République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli de Mascara

Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Biologie

Polycopié de Cours

Cours d'Analyse 1

Présenté par :

Mohamed BEKIRI

Algérie 2022

Je dédie ce modeste travail à :

- *mes chers parents,*
- *ma grand-mère,*
- *ma famille,*
- *mes amis.*

Table des matières

Table des figures

Avant-propos

Cet ouvrage est un support de cours d'analyse, il est principalement destiné à tous les étudiants qui peuvent avoir besoin d'analyse pour leurs études supérieures comme les étudiants de la première année universitaire en sciences naturelles (Biologie, Agronomie) ou même les étudiants de la première année Maths-Informatiques (MI) et Sciences de la matière (SM).

Dans cet ouvrage, on trouvera cinq chapitres de cours, rédigés dans un style facile à lire et illustrés par de nombreux exemples.

1. *Un chapitre sur les propriétés des suites de nombres réels ; on y trouvera les notions de base comme les suites monotones, bornées, convergentes, extraites et les suites de Cauchy.*

2. *Un chapitre sur les propriétés des séries à termes positifs dans lequel on introduit les différents critères de convergence d'une série à termes positifs.*

3. *Un chapitre sur les fonctions d'une variable réelle ; on y travaille sur les limites, la continuité et la dérivabilité.*

4. *Un chapitre dans lequel on introduit en détail les fonctions élémentaires (usuelles) : fonctions trigonométriques réciproques et fonctions hyperboliques directes et réciproques.*

5. *Un dernier chapitre sur le calcul d'intégrales et de primitives dans lequel on approfondit les définitions et les méthodes du lycée, en introduisant de nouveaux outils : l'intégration par parties, le changement de variable et la notion d'intégrale indéfinie pour le calcul de primitives.*

Á la fin de chaque chapitre, on trouvera une série d'exercices proposés.

Enfin, je tiens a remercier vivement mes amis Mohammed Elamine SEBIH et Abdelkader BENKHALED (Université Mustapha Stambouli de Mascara) qui ont contribué au perfectionnement de cet ouvrage par la relecture attentive du manuscrit et par leurs commentaires et suggestions.

Chapitre 1

Suites de nombres réels

1.1 Généralités sur les suites

1.1.1 Définitions

Définition 1.1. *Une suite numérique, ou réelle, est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on lui associe* $u_n \in \mathbb{R}$*. On note une telle suite par* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* (u_n)*. Le terme* u_n *est dit le terme général.*

Exemple 1.1. *La suite des carrés des entiers est* $u : n \longmapsto u_n = n^2$*, i.e.* $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$,...

Remarque 1.1. *Il arrive que la suite ne soit pas définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, par exemple la suite* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *n'a de sens que si* $n \neq 0$.

Définition 1.2. *Soient* $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ *deux suites et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *La somme de* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *est la suite de terme général* $u_n + v_n$
- *Le produit de* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *est la suite de terme général* $u_n v_n$
- *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $v_n \neq 0$*, le quotient de* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *est celle de la la suite de terme général :* $\dfrac{u_n}{v_n}$
- $\lambda (u_n)_n$ *est la suite de terme général* λu_n.

1.1.2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition 1.3. *Une suite* $(u_n)_n$ *est dite*

1. arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} = u_n + r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le nombre r est alors unique qui s'appelle la raison de la suite $(u_n)_n$;
2. géométrique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1} = ru_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $u_0 \neq 0$, le nombre r est alors unique qui s'appelle la raison de la suite $(u_n)_n$.

Proposition 1.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite,*

1. *$(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 si et seulement si*

$$\forall [1] n \in \mathbb{N} : \; u_n = rn + u_0.$$

De plus la somme des premiers termes de $(u_n)_n$ dans ce cas est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}.$$

2. *$(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison r et de premier terme u_0 si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; u_n = u_0 r^n.$$

De plus la somme des premiers termes de $(u_n)_n$ dans ce cas est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

1.1.3 Suites monotones

Définition 1.4. *On dit que la suite $(u_n)_n$*

1. *croissante (respectivement décroissante) si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n \quad (\textit{respectivement } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n);$$

2. *strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} > u_n \quad (\textit{respectivement } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} < u_n)\ .$$

3. *monotone (respectivement strictement monotone) si elle vérifie* (1) *ou* (2).

Exemple 1.2. *Soit la suite $(u_n)_n$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0$$

D'où la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

1. On utilisera souvent le quantificateur universel noté $\forall$, symbole qui signifie **pour tout** ou **quel que soit**.

1.1.4 Suites bornées

Définition 1.5. *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est*

1. majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$$
Un tel M est appelé majorant de la suite $(u_n)_n$
2. minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$$
Un tel m est appelé minorant de la suite $(u_n)_n$
3. bornée si elle est majorée et minorée à la fois. Autrement dit s'il existe $M > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M$$

Exemple 1.3. *Étant donnée la suite $(u_n)_n$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \cos n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| = |\cos n| \leq 1.$$

C'est à dire la suite $(u_n)_n$ est bien bornée.

1.2 Limites de suites

1.2.1 Suites convergentes

Définition 1.6. *On dit qu'une suite numérique $(u_n)_n$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$, lorsque n tend vers l'infini, et on note $u_n \to l$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists^{2} N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)\,. \tag{1.1}$$

On écrira

$$\lim_n u_n = l.$$

- *On dit aussi que la suite $(u_n)_n$ converge ou tend vers l.*
- *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est divergente si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N :\ |u_n - l| \geq \varepsilon.$$

2. On utilisera souvent le quantificateur existentiel noté ∃, symbole qui signifie **il existe au moins**.

Remarque 1.2. *Dans la définition 1.6 l'entier N dépend de ε. Pour montrer que l est la limite de la suite $(u_n)_n$, il faut donc, $\varepsilon > 0$ étant donné, déterminer un entier N ayant la propriété (1.1)*

Exemple 1.4. *Montrer avec la définition que la suite de terme générale $u_n = \dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$, converge vers 0.*

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$|u_n - 0| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

cela signifie que $n + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, on peut dire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

On peut donc choisir par exemple $N = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) - 1$ où E désigne la fonction de la partie entière (voir la page 26). On a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N \rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

Proposition 1.2. *La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est unique.*

Définition 1.7. *On dit qu'une suite $(u_n)_n$ tend vers*

1. $+\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A).$$
On écrira
$$\lim_n u_n = +\infty.$$
2. $-\infty$, si
$$\forall B > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ (n \geq N \Rightarrow u_n \leq B).$$
On écrira
$$\lim_n u_n = -\infty.$$

Remarque 1.3. *Une suite diverge cela veut dire qu'elle tend vers $\pm\infty$ ou elle peut aussi ne pas avoir de limite du tout ! c'est le cas par exemple de la suite $u_n = (-1)^n$.*

Proposition 1.3.

1. *Toute suite convergente est bornée.*
2. *Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée.*
3. *Toute suite réelle qui tend vers $-\infty$ est majorée.*

1.2.2 Opérations sur les limites

Proposition 1.4. *Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ deux suites avec $\lim\limits_n u_n = l$ et $\lim\limits_n v_n = l'$, où $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. On a les propriétés suivantes :*

1. $\lim\limits_n |u_n| = |l|$.
2. $\lim\limits_n (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda l + +\mu l'$.
3. $\lim\limits_n (u_n v_n) = ll'$.
4. *Si $u_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $l' \neq 0$ alors* $\lim\limits_n \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{l}{l'}$.

Le théorème suivant est un résultat importante pour les suites monotones et convergentes.

Théorème 1.1 (Théorème des suites monotones)**.** *Soit $(u_n)_n$ une suite*

1. *Si la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée, alors elle converge vers* $l = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.
2. *Si la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée, alors elle converge vers* $l = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple 1.5. *La suite de terme générale $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ converge*

On vérifie les condition du théorème précédent. Pour cela soit $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

La suite $(u_n)_n$ est donc strictement croissante
La suite $(u_n)_n$ est majoré, en effet, soit $k \geq 2$ on a

$$k^2 \geq k(k-1),$$

ainsi

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Par conéquent, on aura

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

D'où $(u_n)_n$ *est donc bien majoré par* 2*, finalement, la suite est croissante et majorée donc elle converge.*

1.3 Suites adjacentes

Définition 1.8. *Deux suites* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont adjacentes si l'une est croissante et l'autre est décroissante et si la suite* $(u_n - v_n)_n$ *converge vers* 0*.*

Théorème 1.2 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Si* $(u_n)_n$ *, et* $(v_n)_n$ *sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite l. De plus, dans le cas où* $(u_n)_n$ *est la suite croissante et* $(v_n)_n$ *est la suite décroissante, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq l \leq v_n.$$

Exemple 1.6. *Montrons que les deux suites de terme général ci-dessous sont adjacentes*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On a la suite $(u_n)_n$ *est croissante respectivement* $(v_n)_n$ *est décroissante car*

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} \\ &> 0, \end{aligned}$$

respectivement

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* : v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_n (u_n - v_n) = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Par conséquent, les deux suites sont adjacentes.

1.4 Suites extraites (Sous-suites)

Définition 1.9. *Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs réelles et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. On appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_n$ toute suite de la forme $\left(u_{\phi(n)}\right)_n$.*

Exemple 1.7. *On considère l'application strictement croissante ϕ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \phi(n) = 2^n$$

et la suite $(u_n)_n$ telle que $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n^2}$
La suite extraite obtenue à partir de l'application ci-dessus notée par $(v_n)_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n = u_{\phi(n)} = u_{2^n} = (-1)^{2^n} + \frac{1}{(2^n)^2} = 1 + \frac{1}{2^{2n}}.$$

Proposition 1.5. *Soit $(u_n)_n$ une suite converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers la même limite l.*

Théorème 1.3 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

1.5 Suites de Cauchy

Définition 1.10. *Une suite numérique $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si elle possède la propriété suivante :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n, \ m \in \mathbb{N} : \ (n \geq N \ \ et \ \ m \geq N \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon). \qquad (1.2)$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_n$, n'est pas de Cauchy si elle ne possède pas la propriété (1.2). C'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall N \in \mathbb{N}, \ \exists n, \ m \geq N \ \ \ et \ \ |u_n - u_m| \geq \varepsilon.$$

Théorème 1.4. *Une suite de nombre réels est convergente si est seulement si elle est de Cauchy.*

Remarque 1.4. *On pourra utiliser le théorème précédent pour*

- *Montrer la convergence d'une telle suite sans savoir sa limite*
- *Montrer la divergence d'une telle suite, il suffit de montrer qu'elle n'est pas de Cauchy.*

Exemple 1.8. *La suite de terme général* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*, n'est pas de Cauchy.*

En effet

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \exists m \geq N : |u_n - u_m| \geq \varepsilon.$$

Il suffit de prendre $n = 2N$ *et* $m = N$ *on a*

$$\begin{aligned}
|u_n - u_m| &= |u_{2N} - u_N| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right| \\
&= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{N+N} \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{N+N} + \frac{1}{N+N} + ... + \frac{1}{N+N}}_{N\ fois} \\
&= N\frac{1}{2N} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il est clair que $(u_n)_n$ *n'est pas une suite de Cauchy.*

1.6 Suites récurrentes

Une suite récurrente est définie par un ou plusieurs termes initiaux et une fonction de récurrence qui permet de calculer les termes suivants.

Définition 1.11. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation permettant de calculer les termes de proche en proche*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Exemple 1.9. *Soit* $f(x) = 1 + \sqrt{x}$*. On considère la suite récurrente définie par* f *:*

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}. \end{cases}$$

Les premiers termes de cette suite sont

$$u_1 = 1 + \sqrt{2},\ u_2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}},\ u_3 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}, \ldots$$

Exemple 1.10 (Exercice résolu)**.** *Soit la suite définie par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}. \end{cases}$$

Montrer que

1. (u_n) *est monotone.*
2. (u_n) *est majorée par* 1.
3. (u_n) *est convergente et donner sa limite.*

Solution:

1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n^2}{2} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geq 0.$$

   D'où, (u_n) est croissante.

2. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; u_n \leq 1.$$

   ► Pour $n = 0$, on a : $u_0 = \dfrac{1}{2} \leq 1$

   ► On suppose ensuite que cette propriété est vraie pour n i.e. $u_n \leq 1$ et on la montre pour $n+1$.
   Comme la suite (u_n) est croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; u_n \geq u_0 = \frac{1}{2} > 0$$

   Par suite

$$0 < u_n \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1+u_n^2}{2} \leq 1$$

   D'où

$$\forall n \in \mathrm{N} : \; u_{n+1} \leq 1.$$

3. D'après le théorème des suites monotone 1.1, on déduit que (u_n) est convergente et on suppose que $\lim\limits_{n} u_n = l$, par suite

$$l = \lim_n \frac{1+u_n^2}{2} = \frac{1+l^2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$l^2 - 2l + 1 = 0$$

qui possède la racine double $l = 1$, ce qui montre que $\lim_n u_n = 1$.

$\square$

1.7 Exercices

Exercice 1.1. *Calculer les limites suivantes si elles existent :*

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\cos(x^2)}{n^2+1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^n, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}.$$

Exercice 1.2. *Soit $(u_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par*

$$u_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)},$$

1. *Calculer u_1, u_2, u_3.*
2. *Vérifier que*
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
3. *Déduire l'expression de u_n en fonction de n.*
4. *Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Exercice 1.3. *On se donne la suite*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n+1} \end{cases}$$

1. *Calculer u_1, u_2, u_3.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.*
3. *Étudier la monotonie de $(u_n)_n$.*
4. *En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente, et donner sa limite.*

Exercice 1.4. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par*

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \cdots + \frac{1}{n\,!} \\ v_n &= u_n + \frac{1}{n\,!} \end{aligned}$$

- *Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.*

Exercice 1.5.

- *Montrer que la suite de terme général*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

est divergente.

Exercice 1.6. *On définit la suite réelle u_n par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{8}{9u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. *Calculer u_1, u_2, u_3.*
2. *Posons*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad v_n = \frac{6u_n - 8}{3u_n - 2}$$

- *Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer à l'aide de n et v_0 son terme général v_n.*
- *En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.*

Chapitre 2

Séries numériques à termes positifs

2.1 Généralités sur les séries numériques

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On appelle série de terme général u_n, noté $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum u_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n.$$

Remarque 2.1. *Si la suite n'est définie que pour $n \geq n_0$ où $n_0 \in \mathbb{N}$, on définit de façon similaire la série $\sum u_n$ comme la suite $\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)_{n\geq n_0}$.*

2.1.2 Nature d'une série

Définition 2.2. *On dit qu'une série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge vers une limite finie S, alors S est appelé la somme de la série et on écrira*

$$\sum_{n\geq 0} u_n = S.$$

Exemple 2.1. *La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ converge car sa somme partielle s'écrit comme suit*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Il est clair que

$$\lim_n S_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 2.$$

Exemple 2.2. *La série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ *converge.*

On peut réécrire u_n *sous la forme :*

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Alors la somme partielle de cette série s'écrit par

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

On a $\lim_n S_n = 1$, *d'où* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$.

2.1.3 Opérations sur les séries

Proposition 2.1. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries convergentes et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors les séries de terme général* $u_n + v_n$ *et* λu_n *convergent et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Corollaire 2.1. *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge alors* $\sum (u_n + v_n)$ *diverge.*

Remarque 2.2. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent on ne peut rien dire sur* $\sum (u_n + v_n)$

On termine cette section par un résultat important

Théorème 2.1. *Si* $\sum u_n$ *converge alors la suite* $(u_n)_n$ *tend vers* 0.

Remarque 2.3. *On utilise ce théorème parfois comme un critère pour montrer qu'une série diverge, il suffit de montrer que le terme général de la série ne tend pas vers* 0.

Exemple 2.3.

1. *On considère la série de terme général* $u_n = (-1)^n$. *Comme la suite* $(u_n)_n$ *ne tend pas vers* 0 *donc la série* $\sum (-1)^n$ *diverge.*

2. *Il en est de même pour la série de terme général $v_n = n^{\frac{1}{n}}$, on a*

$$\lim_n v_n = \lim_n n^{\frac{1}{n}} = \lim_n \mathrm{e}^{\ln(n^{\frac{1}{n}})} = \lim_n \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1 \neq 0,$$

par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{n}}$ *diverge.*

Remarque 2.4. *Dans le théorème précédent, le fait que la suite $(u_n)_n$ tend vers 0 est une condition nécessaire pour que la série converge mais elle n'est pas suffisante.*

Exemple 2.4. *On considère la série de terme général :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On remarque que : $\lim_n u_n = 0$.

D'aure part, on peut vérifier facilement que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ diverge. En effet,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) = \ln\frac{2 \times 3 \times \ldots \times (n+1)}{1 \times 2 \times \ldots \times n} \\ &= \ln(n+1) \to +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ *diverge.*

Voici une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une série quelconque.

Théorème 2.2 (Critère de Cauchy)**.** *Pour qu'une série de terme général u_n converge* ***il faut****, et* ***il suffit*** *que la suite des sommes partielles (S_n) soit une suite de Cauchy, c'est-à-dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N \text{ et } m \geq N \Rightarrow |S_n - S_m| < \varepsilon). \tag{2.1}$$

Remarque 2.5. *Lorsque la la condition (2.1) du théorème précédent n'est pas satisfaite, alors la série* $\sum u_n$ *est divergente. C'est-à dire*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N, m \geq N \text{ et } |S_n - S_m| \geq \varepsilon). \tag{2.2}$$

Exemple 2.5. *On veut vérifier que la série* $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ *diverge, parce que sa suite des sommes partielles* S_n *définie par*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

n'est pas de Cauchy.
En effet,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ \exists m \geq N : |S_n - S_m| \geq \varepsilon.$$

Il suffit de prendre $n = 2N$ *et* $m = N$ *on a*

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= |S_{2N} - S_N| \\
&= \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right)\right| \\
&= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{2N} \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \ldots + \frac{1}{2N}}_{N\ fois} \\
&= N\frac{1}{2N} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (2.1) n'est pas satisfaite, ce qui montre que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ *diverge.*

2.2 Convergence des séries à termes positifs

Dans cette section on s'intéresse à la question de la nature d'une série à terme positifs, dans toute la suite, on désignera $(u_n)_n$ comme une suite de nombres positifs, c'est-à-dire $u_n \geq 0$, pour tout n. La propriété suivante est évidente.

Proposition 2.2. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Alors la suite* $(S_n)_n$ *des sommes partielles est croissante.*

Preuve: Il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geq 0.$$

□

On en déduit immédiatement le résultat suivant

Théorème 2.3. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée, c'est-à-dire*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \leq M.$$

2.2.1 Critère de comparaison

Le théorème précédent permet d'obtenir le premier résultat dit le théorème de comparaison.

Théorème 2.4 (Théorème de comparaison)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries à termes positifs. On suppose de plus que $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge. On a donc*

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

2. *Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge*

Exemple 2.6. *On vaudrait déterminer la nature de $\sum v_n$ où $v_n = \frac{1}{n}$. On utilise le théorème précédent en comparant v_n à la suite $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On a vu dans l'exemple (2.4) que la série $\sum u_n$ divergeait. On peut vérifier facilement que*

$$\forall n \geq 1 :\ 0 \leq u_n \leq v_n$$

En effet, soit $f(x) = x - \ln(1 + x)$ définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$, car

$$\forall x \geq 0 : f'(x) = \frac{x}{1 + x} \geq 0.$$

Alors

$$\forall x \geq 0 :\ f(x) \geq f(0) = 0.$$

Ainsi

$$\forall x \geq 0 :\ \ln(1 + x) \leq x.$$

En prenant $x = \frac{1}{n}$, *on en déduit bien que*

$$\forall\, n \geq 1 :\ 0 \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}.$$

D'après le théorème précédent on en déduira que la série $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*

2.2.2 Critère d'équivalence

Corollaire 2.2. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. Supposons que* $v_n \neq 0$ *et que*

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = l \neq 0.$$

Alors les deux séries sont de même nature. C'est-à-dire

1. *Si* $\sum v_n$ *converge, il en est de même pour la série* $\sum u_n$
2. *Si* $\sum v_n$ *diverge, il en est de même pour la série* $\sum u_n$.

Exemple 2.7. *On veut déterminer la nature de la série* $\sum u_n$ *où* $u_n = \frac{1}{n^2}$. *Pour cela on pose* $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$, *on a*

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_n \frac{n^2+n}{n^2} = 1 \neq 0.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente (voir l'exemple 2.2) et d'après le corollaire précédent, on déduit que la série* $\sum \frac{1}{n^2}$ *est convergente.*

Exemple 2.8. *On veut déterminer la nature de la série* $\sum u_n$ *où* $u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$. *Il est clair que*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} = 0.$$

Si on considère la série convergente $\sum_n v_n = \sum_n \frac{1}{n^2}$, *on a*

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Par conséquent, les deux série $\sum_{n>0} u_n$ *et* $\sum_{n>0} v_n$ *ont la même nature.*

2.2.3 Critère de d'Alembert et de Cauchy

On donne maintenant deux critères plus pratique pour étudier la nature des séries à termes positifs. Ces deux critères sont en fait des conséquences de la comparaison d'une série avec une série géométrique.

Théorème 2.5 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que la suite* (u_n) *est non nulle à partir d'un certain rang. On suppose de plus que*

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \ \text{ où } l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

1. *Si* $l < 1$, *alors la série* $\sum u_n$, *converge,*
2. *Si* $l > 1$, *alors la série* $\sum u_n$, *diverge,*
3. *Si* $l = 1$, *on ne peut pas conclure.*

Théorème 2.6 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. On suppose que*

$$\lim_n u_n^{\frac{1}{n}} = l \ \text{ où } l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

1. *Si* $l < 1$, *alors la série* $\sum u_n$, *converge,*
2. *Si* $l > 1$, *alors la série* $\sum u_n$, *diverge,*
3. *Si* $l = 1$, *on ne peut pas conclure.*

Exemple 2.9. *On veut déterminer la nature des deux séries suivantes*

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \quad \text{où } u_n = \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{2n}$$

On a

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

$$\lim_n v_n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{2n}{(n+1}\right)^2 = 4 > 1$$

Par conséquent, la série $\sum u_n$ *converge, tandis que la série* $\sum v_n$ *diverge.*

Remarque 2.6. *Dans le cas $l = 1$, dire qu'on ne peut pas conclure signifie qu'il y a des cas où la série converge et d'autres où la série diverge. Par exemple si on prend les deux séries*

$$\sum u_n, \quad \sum v_n \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n^2}$$

Il est clair que

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_n \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

Or on a vu que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n}$ divergeait et que la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ convergeait.

2.2.4 Critère de comparaison séries-intégrales

Pour étudier la nature d'une série à termes positifs, on peut la comparer par une intégrale. On a donc le résultat suivant.

Théorème 2.7. *Soit f une fonction de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$, continue et décroissante. On suppose de plus que*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, et la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$, ont la même nature.

Corollaire 2.3. *La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, tandis que elle diverge si et seulement si $\alpha \leq 1$.*

Preuve: On pose $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, cette fonction est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour connaitre la nature de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, il suffit de calculer l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

On a

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}-1) & \text{si} \quad \alpha \neq 1, \\ \ln x & \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

En passant à la limite dans la dernière intégrale, lorsque $x \to +\infty$, on aura

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}-1) & \text{si} \quad \alpha \neq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad \alpha = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si} \quad \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que

- Si $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, d'où la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ l'est.
- Si $\alpha \leq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, d'où la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ l'est.

$\square$

2.3 Exercices

Exercice 2.1. *Soit $(S_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par*

$$S_n = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}.$$

1. *Calculer S_1, S_2, S_3.*
2. *Vérifier que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

3. *Calculer S_n en fonction de n et déduire sa limite.*
4. *Déduire la nature de la série $\sum_{n>0} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.*

Exercice 2.2. *On considère les deux suites définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \; u_n = n \cdot \sin(\frac{1}{n}) \quad ; \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. *Calculer les limites*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} v_n.$$

2. *Que peut-on dire pour la nature des séries $\sum_{n>0} u_n$ et $\sum_{n>0} v_n$?*

Exercice 2.3. *On considère les séries définies par :*

$$\sum_{n \geq 2} u_n = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad ; \quad \sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

On pose :

$$S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

et

$$S'_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

1. *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_n S_n \quad ; \quad \lim_n S'_n.$$

2. *Montrer que les deux séries* $\sum_{n\geq 2} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *sont convergentes et donner leurs sommes.*
3. *Déduire la somme des séries*

$$\sum_{n\geq 2} (u_n + v_n) \quad ; \quad \sum_{n\geq 2} (u_n - v_n)\,.$$

Exercice 2.4. *On considère la suite définie par*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; u_n = \frac{2n!}{(2n)!}.$$

1. *Calculer* u_0, u_1, u_2 *et* u_3.
2. *Montrer que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; u_{n+1} = \frac{u_n}{4n+2}.$$

3. *Déterminer la nature de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 2.5. *Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :*

$$\begin{array}{llll} 1. & u_n = \dfrac{e^n}{n^5+1}, & 2. & u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}, \\[2ex] 3. & u_n = \dfrac{2^n}{3^n n^2}, & 4. & u_n = \dfrac{n\,!}{n^n}, \\[2ex] 5. & u_n = \dfrac{e^{-n}}{4+\sin n}, & 6. & u_n = ne^{-n}, \\[2ex] 7. & u_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}, & 8. & u_n = \dfrac{2}{5^n}. \end{array}$$

Exercice 2.6. *Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes. Si c'est possible, calculer leurs sommes.*

$$\begin{array}{llllll} 1. & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, & 2. & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^n}, & 3. & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}, \\[3ex] 4. & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}, & 5. & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+5}, & 6. & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n. \end{array}$$

Exercice 2.7. *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par*

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}.$$

1. *Calculer* $\lim_{n} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. *Montrer que la suite* $(n \cdot u_n)_n$ *est croissante.*
3. *Déduire que la série de terme général* u_n *est divergente.*

Exercice 2.8. *Utiliser la série exponentielle* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, *pour calculer la somme des séries suivantes :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}$, 2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$, 3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n-1}{n!}$, 4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n!}$, 5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n!}$.

Chapitre 3

Fonctions numériques d'une variable réelle

3.1 Généralités sur les fonctions numériques

3.1.1 Définitions et terminologie

Définition 3.1 (Application)**.** *On appelle application d'un ensemble E vers un ensemble F, toute correspondance f qui associe à tout élément $x \in E$ un et un seul élément $y \in F$, on écrira*

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

Définition 3.2 (Fonction numérique)**.** *On appelle fonction numérique sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, toute relation f, qui associe à tout $x \in E$, au plus un élément $y \in F \subset \mathbb{R}$; on écrira*

$$\begin{array}{rccl} f: & E \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & F \subset \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

L'ensemble E est dit l'ensemble de départ et F est dit l'ensemble d'arrivée.
Pour un $x \in E$, la valeur $y = f(x) \in F$ est l'image de x par f. Inversement x est l'antécédent de y.

Exemple 3.1. *:*

- *L'application d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ vers lui même qui à chaque élément x associe x, est appelée application identité notée id_E*

$$\begin{array}{rccl} id_E: & E \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & id_E(x) = x. \end{array}$$

- *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

$f(1) = 1,\ f(-\pi) = -\dfrac{1}{\pi}, \ldots$

Il est à noter que f est une fonction sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas une application sur $\mathbb{R}$, parce que le 0 ne possède pas d'image par f.

- *La fonction* ***valeur absolue****,*

$$\begin{array}{rccl} |\cdot| : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & |x| := \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \end{array}$$

- *La fonction* ***partie entière*** *de x notée $E(x) = [x]$, qui associe à chaque nombre réel x, l'entier $[x] \in \mathbb{Z}$, défini par*

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

Par exemple : $[1.5] = 1,\ [\pi] = 3,\ [-e] = -3, \ldots$

Définition 3.3 (Domaine de définition)**.** *Le domaine de définition d'une fonction numérique $f : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow F \subset \mathbb{R}$, c'est l'ensemble des points $x \in E$ où $f(x)$ est bien défini. On le note parfois $\mathcal{D}_f$, et on écrira*

$$\mathcal{D}_f = \left\{ \ x \in \mathbb{R} : \quad / \quad f(x) \textit{ existe} \ \right\}.$$

Exemple 3.2. *Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad h(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}, \quad k(x) = \ln(1 - x^2).$$

► *Pour la fonction f, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} \quad / \quad x^2 - 1 \neq 0 \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \quad / \quad x \neq -1 \textit{ où } x \neq 1 \} \\ &= \mathbb{R} - \{-1, 1\} \end{aligned}$$

► *Pour la fonction g, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_g &= \{ x \in \mathbb{R} \quad / \quad \sin x \neq 0 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \quad / \quad x \neq k\pi \textit{ où } k \in \mathbb{Z} \} \\ &= \mathbb{R} - \{ k\pi \textit{ ou } k \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

► *Poùr la fonction h, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_h &= \left\{ x \in \mathbb{R} \quad / \quad x^2 + x - 2 \geq 0 \right\} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} \quad / \quad (x-1)(x+2) \geq 0 \} \\ &=]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

► *Pour la fonction h on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k &= \left\{x \in \mathbb{R} \quad / \quad 1 - x^2 \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \quad / \quad (1-x)(1+x) > 0\} \\ &=]-1, 1[\,.\end{aligned}$$

Définition 3.4 (Courbe d'une fonction)**.** *On appelle courbe (graphe) d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in \mathcal{D}_f$ (voir la Fig 3.1). On la note*

$$C_f = \left\{(x, f(x)) \;/\; x \in \mathcal{D}_f\right\}.$$

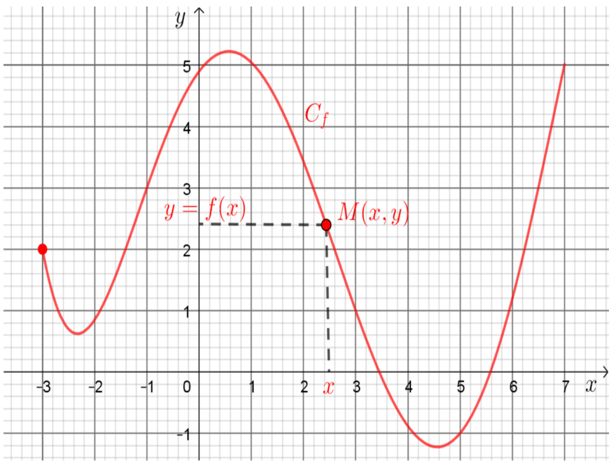


FIGURE 3.1 – Courbe d'une fonction

3.1.2 Image directe et image réciproque

Définition 3.5. *Soit $f: E \subset \mathbb{R} \longrightarrow F \subset \mathbb{R}$ une fonction. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.*

- *On définit l'image directe de A par f, l'ensemble noté $f(A)$ tel que*

$$f(A) = \{y = f(x) \in F \;/\; x \in A\} \subset F.$$

- *On définit l'image réciproque de B par f, l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ tel que*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \;/\; f(x) \in F\} \subset E.$$

Exemple 3.3. *On considère la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

- *Déterminer* $f([-1,\ 1])$ *et* $f^{-1}([0,\ 2])$.

Comme : $-1 \leq x \leq 1$, *alors*

$$0 \leq y = x^2 \leq 1;$$

d'où

$$f([-1,\ 1]) = \left\{y = x^2 \in \mathbb{R}_+ \ / \ -1 \leq x \leq 1\right\} = [0,\ 1].$$

Comme : $0 \leq y = x^2 \leq 2$, *alors,*

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2},$$

d'où

$$f^{-1}([0,\ 2]) = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq x^2 \leq 2\right\} = \left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right].$$

3.1.3 Fonctions injectives, surjectives et bijectives

Définition 3.6. *Soit* $f : \ E \subset \mathbb{R} \longrightarrow F \subset \mathbb{R}$ *une fonction.*

1. *On dit que* f *est injective si et seulement si tout élément* y *de l'ensemble d'arrivée* F *admet au plus un antécédent dans l'ensemble de départ* E*. Autrement dit,*

$$\forall x_1,\ x_2 \in E : \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

2. *On dit que* f *est surjective si et seulement si tout élément* y *de l'ensemble d'arrivée* F *admet au moins un antécédent dans l'ensemble de départ* E*. Autrement dit,*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E : \ y = f(x).$$

3. *On dit que* f *est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective. C'est-à-dire si tout élément* y *de l'ensemble d'arrivée* F *admet un seul antécédent dans l'ensemble de départ* E*. Autrement dit,*

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E : \ y = f(x).$$

Remarque 3.1. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & E \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & F \subset \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

une fonction bijective. Il est alors possible de passer de y *à* x *par ce qu'on appelle la fonction réciproque (inverse), que l'on note*

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & F & \longrightarrow & E \\ & y & \longmapsto & x = f^{-1}(y) \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(i)

$$(\forall x \in E : \ y = f(x)) \Leftrightarrow \left(\forall y \in F : \ x = f^{-1}(y)\right).$$

(ii)

$$f \circ f^{-1} = id_F \ \ et \ \ f^{-1} \circ f = id_E.$$

Exemple 3.4. *On considère les deux fonctions*

$$\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & y = f(x) = 2x - 3. \end{array} \qquad \begin{array}{llcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \longmapsto & y = g(x) = x^2. \end{array}$$

1. *f, g sont-elles injectives, surjectives, bijectives.*
2. *Dans le cas où f ou g est bijective, donner son inverse.*

Solution:

1. Soient $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \ &\Rightarrow \ 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow \ x_1 = x_2, \end{aligned}$$

   d'où f est injective.

   Soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y = f(x) = 2x - 3 \ &\Rightarrow \ y = 2x - 3 \\ &\Rightarrow \ x = \frac{y+3}{2} \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R} : \ y = f(x),$$

   d'où f est surjective.

   Par conséquent, f est une fonction bijective, sa fonction inverse notée f^{-1}, définie par

$$\begin{array}{llcl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}. \end{array}$$

   De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f \circ f^{-1}(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(\frac{x+3}{2}) = 2(\frac{x+3}{2}) - 3 = x = id_{\mathbb{R}}(x).$$

2. La fonction g n'est pas bijective, pour essentiellement deux raison différentes. La première est que g n'est pas injective parce que nous avons : $g(-1) = g(1) = 1$.

   La deuxième est que g n'est pas surjective parce qu'il n'y a aucun antécédent $x \in \mathbb{R}$ possède l'image $y = -1$.

□

3.1.4 Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition 3.7 (Parité d'une fonction)**.** *Une fonction numérique $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à* 0*, est dite*

1. *paire si*
$$\forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = f(x)$$
2. *impaire si*
$$\forall x \in \mathcal{D}_f : f(-x) = -f(x)$$

Exemple 3.5. *:*

1. *La fonction*
$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$
est paire sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f = [-1, 0[\cup]0, 1]$
2. *Tandis que, la fonction*
$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
est impaire sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Remarque 3.2.

- *La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.*

Définition 3.8 (Périodicité d'une fonction)**.** *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$.*

∗ *On dit que f est périodique s'il existe un réel $T > 0$, tel que*
$$\forall x \in \mathcal{D}_f : \; f(x+T) = f(x) \tag{3.1}$$

∗ *On appelle période (fondamentale) de f, le plus petit réel T strictement positif, s'il existe, satisfaisant la relation (3.1).*

Exemple 3.6.

∗ *Les fonctions* $\cos x$ *et* $\sin x$ *sont périodiques de période $T = 2\pi$.*

∗ *La fonction* $\tan x$ *est périodique de période π, en effet, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on a :*
$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

3.1.5 Fonctions majorées, minorées et bornées

Définition 3.9. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$*

1. *f est dite majorée sur un ensemble $E \subseteq \mathcal{D}_f$ si est seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E :\ f(x) \leq M.$$

Un tel M, est appelé majorant de f.

2. *On appelle borne supérieure de f sur E, le plus petit des majorants, on le note $\sup\limits_{x \in E} f(x)$.*

3. *f est dite minorée sur un ensemble $E \subseteq \mathcal{D}_f$ si est seulement si*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in E :\ f(x) \geq m.$$

Un tel m, est appelé minorant de f

4. *On appelle borne inférieure de f sur E, le plus grand des minorants, on le note $\inf\limits_{x \in E} f(x)$.*

5. *f est dite bornée sur un ensemble $E \subseteq \mathcal{D}_f$ si est seulement si elle est à la fois majorée et minorée, i.e.*

$$\exists m,\ M \in \mathbb{R},\ \forall x \in E :\ m \leq f(x) \leq M$$

ou de manière équivalente

$$\exists \Lambda > 0,\ \forall x \in E :\ |f(x)| \leq \Lambda.$$

Exemple 3.7. *La fonction* $\cos x$ *est bornée sur $\mathbb{R}$, car*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos x| \leq 1.$$

3.1.6 Fonctions monotones

Définition 3.10. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. On dit que f est*

1. *croissante sur un ensemble $E \subseteq \mathcal{D}_f$ si*

$$\forall x,\ y \in E :\ x \leq y \ \Rightarrow\ f(x) \leq f(y).$$

2. *strictement croissante sur un ensemble $E \subseteq \mathcal{D}_f$ si*

$$\forall x,\ y \in E :\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y).$$

3. *décroissante sur un ensemble* $E \subseteq \mathcal{D}_f$ *si*

$$\forall x,\, y \in E : \; x \leq y \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y).$$

4. *strictement décroissante sur un ensemble* $E \subseteq \mathcal{D}_f$ *si*

$$\forall x,\, y \in E : \; x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y).$$

5. *monotone sur un ensemble* $E \subseteq \mathcal{D}_f$ *si elle est croissante ou décroissante sur* E.

6. *strictement monotone sur un ensemble* $E \subseteq \mathcal{D}_f$ *si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur* E.

Exemple 3.8. *La fonction définie par :* $f(x) = x^2$ *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$. *En effet,*

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}_+ : \; x \leq y \;\Rightarrow\; x^2 \leq y^2 \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(y).$$

Tandis que f *est décroissante sur* $\mathbb{R}_-$. *En effet,*

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}_- : \; x \leq y \;\Rightarrow\; -x \geq -y \;\Rightarrow\; x^2 \geq y^2 \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(y).$$

3.2 Limite d'une fonction

La définition des limites pour les fonctions est assez proche de ce que l'on a vu pour les suites. La différence vient essentiellement du fait que pour les suites on ne pouvait considérer que la limite quand n tend vers $+\infty$. Pour une fonction f on peut considérer la limite de f en tout point de son domaine, ou du bord de son domaine.

3.2.1 Limite d'une fonction en un point

Définition 3.11. *Une partie* $V \subset \mathbb{R}$, *est un voisinage de* $x_0 \in \mathbb{R}$, *s'il contient un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant* x_0, *autrement dit*

$$\exists \delta > 0 : x_0 \in \,]x_0 - \delta,\, x_0 + \delta[\, \subset V.$$

Exemple 3.9. $[-1,\, 1]$ *est un voisinage de tous ces points sauf les deux points* -1 *et* 1.

Définition 3.12 (Limite d'une fonction en un point)**.** *Soit* f *une fonction définie sur un voisinage* $I \subset \mathbb{R}$, *d'un point* x_0 *sauf peut être en* x_0. *On dit que* f *a pour limite* $l \in \mathbb{R}$ *lorsque* x *tend vers* x_0 *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\; \exists \delta(\varepsilon) > 0,\; \forall x \in I : \; |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

On écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Exemple 3.10. *On peut vérifier facilement que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

En effet, pour tout x *telque* $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$*, on a :*

$$\sin x \leq x \leq \tan x$$

$\Rightarrow$

$$\sin x \cos x \leq x \cos x \leq \sin x \leq x,$$

$\Rightarrow$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \cos x \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Exemple 3.11. *On va utiliser la définition 3.12, pour montrer que*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -2,$$

où

$$f(x) = x^2 - 2x - 2$$

Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 :\ |x - 2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) + 2| < \varepsilon,$$

Soit $\varepsilon > 0$*, on a :*

$$|f(x) + 2| = |x^2 - 2x| = |x||x - 2|.$$

Comme $x \to 2$*, on peut prendre par exemple :* $0 < x < 4$*, par suite*

$$|f(x) + 2| \leq 4|x - 2| < \varepsilon,$$

$\Rightarrow$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Par conséquent, le bon choix sera alors de prendre $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$.

Remarque 3.3. *Dans la définition 3.12, n'oubliez pas que l'ordre des quantificateurs* $\forall$ *et* $\exists$ *est important, on ne peut pas échanger le* $\forall\varepsilon > 0$ *avec* $\exists\delta(\varepsilon) > 0$.

Théorème 3.1 (Unicité de la limite)**.** *Si* f *admet une limite au point* x_0*, cette limite est unique.*

3.2.2 Limite à droite, limite à gauche

Définition 3.13. *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, une fonction numérique,*

1. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0 *par valeurs supérieures (*$x \overset{>}{\rightarrow} x_0$*) si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in I :\ 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On notera

$$\lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} f(x) = l.$$

Cette limite est appelée : limite à droite de x_0.

2. *On dit que* $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* x_0 *par valeurs inférieures (*$x \overset{<}{\rightarrow} x_0$*) si*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in I :\ -\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On notera

$$\lim_{x \overset{<}{\rightarrow} x_0} f(x) = l.$$

Cette limite est appelée : limite à gauche de x_0.

Proposition 3.1. *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, une fonction. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$,

(ii) $\lim_{x \overset{>}{\rightarrow} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\rightarrow} x_0} f(x) = l$.

Il est clair que si la limite à droite est différente que la limite à gauche, alors que la limite n'existe pas.

Exemple 3.12. *Soit*

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \overset{>}{\rightarrow} 0} f(x) = 1$$

et

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -1$$

comme

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \neq \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x),$$

Par conséquent, f n'admet aucune limite au point 0.

Théorème 3.2. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$,

(2) Quelle que soit la suite (u_n), $u_n \in [a, b]$ avec $\lim\limits_{n} u_n = x_0$, on a : $\lim\limits_{n} f(u_n) = l$.

Exemple 3.13. *La fonction $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite au point* $x = 0$.
En effet, on considère les deux suites :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_n = \frac{1}{n\pi}, \quad v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Il est clair que

$$\lim_{n} u_n = \lim_{n} v_n = 0$$

Or

$$\lim_{n} f(u_n) = \lim_{n} \sin(n\pi) = 0 \neq \lim_{n} f(v_n) = \lim_{n} \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

Par conséquent, f n'admet pas de limite au point 0.

3.2.3 Limite infinie

Définition 3.14. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction.*

1. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

   On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

2. *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

$$\forall A > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in I : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A$$

   On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

3. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I :\ x > B \Rightarrow f(x) > A$$

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4. *On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I :\ x > B \Rightarrow f(x) < -A$$

On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

5. *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I :\ x < -B \Rightarrow f(x) > A$$

On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

6. *On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in I :\ x < -B \Rightarrow f(x) < -A$$

On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3.2.4 Opérations sur les limites

Théorème 3.3. *Soient f, g deux fonctions définies sur une même partie de $\mathbb{R}$ et l, $l' \in \mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = l',$$

alors

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = l + l'$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda l,\ (\lambda \in \mathbb{R})$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = ll'$,
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$, *si* $l' \neq 0$.

Remarque 3.4. *On peut étendre les résultats précédents aux cas où $l, l' \in \{+\infty, -\infty\}$.*
Il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors on ne peut à priori rien dire sur la limite de $f + g$, on raccourcit cela en $+\infty - \infty$ qui est une forme indéterminée.
On se donne une liste de formes indéterminées :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Exemple 3.14. *Calculer les limites suivantes si elles existent.*

$$1.\ \lim_{x\to 0} \sin x \sin \frac{1}{x}, \quad 2.\ \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right), \quad 3.\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}.$$

1. On remarque pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$-1 < \sin \frac{1}{x} < 1,$$

par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Quand $x \to -\infty$, on a : $|x| = -x$, alors

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} (x-2) = -\infty.$$

3.3 Fonctions continues

3.3.1 Fonctions continues en un point

Définition 3.15. *Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon),\ \forall x \in I :\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Exemple 3.15. *La fonction définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

est continue en $x = 0$.
Comme la fonction cos *est bornée, ce qui donne*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

On a défini la notion de limite à droite et limite à gauche en un point x_0. De façon analogue on prolonge cette notion à la continuité.

Définition 3.16. *Soit une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue à droite en $x_0 \in I$, respectivement continue à gauche en $x_0 \in I$ si*

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0),$$

respectivement si

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 3.16. *La fonction définie par*

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

est continue à gauche de $x = 0$, mais elle ne l'est pas à droite de $x = 0$, car

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} H(x) = 0 = H(0) \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 0} H(x) = 1.$$

3.3.2 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 3.17. *Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur I, si elle est continue en tout point de I. On note $C(I)$, l'ensemble des fonctions continues sur I.*

Exemple 3.17. *Soit la fonction partie entière de x notée*

$$E(x) = [x]$$

1. *Étudier la continuité de cette fonction sur l'intervalle* $[-1, 2[$.
2. *Que peut-on dire sur la continuité sur tout $\mathbb{R}$?*

Solution:

1. La fonction partie entière

$$\begin{array}{rccc} [\cdot]: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

est définie sur tout $\mathbb{R}$, qui s'écrit sur l'intervalle $[-1,\ 2[$ sous la forme (voir la Fig 3.2).

$$[x] = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

On remarque que cette fonction est continue à droite en $x = -1$, tandis que elle est discontinue en $x = 0$ et en $x = 1$, en effet, on a

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} [x] = 0 = [0] \neq \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} [x] = -1.$$

et

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} [x] = 1 = [1] \neq \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} [x] = 0.$$

Par conséquent, cette fonction est continue sur $[-1,\ 0[\cup]0,\ 1[\cup]1,\ 2[$.

2. On remarque que pour tout point $x_0 \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} [x] = x_0 \neq \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} [x] = x_0 - 1,$$

ce qui montre la discontinuité de cette fonction en tout point $x_0 \in \mathbb{Z}$.
En conclusion, la fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

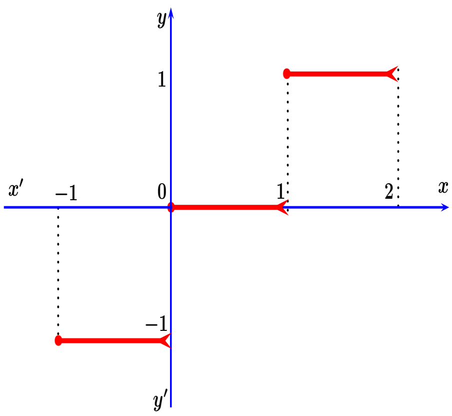


FIGURE 3.2 – Courbe de la fonction $x \longmapsto E(x) = [x]$ sur l'intervalle $[-1,\ 2[$.

□

3.3.3 Opérations sur les fonctions continues

Les propositions suivantes sont des conséquences immédiates des propositions analogues sur les limites.

Proposition 3.2. *Soient f, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors*

- *$f + g$ est continue en x_0,*
- *$|f|$ est continue en x_0,*
- *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0,*
- *$f \times g$ est continue en x_0,*
- *Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.*

Proposition 3.3. *Soient $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et g est continue en $y_0 = f(x_0)$. Alors la fonction composée $f \circ g$ est continue en x_0.*

3.3.4 Suites et continuité

Proposition 3.4. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction et $x_0 \in I$. Les propriétés suivantes sont équivalentes,*

1. *f est continue en x_0*
2. *Pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers x_0, la suite $(f(u_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*

3.3.5 Prolongement par continuité

Définition 3.18. *Soit $f : I - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction définie sur un intervalle I sauf peut être en x_0.*

- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie l en x_0 i.e. ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$)*
- *On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I - \{x_0\}, \\ l & \text{si} \quad x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est définie et continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple 3.18. *Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par*

$$f(x) = x\sin(\frac{1}{x}).$$

. *f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?*

Solution: Comme

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : \; 0 \leq |f(x)| \leq |x|,$$

on en déduit que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Par conséquent, f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur tout $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

□

3.3.6 Propriétés des fonctions continues

Nous introduisons dans cette sous-section les résultats fondamentaux sur les fonctions continues.

Définition 3.19. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors l'intervalle fermé et borné $[a, b]$ est aussi appelé intervalle compact.*

Proposition 3.5. *L'image directe d'un intervalle compact $[a, b]$ par une fonction continue f est aussi un intervalle compact. Autrement dit, f atteint ses bornes sur $[a, b]$. C'est-à-dire,*

$$f([a, b]) = [\alpha, \beta]$$

où

$$\alpha = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Théorème 3.4 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soient a, b deux réels de I. Alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$. En d'autre terme*

$$\forall y \;\text{ entre } f(a) \text{ et } f(b),\; \exists c \in [a, b] : \; f(c) = y.$$

Une version plus simple du théorème des valeurs intermédiaires qui permet de résoudre certaines équations algébriques et numériques est donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.6. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Si*

$$f(a) \times f(b) < 0,$$

- *Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ let que $f(x_0) = 0$.*
- *De plus si f est strictement monotone sur $[a, b]$, le point x_0 est unique.*

Exemple 3.19. *Montrer qu'il existe au moins un nombre $x \in [0\ 1]$ vérifie la relation*

$$2^x + 3^x = 7^x$$

Solution: On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 2^x + 3^x - 7^x,$$

Cette fonction est continue sur $x \in [0\ 1]$ et elle vérifie

$$f(0) \times f(1) = 1 \times (-2) = -2 < 0.$$

D'après la proposition 3.6, il existe au moins un point $x_0 \in]0\ 1[$ tel que $f(x_0) = 0$ i.e.

$$2^{x_0} + 3^{x_0} - 7^{x_0} = 0,$$

D'où

$$2^{x_0} + 3^{x_0} = 7^{x_0}.$$

□

3.4 Fonctions dérivables

3.4.1 Dérivabilité d'une fonction en un point

Définition 3.20. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I étant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est dérivable au point $x_0 \in I$ si la limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe. On note cette limite $f'(x_0)$, qui s'appelle la dérivée de f au point x_0 et on écrira

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

2. *On dit que f est dérivable à droite au point $x_0 \in I$, si la limite*

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

existe. On note alors cette limite $f'_d(x_0)$ et on l'appelle la dérivée à droite de f au point x_0.

3. *On dit que f est dérivable à gauche au point $x_0 \in I$, si la limite*

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

existe. On note alors cette limite $f'_g(x_0)$ et on l'appelle la dérivée à gauche de f au point x_0.

4. *On dit que f est dérivable au point $x_0 \in I$ si et seulement si*

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

5. ***Interprétation géométrique :*** *Si f est dérivable au point $x_0 \in I$, la dérivée $f'(x_0)$ de f en x_0 représente exactement la pente de la tangente T de la courbe représentative de f au point $M_0\,(x_0,\ f(x_0))$, (voir la Fig 3.3). L'équation de la tangente T en ce point est alors donnée par*

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

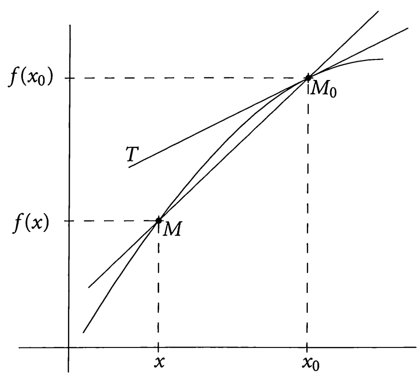


FIGURE 3.3 – Tangente d'une courbe en un point

6. *On dira que f est dérivable sur l'intervalle I si elle est dérivable en tout point de I.*

7. *Si f est dérivable sur I, la fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque point $x \in I$, la dérivée de la fonction f au point x :*

$$\begin{array}{rccl} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Exemple 3.20.

1. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

On va étudier la dérivabilité de f au point $x = 0$, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x},$$

Il est clair que cette dernière limite n'existe pas (voir l'exemple 3.13), ce qui entraine que la fonction f n'est pas dérivable au point $x = 0$.

2. *La fonction*

$$g(x) = x^2 - x + 2,$$

est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$, en effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x + 2 - (x_0^2 - x_0 + 2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0 - 1)}{\cancel{(x - x_0)}} \\ &= 2x_0 - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $g'(x_0) = 2x_0 - 1$, on peut définir la fonction dérivée de g pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$g'(x) = 2x - 1.$$

3. *La fonction*

$$h(x) = |x|,$$

est dérivable à droite et à gauche au point $x = 0$. En effet,

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|x|}{x} = h'_d(0)$$

et

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{|x|}{x} = -1 = h'_g(0)$$

Comme $h'_d(0) \neq h'_g(0)$, ainsi h n'est pas dérivable en $x = 0$.

4. *La fonction*

$$k(x) = \sqrt{x}$$

n'est pas dérivable à droite de $x = 0$. En effet,

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{k(x) - k(0)}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

3.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 3.7. *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions dérivables sur I, alors pour tout $x \in I$:*

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, *pour tout réel λ,*
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, *(bien sûr sous la condition $g(x) \neq 0$).*

3.4.3 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 3.8. *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en tout $x \in I$ et g est dérivable en $f(x)$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et on a :*

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'\left[f(x)\right].$$

Exemple 3.21. *Calculer la dérivée de $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$.*
On pose :

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = x^2 + 2x + 2,$$

ainsi

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 + 2x + 2) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

Comme

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(x) = 2x + 2.$$

Par conséquent, la dérivée de $\sqrt{x^2+2x+2}$*, est*

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x) &= f'(x)\cdot g'\left[f(x)\right]\\ &= (2x+2)g'\left(x^2+2x+2\right)\\ &= \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}\\ &= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.\end{aligned}$$

3.4.4 Dérivée de la fonction inverse (réciproque)

Proposition 3.9. *Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f\;:I\longrightarrow J$. On suppose qu'il existe la fonction inverse $f^{-1}\;:J\longrightarrow I$, qui vérifie la propriété :*

$$f\circ f^{-1}(y)=y\,,\forall y\in J\;\;et\;f^{-1}\circ f(x)=x\,,\forall x\in I$$

Si f est dérivable en $a\in I$ avec $f'(a)\neq 0$, alors la fonction inverse est dérivable en $b=f(a)$, et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

3.4.5 Dérivées successives d'une fonction

Soit $f:\;I\longrightarrow\mathbb{R}$, une fonction dérivable. Si sa dérivée $f':\;I\longleftrightarrow\mathbb{R}$ est aussi dérivable. On note $f''=(f')'$, la dérivée seconde de f. Plus généralement on note

$$f^{(0)}=f,\;f^{(1)}=f',\;f^{(2)}=f'',\ldots,\;f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$$

les dérivées successives de f.

Définition 3.21 (Fonction de classe C^n)**.** *Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on définit l'espace $C^n(I)$, comme l'ensemble des fonctions $f\;:I\longrightarrow\mathbb{R}$ qui sont dérivables n fois et sa dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue.*

Exemple 3.22. *Calculons la dérivée n-ième de la fonction $f(x)=e^{2x}$. Nous avons pour tout $x\in\mathbb{R}$*

$$f'(x)=2e^{2x},\;f''(x)=4e^{2x},\;f^{(3)}(x)=8e^{2x}.$$

On peut montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$f^{(n)}(x)=2^ne^{2x}.$$

3.4.6 Propriétés des fonctions dérivables

Relation entre la continuité et la dérivabilité d'une fonction

Proposition 3.10. *Soit $f\ : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable en $x_0 \in I$, alors f est continue en x_0.*
De plus si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est continue sur I.

La réciproque de cette proposition est fausse, une fonction peut être continue sans être dérivable. Par exemple la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

est continue en $x = 0$, mais elle n'est pas dérivable en ce point.

Théorème de Rolle

Théorème 3.5. *Soit $f\ : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[a,\ b]$, dérivable sur $]a,\ b[$ telle que*

$$f(a) = f(b).$$

Alors il existe un point $c \in]a,\ b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis

Théorème 3.6. *Soit $f\ : [a,\ b] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[a,\ b]$, dérivable sur $]a,\ b[$. Alors il existe un point $c \in]a,\ b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Inégalité des accroissements finis

Corollaire 3.1. *Soit $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. S'il existe une constante M tel que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$. Alors*

$$\forall x,\ y \in I\ : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exemple 3.23. *Soit $f(x) = \sin x$. On a*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = \cos x.$$

Il est clair que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad |f'(x)| \leq 1.$$

L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R} : \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$, on obtient alors

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Règle de l'Hospital

Théorème 3.7. *Soient $f, g \ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues sur un intervalle I contenant x_0 et dérivables sur $I - \{x_0\}$. On suppose que*

- $g'(x) \neq 0$, *pour tout* $x \in I - \{x_0\}$,
- $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *ou* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Remarque 3.5.

∗ *En pratique, la règle de l'Hospital est une technique qui permet d'évaluer les limites ayant comme forme indéterminées* $\dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

∗ *On peut aussi réitérer la règle de l'Hospital plusieurs fois successivement jusqu'à l'obtention à une limite différente de* $\dfrac{0}{0}$ *ou de* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

∗ *La réciproque de la règle de l'Hospital est fausse comme le montre l'exemple suivant :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad \textit{et} \qquad g(x) = x.$$

On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow 1} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

alors que

$$\frac{f'(x)}{g'x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

n'admet pas de limite quand $x \longrightarrow 0$.

Exemple 3.24. *Calculer les limites*

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln\left(x^2 - x + 1\right)}{\ln(x)}, \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Pour la première limite, nous supposons que

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1), \quad g(x) = \ln(x)$$

Les deux fonctions sont dérivables sur $]0, +\infty[$ *et on a :*

$$f(1) = g(1) = 0, \quad f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Comme

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\frac{2x-1}{x^2-x+1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + 1} = 2$$

D'après la règle de l'Hospital, on déduit que

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln\left(x^2 - x + 1\right)}{\ln(x)} = 2.$$

Pour la deuxième limite, On remarque que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} =: \quad \textbf{\textit{Forme indéterminée}} \quad \frac{0}{0}$$

On applique encore une fois la règle sur la dernière limite, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} =: \quad \textbf{\textit{Forme indéterminée}} \quad \frac{0}{0}.$$

On applique encore une fois la règle sur la dernière limite, on obtient que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

Par conséquent, la limite demandée s'obtient après la réitération de la règle de l'Hospital trois fois.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

Fonction croissante, décroissante et dérivée

Corollaire 3.2. *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert* $I \subset \mathbb{R}$*. Alors*

1. f *est strictement croissante sur I, si et seulement si* $\forall x \in I : f'(x) > 0$.
2. f *est strictement décroissante sur I, si et seulement si* $\forall x \in I : f'(x) < 0$.
3. f *est constante sur I, si et seulement si* $\forall x \in I : f'(x) = 0$.

3.5 Exercices

Exercice 3.1. *Déterminer le domaine de définitions des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2|x| + 1}$, 2. $f_2(x) = \dfrac{1}{|x-1| - |x+1|}$, 3. $f_3(x) = \dfrac{x}{e^{2x} + e^x - 2}$,

4. $f_4(x) = \dfrac{1}{sinx \cdot \cos x}$, 5. $f_5(x) = \dfrac{x}{\sqrt{\ln x - 1}}$, 6. $f_6(x) = x^x$.

Exercice 3.2. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$, 2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$, 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$,

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, 6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Exercice 3.3. *Par application de la règle de l'Hospital, calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x - 1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x) - 2xx^2}{x^3}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\ln x}.$$

Exercice 3.4. *Montrer que les deux limites ci-dessous n'existent pas*

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

puis calculer les deux limites ci-dessous

$$\lim_{x\to 0} \sin x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to 0} x^3 \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 3.5. *On se donne la fonction*

$$f(x) = (x - [x])^2,$$

où $[x]$ *est la partie entière de* x *définie par*

$$[x] = k \in \mathbb{Z} \quad \text{si} \quad k \leq x < k+1.$$

1. *Montrer que* f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que* f *est périodique de période* $T = 1$.
3. f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.6. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ une fonction telle que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ f(x) = f(x-1)\, f(x+1),$$

1. *Montrer que les fonctions $f_1(x) = \mathrm{e}^{\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$ et $f_2(x) = \mathrm{e}^{\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)}$ sont vérifiées la relation précédente.*
2. *Montrer que f est périodique de période $T = 6$.*

Exercice 3.7. *Soit*

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right),$$

1. *Déterminer $\mathcal{D}_f$.*
2. *Montrer que f est une fonction impaire.*
3. *Calculer la dérivée de f.*
4. *Calculer la limite* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 3.8. *: On considère les fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = (x - E(x))^2$, 2. $f_2(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$,

3. $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, 4. $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

1. *Étudier la continuité de f_1 sur $[-1, 1]$.*
2. *Montrer que f_2, f_3 et f_4 sont continues au point $x = 0$.*
3. *f_2 et f_4 sont-elles dérivables au point $x = 0$.*

Exercice 3.9. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ a - \dfrac{b}{x} & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} \quad \textit{où } a, b \in \mathbb{R}$$

- *Déterminer a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3.10. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

- *Étudier selon les valeurs de n, la continuité et la dérivabilité de f_n sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 3.11. *On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2(\pi x) & \text{si} \quad x \leq 1, \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

- *Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x = 1$.*

Exercice 3.12. *On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. *Monter que f est paire.*
2. *Montrer que f est continue et dérivable au point $x = 0$.*
3. *Calculer f' la dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 3.13. *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0, \\ 1 + x^2 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

1. *Étudier la continuité de f sur son domaine de définition.*
2. *Peut-on prolonger f par continuité $\mathbb{R}$?*

Exercice 3.14. *On se donne les fonctions*

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 1} \quad ; \quad g(x) = \frac{(x+1)^n - 1}{x}, \; n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que f et g sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.*
2. *Calculer les limites*
$$\lim_{x \to -1} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \to 0} g(x).$$
3. *Étudier l'existence d'un prolongement par continuité de f et g à tout $\mathbb{R}$.*

Exercice 3.15. *Déterminer sur quel ensemble les fonctions suivantes sont dérivables puis calculer leur dérivées.*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3-1}}, \qquad g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad h(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 3.16. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$f(x) = \ln x.$$

1. *Utiliser le théorème des accroissements finis pour montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ \frac{1}{1+n} < \ln(1+n) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

2. *Déduire la limite de la suite*

$$u_n = n \cdot [\ln(1+n) - \ln n].$$

3. *Que peut-on dire pour la nature de la série $\sum_{n>0} u_n$?*

Exercice 3.17. *Pour tout entier $n \geq 1$ on définit la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0,\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_n(x) = x^n + 2x^2 + x - 1 \end{array}$$

1. *Montrer que f est strictement croissante.*
2. *Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$, tel que $f(x_n) = 0$.*
3. *Vérifier que*

$$\forall x \in [0,\ 1] : \ f_n(x) \geq f_{n+1}(x).$$

   En déduire que la suite (x_n) converge.

4. *Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.*

Exercice 3.18. *Soit f la fonction définie par :*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}. \end{array}$$

1. *Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.*
2. *Quelles sont les propriétés de la fonction réciproque $f^{-1} : I \longrightarrow [0, +\infty[$?*
3. *Déterminer explicitement f^{-1}.*

Chapitre 4

Fonctions usuelles

Dans ce chapitre, nous présentons les fonctions les plus connues telles que les fonctions trigonométriques, les fonctions hyperboliques et leurs réciproques et nous donnons les propriétés essentielles de ces fonctions.

4.1 Théorème de la fonction inverse

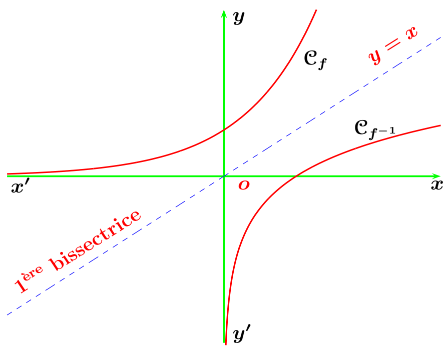
On rappelle tout d'abord, le théorème de la fonction inverse, que nous utiliserons essentiellement dans ce chapitre.

Théorème 4.1. *Toute fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow J = f(I)$, (où I un intervalle de $\mathbb{R}$), continue et strictement monotone sur I admet une fonction réciproque (inverse) notée f^{-1} définie, continue et strictement monotone sur $J = f(I)$. De plus*

- *Si f est dérivable au point $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a :*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

- *Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives C_f et $C_{f^{-1}}$, sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.*



4.2 Fonction logarithme népérien

4.2.1 Définition et propriétés

Définition 4.1. *La fonction* $f: x \longmapsto \ln x$*, est appelée* *logarithme népérien* *de* x*, elle est définie pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *i.e.* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ *telle que*

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ et } \ln 1 = 0.$$

Cette fonction possède de nombreuses propriétés qui n'est pas inutile de rappeler ci-dessous

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$
2. *La fonction* $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue, dérivable et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.
3. $\forall x, y \in]0, +\infty[\,, \forall r \in \mathbb{Q}$:

$$\centerdot\ \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \centerdot\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y, \quad \centerdot\ \ln x^r = r \ln x$$

4. *La représentation graphique de la fonction* $x \longrightarrow \ln(x)$*, est donnée dans la Fig 4.1.*

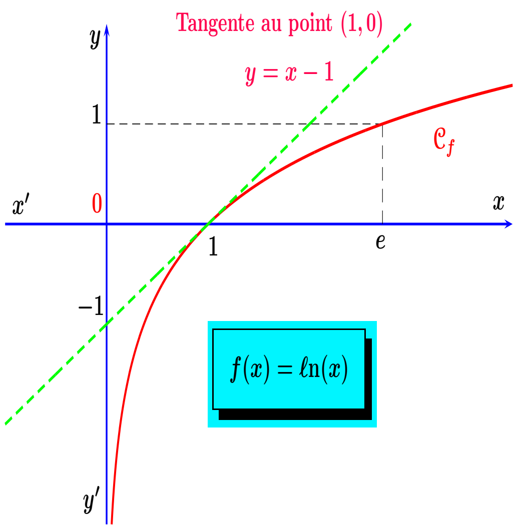


FIGURE 4.1 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \ln x$

5. *Selon la Fig 4.1, on remarque que*

$$\forall\, x > 0 : \ \ln x \leq x - 1.$$

Remarque 4.1. *Si*

$$f(x) = \ln(g(x))$$

alors

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in \mathcal{D}_g \text{ et } g(x) > 0\right\} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{f'} : f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

Exemple 4.1. *On considère*

$$f(x) = \ln(x^2 - 1)$$

Alors

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 > 0\right\} =]-\infty,\, -1[\, \cup\,]1,\, +\infty[$$

$$\forall x \in]-\infty,\, -1[\, \cup\,]1,\, +\infty[\, :\; f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

4.3 Fonction exponentielle

4.3.1 Définition et propriétés

Définition 4.2. *On sait que la fonction logarithme est continue et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$*, d'après le théorème 4.1 de la fonction inverse, la fonction*

$$\ln : \;]0, +\infty[\longrightarrow \ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$$

réalise donc une bijection, sa fonction réciproque notée exp, on lit « exponentielle ». On écrit

$$\begin{array}{rrl} \exp : & \mathbb{R} \rightarrow &]0, +\infty[\\ & x \longmapsto & \exp x = e^x \end{array}$$

Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$*, de plus elle a les propriétés suivantes*

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty.$
2. *La fonction* $\exp : \;]-\infty, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ *est continue, dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
$$\forall x \in \mathbb{R} : \; (e^x)' = e^x$$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$:
$$e^{x+y} = e^x.e^y, \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}.$$
4.
$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \; y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y, \quad y \in \;]0, +\infty[\,.}$$

5.

$$\begin{array}{lcl} \forall\, x \in \mathbb{R} & : & \ln(\mathrm{e}^{x}) = x, \\ \forall\, y \in]0, +\infty[& : & \mathrm{e}^{\ln y} = y. \end{array}$$

6. La courbe représentative de la fonction $x \longrightarrow \exp x$ est donnée dans la Fig 4.2.

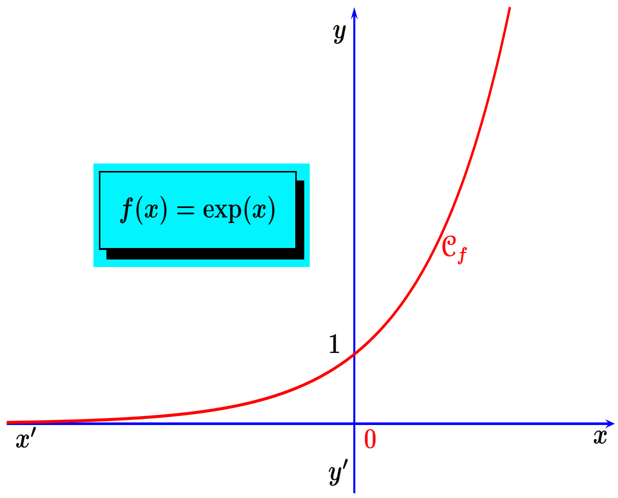


FIGURE 4.2 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \exp x$.

Remarque 4.2. *Si*

$$f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$$

alors

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{g'} : f'(x) = g'(x).\mathrm{e}^{g(x)}}$$

Exemple 4.2. *Soit $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x^2-1}}$*
Alors

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

et

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' \cdot \mathrm{e}^{\frac{x}{x^2-1}} = -\frac{x^2+1}{x^2-1}\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2-1}}.$$

4.4 Fonctions trigonométriques et leurs fonctions réciproques

4.4.1 Fonctions cosinus et sinus

Définition 4.3. *Les fonctions $f : x \longmapsto \cos x$, $g : x \longmapsto \sin x$ sont appelées respectivement cosinus de x, sinus de x. Elles sont définies pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Ces fonctions possèdent de nombreuses propriétés qui n'est pas inutile de rappeler ci-dessous

1. *Les fonctions* cos, sin *sont définies, continue sur tout* $\mathbb{R}$*, de plus elles sont* 2π*-périodiques, bornées sur* $\mathbb{R}$ *i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ |\cos x| \leq 1, \quad |\sin x| \leq 1.$$

2. *Elles sont dérivables sur tout* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \cos'(x) = -\sin x, \quad \sin'(x) = \cos x.$$

3. *Nous avons les relations suivantes*

$$\begin{array}{lll}
\textbf{a.} & \forall x \in \mathbb{R} : & \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \\
\textbf{b.} & \forall x,\ y \in \mathbb{R} : & \cos(x \mp y) = \cos x \cdot \cos y \pm \sin x \cdot \sin y. \\
\textbf{c.} & \forall x,\ y \in \mathbb{R} : & \sin(x \mp y) = \sin x \cdot \cos y \mp \cos x \cdot \sin y. \\
\textbf{d.} & \forall x \in \mathbb{R} : & \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x. \\
\textbf{e.} & \forall x \in \mathbb{R} : & \sin(2x) = 2\cos x \cdot \sin x.
\end{array}$$

4. *La fonction* $x \longrightarrow \cos x$*, est paire sur* $\mathbb{R}$*, par contre la fonction* $x \longrightarrow \sin x$*, est impaire sur* $\mathbb{R}$*. En effet,*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

5. *Compte tenu de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour la fonction cosinus et de la symétrie par rapport à l'origine pour la fonction sinus et le fait qu'elles sont* 2π*-périodiques, on en déduit que les courbes représentatives de cosinus et sinus se prolongent indéfiniment sur* $\mathbb{R}$*. Voir la Fig* 4.3.

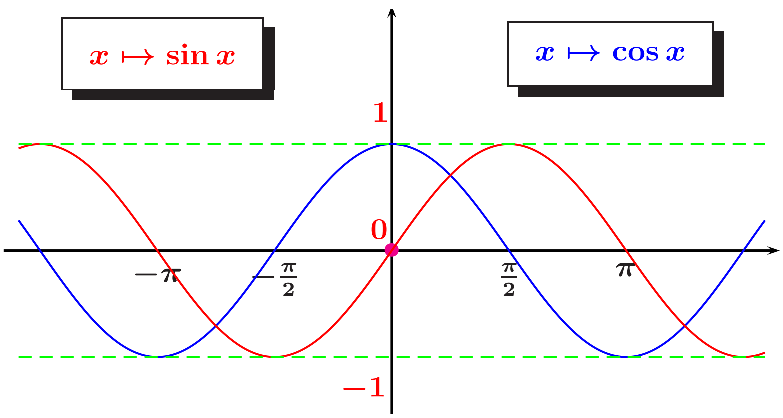


FIGURE 4.3 – Courbes des fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$.

4.4.2 Fonction arc cosinus

Définition 4.4. *On sait que la fonction cosinus est continue, dérivable et strictement décroissante sur* $[0, \pi]$*, d'après le théorème* 4.1 *de la fonction inverse, la fonction*

$$\cos : \ [0, \pi] \longrightarrow \cos([0, \pi]) = [\cos \pi, \cos 0] = [-1, 1]$$

réalise donc une bijection, sa fonction réciproque notée arccos*, on lit « arc cosinus ». On écrit*

$$\begin{array}{rccc} \arccos : & [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$$

Cette nouvelle fonction est donc définie et continue sur l'intervalle $[-1,\ 1]$*, de plus elle n'est ni paire, ni impaire et qui a les propriétés suivantes*

1.
$$\boxed{\forall\, x \in [-1,\ 1] :\ y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y, \quad y \in [0,\ \pi]\,.}$$

2. arccos *est continue sur* $[-1,\ 1]$*, strictement décroissante sur* $]-1,\ 1[$ *et on a*
$$\forall\, x \in\ ]-1,\ 1[\ :\ (\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
Puisque si : $y = \arccos x \ \Rightarrow\ x = \cos y$*, avec* $y \in [0,\ \pi]$*, donc on peut écrire*
$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

3.
$$\forall\, x \in [-1,\ 1] :\ \cos(\arccos x) = x.$$
$$\forall\, y \in [0,\ \pi] :\ \arccos(\cos y) = y.$$
Cette dernière relation inexacte si $x \notin [0,\ \pi]$*. En effet, si on prend par exemple* $y = \dfrac{5\pi}{4}$*, on aura*
$$\arccos[\cos(\frac{5\pi}{4})] = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}.$$

4. *La représentation graphique de la fonction* $x \longrightarrow \arccos x$*, est donnée dans la Fig 4.4.*

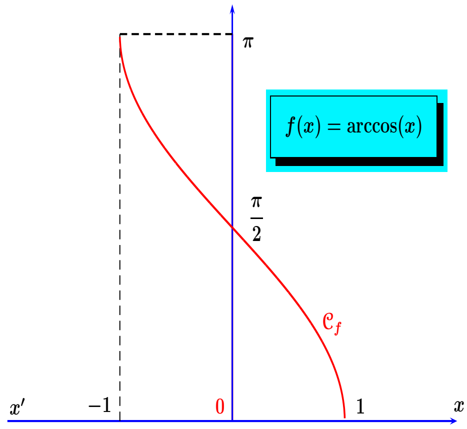


FIGURE 4.4 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \arccos x$.

Remarque 4.3. *Si*

$$f(x) = \arccos\left(g(x)\right)$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \in \mathcal{D}_g \textit{ et } -1 \leq g(x) \leq 1\right\} \textit{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{f'} : f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1 - g^2(x)}}}$$

Exemple 4.3. *Soit* $f(x) = \arccos(x^2)$
Alors

$$\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq x^2 \leq 1\right\} = [-1,\ 1]$$

et

$$\forall x \in \left]-1,\ 1\right[:\ f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

4.4.3 Fonction arc sinus

Définition 4.5. *On sait que la fonction* sin *est continue, dérivable et strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *d'après le théorème 4.1 de la fonction inverse, la fonction*

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin -\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}\right] = [-1,\ 1]$$

réalise donc une bijection, sa fonction réciproque notée arcsin, *on lit « arc sinus ». On écrit*

$$\begin{array}{rccl} \arcsin : & [-1, 1] & \rightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$$

Cette nouvelle fonction est donc définie et continue sur l'intervalle $[-1,\ 1]$*, de plus elle est impaire et qui a les propriétés suivantes*

1.
$$\boxed{\forall\, x \in [-1,\ 1] :\ y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].}$$

2. $\arcsin$ *est continue sur* $[-1,\ 1]$*, strictement croissante sur* $]-1,\ 1[$ *et on a*
$$\forall\, x \in\ ]-1,\ 1[\ :\ (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
Puisque si : $y = \arcsin x \ \Rightarrow\ x = \sin y$*, avec* $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*, on peut écrire donc*
$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

3.
$$\forall\, x \in [-1,\ 1] :\ \sin(\arcsin x) = x.$$
$$\forall\, y \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] :\ \arcsin(\sin y) = y.$$
Cette dernière relation inexacte si $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*. En effet, si on prend par exemple* $y = \pi$*, on aura*
$$\arcsin[\sin(\pi)] = \arcsin(0) = 0.$$

4. *On peut vérifier facilement que :*
$$\forall x \in [-1,\ 1] :\ \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$
En effet, Soit $x \in [-1,\ 1]$*, alors*
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$
$\Rightarrow$
$$0 \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leq \pi$$
Or on a :
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\underbrace{arcsinx}_{\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}) = x$$
De cette dernière égalité et comme $\frac{\pi}{2} - \arcsin x \in [0,\ \pi]$*, on aura que*
$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$$

d'où

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

5. *La représentation graphique de la fonction* $x \longrightarrow \arcsin x$ *est donnée dans la Fig 4.5.*

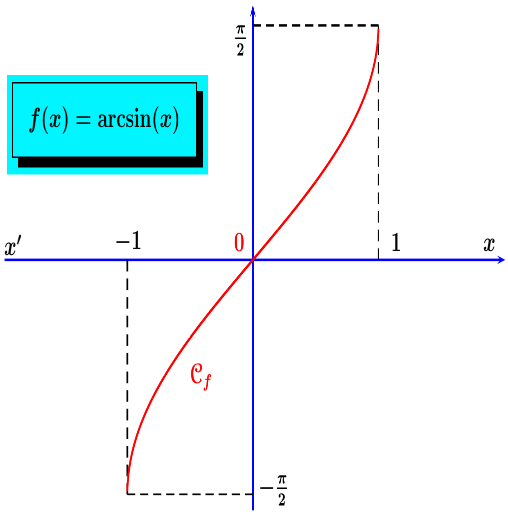


FIGURE 4.5 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \arcsin x$.

Remarque 4.4. *Si*

$$f(x) = \arcsin(g(x))$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x \in \mathcal{D}_g \text{ et } -1 \leq g(x) \leq 1\right\} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{f'} : f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}}$$

Exemple 4.4. *Soit* $f(x) = \arcsin(2x-1)$
Alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -1 \leq 2x-1 \leq 1\} = [0,\ 1]$$

et

$$\forall x \in]0,\ 1[\ :\ f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

4.4.4 Fonction tangente

Définition 4.6. *La fonction* $f : x \longmapsto \tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *est appelée tangente de* x *est définie pour tout* $x \in \mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$*; car*

$$\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \cos x \neq 0.$$

On a les propriétés suivantes :

1. *La fonction* tan *est π-périodique et impaire.*
2. *On voit facilement que*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$$

3. *Elle est dérivable et strictement croissante sur $\mathcal{D}_{\tan}$. En effet,*

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_{\tan} : (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

4. *Compte tenu de la symétrie par rapport à l'origine pour la fonction tangente et le fait qu'elle est π-périodique, on en déduit que sa courbe représentative se prolonge indéfiniment sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Voir la Fig 4.6.*

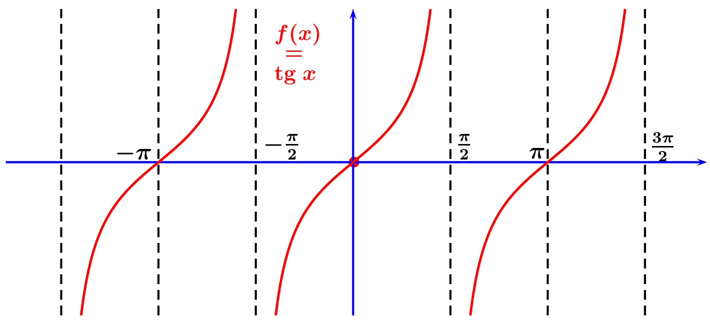


FIGURE 4.6 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \tan x$ sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4.4.5 Fonction arc tangente

Définition 4.7. *On sait que la fonction* tan *est continue, dérivable et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, d'après le théorème 4.1 de la fonction inverse, la fonction*

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\pi}{2}} \tan x, \lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan x\right[=]-\infty, +\infty[$$

réalise donc une bijection, sa fonction réciproque notée arctan*, on lit « arc tangente ». On écrit*

$$\begin{array}{rccc} \arctan : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$$

Cette nouvelle fonction est donc définie sur tout $\mathbb{R}$, qui a les propriétés suivantes

1.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} :\ y = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y, \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ .}$$

2. Elle est impaire, en effet

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \arctan x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y, \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ -x = \tan(-y)$$

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \arctan(-x) = -y = -\arctan x$$

3. arctan *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ (\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \tan(\arctan x) = x.$$

$$\forall\, y \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ :\ \arctan(\tan y) = y.$$

Cette dernière relation inexacte si $x \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *En effet, si on prend par exemple* $y = \pi$, *on aura*

$$\arctan[\tan(\pi)] = \arctan(0) = 0.$$

5. La représentation graphique de la fonction $x \longrightarrow \arctan x$ *est donnée dans la Fig 4.7.*

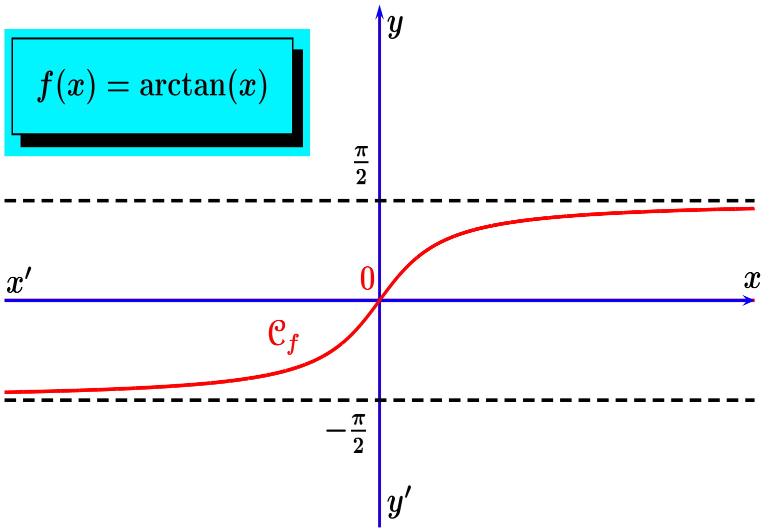


FIGURE 4.7 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \arctan x$.

Remarque 4.5. *Si*

$$f(x) = \arctan(g(x))$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{g'} : f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + g^2(x)}}$$

Exemple 4.5. *Soit* $f(x) = \arctan(\sqrt{x})$

Alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \, / \, x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

et

$$\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

4.5 Fonctions hyperboliques et leurs fonctions réciproques

4.5.1 Fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique

Définition 4.8. *On appelle fonction cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique les fonctions définies respectivement pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par les formules :*

$$\mathrm{ch} : x \longmapsto \mathrm{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\mathrm{sh} : x \longmapsto \mathrm{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ces fonctions possèdent de nombreuses propriétés qui n'est pas inutile de rappeler ci-dessous

1. *Les fonctions* ch, sh *sont définies, continues et dérivables sur tout* $\mathbb{R}$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \mathrm{ch}' x = \mathrm{sh} x, \quad \mathrm{sh}' x = \mathrm{ch} x.$$

2. *Nous avons les relations suivantes*

$$\begin{array}{lll}
\textbf{\textit{a.}} & \forall x \in \mathbb{R} : & \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1. \\
\textbf{\textit{b.}} & \forall x,\, y \in \mathbb{R} : & \mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch} x \cdot \mathrm{ch} y + \mathrm{sh} x \cdot \mathrm{sh} y. \\
\textbf{\textit{c.}} & \forall x,\, y \in \mathbb{R} : & \mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh} x \cdot \mathrm{ch} y + \mathrm{sh} y \cdot \mathrm{ch} x. \\
\textbf{\textit{d.}} & \forall x \in \mathbb{R} : & \mathrm{ch}(2x) = 2\mathrm{ch}^2 x - 1 = 2\mathrm{sh}^2 x + 1. \\
\textbf{\textit{e.}} & \forall x \in \mathbb{R} : & \mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch} x \cdot \mathrm{sh} x.
\end{array}$$

3. *La fonction* $x \longrightarrow \mathrm{ch} x$*, est paire sur* $\mathbb{R}$*, par contre la fonction* $x \longrightarrow \mathrm{sh} x$*, est impaire sur* $\mathbb{R}$*. En effet*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \mathrm{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \mathrm{ch} x, \quad \mathrm{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = -\mathrm{sh} x.$$

4. *Les représentations graphique de fonctions* $x \longrightarrow \mathrm{ch} x$ *et* $x \longrightarrow \mathrm{sh} x$*, sont données dans la Fig 4.8 ci-dessous.*

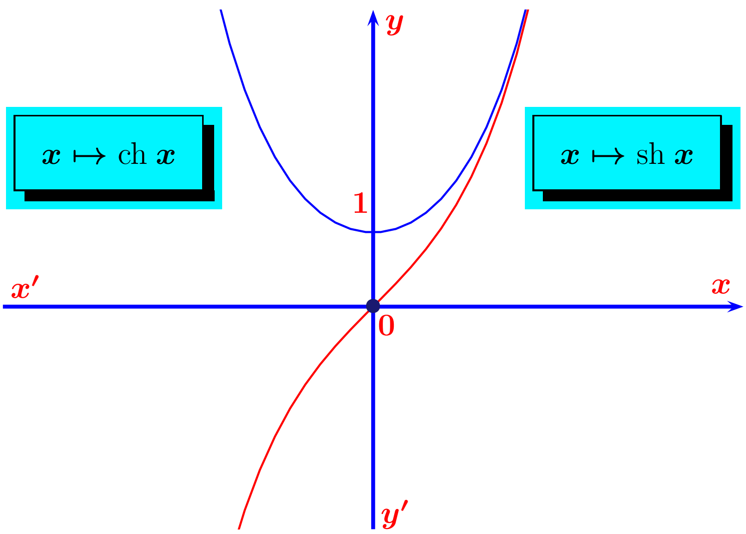


Figure 4.8 – Courbes des fonctions $x \longmapsto \mathrm{ch} x$ et $x \longmapsto \mathrm{sh} x$.

5. *De la Fig 4.8, il est clair que :*

   a. *La fonction* ch *est minorée par* 1 *i.e.*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \mathrm{ch} x \geq 1.$$

b. *La fonction* ch *est strictement croissante sur* $[0, +\infty[$ *et elle est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0]$.

c. *La fonction* sh *est strictement croissante sur tout* $\mathbb{R}$.

4.5.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

Définition 4.9. *On sait que la fonction* ch *est continue, dérivable et strictement croissante sur* $[0, +\infty[$, *d'après le théorème 4.1 de la fonction inverse, la fonction*

$$\mathrm{ch} : [0, +\infty[\longrightarrow \mathrm{ch}\,([0, +\infty[) = [\mathrm{ch}0, \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}x[= [1, +\infty[$$

réalise donc une bijection, sa fonction réciproque notée argch, *on lit « argument cosinus hyperbolique ». On écrit*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argch} : & [1, +\infty[& \to & [0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \mathrm{argch}x \end{array}$$

Cette nouvelle fonction est donc définie et continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$, *de plus elle n'est ni paire, ni impaire et qui a les propriétés suivantes*

1.

$$\boxed{\forall\, x \in [1, +\infty[\,:\; y = \mathrm{argch}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{ch}y, \quad y \in [0, +\infty[\,.}$$

2. *La fonction* argch *s'exprime à l'aide de la fonction logarithme i.e.*

$$\boxed{\forall\, x \in [1, +\infty[\,:\; \mathrm{argch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).}$$

En effet, on pose $y = \mathrm{argch}x$, *on a :*

$$\forall\, x \in [1, +\infty[\,:\; \mathrm{argch}x = y \quad \Rightarrow \quad x = \mathrm{ch}y,\; y \in [0, +\infty[$$

Or

$$\underbrace{\mathrm{ch}^2y}_{=x^2} - \mathrm{sh}^2y = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sh}^2y = x^2 - 1$$

Comme $y \geq 0$, *on déduit que :* $\mathrm{sh}y = +\sqrt{x^2 - 1}$

D'autre part, on a

$$\mathrm{e}^y = \mathrm{ch}y + \mathrm{sh}y = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

Par conséquent,

$$y = \mathrm{argch}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

3. argch *est strictement croissante sur* $]1, +\infty[$ *et on a*

$$\forall\, x \in\,]1, +\infty[\, : \; (\operatorname{argch} x)' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)'}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0.$$

4.

$$\forall\, x \in [1, +\infty[\, : \; \operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x.$$

$$\forall\, y \in [0, +\infty[\, : \; \operatorname{argch}(\operatorname{ch} y) = y.$$

5. *La représentation graphique de la fonction* $x \longrightarrow \operatorname{argch} x$ *est donnée dans la Fig 4.9 ci-dessous.*

Remarque 4.6. *Si*

$$f(x) = \operatorname{argch}(g(x))$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in \mathcal{D}_g \text{ et } g(x) \geq 1\right\} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{f'} : f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x) - 1}}}$$

Exemple 4.6. *Soit* $f(x) = \operatorname{argch}(2x)$
Alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x \geq 1\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

et

$$\forall x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\; : \; f'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{4x^2-1}}.$$

4.5.3 Fonction argument sinus hyperbolique

Définition 4.10. *On sait que la fonction* sh *est continue, dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, d'après le théorème 4.1 de la fonction inverse, la fonction*

$$\operatorname{sh} : \;]-\infty, +\infty[\longrightarrow \operatorname{ch}(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x, \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x[= \mathbb{R}$$

réalise donc une bijection, sa fonction réciproque notée argsh*, on lit « argument sinus hyperbolique ». On écrit*

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsh} : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{argsh} x \end{array}$$

Cette nouvelle fonction est donc définie et continue sur tout $\mathbb{R}$*, qui a les propriétés suivantes*

1.

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \; y = \operatorname{argsh} x \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sh} y, \quad y \in \mathbb{R}.}$$

2. *La fonction* argsh *s'exprime à l'aide de la fonction logarithme i.e.*

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).}$$

En effet, on pose $y = \operatorname{argsh} x$*, on a :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{argsh} x = y \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{sh} y,\ y \in \mathbb{R}$$

Or

$$\operatorname{ch}^2 y - \underbrace{\operatorname{sh}^2 y}_{=x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ch}^2 y = x^2 + 1$$

Comme $\operatorname{ch} y > 0$*, on déduit que :* $\operatorname{ch} y = +\sqrt{x^2+1}$

D'autre part, on a

$$e^y = \operatorname{sh} y + \operatorname{ch} y = x + \sqrt{x^2+1}$$

Par conséquent,

$$y = \operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

3. argsh *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ (\operatorname{argsh} x)' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0.$$

4.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x.$$

$$\forall\, y \in \mathbb{R} :\ \operatorname{argsh}(\operatorname{sh} y) = y.$$

5. *La fonction* argsh *est impaire, en effet*

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{argsh} x + \operatorname{argsh}(-x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) \\
&= \ln\left((x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1})\right) \\
&= \ln\left(x^2 + 1 - x^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \operatorname{argsh} x = -\operatorname{argsh}(-x).$$

6. *La courbe représentative de la fonction* $x \longrightarrow \operatorname{argsh} x$ *est donnée dans la Fig 4.9 ci-dessous.*

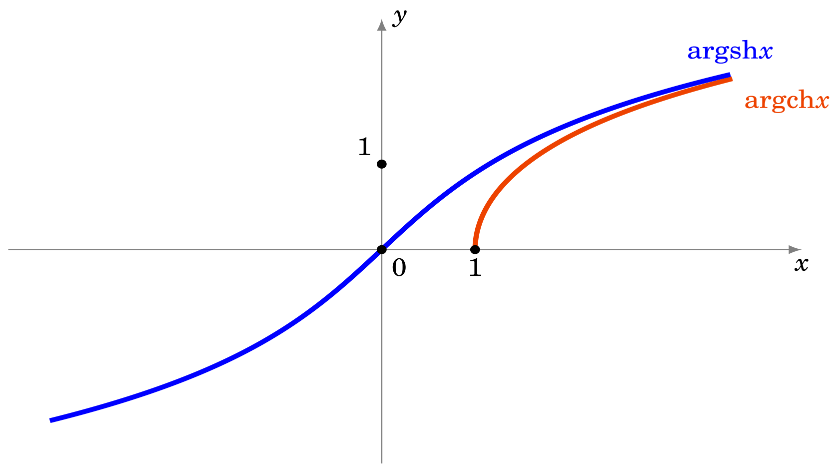


FIGURE 4.9 – Courbes des fonctions $x \longmapsto \text{argch}x$ et $x \longmapsto \text{argsh}x$.

Remarque 4.7. *Si*

$$f(x) = \text{argsh}\,(g(x))$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \textit{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{f'} : f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{g^2(x)+1}}}$$

Exemple 4.7. *Soit* $f(x) = \text{argch}(\sqrt{x-1})$
Alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x-1 \geq 0\} = [1, +\infty[$$

et

$$\forall x \in]1, +\infty[\; : \; f'(x) = \frac{(\sqrt{x-1})'}{\sqrt{x-1+1}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}.$$

4.5.4 Fonctions tangente hyperbolique

Définition 4.11. *On appelle fonction tangente hyperbolique, la fonction notée* th, *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par la formule :*

$$\text{th} : \; x \longmapsto \text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.$$

Cette fonction possède de nombreuses propriétés qui n'est pas inutile de rappeler ci-dessous

1. *La fonction* th, *est dérivable et strictement croissante sur tout* $\mathbb{R}$, *en effet,*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; \text{th}'x = \left(\frac{\text{sh}x}{\text{ch}x}\right)' = \frac{\overbrace{\text{ch}^2x - \text{sh}^2x}^{=1}}{\text{ch}^2x} = 1 - \text{th}^2x = \frac{1}{\text{ch}^2x}.$$

2. *La fonction* $x \longrightarrow \text{th}x$*, est impaire sur* $\mathbb{R}$*. En effet,*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ \text{th}(-x) = \frac{\text{sh}(-x)}{\text{ch}(-x)} = \frac{-\text{sh}x}{\text{ch}x} = -\text{th}x.$$

3.

$$\lim_{x \to -\infty} \text{th}x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1, \quad \lim_{x \to +\infty} \text{th}x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

4. *La représentation graphique de la fonction* $x \longrightarrow \text{th}x$ *est donnée dans la Fig 4.10 ci-dessous.*

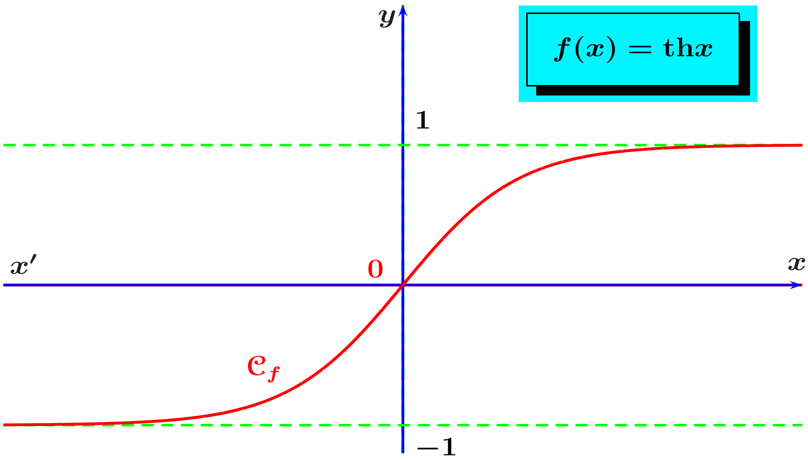


FIGURE 4.10 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \text{th}x$.

Remarque 4.8. *Si*

$$f(x) = \text{th}\,(g(x))$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{f'} : f'(x) = \frac{g'(x)}{\text{ch}^2(g(x))}}$$

Exemple 4.8. *Soit* $f(x) = \text{th}(\frac{1}{x})$

Alors

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \ f'(x) = \frac{(\frac{1}{x})'}{\text{ch}^2(\frac{1}{x})} = -\frac{1}{x^2\text{ch}^2(\frac{1}{x})}.$$

4.5.5 Fonction argument tangente hyperbolique

Définition 4.12. *On sait que la fonction* th*, est continue, dérivable et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, d'après le théorème 4.1 de la fonction inverse, la fonction*

$$\mathrm{th}: \;]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathrm{th}\,(]-\infty, +\infty[) =]\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}x, \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}x[=]-1, 1[$$

réalise donc une bijection, sa fonction réciproque notée argth*, on lit « argument tangente hyperbolique ». On écrit*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argth}: &]-1, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{argth}x \end{array}$$

Cette nouvelle fonction est donc définie et continue sur l'intervalle $]-1, 1[$*, qui a les propriétés suivantes*

1.
$$\boxed{\forall\, x \in]-1, 1[: \; y = \mathrm{argth}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{th}y, \quad y \in \mathbb{R}.}$$

2. *La fonction* argsh *s'exprime à l'aide de la fonction logarithme i.e.*
$$\boxed{\forall\, x \in]-1, 1[: \; \mathrm{argth}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$
En effet, on pose $y = \mathrm{argth}x$*, on a :*
$$\forall\, x \in]-1, 1[: \; \mathrm{argth}x = y,$$
$\Rightarrow$
$$x = \mathrm{th}y = \frac{\mathrm{e}^{2y}-1}{\mathrm{e}^{2y}+1}, \; y \in \mathbb{R},$$
$\Rightarrow$
$$\mathrm{e}^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$
D'où
$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. argth *est strictement croissante sur* $]-1, 1[$ *et on a*
$$\forall\, x \in]-1, 1[: \; (\mathrm{argth}x)' = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2}.$$

4.
$$\forall\, x \in\,]-1,\ 1[\ :\ \mathrm{th}(\mathrm{argth}x) = x.$$

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\ :\ \mathrm{argth}(\mathrm{th}y) = y.$$

5. *La fonction* argth*, est impaire, en effet,*

$$\begin{aligned}\forall x \in\,]-1,\ 1[\ :\ \mathrm{argth}(-x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\ &= -\mathrm{argth}x\end{aligned}$$

6. *La courbe représentative de la fonction* $x \longrightarrow \mathrm{argth}x$*, est donnée dans la Fig 4.11 ci-dessous.*

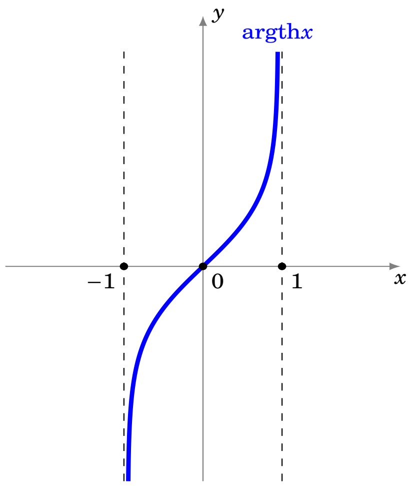


FIGURE 4.11 – Courbe de la fonction $x \longmapsto \mathrm{argth}x$.

Remarque 4.9. *Si*

$$f(x) = \mathrm{argth}\,(g(x))$$

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in \mathcal{D}_g \text{ et } -1 < g(x) < 1\right\} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D}_{f'} : f'(x) = \frac{g'(x)}{1-g^2(x)}}$$

Exemple 4.9. *Soit* $f(x) = \mathrm{argth}(x^2 - 1)$

Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_f &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x^2 - 1 < 1\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 < x^2 < 2\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0,\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right\}\\ &= \left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[.\end{aligned}$$

et

$$\forall x \in \left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[\,:\ f'(x) = \frac{2x}{1-(x-1)^2} = \frac{2}{x(2-x^2)}.$$

4.6 Exercices

Exercice 4.1. *On se donne les fonctions suivantes :*

$$f(x) = \arcsin(x-1), \quad g(x) = \arccos(x^2), \quad h(x) = \operatorname{argch}(\frac{1}{x}).$$

1. *Trouver le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de f, g et h.*
2. *Calculer les dérivées de ces fonctions.*

Exercice 4.2.

a. *Résoudre dans $\mathbb{R}$, les deux équations suivantes :*

$$\textbf{\textit{1.}}\quad 3\text{ch}x - \text{sh}x - 3 = 0, \quad \textbf{2.}\quad \text{sh}x - 3\text{ch}x + 3 = 0.$$

b. *Déduire le domaine de définition des deux fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{1}{3\text{ch}x - \text{sh}x - 3}, \qquad g(x) = \frac{x}{\text{sh}x - 3\text{ch}x + 3}.$$

Exercice 4.3. *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \arcsin(2x^2 - 1).$$

1. *Montrer que f est définie et continue sur* $[-1,\ 1]$.
2. *Montrer que*

$$f(x) = \begin{cases} -2\text{arcsin}x - \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad -1 \le x \le 0, \\ 2\text{arcsin}x - \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

3. *Montrer que f est dérivable sur* $]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[$. *Déterminer sa dérivée.*
4. *La fonction f est-elle dérivable en* -1 *? en* 0 *? en* 1 *?*

Exercice 4.4. *Soit la fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{x}\text{arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que f est définie et continue sur* $[-1,\ 1]$.
2. *Montrer que f est continue au point $x = 0$.*
3. *Déterminer la dérivée à droite $f'_d(0)$ et la dérivée à gauche $f'_g(0)$ de f au point $x = 0$.*

4. *La fonction f est-elle dérivable au point $x = 0$?*

Exercice 4.5. *On considère la fonction*

$$f\,:\; x \longmapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. *Donner le domaine de définition de f.*
2. *Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, calculer f' et $f(1)$.*
3. *Déduire que*

$$\forall x > 0,\; \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

.

4. *Quelle formule analogue a-t-on pour $x < 0$?*

Chapitre 5

Calcul intégral

Dans ce chapitre, nous présentons une théorie élémentaire de l'intégration permettant de calculer la plupart des intégrales définies et indéfinies. Nous introduisons les différentes techniques utilisées pour le calcul des primitives, notamment l'intégration par parties et le changement de variables.
Une place importante est consacrée au calcul des primitives de fonctions rationnelles.

5.1 Rappel sur les primitives

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une primitive de f sur I est une fonction F, définie, dérivable sur I qui vérifie*

$$\forall x \in I : \; F'(x) = f(x).$$

Exemple 5.1.

1. *La fonction $F(x) = \ln |x|$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ car*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \; F'(x) = f(x) = \frac{1}{x}.$$

2. *Toute fonction constante sur un intervalle I, est une primitive de la fonction nulle. En effet, soit $F(x) = C$, où $C \in I$ une constante, il est clair que*

$$\forall x \in I : \; F'(x) = (C)' = 0.$$

Nous rappelons la propriété fondamentale suivante, qui ne peut être démontrer dans le cadre de ce cours :

Théorème 5.1. *Toute fonction continue $f : \; I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ($I$ un intervalle) possède au moins une primitive sur I.*

Remarque 5.1.

- *Il existe des fonctions continues mais leurs primitives n'ont pas forcément une expression explicite.*

- *Dans le théorème précédent, la condition de la continuité est suffisante pour qu'une fonction admette des primitives, tandis que cette condition n'est pas nécessaire. En effet, considérons par exemple la fonction*

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Il est clair que F est une primitive de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

sur n'importe quel intervalle $[a, b]$, tandis que f , n'est pas continue au point $x = 0$.

Proposition 5.1. *Soient F, G deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I. Alors $F - G$ est constante.*

Preuve: Elle est immédiate car :

$$\forall x \in I : \ (F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

□

5.1.1 Intégrale indéfinie

Définition 5.2 (Intégrale indéfinie)**.** *La famille de toutes les primitives de la fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est appelé intégrale indéfinie de f, qu'on la note par :*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De plus, si F est une primitive quelconque de f, on écrira

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

où C une constante arbitraire.

Exemple 5.2.

$$\begin{aligned} 1.\ \int \sin x\,\mathrm{d}x &= -\cos x + C, \\ 2.\ \int \cos x\,\mathrm{d}x &= \sin x + C, \\ 3.\ \int \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{sh}x + C. \end{aligned}$$

où C une constante arbitraire.

5.1.2 Propriétés

Les propriétés de l'intégrale indéfinie sont données par le théorème suivant :

Théorème 5.2. *Si f et g possèdent respectivement des primitives quelconques F et G. Alors*

1. *$F + G$ est une primitives de $f + g$ et on écrira*

$$\int (f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x + \int g(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + G(x) + C.$$

2. *$\lambda \cdot F$ est une primitive de $\lambda \cdot f$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et on écrira*

$$\int \lambda f(x)\, \mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\, \mathrm{d}x = \lambda F(x) + C.$$

Preuve: Pour voir ces deux propriétés, il suffit de dérivée $F + G$ et $\lambda \cdot F$. □

5.1.3 Primitives usuelles

Chercher des primitives, c'est l'opération inverse du calcul des dérivées. Du tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles, nous déduisons le tableau ci-dessous qui résume quelques primitives usuelles.

TABLE 5.1 – Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Primitive F	Intervalle de définition
k	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\mathbb{R}^*$
$u'(x) \cdot u^{\alpha}(x)$, $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$	$u(x) > 0$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + C$	$u(x) \neq 0$
e^x	$\mathrm{e}^x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x + C$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C = -\arccos x + C$	$]-1, 1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{k^2-x^2}}$, $k > 0$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{k}\right) + C$	$]-k, k[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}x + C =$ $\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$	$]1, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}$, $k > 0$	$\mathrm{argch}\left(\dfrac{x}{k}\right) + C =$ $\ln\left(x + \sqrt{x^2-k^2}\right) + C$	$]k, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{argsh}x + C =$ $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+k^2}}$, $k > 0$	$\mathrm{argsh}\left(\dfrac{x}{k}\right) + C =$ $\ln\left(x + \sqrt{x^2+k^2}\right) + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2+k^2}$, $k > 0$	$\dfrac{1}{k}\arctan\left(\dfrac{x}{k}\right) + C$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^2-k^2}$, $k > 0$	$\dfrac{1}{2k}\ln\left\lvert\dfrac{x-k}{x+k}\right\rvert + C$	$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

5.1.4 Intégrale définie

Définition 5.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a, b \in I$. Alors l'intégrale entre a et b de la fonction f est le nombre noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, qui vaut $F(b)-F(a)$, où F une primitive quelconque de f. On dira alors que f est* ***intégrable*** *sur l'intervalle $[a, b]$ et on écrira :*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \tag{5.1}$$

a, b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 5.2.

- *Dans la formule (5.1), x est une variable muette, c'est-à-dire on peut la remplacer par n'importe quelle lettre (en évitant bien sûr la lettre d pour éviter la confusion $\int_a^b f(d)\,\mathrm{d}d$!).*
- *Dans la définition précédente, la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F que l'on choisit pour f. En effet, si on prend une autre primitive G de f sur I, on a vu qu'il existe une constante C telle que $G(x) - F(x) = C$, pour tout $x \in I$ (Voir la proposition 5.1). En particulier pour $x = a$ et $x = b$, on aura*

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Exemple 5.3. *On veut calculer l'intégrale*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin(2x))\ \mathrm{d}x$$

On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2\sin(2x))\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \left(\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos 0\right) \\
&= \frac{\pi}{4} - 1.
\end{aligned}$$

5.1.5 Propriétés des intégrales définies

Proposition 5.2. *Soient f, g deux fonctions continues sur l'intervalle I et on suppose que α, β deux réels. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Pour tous a, b, $c \in I$ on a la relation de Chasles*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

En particulier pour $a = b = c$, on aura

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. *Pour tous $a, b \in I$, on a*

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\ \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.

$$\text{Si, pour tout } x \in [a,\, b] :\ f(x) \geq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque 5.3. *Soit f une fonction continue sur $[a,\, b]$,*

- *Si f est positive sur $[a,\, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est positive qui représente l'aire (surface) de la partie colorée $\mathcal{D}$, comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, (voir la Fig 5.1 ci-dessous),*

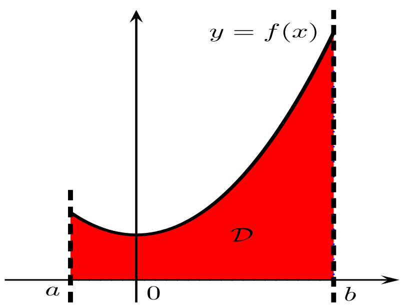


FIGURE 5.1 – Aire : fonction positive.

- *Si f est négative sur $[a, b]$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est négative, qui vaut l'opposée de l'aire de la partie colorée $\mathcal{D}$, comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, (voir la Fig 5.2 ci-dessous). On écrit*

$$Aire(\mathcal{D}) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

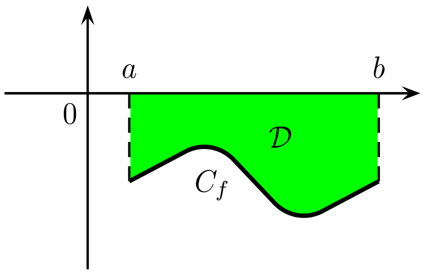


FIGURE 5.2 – Aire : fonction négative.

- *Dans le cas où f est de signe quelconque sur $[a, b]$, on décompose l'intervalle $[a, b]$ en intervalles sur lesquelles f a le même signe. Là où f est positive, on fait précéder l'intégrale par un signe « + », et par un signe « − » là où f est négative. (Voir la Fig 5.3 ci-dessous). On a la formule*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -Aire(\mathcal{D}_1) + Aire(\mathcal{D}_2) - Aire(\mathcal{D}_3) + Aire(\mathcal{D}_4) - Aire(\mathcal{D}_5).$$

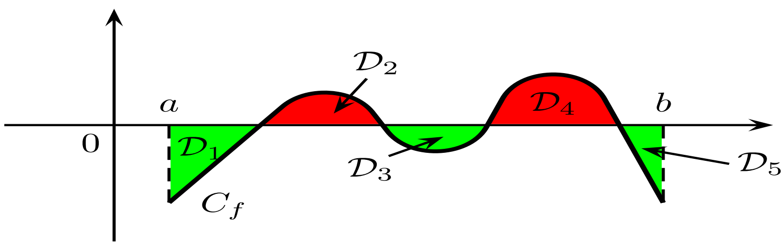
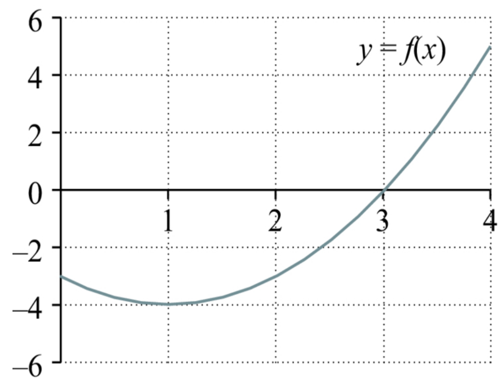


FIGURE 5.3 – Aire : fonction qui change de signe.

Exemple 5.4. *Soit la fonction f, définie sur l'intervalle* $[0, 4]$ *par*

$$f(x) = x^2 - 2x - 3.$$



Quelle est l'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 4$?

Solution: Il est clair que $f(3) = 0$ et que f est négative sur $[0,\ 3]$ et positive sur $[3,\ 4]$ L'aire de la partie où f est positive est donnée par :

$$A^{+} = +\int_{3}^{4}\left(x^2 - 2x - 3\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_3^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 4^2 - 3\cdot 4\right) - \left(\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3\cdot 3\right) = \frac{7}{3}.$$

Par ailleurs, l'aire de la partie où f est négative est donnée par :

$$A^{-} = -\int_{0}^{3}\left(x^2 - 2x - 3\right)\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_0^3 = -\left\{\left(\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3\cdot 3\right) - 0\right\} = +9.$$

Par conséquent, l'aire demandée est

$$A = A^{+} + A^{-} = \frac{7}{3} + 9 = \frac{34}{3.}$$

□

5.2 Techniques de calcul d'intégrales

Pour calculer une primitive d'une fonction f, on peut avoir la chance de reconnaitre que f est la dérivée d'une fonction bien connue comme dans la Table 5.1. C'est malheureusement très rarement le cas et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Dans ce paragraphe, on va exposer les principales techniques permettant de ramener des intégrales non élémentaires en intégrales usuelles. Notamment la technique d'intégration par parties et le changement de variable.

5.2.1 Intégration par parties

Théorème 5.3. *Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ dont les dérivées sont continues sur ce même intervalle (ce qui signifie simplement que u et v sont de classe C^1). Alors on a la formule d'intégration par paries*

1. *dans un calcul de primitive*

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.2}$$

2. *dans un calcul d'intégrale définie*

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

Exemple 5.5. *Calculer les intégrales (définies, indéfinies) suivantes :*

$$I_1 = \int x \ln x\,\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \quad I_3 = \int \arctan x\,\mathrm{d}x, \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,\mathrm{d}x.$$

Solution: • Pour calculer I_1, on pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

D'après la formule d'intégration par parties (5.2), on aura

$$\begin{aligned} I_1 &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

• Pour calculer I_2, on pose

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

D'après la formule d'intégration par parties (5.2), on aura

$$\begin{aligned} I_2 &= u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C \\ &= (x-1)\,\mathrm{e}^x + C. \end{aligned}$$

• Pour calculer I_3, on pose

$$\begin{cases} u(x) = \arctan x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} \\ v(x) = x \end{cases}$$

D'après la formule d'intégration par parties (5.2), on aura

$$\begin{aligned} I_3 &= u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x}_{=I}. \end{aligned}$$

Comme la fonction $\dfrac{2x}{x^2+1}$ est sous la forme $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, qui est la dérivée de $\ln\left|x^2+1\right|$. Ainsi

$$I = \ln\left|x^2+1\right| + C$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_3 &= x\arctan x - \frac{1}{2}\left(\ln\left|x^2+1\right| + C\right) \\ &= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C' \end{aligned}$$

où C' une constante réelle arbitraire.

• Pour calculer I_4, on pose

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

D'après la formule d'intégration par parties (5.3), on obtient

$$\begin{aligned} I_4 &= [u(x)\cdot v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -cosx\,\mathrm{d}x \\ &= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx\,\mathrm{d}x \\ &= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}) - 0 + \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

5.2.2 Changement de variable

Théorème 5.4. *Soient* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et*

$$\varphi : [\alpha, \beta] \longrightarrow [a, b]$$

une fonction bijective de classe C^1 *sur* $[\alpha, \beta]$*. Alors la fonction composée* $t \longmapsto f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ *est intégrable sur* $[\alpha, \beta]$*, de plus*

1. *La formule de changement de variable dans une intégrale s'écrit*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

2. *La formule de changement de variable dans un calcul de primitive s'écrit*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.5}$$

Preuve:

1. Comme f est continue, alors elle possède une primitive F sur $[a, b]$.
   D'autre part, on a

$$\forall t \in [\alpha, \beta] : \ (F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

   Donc $F\circ\varphi$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.
   Par conséquent,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F\circ\varphi(t)]_\alpha^\beta = F(\underbrace{\varphi(\beta)}_{=b}) - F(\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=a}) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où la formule (5.4).

2. Pour assurer la formule (5.5), il suffit de voir que

$$\text{si, } x = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Par conséquent,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

Remarque 5.4. *Pour mieux appliquer la formule du changement de variable (5.4) dans une intégrale* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*, il vaut mieux suivre les étapes suivants :*

1. *On choisit un bon changement de variable* $t = \psi(x)$*, puis on tire* $x = \psi^{-1}(t) = \varphi(t)$ *où* ψ *est l'inverse de la fonction bijective* φ *proposée par le théorème précédent.*
2. *On change les bornes :* a *devient* $\psi(a) = \varphi^{-1}(a)$ *et* b *devient* $\psi(b) = \varphi^{-1}(b)$*.*
3. *On remplace* $f(x)$ *par son expression* $f(\psi^{-1}(t)) = f(\varphi(t))$*.*
4. *On calcule* $\mathrm{d}x$ *en fonction de* $\mathrm{d}t$*, qui s'exprime par* $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$*.*

Exemple 5.6. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int \tan x\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x, \quad I_3 = \int \cos^3 x\,\mathrm{d}x,$$
$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x, \quad I_5 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+k^2}\,\mathrm{d}x, \quad \text{où } k \neq 0.$$

Solution: • Pour calculer I_1, on a

$$I_1 = \int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x,$$

On pose $t = \cos x$, ainsi $\mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$, ce qui entraine que

$$I_1 = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln|t| + C.$$

On revient à la variable initiale, on aura

$$I_1 = -\ln|cosx| + C.$$

• Pour calculer

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x,$$

on pose

$$t = e^x + 1 \quad \Rightarrow \quad dt = e^x dx$$

Ce qui donne

$$I_2 = \int \frac{1}{t^2}\, dt = \int t^{-2}\, dt = -\frac{1}{t},$$

On revient à la variable initiale, on obtient

$$I_2 = -\frac{1}{e^x + 1} + C.$$

• On transforme I_3 comme suit

$$I_3 = \int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$

On pose maintenant,

$$t = \sin x \quad \Rightarrow \quad dt = \cos x dx,$$

par conséquent,

$$I_3 = \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \int (1 - t^2)\, dt = t - \frac{t^3}{3} + c.$$

On revient à la variable x, on retrouve

$$I_3 = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$

• Pour calculer

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx,$$

on pose

$$\begin{aligned} t = \sqrt{x+1} \quad &\Rightarrow \quad t^2 = x + 1 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ dx = 2t dt \end{cases} \end{aligned}$$

Quand x varie de 0 à 1, alors $t = \sqrt{x+1}$ varie de 1 à $\sqrt{2}$. Ainsi, I_4 devient

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2 - 1}{t}\, (2t dt) = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)\, dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^3 - 2t\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}^3 - 2\sqrt{2} - \left(\frac{2}{3} - 2\right) \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

• Pour calculer

$$I_5 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + k^2}\, \mathrm{d}x,$$

nous faisons le changement de variable

$$t = \frac{x}{k} \quad \Rightarrow \quad x = k \cdot t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{k}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = k\mathrm{d}t$$

Les bornes de l'intégrale I_5 deviennent 0 et $\frac{1}{k}$, car pour $x = 0$, on aura : $t = \frac{0}{k} = 0$ et pour $x = 1$, on aura : $t = \frac{1}{k}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1}{(kt)^2 + k^2}\, (k\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{k}{k^2\,(t^2+1)}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1}{t^2+1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k}\, [\arctan t]_0^{\frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{k}\left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan 0\right) \\ &= \frac{1}{k}\arctan\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

□

5.3 Intégration d'une fonction rationnelle

Cette section est consacrée à l'intégration d'une fonction rationnelle à coefficients réels. Pour cela, nous rappelons quelques définition et résultats nécessaires concernant les polynômes et les fractions rationnelles.

Définition 5.4. *On appelle polynôme à coefficients réels, toute fonction $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes réelles qu'on les appelle les coefficients du polynôme P.
De plus si $a_n \neq 0$, l'entier n s'appelle le degré du polynôme P et on écrit $\deg p = n$.

Exemple 5.7.

- *$P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ est un polynôme de degré 3.*
- *Toute fonction constante est un polynôme de degré 0.*

Définition 5.5. *Soient P, Q deux polynômes à coefficients réels tel que $Q \neq 0$. La fonction*

$$x \mapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

s'appelle fonction rationnelle ou fraction rationnelle de degré : $\deg f = \deg P - \deg Q$, où P est le polynôme du numérateur et $Q \not\equiv 0$ est le polynôme du dénominateur.

Proposition 5.3 (et définition). *Pour tout fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$, il existe un unique polynôme S de degré $\deg S = \deg P - \deg Q$ et un unique polynôme R de degré : $\deg R < \deg Q$, telle que*

$$\frac{P}{Q} = S + \frac{R}{Q},$$

*les polynômes S, R étant respectivement la **partie entière** de la fraction $\frac{P}{Q}$ et le reste de la division de P par Q. La fraction $\frac{R}{Q}$ s'appelle la **fraction régulière**.*

Remarque 5.5.

- *Le degré de la partie entière d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est exactement le degré de cette fraction.*
- *Si $\deg P < \deg Q$, alors la fraction $\frac{P}{Q}$ étant régulière et sa partie entière est nul.*

Exemple 5.8. *On considère la fonctionnelle rationnelle*

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2}$$

Nous faisons la division euclidienne de $x^3 + x^2 - 1$ par $x^2 + 2x + 2$, on obtient

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +x^2 & & -1 & x^2 + 2x + 2 \\
\cline{5-5}
-x^3 & -2x^2 & -2x & & x - 1 \\
\cline{1-4}
 & -x^2 & -2x & -1 & \\
 & x^2 & +2x & +2 & \\
\cline{2-4}
 & & & +1 &
\end{array}$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 2x + 2} = x - 1 + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

Il est clair que la partie entière de f est le polynôme $S(x) = x - 1$.

Définition 5.6. *On appelle*

- ***élément simple de première espèce*** *une fraction rationnelle de la forme*

$$\frac{A}{(x-a)^n}, \quad où \quad n \in \mathbb{N}^* \quad et \quad A, a \in \mathbb{R}.$$

- ***élément simple de seconde espèce*** *une fraction rationnelle de la forme*

$$\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, \quad où \quad n \in \mathbb{N}^* \quad et \quad M, N, p, q \in \mathbb{R} \quad avec \quad p^2 - 4q < 0.$$

Exemple 5.9. *Les fractions*

$$\frac{1}{x-1}, \quad \frac{2}{(x+2)^2}, \quad \frac{-3}{(x-2)^3},$$

sont des éléments simples de première espèce. Par contre, les fraction

$$\frac{x-1}{x^2+x+1}, \quad \frac{2x+1}{x^2+1},$$

sont des éléments simples de seconde espèce.

5.3.1 Décomposition d'une fonction rationnelle en éléments simples

Proposition 5.4 (**et définition**)**.** *Toute fonction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$ se décompose d'une seule manière comme somme de sa partie entière et d'un nombre fini d'éléments simples de la forme*

$$\blacktriangleright \quad \frac{A}{(x-a)^n} \quad où \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{5.6}$$

$$\blacktriangleright \quad \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} \quad où \quad n \in \mathbb{N} \quad et \quad p^2 - 4q < 0. \tag{5.7}$$

Remarque 5.6. *Pour décomposer une fonction rationnelle $f = \dfrac{P}{Q}$ en éléments simples, il veut mieux suivre les démarches suivantes :*

1. *On doit faire d'abord la division euclidienne du numérateur par le dénominateur pour apparaitre la partie entière de la fonction rationnelle f. C'est-à-dire on écrit f sous la forme :*

$$f = S + \frac{R}{Q}$$

2. *On écrit la fraction régulière $\frac{R}{Q}$ en somme d'éléments simples de types (5.6) et (5.7).*

Pour mieux comprendre les démarches précédentes, il vaut mieux traiter quelques exemples.

Exemple 5.10. *On considère la fonction rationnelle*

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Il est clair que la fonction f est une fraction régulière parce que le degré du numérateur est inférieur strictement que le degré de dénominateur, ainsi elle admet une décomposition en éléments simples de la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \\ &= \frac{(A+M)x^3 + (A+B+2M+N)x^2 + (A+M+2N)x + A+B+N}{(x+1)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Par identification, on aura

$$\begin{cases} A + M = 1, \\ A + B + 2M + N = 0, \\ A + M + 2N = 0, \\ A + B + N = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, on trouve donc

$$A = 1, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

5.3.2 Intégration des éléments simples

L'intégration d'une fonction rationnelle se ramène après la décomposition en éléments simples à l'intégration de sa partie entière (qui s'intègre facilement) et à l'intégration des éléments simples de types (5.6) et (5.7).

I. Les éléments simples de première espèce $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, s'intègrent comme suit

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\ln|x-a| & \text{si} \quad n=1, \\ \dfrac{A}{1-n}\cdot\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} & \text{si} \quad n\neq 1. \end{cases}$$

II. Pour intégrer les éléments simples de seconde espèce, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ où $p^2-4q<0$, on commence par faire apparaitre au numérateur, la dérivée $2x+p$ du polynôme x^2+px+q. Par identification, on a donc

$$Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{M}{2}p.$$

Il vient

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} = \frac{\frac{M}{2}(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{N-\frac{M}{2}p}{x^2+px+q}$$

Par conséquent,

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\underbrace{\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x}_{①} + (N-\frac{M}{2}p)\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x}_{②} \tag{5.8}$$

L'intégrale ① est de la forme $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u^n(x)}\,\mathrm{d}x$ (voir la Table 5.1), ainsi

$$\boxed{① = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln\left(x^2+px+q\right)+C & \text{si} \quad n=1, \\ \dfrac{-1}{(n-1)\,(x^2+px+q)^{n-1}}+C & \text{si} \quad n\neq 1. \end{cases}} \tag{5.9}$$

Pour calculer l'intégrale ②, on écrit d'abord le trinôme x^2+px+q, sous la forme canonique, i.e.

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = (x+\alpha)^2+\beta^2,$$

où

$$\alpha = \frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Il est clair que

$$② = \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left((x+\alpha)^2 + \beta^2\right)^n}\, \mathrm{d}x$$

Par conséquent, l'intégrale ② se ramène, après le changement de variable $x + \alpha = \beta t$, au calcul d'intégrale

$$J_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\, \mathrm{d}t. \tag{5.10}$$

Le calcul de J_n s'effectue par l'intégration par parties. En effet,

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{1}{(t^2+1)^n} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = -2n\dfrac{t}{(t^2+1)^{n+1}} \\ v(t) = t \end{cases}$$

On aura

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{n+1}}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\,(J_n - J_{n+1}) \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve la relation de récurrence :

$$\boxed{2nJ_{n+1} = \frac{t}{(t^2+1)^n} + (2n-1)\, J_n.} \tag{5.11}$$

Ainsi, tout le calcul se ramène à celui de

$$\boxed{J_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\, \mathrm{d}t = \arctan t + C.} \tag{5.12}$$

Exemple 5.11. *Calculer les intégrales indéfinies suivantes :*

$$I_1 = \int \frac{x+1}{2x^2+2x+2}\, \mathrm{d}x, \quad I_2 = \int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}\, \mathrm{d}x,$$

$$I_3 = \int \frac{1}{-x^2+4x-4}\, \mathrm{d}x, \quad I_4 = \int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\, \mathrm{d}x$$

Solution:

1. On a

$$I_1 = \int \frac{x+1}{2x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

On remarque que la fonction qu'on veut intégrer est un polynôme régulier (car le degré du numérateur est inférieur strictement au degré du dénominateur). D'autre part, le dénominateur x^2+x+1 est un trinôme sans racine réelle (son discriminant $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$), ainsi, $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ est un élément de seconde espèce et on pourra écrire

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{①}+\frac{1}{4}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x}_{②} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Le calcul de ① est immédiate. En effet,

$$① = \ln(x^2+x+1) + C_1 \tag{5.14}$$

Pour calculer ②, on écrit d'abord, le trinôme x^2+x+1, sous la forme canonique i.e.

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = (x+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2.$$

Par conséquent,

$$② = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose,

$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}t$$

Ainsi, l'intégrale ② devient

$$② = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}J_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan t + C_2$$

Or

$$x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

il s'ensuit que

$$② = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2 \tag{5.15}$$

Nous remplaçons (5.14) et (5.15) dans (5.13), on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4}\ln(x^2+x+1) + C_1 + \frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C_2 \\ &= \frac{1}{4}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

2.

$$I_2 = \int \frac{2x+1}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x$$

On remarque d'abord que le dénominateur de $\frac{2x+1}{x^2+2x-3}$ possède deux racines, qui sont $x = -3$ et $x = 1$ (son discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$). Ainsi le dénominateur se factorise en

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

La décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{2x+1}{(x+3)(x-1)}$ est donc de la forme

$$\frac{2x+1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x - A3B}{(x+3)(x-1)},$$

où A et B sont deux constantes réelles qu'on doit les déterminer.
Par identification, on obtient facilement que

$$\begin{cases} A + B &= 2 \\ -A + 3B &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B &= \frac{3}{4} \\ A &= \frac{5}{4} \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\frac{2x+1}{(x+3)(x-1)} = \frac{\frac{5}{4}}{x+3} + \frac{\frac{3}{4}}{x-1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{4}\ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

3. On a

$$I_3 = \int \frac{1}{-x^2+4x-4}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,\mathrm{d}x$$

Comme le dénominateur de $\frac{1}{x^2-4x+4}$ possède une racine double $x = 2$ (son discriminant $\Delta = 0$). On écrit donc ce dénominateur sous forme

$$x^2-4x+4 = (x-2)^2$$

Par conséquent,

$$I_3 = -\int \frac{1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x-2} + C.$$

4.

$$I_4 = \int \frac{x^3}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x,$$

Le degré totale de la fraction $\frac{x^3}{x^2+3x+2}$ est $3-2 = 1$, donc il y a une partie entière, qui est un polynôme de degré 1. Pour trouver cette parie entière, nous faisons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, on aura

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & & x^2 \; +3x \; +2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -3x^2 & -2x & & x \quad -3 \\ \cline{1-3}
 & -3x^2 & -2x & & \\
 & +3x^2 & +9x & +6 & \\ \cline{2-4}
 & & 7x & +6 &
\end{array}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{x^2+3x+2} &= \frac{(x-3)(x^2+3x+2)+7x+6}{x^2+3x+2} \\
&= x-3+\frac{7x+6}{x^2+3x+2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, le dénominateur de la fraction régulière $\frac{7x+6}{x^2+3x+2}$ possède deux racines $x = \frac{-3+1}{2} = -1$ et $x = \frac{-3-1}{2} = -2$ (car son discriminant $\Delta = 9-8 = 1 > 0$).

Par conséquent, la décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{7x+6}{x^2+3x+2}$ est de la forme :

$$\frac{7x+6}{x^2+3x+2} = \frac{7x+6}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A+2B}{(x+2)(x+1)}$$

où A et B sont deux constantes réelles qu'on veut les calculer.
Par identification, on trouve

$$\begin{cases} A + B = 7 \\ A + 2B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 8 \\ B = -1 \end{cases}$$

D'où

$$\frac{7x+6}{x^2+3x+2} = \frac{8}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

Finalement, I_4 devient

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \left(x - 3 + \frac{8}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int (x-3)\,\mathrm{d}x + 8\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 - 3x + 8\ln|x+2| - \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

□

5.3.3 Intégration d'une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$

Soit

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}x, \tag{5.16}$$

où R est une fonction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$.
L'intégrale (5.16) se ramène après le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$, à l'intégration d'une fonction rationnelle. En effet, si on pose : $t = \tan\frac{x}{2}$, on trouve donc les formule,

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, l'intégrale I devient

$$I = 2\int \frac{1}{1+t^2} \cdot R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t.$$

Exemple 5.12. *Calculer*

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

On pose

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \end{cases}$$

Il vient

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\left(\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t\right) = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$$

Cas particuliers :

On donne maintenant d'autres changement de variables mieux adaptés pour des cas plus particuliers que l'intégrale (5.16).

- 1$^{\text{er}}$ cas :

$$I_1 = \int R(\cos x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x, \tag{5.17}$$

où R une fonction rationnelle en $\cos x$. Nous faisons le changement de variable

$$t = \cos x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = -sinx\mathrm{d}x$$

Par conséquent, (5.17) devient

$$I_1 = -\int R(t)\,\mathrm{d}t.$$

- 2$^{\text{ème}}$ cas :

$$I_2 = \int R(\sin x)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x, \tag{5.18}$$

où R une fonction rationnelle en $\sin x$. Nous faisons le changement de variable

$$t = \sin x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x$$

Par conséquent, (5.18) devient

$$I_2 = \int R(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 5.13. *Calculer*

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 1}\,\mathrm{d}x,$$

On pose

$$t = \cos x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$$

Par conséquent,

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 1}\, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{t^2 - 1}\, \mathrm{d}t$$

Comme $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, *on peut décomposer la fraction* $\dfrac{1}{t^2-1}$ *en éléments simples de la forme*

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{(A+B)t + A - B}{t^2-1}.$$

Par identification, on trouve donc

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'où

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right).$$

Notre intégrale devient

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{t^2-1}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C. \end{aligned}$$

On revient à la variable initiale x, on trouve

$$I = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right| + C.$$

5.3.4 Intégration d'une fonction rationnelle en e^x

Soit

$$I = \int R\left(\mathrm{e}^x\right)\, \mathrm{d}x, \tag{5.19}$$

où R est une fonction rationnelle en e^x.
L'intégration de I est encore réductible à celle d'une fonction rationnelle par le changement de variable : $t = \mathrm{e}^x$. En effet, si on pose :

$$t = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln t, \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

Par conséquent, l'intégrale (5.19) devient

$$I = \int \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 5.14. *Calculer*

$$I = \int \frac{1}{\mathrm{ch}x}\,\mathrm{d}x,$$

On utilise le fait que $\mathrm{ch}x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ *et on pose :*

$$t = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln t, \quad \textit{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t,$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \frac{1}{t+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \arctan t + C = \arctan \mathrm{e}^x + C. \end{aligned}$$

5.4 Exercices

Exercice 5.1. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_0^1 \left(x^3 - 7x + 15\right) \mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^1 x\left(x^2+1\right)^5 \mathrm{d}x, \quad I_3 = \int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x,$$

$$I_4 = \int_0^1 (4x+2)\left(x^2+x-2\right)^2 \mathrm{d}x, \quad I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\,\mathrm{d}x, \qquad I_6 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos x+\cos^2 x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5.2. *Calculer les primitives suivantes :*

$$F_1(x) = \int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x, \quad F_2(x) = \int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x, \qquad F_3(x) = \int \frac{1}{x^3-1}\,\mathrm{d}x,$$

$$F_4(x) = \int \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x, \qquad F_5(x) = \int \frac{x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x, \quad F_6(x) = \int \frac{x^4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5.3. *Utiliser le changement de variable qui convient pour déterminer les primitives suivantes :*

$$G_1(x) = \int \frac{1}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x, \qquad G_2(x) = \int \frac{\sin(2x)}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x, \qquad G_3(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,\mathrm{d}x,$$

$$G_4(x) = \int \tan x\,\mathrm{d}x, \qquad G_5(x) = \int \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x, \qquad G_6(x) = \int \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\,\mathrm{d}x$$

$$G_5(x) = \int \frac{1}{x+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x, \quad G_6(x) = \int \frac{1}{x+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x, \quad G_7(x) = \int \frac{1}{(\mathrm{ch}x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5.4. *Utiliser l'intégration par parties une ou plusieurs fois pour déterminer les primitives suivantes :*

$$H_1(x) = \int \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad H_2(x) = \int \arctan x\,\mathrm{d}x, \qquad H_3(x) = \int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x,$$

$$H_4(x) = \int (x^3+x^2)\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x, \quad H_5(x) = \int x^2 \arctan(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x, \quad H_6(x) = \int \left(x^2+2x+1\right)\mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale I_n définie par :*

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

1. *Calculer I_0 et I_1.*

2. *Montrer que*

$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{n+1}{2}\right) I_n.$$

Exercice 5.6. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* - \{-1\}$ par*

$$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x(x+1)^2}.$$

1. *Montrer que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* - \{-1\} : \ f(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

2. *Déterminer une primitive de la fonction f.*
3. *Déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par*

$$g(x) = \frac{1+\mathrm{sh}x}{1+\mathrm{ch}x}.$$

Exercice 5.7. *On considère les intégrales suivantes :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

1. *Calculer $I+J$ et $I-J$.*
2. *En déduire I et J.*

Exercice 5.8. *On considère les intégrales suivantes :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

1. *Calculer $I+J$ et $I-J$.*
2. *En déduire I et J.*

Exercice 5.9. *On désigne par I, J les primitives*

$$I(x) = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x, \quad J = \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. *Calculer $I(x) + J(x)$.*
2. *Calculer $I(x) - J(x)$*
3. *En déduire $I(x)$ et $J(x)$.*

Exercice 5.10. *On considère l'intégrale suivante :*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, \mathrm{d}x.$$

1. *En posant : $t = \frac{\pi}{4} - x$, montrer que*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{2}{1 + \tan t}\right) \mathrm{d}t.$$

2. *En déduire $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$.*

Bibliographie

[1] B. Aebischer, Introduction à l'analyse : cours et exercices corrigés. *Vuibert, (2011).*

[2] K. Allab, Éléments d'analyse : fonction d'une variable réelle, *O.P.U. (2002).*

[3] C. Baba-Hamed, K. Benhabib, Analyse 1. Rappel de cours et exercices avec solutions, *O.P.U. (1985).*

[4] N. Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle : théorie élémentaire, *Springer Science and Business Media, (2007).*

[5] B. Calvo et A. Calvo, Fonctions d'une variable, cours avec exemples et exercices corrigés, *Collection DEUG, Masson, (1997).*

[6] J. Lelong-Ferrand, J.M, Arnaudiès, Cours de mathématiques. Analyse, *Dunod, 2. (1976).*