République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli-Mascara-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Polycopié de Cours

Analyse 1

Préparé par: BOUTEFFAL Zohra

Ce cours est destiné aus étudiants de première année LMD

Mathématiques et Informatique.

Année universitaire 2019-2020

Table des matières

Avant-Propos

Ce polycopié d'Analyse 1 est destiné aux étudiants de la première année Mathématiques Informatique (MI), et aussi à tous les étudiants de la première année LMD des filières technologiques et scientifiques.
Il permettra aux étudiants d'apprendre à raisoner, en outre il prérente les algorithmes de calcul qui sont nécessaires en pratique. Ce polycopié couvre différents sujets d'Analyse conformément aux derniers programmes, contenant cinq parties:

- Le Corps des Nombres Réels.
- Suites de Nombres Réels.
- Fonctions Réelles d'une variable réelle.
- Fonctions dérivables.
- Fonctions Elémentaires.

Chaque partie répond aux exigences de bases que les étudiants auront besoin dans leurs parcours. Puisse ce manuel aider les étudiants dans leurs apprentissage des mathématiques. Ce polycopié peut contenir certaines erreurs et fautes de frappe, prière de les signaler afin de l'améliorer.

L'auteur

Symboles logiques et mathématiques

Symboles	Signification	Exemple
$=$	égalité	$x = y$: x est égale à y
$\vee$	ou	$a \vee b$: a ou b
$\wedge$	et	$a \wedge b$: a et b
$\Longrightarrow$	implication	$a \Longrightarrow b$: a implique b ou a donc b;
$\Longleftrightarrow$	équivalence	$a \Longleftrightarrow a$: a est équivalent à b: condition nécessaire et suffisante
$\in$	appartenance	$a \in A$: a appartient à A
$\subset$	inclusion	$A \in B$: A est inclus dans B
$\supset$	contenance	$B \supset A$: B contient A
$\cap$	intersection	$A \cap B$: A inter B
$\cup$	réunion	$A \cup B$: A union B
$\emptyset$	vide	
$\leq$	inégalités large	$x \leq y$: x est inférieur ou égale à y
$\geq$	inégalité large	$y \geq x$: y est supérieur ou égale à x
$<$	inégalité stricte	$x < y$: x est strictement inférieur à y
$>$	inégalité stricte	$y > x$: y est strictement supérieur à x
∞	infini	

Alphabet grec

α : alpha	β : bêta
γ, Γ : gamma	ϕ, Φ : phi
δ, Δ : delta	χ : chi
ζ : dzêta	ϵ : epsilon
ρ : rho	τ : tau
θ, Θ : têta	π, Π : pi
σ, Σ : sigma	η : nû
λ, Λ : lambda	μ : mû
ω, Ω : omêga	ξ, Ξ : ksi
$\psi; \Psi$: psi	ν : nû

Chapitre 1

Le Corps des Nombres Réels

1.1 Sous-ensemble remarquables de $\mathbb{R}$

Dans la suite, on note

$\mathbb{N} = \{$ entiers positifs $\} = \{0, 1, 2, 3.....\}$

$\mathbb{Z} = \{$ entiers relatifs $\} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$

$\mathbb{Q} = \{$ nombres rationnels $\} = \{\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\}$

$\mathbb{R} = \{$ nombres réels $\}$

1.2 L'ensemble des réels, axiomatique

Théorème 1.2.1 *Le corps des nombres réels est un ensemble* $\mathbb{R}$ *dans lequel sont définies:*

(i) Deux applications $(x, y) \mapsto x + y$ *et* $(x, y) \mapsto xy$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui prolongent les opérations d'addition et de multiplication définies dans* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$*,*

(ii) Une relation d'ordre totale $\leq$ *ou* $\geq$*, qui satisfont aux axiomes suivants:*

$\mathbb{R}$ ***est un corps commutatif;***

(A_1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$x + y = y + x,$$

(A_2) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$

(A_3) *Il existe un élément* $0 \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$0 + x = x \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

(A_4) $\forall x \in \mathbb{R}$, *il existe un élément* $-x \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$x + (-x) = 0,$$

Conclusion: *On dit que* $(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe commutatif.*

(A_5) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$xy = yx,$$

(A_6) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x(yx) = (xy)z,$$

(A_7) *Il exixtse un élément* $1 \neq 0$ *tel que*

$$1x = x \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

(A_8) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, *il existe un élément* $x^{-1} \in \mathbb{R}$ $(x^{-1} = \frac{1}{x})$ *tel que* $xx^{-1} = 1$,

Remarque: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

(A_9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x(y+z) = (xy) + (xz),$$

Conclusion:$(\mathbb{R}, +, \times)$ *muni des axiomes* $(A_1$ *à* $A_9)$ *est dit corps commutatif.*

$\mathbb{R}$ ***est un corps totalement ordonné;***

(A_{10}) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$x \leq x$$

(A_{11}) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \Longrightarrow x \leq z$$

(A_{12}) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Longrightarrow x = y$$

Conclusion:*On dit que la relation* $\leq$ *définit sur* $\mathbb{R}$ *une relation d'ordre.*

(A_{13}) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$ou\ bien\ x \leq y\ ou\ bien\ y \leq x$$

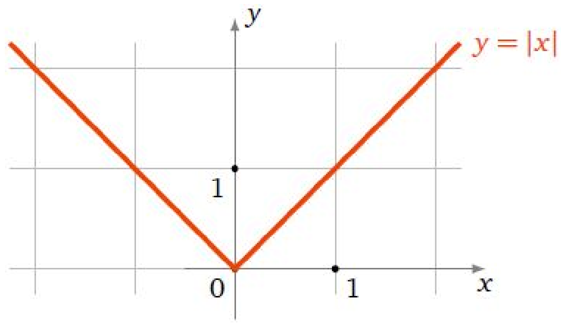
On dit que l'ordre est total dans $\mathbb{R}$

1.3 Valeur Absolue

Pour un nombre réel x, on définit la valeur absolue de x par:

$$|x| = \begin{cases} x\ si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases}$$

Voici le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$:



Proposition 1.3.1 ***Propriétés de la valeur absolue***

$\forall x \in \mathbb{R}$, *on a:*

1. $|x| \geq 0$; $\quad |-x| = |x|$; $\quad |x| > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$

2. $\sqrt{x^2} = |x|$

3. $|xy| = |x||y|$

4. $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

5. *Inégalité triangulaire* $|x+y| \leq |x| + |y|$

6. *Seconde inégalité triangulaire* $||x| - |y|| \leq |x - y|$

7. $$\begin{cases} |x| \leq M \\ M \in \mathbb{R}^* \end{cases} \Longrightarrow -M \leq x \leq M$$

1.4 La fonction partie entière

Définition 1.4.1 *Soit x un nombre réel. Il existe un unique entier relatif, la partie entière notée $E(x)$, tel que:*

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemple 1.4.1

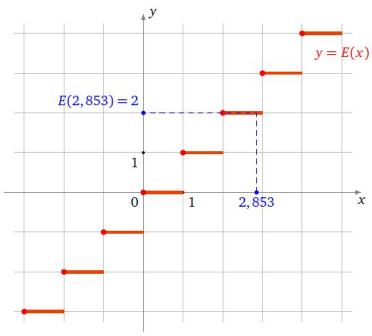
(1) $E(2.853) = 2, \quad E(\pi) = 3, \quad E(-3.5) = -4$

(2) $E(x) = 3 \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$

Remarque 1.4.1

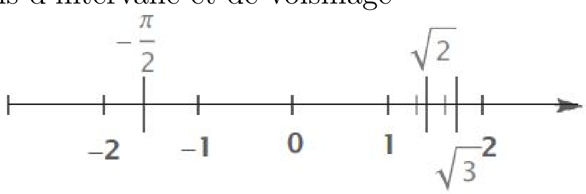
(1) On note aussi $E(x) = [x]$

(2) Voici le graphe de la fonction parie entière $x \mapsto E(x)$



1.5 Les intervalles

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée, appellée **droite des réels**, où il faut pouvoir se repérer. À cet effet, on introduit les notions d'intervalle et de voisinage



Définition 1.5.1 *Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété:*

$$\forall a, b \in I, \, \forall x \in \mathbb{R} \, (a \leq x \leq b \Longrightarrow x \in I)$$

1.6 Les types d'intervalles de $\mathbb{R}$

Dans ce qui suit, a, b, x_0 sont des réels tels que $a < b$. Le tableau suivant reprend les différents types d'intervalles de $\mathbb{R}$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \, a \leq x \leq b\}$ Intervalle fermé borné (ou segment)
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, \, a < x < b\}$ Intervalle ouvert et borné
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, \, a < x \leq b\}$ Intervalle semi-ouvert et borné (ouvert à gauche, fermé à droite)
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, \, a \leq x < b\}$ Intervalle semi-ouvert et borné (fermé à gauche, ouvert à droite)
$\emptyset$: Ensemble vide ne contient aucun nombre réel
$\{a\} = [a, a]$ Singleton est un ensemble ne contient qu'un seul élément
$]x_0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, \, x > x_0\}$ Intervalle ouvert
$[x_0, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, \, x \geq x_0\}$ Intervalle fermé
$]-\infty, x_0[= \{x \in \mathbb{R}, \, x < x_0\}$ Intervalle ouvert
$]-\infty, x_0] = \{x \in \mathbb{R}, \, x \leq x_0\}$ Intervalle fermé
$]-\infty, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{R}$ tout enrier

Remarque 1.6.1

1. $l = b - a$, *longueur de l'intervalle.*
2. $c = \frac{a+b}{2}$, *centre de l'intervalle.*

Adhérence d'un intervalle

Définition 1.6.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ avec $A \neq \emptyset$, on dit que x est adhérent à A si pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contient x rencontre A. On écrit $x \in \overline{A}$.*

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall I \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ et } x \in I \text{ alors } I \cap A \neq \emptyset$$

Remarque 1.6.2

- $A \subset \overline{A}$.
- $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.
- *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Son adhérence $\overline{I}$ est l'ensemble tel que:*
  - ✓ *Si I est un segment, alors $\overline{I} = I$;*
  - ✓ *Si I est de la forme $]a, b[$ ou $]a, b]$ ou $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\overline{I} = [a, b]$;*
  - ✓ *Si I est de la forme $]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\overline{I} = [a, +\infty[$;*
  - ✓ *Si I est de la forme $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\overline{I} =]-\infty, a]$;*
  - ✓ *Si I l'ensemble vide $\emptyset$, alors $\overline{I} = \emptyset$*
  - ✓ *Si $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, alors $\overline{I} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$*

Définition 1.6.2 *On appelle voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$ un sous-snsemble de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]a - \eta, a + \eta[$, où η est un réel strictement positif.*

Remarque 1.6.3 *On peut étendre la notion de voisinage à $+\infty$ ou $-\infty$; ainsi, un voisinage de $+\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]x_0, +\infty[$, où x_0 est un nombre réel quelconque.*
De même, un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert de la forme $]-\infty, x_0[$, où x_0 est un nombre réel quelconque.

1.7 Borne supérieure et inférieure d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$

1.7.1 Majorants, minorants

Définition 1.7.1 *Soient M, m deux réels quelconque et A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

(1) M est appelé majorant de A (ou que A est majoré par M) si:

$$\forall x \in A;\ x \leq M$$

(1) m est appelé minorant de A (ou que A est minoré par m) si:

$$\forall x \in A;\ x \geq m$$

Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est borné.

Exemple 1.7.1

- ◇ *3 est un majorant de $]0, 2[$.*
- ◇ *-7, $-\pi$, 0 sont des minorants de $]0, +\infty[$ mais il n'y a pas de majorant.*
- ◇ *le sous-ensemble $]-\infty, 1]$ de $\mathbb{R}$ est majoré et non minoré.*

1.7.2 Maximum, minimum

Définition 1.7.2 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est un plus grand élément de A si:*

$$\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A\ x \leq \alpha$$

S'il existe, le plus grand élément est unique et s'appelle aussi le maximum, on le note alors $maxA$

Le plus petit élément de A s'appelle le minimum, noté $minA$, s'il existe est le réel α tel que

$$\alpha \in A \text{ et } \forall x \in A \; x \geq \alpha$$

Exemple 1.7.2

- ◇ $max[a,b] = b, min[a,b] = a.$
- ◇ *L'intervalle* $]a,b[$ *n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.*
- ◇ *L'intervalle* $[0,1[$ *a pour plus petit élément* 0 *et n'a pas de plus grand élément.*

1.7.3 Borne supérieure, borme inférieure

Définition 1.7.3 *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et a un réel:*

- *a est la borne supérieure de A si a est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le not $supA$.*
- *a est la borne inférieure de A si a est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $infA$.*

Exemple 1.7.3

- ◇ $sup[a,b] = b$,
- ◇ $inf[a,b] = a$,
- ◇ $sup]a,b[= b$,
- ◇ $]0,+\infty[$ *n'admet pas de borne supérieure.*
- ◇ $inf]0,+\infty[= 0.$

Théorème 1.7.1 *Toute partie de* $\mathbb{R}$ *non vide et majorée admet une borne supérieure. De la même facon: Toute partie de* $\mathbb{R}$ *non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Proposition 1.7.1 *(Caractérisation de la borne inférieure)*
Soit A *une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$. *La borne supérieure de* A *est l'unique réel* $supA$ *tel que* $M = supA$ *ssi:*

1. *Pour tout* $a \in A, M \leq a,$

2. *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $a_\epsilon \in A$ *tel que* $M \leq a_\epsilon < M + \epsilon$

Démonstration Supposons que $M = supA$. M est un majorant de A d'où 1.
Pour 2., on considère $\epsilon > 0$. Comme M est le plus petit des majorants de A, $M - \epsilon$ n'est pas un majorant car plus petit que M.
Donc, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $M \leq a_\epsilon < M + \epsilon$

1.8 $\mathbb{R}$ est un coprs archimèdien

Propriété d'Archimède

On démontre que l'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie le **principe d'Archimède** suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

Cette proppriété s'écrit aussi comme suit:

$$\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : nh > x$$

1.9 Droite numérique achevée de $\mathbb{R}$

Définition 1.9.1 *On appelle droite numérique achevée* $\overline{\mathbb{R}}$ *l'ensemble obtenu par adjanction à* $\mathbb{R}$ *les deux nouveaux éléments distincts notés* $+\infty$ *et* $-\infty$ *muni de la relation d'ordre total.*

Les opérations sur $\mathbb{R}$ s'étendent en partie à $\overline{\mathbb{R}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$x + (-\infty) = (+\infty) + x = +\infty$$

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$$

$$x(+\infty) = (+\infty)x = \begin{cases} +\infty \ si \ x > 0 \\ -\infty \ si \ x < 0 \end{cases}$$

$$x(-\infty) = (-\infty)x = \begin{cases} +\infty \ si \ x < 0 \\ -\infty \ si \ x > 0 \end{cases}$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

La somme $(+\infty) + (-\infty)$ n'est pas définie

Le produit $0(\pm\infty)$ n'est pas défini

Chapitre 2

Suites de Nombres Réels

2.1 Généralités sur les suites numériques

On appelle **suite numérique** toute application d'une partie de $\mathbb{N}$ sur un ensemble de nombres donc sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous ne considèrons ici que les suites réelles. La suite sera dite de terme général u_n et elle sera notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement $(u_n)_n$.

a/ **Définition explicite**

Une suite (u_n) est dite explicite s'il est possible de calculer directement u_n à partir de n. On note alors $u_n = g(n)$ avec g une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (et le plus souvent sur $\mathbb{R}^+$ également)

Exemple: $u_n = 2n + 3$

b/ **Définition par récurrence**

Une suite est définie par récurrence si le terme u_{n+1} peut être défini à partir de u_n:

$u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction définie le plus souvent sur $\mathbb{R}$.

Exemple: $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 5$ et $u_0 = 2$

Définition 2.1.1 *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle:*

1. *Une suite $(u_n)_n$ est dite majorée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \; u_n \leq M$$

2. *Une suite $(u_n)_n$ est dite minorée si et seulement si*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \; m \leq u_n$$

3. *Une suite $(u_n)_n$ est dite bornée si et seulement si elle est, à la fois minorée et majorée*

$$(u_n)_n \textit{ est bornée} \Leftrightarrow \exists A > 0, \forall n \in \mathbb{N} \; |u_n| \leq A$$

4. *Une suite $(u_n)_n$ est dite croissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} \geq u_n \textit{ i.e. } (u_{n+1} - u_n) \geq 0$$

   elle sera dite strictement croissante si l'inégalité est stricte.

5. *Une suite $(u_n)_n$ est dite décroissante si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} \leq u_n \textit{ i.e. } (u_{n+1} - u_n) \leq 0$$

   elle sera dite strictement croissante si l'inégalité est stricte.

6. *Une suite $(u_n)_n$ est dite stationnaire si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+1} = u_n \textit{ i.e. } (u_{n+1} - u_n) = 0$$

7. *Une suite sera dite monotone si elle est croissante* **ou** *décroissante.*

2.2 Suites convergentes-Suites divergentes

Définition 2.2.1 *On dit que la suite $(u_n)_n$* **converge** *vers l ou admet l pour limite (l un nombre réel) si:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}; \, \forall n \in \mathbb{N}, \, (n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon)$$

On écrit alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Définition 2.2.2 *Une suite qui n'est pas convergente est dite* **divergete**.

Théorème 2.2.1 *Si la suite (u_n) converge vers une limite l, cette limite l est unique.*

Proposition 2.2.1 *Toute suite convergente est bornée.*

Attention: La réciproque est fausse en général.

Contre-exemple: Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \, u_n = (-1)^n$. (u_n) est bornée mais pas convergente.

Technique: Si $u_n = f(n)$, alors la limite de la fonction f en $+\infty$ est la limite de la suite (u_n).

Théorème 2.2.2 *(Théorème de comparaison)*

1. *Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

2. *Si, à partir d'un certain rang,$|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

3. *Si, à partir d'un certain rang,$u_n \leq v_n$ et si les deux suites convergent, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \leq \lim_{n \to +\infty} v_n$$

Théorème 2.2.3 *(Théorème de Gendarme)*

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ *et si* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$*, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = l$$

Remarque 2.2.1 *Ce théorème est connu sous plusieurs appellations, théorème d'encadrement, théorème des trois suites ou encore théorème des gendarmes.*

Démonstration: La suite $(u_n)_n$ converge vers l, donc tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang n_1. De même, la suite $(w_n)_n$ converge vers l, donc tout intervalle ouvert contenant tous les termes de la suite $(w_n)_n$ à partir d'un certain rang n_2. En prenant $n_0 = max(n_1, n_2)$, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang n_0 puisque $u_n \leq v_n \leq w_n$. Donc la suite (v_n) converge vers l

Exemple 2.2.1

- ✓ *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \frac{n}{n+1}$*. On a* $u_n = f(n)$ *avec* $f(x) = \frac{x}{x+1}$*. Comme* $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = 1$*, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ *et cette suite converge vers 1.*
- ✓ *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_n = 2^n$*. Pour tout entier naturel* n*,* $u_n > 0$ *et* $u_{n+1} > u_n$*, donc la suite est strictement croissante, minorée par 1 et non majorée.* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$*, donc la suite est divergente.*

2.3 Convergence des suites monotones

Théorème 2.3.1

1. *Si la suite* (u_n) *est croissante et admet un majorant* M *alors cette suite est convergente et sa limite* l *est inférieure ou égale à* M

Attention:

on a $l \leq M$ *et non-nécessairement* $l = M$. *Mais* $l = \lim_{n \to +\infty} u_n = \sup u_n$.

Exemple: *La suite définie par* $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *est croissante et majorée par 2, mais sa limite* $l = 1$.

2. *Si la suite* (u_n) *est décroissante et admet un minorant* m *alors cette suite est convergente et sa limite* l *est supérieure ou égale à* m. *Et on a:*

$$l = \lim_{n \to +\infty} u_n = \inf u_n$$

3. *Toute suite monotone et bornée est convergente.*

   De plus, si on a: $m \leq u_n \leq M$, *pour tout* n *entier naturel, alors sa limite* L *vérifie* $m \leq L \leq M$.

4. *Si* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ *et si* $f(n) = u_n$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} u_n = l$.

5. *Si* $\lim_{x \to +\infty} |u_n| = 0$ *alors* $\lim_{x \to +\infty} u_n = 0$.

6. *Soit* $(U_n) \in \mathbb{R}$. *Si* (U_n) *est croissante et non majorée alors* $\lim_{n \to \infty} U_n = +\infty$

7. *Si* (U_n) *est croissante et non majorée alors* $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

8. *Si* (U_n) *est décroissante et non minorée alors* $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

Remarque 2.3.1 *Le type de raisonnement dans les suites est un raisonnement par récurrence. Le raisonnement par récurrence vise à démontrer de proche en proche une propriété* $P(n)$ *d'une suite, à partir du rang* n_0. *Les étapes sont les suivantes :*

- ***Initialisation*** *: on montre que* $P(n_0)$ *est vraie.*

- ***Hérédité*** *: on choisit un entier* $n \geq n_0$. *On suppose que* $P(n)$ *est vraie (hypothèse de récurrence), et on s'en sert pour montrer que* $P(n+1)$ *est vraie.*

- ***Conclusion*** *: on en déduit que* $P(n)$ *est vraie pour tout* $n \geq n_0$.

2.4 Suites adjacentes

Définition 2.4.1 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si les conditions suivantes sont vérifiées:*

(1) (u_n) *est croissante,* (v_n) *décroissante*

(2) $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$

(3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Théorème 2.4.1 *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Démonstration: C'est une application du théorème sur les suites monotones.
Les conditions 1. et 2. entraînent la convergence des suites (u_n) et (v_n) en effet : les inégalités: $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n \leq v_0$ entraînent que (u_n) est majorée, elle est croissante, elle est donc convergente;

les inégalités: $\forall n \in \mathbb{N}\ u_0 \leq u_n \leq v_n$ entraînent que (v_n) est minorée, elle est décroissante, elle est donc convergente.

Il y a alors (une fois la convergence établie) équivalence entre les égalités

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

L'intérêt des suites adjacentes provient en partie du fait qu'elles fournissent une suite d'encadrements de leur limite commune.

Remarque 2.4.1 *Le fait que la suite (u_n) est majorée est donné par l'inégalité:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_0$$

(v_0 est un réel fixe) et non $u_n \leq v_n$,de même pour la minoration de (v_n) par u_n.

2.5 Limite inférieure et limite supérieure d'une suite

Théorème 2.5.1 *(limite sup et limite inf d'une suite bornée)*

Pour tout suite (u_n) bornée de $\mathbb{R}$, on peut définir les suites de terme général:

$$a_n := \inf_{p \geq n} u_p, \;\; b_n := \sup_{p \geq n} u_p$$

Ces deux suites sont convergentes et on note

$$\lim_{n \to +\infty} \sup \; u_n := \lim_{n \to +\infty} b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} u_p$$

$$\lim_{n \to +\infty} \inf \; u_n := \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} u_p$$

On a:

$$\lim_{n \to +\infty} \inf \; u_n \leq \lim_{n \to +\infty} \sup \; u_n.$$

Démonstration: La suite (u_n) étant bornée, les ensembles $A_n = \{u_p, p \geq n\}$ sont aussi bornés et admettent une borne supérieure et une borne inférieure. Par construction la suite (a_n) est croissante et la suite (bn) est décroissante. d'après la proposition de convergence permet donc de conclure à leurs convergences vers respectivement $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} b_n$.

Exemple 2.5.1 *Soit la suite de terme général $u_n = (-1)^n$. on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup u_n = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \inf u_n = -1$*

Remarque 2.5.1 *Par extension lorsque la suite (u_n) n'est pas majorée, sa limite supérieure est $+\infty$ et dans le cas où elle est non minorée sa limite inférieure est $-\infty$. Ainsi pour toute suite réelle (u_n) on définit:*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{p \geq n} u_p, \;\; \lim_{n \to +\infty} \inf u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{p \geq n} u_p$$

Exemple 2.5.2 *Soit la suite de terme général $u_n = n$. On a*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup u_n = +\infty, \;\; \lim_{n \to +\infty} \inf u_n = 0$$

2.6 Théorème de Bolzano-Weierstass

Une suite convergente est bornée, la réciproque est fausse mais le théorème de Bolzano-Weirstrass exprime qu'une suite bornée admet une suite extraite convergente. Le théorème de Bolzano- Weierstrass est un "grand" théorème non seulement parce que son rôle est fondamental dans l'étude globale des fonctions mais parce que, pour une suite (u_n) réelle, la propriété (u_n) est bornée étant équivalente à (u_n) prend ses valeurs dans un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Le théorème de Bolzano- Weierstrass dit toute partie E de $\mathbb{R}$ qui est infinie et bornée admet au moins un point d'accumulation.

Théorème 2.6.1 *(Bolzano-Weiestrass)*
Soit $(u_{n)}$ une suite bornée de nombres réels. Alors, on peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.(Variante : toute suite bornée de nombres réels admet une valeur d'adhérence)

Démonstration: L'idée générale:
Notons a_0 (resp. b_0) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. (Existent car (u_n) bornée)
Posons $I_0 = [a_0, b_0]$ et c_0 le centre de I_0.
L'un, au moins, des deux intervalles $[a_0, c_0]$ et $[c_0, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n). (On a bien dit une infinité de termes ; ce n'est pas forcément une infinité de valeurs). Notons I_1 cet intervalle et c_1 son centre. On réitère le procédé ci-dessus avec le segment I_1.
On construit ainsi une suite de segments emboîtés dont la longueur tend vers 0. L'intersection de tous ces segments est donc un certain réel l. En outre, par construction, chacun de ces segments contient au moins un terme de la suite (u_n). On peut donc construire une suite extraite en choisissant à chaque fois l'un de ces termes et cette suite converge nécessairement vers l.

Définition 2.6.1 *(Point d'accumulation)*

On dit qu'un ensemble E de nombres réels admet pour point d'accumulation le nombre x_0 (qui appartient ou non à E) si tout intervalle ouvert contenant x_0 contient un point de E autre que x_0.

Proposition 2.6.1 *Tout point d'acumulation d'un ensemble est limite d'une suite de points de cet ensemble.*

2.7 Suites de Cauchy

Le très grand intéret du critère de Cauchy provient du fait qu'il caractérise dans $\mathbb{R}$ les suites convergentes, sans que la limite apparaisse. D'où son utilisation dans l'étude des séries par exemple, ou encore pour montrer qu'une suite n'est pas convergente.

Le concept de suite de Cauchy correspond à la propriété que la distance entre deux termes de la suite devient arbitrairement petite (et non de plus en plus petite) quand ces termes sont de rang assez grand.

Définition 2.7.1 *Soit (u_n) une suite réelle; on dit que (u_n) est une suite de Cauchy ou vérifie le critère de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, n) \in \mathbb{N}^{\,2} \; p \geq N \; et \; n \geq N \Rightarrow |u_p - u_n| < \epsilon.$$

Dans cette définition, on insiste sur le fait que la condition doit être réalisée, pour tout couple (n, p) où n et p sont supérieurs à N ; en particulier la condition n'entraine pas que la suite est une suite de Cauchy, comme on le verra dans le prochin exemple.

Une suite qui n'est pas de Cauchy est caractérisée par:

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (p, n) \in \mathbb{N}^{\,2} \; p \geq N, \; n \geq N \text{ et } |u_p - u_n| \geq \epsilon$$

Exemple 2.7.1

- *La suite géométrique* (k^n), *pour* $0 < k < 1$, *est une suite de Cauchy*

  On a, pour $p > n > 0, |k^p - k^n| = k^n|k^{p-n} - 1| < k^n$.

  Donc, en prenant $N = \left[\frac{\ln x}{\ln k}\right] + 1$ *on a, pour* $p > n \geq N, |k^p - k^n| < \epsilon$

- *La suite* $(\ln n)_{n\geq 1}$ *n'est pas une suite de Cauchy*

  Pour $p > n > 0$, *on a:* $0 < \ln p - \ln n = \ln \frac{p}{n}$

  donc si $p = 2n$ *on a* $\ln p - \ln n = \ln 2$.

  Donc, pour $\epsilon = \ln 2$ *et pour tout entier* N *positif, il existe des entiers* $p = 2n$ *et* n *supérieurs à* N *tels que* $\ln p - \ln n = \ln 2$.

  En revanche quand $\ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$, *ce qui prouve bien que la condition* $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ *n'entraîne pas que la suite est de Cauchy.*

Théorème 2.7.1 *(Critère de Cauchy)*

Une suite de réels est convergente dans $\mathbb{R}$ *si, et seulement si, c'est une suite de Cauchy.*

Remarque 2.7.1 *Ce théorème en disant que* $\mathbb{R}$ *est un corps complet ce qui signifie que toute suite de Cauchy d'éléments de* $\mathbb{R}$ *est convergente dans* $\mathbb{R}$*;* $\mathbb{R}$ *est le complété de* $\mathbb{Q}$ *c'est à dire le plus petit corps complet contenant* $\mathbb{Q}$.

Chapitre 3

Limites et continuité des fonctions

3.1 Définition d'une fonction

Définition 3.1.1 *Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.*

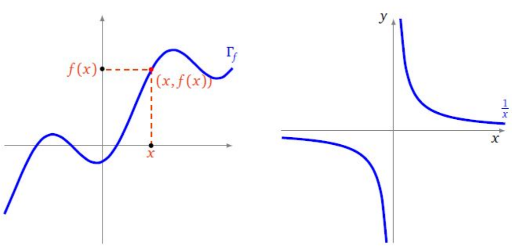
Exemple 3.1.1 *La fonction inverse :*

$$\begin{array}{llll} f: &]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Le graphe d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))/x \in U\}.$$

Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (à droite).



Définition 3.1.2 *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :*

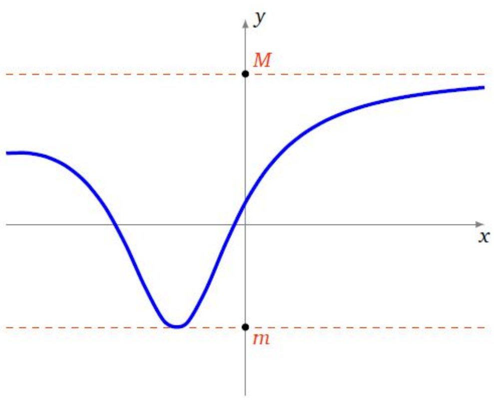
- $f \geqslant g$ *si* $\forall x \in U \;\; f(x) \geqslant g(x)$*;*
- $f \geqslant 0$ *si* $\forall x \in U \;\; f(x) \geqslant 0$*;*
- $f > 0$ *si* $\forall x \in U \;\; f(x) > 0$*;*
- f *est dite constante sur* U *si* $\exists a \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \;\; f(x) = a$*;*
- f *est dite nulle sur* U *si* $\forall x \in U \;\; f(x) = 0$.

Définition 3.1.3 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \;\; f(x) \leqslant M$*;*
- f *est minorée sur* U *si* $\exists m \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \;\; f(x) \geqslant m$*;*
- f *est bornée sur* U *si* f *est à la fois majorée et minorée sur* U*, c'est-à-dire si*

$$\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \; |f(x)| \leqslant M.$$

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M)

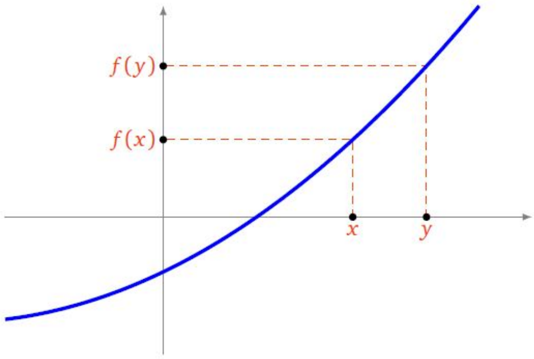


Définition 3.1.4 *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- f *est croissante sur* U *si* $\forall x, y \in U \;\; x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$
- f *est strictement croissante sur* U *si* $\forall x, y \in U \;\; x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f *est décroissante sur* U *si* $\forall x, y \in U \;\; x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$
- f *est strictement décroissante sur* U *si* $\forall x, y \in U \;\; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

• *f est monotone (resp. strictement monotone) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U.*

Un exemple de fonction croissante (et même strictement croissante) :



Exemple 3.1.2

1. *La fonction racine carrée*

$$\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$

   est strictement croissante.

2. *Les fonctions exponentielle* exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et logarithme* ln :$]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *sont strictement croissantes.*

3.2 Fonctions paires-impaires et périodiques

Définition 3.2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $[-a,a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*

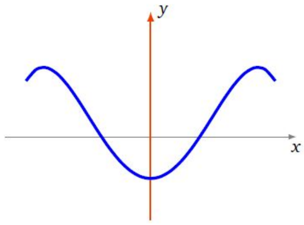
• *f est paire si $\forall x \in I\ f(-x) = f(x)$,*

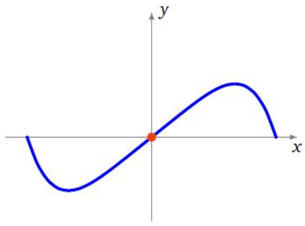
• *f est impaire si $\forall x \in I\ f(-x) = -f(x)$.*

Interprétation graphique :

• f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).

• f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).





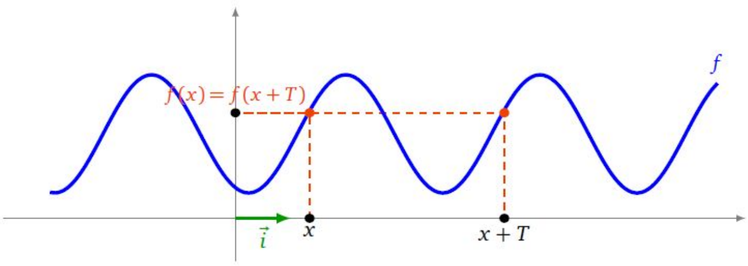
Exemple 3.2.1

- *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ *est paire.*
- *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *est impaire.*
- *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est paire. La fonction* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est impaire.*

Définition 3.2.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* T *un nombre réel,* $T > 0$. *La fonction* f *est dite périodique de période* T *si* $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+T) = f(x)$.

Interprétation graphique :

f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où $\vec{i}$ est le premier vecteur de coordonnées.



Exemple 3.2.2 *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.*

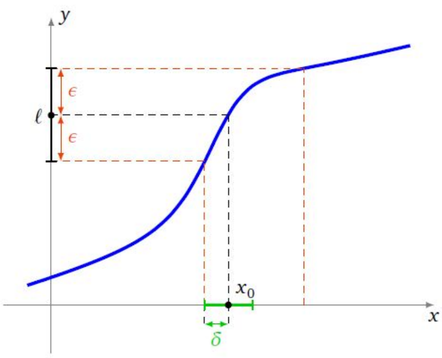
3.3 Limite d'une fonctions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition 3.3.1 *Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en x_0 si*

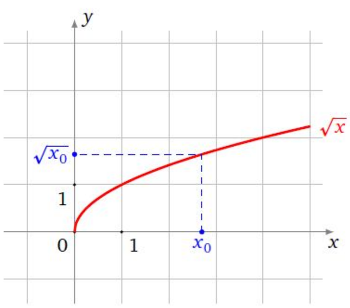
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in I \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

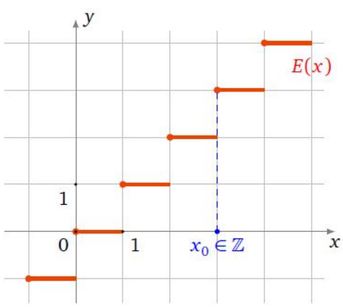
On dit aussi que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou bien $\lim_{x_0} f = l$.



Exemple 3.3.1

- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ *pour tout $x_0 \geqslant 0$.*
- *La fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.*





Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 3.3.2

- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 3.3.3

- *Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists B > 0 \; \forall x \in I \; x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = l$.

- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 3.3.4

- *On appelle limite à droite en x_0 de f la limite de la fonction $f_{\big|]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^+} f$.*
- *On définit de même la limite à gauche en x_0 de f : la limite de la fonction $f_{\big|]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$.*
- *On note aussi $\lim\limits_{x \to x_0; x > x_0} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{x \to x_0; x < x_0} f(x)$ pour la limite à gauche.*

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

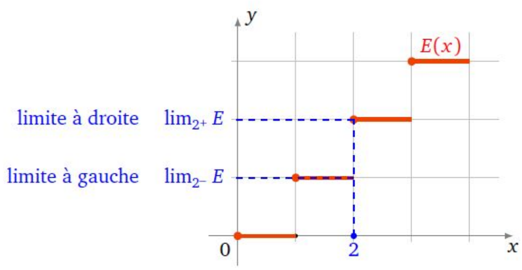
Si la fonction f a une limite en x_0, alors ses limites à gauche et à droite en x_0 coïncident et valent $\lim\limits_{x_0} f$.

Réciproquement, si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites valent $f(x_0)$ alors f admet une limite en x_0.

Exemple 3.3.2 *Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:*

- *comme pour tout $x \in]2, 3[$ on a $E(x) = 2$, on a $\lim\limits_{2^+} E = 2$,*
- *comme pour tout $x \in [1, 2[$ on a $E(x) = 1$, on a $\lim\limits_{2^-} E = 1$.*

Ces deux limites étant différentes, on en déduit que E n'a pas de limite en 2.



Proposition 3.3.1

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Pour la démonstration, on utilise un raisonnement par l'absurde.

Soient deux fonctions f et g. On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$.

Proposition 3.3.2 *Si* $\lim\limits_{x_0} f = l \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = l' \in \mathbb{R}$*, alors:*

- $\lim\limits_{x_0}(\lambda.f) = \lambda.l$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0}(f+g) = l + l'$
- $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = l \times l'$
- *si* $l \neq 0$*, alors* $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{l}$

De plus, si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = 0$.

Proposition 3.3.3 *Si* $\lim\limits_{x_0} f = l$ *et* $\lim\limits_{l} g = l'$*, alors* $\lim\limits_{x_0} g \circ f = l'$.

Ce sont des propriétés que l'on utilise sans s'en apercevoir.

Voici une proposition très importante qui signifie qu'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Proposition 3.3.4

- *Si* $f \leqslant g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = l \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = l' \in \mathbb{R}$*, alors* $l \leqslant l'$.
- *Si* $f \leqslant g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- ***Théorème des gendarmes***

  Si $f \leqslant g \leqslant h$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = l \in \mathbb{R}$ *alors* g *a une limite en* x_0 *et* $\lim\limits_{x_0} g = l$.

3.4 Continuité d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 3.4.1

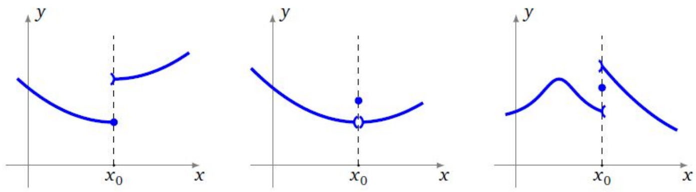
- *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe "sans lever le crayon", c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut. Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



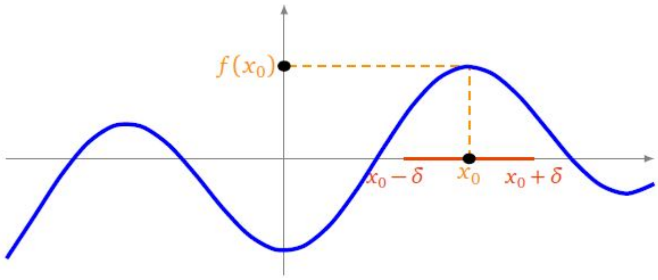
Exemple 3.4.1 *Les fonctions suivantes sont continues :*

- *Une fonction constante sur un intervalle,*
- *La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,*
- *Les fonction $\sin$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$,*
- *La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,*
- *La fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$,*
- *La fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.*

Par contre, la fonction partie entière E n'est pas continue aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$, puisqu'elle n'admet pas de limite en ces points. Pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, elle est continue en x_0.

Lemme 3.4.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un point de I. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\quad f(x) \neq 0$$



3.5 Suites récurrentes et fonctions continues

Proposition 3.5.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors*

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow$ pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

Démonstration $\Rightarrow$ On suppose que f est continue en x_0 et que (u_n) est une suite qui converge vers x_0 et on veut montrer que $f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pour ce δ, comme (u_n) converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - x_0| < \delta.$$

On en déduit que, pour tout $n \geqslant N$, comme $|u_n - x_0| < \delta$, on a $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on peut maintenant conclure que $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$.

$\Leftarrow$ On va montrer la contraposée : supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons qu'alors il existe une suite (u_n) qui converge vers x_0 et telle que $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(x_0)$.
Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0 :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \in I \quad \text{tel que} \quad |x_\delta - x_0| < \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon_0.$$

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\delta = 1/n$ et on obtient qu'il existe u_n (qui est $x_{1/n}$) tel que

$$|u_n - x_0| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0.$$

La suite (u_n) converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$.

3.6 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 3.6.1 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors*

- *$\lambda.f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),*
- *$f + g$ est continue en x_0,*
- *$f \times g$ est continue en x_0,*
- *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Exemple 3.6.1 *La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :*

- *les fonctions puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ (comme produit $x \times x \times ...$),*
- *les polynômes sur $\mathbb{R}$ (somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),*
- *les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.*

La composition conserve la continuité (mais il faut faire attention en quels points les hypothèses s'appliquent).

Proposition 3.6.2 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

3.7 Prolongement par continuité

Définition 3.7.1 *Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $l = \lim\limits_{x_0} f$.*
- *On définie alors la fonction $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ l \text{ si } x = x_x \end{cases}$$

Alors $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 3.7.1 *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Voyons si f admet un prolongement par continuité en 0.*
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a $|f(x)| \leqslant |x|$, on en déduit que f tend vers 0 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par :

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

3.8 Continuité uniforme

Définition 3.8.1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*

On dit que f est uniformément continue (ou f est u-continue) sur I lorsque:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2 : (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$$

La notion de continuité uniforme est globale (η ne dépend que de ϵ).

Il est claire que la continuité uniforme sur I entraine la continuité sur I.

Par contre, la réciproqueest fausse: l'application $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit uniformément continue:

Théorème 3.8.1 *(Application Lipschitzienne)*

Soit f une fonction lipschitzienne sur un intervalle I

$$\exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x, y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Alors f est uniformément continue sur I.

Remarque 3.8.1

- *(1) La réciproque du théorème est fausse. L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ mais non lipschitzienne.*
- *(2) Par contraposition, on a:*

$$f \text{ non u-continue sur } I \Rightarrow f \text{ non lipschitzienne sur } I$$

3.9 Théorèmes Fondamentaux

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.9.1 *(Théorème des valeurs intermédiaires).*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Démonstration: Montrons le théorème dans le cas où $f(a) < f(b)$. On considère alors un réel y tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ et on veut montrer qu'il a un antécédent par f.

1. On introduit l'ensemble suivante

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leqslant y\}.$$

On a l'ensemble A est non vide (car $a \in A$) et il est majorée (car il est contenu dans $[a, b]$) : il admet donc une borne supérieure, que l'on note $c = \sup A$. Montrons que $f(c) = y$.

2. Montrons tout d'abord que $f(c) \leqslant y$. Comme $c = \sup A$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenue dans A telle que (u_n) converge vers c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n \in A$, on a $f(u_n) \leqslant y$. D'autre part, comme f est continue en c, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$. On en déduit donc, par passage à la limite, que $f(c) \leqslant y$.

3. Montrons à présent que $f(c) \geqslant y$. Remarquons tout d'abord que si $c = b$, alors on a fini, puisque $f(b) \geqslant y$. Sinon, pour tout $x \in]c, b]$, comme $x \notin A$, on a $f(x) > y$. Or, étant donné que f est continue en c, f admet une limite à droite en c, qui vaut $f(c)$ et on obtient $f(c) \geqslant y$.

Applications du théorème des valeurs intermédiaires

Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 3.9.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

$$\textit{Si } f(a).f(b) < 0, \textit{ alors il existe } c \in]a, b[\textit{ tel que } f(c) = 0.$$

Démonstration: Il s'agit d'une application directe du théorème des valeurs intermédiaires avec $y = 0$. L'hypothèse $f(a).f(b) < 0$ signifiant que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Exemple 3.9.1 *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.*

En effet, un tel polynôme s'écrit $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair. On peut supposer que le coefficient a_n est strictement positif. Alors on a $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$. En particulier, il existe deux réels a et b tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ et on conclut grâce au corollaire précédent.
Voici une formulation théorique du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 3.9.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration: Soient $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leqslant y_2$. Montrons que si $y \in [y_1, y_2]$, alors $y \in f(I)$. Par hypothèse, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ et donc y est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue, il existe donc $x \in I$ tel que $y = f(x)$, et ainsi $y \in f(I)$.

Fonctions continues sur un segment

Théorème 3.9.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$.*
Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Comme on sait déjà par le théorème des valeurs intermédiaires que $f([a, b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie exactement que

Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes.

Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est le maximum.
Démonstration: 1. Montrons d'abord que f est bornée.

• Pour $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = \{x \in [a,b] : f(x) \geqslant r\}$. Fixons r tel que $A_r \neq \emptyset$, comme $A_r \subset [a,b]$, le nombre $s = \sup A_r$ existe. Soit $x_n \to s$ avec $x_n \in A_r$. Par définition $f(x_n) \geqslant r$ donc, f étant continue, à la limite $f(s) \geqslant r$ et ainsi $s \in A_r$.

• Supposons par l'absurde que f ne soit pas bornée. Alors pour tout $n \geqslant 0$, A_n est non vide. Notons $s_n = \sup A_n$. Comme $f(x) \geqslant n+1$ implique $f(x) \geqslant n$ alors $A_{n+1} \subset A_n$, ce qui entraîne $s_{n+1} \leqslant s_n$. Bilan : (s_n) est une suite décroissante, minorée par a donc converge vers $l \in [a,b]$. Encore une fois f est continue donc $s_n \to l$, implique $f(s_n) \to f(l)$. Mais $f(s_n) \geqslant n$ donc $\lim f(s_n) = +\infty$. Cela contredit $\lim f(s_n) = f(l) < +\infty$. Conclusion : f est majorée.

• Un raisonnement tout à fait similaire prouve que f est aussi minorée, donc bornée. Par ailleurs on sait déjà que $f(I)$ est un intervalle (c'est le théorème des valeurs intermédiaires), donc maintenant $f(I)$ est un intervalle borné. Il reste à montrer qu'il du type $[m, M]$ (et pas $]m, M[$ par exemple).

2. Montrons maintenant que $f(I)$ est un intervalle fermé. Sachant déjà que $f(I)$ est un intervalle borné, notons m et M ses extrémités : $m = \inf f(I)$ et $M = \sup f(I)$. Supposons par l'absurde que $M \notin f(I)$. Alors pour $t \in [a,b]$, $M > f(t)$. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{M - f(t)}$ est donc bien définie. La fonction g est continue sur I donc d'après le premier point de cette preuve (appliqué à g) elle est bornée, disons par un réel K. Mais il existe $y_n \to M$, $y_n \in f(I)$. Donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $y_n = f(x_n) \to M$ et alors $g(x_n) = \dfrac{1}{M - f(x_n)} \to +\infty$. Cela contredit que g soit une fonction bornée par K. De même on a $m \in f(I)$. Conclusion finale : $f(I) = [m, M]$.

Théorème de Weierstrass

Théorème 3.9.3 *(Approximation par des polynômes)*

Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur ce segment $[a,b]$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que:

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - P(x)| < \epsilon$$

Théorème de Heine

Théorème 3.9.4 *(Théoème de Heine)*

Toute fonction numérique continue sur un segment I est uniformément continue sur ce segment I.

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé borné.

3.10 Inverse des fonctions monotones et continues

Cette partie contient des rappels nécessaire concernant les applications binectives.

Définition 3.10.1 *Soit $f : E \to F$ une fonction où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.*

*1. f est **injective** si*

$$\forall x, x' \in E \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x';$$

*2. f est **surjective** si*

$$\forall y \in F \ \exists x \in E \ y = f(x);$$

*30 f est **bijective** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \ \exists! x \in E \ y = f(x)$*

Proposition 3.10.1 *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_E$. la fonction g est la **bijection réciproque** de f et se note f^{-1}*

Le théorème suivant est trés utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 3.10.1 *(Théorème de bijection)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement mo,otone sur I, alors

(1) f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,

(2) la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement mo,otone sur J et elle a le même sens de variation que f.

Remarque 3.10.1 *Les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétrique par rapport à la droite $y = x$.*

Exemple 3.10.1 *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ et si $f(a)f(b) \leq 0$ ($f(a)$ et $f(b)$ de signe opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seul solution dans $[a, b]$.*

Chapitre 4

Fonctions dérivables

4.1 Dérivée en un point

Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un élément de I.

Définition 4.1.1 *On dit que f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie quand x tend vers x_0. La limite $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est notée $f'(x_0)$ et s'appelle le nombre dérivé de f en x_0.*

On dit que f est dérivable sur I si, quel que soit $x_0 \in I$, f est dérivable en x_0.

Dans ce cas, la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$, s'appelle la dérivée de f.

Supposons f dérivable en x_0 et définissons une fonction ε en posant

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \text{ si } x \neq x_0 \text{ et } \varepsilon(x_0) = 0.$$

Pour tout nombre $x \neq x_0$, on a

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$$

et cette égalité est encore vraie si $x = x_0$ car dans ce cas, les deux membres sont nuls.

Il vient

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 = \varepsilon(x_0)$$

donc la fonction ε est continue en x_0.

Nous avons ainsi démontré que si f est dérivable en x_0, il existe une fonction ε continue en x_0, telle que $\varepsilon(x_0) = 0$ et

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \quad \text{quel que soit } x \in I.$$

Comme le montre la proposition suivante, cette propriété caractérise les fonctions dérivables en x_0.

Corollaire 4.1.1 *Si une fonction est dérivable en x_0, elle est continue en x_0.*

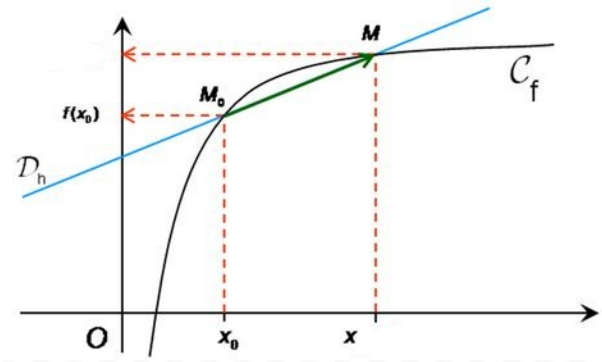
Démonstration: Supposons que f est une fonction dérivable en x_0, donc quel que soit $x \in I$, nous avons $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ où la fonction ε est continue en x_0 et $\varepsilon(x_0) = 0$. Les fonctions $x \mapsto f(x_0)$, $x \mapsto (x - x_0)$ et $x \mapsto \varepsilon(x)$ sont continues en x_0, donc aussi la fonction f, d'après les théorèmes sur les fonctions continues.

Tangente au graphe de f

Soit $\mathcal{C}$ le graph de la fonction f dans le plan affine $\mathbb{R}^2$. Notons M_0 le point $(x_0, f(x_0))$ et si $x \in I$, $x \neq x_0$, notons M le point $(x, f(x))$; par définition, les points M_0 et M appartiennent à $\mathcal{C}$.

Le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est la pente de la droite passant par M_0 et M. Supposons que f est dérivable en x_0. Alors intuitivement, quand x tend vers x_0, la droite (M_0M) a pour position limite la droite passant par M_0 et de pente $f'(x_0)$. Par définition, cette droite s'appelle la tangente à $\mathcal{C}$ au point M_0. Ainsi :

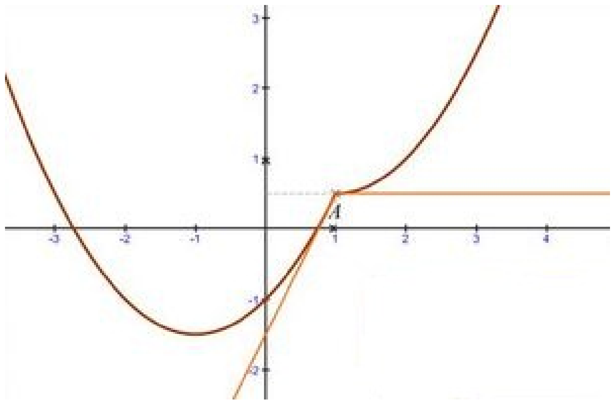
Si f est dérivable en $x_0 \in I$, la courbe $\mathcal{C}$ a pour tangente au point M_0 la droite d'équation $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$.



4.2 Dérivée à gauche , dérivée à droite-

Définition 4.2.1 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un élément de I ou bien une extrémité de I (x_0 peut prendre les valeurs extrémes de I). On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite à droite quand x tend vers x_0. La limite $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est notée $f'_d(x_0)$. De même, si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite à gauche quand x tend vers x_0, on dit que f est dérivable à gauche en x_0 et la limite $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se note $f'_g(x_0)$.*

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et si l'on a $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$; dans ce cas, le nombre dérivé de f en x_0 est $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
Si f est dérivable à droite (ou à gauche) en x_0, on dit que le graphe de f admet une demi-tangente de pente $f'_d(x_0)$ (ou $f'_g(x_0)$) au point d'abscisse x_0. Dans la figure ci-contre les demi-dérivées en a existent mais $f'_d(a) \neq f'_g(a)$.
Prenons par exemple la fonction f définie par $f(x) = |x|$. Le rapport $\dfrac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ est égale à $\frac{x}{x} = 1$ si $x > 0$ et à $\frac{-x}{x} = -1$ si $x < 0$; on a donc $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$. La fonction valeur absolue est donc dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



4.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Dérivée d'une somme et du produit par une constante.

Si f et g sont des fonctions dérivables en x_0, alors les fonctions $f+g$ et λf pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, sont dérivables en x_0 et

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad \text{et} \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Démonstration: Puisque f est dérivable en x_0, nous avons

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x)$$

où ε_1 est une fonction continue en x_0 et telle que $\varepsilon_1(x_0) = 0$. De même,

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_2(x)$$

où ε_2 est continue en x_0 et $\varepsilon_2(x_0) = 0$. Ajoutons membre à membre ces égalités; il vient

$$f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0) + (x - x_0)(f'(x_0) + g'(x_0)) + (x - x_0)(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$$

c'est-à-dire

$$(f+g)(x) = (f+g)(x_0) + (x-x_0)(f'(x_0)+g'(x_0)) + (x-x_0)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x).$$

La fonction $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ est la somme de deux fonctions continues en x_0 donc elle est continue en x_0 et nous avons $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(x_0) = \varepsilon_1(x_0)+\varepsilon_2(x_0) = 0$. D'après la proposition du paragraphe 1, la fonction $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$. La démonstration pour la fonction λf est tout à fait semblable : on a

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x_0) + (x-x_0)(\lambda f'(x_0)) + (x-x_0)(\lambda\varepsilon_1)(x)$$

et la fonction $\lambda\varepsilon_1$ est continue en x_0 et prend la valeur 0 en x_0.

Dérivée d'un produit.

Si f et g sont des fonctions dérivables en x_0, alors la fonction produit fg est dérivable en x_0 et

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Démonstration: Il existe par hypothèse des fonctions ε_1 et ε_2 continues en x_0, prenant la valeur 0 en x_0 et telles que

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = g(x_0) + (x-x_0)g'(x_0) + (x-x_0)\varepsilon_2(x).$$

En multipliant ces égalités, on obtient

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (x-x_0)\big(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\big) + (x-x_0)\varepsilon_3(x)$$

où l'on a posé $\varepsilon_3(x) = f(x_0)\varepsilon_2(x) + g(x_0)\varepsilon_1(x) + (x-x_0)\big(f'(x_0)\varepsilon_2(x) + g'(x_0)\varepsilon_1(x)\big)$. La fonction ε_3 est continue en x_0 comme produit et somme de fonctions continues en x_0 et l'on a $\varepsilon_3(x_0) = 0$. Puisqu'on a par définition $(fg)(x) = f(x)g(x)$ quel que soit x, nous en concluons par la proposition du paragraphe 1, que la fonction fg est dérivable en x_0 et que l'on a $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Dérivée d'une fonction constante.

Soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction constante et soit x_0 un élément de I. Quel que soit $x \in I$, nous avons $u(x) = u(x_0)$, le rapport $\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ est égal à 0 et par conséquent $u'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = 0$. Ainsi une fonction constante a une dérivée nulle en tout point.

Dérivée d'une composée.

Soient f et g des fonctions telles que la composée $g \circ f$ est définie. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Démonstration: Puisque f est dérivable en x_0, il existe une fonction ε_1 continue en x_0, prenant la valeur 0 en x_0 et telle que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x) \quad \text{pour tout } x.$$

La fonction g étant dérivable en $f(x_0)$, il existe une fonction ε_2 continue en $f(x_0)$, prenant la valeur 0 en $f(x_0)$ et telle que

$$g(y) = g(f(x_0)) + (y - f(x_0))g'(f(x_0)) + (y - f(x_0))\varepsilon_2(y) \quad \text{pour tout } y.$$

Remplaçons y par $f(x)$ dans cette égalité. En utilisant l'égalité relative à $f(x)$, il vient

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (x - x_0)g'(f(x_0))f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon_3(x)$$

où l'on a posé $\varepsilon_3(x) = g'(f(x_0))\varepsilon_1(x) + f'(x_0)\varepsilon_2(f(x)) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(f(x))$. Les théorèmes sur somme, produit et composée de fonctions continues affirment que la fonction ε_3 est continue en x_0. D'autre part, on a $\varepsilon_3(x_0) = 0$, par suite la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Dérivée de l'inverse

Soit f une fonction dérivable en x_0. Si $f(x_0) \neq 0$, alors la fonction $1/f$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

Démonstration: Démontrons d'abord le résultat lorsque $f(x) = x$ quel que soit x; nous choisissons donc x_0 différent de 0. Posons $u(x) = 1/x$ quel que soit $x \neq 0$.
On a

$$u(x) - u(x_0) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x}{xx_0} = -\frac{x - x_0}{xx_0}$$

donc

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{xx_0}.$$

D'après les théorèmes sur les limites, nous avons

$$\lim_{x \to x_0} 1/xx_0 = 1/x_0^2.$$

La fonction u est donc dérivable en x_0 et l'on a $u'(x_0) = -1/x_0^2$. Puisque $f'(x) = 1$ pour tout x, c'est bien la formule qu'il fallait démontrer.
Dans le cas général, posons $g = 1/f$ c'est-à-dire $g(x) = 1/f(x) = u(f(x))$. Puisque f est dérivable en x_0, f est continue en x_0. Le nombre $f(x_0)$ étant non nul par hypothèse, la proposition du chapitre 2 paragraphe 1 assure que l'on a $f(x) \neq 0$ si x appartient à un certain intervalle ouvert J de centre x_0. La fonction g est donc bien dèfinie sur J et quel que soit $x \in J$, nous avons $g(x) = (u \circ f)(x)$. Par hypothèse, la fonction f est dérivable en x_0 et nous avons démontré que la fonction u est dérivable en $f(x_0)$. D'après le résultat sur la dérivée d'une composée, la fonction g est dérivable en x_0 et

l'on a $g'(x_0) = u'(f(x_0))f'(x_0)$. Nous avons vu que l'on a $u'(x) = -1/x^2$, donc il vient $g'(x_0) = \big(-1/f(x_0)^2\big)f'(x_0)$.

Corollaire 4.3.1 *Si f et g sont des fonctions dérivables en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors la fonction f/g est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Exemple 4.3.1 *Soit n un entier relatif et soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = x^n$.*
Si $n = 0$, alors par convention $f_0(x) = x^0 = 1$ quel que soit le nombre réel x.
Si $n \geqslant 0$, la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et si $n < 0$, alors la fonction f_n est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrons que f_n est dérivable et que sa dérivée est donnée par

$$f_n'(x) = nx^{n-1} \text{ quel que soit; } x \in \mathbb{R}; \text{ si; } n \geqslant 0, \text{ quel que soit; } x \neq 0; \text{ si; } n < 0.$$

Si $n = 0$, le résultat est vrai : en effet, la fonction f_0 est constante sur $\mathbb{R}$ donc sa dérivée est nulle.
Puisqu'on a $f_1(x) = x$, il vient $\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{x-x_0} = 1$ quel que soit $x \neq x_0$. La fonction f_1 est donc dérivable en x_0 et l'on a $f_1'(x_0) = 1 = 1 \times (x_0)^0$, ce qui est la formule à démontrer lorsque $n = 1$.
Supposons que l'entier n est strictement positif, que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par la formule ci-dessus. Pour tout nombre réel x, nous avons $f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x^n x = f_n(x)f_1(x)$. La fonction f_{n+1} est donc dérivable en tant que produit de deux fonctions dérivables et l'on a (dérivée d'un produit)

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x)f_1(x) + f_n(x)f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^n \times 1 = nx^n + x^n = (n+1)x^n;$$

la formule est donc vraie pour l'entier $n+1$. Un raisonnement par récurrence montre qu'elle est vraie pour tout entier $n > 0$.
Supposons $n < 0$ et posons $p = -n$. Quel que soit $x \neq 0$, on a $f_n(x) = x^{-p} = \frac{1}{x^p} = \frac{1}{f_p(x)'}$ donc f_n est dérivable et l'on a (dérivée d'un inverse) $f_n'(x) = -\frac{f_p'(x)}{(f_p(x))^2}$ pour tout $x \neq 0$.

Puisque l'entier p est strictement positif, nous savons que l'on a $f_p'(x) = px^{p-1}$ et donc il vient $f_n'(x) = -\frac{px^{p-1}}{x^{2p}} = -px^{p-1-2p} = -px^{-p-1} = nx^{n-1}$ quel que soit le nombre x différent de 0.

Dérivée d'une foction réciproque

Soient I un intervalle ouvert et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I. Posons $J = f(I)$ et notons $g : J \to I$ la bijection réciproque de l'application bijective $I \to J$ définie par f. Si l'on a $f'(t) \neq 0$ quel que soit $t \in I$, alors g est dérivable sur J et l'on a pour tout $x \in J$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

Démonstration: Soit $t_0 \in I$. La fonction f étant dérivable en t_0, on a quel que soit $t \in I$

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)(f'(t_0) + \varepsilon(t))$$

où ε est une fonction continue en t_0 telle que $\varepsilon(t_0) = 0$. Pour tout $x \in J$, on a $g(x) \in I$ et par définition $f(g(x)) = x$. Posons $x_0 = f(t_0)$ de sorte que l'on a aussi $t_0 = g(x_0)$. Dans l'égalité, remplaçons t par $g(x)$ et t_0 par $g(x_0)$. Il vient

$$f(g(x)) = f(g(x_0)) + (g(x) - g(x_0))\Big(f'(t_0) + \varepsilon(g(x))\Big)$$

c'est-à-dire

$$x = x_0 + (g(x) - g(x_0))\Big(f'(t_0) + \varepsilon(g(x))\Big).$$

Pour tout nombre $x \in J$ différent de x_0, cette égalité s'écrit encore

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{f'(t_0) + \varepsilon(g(x))}.$$

Passons à la limite quand x tend vers x_0. Nous savons que la fonction g est continue sur J et que ε est continue en $t_0 = g(x_0)$, donc (limite d'une composée) $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(g(x)) =$

$\varepsilon(g(x_0)) = \varepsilon(t_0) = 0$. Ainsi nous avons $\lim\limits_{x\to x_0} \Big(f'(t_0) + \varepsilon(g(x))\Big) = f'(t_0)$. Puisque le nombre $f'(t_0)$ n'est pas nul, le théorème sur la limite d'un inverse affirme que l'on a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f'(t_0) + \varepsilon(g(x))} = \dfrac{1}{f'(t_0)}$. Le rapport $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ a donc pour limite $\frac{1}{f'(t_0)}$ quand x tend vers x_0, autrement dit g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f'(g(x_0))}$.

Remarque 4.3.1 *La formule donnant la dérivée de la fonction réciproque est facile à retrouver. Si f et g sont des bijections réciproques, on a $(g \circ f)(t) = t$ pour tout nombre t appartenant à l'intervalle de définition de f; si de plus les fonctions f et g sont dérivables, alors il vient (dérivée d'une composée) $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t) = 1$ d'où l'égalité $g'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}$. On a donc $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ quel que soit x appartenant à l'intervalle de définition de g.*

Exemple 4.3.2 *Soit n un entier au moins égal à 2 et soit g la fonction racine n-ième : $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Rappelons que cette fonction est par définition la réciproque de la fonction f définie par $f(x) = x^n$. On a $f'(x) = nx^{n-1}$ donc $f'(x)$ est différent de 0 quel que soit $x \neq 0$. La fonction g est donc dérivable en tout point $x \neq 0$ du domaine de définition de g, c'est-à-dire sur l'intervalle $]0, +\infty[$ lorsque n est pair et sur $\mathbb{R} \setminus \{\nvdash\}$ lorsque n est impair. De plus, on a $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$. En utilisant les égalités $(\sqrt[n]{x})^{n-1} = \frac{(\sqrt[n]{x})^n}{\sqrt[n]{x}} = \frac{x}{\sqrt[n]{x}}$, nous obtenons plus simplement $g'(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$. Puisque $f'(0) = 0$, le graphe de la fonction $x \mapsto x^n$ est tangent au point $(0, 0)$ à l'axe des abscisses. On en déduit par symétrie que le graphe de la fonction racine n-ième est tangent à l'origine à l'axe des ordonnées.*

Ce dernier résultat se démontre aussi en étudiant la limite du rapport $\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{0}}{x-0} = \frac{\sqrt[n]{x}}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives. Nous avons $\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{(\sqrt[n]{x})^n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{0} = 0$ et $n-1$ est un entier positif, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sqrt[n]{x})^{n-1} = 0$. Il vient donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = +\infty.$$

On dit que le graphe de cette fonction a une tangente verticale à l'origine.

4.4 Dérivées successives et formule de Leibniz

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable; par définition, cela signifie que f est dérivable en tout point de I. Nous avons alors défini la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à tout x appartenant à I associe le nombre dérivé $f'(x)$.
Si la fonction f' est à son tour dérivable en tout point de I, alors la fonction $(f')'$ dérivée de f' est définie sur I; cette fonction se note f'' et s'appelle la dérivée seconde de f. Plus généralement, si n est un entier positif ou nul, on définit, si elle existe, la dérivée n-ième de f, en posant $f^{(0)} = f$ par convention et

$$f^{(p)} = \left(f^{(p-1)}\right)' \quad \text{pour tout entier } p \text{ tel que } 1 \leqslant p \leqslant n.$$

Par définition, nous avons donc $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = (f'')'$, etc. Si la dérivée n-ième de f existe, on dit que f est n fois dérivable.
Nous verrons que les fonctions couramment utilisées en analyse possèdent, pour tout n, une dérivée n-ième. Les fonctions polynôme ont cette propriété car la dérivée d'une fonction polynôme est une fonction polynôme. Il en va de même pour les fonctions rationnelles.

Formule de Leibniz.

Si f et g sont des fonctions n fois dérivables, alors la fonction fg est n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + ... + C_n^i f^{(n-i)}g^{(i)} + ... + fg^{(n)}$$

où les nombres entiers C_n^i sont les coefficients binomiaux.
Démonstration abrégée: Si $n = 0$, la formule est vraie d'après notre convention.
Si $n = 1$, la formule est celle de la dérivée d'un produit : $(fg)' = f'g + fg'$. Le second membre de la formule à démontrer est une somme de fonctions; si l'on dérive chaque

terme de la somme en utilisant la formule de la dérivée du produit et si l'on tient compte des relations $C_n^i + C_n^{i-1} = C_{n+1}^i$ entre les coefficient du binôme, on obtient la formule de Leibniz pour l'entier $n+1$.

Un raisonnement par récurrence permet de conclure.

4.5 Théorème de Rolle

Théorème 4.5.1 *Soit $f : [a.b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration: Puisque f est continue, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$f([m,M]) = [m,M].$$

Si $m = M$, f est constante et f' est identiquement nulle sur $]a,b[$. Supposons alors $m < M$ quitte à échanger les rôles de m et M. Alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$.

Si $m < f(a)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = m$.

$$\forall x \in]a,c[,\ f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

$$\forall x \in]c,b[,\ f(x) > f(c) \Rightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Comme f est dérivable en c, le passage à la limite dans les deux inégalitésci-dessus donne respectivement

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

et

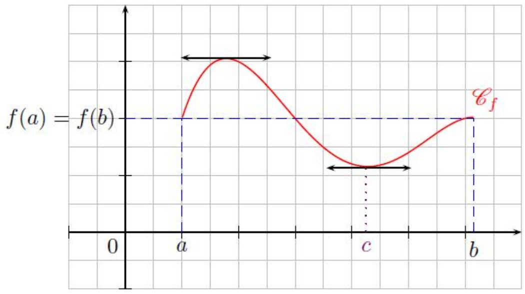
$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

d'où, par continuité de f en c, $f'(c) = 0$.

-Si $f(a) < M$, un raisonnement analogue donne le même résultat: $f'(c) = 0$

Le théorème est ainsi démontré.

Interprétation géométrique



Remarque 4.5.1

1. *On ne sait pas si c est unique, et le théorème ne permet pas de connaître c.*

2. *f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle.*

3. *f continue sur $[a, b]$ est une condition nécessiare.*

4. *f dérivable sur $]a, b[$ est une condition nécessaire.*

5. *f à valeurs dans $\mathbb{R}$ est aussi une condition nécessaire.*

4.6 Théorème des Accroissements Finis

Théorème 4.6.1 *Soit $f : [a.b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f((c)(b - a)$.*

Démonstration: Soient A un réel et la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - A(x - a)$$

φ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et vérifie $\varphi(a) = 0$. Déterminons alors A tel que $\varphi(b) = 0$.

$$\varphi(b) = 0 \Leftrightarrow A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Affectons alors vette valeur à A (existe car l'hypothèse générale $a < b$ assure que $a - b \neq 0$), de sorte que le théorème de Rolle d'applique, donnant l'existence d'un rel $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - A = 0 \Leftrightarrow f'(c) = A \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Autres applications

Sens de variations d'une fonction

Théorème 4.6.2 *Soit $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors*

(i) f est croissante sur $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$;

(ii) f est décroissante sur $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$;

(iii) f est constante sur $[a, b] \Leftrightarrow \forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$;

Démonstration: Nous ne traiterons que le premier cas ici.

$\Rightarrow$: Supposons f est croissante sur $[a, b]$, et soit $c \in]a, b[$. Alors

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Dans ce cas,

$$\left.\begin{array}{l} -\text{ Si } x < c, \text{ alors } f(x) \leqslant f(c) \\ -\text{ Si } x > c, \text{ alors } f(x) \geqslant f(c) \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \Rightarrow f'(c) \geqslant 0.$$

$\Leftarrow$: Supposons que $f'(c) \geq 0$ pour tout $c \in]a, b[$. Considèrons $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $x < y$ (si non on échange les rôle de x et y). Alors grâce au TAF, il existe $c_1 \in]x, y[\subset]a, b[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c_1)$. Puisque $f'(c_1) \geq 0$ par hypothèse, il vient que $f(y) - f(x)$ et $y - x$ ont le même signe, c'est-à-dire que f est croissante sur $[a, b]$.

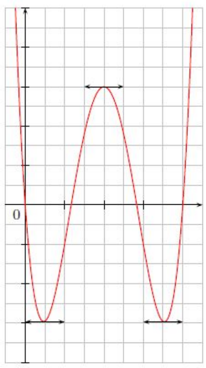
Localisation des zéros

Théorème 4.6.3 *Soit $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et admettant $n > 1$ zéros sur $[a, b]$ notés $x_1 < x_2 < .... < x_n$. Alors f' admet au moins $(n - 1)$ zéros.*

Démonstration: Il suffie d'appliquer le théoème de Rolle sur chacun des $(n - 1)$ intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ pour $i \in 1, ..., n - 1$

Interprétation graphique

Pour utiliser ce théorème, j'ai voulu crer un polynôme de degré 4 passant par les points $(0, 0), (1, -1), (2, 3)$ et $(4, 0)$. Voici le graphe obtenu.



Inégalité des Accroissements Finis

Théorème 4.6.4 *Soit $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in]a, b[$, alors*

$$|f(b) - f(a)| < k|b - a|$$

Démonstration: D'après le TAF

$$\exists c \in]a, b[\ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$\exists c \in]a, b[\ |f(b) - f(a)| = |f'(c)|.|b - a|$$

$$|f(b) - f(a)| < k|b - a|$$

4.7 Règle de l'Hopital

La règle de l'Hopital est une technique qui permet d'évaluer les limites ayant comme forme indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Théorème 4.7.1 *Soient f et g deux fonctions contunues sur un intervalle I contenant a. On suppose que f et g sont dérivable sur $I - \{a\}$ et que $g'(x) \neq 0$ pour $x \neq a$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ ou si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sous condition que cette dernière existe ou infinie.

Démonstration: On commence par le cas où a est fini. On peut supposer que $f(a) = g(a) = 0$ (cela ne nuit pas àla généralité). Alors par application du théorème des accroissement généralisé on a:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Comme le réel c est entre x et a, si x approche a le réel c approche a. Ainsi

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dans le cas où $a=\infty$, on introduit deux fonctions ausiliaires $F(x)=f(1/x)$ et $G(x)=g(1/x)$. Noter que quand x tend vers 0 par la droite, $1/x$ tend vers ∞. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(1/x)}{g(1/x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{F'(x)}{G'(x)}\\ &=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(1/x)(-1/x^2)}{g(1/x)(-1/x^2)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(1/x)}{g'(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

.

Exemple 4.7.1 *Calculer la limite* $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$
C'est une forme indéterminées standards qui permettent l'application de la règle de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$$

Noter qu'on peut calculer cette limite sans passer par la règle de l'Hopital.

Exemple 4.7.2 *Calculer la limite de la fonction* $\frac{1-cos(x)}{x^2}$ *quand* x *tend vers* 0
C'est une forme indéterminées standards qui permettent l'application de la règle de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{2x}$$

On a toujours une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. *On peut donc appliquer une deuxième fois la règle de l'Hopital. Ainsi on a*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{2}=\frac{1}{2}$$

Chapitre 5

Fonctions Élémentaires

Nous avons déjà pratiqué les fonctions logarithme et exponentielle, mais dans ce chapitre, nous allons définir et étudier l'exponentielle et les fonctions puissances à partir de la seule fonction logarithme. Nous présentons aussi les fonctions trigonométriques réciproques qui permettent d'exprimer des solutions d'équations trigonométriques. Il faudra vous rappeler les définitions, les propriétés (dérivée, sens de variation, limites) et l'allure des graphes de toutes ces fonctions.

5.1 Logarithme népérien

Lorsque nous disposerons de la théorie de l'intégrale, nous démontrerons qu'il existe une unique fonction $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $(\ln(x))' = 1/x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(1) = 0$. Cette fonction s'appelle la fonction logarithme.
Voici les principales propriétés de la fonction logarithme.

1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ pour tout nombres réels a et b strictement positifs
et $\ln(a^n) = n \ln a$ pour tout $a > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

2) la fonction logarithme est une bijection continue et strictement croissante de

$]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$; on a ainsi $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4) La fonction logarithme est concave et l'on a $\ln x \leqslant x-1$ pour tout $x > 0$.

Démonstration:

► Soit a un nombre réel strictement positif. Définissons la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ en posant $f(x) = \ln(ax)$. D'après la règle de dérivation d'une fonction composée, nous avons $f'(x) = a(\ln(ax))' = a/ax = 1/x = \ln'(x)$ pour tout $x > 0$. La fonction $(f - \ln)$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $]0,+\infty[$, donc elle est constante. Cela signifie qu'il existe un nombre réel k tel que $f(x) = k + \ln x$ quel que soit $x > 0$.
En particulier, nous avons $f(1) = k + \ln 1$ c'est-à-dire $\ln a = k$ puisque $\ln 1 = 0$.
Il vient donc l'égalité $\ln(ax) = f(x) = \ln a + \ln x$ pour tout $x > 0$. Un raisonnement par récurrence montre alors que l'on a $\ln(a^n) = n \ln a$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (se rappeler la convention $a^0 = 1$). On a aussi $\ln a + \ln(1/a) = \ln(a/a) = 0$ donc $\ln(1/a) = -\ln a$. En raisonnant par récurrence, on en déduit que l'égalité $\ln(a^n) = n \ln a$ est vraie pour tout entier $n \leq -1$.

► Puisque la fonction logarithme est dérivable, elle est continue. Pour tout $x > 0$, la dérivée $(\ln(x))' = 1/x$ est strictement positive, donc la fonction logarithme est strictement croissante. En particulier $\ln 2 > \ln 1 = 0$.
La suite de terme général $n \ln 2 = \ln(2^n)$ a pour limite $+\infty$, donc la fonction logarithme n'est pas majorée. On en déduit $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. D'après les propriétés des limites, il vient $\lim_{x\to 0} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1/x) = \lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$. Par le théorème sur les fonctions continues monotones, nous en déduisons que la fonction logarithme est une bijection

de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

▶ Par définition, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est la dérivée de la fonction logarithme au point 1, donc cette limite existe et vaut $1/1 = 1$.

▶ Puisque la fonction $x \mapsto (\ln(x))' = 1/x$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, la fonction logarithme est concave. On a donc pour tout $x > 0, \ln x \leqslant \ln 1 + (x-1)(\ln(1))'$ d'où l'inégalité $\ln x \leq x - 1$.

Remarque 5.1.1 *La fonction* $x \mapsto \ln|x|$ *est définie sur* $\mathbb{R} \setminus\{0\}$. *Si* $x < 0$, *on a* $\ln|x| = \ln(-x)$ *et la dérivée de* $x \mapsto \ln(-x)$ *est* $-(1/-x) = 1/x$ *d'après la règle de dérivation d'une fonction composée. Ainsi la fonction* $x \mapsto \ln|x|$ *a pour dérivée* $1/x$ *sur chacun des intervalles* $]-\infty,0[$ *et* $]0,+\infty[$.

5.2 Exponentielle népérienne

Puisque la fonction logarithme est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, nous savons que pour tout nombre réel x, il existe un unique nombre réel y tel que $\ln y = x$; de plus, y est strictement positif. Par définition, le nombre y s'appelle exponentielle de x et se note $\exp x$. L'application $x \mapsto \exp x$ s'appelle la fonction exponentielle et se note $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous avons donc les relations

$$\begin{cases} \exp(\ln x) = x \ si \ x > 0 \\ \ln(\exp x) = x \ si \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les propriétés de l'exponentielle se déduisent facilement de celles du logarithme.

1) $\exp(a+b) = (\exp a)(\exp b)$ pour tous nombres réels a et b et $\exp(na) = (\exp a)^n$ pour tout nombre réel a et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

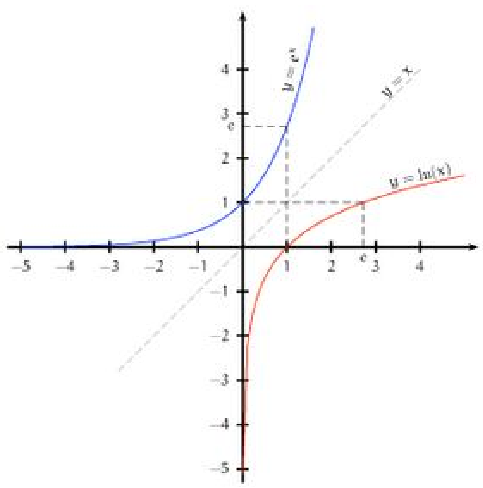
2) La fonction exponentielle définit une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$; on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$.

3) La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' = \exp$. La fonction exponentielle est convexe et l'on a $\exp x \geq 1 + x$ quel que soit x.

Pour montrer les égalités de (1), il suffit d'appliquer le logarithme à chacun des membres.

Les affirmations de (2) résultent des propriétés des fonctions continues strictement monotones. D'après le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque, nous savons que pour tout nombre réel x, on a $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp x)}$. Puisque $\ln'(\exp x) = \frac{1}{\exp x}$, il vient $\exp'(x) = \exp x$. La dérivée de la fonction exponentielle est croissante, donc la fonction exponentielle est convexe. Par suite on a $\exp x \geqslant \exp 0 + \exp'(0)x = 1 + x$ quel que soit le nombre réel x.

Notation Le nombre réel $\exp 1$ se note e; on a donc $\ln e = 1$. Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, il vient $\exp 1 > \exp 0 = 1$ ou encore $e > 1$.



Soit a un nombre réel strictement positif.

► Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n \ln a) = (\exp \ln a)^n = a^n$.

► Supposons que n est un entier supérieur ou égal à 2 et posons $y = \exp(\frac{1}{n} \ln a)$.
On a $y^n = \exp(n \frac{1}{n} \ln a) = \exp \ln a = a$; puisque y est strictement positif, on en déduit $y = \sqrt[n]{a}$ par définition de la racine n-ième.
On a donc

$$\sqrt[n]{a} = \exp(\frac{1}{n} \ln a) \quad \text{pour tout} \quad a > 0.$$

Définition 5.2.1 *Soit a un nombre réel strictement positif et soit $b \in \mathbb{R}$. On définit le nombre réel a^b, appelé a puissance b, en posant*

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Si b est un entier positif, nous avons vu que l'on a $\exp(b \ln a) = \overbrace{a \cdots a}^{b \text{ termes}}$ *, de sorte que la notation a exposant b représente bien dans ce cas une puissance entière de a. Si n est un entier au moins égal à 2, on a aussi d'après ce qui précède*

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

La définition précédente nous permet d'élever un nombre réel **strictement positif** à une puissance réelle quelconque. Comme nous allons le voir, les règles de calcul sur les nombres ainsi définis sont celles que l'on pratique d'habitude lorsque les exposants sont entiers.

Proposition 5.2.1

► *Pour tout nombre réel b, on a $1^b = 1$.*

► *On a $x^{(b+c)} = x^b x^c$ et $(x^b)^c = x^{bc}$ pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tous nombres réels b et c.*

► *Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $(xy)^c = x^c y^c$ pour tout nombre réel c.*

Démonstration Si x est un nombre strictement positif et si b et c sont des nombres réels, nous avons par définition

$$1^b = \exp(b \ln 1) = \exp 0 = 1$$

et

$$x^{b+c} = \exp((b+c)\ln x) = \exp(b \ln x)\exp(c \ln x) = x^b x^c.$$

Puisqu'on a

$$\ln x^b = \ln \exp(b \ln x) = b \ln x,$$

il vient

$$\ln((x^b)^c) = c \ln(x^b) = cb \ln x$$

et par suite

$$(x^b)^c = \exp(bc \ln x) = x^{bc}$$

Enfin, si x et y sont strictement positifs, on a

$$(xy)^c = \exp(c \ln(xy)) = \exp(c \ln x + c \ln y) = \exp(c \ln x)\exp(c \ln y) = x^c y^c.$$

Remarque 5.2.1 *Soit $p \in \mathbb{Z}$ et soit q un entier au moins égal à 2.*

Pour tout nombre réel $a > 0$, on a $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$ d'après les règles calcul sur les exposants et donc il vient

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Pour étudier une expression de la forme a^b où b n'est pas entier, revenez à la définition:

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Proposition 5.2.2 *Si a est un nombre réel, on a $\lim_{n \to +\infty}(1 + \frac{a}{x})^x = e^a$. En particulier, la suite de terme général $(1 + \frac{1}{n})^n$ a pour limite le nombre e.*

5.3 Fonction puissance

Définition 5.3.1 *Soit b un nombre réel. La fonction $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = x^b$ s'appelle une fonction puissance.*

Posons $h(x) = b \ln x$ pour tout $x > 0$.

Par définition, nous avons $u(x) = \exp h(x) = (\exp \circ h)(x)$ donc u est dérivable comme composée de deux fonctions dérivables. D'après la règle de dérivation d'une fonction composée, il vient

$$\begin{aligned} u'(x) = h'(x) \exp'(h(x)) &= \frac{b}{x} \exp h(x) = b \exp(-\ln x) \exp(b \ln x) \\ &= b \exp((b-1) \ln x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u'(x) = bx^{b-1} \quad \text{pour tout nombre } x > 0.$$

Pour dériver une fonction puissance, la règle est la même, que l'exposant soit un nombre entier ou un nombre réel quelconque.

Voici les principales propriétés de la fonction $u : x \mapsto x^b$.

▶ Pour tout nombre $x > 0$, on a $x^{b-1} > 0$, donc $u'(x)$ a le signe de b. Ainsi, la fonction u est strictement croissante si $b > 0$ et strictement décroissante si $b < 0$.

▶ Supposons $b > 0$. Nous avons $\lim_{x \to +\infty} b \ln x = +\infty$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} x^b = \lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$$

Puisque $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$, il vient $\lim_{x \to 0} b \ln x = -\infty$ et par suite

$$\lim_{x \to 0} x^b = \lim_{x \to -\infty} \exp x = 0.$$

La fonction u se prolonge donc par continuité en 0 en posant $u(0) = 0$.

► Si $b > 1$, alors $u(x)/x = x^{b-1}$ tend vers 0 quand x tend vers 0; la fonction u, prolongée en 0, est donc dérivable à droite en 0 et l'on a $u'_d(0) = 0$. Ainsi le graphe de u est tangent à l'origine à l'axe des abscisses. Puisqu'on a $b - 1 > 0$, la fonction $x \mapsto x^{b-1}$ est croissante et il en est de même de la fonction u'. La fonction u est donc convexe.

► Si l'on a $0 < b < 1$, alors $u(x)/x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, donc le graphe de u est tangent à l'origine à l'axe des ordonnées. Puisqu'on a $b - 1 < 0$, la fonction $x \mapsto x^{b-1}$ est décroissante, la fonction u' aussi et la fonction u est concave.

► Si $b < 0$, nous avons $\lim\limits_{x\to 0} b \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x^b = +\infty$. Par ailleurs, on a

$$\lim_{x\to+\infty} b \ln x = -\infty$$

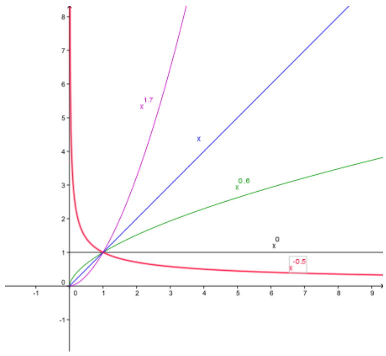
donc

$$\lim_{x\to+\infty} x^b = \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0.$$

Puisque $b - 1$ est strictement négatif, la fonction $x \mapsto x^{b-1}$ est décroissante et comme b est négatif, la fonction u' est croissante. La fonction u est donc convexe.

► Si $b = 0$, la fonction u est constante sur $]0, +\infty[$, de valeur 1.

Proposition 5.3.1 *Si $a > 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est une bijection continue et strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$. Si $a < 0$, la fonction $x \mapsto x^a$ est une bijection continue et strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.*



5.4 Fonctions exponentielle de base a

Définition 5.4.1 *Soit a un nombre réel strictement positif. La fonction $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $v(x) = a^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base a.*

Pour tout nombre réel x, posons $g(x) = x \ln a$. On a $v(x) = \exp g(x) = (\exp \circ g)(x)$ donc la fonction v est dérivable comme composée de fonctions dérivables. De plus (dérivée d'une composée), on a $v'(x) = g'(x) \exp g(x)$ ou encore

$$v'(x) = (\ln a) a^x \quad \text{pour tout réel } x.$$

▶ Si $a > 1$, alors $\log a$ est strictement positif, donc on a $v'(x) > 0$ et la fonction v est strictement croissante.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln a = +\infty$, il vient $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x \ln a) = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Puisque $\ln a$ est positif et v croissante, la fonction $v' = (\ln a)v$ est aussi croissante, donc v est convexe.

▶ Si $a = e$, nous avons $e^x = \exp(x \ln e)$ c'est-à-dire $e^x = \exp x$.

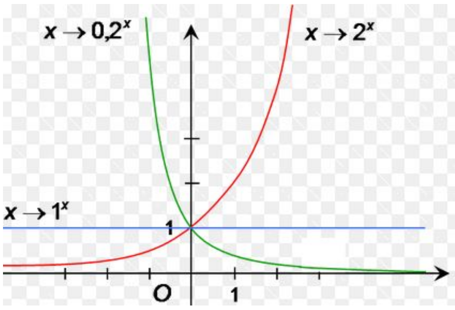
La fonction exponentielle de base e est donc l'exponentielle ordinaire.

On peut ainsi utiliser l'une ou l'autre des notations e^x ou $\exp x$ pour désigner exponentielle de x.

▶ Si $a < 1$, alors on a $\ln a < 0$ donc $v'(x) < 0$ et la fonction v est strictement décroissante. Puisque $\lim_{x\to+\infty} x\ln a = -\infty$, on en déduit $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ et de même $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. Puisque v est décroissante et $\ln a < 0$, la fonction v' est croissante et v est convexe.

Ces résultats permettent d'énoncer :

Proposition 5.4.1 *Si $a \neq 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Si $a > 1$, cette bijection est strictement croissante; si $a < 1$, elle est strictement décroissante.*



5.5 Croissances comparées

Les limites que nous allons calculer seront très souvent utilisées dans les exercices. Il faut les apprendre afin de les employer sans hésitation.

Lemme 5.5.1 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Démonstration On a démontré que pour tout nombre x strictement positif, on a l'inégalité $\ln x \leqslant x - 1$, ce qui implique $\ln x < x$. On a donc $\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \leqslant 1$ pour tout nombre $x > 0$. Si $x > 1$, il vient

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln\sqrt{x}}{x} = 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} 1/\sqrt{x} = 0$, cet encadrement montre que $(\ln x)/x$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Puisqu'on a $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, en utilisant les propriétés des limites, il vient $\lim_{x\to+\infty} x/e^x = \lim_{x\to+\infty} (\ln e^x)/e^x = \lim_{t\to+\infty} (\ln t)/t = 0$. On en déduit $\lim_{x\to+\infty} e^x/x = +\infty$.

Proposition 5.5.1

- *Si b est un nombre réel strictement positif, alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \ \textit{et} \ \lim_{x\to 0}(x^b \ln x) = 0.$$

- *Si $a > 1$ et $b > 0$, alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \ \textit{et} \ \lim_{x\to-\infty}(x^n a^x) = 0$$

pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration Pour tout $x > 0$, on a $\frac{\ln x}{x^b} = \frac{1}{b}\frac{\ln x^b}{x^b}$. Puisque b est strictement positif, x^b tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^b}{x^b} = 0$, d'après le lemme précédent. Il s'ensuit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0$.
Pour tout $x > 0$, nous avons $\frac{1}{x^b} = \left(\frac{1}{x}\right)^b$, donc $x^b \ln x = -\frac{\ln(1/x)}{(1/x)^b}$. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(\ln t)/t^b = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^b \ln x = 0$ d'après un théorème sur les limites.
Pour tout nombre réel x différent de 0, on a les égalités $\frac{a^x}{x} = \frac{e^{x\ln a}}{x} = (\ln a)\frac{e^{x\ln a}}{x\ln a}$. Puisque $a > 1$, $\ln a$ est strictement positif, $x \ln a$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a}/x\ln a = \lim_{t\to+\infty} e^t/t = +\infty$ d'après le lemme. On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} a^x/x = +\infty.$$

Puisque b est strictement positif, nous savons que la fonction puissance $x \mapsto x^b$ est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$; il existe donc un nombre $\alpha > 1$ avec $a = \alpha^b$. Pour tout $x > 0$, on a alors $a^x = (\alpha^b)^x = \alpha^{bx} = (\alpha^x)^b$ et $a^x/x^b = (\alpha^x)^b/x^b = (\alpha^x/x)^b$. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \alpha^x/x = +\infty$ et $b > 0$, on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a^x/x^b = \lim_{x\to+\infty}(\alpha^x/x)^b = +\infty$.
Pour tout nombre réel x, on a $a^{-x} = 1/a^x$. Si n est un entier positif ou nul, il vient donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x^n a^x| = \lim_{x\to-\infty} |-x|^n/a^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^n/a^x = 0$ d'après le résultat précédent. Si n est un entier négatif, x^n et a^x tendent vers 0 quand x tend vers $-\infty$, donc aussi leur produit.

5.6 Fonctions trigonométriques et leurs inverses

5.6.1 La fonction Arc sinus

La fonction sinus est continue et dérivable et si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, nous avons

$$\sin'(x) = \cos x > 0.$$

La fonction sinus est donc strictement croissante sur le segment $[-\pi/2, \pi/2]$; de plus, $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$. D'après le théorème sur les fonctions continues monotones, on en déduit que la fonction sinus définit une bijection du segment $[-\pi/2, \pi/2]$ sur le segment $[-1, 1]$. Notons $s : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ cette bijection.

Définition 5.6.1 *La bijection réciproque de s s'appelle la fonction Arc sinus et se note* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.

Pour tout nombre x appartenant au segment $[-1, 1]$, $\arcsin x$ est donc l'unique nombre réel du segment $[-\pi/2, \pi/2]$ dont le sinus est égal à x. Par définition

$$\begin{cases} sin(Arc\ sin\ x) = x \ \forall x \in [-1, 1] \\ Arc\ sin(sin\ x) = x \ \forall x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Puisque $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ pour tout nombre réel α, il vient $\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ pour tout $x \in [-1, 1]$. De plus $\arcsin x$ appartient au segment $[-\pi/2, \pi/2]$, donc $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$. Par suite

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pout tout } x \in [-1, 1].$$

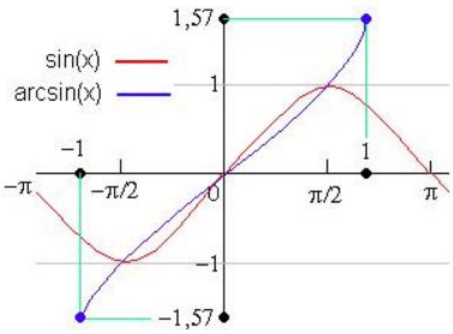
La fonction Arc sinus est la réciproque d'une bijection continue strictement croissante, donc c'est une fonction continue et strictement croissante. De plus, la dérivée de la fonction sinus ne s'annule pas dans l'intervalle ouvert $]-\pi/2, \pi/2[$. D'après le théorème sur la dérivée d'une fonction réciproque, on en déduit que la fonction Arc sinus est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Il vient donc

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pout tout } x \in]-1,1[$$

Le graphe de la fonction Arc sinus se déduit de celui de la fonction sinus sur le segment $[-\pi/2, \pi/2]$ en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$. Remarquons que le graphe de Arc sinus a une tangente verticale aux points d'absisse 1 et -1 et que la tangente à l'origine a pour pente $\arcsin'(0) = 1$. Puisque la fonction sinus est impaire, la fonction Arc sinus l'est aussi.



5.6.2 La fonction Arc cosinus

La fonction cosinus est continue et dérivable et si $x \in]0,\pi[$, alors $\cos'(x) = -\sin x < 0$. La fonction cosinus est donc strictement décroissante sur le segment $[0,\pi]$. Puisqu'on a $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$, la fonction cosinus définit une bijection du segment $[0,\pi]$ sur le segment $[-1,1]$. Notons $c : [0,\pi] \to [-1,1]$ cette bijection.

Définition 5.6.2 *La bijection réciproque de c s'appelle la fonction Arc cosinus. On la note* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$.

Pour tout nombre $x \in [-1,1]$, $\arccos x$ est l'unique nombre réel du segment $[0,\pi]$ dont le cosinus est égal à x.

$$\begin{cases} cos(Arc\ cos\ x) = x\ \forall x \in [-1,1] \\ Arc\ cos(cos\ x) = x\ \forall x \in [0,\pi] \end{cases}$$

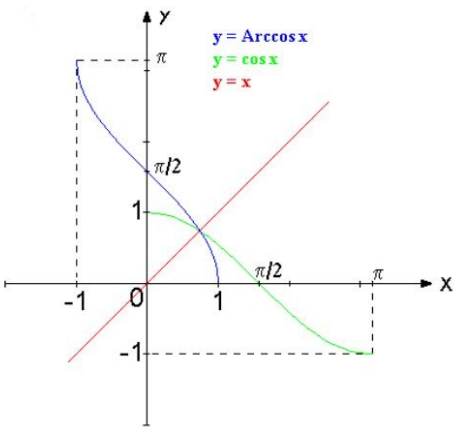
Rappelons que pour tout nombre α on a $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$. Si $x \in [-1,1]$, il vient donc $\cos(\pi/2 - \arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x$. Puisque $-\pi/2 \leqslant \arcsin x \leqslant \pi/2$, on en déduit l'encadrement $0 \leqslant \pi/2 - \arcsin x \leqslant \pi$. Le nombre réel $\pi/2 - \arcsin x$ appartient au segment $[0,\pi]$ et son cosinus est égale à x : par définition de la fonction Arc cosinus, on a donc $\pi/2 - \arcsin x = \arccos x$. Nous avons ainsi montré

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2 \quad \text{pour tout } x \in [-1,1]$$

Puisque $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, il vient

$$\arccos'(x) = -\arcsin'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pout tout } x \in]-1,1[.$$

Le graphe de Arc cosinus est symétrique du graphe de cosinus sur le segment $[0,\pi]$ par rapport à droite d'équation $y = x$. Aux points d'absisse 1 et -1, la tangente est verticale. Au point d'absisse 0, la tangente a pour pente $\arccos'(0) = -1$.



5.6.3 La fonction Arc tangente

Rappelons que la fonction tangente, que nous noterons tan, est définie par $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$ pour tout nombre réel x différent des nombres $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$.
D'après la règle pour dériver un quotient, nous avons

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

La fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ car sa dérivée est strictement positive. De plus, nous avons

$$\lim_{x \to -\pi/2^+} \tan x = -\infty \text{ et } \lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$$

Puisque la fonction tangente est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$, il s'ensuit que la fonction tangente définit une bijection de l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
Notons $t : x \mapsto \tan x$ cette bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.6.3 *La bijection réciproque de t s'appelle la fonction Arc tangente et se note* $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$.

$$\begin{cases} tan(Arc\ tan\ x) = x \ \forall x \in \mathbb{R} \\ Arc\ tan(tan\ x) = x \ \forall x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

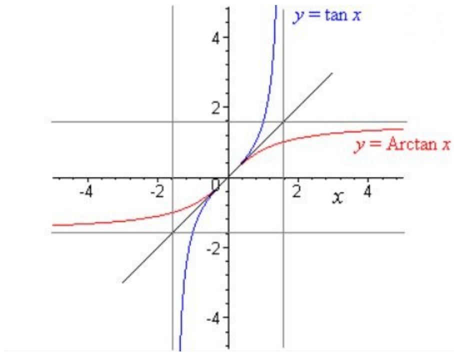
D'après les propriétés des fonctions continues strictement monotones, nous savons que l'on a $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \pi/2$ et $\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\pi/2$. De plus, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\tan'(x) \neq 0$.
La fonction Arc tangente est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x, on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)},$$

c'est-à-dire

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Puisque $\tan(-x) = -\tan x$ pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, la fonction Arc tangente est impaire. La tangente à l'origine au graphe de arctan a pour pente $\arctan'(0) = 1$.



Les fonction Arc sinus, Arc cosinus et Arc tangente permettent d'exprimer des solutions d'équations trigonométriques. En utilisant les formules de trigonométrie, il est souvent possible, dans les exercices, de se ramener aux équations simples suivantes.

Équation $\sin x = a$ où $a \in [-1, 1]$

En posant $\alpha = \arcsin a$, l'équation s'écrit $\sin x = \sin \alpha$. Pour tout nombre réel x, nous avons

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin \alpha &= 2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \cos \frac{x+\alpha}{2} \\
\sin \frac{x-\alpha}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x-\alpha}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi,\ \text{où } k \in \mathbb{Z} \\
\cos \frac{x+\alpha}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x+\alpha}{2} = (2k+1)\pi/2 \Leftrightarrow x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ \text{où } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

L'équation $\sin x = a$ a donc pour solutions les nombres réels $\alpha + 2k\pi$ et $\pi - \alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Équation $\cos x = a$ où $a \in [-1, 1]$

En posant $\alpha = \arccos a$, l'équation s'écrit $\cos x = \cos \alpha$. Pour tout nombre réel x, nous avons

$$\cos x - \cos \alpha = -2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \sin \frac{x+\alpha}{2}$$

donc l'équation $\cos x = a$ a pour solutions les nombres réels $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Équation $\tan x = a$ où $a \in \mathbb{R}$

En posant $\alpha = \arctan a$, l'équation s'écrit $\tan x = \tan \alpha$ et les solutions sont les nombres réels $x = \alpha + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

5.7 Fonctions hyperboliques et leurs iverses

5.7.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 5.7.1 *La fonction sinus hyperbolique, notée* sinh*, et la fonction cosinus hyperbolique, notée* cosh*, sont définies par*

$$\sinh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$

et

$$\cosh x = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x, on a les égalités $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$, $\cosh x + \sinh x = \exp(x)$, $\cosh x - \sinh x = \exp(-x)$ et donc l'identité remarquable

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Par définition, la fonction sinh est impaire et la fonction cosh est paire. En dérivant, on trouve

$$\sinh' = \cosh \quad \text{et} \quad \cosh' = \sinh$$

Pour tout nombre $x > 0$, on a $x > -x$ donc $\exp(x) > \exp(-x)$ et par suite $\sinh x > 0$. Puisque la fonction sinh est impaire, on en déduit $\sinh x < 0$ si $x < 0$. La fonction cosh est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$. Puisque $\cosh 0 = 1$, il s'ensuit $\cosh x > 1$ pour tout nombre $x \neq 0$.

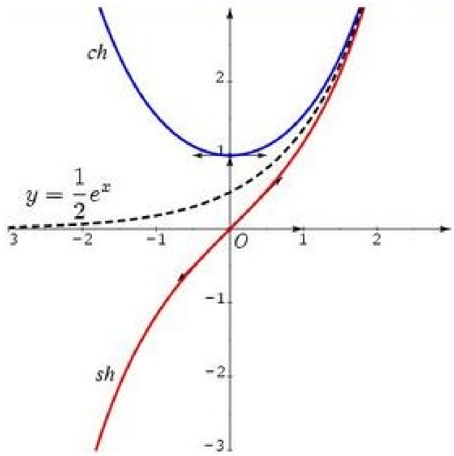
En particulier, la fonction cosh est strictement positive. Puisque cosh est la dérivée de sinh, cela implique que la fonction sinh est strictement croissante. Remarquons aussi que l'on a $\sinh 0 = 0$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\exp(x)$ tend vers $+\infty$ et $\exp(-x)$ tend vers 0. On en déduit

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty, \ \lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty.$$

La fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc une bijection strictement croissante et la fonction cosh définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

Puisque la fonction $\cosh' = \sinh$ est croissante, la fonction cosh est convexe. La fonction sinh est convexe sur l'intervalle $[0, +\infty[$ car sa dérivée $\sinh' = \cosh$ est croissante sur $[0, +\infty[$.Puisqu'on a $\cosh x - \sinh x = \exp(-x) > 0$, il vient l'inégalité $\cosh x > \sinh x$ pour tout x et aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cosh x - \sinh x) = 0$.



5.7.2 Fonction tangente hyperbolique

Définition 5.7.2 *La fonction tangente hyperbolique, notée* tanh, *est définie par*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout x, on a

$$\tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh x - \sinh x \cosh'(x)}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

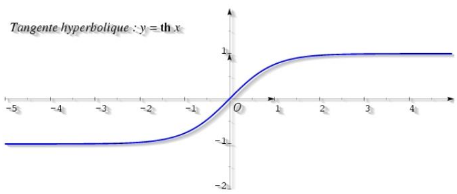
ou encore

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

L'égalité $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$ montre que $\tanh'(x)$ est strictement positif pour tout x. La fonction tanh est donc strictement croissante. Pour trouver la limite de $\tanh x$ quand x tend vers $+\infty$, écrivons

$$\tanh x = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)} = \frac{\exp(x)(1 - \exp(-2x))}{\exp(x)(1 + \exp(-2x))} = \frac{1 - \exp(-2x)}{1 + \exp(-2x)}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $\exp(-2x)$ tend vers 0, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh x = 1$. La fonction tanh étant impaire, on en déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} \tanh x = -1$. Puisque la fonction tanh est continue, elle définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Les droites d'équation $y = 1$ et $y = -1$ sont des asymptotes horizontales et la tangente à l'origine a pour pente $\tanh'(0) = 1$.



Il convient de remarquer la ressemblance entre les formules

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \sinh' = \cosh, \cosh' = \sinh, \tanh'(x) = 1 - \tanh^2 x$$

et les formules analogues

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \sin' = \cos, \cos' = -\sin, \tan'(x) = 1 + \tan^2 x$$

pour sinus, cosinus et tangente. L'analogie ne s'arrête pas là : il y a aussi pour les fonctions hyperboliques, des formules de trigonométrie tout à fait semblables aux formules pour sinus, cosinus et tangente. C'est en deuxième année que vous comprendrez l'origine de ce parallélisme remarquable. Ces formules ne sont pas difficiles à apprendre une fois qu'on a en mémoire celles de trigonométrie ordinaire.

$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b$	$\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a$	
$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$	$\sinh 2a = 2 \sinh a \cosh a$	
$\tanh(a+b) = \dfrac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$	$\tanh 2a = \dfrac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a}$	
$\cosh a + \cosh b = 2 \cosh \dfrac{a+b}{2} \cosh \dfrac{a-b}{2}$	$\cosh a - \cosh b = 2 \sinh \dfrac{a+b}{2} \sinh \dfrac{a-b}{2}$	
$\sinh a + \sinh b = 2 \sinh \dfrac{a+b}{2} \cosh \dfrac{a-b}{2}$		
$\cosh 2a = \dfrac{1 + \tanh^2 a}{1 - \tanh^2 a}$	$\sinh 2a = \dfrac{2 \tanh a}{1 - \tanh^2 a}$	$\tanh 2a = \dfrac{2 \tanh a}{1 + \tanh^2 a}$

Toutes ces égalités se démontrent facilement à partir de la définition des fonctions sinh, cosh et tanh en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.
Il est également utile de savoir résoudre les équations suivantes de trigonométrie hyperbolique.

Équation $\sinh x = a$ où $a \in \mathbb{R}$

Par définition de la fonction sinus hyperbolique, nous avons les équivalences

$$\sinh x = a \;\Leftrightarrow\; e^x - e^{-x} = 2a \;\Leftrightarrow\; e^{2x} - 2ae^x - 1 = 0$$

la deuxième étant justifiée par le fait que e^x n'est jamais nul. Puisqu'on a $e^{2x} = (e^x)^2$, la dernière équation exprime que e^x est racine du polynôme $P = X^2 - 2aX - 1$.

Ce polynôme est unitaire, de degré 2 et le terme constant est négatif : les racines de P sont donc réelles et de signes contraires. Puisque e^x est strictement positif pour tout x, seule la racine positive de P est à retenir; sa valeur est $a+\sqrt{a^2+1}$ et notre équation équivaut à $e^x = a+\sqrt{a^2+1}$. Il vient donc

$$\sinh x = a \;\Leftrightarrow\; x = \ln(a+\sqrt{a^2+1}).$$

Puisque la fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, nous pouvions deviner que l'équation $\sinh x = a$ possède une solution unique. Précisément, nous venons de montrer :
la bijection réciproque de sinh est la fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
Cette dernière fonction s'appelle l'Argument sinus hyperbolique et se note $\arg\sinh$.

Équation $\cosh x = a$ où $a \in \mathbb{R}$

▶ Si $a < 1$, cette équation n'a pas de solution car pour tout nombre réel x, nous savons que l'on a $\cosh x \geqslant 1$. Si $a = 1$, la seule solution est 0 car $\cosh x > 1$ si $x \neq 0$.

▶ Supposons $a > 1$. Par définition de la fonction cosh, nous avons les équivalences

$$\cosh x = a \;\Leftrightarrow\; e^x + e^{-x} = 2a \;\Leftrightarrow\; e^{2x} - 2ae^x + 1 = 0$$

et la dernière équation exprime que e^x est racine du polynôme $Q = X^2 - 2aX + 1$. Le discriminant de Q est $4(a^2-1)$ qui est positif, il y a donc deux racines réelles $u = a+\sqrt{a^2-1}$ et $v = a-\sqrt{a^2-1}$. Puisque Q est unitaire et de terme constant 1, nous avons $uv = 1$ donc u et v sont de même signe, celui de leur somme $u+v = a$; les nombres u et v sont donc strictement positifs. Les solutions de l'équation $chx = a$ sont déterminées par $e^x = u$ ou $e^x = v$, c'est-à-dire $x = \ln u$ ou $x = \ln v$. Puisque $v = 1/u$, on a $\ln v = -\ln u$ d'où

$$\cosh x = a \;\Leftrightarrow\; x = \pm\ln(a+\sqrt{a^2-1}).$$

Puisque la fonction cosh est paire, nous pouvions prévoir que les solutions seraient opposées. Nous savons que la fonction cosh définit une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$; la formule ci-dessus affirme donc :
la bijection réciproque de cosh : $[0,+\infty[\to[1,+\infty[$ est la fonction $x\mapsto\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$.
On appelle Argument cosinus hyperbolique cette fonction et on la note $\operatorname{arg\,cosh}$.

Équation $\tanh x = a$ où $a\in\mathbb{R}$

► Si $|a|\geqslant 1$, cette équation n'a pas de solution car nous avons montré que pour tout nombre x, on a $-1<\tanh x<1$.

► Supposons $-1<a<1$. Par définition de la tangente hyperbolique, nous avons $\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Il vient donc les équivalences

$$\tanh x=a\ \Leftrightarrow\ e^{2x}-1=a(e^{2x}+1)\ \Leftrightarrow\ e^{2x}=\frac{1+a}{1-a}.$$

Par hypothèse, les nombres $1-a$ et $1+a$ sont strictement positifs, donc $\dfrac{1+a}{1-a}>0$ et par suite

$$\tanh x=a\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}.$$

Remarque 5.7.1 *Nous savons que si x et y sont des nombres réels tels que $x^2+y^2=1$, il existe un unique nombre $t\in[0,2\pi[$ vérifiant les deux égalités $x=\cos t$ et $y=\sin t$. Le cercle trigonométrique est donc l'ensemble des points $(\cos t,\sin t)$ où $t\in[0,2\pi[$.*

Soient x et y des nombres réels tels que $x^2-y^2=1$. Nous avons montré qu'il existe un unique nombre t tel que $y=\sinh t$. Nous avons $x^2=1+y^2=1+\sinh^2 t=\cosh^2 t$ et donc, si $x\geqslant 0$, il vient $x=\cosh t$.
Dans le plan affine $\mathbb{R}^{\,2}$, l'ensemble des points (x,y) tels que $x^2-y^2=1$ et $x\geqslant$

0 est une branche d'hyperbole. Cette courbe est donc aussi l'ensemble des points $(\cosh t, \sinh t)$ où $t \in \mathbb{R}$. C'est pourquoi les fonctions sinh et cosh sont appelées des fonctions hyperboliques.

Références

[1] K. Allab, Éléments d'Analyse *Fonction dune Variable Réelle*, Office des Publications Universitaires, 2002.

[2] C. Baba-Hamed, K. Benhabib, Analyse 1. *Rappel de cours et exercices avec solutions.* O.P.U., 1985.

[3] A. Bodin, N. Borne, M. Bourdon, G. Chen, G. Costantini, L. Desideri, A. Hanani, J. Rouget, *ANALYSE COURS DE MATHÉMATIQUES 1re ANNÉE*, 1re édition, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.

[4] A. Hitta, *Cours Algèbre et Analyse I.* (2008-2009).

[5] F. Liret, D. Martinais, *ANALYSE 1re ANNÉE*, 2e édition , DUNOD, Paris, 2003.

[6] H. Osmanov, S. Khelifati, *Brochure d'exercices d'analyse mathématiques I*, 2013.