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = KQ\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow V_1 - V_2 = KQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta V = KQ\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V}.$$

$$\Delta V = KQ\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \Leftrightarrow \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{K}\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right) \text{et } C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} = \frac{\varepsilon_0 S}{R_2 - R_1}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\text{, donc : } C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

A.N : $C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi \times 8{,}82 \times 10^{-12}\left[\frac{(9 \times 9{,}1).10^{-4}}{(9{,}1 - 9).10^{-2}}\right]$ $\qquad C = 9{,}1.10^{-11}\ F$.

3) Calcul de la différence de potentiel $V^{'}$

$E_P^{'} = \frac{1}{2}C'V'^2 = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow V' = V\sqrt{\frac{C}{C'}}$ $\qquad$ A.N : $V' = 2850\sqrt{\frac{10^{-11}}{9{,}1.10^{-11}}} = 299{,}80 Volts$.

Exercice 24

On a : $Q_1 = Q_0$ et $C_1 = C_2 = C_3 = C$

La différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ en fonction de C et Q_0

$$Q_0 = C_1 U_1 = CU_{AB} \Rightarrow U_{AB} = \frac{Q_0}{C}.$$

Les charges Q_1, Q_2 et Q_3 des trois condensateurs en fonction de C et Q_0

$Q_2 = Q_3 \Leftrightarrow C_2 U_2 = C_3 U_3$

De plus, on a : $C_1 = C_2 = C_3 = C$, alors : $U_2 = U_3$

On a le système des équations suivant:

$$\begin{cases} U_2 + U_3 = U_{AB} \\ C_2 U_2 = C_3 U_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_2 + U_3 = U_{AB} \\ U_2 = U_3 \end{cases} \Rightarrow 2U_2 = U_{AB} \Rightarrow U_2 = \frac{U_{AB}}{2} = \frac{Q_0}{2C}$$

Donc, $Q_2 = Q_2 = C_2 U_2 = C \frac{Q_0}{2C} = \frac{Q_0}{2}$

Exercice 25

On a les données suivantes : $C_1 = 12\mu F$, $C_2 = C_4 = 4\mu F$, $C_3 = 5\mu F$, et $V_{AB} = 48V$.

1) Calcul de la capacité équivalente C_{eq}

Capacité équivalente du montage de la figure 2.

C_1 et C_2 sont en série:

$$C'_{eq} = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} \quad .$$

A.N : $C'_{eq} = \dfrac{12\times10^{-6} \times 4\times10^{-6}}{(12+4)\times10^{-6}} = 3\times10^{-6}$. $C'_{eq} = 3\mu F$

C_3 // C'_{eq}:

$$C''_{eq} = C_3 + C'_{eq} .$$

A.N : $C''_{eq} = 5\times10^{-6} + 3\times10^{-6} = 8\times10^{-6}$. $C''_{eq} = 8\mu F$

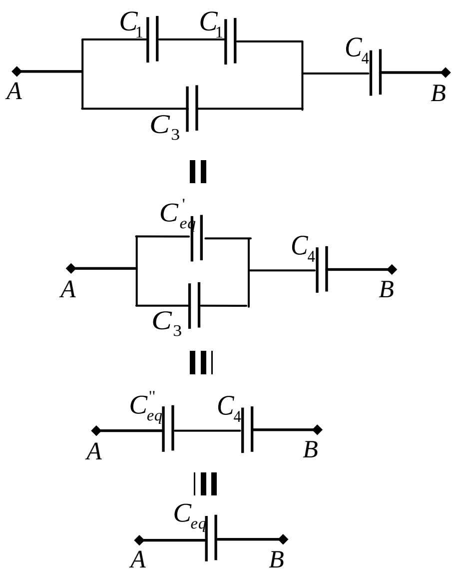


Figure I-111

C''_{eq} et C_4 sont en série :

$$C_{eq} = \frac{C''_{eq} \times C_4}{C''_{eq} + C_4} .$$

A.N : $C_{eq} = \dfrac{8\times10^{-6} \times 4\times10^{-6}}{(8+4)\times10^{-6}} = 2{,}66\times10^{-6}$

Donc la capacité équivalente du montage de la figure 3 est : $C_{eq} = 2{,}66\mu F$

2) Calcul de la charge Q_i et la tension U_i

Puisque C''_{eq} et C_4 sont en série, on a le système des équations suivant:

$$\begin{cases} U_3 + U_4 = 48 \\ C''_{eq} U_3 = C_4 U_4 \end{cases} \quad \text{A.N :} \begin{cases} U_3 + U_4 = 48 \\ 8U_3 = 4U_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_3 = 16V \\ U_4 = 32V \end{cases}$$

Calcul des charges Q_3 et Q_4 .

$$\begin{cases} Q_3 = C_3 U_3 \\ Q_4 = C_4 U_4 \end{cases} \quad \text{A.N :} \begin{cases} Q_3 = 5\times 16 \\ Q_4 = 4\times 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_3 = 80\,\mu C \\ Q_4 = 128\,\mu C \end{cases}$$

Puisque C_1 et C_2 sont en série, alors : $Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow C_1 U_1 = C_2 U_2$; et par définition $Q_1 = C_1 U_1$.

$$\begin{cases} U_1 + U_2 = U_3 \\ C_1 U_1 = C_2 U_2 \end{cases} \quad \text{A.N :} \begin{cases} U_1 + U_2 = 16 \\ 12\times U_1 = 4\times U_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = 4V \\ U_2 = 12V \end{cases}$$

Calcul des charges Q_1 et Q_2 .

$$\begin{cases} Q_1 = C_1.U_1 \\ Q_2 = C_2.U_2 \end{cases} \quad \text{A.N :} \begin{cases} Q_1 = 12\times 4 \\ Q_2 = 4\times 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 48\,\mu C \\ Q_2 = 48\,\mu C \end{cases}$$

3) Energie électrique totale emmagasinée E_P

$$E_P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} Q_i U_i = \frac{1}{2} Q_T V_{AB} = \frac{1}{2} C_{eq} V_{AB}^2$$

$$\text{A.N :} \; E_P = \frac{2{,}66\times(48)^2}{2} = 3064{,}32 \qquad E_P = 3064{,}32\text{J}$$

Exercice 26

On a les données suivantes :
$C_1 = C_3 = 10\mu F$, que $C_2 = C_4 = 20\mu F$ et que $Q_2 = 30\mu F$

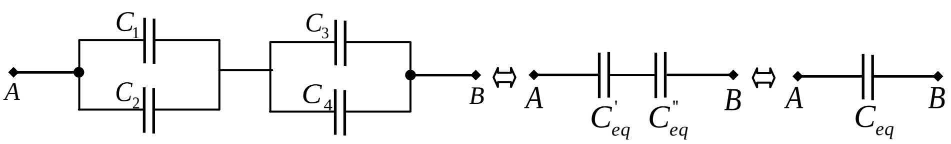


Figure I-112

1) Calcul de la capacité équivalente C_{eq} entre A et B

On a : C_1 // C_2

$$C'_{eq} = C_{12} = C_1 + C_2 \qquad \text{A.N : } C'_{eq} = C_{12} = 10 + 20 = 30\mu F \qquad C'_{eq} = C_{12} = 30\mu F$$

C_3 // C_4 , alors :

$$C''_{eq} = C_{34} = C_3 + C_4 \qquad \text{A.N : } C''_{eq} = C_{34} = 10 + 20 = 30\mu F\,. \qquad C''_{eq} = C_{34} = 30\mu F$$

C'_{eq} et C''_{eq} sont montées en série :

$$C_{eq} = \frac{C'_{eq} \times C''_{eq}}{C'_{eq} + C''_{eq}} \qquad \text{A.N : } C_{eq} = C_{AB} = \frac{900}{60} = 15\,\mu F$$

Donc la capacité équivalente du circuit est : $C_{eq} = C_{AB} = 15\mu F$

2) La charge de chacun des autres condensateurs

D'après la loi des nœuds de Kirchhoff : $\sum I_{Entrant} = \sum I_{Sortant} \Leftrightarrow \sum Q_{Entrant} = \sum Q_{Sortant}$

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$$

Or $Q_1 = C_1 U_1$ et $Q_2 = C_2 U_2$ or $U_1 = U_2$, car C_1 *et* C_2 en sont montées en parallèle.

$$\text{Donc : } Q_1 = C_1 \frac{Q_2}{C_2} \qquad \text{A.N : } Q_1 = 10\frac{30}{20} = 15\,\mu C$$

$$\text{On a } Q = Q_3 + Q_4 \Leftrightarrow Q = C_3 U_3 + C_4 U_4 \text{ or } U_3 = U_4$$

$$\Rightarrow Q_1 + Q_2 = (C_3 + C_4)U_3$$

$$\Rightarrow U_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{C_3 + C_4}$$

$$\text{Or } Q_3 = C_3 U_3 \quad \Rightarrow Q_3 = C_3 \frac{Q_1 + Q_2}{C_3 + C_4} \quad \text{A.N : } Q_3 = 10\frac{15 + 30}{10 + 20} = 15\mu C$$

$$Q_4 = Q - Q_3 \qquad \text{A.N : } Q_4 = (45 - 15) \times 10^{-6} = 30\mu C$$

Donc la charge de chacun des autres condensateurs :

$Q_1 = Q_3 = 15\mu C$ et $Q_2 = Q_4 = 30\mu F$

3) Calcul de la tension entre leurs armatures

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 U_1 \\ Q_2 = C_2 U_2 \\ Q_3 = C_3 U_3 \\ Q_4 = C_4 U_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1 = \dfrac{Q_1}{C_1} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5 \\ U_2 = \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{30}{20} = 1{,}5 \\ U_3 = \dfrac{Q_3}{C_3} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5 \\ U_4 = \dfrac{Q_4}{C_4} = \dfrac{30}{20} = 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = 1{,}5\,Volts$$

4) Calcul de la tension U_{AB} que subit l'ensemble du système

La tension U_{AB} que subit l'ensemble du système :

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = U_1 + U_3 = U_2 + U_4$$

$$\text{A.N : } U_{AB} = 1{,}5 + 1{,}5 = 3V$$

Exercice 27

On a les données suivantes :

$U_{AB} = 30V$, $C_1 = C_3 = 50\mu F$, $C_2 = C_4 = 150\mu F$ et $C_5 = 50\mu F$

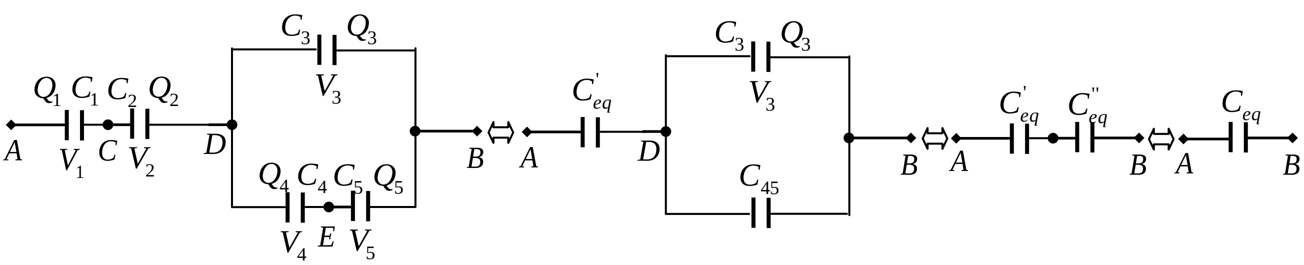


Figure I-113

1) Calcul de la capacité équivalente C_{eq}

C_1 et C_2 sont montées en série :

$$C'_{eq} = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} \qquad \text{A.N : } C'_{eq} = \left(\frac{50 \times 150}{50 + 150}\right) \times 10^{-6} = 37{,}5 \times 10^{-6}$$

$$C'_{eq} = 37{,}5\mu F$$

C_4 et C_5 sont en série :

$$C_{45} = \frac{C_4 \times C_5}{C_4 + C_5} \qquad \text{A.N : } C_{45} = \left(\frac{150 \times 50}{150 + 50}\right) \times 10^{-6} = 37{,}5 \times 10^{-6}$$

$$C_{45} = 37{,}5 \mu F$$

C_3 // C_{45} :

$$C_{eq}^{"} = C_3 + C_{45} \qquad \text{A.N : } C_{eq}^{"} = (50 + 37{,}5) \times 10^{-6} = 87{,}5 \times 10^{-6} \qquad C_{eq}^{"} = 87{,}5 \mu F$$

$C_{eq}^{'}$ et $C_{eq}^{"}$ sont montées en série:

$$C_{eq} = \frac{C_{eq}^{'} \times C_{eq}^{"}}{C_{eq}^{'} + C_{eq}^{"}} \qquad \text{A.N : } C_{eq} = \left(\frac{37{,}5 \times 87{,}5}{37{,}5 + 87{,}5}\right) \times 10^{-6} = 26{,}25 \times 10^{-6}$$

Donc la capacité équivalente du circuit est : $C_{eq} = 26{,}25 \mu F$.

2) Charge et la tension aux bornes des deux condensateurs C_3 et C_5

Puisque C_1 et C_2 sont montées en série :

$$Q_1 = Q_2$$

D'autre part, Q_1 est la charge qui circule le long du circuit, donc :

$$Q_1 = Q_2 = U_{AB} . C_{AB} = 787{,}5 \mu C$$

$$U_{AD} = V_A - V_D = \frac{Q_1}{C_1} = 15{,}75\, V$$

$$U_{DE} = V_D - V_E = \frac{Q_2}{C_2} = 5{,}25\, V$$

Pour trouver les charges Q_3 et Q_4 il faut d'abord trouver la tension $V_E - V_B$.

$$U_{EB} = V_E - V_B = U_{AB} - U_{AD} - U_{DE} = 9\, V$$

$$\text{Donc : } U_{EB} = 9V \quad \text{et} \quad Q_3 = U_{EB} C_3 = 450 \mu C$$

Puisque C_4 et C_5 sont montées en série : $Q_4 = Q_5$

Donc : $Q_2 = Q_3 + Q_5$ et $Q_5 = Q_2 - Q_3$ A.N : $Q_5 = 337{,}5 \mu C$ $\qquad U_{FB} = \dfrac{Q_5}{C_5} = 6{,}75 V$

3) Energie total emmagasinée E_P

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{Q_T^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} Q_T U_{AB} = \frac{1}{2} C_{eq} U_{AB}^2$$

$$\text{A.N : } E_P = \frac{1}{2} 26,25 \times (30)^2 = 11812,5 \qquad E_P = 11812,5J$$

Exercice 28

On a les données suivantes :

$U_{DB} = 24V$, $C_1 = C_3 = 30\mu F$, $C_2 = C_4 = 15\mu F$ et $C_5 = 10\mu F$

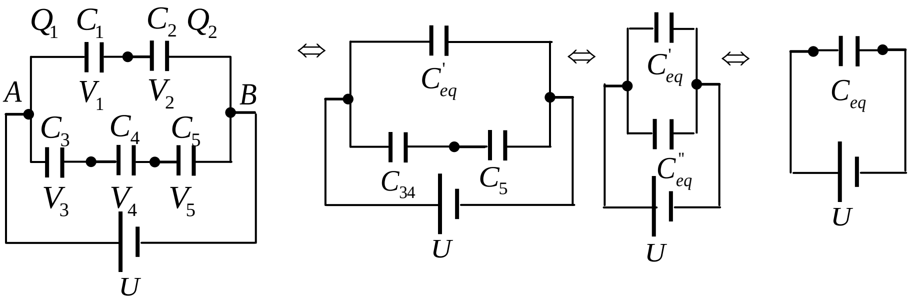


Figure I-114

1) Calcul de la capacité équivalente C_{eq}

C_1 et C_2 sont montées en série

$$C'_{eq} = \frac{C_1 \times C_2}{C_1 + C_2} \qquad \text{A.N : } C'_{eq} = \left(\frac{30 \times 15}{30 + 15}\right) \times 10^{-6} = 10^{-5} \qquad C'_{eq} = 10\mu F$$

C_3 *et* C_4 sont montées en série avec C_5 :

$$C_{34} = \frac{C_3 \times C_4}{C_3 + C_4} \qquad \text{A.N : } C_{34} = \frac{450}{45} = 10\,\mu F$$

$$C''_{eq} = \frac{C_{34} \times C_5}{C_{34} + C_5} \qquad \text{A.N : } C''_{eq} = \left(\frac{10 \times 10}{10 + 10}\right) \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-6}$$

$$C''_{eq} = 5\mu F$$

$$C'_{eq} // C''_{eq}$$

$$C_{eq} = C'_{eq} + C''_{eq} \qquad \text{A.N : } C_{eq} = C'_{eq} + C''_{eq} = 10 + 5 = 15 \qquad C_{eq} = 15\mu F$$

2) Différence de potentiel (ddp) U_{AB} si la charge au borne de C_1 ($Q_1 = 360\mu C$)

On a : $U_{AB} = U_{AD} + U_{DB} = U_{AE} + U_{EF} + U_{FB}$

puisque C_1 et C_2 sont montées en série : $Q_1 = Q_2 = 360\mu C$

D'autre part, Q_1 est la charge qui circule le long du circuit, donc :

$$Q_1 = Q_2 = U_{AD}C_1$$

$$Q_1 = U_{AD}C_1 \Rightarrow U_{AD} = \frac{Q_1}{C_1} \qquad \text{A.N : } U_{AD} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{360}{30} = 12 \qquad U_{AD} = 12V$$

D'où, la différence de potentiel U_{AB} :

$$\text{A.N : } U_{AB} = U_{AD} + U_{DB} = 24 + 12 = 36 \qquad U_{AB} = 36V$$

3) Calcul de la charge Q_3 et la ddp U_{AE} aux bornes du condensateur C_3

Puisque C_3 , C_4 et C_5 sont montées en série on peut écrire:

$$Q_3 = Q_4 = Q_5$$

Q_T est la charge totale qui circule dans le circuit :

$$Q_T = C_{eq}.U_{AB} \qquad \text{A.N : } Q_T = C_{eq}.U_{AB} = 15.36 = 540 \qquad Q_T = 540\mu C\ .$$

$$\text{On a : } Q_T = Q_1 + Q_3 \qquad \text{A.N : } Q_3 = Q_T - Q_1 = 540 - 360 = 180 \qquad Q_3 = 180\mu C$$

Calcul de la différence de potentiel aux bornes du condensateur C_3 :

$$\text{On a : } Q_3 = C_3U_{AE} \Rightarrow U_{AE} = \frac{Q_3}{C_3} \qquad \text{A.N : } U_{AE} = \frac{180}{30} = 6 \qquad U_{AE} = 6V$$

4) Energie totale emmagasinée E_P

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{Q_T^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2}Q_TU_{AB} = \frac{1}{2}C_{eq}U_{AB}^2 \qquad \text{A.N : } E_P = \frac{1}{2}\frac{(540)^2}{15} = 9{,}72.10^3 \qquad E_P = 9{,}72.10^3\ J$$

Exercice 29

On a les données suivantes :

$U_{AB} = 90V$, $C_1 = C_4 = 4\mu F$, $C_2 = 6\mu F$ et $C_3 = 2\mu F$

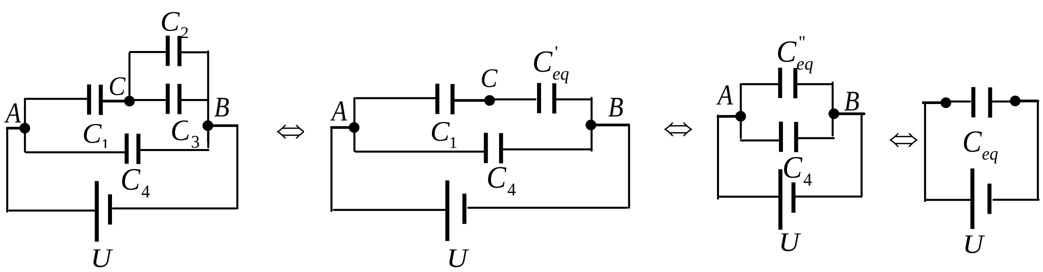


Figure I-115

1) Calcul de la capacité équivalente C_{eq}

C_2 et C_3 sont montées en parallèle.

$$C'_{eq} = C_{23} = C_2 + C_3 \quad \text{A.N : } C'_{eq} = C_2 + C_3 = (6+2)\times 10^{-6} = 8\times 10^{-6} \quad C'_{eq} = 8\mu F\,.$$

C_1 et C'_{eq} sont montées en série :

$$C''_{eq} = \frac{C_1 \times C'_{eq}}{C_1 + C'_{eq}} \qquad \text{A.N : } C''_{eq} = \frac{(4\times 8)\times 10^{-12}}{(4+8)10^{-6}} = 2{,}66\times 10^{-6} \qquad C''_{eq} = 2{,}66\mu F$$

C_4 et C''_{eq} sont montées en parallèle.

$$C_{eq} = C_4 + C''_{eq} \qquad \text{A.N : } C_{eq} = (4+2{,}66)\times 10^{-6} = 6{,}66\times 10^{-6} \qquad C_{eq} = 6{,}66\mu F$$

2) Calcul de la charge Q_i et la différence de potentiel entre ses armatures

On a la loi des mailles de Kirchhoff : $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = \frac{Q_4}{C_4}$$

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = 90V \quad \text{A.N : } Q_4 = C_4.U_{AB} = 4.90 = 360 \qquad Q_4 = 360\mu C$$

On a la loi des nœuds de Kirchhoff : $Q_1 = Q_2 + Q_3$

Avec : $Q_2 = C_2 U_{CB}$ et $Q_3 = C_3 U_{CB}$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \Leftrightarrow C_1 U_{AC} = C'_{eq} U_{CB}$$
$$\Rightarrow C_1 U_{AC} - C'_{eq} U_{CB} = 0$$
$$4U_{AC} - 8U_{CB} = 0$$

D'où le système des équations :

$$\begin{cases} U_{AC} + U_{CB} = 90 \\ 4U_{AC} - 8U_{CB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{AC} = 60 \\ U_{CB} = 30 \end{cases} \quad \text{A.N : } Q_1 = C_1 U_{AC} = 4\times 60 = 240 \qquad Q_1 = 240\mu C$$

$$Q_2 = C_2 U_{CB} = 6\times 30 = 180 \qquad Q_2 = 180\mu C$$

$$Q_3 = C_3 U_{CB} = 2\times 30 = 60 \qquad Q_3 = 60\mu C$$

Vérification : $Q_1 = Q_2 + Q_3 \Leftrightarrow 240 = 180 + 60$

3) Energie totale emmagasinée E_P

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{Q_T^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2} Q_T U_{AB} = \frac{1}{2} C_{eq} U_{AB}^2$$

$$Q_T = Q_1 + Q_4 \qquad \text{A.N : } Q_T = 240 + 360 = 600 \qquad Q_T = 600\mu C$$

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{(600)^2}{6{,}66} = 27027{,}027 \quad E_P = 27027{,}027 J$$

Exercice 30

On a les données suivantes :

$C_1 = 1\mu F$, $C_2 = 2\mu F$, $C_3 = 6\mu F$ et $C_4 = C_5 = 0{,}5\mu F$

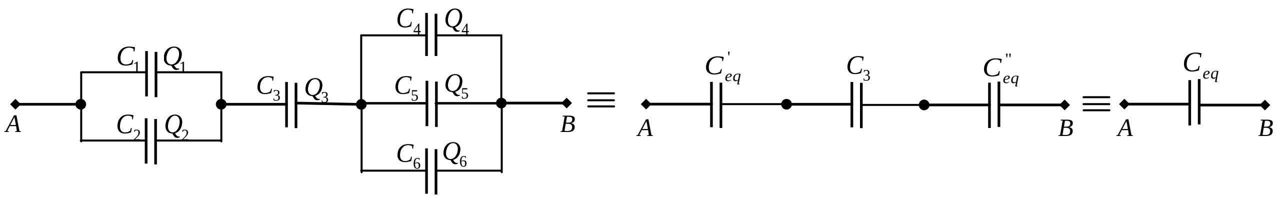


Figure I-116

1) Calcul de la capacité C_6 , sachant que la capacité équivalente $C_{eq} = 1\mu F$

C_1 *et* C_2 sont montées en parallèle:

$$C'_{eq} = C_1 + C_2 \quad \text{A.N :} \quad C'_{eq} = 1 + 2 = 3 \qquad C'_{eq} = 3\mu F$$

C_4 , C_5 *et* C_6 sont montées en parallèle:

$$C''_{eq} = C_4 + C_5 + C_6$$

$$C''_{eq} = 0{,}5 + 0{,}5 + C_6 = 1 + C_6 .$$

C'_{eq}, C_3 *et* C''_{eq} sont montées en série :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C'_{eq}} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C''_{eq}} \qquad \text{A.N :} \ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1 + C_6} = 1 \qquad C_6 = 1\mu F$$

2) Calcul des valeurs de charges Q_2 , Q_6 et Q_T sachant que $Q_1 = 140\mu C$, $Q_3 = 240\mu C$,

$Q_4 = 80\mu C$ et $Q_5 = 70\mu C$

$$Q_3 = Q_1 + Q_2$$

Donc : $Q_2 = Q_3 - Q_1$ A.N : $Q_2 = 240 - 140$ $Q_2 = 100\mu C$

$$Q_3 = Q_4 + Q_5 + Q_6 .$$

Donc : $Q_6 = Q_3 - Q_4 - Q_5$ A.N : $Q_6 = 240 - 80 - 70$ $Q_6 = 90\mu C$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = Q_3 = Q_4 + Q_5 + Q_6 \qquad \text{A.N :} \ Q_T = 240\mu C$$

3) Energie totale emmagasinée E_P

$$E_P = \frac{1}{2}\frac{Q_T^2}{C_{eq}} = \frac{1}{2}\frac{Q_3^2}{C_{eq}} = 288 \times 10^{-4}\,J$$

$$E_P = 288 \times 10^{-4}\,J$$

Chapitre II

Electrocinétique

II.1 Introduction

Le chapitre II traité abondamment d'électrostatique, c'est-à-dire de charge au repos. A compter de maintenant, on s'intéressera aux courants électriques, soit aux charges en mouvement. L'**électrocinétique** est l'étude du mouvement d'ensemble des porteurs de charges électrique dans des conducteurs format des circuits électriques fermés que l'on appelle courant électrique.

II.2 Conducteur électrique

En électricité, un conducteur est un matériau qui contient des porteurs de charge électrique mobiles pouvant se déplacer facilement. Lorsque ce conducteur est soumis à un champ électrique le mouvement de porteurs de charge devient globalement ordonné, ce qui fait qu'on observe un courant électrique. Par extension, un conducteur est un composant électrique ou électronique de faible résistance, servant à véhiculer le courant d'un point à un autre.

En électricité, un conducteur est un matériau qui contient des charges électriques mobiles.

En physique, un conducteur est un matériau permettant des échanges d'énergie entre deux systèmes, par opposition à un isolant. On distingue : les *conducteurs électriques* et les *conducteurs thermiques*.

Parmi les matériaux conducteurs, on peut citer :

- les métaux,
- les électrolytes (ou solutions ioniques), et
- les plasmas.

Les meilleurs matériaux conducteurs sont les métaux classés par ordre de la conductivité :

1. **Argent** , 2. **Cuivre** , 3. **Or** , 4. **Aluminium** ,5. **Zinc** , etc…..

Du fait de leur prix élevé, l'argent et l'or, excellents conducteurs, sont rarement utilisés à des fins de conductivité électrique.

II.2.1 Sens du courant

Le courant électrique circule dans le sens décroissant des potentiels, c'est-à-dire dans le sens du champ électrique. Ainsi, le sens choisi conventionnellement est contraire au sens des charges négatives.

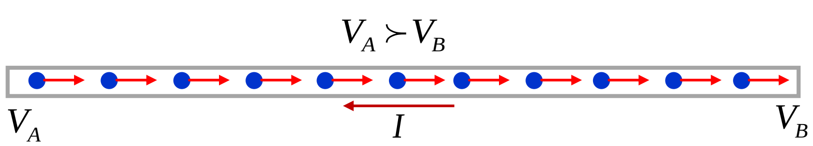


Figure II-1 : *sens du courant électrique circule d'un un conducteur.*

II.2.2 Intensité du courant électrique

Dans une section d'un conducteur qui fait partie d'une boucle conductrice à l'intérieur de laquelle le courant circule. Si la charge élémentaire dq traverse un plan pendant un intervalle dt alors on décrit ainsi le courant i qui passe par ce plan est défini par :

$$\boxed{i = \frac{dq}{dt}} \qquad \text{(II-1)}$$

Si pendant le temps t s'écoulent n particule de charge, l'intensité du courant est égale à la charge totale qui s'écoule par unité de temps :

$$\boxed{i = \frac{Q}{t}} \qquad \text{(II-2)}$$

Avec : i est l'intensité du courant, Q est la charge électrique, t est le temps, et l'unité du courant est l'ampère (A) : 1 A = 1 C/s. l'ampère est une unité SI de base. Le coulomb est défini à partir de l'ampère.

II.2.3 Densité de courant électrique

Considérons un fil conducteur de section S, dans lequel se trouvent n porteurs de charge q, animés d'une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel du laboratoire. Pendant un instant dt, ces charges parcourent une distance $\vec{v}dt$. Soit $dS\vec{n}$ un élément infinitésimal de surface mesuré sur la section du fil, orienté dans une direction arbitraire. Le débit de charge électrique à travers la section transversale d'un conducteur en un point précis pendant dt est celle contenue dans le volume élémentaire dV associé. On appelle la densité de courant $\vec{J}$ définie par:

$$\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}} \qquad \text{(II-3)}$$

avec : σ est la conductivité, $\vec{v} = \mu\vec{E}$ représente la vitesse de dérive, μ est la mobilité de la charge q et $\vec{E}$ est le champ électrique.

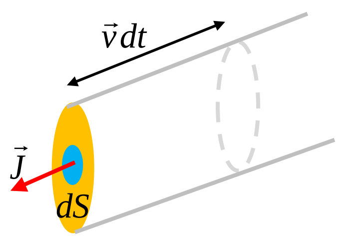


Figure II-2 : *sens de la densité de courant électrique circule d'un un conducteur.*

La quantité de courant qui travers la surface est alors :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{dt}\iint dq = \frac{1}{dt}\iint \vec{J}dS\,\vec{n}dt \qquad \text{(II-4)}$$

$$\Rightarrow i = \iint JdS = JS \tag{II-5}$$

Le courant dans le fil est donc le flux à travers la section du fil de la densité du courant, de sorte que :

$$\boxed{J = i / S} \tag{II-6}$$

L'unité de est ($\Omega.m^{-2}$) et S représente la section droite du conducteur (le courant est perpendiculaire à cette section).

La direction de la densité de courant a la même de que la vitesse des charges en mouvement, si elles sont positives et la direction opposée si elles sont négatives.

II.2.4 Loi d'ohm

a) Forme locale de la loi d'Ohm

Soit une charge q qui est soumise à une force électrique $\vec{F}$ et aux collisions. Lorsque le mouvement de la particule est stationnaire ($/dt$ = 0), la vitesse des particules est reliée au champ dite la vitesse de dérive est donnée par la relation :

$$\boxed{\vec{v} = \mu\vec{E}} \tag{II-7}$$

Avec : μ est la mobilité des porteurs de charge et est le coefficient de proportionnalité.

Généralement, la densité de courant $\vec{J}$ est toujours proportionnelle au champ électrique $\vec{E}$ telle que :

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}} \tag{II-8}$$

Avec : σ est la conductivité se mesure en $A/V.m = \Omega^{-1}.m^{-1} = S$.

L'inverse de la conductivité σ ($\rho = 1/\sigma$) est la résistivité du milieu, elle se mesurée en $\Omega.m$.

On peut établir un rapport entre la vitesse des particules $\vec{v}$ (vitesse de dérive des électrons) de conduction d'un courant à l'intérieur d'un fil et la densité de courant $\vec{J}$ dans le fil.

$$\boxed{\vec{J} = nq\vec{v}} \tag{II-9}$$

La dérive équivalente des porteurs de charge positive en direction du champ électrique appliqué $\vec{E}$ montée dans la figure (III-3).

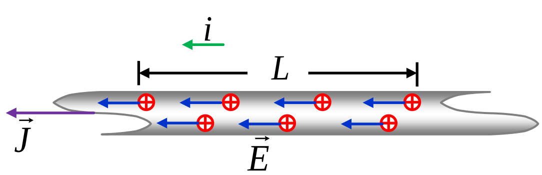


Figure II-3 : *dérive équivalente des porteurs de charge positive d'un un conducteur.*

Des porteurs de charge positive ont une vitesse de dérive $\vec{v}$ dans la même direction que le champ électrique appliqué $\vec{E}$. Par convention la direction de la densité de courant et le sens de la flèche du courant sont les mêmes.

On peut l'écrire la loi d'Ohm sous la forme locale:

$$\vec{J} = nq\mu\vec{E} \qquad \text{(II-10)}$$

Loi d'Ohm est:

$$\boxed{U = Ri} \qquad \text{(II-11)}$$

b) Puissance électrique

La puissance est le taux de transfert de l'énergie électrique définie par:

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \qquad \text{(II-12)}$$

La dissipation thermique dans une résistance est :

$$\boxed{P = \frac{U^2}{R} = Ri^2} \qquad \text{(II-13)}$$

La puissance P se mesure en watts (w) et W en joules (J).

II.2.5 Effet de Joule

Lorsque les électrons sont ralentis, leur vitesse diminue et il y a perte de l'énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(II-13)}$$

Cette énergie E_C perdue va chauffer le conducteur :

$$U = RI \quad \text{et} \quad P = UI = RI^2 \qquad \text{(II-14)}$$

L'énergie perdue par effet joule est :

$$\boxed{W = I\,t = RI^2 t} \qquad \text{(II-15)}$$

Applications de l'effet Joule

- ❑ Chauffage électrique : un alliage Nickel-Chrome est utilisé comme résistance électrique ($T \approx 1000\ °C$).
- ❑ Eclairage électrique par incandescence : le tungstène est utilisé comme fil électrique dans les lampes.

II.3 Circuits électriques

Un réseau est un circuit électrique complexe, formé de fils conducteurs et de composants reliés à l'extérieur par deux bornes (des dipôles).

Des dipôles peuvent être placés en série :

Ou en parallèle (en dérivation) :

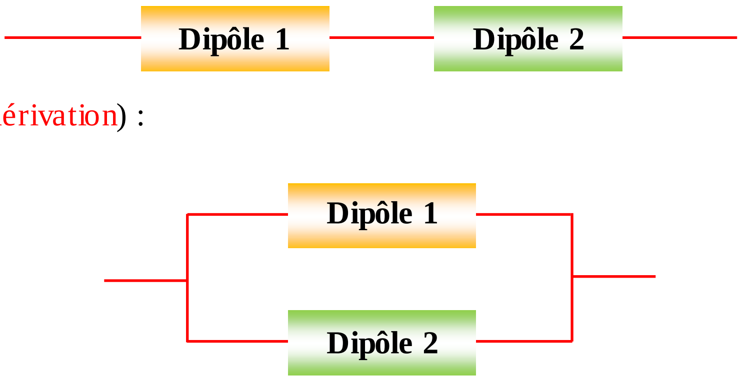


Figure II-4 : *dipôles placés en série et en parallèle.*

Avant d'étudier les circuits électriques on a besoin de définir quelques termes relatifs à leur constitution.

Un circuit électrique est constitué principalement par une association série ou parallèle des composants passifs (résistances, bobines, condensateurs, etc…) et actifs (générateurs continus ou alternatifs, diodes, transistors, circuits intégrés, moteurs, etc ….).

II.4 Lois de Kirchhoff et le théorème de Tévenin

II.4.1 Définitions

Un **circuit électrique** est un ensemble de conducteurs reliés entre eux par des fils de jonction et dans lequel circule un courant électrique.

- Un **dipôle** est un élément de circuit relié au reste du circuit par deux bornes.
- Un **nœud** est un point où se rejoignent au moins deux branches.
- Une **branche** est une portion de circuit située entre deux nœuds. Étant donné que la charge est conservée, le courant doit être le même partout dans une branche.
- Une **maille** est un ensemble de branches formant une boucle fermée.

Application 1

Soit le circuit électrique de la figure ci-dessous. On donne :

- ❑ les nœuds du circuit sont *B* et *E*.
- ❑ les mailles indépendantes dans ce circuit sont :

  ABEFA et *BCDEB*.
- ❑ les branches du circuit sont *EFAB*, *BE* et *BCDE*.

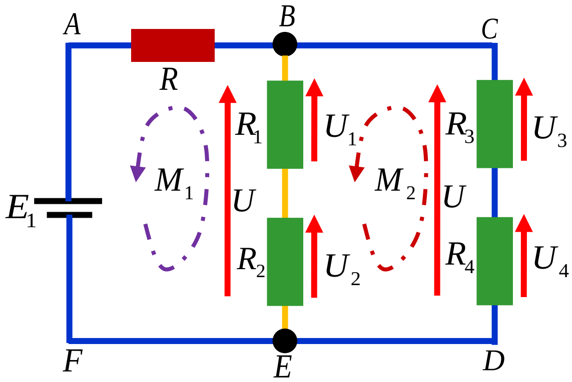


Figure II-5 : *montage électrique.*

Application 2

Soit le montage dans la figure ci-dessous.

1) Nommer les nœuds du circuit.

2) Nommer les mailles indépendantes dans ce circuit.

3) Nommer les branches du circuit.

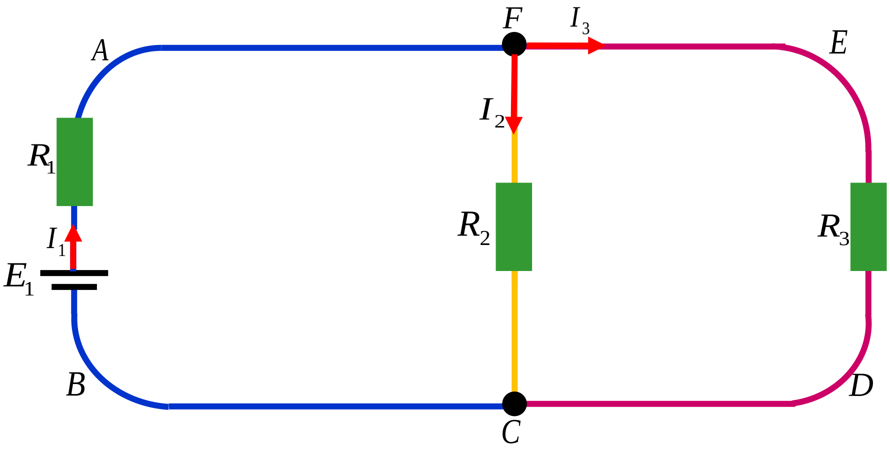


Figure II-6 : *montage électrique.*

Solution :

- ❑ Les nœuds du circuit sont *C* et *F*.
- ❑ Les mailles indépendantes dans ce circuit sont : *ABCFA* et CDEFC.
- ❑ Les branches du circuit sont : *FABC*, *CF* et *CDEF*.

II.4.2 Lois de Kirchhoff

a) Lois des nœuds

Enoncé de la loi de Kirchhoff des mailles :

La somme algébrique des courants qui entrent dans un nœud est égale à la somme des courants qui en sortent.

$$\boxed{\sum_{Entrant} I_i = \sum_{Sortant} I_j} \qquad \text{(II-16)}$$

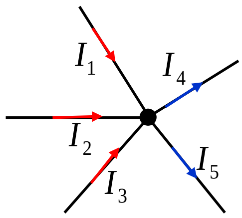


Figure II-7 : *courants qui entrent dans un nœud.*

b) Loi des mailles

- Choisir un sens de parcours de la maille.
- Intensité positives dans le sens choisi
- La force électromotrice f.e.m signe de la borne de sortie quand on circule dans le sens choisi.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} R_i I_i} \qquad \text{(II-17)}$$

$$E_2 - E_1 = -R_2 I_2 + R_3 I_3 \qquad \text{(II-18)}$$

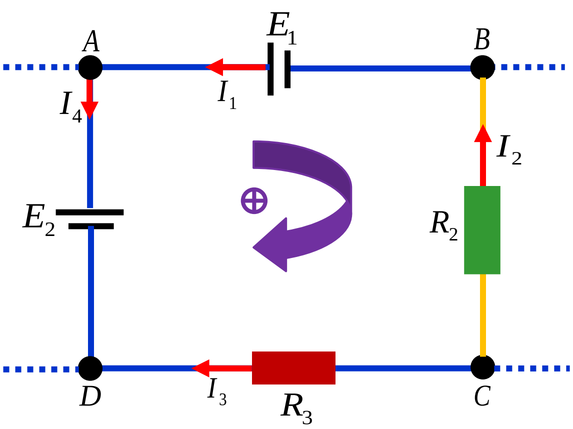


Figure II-8 : *maille électrique.*

Il faut b-(n-1) équations de mailes.

Enoncé de la loi de Kirchhoff des mailles :

La somme algébrique des différences de potentiel (d.d.p) dans une maille fermée est nulle.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} U_i = 0 \text{ ou } \sum RI - \sum E = 0} \qquad \text{(II-19)}$$

La somme des tensions à l'intérieur d'une maille est nulle. Sur la maille *ABCD*, on a :

$$E = U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} \qquad \text{(II-20)}$$

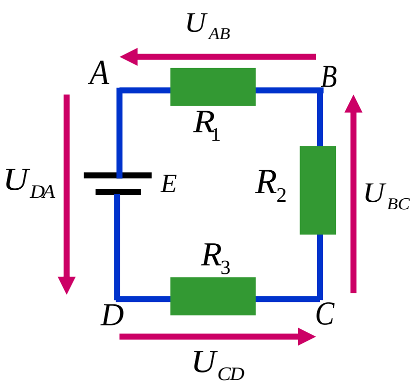


Figure II-9 : *montage électrique en série.*

II.4.3 Mode d'emploi

Loi des nœuds ➡(n-1) équations

$$[A].[I] = [e] \qquad \text{(II-21)}$$

Loi des mailles ➡b-(n-1) équations

Système d'équations linaires et homogènes $I = I_1 + I_2$ (II-22)

$[A]$ Matrice b X b.

$[I]$ Matrice colonne des intensités.

$[E]$ Matrice colonne des f.e.m.

$$\begin{cases} R_1 I + R_2 I_2 = e_1 \\ R_3 I_1 - R_2 I_2 = e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_3 & R_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(II-23)}$$

$$\Delta = \det[A] = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_3 & R_2 \end{vmatrix} \qquad \text{(II-24)}$$

$$I_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad \text{(II-25)}$$

$\Delta_k = \det'[A]$ colonne k remplacée par $[E]$.

II.4.4 Association de résistances

a) Résistances en série

Soit le branchement de résistances ci-dessous de la figure (II-10).

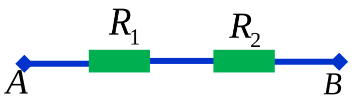


Figure II-10 : *association deux résistances en série.*

Donc, d'après la loi des mailles; la tension totale (d.d.p) est :

$$U_T = U_{AB} = U_1 + U_2 \tag{II-26}$$

En plus, en série les courants I_1 et I_2 sont égaux.

$$I_T = I_1 = I_2 \tag{II-27}$$

Alors :

$$U_{AB} = U_1 + U_2 \Leftrightarrow R_{eq} I_T = R_1 I_1 + R_2 I_2 \tag{II-28}$$

$$\Leftrightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 \tag{II-29}$$

La généralisation pour un nombre n de résistances en série et se formule comme suit :

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i} \tag{II-30}$$

La somme des courants qui arrivent sur un nœud est égale à la somme des courants qui en repart :

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{II-31}$$

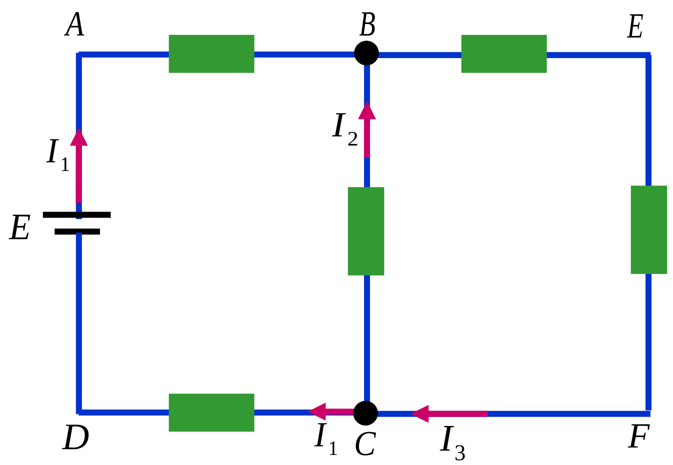


Figure II-11 : *montage électrique.*

b) Résistances en parallèle

Soit le branchement de résistances ci-dessous.

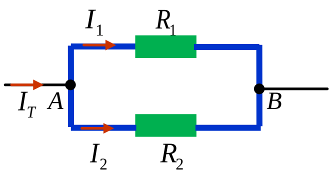


Figure II-12 : *association deux résistances en parallèle (dérivation).*

Donc, d'après la loi des nœuds; le courant total est :

$$I_T = I_1 + I_2 \tag{II-32}$$

En plus, en parallèle les différences de potentiels (ddp ou la tension) aux bornes des résistances R_1 et R_2 sont égaux.

$$U_T = U_{AB} = U_1 = U_2 \tag{II-33}$$

Alors :

$$I_T = I_1 + I_2 \Leftrightarrow \frac{U_T}{R_{eq}} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}. \tag{II-34}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1.}{R_2} \tag{II-35}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}} \tag{II-36}$$

La généralisation pour un nombre n de résistances en parallèle est directe et se formule comme suit :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \tag{II-37}$$

Résumé :

En série :

$I_T = I_1 = I_2 = \ldots = I_n$, $U_T = U_{AB} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ et $\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$ (II-38)

En parallèle (dérivation) :

$U_T = U_{AB} = U_1 = U_2 = \ldots = U_n$ et $I_T = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$, $\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$ (II-39)

Générateur en circuit ouvert

La borne au potentiel le plus élevé constitue la borne positive, et l'autre borne est négative.

On a simplement :

$$E = V_A - V_B > 0 \tag{II-40}$$

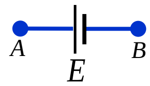


Figure II.13

Générateur en circuit fermé

En se référant à la loi d'Ohm, on a :

$E = V_A - V_B = (R + r)I$

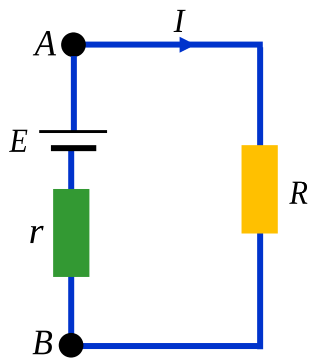


Figure II.14

Convention générateur

Le courant sort du pôle positif et rentre par le pôle négatif.

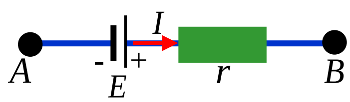


Figure II.15

$$V_A - V_B = rI - E \tag{II-41}$$

Convention récepteur

Le courant sort du pôle négatif et rentre par le pôle positif. Dans ce cas, la f.é.m. qui est toujours positive, est appelée force contre-électromotrice.

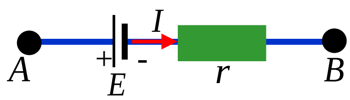


Figure II.16

$$V_A - V_B = rI + E \tag{II-42}$$

Dans un circuit complexe, comprenant des générateurs et des récepteurs, il peut arriver que le courant d'un générateur sorte par le pôle négatif. Dans ce cas, ce générateur se comporte comme un récepteur : il se charge.

II.4.5 Théorème de Thévenin

Le théorème de Thévenin établit que le courant dans toute résistance R branchée entre les deux bornes d'un réseau est le même que si R était branchée à une source de tension où :

- la fem est la tension à vide entre les bornes de R.
- la résistance interne est la résistance du réseau entre les bornes de R, avec toutes les au très sources remplacées par des résistances égales à leurs résistances internes.

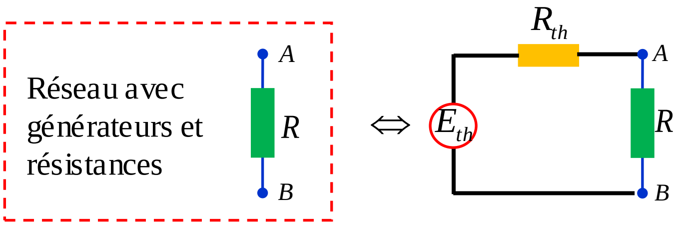


Figure II.17 : *circuit équivalent de Thévenin.*

Exercices

Exercice 1

La figure suivante montre un circuit mixte composé de quatre résistances $R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 10\Omega$ et $R_4 = 15\Omega$ branchées à une source de tension de $E = 32V$.

On désire calculer :

1) la valeur de la résistance équivalente.

2) le courant fourni par la source.

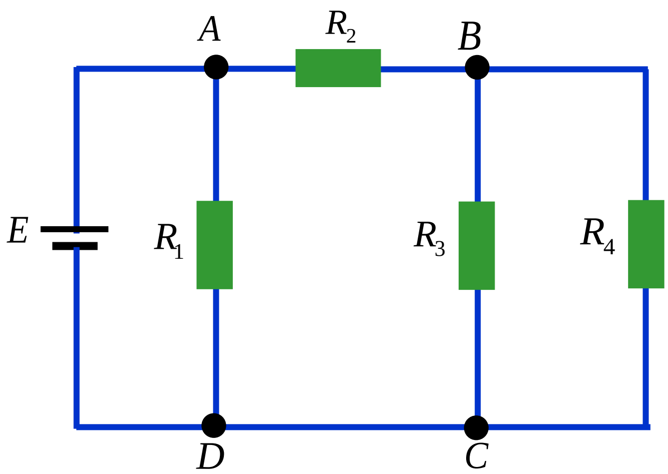


Figure II-18 : *montage électrique.*

Exercice 2

Soit le montage dans la figure ci-dessous.

1) Nommer les nœuds du circuit.
2) Nommer les mailles indépendantes dans ce circuit.
3) Nommer les branches du circuit.
4) Calculer I_1, I_2 et I_3. (En appliquant les lois de Kirchhoff).

On donne : $E_1 = E_2 = 12\Omega$, $E_3 = 6\Omega$, $r_1 = 1\Omega$, $R_1 = 8\Omega$ et $R_2 = 18\Omega$.

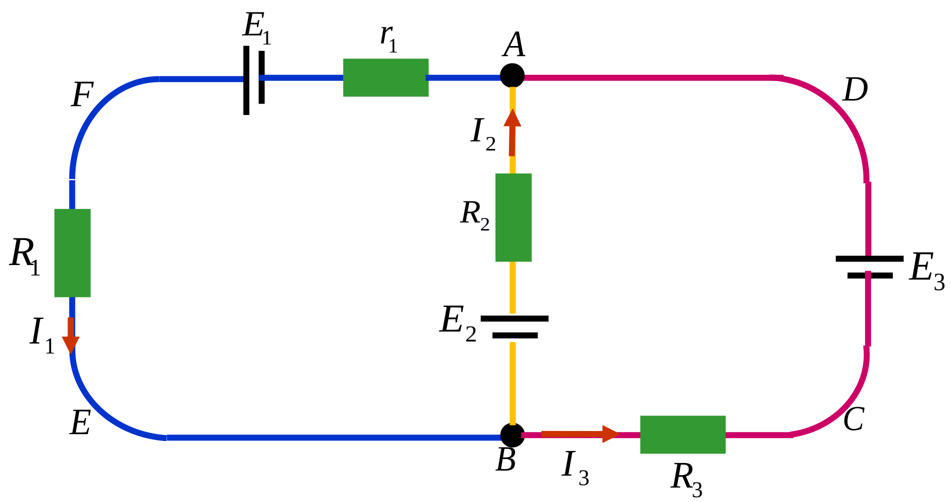


Figure II-19 : *montage électrique.*

Exercice 3

Soit le circuit électrique de la figure (II-20).

1) Citer les nœuds du circuit.

2) Citer les mailles indépendantes dans ce circuit.

3) Citer es branches du circuit.

4) Déterminer les intensités dans toutes les branches du réseau.

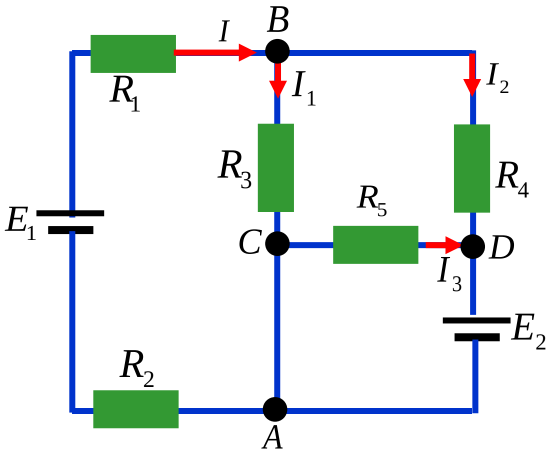


Figure II-20 : *montage électrique.*

Exercice 4

Soit le montage dans la figure (II-21).

1) Nommer les nœuds du circuit.

2) Nommer les mailles indépendantes dans ce circuit.

3) Nommer les branches du circuit.

4) Calculer les courants.

On donne : $E_1 = 12V$, $E_2 = 20V$, $R_1 = R_2 = 10\Omega$ et $R_3 = 15\Omega$.

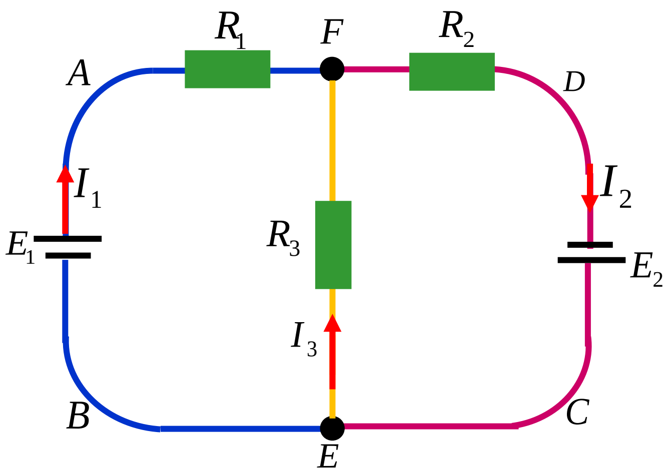


Figure II-21 : *montage électrique.*

Exercice 5

Appliquer le théorème de Thévenin au circuit suivant :

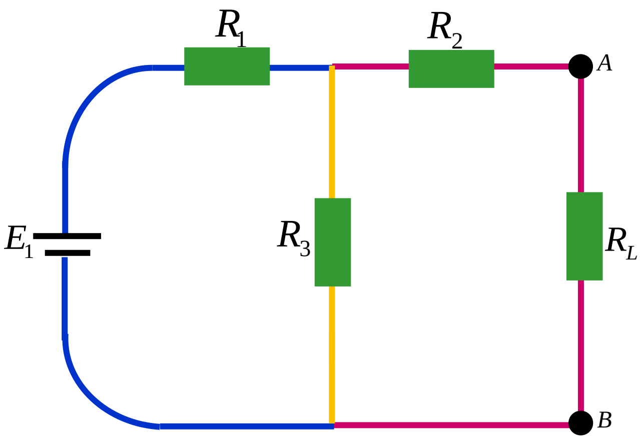


Figure II-22 : *montage électrique.*

Corrigés

Exercice 1

On a : $R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $R_4 = 15\Omega$ et $E = 32V$.

1) Calcul de la valeur de la résistance équivalente

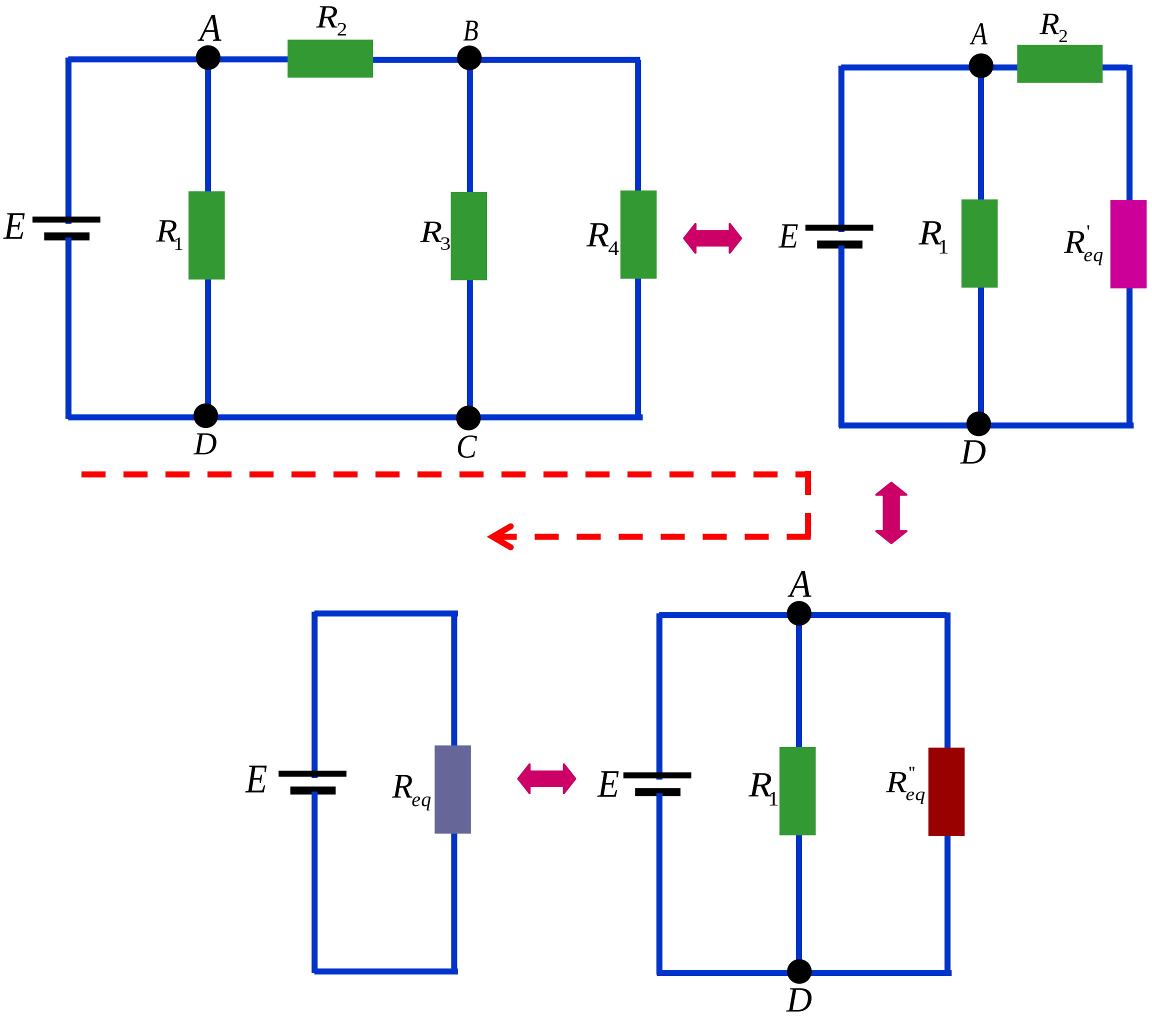


Figure II-23 : *circuit équivalent du montage électrique de la figure (III-18).*

R'_{eq} est la résistance équivalente de deux résistances R_3 et R_4 montées en parallèle :

$$R'_{eq} = \frac{R_3 \times R_4}{R_3 + R_4} \qquad \text{A.N :} \quad R'_{eq} = \frac{10 \times 15}{10 + 15} = 6\,\Omega$$

R''_{eq} est la résistance équivalente de deux résistances R'_{eq} et R_2 montées en série :

$$R''_{eq} = R'_{eq} + R_2 \qquad \text{A.N :} \quad R'_{eq} = 6 + 4 = 10\Omega$$

R''_{eq} et R_1 sont montées en parallèle :

$$R_{eq} = R''_{eq} + R_1 \qquad \text{A.N :} \quad R_{eq} = \frac{10 \times 40}{10 + 40} = 8\,\Omega$$

Donc, la valeur de la résistance équivalente est : $R_{eq} = 8\Omega$.

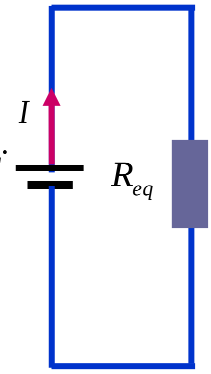


Figure II-24

2) Calcul de la valeur du courant fourni par la source de tension

D'après la loi d'Ohm : $E = R_{eq} I \Rightarrow I = \dfrac{E}{R_{eq}}$ A.N : $I = \dfrac{32}{8} = 4A$.

Exercice 2

On a : $E_1 = E_2 = 12V$, $E_3 = 6V$, $r_1 = 1\Omega$, $R_1 = 8\Omega$ et $R_2 = 18\Omega$.

1) Les nœuds du circuit sont A et B

2) Les mailles indépendantes dans ce circuit sont : $AFEBA$ et $ABCDA$

3) Les branches du circuit sont : $AFEB$, AB et $ADCB$.

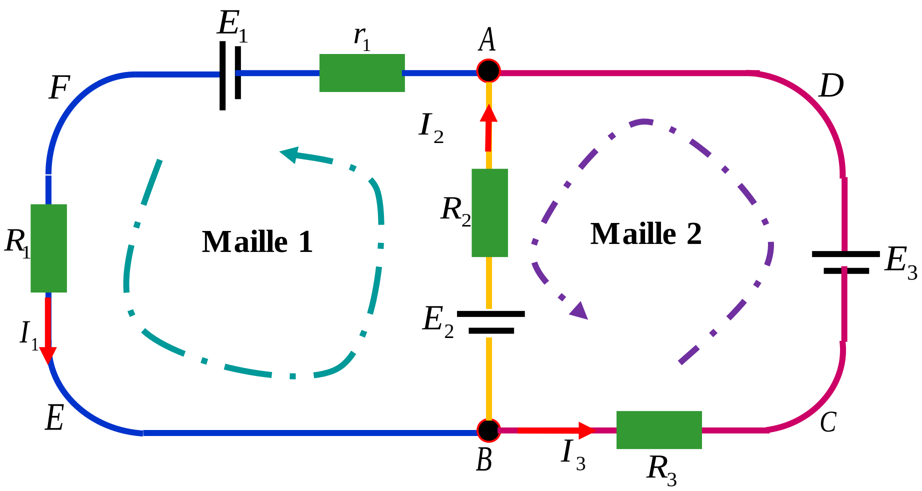


Figure II-25 : *montage électrique.*

4) Calcul des courants : I_1, I_2 et I_3.

Lois de Kirchhoff :

Loi des nœuds : $\sum I_e = \sum I_s \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow \quad I_3 = I_1 - I_2$

Loi des mailles : $\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$ ou $\sum RI - \sum E = 0$

La maille 1 : $-E_1 + R_1 I_1 - E_2 + R_2 I_2 + r_1 I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 + E_2 = (R_1 + r_1) I_1 + R_2 I_2$

La maille 2 : $-E_3 - R_2 I_2 + E_2 + R_3 I_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_3 - E_2 = R_3 I_1 - (R_2 + R_3) I_2$

Alors on a le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = (R_1 + r_1) I_1 + R_2 I_2 \\ E_3 - E_2 = R_3 I_1 - (R_2 + R_3) I_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax + By = E \\ Cx + Dy = F \end{cases}$$

Qui sera sous la forme matricielle: $\begin{pmatrix} (R_1+r_1) & R_2 \\ R_3 & -(R_2+R_3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$

Calcul du déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1+r_1) & R_2 \\ R_3 & -(R_2+R_3) \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 18 & -30 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \Delta = -270 - 216 = -486$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1+E_2 & R_2 \\ E_3-E_2 & -(R_2+R_3) \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 24 & 12 \\ -6 & -30 \end{vmatrix}}{-486} \Rightarrow I_1 = 1{,}333A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1+r_1) & E_1+E_2 \\ R_3 & E_3-E_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 24 \\ 18 & -6 \end{vmatrix}}{-486} \Rightarrow I_2 = 1A$$

$$I_3 = I_1 - I_2 \Rightarrow I_3 = 0{,}333A$$

Exercice 3

1) Les nœuds du circuit sont : *A, B, et D* (puisque, *A* et *C* électriquement sont confondus c-à-d même nœud).

2) Les mailles indépendantes dans ce circuit sont : *BCAB, BCADB et BCDB.*

3) Les branches du circuit sont : *AB, BD, CD et AD*.

4) Intensités dans toutes les branches du réseau.

Loi des nœuds : $\sum I_e = \sum I_s \quad \Rightarrow \quad I = I_1 + I_2$.

Loi des mailles : $\sum RI - \sum E = 0$

La maille *BCAB* : $-E_1 + R_1 I + R_2 I + R_3 I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (R_1+R_2)I + R_3 I_1 = E_1$

La maille *BCADB* : $-E_2 - R_4 I_2 + R_3 I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_3 I_1 - R_4 I_2 = E_2$

La maille *BCDB* : $-R_3 I_1 - R_5 I_3 + R_4 I_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_3 I_1 - R_4 I_2 + R_5 I_3 = 0$

On a : $I = I_1 + I_2$, alors :

$$(R_1+R_2)(I_1+I_2) + R_3 I_1 = E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (R_1+R_2+R_3)I_1 + (R_1+R_2)I_2 = E_1$$

Pour déterminer les valeurs des intensités I_1, I_2, I et I_3 on résoudre le système d'équations à trois inconnues utilisant la méthode de substitution ou la règle de Cramer (méthode de déterminant).

$$\begin{cases} (R_1+R_2+R_3)I_1 + (R_1+R_2)I_2 = E_1 \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 = E_2 \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 + R_5 I_3 = 0 \end{cases} .$$

$$I_1=\frac{R_4E_1+(R_1+R_2)E_2}{R_3(R_1+R_2)+R_4(R_1+R_2+R_3)},\quad I_2=\frac{R_3E_1-(R_1+R_2+R_3)E_2}{R_3(R_1+R_2)+R_4(R_1+R_2+R_3)},$$

$$I=I_1+I_2=\frac{(R_3+R_4)E_1-R_3E_2}{R_3(R_1+R_2)+R_4(R_1+R_2+R_3)}\ \text{et}\ I_3=\frac{-E_2}{R_5}.$$

Exercice 4

On a : $E_1=12V$, $E_2=20V$, $R_1=R_2=10\Omega$ et $R_3=15\Omega$.

1) Les nœuds du circuit sont : F et E.

2) Les mailles indépendantes dans ce circuit sont : $AFEBA$ et $FDCEF$.

3) Les branches du circuit sont : $FABE$, FE et $FDCE$.

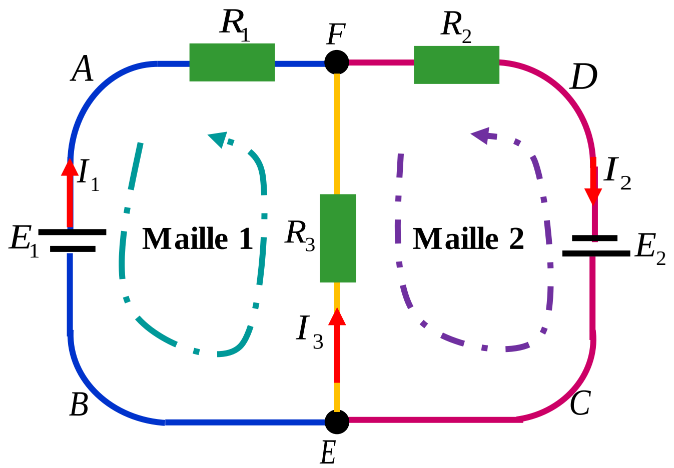


Figure II-26 : *montage électrique.*

4) Calcul des courants : I_1, I_2 et I_3.

Loi des nœuds : $\sum I_e=\sum I_s \Rightarrow I_2=I_1+I_3 \Rightarrow I_3=I_2-I_1$

Loi des mailles : $\sum RI-\sum E=0$

La maille 1 : $R_1I_1-R_3I_3=E_1 \Leftrightarrow (R_1+R_3)I_1-R_3I_2=E_1$

La maille 2 : $R_2I_2+R_3I_3=E_2 \Rightarrow (R_2+R_3)I_2-R_3I_1=E_2$

Alors on a le système des équations suivant :

$$\begin{cases}(R_1+R_3)I_1-R_3I_2=E_1\\ -R_3I_1+(R_2+R_3)I_2=E_2\end{cases}$$

Qui sera sous la forme matricielle: $\begin{pmatrix}(R_1+R_3) & -R_3\\ -R_3 & (R_2+R_3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\end{pmatrix}$

Calcul du déterminant Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_1+R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_2+R_3) \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = 400$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_1 & -R_3 \\ E_2 & (R_2+R_3) \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -15 \\ 20 & 25 \end{vmatrix}}{400} \Rightarrow I_1 = 1{,}5\,A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1+R_3) & E_1 \\ -R_3 & E_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \Rightarrow I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 12 \\ -15 & 20 \end{vmatrix}}{400} \Rightarrow I_2 = 1{,}7\,A$$

$$I_3 = I_2 - I_1 \Rightarrow I_3 = 0{,}2\,A$$

Exercice 5

Détermination de E_{th}

1) Débrancher R_L
2) Déterminer la tension entre les nœuds A et B.

$$E_{th} = \frac{R_3}{R_1+R_3}E\,.$$

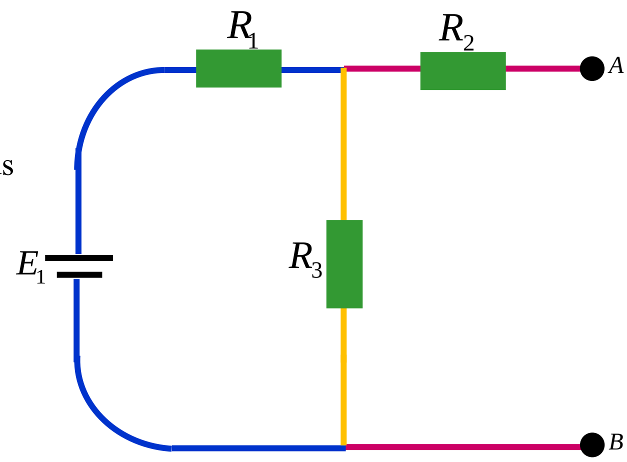


Figure II-27 : *montage électrique.*

Détermination de R_{th}
1) Débrancher R_{th}
2) Eteindre la source E_1
3) Déterminer la résistance entre les deux bornes A et B

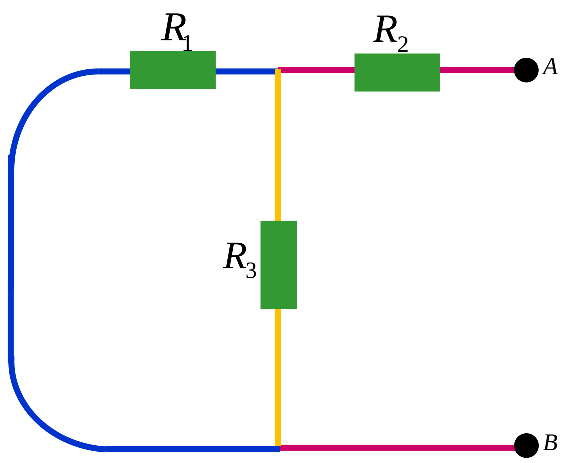


Figure II-28 : *montage électrique.*

$$R_{th} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3}$$

Le circuit équivalent de Thevenin apparait comme suit :

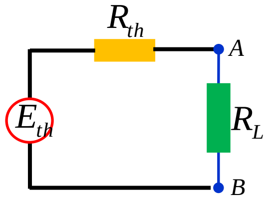


Figure II-29 : *circuit équivalent de Thévenin.*

$$I_L = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_L}$$

$$I_L = \frac{\frac{R_3}{R_1 + R_3} E}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + R_L} = \frac{R_3}{R_2(R_1 + R_3) + R_1 R_3 + R_L(R_1 + R_3)} E \,.$$

Chapitre III

Electromagnétisme

III.1 Introduction

Le mot «magnétisme» dérive du nom de la région qui porte le nom de «magnésie», située sur la côte ouest de l'actuelle Turquie, où le phénomène magnétique a été observé depuis fort longtemps. Cette région renfermait des gisements du minerai appelé «magnétite» qui a des propriétés spécifiques. En effet, on a observé que deux morceaux de ce minerai (appelés aimants) s'attirent ou se repoussent, comme ils peuvent donner leurs propriétés à un morceau de fer se trouvant proche d'eux. Le physicien Suédois Orsted, mit en évidence pour la première fois l'effet d'un courant électrique sur un aimant : un fil conducteur rectiligne est placé au-dessus et parallèlement à une aiguille aimantée montée sue pivot ; lorsqu'un courant électrique parcourt le conducteur, l'aiguille s'oriente perpendiculairement au fil et le sens de l'orientation change avec celui du courant.

On peut définir aussi l'électromagnétisme comme l'étude de l'ensemble des phénomènes liés aux interactions entre particules chargées. L'importance de l'électromagnétisme dans les sciences physiques et dans la société l'interaction électromagnétique. Elle est responsable, par exemple, des phénomènes suivants :

- ❑ De la cohésion des atomes.
- ❑ Des liaisons chimiques qui assurent la cohésion des molécules (rôle essentiel en biologie et donc dans la vie…).
- ❑ La cohésion de la matière condensée (liquide et solide).
- ❑ Des propriétés physiques d'un corps dans un état donné (viscosité, dureté etc…).
- ❑ Des phénomènes électriques et magnétiques proprement dit.
- ❑ De la lumière qui n'est qu'un domaine particulier des ondes électromagnétiques (ondes radio etc…) (voir cours de PT).

Cette liste n'est bien sur pas exhaustive.

Les applications industrielles et technologiques qui reposent sur les lois de l'électromagnétisme sont considérables. Ces applications ont façonné la société dans laquelle nous vivons. Voici une liste de ces dernières qui là encore n'est pas exhaustive :

- ❑ La production et le transport de l'électricité donc d'énergie.
- ❑ L'électronique qui est présente dans tous les appareils qui nous entourent de la machine à laver en passant par les ordinateurs, votre lecteur MP3 etc…
- ❑ La communication à distance : les ondes radio, les fibres optiques, les satellites, les téléphones portables etc…

On parle dès lors d'électromagnétisme les équations de Maxwell locales.

Dans un milieu conducteur:

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ équation de Maxwell Gauss

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ équation de Maxwell Faraday

$$div(\vec{B}) = 0$$ équation de Maxwell Thomson ou flux

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ équation de Maxwell Ampère

Avec les quantités suivantes dépendant du temps t et des coordonnées spatiales (x, y, z) :

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement le champ électrique (unité : V/m) et le champ magnétique (unité : Tesla ou T) sont des champs vectoriels.

$\vec{J}$ et ρ sont respectivement la densité volumique de courant électrique (unité : A/m^2 ; champ vectoriel) et la densité volumique de charge électrique (unité : C/m^3 ; champ scalaire).

ε_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité du vide ($\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$ unités SI) et la perméabilité magnétique du vide ($4\pi\times10^{-7}$ unités SI).

Dans un milieu diélectrique sans charge ($\rho = 0$), ni courant ($\vec{J} = \vec{0}$):

$$div(\vec{D}) = 0$$ équation de Maxwell Gauss

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ équation de Maxwell Faraday

$$div(\vec{B}) = 0$$ équation de Maxwell Thomson ou flux

$$\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ équation de Maxwell Ampère

Avec $\vec{D}$ est le champ déplacement électrique (unité : C/m^2) champ vectoriel.

Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad \text{(III-1)}$$

Avec $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ est la polarisation du milieu ou moment dipolaire électronique par unité de volume induit par le champ électrique de l'onde (unité : C/m^2) et χ est la susceptibilité du milieu, constante complexe (sans dimension).

On a donc un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope :

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}} \quad \text{(III-2)}$$

III.2 Définition d'un champ magnétique

Quels que soient les effets magnétiques observés en un point de l'espace, une grandeur est nécessaire pour les décrire et une seule ; c'est un champ vectoriel, appelé champ magnétique que nous désignerons par $\vec{B}$ (on dit encore champ d'induction magnétique). Par comparaison avec le champ électrique, une charge ou un ensemble de charges en mouvement, créent dans la région où elles se trouvent un champ magnétique. Ce champ magnétique agit sur une charge électrique externe q avec une force $\vec{F}_B$. Il en est de même pour un courant électrique, puisque par définition, c'est un ensemble de charges.

III.2.1 Propriété de superposition

Si plusieurs champs magnétiques : $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \ldots, \vec{B}_n$ agissent simultanément sur une charge électrique en mouvement, ou sur une aiguille aimantée, le champ magnétique $\vec{B}$ équivalent, est égal à la somme vectorielle de tous les champs agissants:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \ldots + \vec{B}_n} \qquad \text{(III-3)}$$

Force de magnétique : soit une particule chargée de charge q, est en mouvement dans un référentiel (R) où il existe l'interaction magnétique $\vec{B}$. La force magnétique exercée sur A est donnée par :

$$\boxed{\vec{F}_{mag} = q\vec{v}_{A/(R)} \wedge \vec{B}} \qquad \text{(III-4)}$$

III.3 Différents lois

III.3.1 Loi de Lorentz

La force que subit une charge électrique q en mouvement avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique caractérisée par le vecteur $\vec{B}$ est appelée la force électromagnétique ou **force de Lorentz** et s'écrit :

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)} \qquad \text{(III-5)}$$

III.3.2 Loi de Laplace

On considère un conducteur de longueur l parcouru par une densité courant électrique $\vec{J}$ et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ perpendiculaire au conducteur, il subit une force magnétique, dite force de Laplace, dont l'expression vectorielle est :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}} \qquad \text{(III-6)}$$

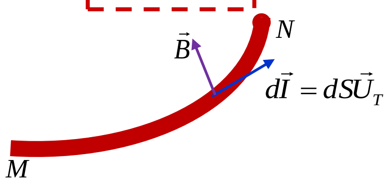


Figure III-1 : *conducteur parcouru par un courant électrique.*

Avec $d\vec{I}$ étant un élément de courant et $\vec{U}_T$ vecteur tangent d'abscisse curviligne.

Cette force est volumique ; sur un volume la force totale est

$$\boxed{\vec{F} = \iiint \vec{J} \wedge \vec{B}\, d\tau} \qquad \text{(III-7)}$$

III.3.3 Loi de d'Ohm

Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur fixe est

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\vec{E}} \qquad \text{(III-8)}$$

Avec σ est la conductivité du milieu (unité : S/m) ; inverse de la résistivité, mesurée en Ω.m.

Loi d'Ohm locale pour un milieu conducteur mobile est

$$\boxed{\vec{J} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)} \qquad \text{(III-9)}$$

Avec $\vec{v}$ est la vitesse de déplacement du conducteur $\vec{v} \wedge \vec{B}$ dite champ électromoteur.

III.3.4 Loi de Faraday

Considérons un circuit fermé C et prenons le flux de l'équation de Maxwell Faraday sur la surface S appuyée sur son contour et en appliquant le théorème de Stokes, il vient :

$$\boxed{\vec{E} \cdot d\vec{l} = e = -\partial\Phi(\vec{B}) / \partial t} \qquad \text{(III-10)}$$

C'est la loi de Faraday.

Avec e est la force électromotrice d'induction (fem) mesurée en Volts et $\Phi(\vec{B})$ est le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface S du hachurée orientée par le sens du courant induit (arbitrairement choisi), comme le montre la figure (III-2) ci-dessous.

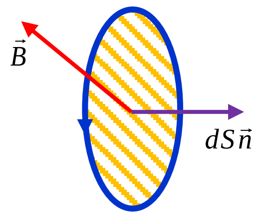


Figure III-2 : *surface orientée par le sens du courant induit.*

III.3.5 Loi de Lenz

La loi de Lenz (ou loi de Lenz-Faraday) sert en électromagnétisme et permet de déterminer le sens du courant induit.

Enoncé de la loi :

Un changement d'état d'un système électromagnétique provoque un phénomène dont les effets tendent à s'opposer à ce changement.

La loi de Lenz peut alors s'énoncer ainsi :

La polarité de la tension induite est telle que si le courant peut circuler, il génère un flux qui tend à s'opposer à la variation du flux inducteur.

Les effets de l'induction s'opposent à la cause qui leur a donné naissance. C'est le signe "-" de la loi de Faraday.

Exemple d'induction dans une spire de courant en champ magnétique variable.

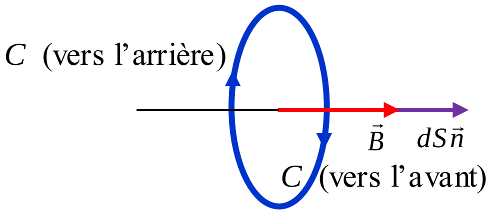


Figure III-3 : *spire de courant en champ magnétique variable.*

Par exemple, lors du déplacement d'une bobine dans un champ magnétique (dans un microphone électrodynamique, par exemple), une force électromotrice (fem) est créée qui fait circuler un courant dans la bobine. Ce courant produit une force de Laplace qui tend à s'opposer au déplacement initial.

C'est la variation temporelle du flux magnétique, et non sa simple présence, qui va produire une force électromotrice aux bornes de la bobine. Si on note e la valeur de la fem, N le nombre de spires de la bobine, t le temps et φ celle du flux magnétique (supposé homogène à l'intérieur de la bobine), on obtient cette expression mathématique de la loi de Lenz Faraday :

$$\boxed{e = -N\frac{\partial \Phi}{\partial t}} \quad \text{(III-11)}$$

Avec : e est en volts, N représente le nombre de spires de la bobine et Φ est en webers. Le signe - est pour indiquer que la polarité de la tension est telle qu'elle s'oppose à la cause qui l'a produite.

III.3.6 Loi de Biot et Savat

On considère un circuit filiforme fermé parcouru par un courant d'intensité I constante (Figure III-3). Un élément dl de ce conducteur produit un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}$ égal à :

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl\vec{n} \wedge \vec{u}_r} \quad \text{(III-12)}$$

Avec $\vec{u}_r$ vecteur unitaire tangent suivant la direction du vecteur position $\vec{r}$. Le sens de $d\vec{B}$ est déterminé par la règle de la main droite.

Si on veut calculer l'induction magnétique totale $\vec{B}$, produite par tout le conducteur, il suffit d'intégrer :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dl\vec{n} \wedge \vec{u}_r}{r^2}} \qquad \text{(III-13)}$$

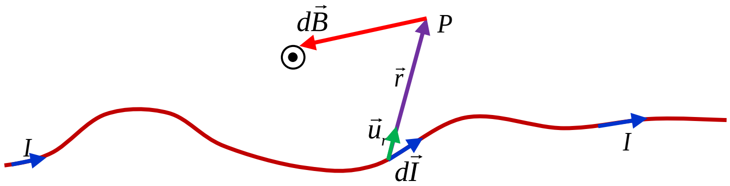


Figure III-4 : *champ magnétique élémentaire créé par un conducteur électrique élémentaire.*

III.3.7 Loi d'Ampère

C'était Oersted, qui le premier a démontré expérimentalement que le courant électrique produit un champ magnétique dans la région qui l'entoure. Les expériences dans ce domaine se sont succédées durant plusieurs années. Il a fallu attendre l'année 1826 pour qu'Ampère parvienne enfin, en l'espace de quelques jours, à la loi empirique qui porte son nom.

La figure (III-5) représente plusieurs courants électriques passant à travers la courbe fermée (C).

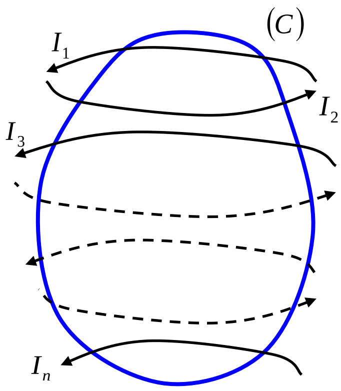


Figure III-5 : *plusieurs courants électriques passant à travers la courbe fermée (C).*

La circulation du champ magnétique le long d'une courbe fermée qui embrasse les courants $I_1, I_2, I_3, \ldots I_n$, est égale au produit de la permittivité magnétique dans le vide (μ_0) par la somme algébrique des intensités de courants embrassés par le contour (C).

$$\boxed{A_B = \oint B.d\vec{lu} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_n} \qquad \text{(III-14)}$$

III.4 Dipôle magnétique

Toute boucle (ou autre forme quelconque) de courant électrique sur laquelle agit un couple électromagnétique est appelé «dipôle magnétique». On appelle vecteur moment magnétique, ou moment dipolaire magnétique, du circuit d'un cadre d'aire S l'expression :

$$\vec{M} = I\,S\,\vec{n} \qquad \text{(III-14)}$$

La figure (III-6) représente le vecteur du moment magnétique dans le cas d'une spire.

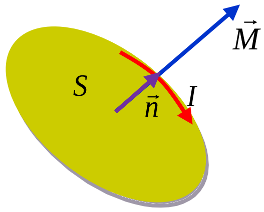


Figure III-6 : *moment magnétique.*

Partant de cette définition, on peut écrire l'expression du couple électromagnétique sous la forme :

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B} \Rightarrow \left\|\vec{C}\right\| = M\,B\sin\theta \qquad \text{(III-15)}$$

Avec θ est l'angle entre $\vec{M}$ et $\vec{B}$.

Exercices

Exercice 1

Un courant électrique traverse un conducteur cylindrique de longueur infinie et de rayon R. La densité de courant J est constante à travers toute la section du cylindre et parallèle à l'axe (Oz). On considère I_0 l'intensité totale qui traverse le cylindre. Calculer le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Représenter graphiquement ses variations.

Exercice 2

La figure (III-7) représente un fil infiniment long, parcouru par un courant électrique d'intensité I. On se propose de déterminer le champ d'induction magnétique produit par tout le fil en un point P situé sur l'axe Oy.

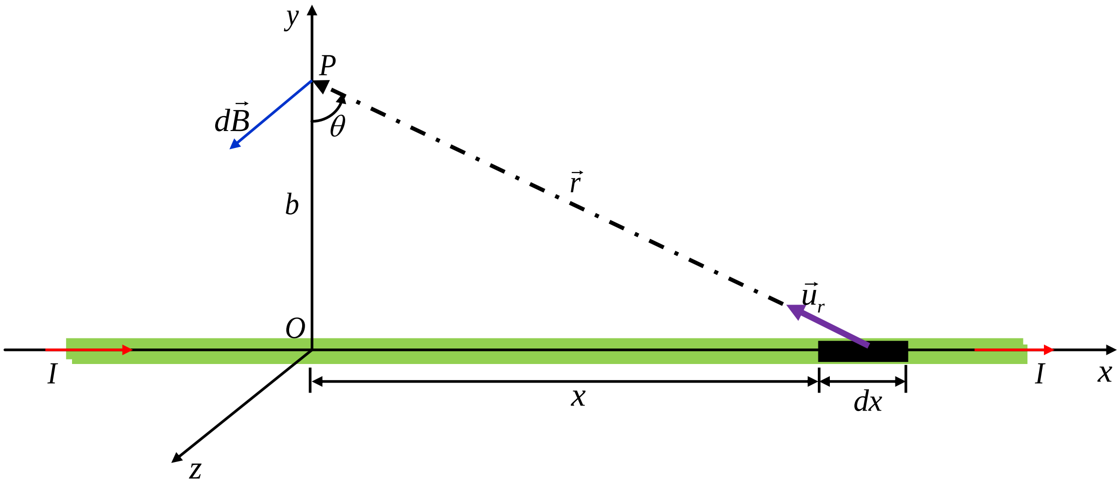


Figure III-7 : *fil infiniment long.*

Exercice 3

Un anneau parcouru par un courant électrique d'intensité constante I. On se propose de trouver le champ d'induction magnétique sur l'axe (Oz) de l'anneau.

Corrigés

Exercice 1

1) Détermination du champ magnétique $B(r)$

L'application du théorème d'Ampère :

$$\boxed{A_B = \oint B.d l\vec{u} = 2\pi B(r) r}$$

$$2\pi B(r) r = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

Cette expression représente l'intensité du champ magnétique à l'extérieur du cylindre, et qui résulte du passage de courant électrique dans le cylindre.

$$J = \frac{I_0}{S_0} = \frac{I}{S} \Rightarrow I = \frac{I_0}{S_0} S$$

$$S_0 = \pi R^2 \text{ et } S = \pi r^2$$

Pour $r > R$:

$$2\pi B(r) r = \mu_0 I_0$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi}\frac{1}{r}}$$

Pour $r < R$:

$$2\pi B(r) r = \mu_0 I = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I_0$$

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2} r}$$

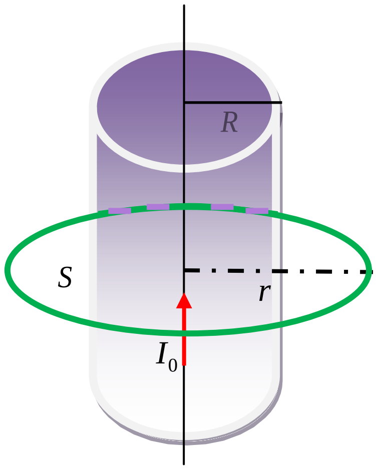


Figure III-8 : *cas de* $r > R$

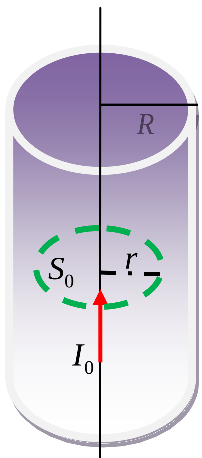


Figure III-9: *cas de* $r < R$.

Comme on peut le voir, ce champ est inversement proportionnel à la distance r ($R < r$). Quant à l'intérieur du cylindre $r < R$ le courant qui passe à travers le cercle (figure III-9) est I . Dans ce cas, l'intensité du champ magnétique en un point quelconque à l'intérieur du cylindre est proportionnelle à la distance séparant l'axe du cylindre du point considéré.

2) Représentation graphique du champ magnétique $B(r)$

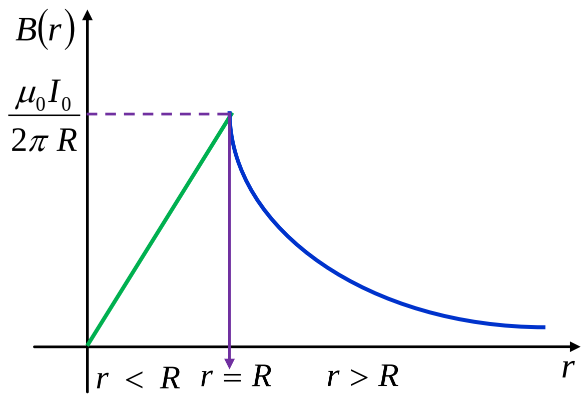
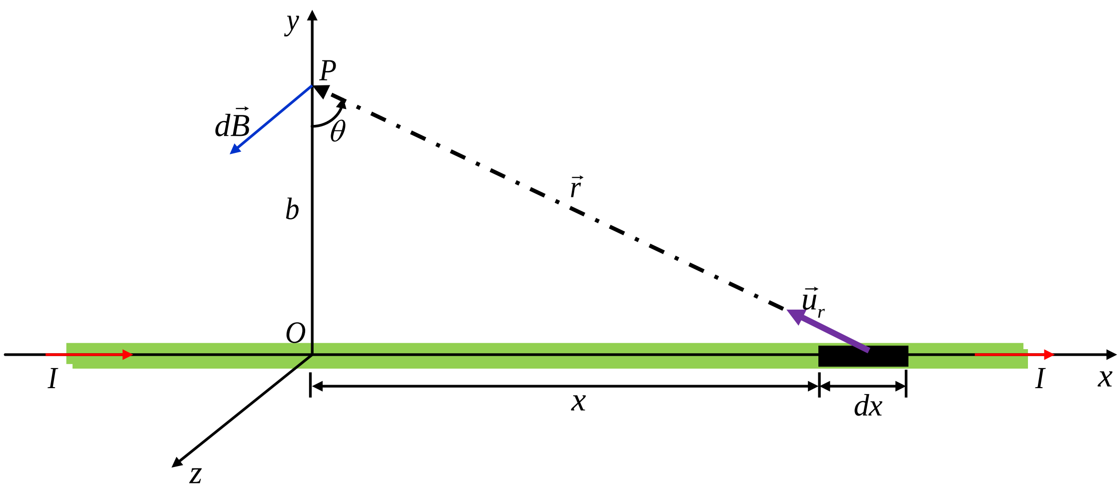


Figure III-10 : *représentation graphique de l'intensité du champ magnétique.*

Le champ magnétique est continu à la traversée du cylindre (en $r = R$) : c'est un résultat général pour des distributions volumiques de courants.

Exercice 2

Pour pouvoir appliquer la loi de Biot et Savard, on doit déterminer les composantes des vecteurs $d\vec{l}$ et $\vec{r}$ dans le repère cartésien $Oxyz$.



Puisque $\vec{r} = r\vec{u}_r \Rightarrow \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, on peut écrire la loi sous la forme :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{li} = \begin{vmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } \vec{r} = \begin{vmatrix} -x \\ b \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$d\vec{li} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & 0 \\ -x & b & 0 \end{vmatrix} = b\,dx\vec{k}$$

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{b\,dx}{r^3}\vec{k}}$$

Puisque $r = \frac{b}{\cos\theta}$, $x = btg\theta \Rightarrow dx = \frac{b}{\cos^2\theta}d\theta$.

Par substitution, on obtient : $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\cos\theta\, d\theta\, \vec{k}$

En intégrant cette expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\vec{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\vec{k}$$

Finalement, on arrive à l'expression finale du champ d'induction magnétique produit par tout le fil est :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}}$$

Le vecteur $\vec{B}$ dans ce cas, est perpendiculaire au plan Oxy et dirigé selon des règles d'orientation.

Exercice 3

Un élément dl d'une spire, parcourue par un courant I produit en un point M de l'axe de n spires, un champ magnétique $d\vec{B}$. Il est perpendiculaire a $dl\vec{n}$ et $\vec{u}_r$.

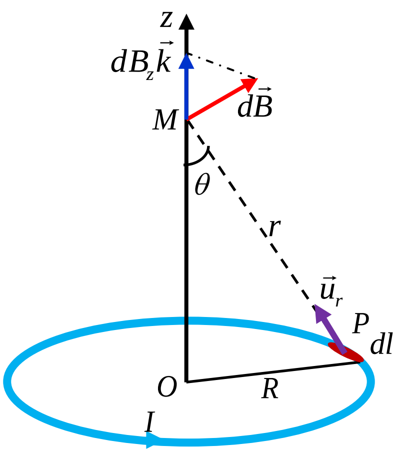


Figure III-11 : *anneau parcouru par un courant électrique d'intensité constante* I.

L'application du théorème d'Ampère le module champ magnétique $d\vec{B}$ est :

$$\boxed{dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}}$$

En raison de la symétrie du problème, toutes les composantes perpendiculaires à l'axe s'éliminent, et les composantes suivants (Oz) :

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\sin\theta$$

S'ajoutent. Le champ résultant est porté par l'axe de spire et a pour valeur :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\int_0^{2\pi R} dl \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I R \sin\theta}{2}\frac{1}{r^2}$$

R étant le rayon de la spire et sachant que $\sin\theta = \frac{R}{r}$:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\frac{1}{r^3} \text{ soit } B = \frac{\mu_0 R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}} I$$

Au centre de la spire, le champ a pour valeur :

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

Bibliographie

Bibliographie

1. J.L. Caubarrere, J Fourny, et H Ladjouze. "*Electricité, ondes, cours, exercices et travaux pratiques*". 1ère année de Sciences Exactes et de la Technologie. 8ème Edution, OPU. Pages 269 (2009).
2. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. "*Physique 2. électricité et magnétisme, cours et exercices corrigés*". Licence 1ère et 2ème année. Prépas. 6ème Edition, Dunod. Pages 299 (2003).
3. J. Baliti. "*Electricité : électrostatique : cours et applications*". Université Sultan Moulay Slimane. Pages 39 (2018).
4. A. Mustapha. "*Polycopié de cours physique 2*". USTO-MB. Pages 69 (2015).
5. A. Fizazi. "*Electricité et magnétisme*". OPU, (2012).
6. E. Amzallag, J. Cipriani, J. Bennaim et N. Piccioli. "*La physique du Fac, électrostatique et électrocinétique*". 2ème Edition, Edi-Science, (2006).
7. D. Sivoukhine, "*Cours de physique général, tome III électricité*" Union Soviétique, traduction Française, Edition Mir, (1987).
8. M. Berlin, J.P. Faroux et J. Renault, "*Electromagnétisme 1, électrostatique*", Dunod, (1977).
9. J.L. Queyrel, J. Mesplède, "*Précis de physique, électricité 2, cours, exercices résolus*", Bréal, (1985).
10. J. Faget et J. Mazzaschi, "*Travaux dirigés de physique, généralités*", Vuibert, (1970).