

Université MUSTAPHA Stambouli

Mascara



جامعة مصطفى اسطمبولي

معسكر

Faculté des sciences et technologies

Département de génie civil

Laboratoire des sciences et techniques de l'eau

THESE de DOCTORAT

Spécialité : Génie Civil

Option: Matériaux et Durabilité

Comportement vibratoire des nanostructures viscoélastiques en composite et matériaux FGM

Présentée par : M^{lle} Hamzi Souad

Le...../...../2021

Devant le jury :

Président	LAOUFI LAID	MCA	Université de Mascara
Examineur	YEGHNEM REDA	PR	Université de Saida
Examineur	KROUR BAGHDAD	MCA	Université de Sidi -Bel Abbas
Examineur	YOUZERA HADJ	MCA	Université de Mascara
Encadreur	MECHAB ISMAIL	PR	Université de Sidi - Bel Abbas

Année Universitaire : 2020 -2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Entreprendre ce doctorat a été une expérience qui a véritablement changé ma vie et je n'aurais pas pu le faire sans le soutien et les conseils que j'ai reçus de nombreuses personnes.

Tout d'abord, je suis extrêmement reconnaissante à mon superviseur, le Prof. Mechab Ismail, pour ses précieux conseils, son soutien continu et sa patience durant mon étude de doctorat. Ses immenses connaissances et son abondante expérience m'ont encouragé à chaque instant de ma recherche universitaire et de ma vie quotidienne.

Je tenais à exprimer mon profonde gratitude à Messieurs Abbad Hichem et El-meiche Nourreddine, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. Je les remercie pour les conseils scientifiques et techniques qu'ils m'ont apportés pour mener à bien ce travail.

Mes sincères remerciements vont également à messieurs : Professeur. Yeghнем Reda de l'Université de Moulay Tahar de Saida et les maîtres de conférence M. Krouр Baghdad de l'Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbés et M. Youzera Hadj de l'Université Mustapha Stambouli de Mascara d'avoir accepté de juger mon travail. Je tiens à exprimer avec fierté ma gratitude à Monsieur Laoufi Laid de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

J'aimerais exprimer ma sincère gratitude et de tout cœur à mon cher père et à ma chère défunte mère «رحمة الله عليها», qui est décédée en Mai dernier pour m'avoir toujours encouragé à suivre mes rêves, pour leurs grand rôle dans ma vie et leurs nombreux sacrifices pour moi et pour mes frères. Je voudrais remercier vivement mon cher frère ALI qui m'a apporté un soutien scientifique important pour la thèse.

Un grand merci à mes chers frères et sœurs, ALI, WAHIBA, HAYET et MOHAMMED pour leur soutien et pour avoir été de vrais frères et sœurs en cas de besoin.

Et toujours à ma chère mère, qui a été à mes côtés tout au long de ce doctorat, en vivant chaque minute, et sans qui je n'aurais pas eu le courage de m'embarquer dans cette expérience.

Merci



الى من قال فيهما الله سبحانه و تعالى :

«وَإخْفِضْ لَهُمَا جَنَاحَ الذُّلِّ مِنَ الرَّحْمَةِ وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيْتَنِي صَغِيرًا»

[سورة الإسراء:24]

الى والدي الكريم حفظه الله تعالى

الى والدي رحمها الله تعالى رحمة الابرار و اسكنها فسيح جنانه

Abstract

This research is interested to analyze the free vibrations of composite materials either with fiber, or with gradient evolves (FGM) with the formulation of the theory of Eringen known as nonlocal by employing various theories of the plates, which holds of the effect of transverse shear or not, by taking account of the viscoelastic characteristics of the structure. This study will be brought back under various boundary conditions with various analytical or numerical methods; the influence of the various parameters either geometrical or material will be studied. The numerical results will be compared with other results and models available in the literature.

Keywords:

Higher-order plate theory, FGM materials, viscoelasticity, nonlocal theory, Winkler-Pasternak viscoelastic foundation

Résumé

Ce travail s'intéresse à l'analyse des vibrations libres des matériaux en composite soit à fibre, ou à gradient évolue (FGM) avec la formulation de la théorie d'Eringen dite non local en employant différents théories des plaques ,en considérant l'effet de cisaillement transversal ou non ,et en tenant compte des caractéristiques viscoélastique des structures. Cette étude sera ramenée sous différent conditions aux limites avec différentes méthodes analytique ou numérique, l'influence de divers paramètres soit géométriques ou matériels sera étudiée. Les résultats numériques seront comparé avec d'autre résultat et model disponible dans la littérature.

Mots-Clés :

Théorie des plaques d'ordre supérieur, matériaux FGM, viscoélasticité, théorie non locale, fondation viscoélastique Winkler-Pasternak

ملخص

يهتم هذا العمل البحثي بتحليل الاهتزازات الحرة للمواد المركبة المصنَّعة عن طريق الألياف أو بتدرج الخاصية (FGM) وذلك مع صياغة نظرية Eringen المعروفة باسم الغير المحلية من خلال توظيف نظريات مختلفة للصفائح ، والتي تأخذ بعين الاعتبار تأثير القص العرضي او عدمه ، وذلك من خلال مراعاة خصائص اللزوجة المرنة للهياكل. حيث ستتم هذه الدراسة تحت تأثير شروط حدودية مختلفة باستخدام نظريات مختلفة سواء كانت تحليلية أو عددية، وذلك لدراسة تأثير العوامل المختلفة سواء كانت هندسية أو مادية. كما سيتم مقارنة النتائج العددية بالنتائج والنماذج الأخرى المتاحة في المراجع السابقة.

الكلمات المفتاحية:

نظرية الألواح عالية الترتيب ، مواد متدرجة الخاصية FGM ، اللزوجة المرنة ، النظرية غير المحلية ، أساس وينكلر-باسترناك اللزج المرن.

Table des Matières

Remerciement	I
Dédicace	II
Abstract	III
Résumé	IV
V	ملخص
Table des matières	IV
Liste des Figures	XII
Liste des Tableaux	XVI
Liste des Notations	XVII
Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites	
I.1 Introduction	5
I.2 Les composants élémentaires des matériaux composites	5
I.2.1 Matrice	6
I.2.2 Les charges.....	8
I.2.3 Les additifs.....	8
I.2.4 Renforts.....	8
I.2.4.1. Les fibres les plus utilisées dans l'industrie	9
I.2.5 L'interface.....	10
I.3 Architecture des matériaux composites :	10
I.3.1 Monocouches	10
I.3.2 Stratifiés	11
I.3.3 Sandwichs	11
I.4 Avantages et inconvénients des matériaux composites:.....	12
I.5 Conclusion.....	13
Chapitre II :Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel «FGM»	
II.1 Introduction	14

II.2	Historique du développement des matériaux à gradient évalué	14
II.3	Différents types des matériaux à gradient évalué	17
II.3.1.	Composition chimique des matériaux à gradient évalué [15-16].....	18
II.3.2.	Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité [15-16].....	19
II.3.3.	Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure [15-16]	20
II.4	Processus de traitement des matériaux à gradient évalué :	23
II.4.1.	Dépôt physique en phase vapeur	24
II.4.2.	La synthèse auto-propagée à haute température (SHS)	25
II.4.3.	Coulage en bande (The Tape Casting)	25
II.4.4.	La métallurgie des poudres	26
II.4.5.	Coulée par centrifugation	26
II.4.6.	Frittage et Infiltration	26
II.5	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM	26
II.5.1.	Fonction de puissance P-FGM	27
II.5.2.	Fonction sigmoïde S-FGM.....	28
II.5.3.	Fonction exponentielle E-FGM.....	29
II.6	Conclusion	30
 Chapitre III : Nanosciences des matériaux et nanotechnologies		
III.1	Introduction	31
III.2	Les nanomatériaux :	31
III.3	Classifications des nanomatériaux :	32
III.3.1	Classifications des nanomatériaux selon leur origine :	32
III.3.1.1	Nanomatériaux naturels:	32
III.3.1.2	Nanomatériaux artificiels.....	33
III.3.2	Classifications des nanomatériaux selon leur taille :	34
III.3.3	Classifications des nanomatériaux selon leur composition chimique:.....	35
III.3.3.1	Nanomatériaux à base de métal	35

III.3.3.2	Nanomatériaux à base d'oxyde métallique	35
III.3.3.3	Nanomatériaux à base de carbone.....	36
III.3.3.4	Nanomatériau à base de zéolithe et de silice	36
III.3.3.5	Nanomatériaux semi-conducteurs.....	36
III.3.3.6	Nanomatériaux composites	37
III.3.3.7	Nanomatériaux polymères	37
III.4	Procédés de fabrication des nanomatériaux.....	37
III.4.1	Procédés par voie physique	38
III.4.1.1	L'évaporation/condensation.....	38
III.4.1.2	Pyrolyse laser	39
III.4.1.3	L'ablation au laser	40
III.4.1.4	Décharge électrique	41
III.4.2	Procédés par voie chimique.....	42
III.4.2.1	Le procédé sol-gel.....	42
III.4.2.2	Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD).....	43
III.4.2.3	Auto-assemblage moléculaire (MSA).....	43
III.4.3	Procédés par voie mécanique	44
III.4.3.1	Technique mécano synthétique.....	44
III.4.3.2	Consolidation et densification.....	44
III.4.3.3	Les techniques de forte déformation.....	44
III.5	Méthode de calcul des nanostructures	45
III.6	Avantage et inconvénient de la nanotechnologie	48
III.7	Conclusion.....	49
 Chapitre IV : Comportements des plaques fonctionnellement graduées		
IV.1	Introduction	50
IV.2	Elasticité linéaire :	51
IV.2.1	Tenseur d'élasticité :	51

IV.2.1.1	Matériau anisotrope	52
IV.2.1.2	Matériau monoclinique	53
IV.2.1.3	Matériau orthotropique	53
IV.2.1.4	Matériau transversalement isotrope	53
IV.2.1.5	Matériau isotrope	54
IV.2.2	Termes de rigidité élastique	54
IV.2.3	Théories des plaques élastiques :	55
IV.2.3.1	Définitions et hypothèses :	55
IV.2.3.2	Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)	56
IV.2.3.3	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin (FSDT)	58
IV.2.3.4	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)	59
IV.3	Visco-élasticité linéaire:	62
IV.3.1	Essais mécaniques	62
IV.3.1.1	.Essai de fluage et recouvrance de la déformation:	62
IV.3.1.2	Essai de relaxation et effacement des contraintes:	64
IV.3.2	Principe de superposition de Boltzmann(1867)	65
IV.3.3	Modèles rhéologiques :	66
IV.3.3.1	Modèle de Kelvin-Voigt	67
IV.3.3.2	Modèle de Kelvin-Voigt généralisé	69
IV.3.3.3	Modèle de Maxwell	69
IV.3.3.4	Modèle de Maxwell généralisé	71
IV.3.3.5	Solide linéaire standard	72
IV.3.3.6	Viscoélasticité harmonique	74
IV.3.3.7	L'amortissement visqueux élastique	77
IV.4	Conclusion	81

Chapitre V : Modèles de fondation : approche théorique

V.1	Introduction	82
V.2	Modèles linéaires	82
V.2.1	Le modèle de Winkler	82
V.2.1	Le modèle de Kelvin-Voigt	83
V.2.2	Le modèle de Maxwell	84
V.2.3	Le modèle de Zener	85
V.2.4	Le modèle de Poynting-Thomson	86
V.2.5	Le modèle de Burger	88
V.2.6	Le modèle de Filonenko – Borodich	90
V.2.7	Le modèle de Hetényi	91
V.2.8	Le modèle de Pasternak	92
V.2.9	Le modèle de Kerr	95
V.2.10	Le modèle de Vlasov	96
V.2.11	Le modèle demi-espace de Boussinesq	98
V.2.12	Le modèle de Reissner	99
V.3	Modèles discrets	100
V.4	Modèles multicouches	101
V.5	Modèles renforcés	102
V.6	Modèles non linéaires	103
V.7	Domaines d’applications	104
V.8	Conclusion	105

Chapitre VI : Modélisation des nanoplaques FGM viscoélastique reposant sur des fondations viscoélastiques

VI.1	Introduction	106
VI.2	Formulation du problème	108
VI.2.1	Le champ de déplacement	109

VI.2.2	Le champ de déformation.....	111
VI.2.3	Les relations constitutives	112
VI.2.4	Les équations du mouvement:.....	114
VI.3	Solution analytique	119
VI.4	Conclusion.....	125
Chapitre VII :Résultats et discussions		
VII.1	Introduction.....	126
VII.2	Validation analytique	126
VII.3	Étude paramétrique	129
VII.4	Conclusion.....	153
Conclusion générale et perspectives.....		155
Références bliographiques.....		157

Liste des Figures

Figure I.1 Représentation schématique d'un matériau composite [2]	6
Figure I.2 Types de matrice	6
Figure I.3 Types de renfort.....	9
Figure I.4 Matériau composite monocouche [5]	10
Figure I.5 Matériau composite stratifié [6]	11
Figure I.6 Matériau composite sandwich [4]	11
Figure I.7 Mécanismes de rupture d'un matériau composite [1].....	13
Figure II.1 Les principaux domaines d'utilisation des FGM.....	16
Figure II.2 Variation continue des propriétés matérielles d'un FGM.....	17
Figure II.3 Schéma de l'excision à gradient de porosité [15-16].....	20
Figure II.4 Schéma de principe d'une partie cylindrique soumis à	21
Figure II.5 Schéma de microstructure classé [15-16]	22
Figure II.6 Classification matériaux à gradient fonctionnel	23
Figure II.7 Structures des FGMs.....	24
Figure II.8 Principe de la méthode coulage en bande [20]	25
Figure II.9 Géométrie d'une plaque FGM	27
Figure II.10 La variation du module d'Yong dans une plaque P-FGM.....	28
Figure II.11 La variation du module d'Yong dans une plaque S-FGM.....	29
Figure II.12 La variation du module d'Yong dans une plaque E-FGM.....	30
Figure III.1 Exemples d'objets manufacturés ou présents dans la nature à l'échelle nanométrique [34]	33
Figure III.2 Classification selon la dimensionnalité des nanomatériaux [33]	34
Figure III.3 Méthodes de fabrication des nanomatériaux	38
Figure III.4 Principe d'un réacteur de pyrolyse laser [70].....	40
Figure III.5 Schéma de principe de l'ablation laser [72].....	41
Figure III.6 Synthèse du processus sol-gel	42
Figure IV.1 Géométrie d'une plaque	56
Figure IV.2 la plaque avant et après déformation (Model de Kirchhoff) [94].....	57
Figure IV.3 la plaque avant et après déformation (Reissner-Mindlin) ..	59
Figure IV.4 la plaque avant et après déformation (TSDDT)	60
Figure IV.5 Essai de fluage-recouvrance	63
Figure IV.6 Essai de relaxation-effacement.....	64

Figure IV.7 Principe de Boltzmann	65
Figure IV.8 Modèles rhéologiques élémentaires	67
Figure IV.9 Modèle Kelvin-Voigt.....	67
Figure IV.10 Modèle Kelvin-Voigt.....	68
Figure IV.11 Modèle du Kelvin-Voigt généralisé	69
Figure IV.12 Modèle du Maxwell.....	70
Figure IV.13 Relaxation du modèle Maxwell [107]	71
Figure IV.14 Modèle du Maxwell généralisé	72
Figure IV.15 Modèle de Zener.....	73
Figure IV.16 Modèle de Poynting-Thomson	73
Figure IV.17 Modèle de Burgers	74
Figure IV.18 Représentation du déphasage contrainte-déformation.....	75
Figure IV.19 Illustration de l'effet de l'amortissement sur la réponse d'un système [108] ...	77
Figure IV.20 Schéma d'un oscillateur avec un régime libre.....	78
Figure IV.21 Réponse d'un oscillateur en fonction de l'amortissement [109].....	79
Figure V.1 modèle de Winkler [111]	83
Figure V.2 modèle de Kelvin Voigt [111]	84
Figure V.3 modèle de Maxwell [111]	85
Figure V.4 modèle de Zener [111]	86
Figure V.5 modèle de Poynting-Thomson [111].....	87
Figure V.6 modèle de Burger [111]	89
Figure V.7 Fondation à un paramètre [111]	90
Figure V.8 Fondation à deux paramètres [111].....	90
Figure V.9 Profils de déplacement de surface du modèle de Filonenko-Borodich [131].....	91
Figure V.10 modèle de Hetenyi [111].....	92
Figure V.11 Modèle de Pasternak (1954): (a) modèle de base, (b) état de contrainte de l'élément infinitésimal de la couche de cisaillement, et (c) forces agissant sur l'élément de couche de cisaillement [131].....	93
Figure V.12 modèle viscoélastique de Pasternak [111].	94
Figure V.13 modèle généralisé de Pasternak [111].....	95
Figure V.14 modèle de Kerr [111]	96
Figure V.15 modèle de Vlasov [146]	97
Figure V.16 modèle de demi-espace	98

Figure V.17 la fondation discrète de Winkler	100
Figure V.18 la fondation discrète de Kelvin-Voigt	101
Figure V.19 (a) Modèle continu à deux couches ; (b) Modèle discret à deux couches	102
Figure V.20 Modèle à trois couches d'une voie ferrée comprenant une masse de ballast ...	102
Figure VI.1 Géométrie d'une nano-plaque viscoélastique FG reposant sur une fondation viscoélastique	108
Figure VI.2 Convergence de la fonction proposée $f(z)$ avec celles de (FSDT), (TSDT), (SSDT)	110
Figure VI.3 Convergence de la dérivé de la fonction proposée $f'(z)$ avec celles de (FSDT), (TSDT), (SSDT).....	111
Figure VII.1 la variation du coefficient d'amortissement ξ en fonction du paramètre non local μ , pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement C_d de la fondation viscoélastique, de l'indice de matériau p , sous différentes conditions aux limites.....	132
Figure VII.2 la variation du rapport d'amortissement ζ en fonction du paramètre non local μ pour différentes valeurs de l'indice de fraction volumique p et du coefficient d'amortissement ψ du matériau viscoélastique.....	136
Figure VII.3 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents coefficients de rigidité de Winkler K_w avec un coefficient de Pasternak nul $K_p=0$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....	138
Figure VII.4 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents coefficients de rigidité de Winkler K_w avec un coefficient de Pasternak $K_p=5$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....	139
Figure VII.5 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents coefficients de rigidité de Winkler K_w avec un coefficient de Pasternak $K_p=10$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....	141
Figure VII.6 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents parametreq non locales μ avec un rapport de l'élancement $a/h=5$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....	143

Figure VII.7 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents parametreq non locales μ avec un rapport de l'élancement $a/h=20$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....145

Figure VII.8 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la vibration libre de la nanoplaque isotrope et ce pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique Ψ du matériau qui constitue la plaque ; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....147

Figure VII.9 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la vibration libre de la nanoplaque FGM ($p=1$) et ce pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique Ψ du matériau qui constitue la plaque ; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....149

Figure VII.10 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la vibration libre de la nanoplaque FGM ($p=5$) et ce pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique Ψ du matériau qui constitue la plaque ; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.....150

Figure VII.11 Effet du paramètre de Pasternak K_p sur la variation du rapport d'amortissement ξ de la nanoplaque et ce pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement C_d , Ψ .
.....152

Figure VII.12 Effet du paramètre de Winkler K_w sur la variation du rapport d'amortissement ξ de la nanoplaque et ce pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement C_d , Ψ .
.....152

Figure VII.13 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la variation du rapport d'amortissement ζ de la nanoplaque FGM sous différentes conditions aux limites.
.....153

Liste des Tableaux

Tableau IV.1 Différentes fonctions de déformation par cisaillement transverse.....	61
Tableau VI.1 Les fonctions admissibles $X_i(x)$ et $Y_i(x)$ [103].....	121
Tableau VII.1 Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles ($\Omega = \omega h \sqrt{\rho/G}$) d'une plaque simplement soutenue avec différents valeurs du paramètre.....	126
Tableau VII. 2 Comparaison de la fréquence naturelle ω de la plaque sandwich EGM avec ($b/a=2, K_w=50$ et $K_p =10$)	128
Tableau VII.3 Effet de l'indice de la fraction volumique, le paramètre d'échelle et l'amortissement externe de la fondation sur la fréquence propre de la nano plaque avec ($\psi=0.01, K_w=50$ et $K_p =10$).....	130

Liste des Notations

a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
h	Épaisseur de la plaque
$g(z)$	La fraction volumique de la plaque
$P(z)$	Les propriétés matérielles de la plaque
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_m	Module de Young du métal
E_c	Module de Young de céramique
$\rho(z)$	La densité du matériau en fonction de « z »
ρ_m	La densité du métal
ρ_c	La densité de la céramique
ν	Coefficient de poisson de la plaque
t_{kl}	Le tenseur des contraintes non local
f_i	La densité de la force du corps
σ_{kl}	Le tenseur de contrainte local
$\alpha(x' - x , \varsigma)$	La fonction de base non locale
ς	La constante matérielle
a_0	Une longueur caractéristique interne
l	Une longueur caractéristique externe
e_0	Constante appropriée à chaque matériau.
L	L'opérateur différentiel linéaire
∇	L'opérateur de Laplace
$\mu = (e_0 a_0)^2$	Le paramètre non local
N_{ij}	Efforts normaux locaux
M_{ij}	Moments de flexion locaux

N_{ij}^{nl}	Efforts normaux non locaux
M_{ij}^{nl}	Moments résultants non locaux
Q_{ij}	Les forces de cisaillement
S_{ij}	Moments induit par (f (z) -z)
i,j,k,l,m,n	Nombres naturels
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Contraintes normales
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Déformation dans la direction x, y et z
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations de distorsion
C_{ijkl}	Tenseur des modules d'élasticité
S	Tenseur de complaisance
(λ, μ)	Coefficients élastiques de Lamé
G	Le module de cisaillement
u, v, w	Les composantes du champ de déplacement
u_0, v_0, w_0	Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque
w_b, w_s	Les composantes du champ de déplacement de flexion
ϕ_x, ϕ_y	Les rotations autour des axes x et y
$f(z)$	Fonctions de déformation par cisaillement transverse
$H(t)$	La fonction Heaviside
$J(t)$	La fonction de fluage ou de complaisance
$R(t)$	Le module de relaxation
σ_e	Contrainte élastique du ressort
σ_v	Contrainte visqueuse de l'amortisseur
ε_e	La déformation élastique du ressort
ε_v	La déformation visqueuse de l'amortisseur
η	Le facteur de dissipation ou le coefficient de viscosité

φ	L'angle de déphasage
τ	Une constante de temps caractéristique
E^*	Module complexe (raideur complexe)
E_1	Le module de stockage
E_2	Le module de perte
J^*	Complaisance complexe
J_1	La complaisance de stockage
J_2	La complaisance de perte
F_d	La force dissipative
c	Le coefficient d'amortissement
v	Vitesse du mouvement
m	La masse d'un oscillateur mécanique
k	La rigidité d'un oscillateur mécanique
ω	La fréquence naturelle angulaire du système ou la pulsation propre (rad/ s)
ξ	Le taux d'amortissement (s^{-1})
T_n	Pseudo-période
$P(x,t)$	La force de réaction de la fondation
T	La force de traction
D	La rigidité a la flexion
δ	La fonction de Dirac.
$\delta u, \delta v, \delta w$	Champ virtuel de déplacement
δU	Variation de l'énergie de déformation
δW_{fe}	Variation de l'énergie potentielle
δK	Variation de l'énergie cinétique
A_{ij}	Termes de rigidité en membrane de la plaque
B_{ij}	Termes de rigidité de couplage de la plaque

D_{ij}	Termes de rigidité de flexion de la plaque
A_{ij}^f	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
B_{ij}^f	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
D_{ij}^f	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
F_{ij}^f	Termes de rigidité de la plaque en cisaillement
I_i	Inerties de masse
f_e	La force de réaction de la fondation
K_w	La rigidité de la fondation de Winkler
K_p	Le coefficient de Pasternak
C_d	Le paramètre d'amortissement
$[U_{ij}, V_{ij}, W_{bij}, W_{sij}]$	Le vecteur des déplacements
$[L]$	La matrice globale du système
K_w	Le paramètre de Winkler non dimensionnel
K_p	Le paramètre de Pasternak non dimensionnel
Ψ	Le coefficient de la viscosité non dimensionnel
C_d	L'amortissement non dimensionnel
D_c	La rigidité non dimensionnelle
ω	La fréquence propre non dimensionnelle
Ω	La fréquence non amortie

« *INTRODUCTION GENERALE* »

Introduction générale

L'évolution technologique favorise de plus en plus des innovations variées et potentiellement majeures. Considérons tout d'abord les matériaux qui ont connus de grandes évolutions au fil des dernières années.

Récemment, les matériaux composites à fibres ou les FGM (Matériaux à gradient évalué) ont suscité beaucoup d'attention en raison de leurs multiples avantages. Leurs propriétés exceptionnelles et intéressantes admettent une meilleure personnalisation et adaptation à des tâches spécifiques. Cette nouvelle famille de matériaux est appropriée à l'association des plusieurs matériaux en vue de tirer parti du meilleur de chaque matériau.

Les matériaux composites classiques ou à base de fibre présentent une interface « abrupte » entre le renfort et la matrice, ce qui peut provoquer des fissures qui conduisent à la rupture de la pièce. De ce fait, une nouvelle gamme de matériaux composites « Functionally Graded Material » a été conçue pour présenter une variation spatiale particulière de leurs propriétés. Le concept du FGM a été inventé en premier temps par un groupe scientifique japonais en 1984, dans le cadre d'un projet aéronautique. Ces FGM sont caractérisés par une variation continue de leurs caractéristiques structurales ainsi que leurs propriétés fonctionnelles, ce qui permet de limiter la fragilisation et d'améliorer les performances fonctionnelles des pièces structurales.

Il est donc essentiel de disposer des moyens de calcul, les plus efficaces et précis possible, qui respectent les lois de la physique, afin d'évaluer les déplacements, les déformations, les contraintes normales et tangentielles liées aux différents chargements, qui visent à estimer la durabilité des structures en FGM. À cet égard, plusieurs études ont été effectuées et rapportées dans la littérature, au cours de ces dernières années.

Plusieurs théories ont été développées pour la modélisation des éléments structuraux tels que les poutres et les plaques, la théorie classique des plaques (CPT : Classical plate theory), qui néglige les effets du cisaillement transversal, fournit des résultats raisonnables pour les plaques et les poutres minces; cependant, elle sous-estime les déplacements et surestime les fréquences ainsi que les charges critiques du flambement pour les plaques épaisses.

Ainsi, la déformation transversale est un aspect important dans l'analyse des structures composites. Les théories de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT : the first-order shear deformation theory) basées sur la théorie de Reissner – Mindlin et Timoshenko

tiennent compte des effets du cisaillement transversal au moyen d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Comme la FSDT ne satisfait pas les conditions de nullité des contraintes de cisaillement aux faces supérieure et inférieure de la plaque, des facteurs de correction du cisaillement sont nécessaires pour la variation irréaliste de la déformation/contrainte de cisaillement dans l'épaisseur. La théorie d'ordre supérieur a été développée dans le but d'affiner la cinématique simplifiée du modèle Reissner – Mindlin en exprimant les relations à l'aide de polynômes ou de fonctions trigonométriques d'ordre supérieur. Lors de l'utilisation de la théorie de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur, les déplacements des plaques épaisses et la variation des contraintes de cisaillement transversales sont plus précises.

Au cours des dernières années, en raison du développement rapide de la technologie, en particulier dans le domaine des nanostructures qui ont des propriétés mécaniques supérieures et un grand nombre d'applications dans l'industrie, les chercheurs ont été incités à prendre en compte les effets d'échelle et les forces atomiques afin d'obtenir des solutions d'une précision acceptable. La théorie non locale d'Eringen est basée sur cette hypothèse qui suggère que les contraintes en un point de référence du corps dépendent non seulement des déformations en ce point mais aussi des déformations en tous les autres points du corps. Par conséquent, l'analyse des vibrations des nanostructures est devenue un sujet d'intérêt majeur pour les recherches actuelles et futures.

La réduction des vibrations mécaniques et du bruit est l'une des préoccupations majeures des divers domaines de l'ingénierie. Pour remédier à ce problème, il existe des matériaux viscoélastiques qui possèdent des propriétés mécaniques d'un matériau amortissant. Leur comportement viscoélastique permet une amélioration importante de la réponse dynamique des structures, tout en réduisant l'amplitude des contraintes appliquées. Il est donc indispensable de bien connaître le comportement mécanique de ces matériaux afin de les bien caractérisés et évalués.

Le travail proposé vise à proposer une nouvelle approche numérique pour la caractérisation du comportement viscoélastique des nanoplaques en FGM. La théorie d'ordre élevé des plaques est utilisée, à travers la proposition d'une nouvelle fonction de gauchissement pour la distribution des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur.

Afin de mener à bien les objectifs décrits précédemment, les travaux ont été réalisés en sept chapitres majeurs.

Le chapitre I et II présentent une synthèse bibliographique sur les matériaux composites à fibres et FGM, leurs procédés technologiques et les différentes propriétés mécaniques et physiques de leur structure, ainsi de revoir les différentes recherches pertinentes qui vont contribuer à la compréhension du comportement de ces matériaux et de les bien caractériser.

Le troisième chapitre, est consacré à une présentation d'un bilan sur la classification des nanomatériaux ainsi que leurs différents procédés de fabrication, leurs avantages et inconvénients. Il examine également la théorie des champs du continuum non local des matériaux nanostructures établi par Eringen.

Les chapitres IV et V présentent une revue bibliographique en détaillant les différentes approches et modèles rhéologiques qui servent à caractériser le comportement élastique ou viscoélastique des plaques FGM ou leur support pour mener à bien le calcul, qui tente de montrer leurs avantages et inconvénients. Ils traitent également l'avantage de l'utilisation des matériaux et des fondations viscoélastiques dans l'industrie et les structures d'ingénierie pour le contrôle et la réduction de la transmission des vibrations.

Le chapitre VI est consacré à étudier le phénomène du gauchissement sous vibration libre avec une nouvelle théorie des plaques enrichie par la présence d'une nouvelle fonction de gauchissement des sections en se basant sur le principe des travaux virtuels permettant d'établir des équations d'équilibre et des conditions aux limites des plaques. Le chapitre VI consiste à mettre en œuvre une méthode analytique pour le cas bidimensionnel. L'objectif est d'examiner les conditions pour lesquelles les équations d'équilibre sont vérifiées.

Afin de valider notre développement présenté dans le chapitre précédent, d'une part, des études comparatives largement détaillées dans le septième chapitre. Un code de calcul a été établi pour ces fins. Les vibrations sont l'un des chargements les plus influant sur le comportement des parties structurales. Les résultats obtenus ont été confrontés et comparés avec ceux de la littérature notamment avec ceux de J.N.Reddy et Sobhy. D'autre part, ce chapitre fournit des résultats et des courbes d'études bien détaillé. On essayera de décrire la configuration pour prédire et apprécier en détail la répartition du cisaillement des plaques par une étude purement analytique. Cette méthode est construite avec de divers modèles de plaques qui incluent ou non le gauchissement des sections.

Le présent travail se termine par une conclusion générale où on souligne l'efficacité de la méthode utilisée dans les calculs des nanomatériaux FGM et des perspectives envisagées à l'avenir.

CHAPITRE I
«GENERALITES
SUR LES MATERIAUX
COMPOSITES»

Généralités sur les matériaux composites

V.1 Introduction

Avec un marché en continuelle expansion, le secteur industriel annonce un développement spectaculaire et une croissance rapide et continue. La connaissance approfondie des applications existantes notamment les matériaux concepteur qui sert à maîtriser ses avantages fonctionnels est la clé de l'innovation technique. Grâce à ce procédé, les chercheurs ont eu l'opportunité de développer des nouveaux matériaux de pointe plutôt nouvelle association de matériaux (dit matériau composite), permettant de perfectionner la qualité de la matière tant au niveau de la rigidité qu'à la masse volumique.

Dans un sens large, un matériau composite peut être défini comme une structure non homogène issue d'une combinaison de deux ou plusieurs matériaux différents, qui donne un produit possède des propriétés supérieures aux propriétés de chacun des matériaux constitutifs (souvent plus résistant). Les matériaux composites disposent des performances remarquables par rapport aux matériaux homogènes classiques notamment : légèreté, liberté de forme, rigidité importante et de leur excellente durabilité, ce qui a favorisé l'utilisation de ces matériaux dans des nombreuses composantes structurales pour des applications plus en plus varié (automobile, génie biomédical, l'aéronautique, les transports, génie civil, etc.).

V.2 Les composants élémentaires des matériaux composites

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de nature différente, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée la matrice. La phase discontinue est appelée le renfort ou matériau renforçant [1]. Pour cela, un agent de liaison, appelé interface, est nécessaire (**Fig I.1**). Des charges et des additifs peuvent être ajoutés au composite sous forme d'éléments fragmentaires, de poudres ou liquide, afin de modifier une propriété de la matière à laquelle on l'ajoute (par exemple la tenue aux chocs, la résistance aux UV, la résistance au feu...) [2]. Exemples de systèmes composites : béton armé : béton renforcé en acier, le Glare : aluminium et de fibre de verre et époxy renforcé de fibres de graphite, etc.

Les propriétés des matériaux composites résultent :

1. Des propriétés des matériaux constitutants ;
2. De leur distribution géométrique ;
3. De leurs interactions, etc.

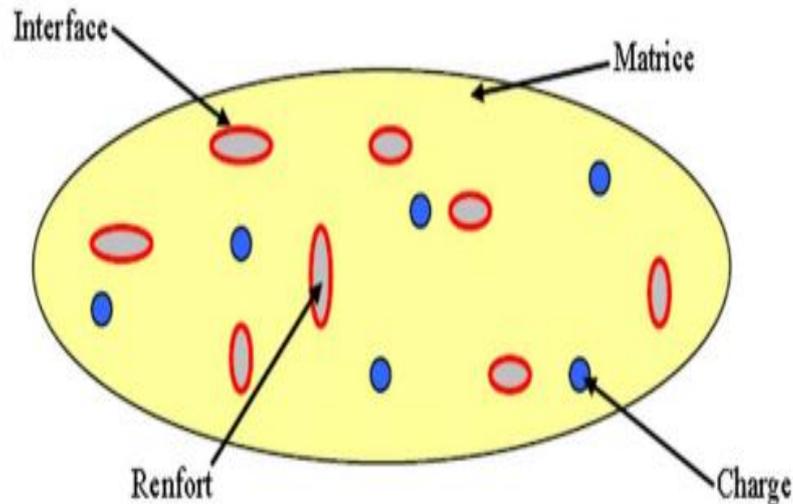


Figure I.1 Représentation schématique d'un matériau composite [2]

I.2.1 Matrice

Désigne la matière solide qui entoure les renforts pour former une masse compacte. Le premier rôle de la matrice est de maintenir les renforts dans une forme compacte et de donner la forme voulue au produit final. Elle sert également à protéger les fibres contre l'abrasion et un environnement agressif, contrôler le fini de surface et assurer le transfert de charges entre les fibres. Le solide formant la matrice peut être d'origine organique ou minérale [2] (**Fig I.2**).

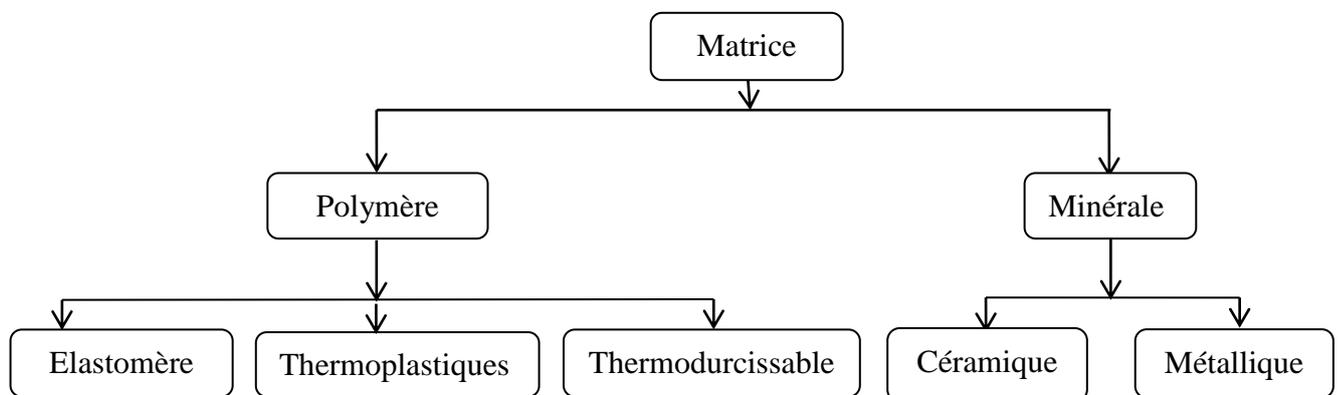


Figure I.2 Types de matrice

Cependant, les polymères dans le domaine des composites, ont souvent joué, avec succès, un rôle de substitution aux matériaux métalliques et céramiques, du fait de leur faible densité et facilité de mise en œuvre (être assez déformable) on considère généralement deux grandes catégories de polymères : les thermoplastiques (TP) et les thermodurcissables (TD).

La structure des TP se présente sous forme de chaînes linéaires, il faut les chauffer pour les mettre en forme (les chaînes se plient), et les refroidir pour les fixer (les chaînes se bloquent). Cette opération est réversible.

Les principales matrices TP utilisées (possédant toute une tenue en température supérieure à 100 °C) sont les suivantes :

- Polyamide (PA) : tenue au choc, bonne résistance à la fatigue et aux hydrocarbures;
- Polytéréphtalate d'éthylène et de butylène (PET, PBT): bonne rigidité, bonne ténacité;
- Polycarbonate (PC) : bonne tenue au choc ;
- Polysulfure de phénylène (PPS) : résistance à l'hydrolyse ;
- Polyoxyméthylène (POM) : bonne tenue à la fatigue ;
- Polysulfurés (PSU et PPS): bonne stabilité chimique et à l'hydrolyse, peu de fluage;
- Polypropylène (PP) : peu onéreux et assez stable en température, mais combustible.

La structure des TD à la forme d'un réseau tridimensionnel qui se ponte (double liaison de polymérisation) pour durcir en forme de façon définitive, lors d'un échauffement. La transformation est donc irréversible.

Les principales matrices TD utilisées sont les suivantes :

- les polyesters insaturés (vinylesters, polyesters condensés) : bonne rigidité, bonne tenue à la fatigue et un bon comportement à la corrosion, mais sont combustibles.
- les résines époxy (ou époxydes) : bonne propriété mécanique, excellente résistance chimique, une sensibilité à la fissuration
- les résines de condensation (phénoliques, aminoplastes, furaniques) : bonne résistance aux agents chimiques, bonne tenue au fluage, mais ils sont fragiles, sensibles à l'humidité et difficiles à mettre en œuvre.

Des produits chimiques (**charges et additifs**) sont aussi incorporés à la résine pour lui conférer certaines caractéristiques mécaniques et physiques :

I.2.2 Les charges [5]

L'objet de la charge renforçant est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la résine, ou diminuer le coût des résines en conservant les performances des résines. En général ces charges sont des microbilles ou des particules (poudre) (quelques dizaines de %). Les principales charges utilisées sont :

- microbille en : verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc.
- des poudres ou paillettes métalliques : cuivre, fer, aluminium, etc.
- des particules de carbone (noir de carbone).

I.2.3 Les additifs [5]

Ils sont nécessaires pour assurer une adhérence suffisante entre le renfort fibreux et la matrice et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés. Les additifs se trouvent en faible quantité (quelques % et moins) et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage.
- pigments et colorants.
- agents anti-retraits.
- agents anti-ultraviolets.
- accélérateur.
- catalyseur.

I.2.4 Renforts

Ce sont des particules d'environ 50 microns de diamètre. Il existe des renforts fibre courte (de l'ordre du mm), des renforts fibre moyenne ou mi-longue (de l'ordre du cm) et des renforts fibre longue (où les fibres font environ la taille de l'échantillon). Il représente l'armature, le squelette du matériau et assure sa tenue mécanique (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.) [3]. Différents types de renforts sont présentés dans l'organigramme ci-dessous (**Fig I.3**).

Les renforts à fibres se présentent sous diverses formes commerciales :

- sous forme linéique (fils, mèches, etc.),
- sous forme de tissus surfaciques (tissus simples, mats, etc.),
- sous forme multidirectionnelle (tresses, tissus complexes, etc.).

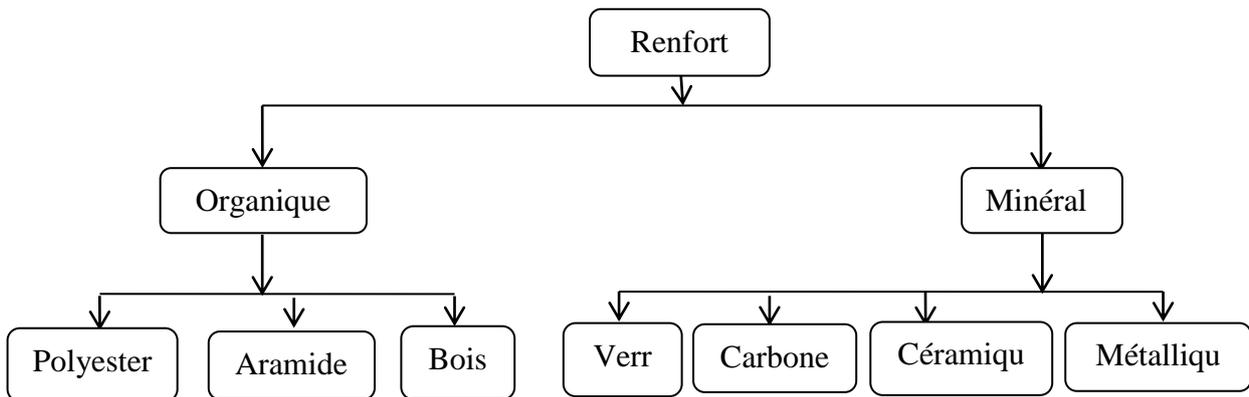


Figure I.3 Types de renfort

I.2.4.1. Les fibres les plus utilisées dans l'industrie sont :

- **Fibre de verre** obtenue à partir de silice et d'additifs. Le verre est coulé en fusion à 1500 °C à travers une filière en platine-rhodium ; après refroidissement, les filaments sont étirés pour obtenir des fibres continues de 3 à 20 mm. Suivant l'application à laquelle elles sont destinées, les fibres de verre sont réparties en trois qualités :

- Fibre **E** pour les composites grands diffusions (GD) ;
- Fibre **D** pour les applications dans la construction électrique ;
- Fibre **R** pour les composites hauts performances (HP).

- **Fibre de carbone** : les fibres de carbone possèdent de très bonnes caractéristiques mécaniques (spécialement une excellente tenue en température), une faible masse volumique, et une bonne conductibilité. L'utilisation de la fibre de carbone reste limitée aux secteurs de l'aéronautique et des sports et loisirs, à cause du prix. Cependant, les fibres de carbone souffrent aussi de certains handicaps techniques qui limitent également leur utilisation pour des structures composites tels que : l'allongement à la rupture est insuffisant (inférieur à 2 %) comparé à celui des fibres de verre et d'aramide (3 à 4 %) ; et aussi une caractérisation encore insuffisante pour permettre une conception fiable à Prix modéré.

- **Fibre aramide 'Kevlar'** : ces fibres sont des Polyamides aromatiques, ces fibres ont une mauvaise tenue en compression, mais une bonne résistance au choc et à la fatigue. La fibre d'aramide (on la nomme souvent « Kevlar », qui est la marque de son créateur, Dupont de Nemours.) utilisée dans les protections balistiques gilets pare-balles. En plus de ces deux constituants de base, il faut rajouter : une interface qui assure la compatibilité renfort-matrice, qui transmet les contraintes de l'un à l'autre sans déplacement relatif [3].

• **Fibres des céramiques** : ces fibres sont élaborées par dépôt chimique en phase vapeur sur un fil support. Ces caractéristiques sont maintenues jusqu'à des températures pouvant aller de 500 à 1 000 °C. Les fibres céramiques sont généralement :

- Fibres de **bore** (B)
- Fibres de **carbure** de silicium (SiC),
- Fibres de **bore-carbure** de **silicium**, appelées BorSiC.

Du fait, ces matériaux sont essentiellement utilisés notamment les fibres SiC et BorSiC avec des matrices métalliques ou des matrices céramiques, conduisant à des matériaux composites de coûts très élevés, utilisés pour les aubes de compresseur, les turbines, etc.

I.2.5 L'interface

La zone de contact entre deux phases (fibres, matrice) possède une épaisseur allant de quelques nanomètres à quelques micromètres (ou plus dans de rares cas), on parle alors d'interface. C'est une zone qui possède des propriétés différentes et parfois meilleures que celles des matériaux qui l'entourent. Elle joue encore un rôle dans la transmission des propriétés mécaniques depuis la matrice vers le renfort solide [4].

V.3 Architecture des matériaux composites :

I.3.1 Monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite (**Fig I.4**). Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres longues (unidirectionnelles UD, répartis aléatoirement), à fibres tissées, à fibres courtes.

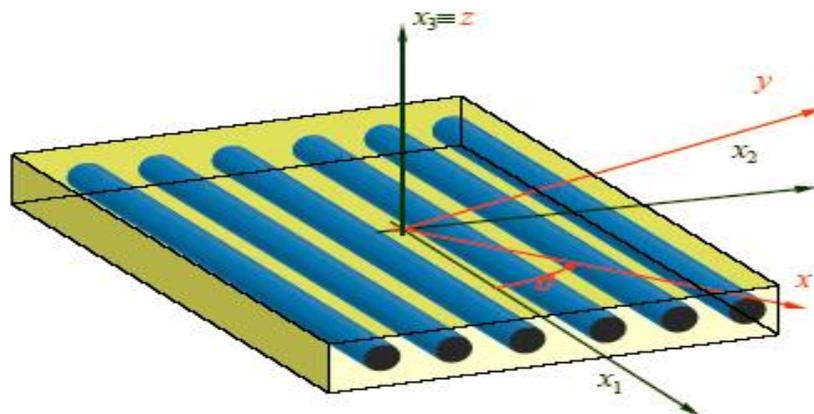


Figure I.4 Matériau composite monocouche [5]

I.3.2 Stratifiés

Un stratifié est constitué d'un empilement de monocouches ayant chacun une orientation propre par rapport à un référentiel commun aux couches et désigné comme le référentiel du stratifié (**Fig I.5**).

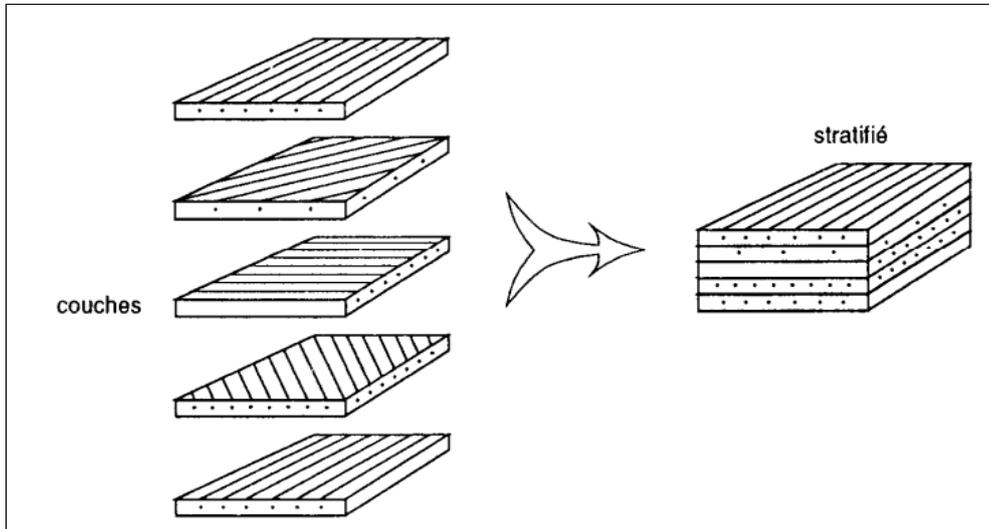


Figure I.5 Matériau composite stratifié [6]

I.3.3 Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppent une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance (**Fig I.6**). L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une grande légèreté en flexion, c'est un excellent isolant thermique.

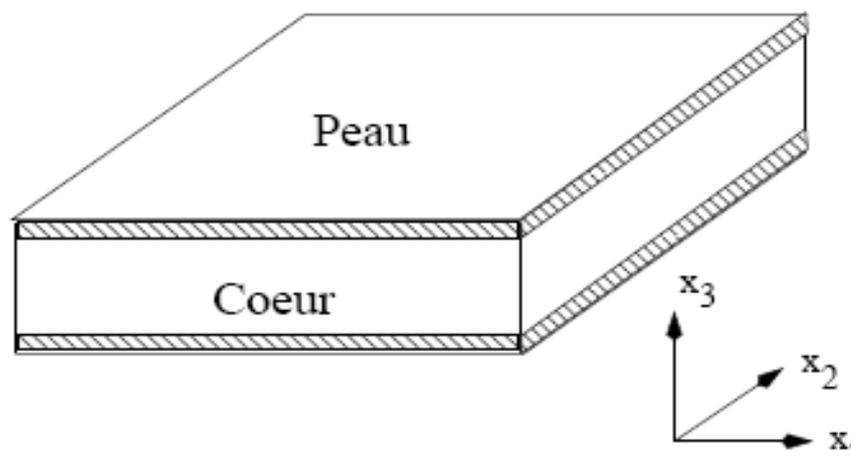


Figure I.6 Matériau composite sandwich [4]

I.4 Avantages et inconvénients des matériaux composites:

Par rapport aux matériaux traditionnels, l'utilisation des matériaux composites occupe une position majeure : dans différents domaines. En effet, ces matériaux présentent de nombreux avantages:

- La légèreté, il offre un gain énorme au niveau du poids de différentes structures réalisées.
- Très bonne tenue à la pression hydrostatique.
- Très bonne durée de vie grâce à leur bonne tenue en fatigue.
- Résistant à la corrosion.
- Possibilité de mise en forme complexe et diverse favorise un meilleur rendu esthétique.
- Confort accru : réduction des émissions sonores, anti-vibration, Isolation électrique.
- insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines.

Inconvénients qui freinent leur diffusion :

- Faible tenue au feu et résistance en température (plus faible que les métaux).
- Peinture type automobile plus difficile.
- Coût plus élevé : fluctuation des prix des matières premières et des procédés de fabrication,
- Complexité et difficulté du recyclage des thermodurcissables.
- l'hétérogénéité favorise l'apparition de défauts locaux et des dégradations du matériau composite afin de produire sa ruine, les mécanismes d'endommagement seront présentés en diverses approches selon le site où ils produisent (**Fig I.7**) :
 - Rupture des fibres ;
 - Rupture transversale ou longitudinale des matrices ;
 - Rupture de l'interface fibre matrice ;
 - Délaminage inter plis dans le cas d'un stratifié

Généralement, un mécanisme n'est pas isolé, mais divers mécanismes coexistent. Ces mécanismes se développent suivant la nature des matériaux et les conditions de sollicitations mécaniques imposées [1].

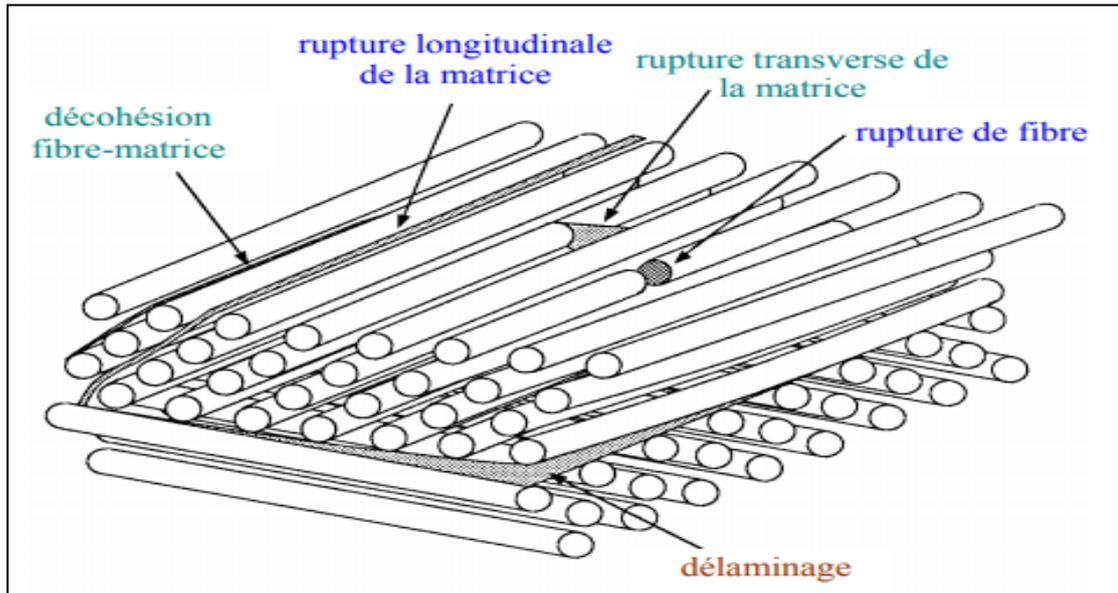


Figure I.7 Mécanismes de rupture d'un matériau composite [1]

I.5 Conclusion

Le mode de rupture le plus fréquent dans le cas des composites conventionnels est le délaminage dû à la transition brusque des propriétés des matériaux entre les matériaux discrets, en particulier dans un environnement à haute température.

Cette évolution a entraîné une baisse de la demande de ces matériaux traditionnels et une apparition des matériaux optimisés à gradient de propriété (En anglais: Functionally Graded Materials « FGM »), puisse soutenir la croissance économique (moins coûteux) et servir l'intérêt général (plus résistant).

A cet effet ; ce matériau avancé à gradient de propriété « FGM » montre une gradation à travers la profondeur de la structure c.-à-d. une transition continue des propriétés recherchés par un gradient de composition, permettre une diminution des effets nuisibles de forte concentration des contraintes issue de l'effet d'interface. Le chapitre suivant va porter une étude bibliographique sur ce matériau innovant, son comportement et différentes lois réagissant.

CHAPITRE II

***«GENERALITES SUR LES
MATERIAUX A GRADIENT
FONCTIONNEL «FGM»»***

Généralités sur les matériaux à gradient fonctionnel «FGM»

II.1 Introduction

Afin d'étudier ou d'analyser le model structural proposé, il faut bien comprendre le concept de base du matériau utilisé ; le présent chapitre consiste à identifier les caractéristiques d'un Matériau à Gradient de Propriétés Fonctionnelles «FGM» et de mettre en évidence les différentes propriétés mécaniques et thermiques de leur structure, ainsi de revoir les différentes recherches pertinentes qui vont contribuer à la compréhension du comportement de ce matériau et de le bien caractériser. Ce type des matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leur avantage de diminuer la disparité dans les caractéristiques matérielles grâce à leurs graduations fonctionnelles et continues, et leur aptitude à résister à des environnements à haut gradient de température.

II.2 Historique du développement des matériaux à gradient évalué

Les matériaux à gradient fonctionnel ou fonctionnellement gradués « FGM » sont une nouvelle gamme de matériaux composites plus avancée capable de survivre dans un environnement sévère et très exigeant caractérisé par une très haute température, sans perdre ses propriétés en cours de service.

L'idée générale des gradients structurels a été avancée pour la première fois pour les matériaux composites et polymères en 1972. Divers modèles ont été proposés pour les gradients de composition, de concentration des filaments et de polymérisation, ainsi que des applications possibles pour les structures graduées résultantes. Cependant, il n'y a pas eu de véritable recherche sur la façon de concevoir, de fabriquer et d'évaluer les structures graduées avant les années 1980 [7].

En 1985, l'utilisation d'un contrôle continu de la texture a été proposée afin d'augmenter la force d'adhérence et de minimiser la contrainte thermique dans les revêtements et les joints céramiques développés pour le moteur de fusée réutilisable. Les développeurs ont réalisé que ce contrôle continu d'une propriété pouvait être étendu à un concept plus général qui pourrait être appliqué pour conférer de nouvelles propriétés et fonctions à tout matériau en changeant progressivement sa texture ou sa composition. À cette époque, le concept d'ingrédient matériel a été introduit pour la conception de tels matériaux. En 1986, ces types de matériaux ont été

appelés "matériaux à gradient fonctionnel", qui a rapidement été abrégé en "FGM", désormais bien connu. Les FGM n'étant pas des matériaux homogènes, il a été reconnu que pour les créer, il faudrait procéder à des études approfondies en matière de méthodologie de conception et de modélisation théorique ainsi que de traitement et d'évaluation. C'est pourquoi, en 1987, un programme de recherche de cinq ans, "Études fondamentales sur la relaxation des contraintes thermiques par l'adaptation de structures graduées", a été lancé au Japon. Ce programme visait à développer des FGM pour une utilisation à haute température dans le but de les utiliser pour le plan spatial hypersonique. Depuis 1989, les résultats de ces programmes de recherche et de développement ont été diffusés dans le monde entier par le biais de documents, d'articles, de réunions internationales et de programmes d'échange. Un symposium international sur les FGM a été organisé tous les deux ans, le premier ayant eu lieu en 1990 à Sendai. En 1995, à la suite d'une discussion lors du troisième symposium international sur les FGM qui s'est tenu à Lausanne en 1994, il a été décidé de changer le nom complet en matériaux à gradient fonctionnel, car il est plus précis tant du point de vue descriptif que grammatical [7,8].

Actuellement, le concept de MGF a classé comme une technologie de pointe dans le monde entier et il s'étend à une variété de domaines d'application non seulement pour les applications mécaniques en aérospatial et l'aéronautique, mais également dans différents domaines : biomécaniques, l'électronique, l'énergie, Ingénierie, optique, chimiques et biologiques...etc. (**Fig II.1**).

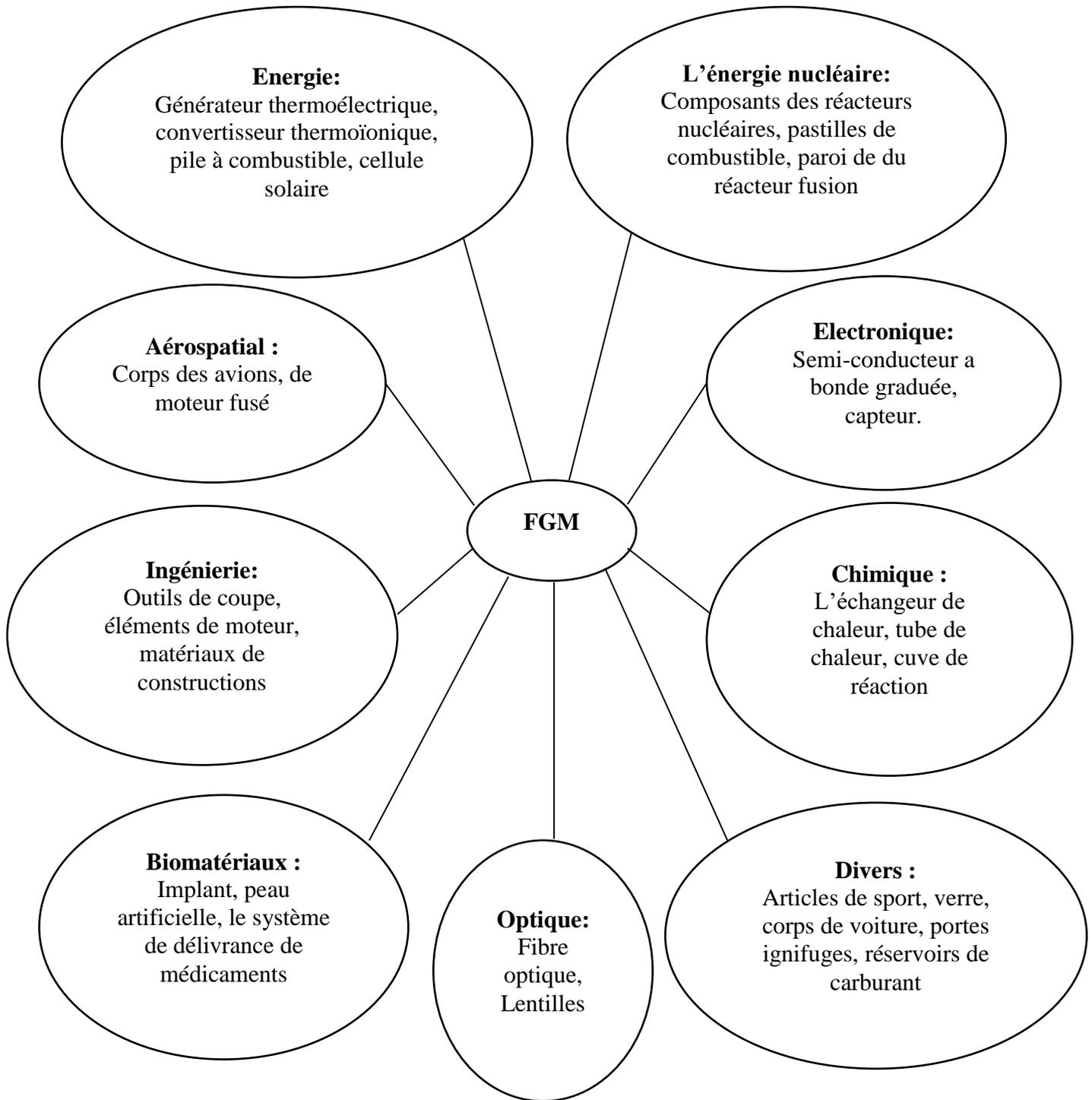


Figure II.1 Les principaux domaines d'utilisation des FGM

II.3 Différents types des matériaux à gradient évalué

Un matériau à gradient évalué (FGM) est un matériau dans lequel la composition et la structure changent graduellement à travers le volume variant selon une loi de fonction prédéterminée, entraînant une modification correspondante dans les propriétés du matériau.

Ces matériaux sont très souvent composés de céramique et métal dont les propriétés matérielles présentent un passage lisse et continu d'un matériau à un autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et l'atténuation des concentrations de contraintes (**Fig II.2**). Cela est dû au fait que le constituant céramique du matériau à gradient fonctionnel est capable de résister à des environnements de haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le constituant métallique assure une meilleure performance mécanique et réduit la possibilité d'une rupture catastrophique [9].

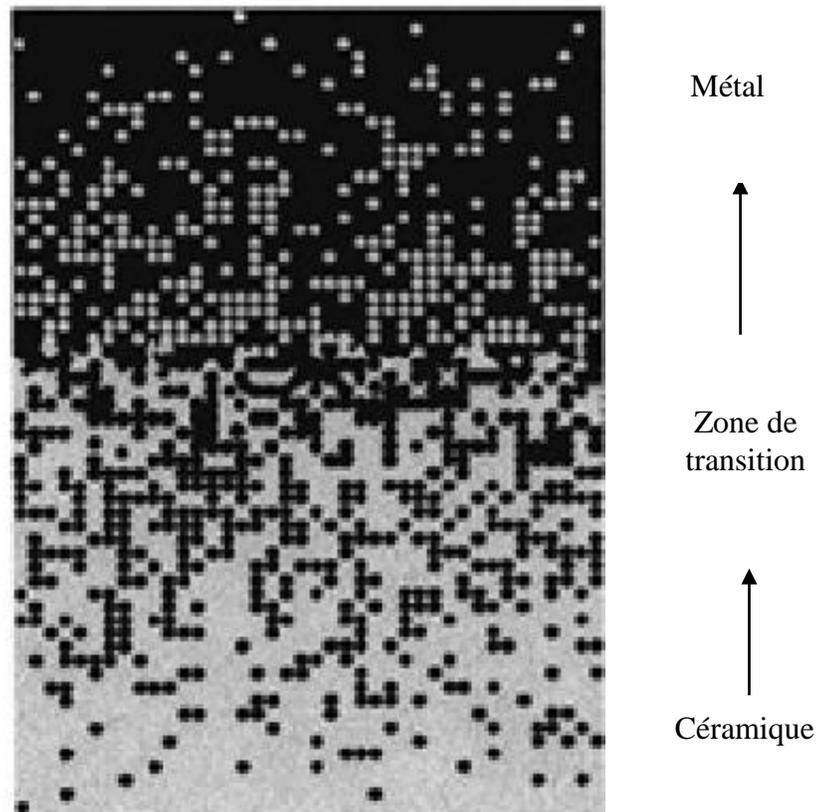


Figure II.2 Variation continue des propriétés matérielles d'un FGM

Le concept de fabrication du matériau FGM est aussi très bien développé, bien qu'il puisse y avoir une grande variété dans la conception et la fabrication des nouvelles structures. Généralement, un FGM peut également avoir divers aspects de conception soit de sa composition chimique, de son état physique ou de sa configuration géométrique, afin de bien choisir celui qui répondra le mieux à nos besoins en fonction des caractéristiques qu'il possède. Les différents types de FGM qui sont produits sont :

II.3.1. Composition chimique des matériaux à gradient évalué [15-16]

C'est le type de matériaux fonctionnellement classés, où la composition chimique varie graduellement, en fonction de la position spatiale dans le matériau. Cela pourrait se faire sous la forme d'une seule phase, ou d'un matériau multi phase. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit en une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase. Cela se produit généralement pendant le processus de frittage [10]. Le changement progressif dans la répartition des éléments chimiques en phase unique entraîne la formation du matériau à gradation fonctionnelle. Selon le diagramme de phase et les limitations thermodynamiques, lorsque certains matériaux sont ajoutés à un autre matériau, le matériau qui a été ajouté à l'autre matériau serait soluble dans ce matériau sur une gamme de conditions de composition et de mélange. Un tel matériau deviendrait ce qu'on appelle un matériau à phase unique (mais avec une composition chimique variable) en raison de la solubilité. Ce type de FGM est moins fréquent. Les matériaux fonctionnellement classés les plus couramment utilisés sont ceux avec une composition chimique polyphasée [11,12].

Les phases et la composition chimique sont faites pour varier selon le volume en vrac du matériau. Comme la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions chimiques qui aideront à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçu. Les différentes phases produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions de fabrication tels que le taux de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau.

Dans la métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre la composition de poudre requise couche par couche, puis on procède à un compactage en poudre puis à un frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront

pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieront selon la position spatiale dans le matériau à gradation fonctionnelle.

II.3.2. Matériaux à gradient fonctionnel progressif de porosité [15-16]

Le matériau à gradient fonctionnel à gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer avec la variation de la position spatiale dans le matériau en vrac. La forme et la taille des pores sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnelle (**Fig II.3**).

Ce type de matériau à gradation fonctionnelle est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer se compose de porosité à gradient fonctionnel et la porosité graduée aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de guérison de cet implant, et elle contribue également à la circulation sanguine des tissus intégrés. La porosité graduée contribue également à réduire le poids global de l'implant et à améliorer le module d'élasticité du matériau de l'implant pour correspondre à celui du tissu humain. La porosité graduée contribue à réduire la densité du bio-implant.

La gradation de la taille des pores peut être obtenue en faisant varier les granulométries de poudre qui sont utilisées à différents endroits du matériau en vrac pendant le processus de gradation. Il peut également être produit en faisant varier les paramètres de traitement de la production ou en utilisant différents paramètres de frittage pour produire le gradient de porosité requis.

Le gradient de porosité dans un FGM a également un effet sur la résistance à la traction et le module de Young du matériau. Un certain nombre de FGM à gradient de porosité ont été rapportés dans la littérature pour une application biomédicale.

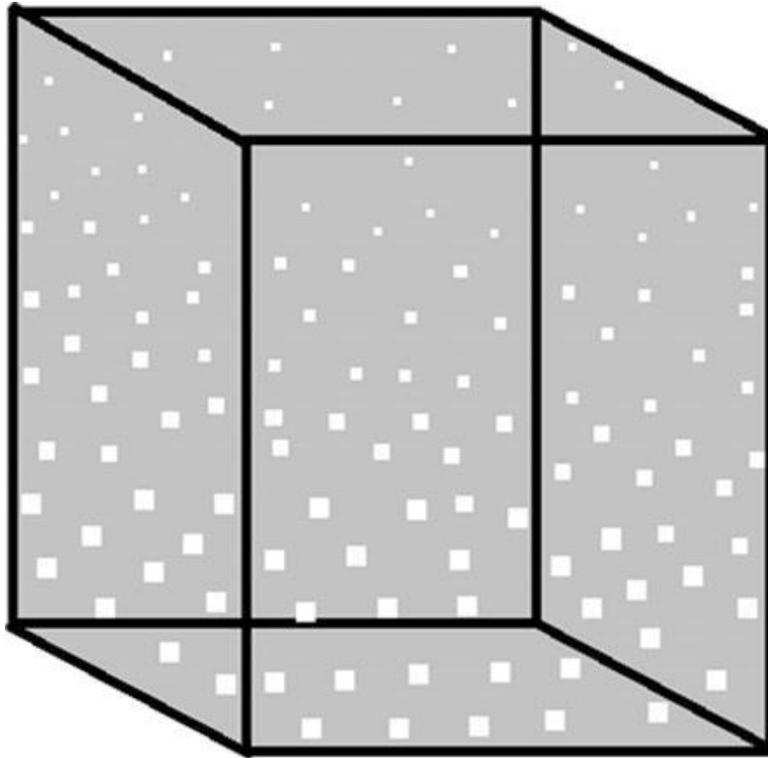


Figure II.3 Schéma de l'excision à gradient de porosité [15-16]

II.3.3. Matériaux à gradient fonctionnel de microstructure [15-16]

Le matériau à gradient fonctionnel de microstructure est un autre type de FGM, où la microstructure est conçue de sorte que différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer progressivement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation en microstructures peut être réalisée pendant le processus de solidification, de telle sorte que la surface de la matière est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. Le noyau du même matériau est autorisé à refroidir lentement, ce qui aiderait à produire des microstructures différentes de celles sur la surface du matériau vers la partie la plus interne. En outre, la gradation microstructurale peut être obtenue grâce à un processus de traitement thermique contrôlé. Par exemple, une microstructure variable peut être produite par un traitement thermique contrôlé d'une partie cylindrique en alliage de titane (**Fig II.4**). On peut obtenir une microstructure à gradation fonctionnelle par d'abord permettre à un métal liquide, dont la température de fusion est inférieure à la température de fusion de l'alliage de titane, et de telle sorte que soit atteinte la température de recristallisation de l'alliage de titane lorsque ce métal fondu est exécuté dans un

Type d'installation de l'échangeur de chaleur, (**Fig II.4a**). Le métal liquide est autorisé à fonctionner pendant une certaine période de temps, puis retiré, puis la partie est autorisée à refroidir. La chaleur est transférée de la partie interne du cylindre à la partie externe. On s'attend à ce que la température de la partie la plus interne du cylindre soit beaucoup plus élevée que celle de la température la plus à l'extérieur.

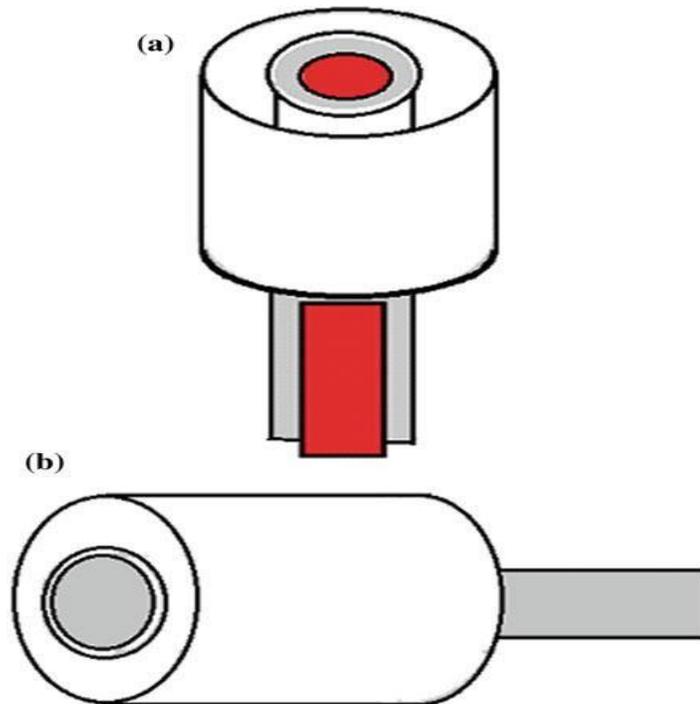


Figure II.4 Schéma de principe d'une partie cylindrique soumise à
:(a)écoulement d'un métal liquide et, (b) de l'eau de refroidissement [15-16]

Cela entraînerait une microstructure variable, car la partie est autorisée à refroidir. La partie extérieure se comporterait comme un dissipateur de chaleur, et la microstructure de cette zone serait plus grande en raison de la croissance des grains, tandis que la microstructure la plus intérieure serait plus petite et équiaxe, en raison du processus de recristallisation et le refroidissement lent. Dans un autre type de processus de gradation microstructural, le cylindre pourrait être chauffé à une certaine température, puis l'eau de refroidissement pourrait être traversée par la partie interne du cylindre également dans une configuration d'échangeur de chaleur (**Fig II.4b**). La partie interne du cylindre serait soumise à un refroidissement rapide,

provoquant ainsi la formation d'une microstructure non équilibrée sur cette face. La microstructure la plus interne consisterait en une microstructure martensitique plus difficile, tandis que la microstructure du cylindre, loin de la partie la plus interne, serait complètement différente de la microstructure sur la partie extérieure du cylindre. Un diagramme schématique d'une microstructure classiquement gradués est représenté sur la **figure II.5**. C'est parce que la partie la plus extérieure du cylindre refroidirait plus lentement, ce qui favoriserait la formation d'une microstructure plus à l'équilibre et une microstructure largement équiaxe serait produite. Les gradients dans la microstructure en raison du traitement thermique pourraient également provoquer des changements dans la composition élémentaire, et dans certains cas, la phase intermétallique pourrait être produite dans la microstructure graduée.

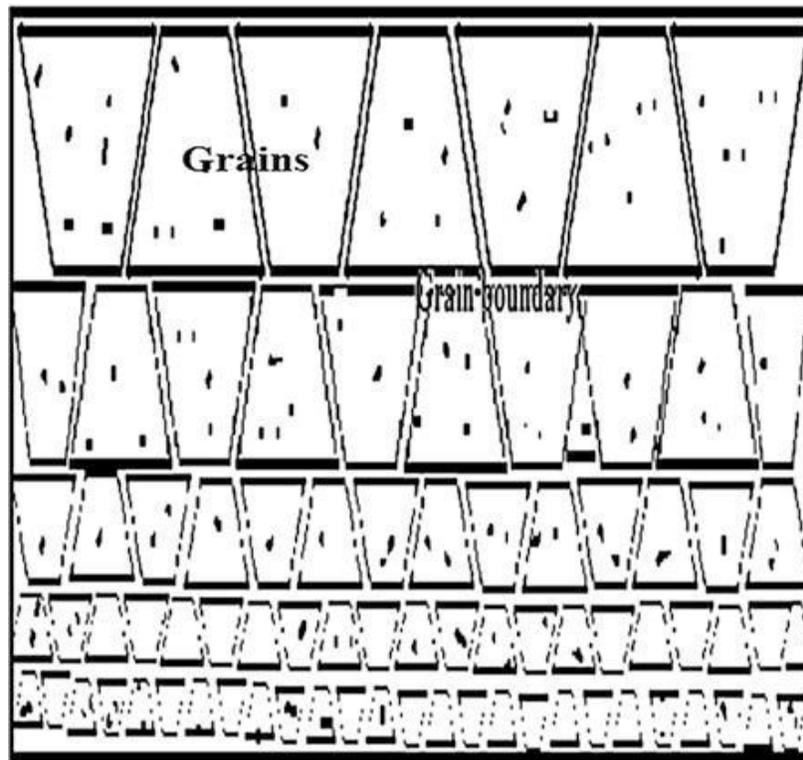


Figure II.5 Schéma de microstructure classé [15-16]

La microstructure graduée entraînerait un changement graduel des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et parce que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau.

Le FGM de gradient microstructural trouve leur application dans les composants qui doivent avoir une surface très difficile de résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact important qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau à gradient fonctionnel comprend l'acier durci, les cames ou la couronne dentée, les roulements ou les arbres, et les applications de turbine [13,14].

II.4 Processus de traitement des matériaux à gradient évalué :

Deux critères différents sont utilisés pour classer les matériaux à gradient fonctionnel. L'un est basé sur la structure de matériau : les FGM à structure continue et à structure discontinue et l'autre est basé sur la taille des matériaux : les FGM minces et les FGM en vrac (**Fig II.6**).

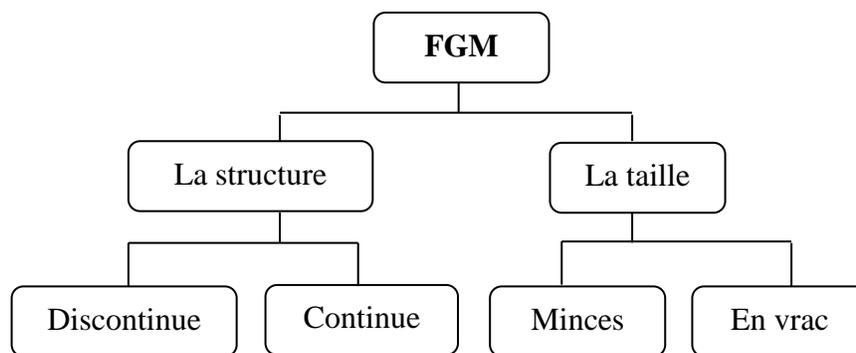


Figure II.6 Classification matériaux à gradient fonctionnel

Dans les FGM continues, il y a un gradient continu présent d'un matériau à l'autre (**Fig II.7a**). Cependant en cas de discontinu FGM, une variation par couches de la fraction volumique est fournie (**Fig II.7b**). Les FGM minces ont des sections relativement minces comme le revêtement de surface, tandis que les FGM en vrac sont un volume complet de matériau. Des procédés de fabrication tels que le dépôt physique en phase vapeur (PVD), le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et la méthode de synthèse à haute température autoreproductrice (SHS) sont utilisés pour fabriquer des FGM minces. Bien que les FGM en vrac sont fabriquées à l'aide de méthodes telles que la métallurgie des poudres, le moulage par centrifugation et les techniques de fabrication de formes libres.

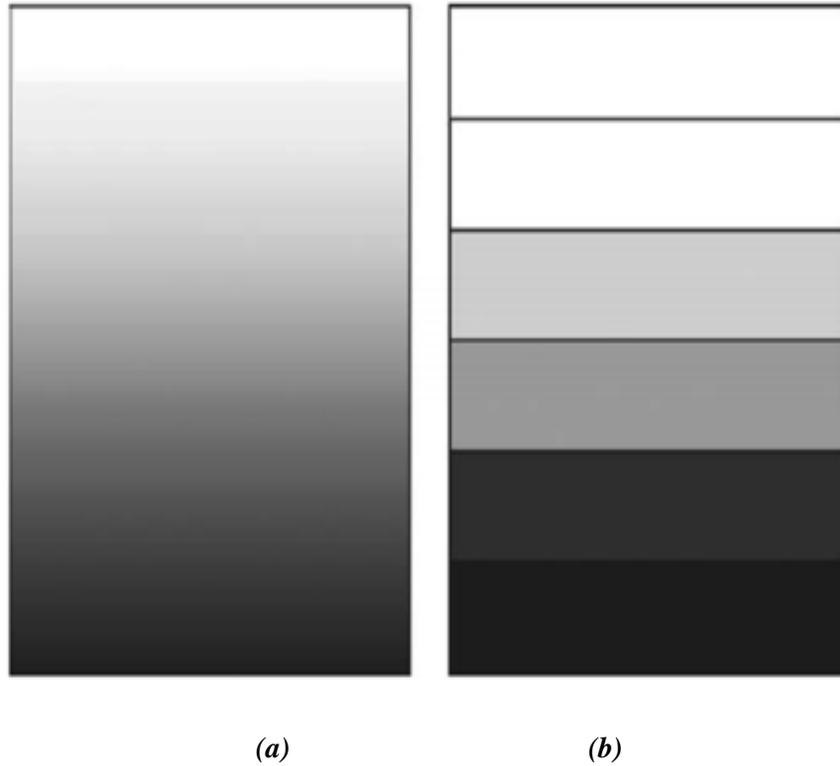


Figure II.7 Structures des FGMs

Il existe de nombreuses techniques pour l'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel, quelques principales méthodes sont comme décrites par la suite:

II.4.1. Dépôt physique en phase vapeur

Les méthodes de dépôt en phase vapeur sont de plusieurs types différents, dépôt chimique en phase vapeur, dépôt physique en phase vapeur (CVD, PVD) respectivement et dépôt par pulvérisation cathodique. Ces différentes techniques sont utilisées pour des revêtements de surface fonctionnellement gradués par les précipitations. Ce revêtement caractérisé par une fine couche et fournit une excellente microstructure à la surface revêtue. Mais ces techniques sont nécessaires et génèrent des gaz toxiques comme effet secondaire, [17]. De même qu'il existe d'autres méthodes utilisées pour précipiter des revêtements fonctionnellement gradués sur la surface du matériau tels que la synthèse à haute température (SHS), l'électrophorèse, la projection de plasma, l'électrodéposition, le dépôt assisté par faisceau d'ions (IBAD) et de nombreuses autres méthodes [18]. Toutes les méthodes précédentes ne peuvent être utilisées pour réaliser des

FGM en vrac en raison de la rapidité de ces processus l'énergie lente et intensive requise. Ainsi, ces méthodes ne sont pas économiques pour la production de FGM en vrac [19].

II.4.2. La synthèse auto-propagée à haute température (SHS)

Cette technique est caractérisée par une propagation auto-entretenu d'une onde de combustion le long de l'échantillon qui se manifeste par un transfert thermique couche par couche avec une vitesse très élevée, ce procédé permet à la production de matériaux réfractaires. Les réactions SHS offrent nombreux d'avantages : réduire le coût énergétique et une vitesse de productions des matériaux nécessitant des températures élevées à la fois pour leur synthèse et leur densification. De plus, elles permettent de générer des microstructures très fines ainsi que la stabilisation à basse température de phases stables à haute température.

II.4.3. Coulage en bande (The Tape Casting)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (**Fig II.8**). Ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [20]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25 - 1000 μm) à haute résolution, sous une température varie entre (50 °C – 200 °C) et une pression de 03 à 30 MPa. Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.

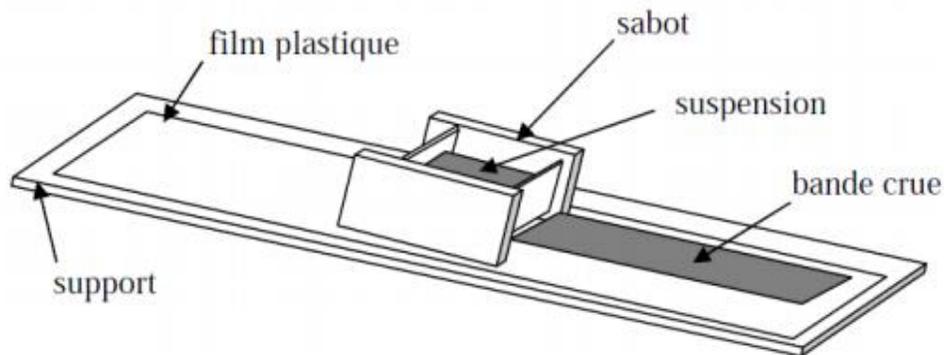


Figure II.8 Principe de la méthode coulage en bande [20]

II.4.4. La métallurgie des poudres

La technique basée sur la métallurgie des poudres peut être utilisée pour produire des matériaux à gradient fonctionnel épaisse. Le processus est effectué en utilisant des étapes comprenant la pesée et le mélange de poudre selon la distribution spatiale préconçue selon l'exigence fonctionnelle, l'empilement et battage des poudres prémélangées et enfin frittage [21].

II.4.5. Coulée par centrifugation

La méthode suivie par la création de graduation dans la microstructure par l'application de la force centrifuge. Lorsque des particules contenant le coulis sont soumises à la force centrifuge, deux zones sont formées en fonction de la concentration des particules l'une est enrichie et autre appauvrie. En fonction de la densité des particules, les particules légères séparées vers l'axe de rotation, tandis que les particules plus denses s'éloignent de l'axe de rotation [22].

II.4.6. Frittage et Infiltration

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [23].

II.5 Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM

Une plaque FGM avec une longueur « a », largeur « b » et d'épaisseur « h » (**Fig II.9**). Supposons que le matériau FG soit composé de deux matériaux différents et que les propriétés effectives du matériau (module d'Young « E », densité du matériau « ρ » ou coefficient de poisson « ν ») de la plaque FGM varient en continu le long de la direction de l'épaisseur (l'axe z) selon une loi de fonction. Toutefois, la variation de la fraction volumique des matériaux constituants est déterminée grâce à différents modèles recensés comme suit :

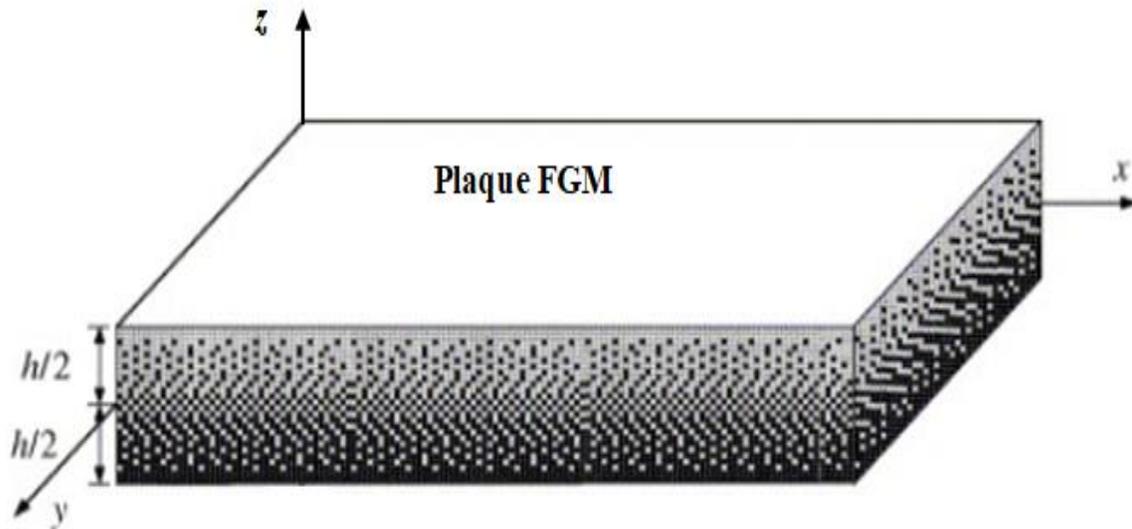


Figure II.9 Géométrie d'une plaque FGM

II.5.1. Fonction de puissance P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$g(z) = \left(\frac{z+h/2}{h}\right)^p, 0 \leq p < \infty \quad (\text{II.1})$$

Où : « p » l'exposant de la fraction volumique est un paramètre matériel qui définit la variation du profil (assure la distribution de la composition) du matériau à travers l'épaisseur de la plaque FGM. Une fois la fraction volumique locale « $g(z)$ » a été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [24]:

$$P(z) = g(z)P_1 + [1 - g(z)]P_2 \quad (\text{II.2})$$

Où : P_1 et P_2 sont respectivement les propriétés matérielles de la surface supérieure ($z=h/2$) et de la surface inférieure ($z=-h/2$) de la poutre FGM.

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (Fig II.10). La valeur de $p=0$ représente une plaque de matériau n°1 homogène.

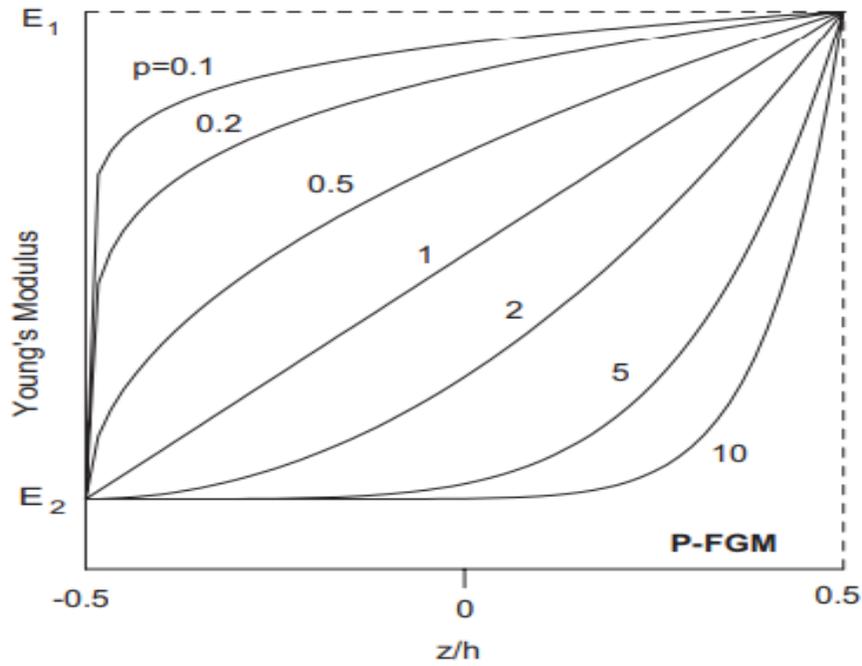


Figure II.10 La variation du module d'Yong dans une plaque P-FGM

II.5.2. Fonction sigmoïde S-FGM

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [24]. Par conséquent, Chung et chi [25] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.3})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^p \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.4})$$

Les propriétés matérielles d'une plaque S-FGM peuvent être déterminées comme suit :

$$P(z) = g_1(z)P_1 + [1 - g_1(z)]P_2 \quad \text{for } 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.5})$$

$$P(z) = g_2(z)P_1 + [1 - g_2(z)]P_2 \quad \text{for } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.6})$$

La **figure II.11** représente les distributions des propriétés matérielles de la plaque S-FGM.

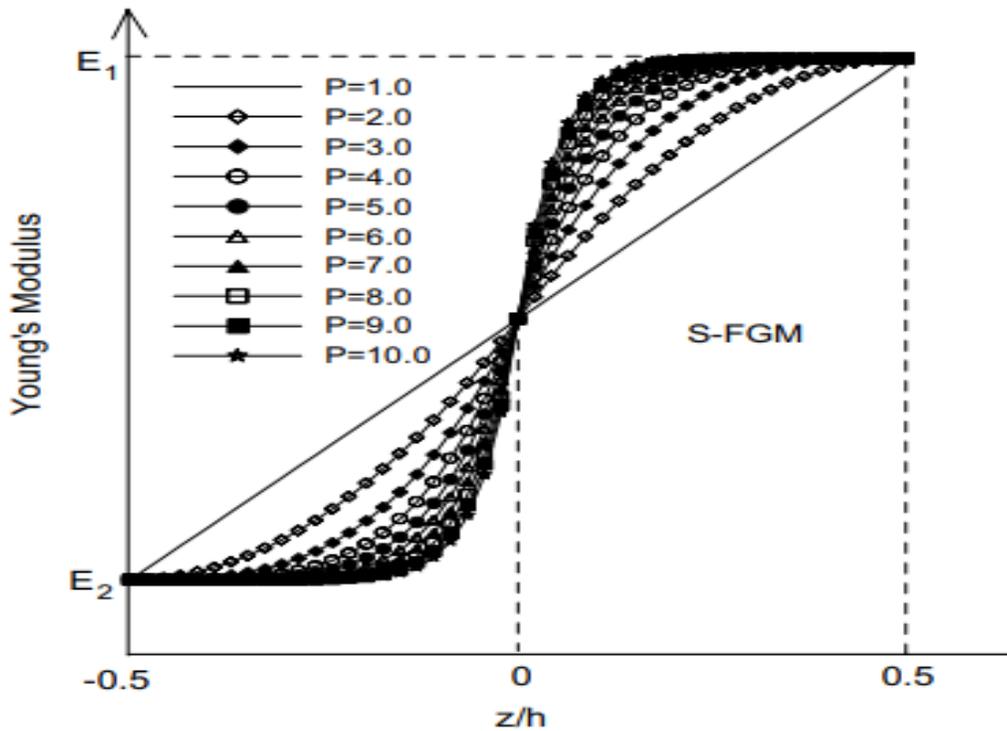


Figure II.11 La variation du module d'Young dans une plaque S-FGM

II.5.3. Fonction exponentielle E-FGM

En 1983, F. Delale., F. Erdogan [26] ont traité le problème d'élasticité plane pour un milieu non homogène contenant une fissure dont les propriétés matérielles sont décrites par une fonction exponentielle E-FGM comme suit:

$$E(z) = E_2 e^{B(z+\frac{h}{2})} \quad \text{ou} \quad B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) \quad (\text{II.7})$$

La variation du module d'Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.12.

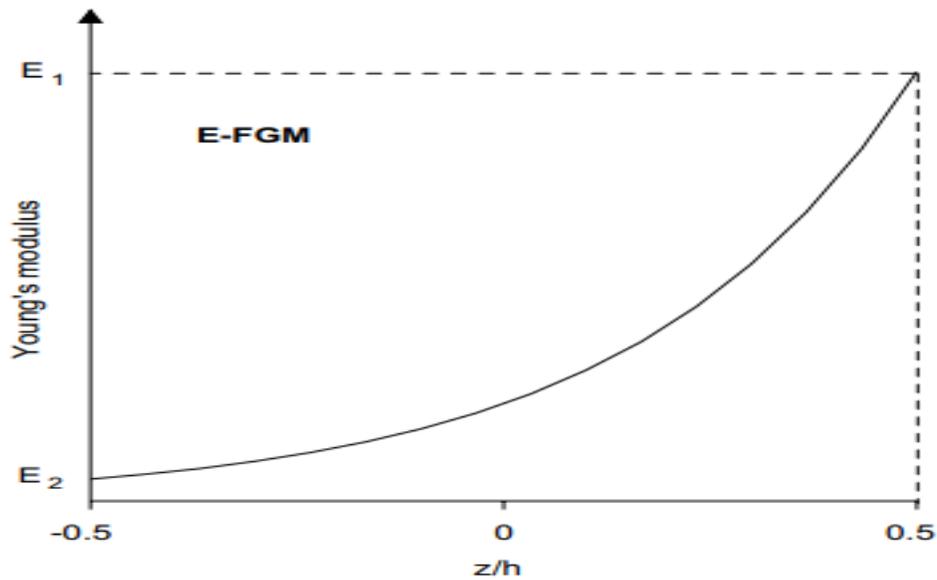


Figure II.12 La variation du module d'Yong dans une plaque E-FGM

II.6 Conclusion

L'objectif principal des matériaux à gradient fonctionnels, sert à l'optimisation locale des propriétés matérielles par association des propriétés spécifiques des différents matériaux au sein d'une même structure représentant une forme considérablement plus simple et bien plus répandue aux exigences de la technologie moderne.

Les FGMS sont considérés comme des excellents matériaux de pointe en termes de résistance et de durabilité, mais il existe un inconvénient objectif lié à la technique de leur fabrication compliquée en raison de diversité des propriétés physiques et mécaniques des matériaux constitués (Par exemple : température de fusion ...etc.) qui implique un processus de fabrication très précis et très coûteux.

CHAPITRE III

***«NANOSCIENCES DES MATERIAUX
ET NANOTECHNOLOGIES »***

Nanosciences des matériaux et nanotechnologies

III.1 Introduction

Les nanosciences et les nanotechnologies connaissent un essor considérable aujourd'hui, grâce à l'évolution des techniques d'observation et d'analyse. Le préfixe « nano » fait référence à l'échelle du nanomètre (un nanomètre équivaut à un milliardième de mètre (10^{-9} m)). Les nanosciences s'intéressent aux propriétés intrinsèques des ensembles atomiques et moléculaires et leurs interactions. C'est la possibilité de synthétiser de manière plus contrôlée, identifier, caractériser et manipuler les objets de taille de l'ordre de grandeur. Les nanotechnologies regroupent l'ensemble des techniques et des concepts du monde de l'infiniment petit issu des nanosciences. Le potentiel des nanotechnologies réside avant tout dans la grande diversité des domaines d'application tels que la cosmétique, l'agroalimentaire, l'énergie, la construction, l'automobile, les produits biomédicaux, produits de diagnostic, microélectronique, la technologie de l'information....etc.).

Un effort de recherche considérable sur la nécessité de développer des modèles mathématiques capables de capturer les effets de la micro/nanostructure et des forces intermoléculaires. À cette fin, la théorie locale classique s'est rapidement révélée inadéquate en raison de sa formulation inhérente à l'échelle libre, tandis que les simulations à petite échelle, bien qu'elles puissent sembler être le moyen le plus approprié pour modéliser les effets micro/nano structuraux. Pour ces raisons, et du fait que même pour construire un modèle plus approprié, certaines hypothèses théoriques sont encore nécessaires, les chercheurs ont préféré la formulation de continuum «enrichi», c'est-à-dire de continuum où les effets de la micro/nanostructure et des forces intermoléculaires sont modélisés, dans un sens moyen, en introduisant des termes non locaux appropriés. La préférence accordée à la formulation de ces «continuum non locaux» est motivée par le fait que les méthodes de résolution numérique conventionnelles peuvent être appliquées, avec des avantages considérables à des fins de conception et de vérification.

III.2 Les nanomatériaux :

A nos jours, les scientifiques ne se sont pas encore prononcé une définition précise des nanomatériaux, mais conviennent qu'ils sont partiellement caractérisés par leur taille minuscule,

mesurée en nanomètres. La Commission européenne a proposé en octobre 2011, dans le cadre d'une recommandation, une définition pour le terme « nanomatériau ». Un nanomatériau est un matériau naturel, formé accidentellement ou manufacturé contenant des particules libres, sous forme d'agrégat ou sous forme d'agglomérat, dont au moins 50 % des particules, dans la répartition numérique par taille, présentent une ou plusieurs dimensions externes se situant entre 1 nm et 100 nm [27].

On retrouve également une définition donnée par la norme ISO TS 80004 - 1, un nanomatériau est un matériau dont au moins une dimension externe est à l'échelle nanométrique, c'est-à-dire comprise approximativement entre 1 et 100 nm ou qui possède une structure interne ou de surface à l'échelle nanométrique [28].

Du fait de la capacité à générer les matériaux d'une manière particulière pour remplir une fonction spécifique, l'utilisation des nanomatériaux s'étend à diverses industries, des soins de santé, l'automobile, l'électronique, optique, chimique, et à la mécaniqueetc.

III.3 Classifications des nanomatériaux :

Les nanomatériaux peuvent être classés selon leur source, leurs dimensions et leurs matériaux constitutifs à savoir :

III.3.1 Classifications des nanomatériaux selon leur origine :

Les nanomatériaux peuvent être différenciés selon leur origine : naturelle ou artificielle. Cette dernière catégorie peut être formée accidentellement ou manufacturée

III.3.1.1 Nanomatériaux naturels:

Les nanomatériaux naturels peuvent être formés dans des espèces biologiques telles que les microbes ou les plantes, mais aussi par des actions anthropiques. La création de nanomatériaux naturels est un processus accessible, car ils sont présents dans l'hydrosphère, l'atmosphère, la lithosphère, et la biosphère. Il est intéressant de noter que notre planète est composée de nanomatériaux qui sont formés naturellement et sont présents dans les rivières, les eaux souterraines, les océans, les lacs, les roches, les sols, le magma ou la lave ainsi que dans les organismes microbiens [29,30]. Certains nanomatériaux sont également présents à l'état naturel dans les organismes vivants (**Fig III.1**), par exemple les nanomatériaux biogéniques magnétite,

une structure cristalline ferromagnétique associée à la magnétoréception dans certains animaux, la ferritine, une protéine de stockage du fer, la graisse corporelle, l'hydroxyapatite de calcium et les constituants nanocristallins des os [31].

III.3.1.2 Nanomatériaux artificiels

Les nanomatériaux peuvent être manufacturés en utilisant une grande diversité de constituants biologiques, physiques, chimiques ou hybrides. L'un des avantages des nanomatériaux produits manufacturés est qu'il est possible de produire de grandes quantités de nanomatériaux de différentes formes et tailles.

Un autre aspect important de la méthode manufacturée est que les différents produits chimiques ou les réactifs peuvent être liés ou conjugués avec les nanomatériaux de manière précise et exacte. Cependant les nanomatériaux produits de façon accidentelle comme sous-produits de processus industriels (moteur des véhicules automobiles et procédés de combustion) sont appelés nanomatériaux subsidiaires. Ces nanomatériaux peuvent également être produits par les feux de forêt et la combustion des arbres. Dans quelques cas, les nanomatériaux accidentels peuvent être considérés comme une sous-catégorie des nanomatériaux naturels.

La principale préoccupation concernant les nanomatériaux de conception artificielle est de savoir si les connaissances présentes sont suffisantes pour envisager leurs performances (**Fig III.1**). En outre, ils affichent un comportement différent de l'environnement, qui est différent des nanomatériaux naturels. Actuellement, diverses sources de nanomatériaux sont produites pour diverses applications [32,33].

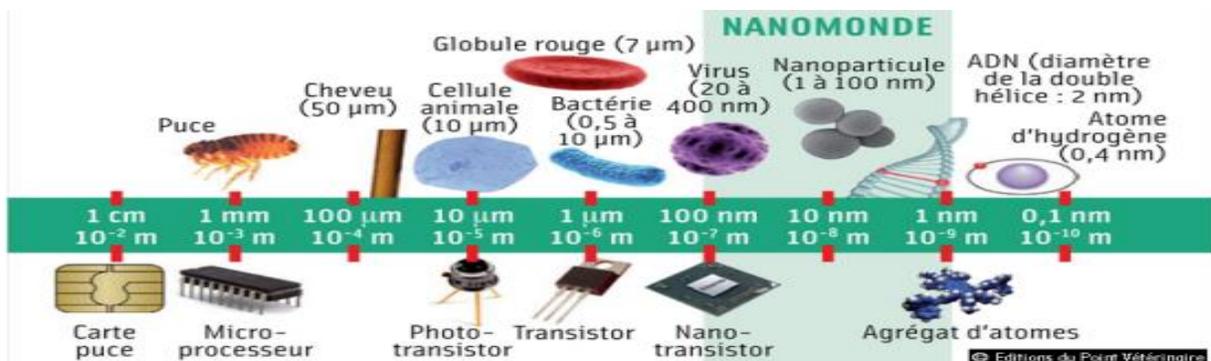


Figure III.1 Exemples d'objets manufacturés ou présents dans la nature à l'échelle nanométrique [34]

III.3.2 Classifications des nanomatériaux selon leur taille :

En 2000, Gleiter a proposé l'idée de la classification des nanomatériaux en fonction de leurs formes cristallines et de leurs compositions chimiques [35]. Néanmoins, cette méthode n'était pas entièrement complète, car elle ne mesurait pas les dimensions des nanomatériaux [36]. Par la suite, les chercheurs ont établi une méthode de classification qui repose principalement sur la dimension dépend essentiellement du mouvement des électrons dans le nanomatériau (**Fig III.2**). La présence d'électrons est généralement fixée à "0".alors que pour les nanomatériaux de dimension "1", les électrons peuvent se déplacer librement sur l'axe des abscisses, qui est généralement inférieur à 100 nm. De même, "2"et les nanomatériaux de dimension "3" ont de meilleurs mouvements d'électrons le long l'axe des x à y ou l'axe des x, y et z, respectivement. Il a été constaté que la capacité à prédire les propriétés des nanomatériaux détermine la classification des nanomatériaux.

En outre, les caractéristiques des nanomatériaux dépendent essentiellement les limites des grains selon la classification de Gleiter, alors que la classification par Pokropivny et Skorokhod ont suggéré que les caractéristiques des nanomatériaux sont attribuées aux formes et aux dimensions des nanoparticules [33,35-37].

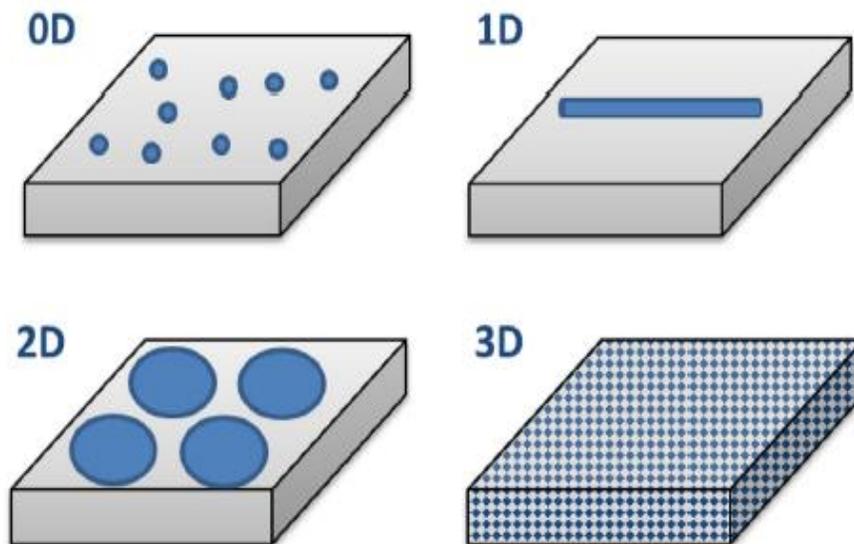


Figure III.2 Classification selon la dimensionnalité des nanomatériaux [33]

III.3.3 Classifications des nanomatériaux selon leur composition chimique:

On peut aussi distinguer différentes catégories des nanomatériaux en fonction de la nature chimique des constituants :

III.3.3.1 Nanomatériaux à base de métal

on cite à titre d'exemple : l'argent utilisé dans des applications de diagnostic médical, antibactériennes, conductrices et optiques [39], le cuivre utilisé comme catalyseur, conducteur électrique et thermique, frittage et additif de lubrifiant et agent antibactérien [40] ; l'or est utilisé pour l'administration de médicaments, les tests médicaux, la détection du cancer, l'électronique, la dissipation de la chaleur, les alliages spécialisés et les piles à combustible [41] ; le fer est exploité pour sa réactivité chimique dans le traitement de la contamination du sol, ses caractéristiques bactéricides dans le traitement de l'eau et ses propriétés super paramagnétiques dans l'administration de médicaments, les données d'enregistrement et la détection magnétique [42] ; le platine et le palladium utilisés comme convertisseurs catalytiques [43]; l'aluminium, le magnésium, le titane, les alliages d'aluminium-magnésium, et les alliages titane-aluminium utilisés dans l'aérospatiale et les applications à haute température grâce à leur résistance élevée et à leur faible poids [45] ; et l'alliage fer-silicone-bore utilisé en électronique pour ses propriétés magnétiques exceptionnelles [38,45].

III.3.3.2 Nanomatériaux à base d'oxyde métallique

Très nombreux types d'oxydes métalliques, ont un avantage significatif dans plusieurs applications tels que : les oxydes de titane (TiO_2) ont trouvé des applications comme filtre ultraviolet (UV) transparent pour les cosmétiques, catalyseur chimique pour les produits de nettoyage et la peinture murale, agent antibactérien pour les dispositifs de filtration, et dans les cellules solaires [46]. L'oxyde de zinc présente des propriétés intéressantes antibactériennes et il est également utilisé comme agent antistatique [47]. La nanosilice est exploitée pour sa grande réactivité chimique, excellent renforcement thermomécanique des polymères, l'absorption optique, la photoluminescence et comme support creux pour les médicaments livraison [48]. La nanoalumine est utilisée dans les revêtements résistants à l'abrasion, comme catalyseur chimique et comme renforcement mécanique, thermique et optique [49]. Selon sur leur type, les oxydes de fer peuvent être utilisés pour des applications biomédicales et électroniques grâce à leurs

excellentes propriétés magnétiques, pour la purification de l'eau, et comme pigments, flocculant et échangeurs d'ions [38,50].

III.3.3.3 Nanomatériaux à base de carbone

Les nanomatériaux à base de carbone ont des propriétés uniques et jouent un rôle clé dans plusieurs domaines interdisciplinaires. Le carbone est un état solide qui se présente sous diverses formes, comme le graphite, le carbone amorphe et le diamant [52]. Ces nanomatériaux à base de carbone présentent différentes propriétés chimiques, physiques et mécaniques notamment la conductivité la stabilité chimique et les propriétés thermiques par exemple le graphite à plusieurs propriétés uniques, telles que : conductivité électrique élevée, bonne stabilité et réactivité chimique. Les nanodiamants ont des caractéristiques uniques, telles que des propriétés optiques et magnétiques. Ces sont couramment utilisés pour les revêtements, les semi-conducteurs et les abrasifs [51,53-54].

III.3.3.4 Nanomatériau à base de zéolithe et de silice

Les nanomatériaux comprennent les silicates, les carbonates et les nitrures, les zéolites ont été largement utilisées en raison de leur chimie de surface favorable et de leur structure méso poreuse. La morphologie méso poreuse et la taille des pores de la silice peuvent être influencées par plusieurs facteurs tels que les matrices, la vitesse d'hydrolyse et les conditions de réaction [51]. Un des nanosilicate le plus utilisé est l'argile, le silicate de magnésium et d'aluminium [55]. Ça peut prendre la forme de nanoplaques dans le cas de la montmorillonite, par exemple, ou de nanotubes à halloysite. La nano argile est utilisée comme charge dans les composites pour améliorer leurs performances mécaniques, propriétés de barrière, résistance à la chaleur et aux flammes et conductivité électrique. C'est possible fonctionnalisé avec des groupes organiques pour améliorer sa dispersion et son adhérence avec les organiques matrices. Un autre silicate intéressant est la zéolite avec des applications comme catalyseur, moléculaire tamis pour hydrocarbures et germe pour la fabrication de membranes de séparation [56].

III.3.3.5 Nanomatériaux semi-conducteurs

Le terme « semi-conducteurs » désigne une certaine classe de matériaux solides. Cela suggère que la conductivité électrique est un critère pour juger si un certain matériau appartient à cette classe. Nous verrons cependant que la théorie quantique nous fournit une description adéquate de

la structure de bande des solides et donne ainsi un critère plus robuste pour la distinction entre les semi-conducteurs et les autres classes de matériaux [57]. Parmi les plus connus : le silicium, le germanium, l'arséniure de gallium, le phosphore, le soufre, le sélénium et le tellure .ils représentent un enjeu majeur dans les technologies émergentes telles que les cellules solaires photovoltaïques, la nanoélectronique, la nanophotonique, la conversion d'énergie, l'optique non linéaire, les capteurs et les dispositifs d'imagerie miniaturisés, la catalyse, les détecteurs, la photographie, la biomédecine, etc... [58].

III.3.3.6 Nanomatériaux composites

Les composites sont des matériaux solides constitués de plusieurs phases, l'une des phases ayant des dimensions inférieures à 100 nm, ou des structures ayant une distance de répétition nanométrique entre les phases [59,60]. Des dimensions physiques de l'ordre du nanomètre sont toujours utilisées dans le processus de formation de structures composites[51]. La combinaison de plusieurs matériaux formant un composite confère des propriétés améliorées ou spécifiques afin d'apporter une nouvelle fonctionnalité différente et complémentaire ou de modifier certaines propriétés mécaniques, magnétiques, thermiques, etc.

III.3.3.7 Nanomatériaux polymères

Les nanomatériaux polymères ont attiré une attention considérable en nanomédecine en raison de leur capacité à modifier leur surface. Les nanoparticules qui sont matérialisées à partir de polymères sont généralement liées à de nouvelles propriétés. L'importance de ces matériaux réside dans les caractéristiques idiosyncratiques associées aux nanomatériaux polymères. Les nanomatériaux à base de polymère sont continuellement utilisés dans les nanocomposites [61], la production des nanocapsules ou des nanosphères. Lorsque les polymères qui composent la structure des NP sont biodégradables ou non toxiques, de nombreuses opportunités d'employer ces systèmes se présentent, principalement dans des applications biomédicales, telles que des systèmes potentiels pour la libération contrôlée de médicaments, des supports en thérapie génique ou une administration guidée de médicaments au tissu ou organes [62].

III.4 Procédés de fabrication des nanomatériaux

Les nanomatériaux manufacturés sont généralement produits selon deux approches fondamentales, l'une descendante et l'autre ascendante (**Fig III.3**).

- **La technique ascendante « Botton-up » :**

La technique ascendante consiste à l'assemblage des composants à l'échelle atomique et moléculaire, afin de créer un produit à grande échelle.

- **La technique descendante « Top-down » :**

La technique descendante regroupe les méthodes de production de nanoparticules, à partir de matériaux en vrac.

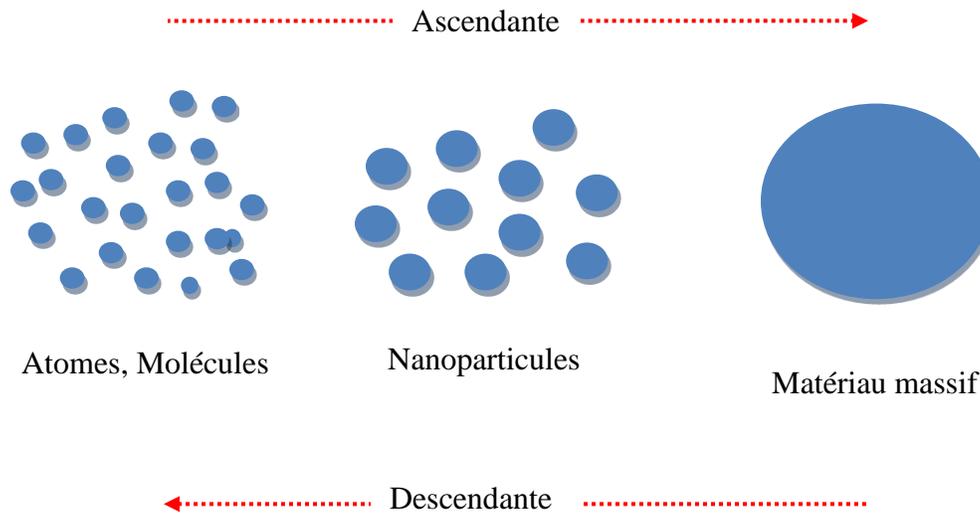


Figure III.3 Méthodes de fabrication des nanomatériaux

Les procédés avancés qui permettent l'élaboration ascendante et descendante des nanomatériaux sont fondés sur l'association d'entités de nature différente par voie chimique, par voie physique ou par voie mécanique. Nous citons à titre d'exemple quelques-unes, dans la section suivante.

III.4.1 Procédés par voie physique

III.4.1.1 L'évaporation/condensation

Cette méthode consiste à évaporer un matériau en vrac (un métal) par chauffage à une température suffisamment élevée (bien au-dessus du point de fusion, mais inférieur au point d'ébullition) dans une chambre à vide afin de produire un flux de matière vaporisée et atomisée, qui est dirigé vers une chambre remplie de matière inerte ou réactive(atmosphère gazeuse).

La pression du gaz est suffisamment élevée pour favoriser la formation de particules, mais suffisamment basse pour permettre la formation sphérique des particules. Le refroidissement rapide des atomes métalliques, du fait de leur collision avec les molécules de gaz, conduit à la nucléation puis à la formation de nanoparticules. L'introduction de l'oxygène en tant que gaz réactif dans le système entraîne la production de nanoparticules métalliques. Une attention particulière doit être accordée à la rapidité d'oxydation, qui peut entraîner une surchauffe et un frittage des particules. L'évaporation des gaz conduit généralement à la production de matériaux avec une large distribution granulométrique et des agglomérats en raison du fait que la formation de particules est un processus purement aléatoire [38,63].

III.4.1.2 Pyrolyse laser

Pyrolyse laser est une méthode souple de production des nanopoudres, la synthèse de nanoparticules par pyrolyse laser est reposée sur l'absorption d'un faisceau laser CO_2 de puissance par flux de réactifs constitués soit de gaz soit de liquides sous forme de aérosols, vapeurs ou mélanges des deux. Les réactifs, chauffés par transfert collisionnés, se décomposent et les particules se nucléent et croissent dans une flamme de pyrolyse (1000-2000 ° C). En raison d'une trempe effect à la sortie de la flamme, on obtient des particules nanométriques (comprises entre 10 et 100 nm) (**Fig III.4**).

Il est important de noter que pour produire efficacement des nanoparticules par pyrolyse laser, il est nécessaire d'utiliser au moins un réactif ayant une bande d'absorption infrarouge proche de celle de la longueur d'onde d'émission du laser à 10,6 microns. Cependant, malgré cette contrainte, une large gamme de compositions déjà produit par pyrolyse laser comme les carbures (SiC , TiC , B_4C ,...), les nitrures (Si_3N_4 , BN , FeN_x ,...), oxydes (TiO_2 , ZnO , Fe_2O_3 ,...) ou poudres composites ($\text{Si} / \text{C} / \text{N}$, $\text{Li} / \text{Mn} / \text{O}$, $\text{Fe} / \text{C} / \text{N}$,...) mais aussi des carbones (fullerènes, diamant et noir de carbone) et quelques métaux (Fe , Mo) [64-68]. Les nanoparticules synthétisées à l'échelle du laboratoire par pyrolyse laser présentent les caractéristiques suivantes: grande pureté, sphéricité, distribution granulométrique quasi monodispersée. De plus, il est bien connu qu'à l'échelle du laboratoire, il est possible de modifier la taille moyenne des grains, la composition chimique, la structure des nanoparticules et les rendements en modifiant les paramètres du processus tels que la composition et le débit du mélange réactif [69].

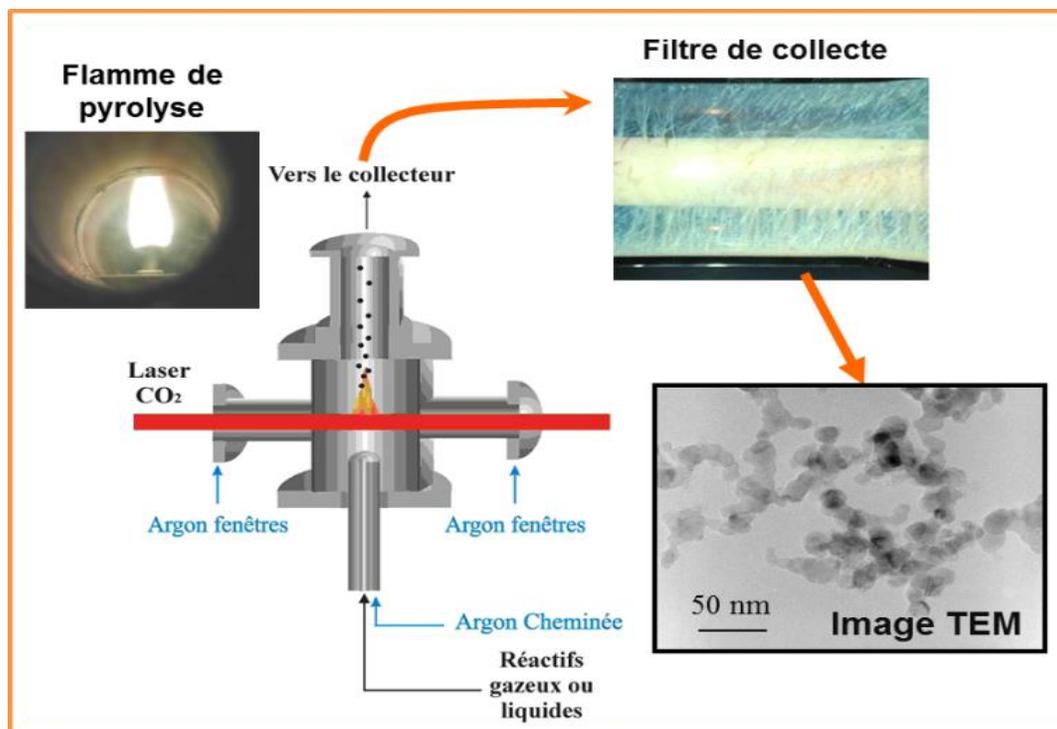


Figure III.4 Principe d'un réacteur de pyrolyse laser [70]

III.4.1.3 L'ablation au laser

L'ablation au laser (LA) est une technique d'introduction directe de l'échantillon, généralement couplée à des spectromètres de masse à plasma inductif (ICP-MS : Inductively Coupled Plasma Mass Spectrometry). Elle permet une analyse élémentaire ou isotopique directe du matériau. Le principe est d'utiliser un laser comme outil d'échantillonnage pour prélever une partie de l'échantillon en vue de son introduction directe dans le détecteur. L'échantillon est placé dans une chambre d'ablation fermée et étanche à l'air, avec une fenêtre en verre transparent à la longueur d'onde du laser au sommet. La cellule d'ablation est montée sur des étages X-Y et reliée à l'entrée de la torche du ICP par un simple tube. La visualisation de l'échantillon est effectuée par une caméra alignée avec le laser. Elle permet de sélectionner la zone d'ablation et de focaliser le faisceau laser pulsé à la surface de l'échantillon. Le faisceau laser passe par la fenêtre de la cellule d'ablation pour atteindre l'échantillon (**Fig III.5**). Lorsque l'énergie est supérieure au seuil d'ablation, un plasma est produit à la surface de l'échantillon et une petite partie du solide est convertie en vapeur et en particules. L'aérosol produit par le laser est transporté par un gaz porteur qui traverse la cellule d'ablation et se dirige vers le plasma où il est atomisé et ionisé [71].

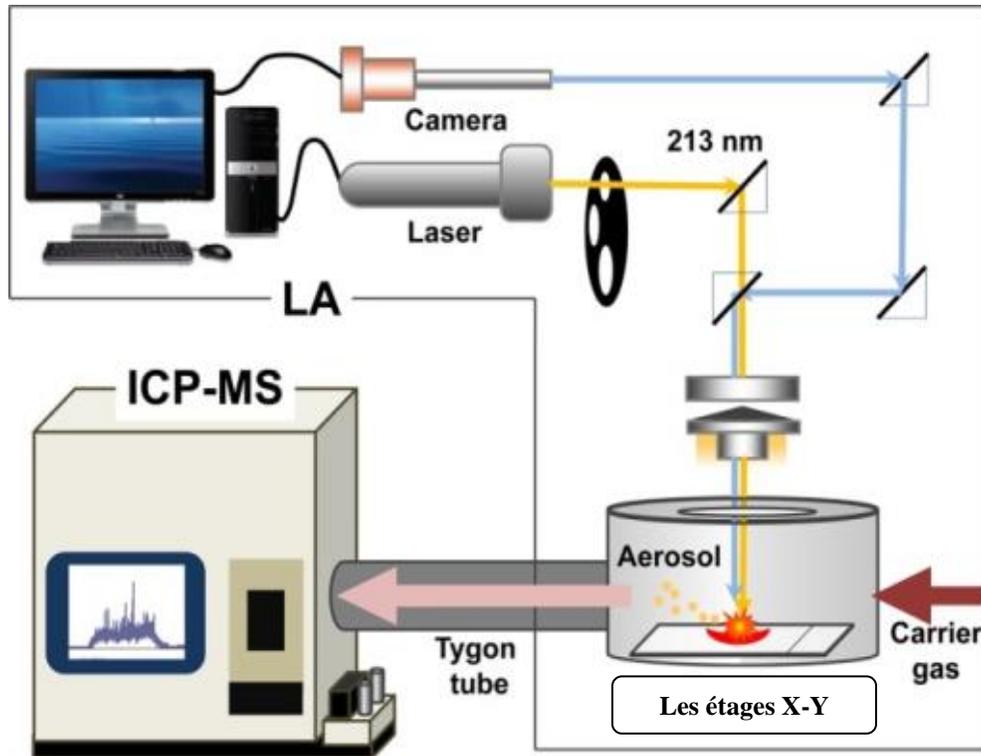


Figure III.5 Schéma de principe de l'ablation laser [72]

III.4.1.4 Décharge électrique

Cette méthode consiste à créer un arc électrique en faisant passer un courant de forte intensité entre deux électrodes dont l'anode est constituée du métal à évaporer. Un jet d'hélium haut pression, synchronisé avec la décharge électrique et thermique, dépose les agrégats sur les parois internes de la chambre d'évaporation. La taille de ces agrégats peut être modifiée en contrôlant la vitesse du jet d'hélium [73]. Il est possible de modifier la composition chimique des nanoparticules en modifiant la nature de l'électrode à évaporer. Ainsi, il est possible de revêtir les nanoparticules de carbone amorphe ou graphitique à l'aide d'une anode creuse en graphite contenant le métal à évaporer [74,75]. Le métal et le carbone co-évalorent alors sous l'influence de l'arc électrique et cette méthode révèle des nanotubes ou des structures fullerène [76].

III.4.2 Procédés par voie chimique

III.4.2.1 Le procédé sol-gel

La méthode sol-gel est un procédé industriel permettant la génération de nanoparticules colloïdales à partir de la phase liquide. Ces dernières années, il a été affiné pour la production de nanomatériaux et de revêtements avancés [77]. Le procédé sol-gel est une méthode chimique comprend généralement quatre étapes clés (**Fig III.6**) :

- Préparation du sol : Une suspension colloïdale est formée à la suite de la dispersion de particules solides nanométriques, dérivées d'un matériau précurseur, dans un solvant.
- Transition sol-gel (gélification) : des particules de réticulation et de ramification se produisent en raison de l'ajout d'un acide ou d'un catalyseur basique, qui initie la polymérisation formant une structure de chaîne interconnectée.
- La formation du gel : le gel est vieilli dans sa solution mère afin d'augmenter la colonne vertébrale et la résistance mécanique du gel.
- Séchage du gel : le solvant est éliminé des pores du gel de manière à dissuader la fracture du gel [78].

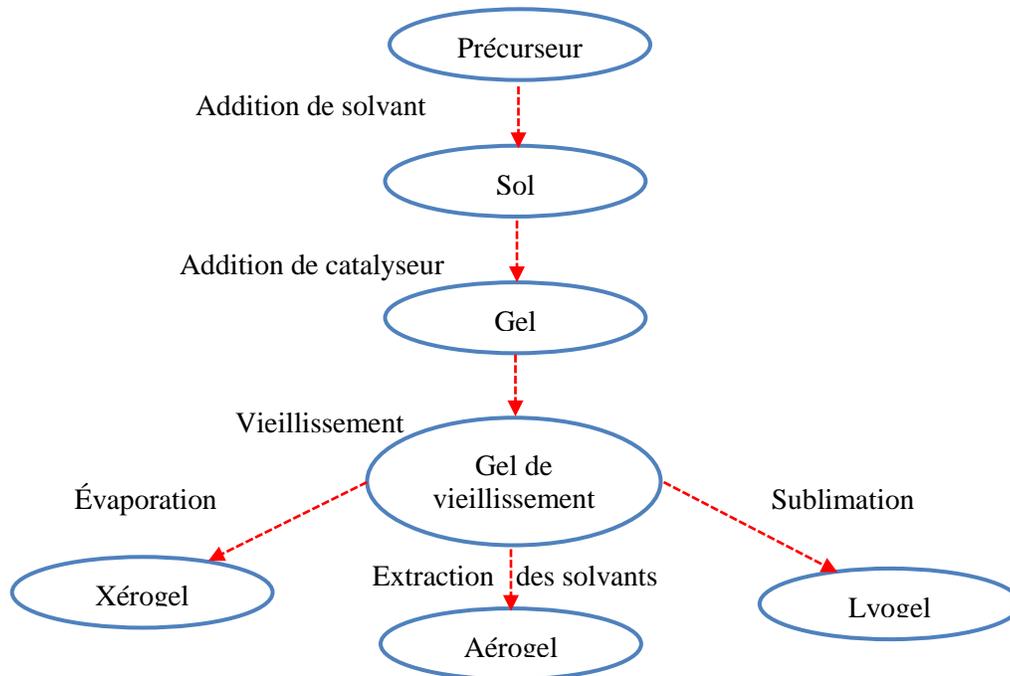


Figure III.6 Synthèse du processus sol-gel

Toutes les étapes de la synthèse contribuent à l'encadrement du gel et influencent ses propriétés et donc les applications correspondantes. Les techniques sol-gel présentent de nombreux avantages, comme les basses températures pendant le traitement, la polyvalence et la facilité de mise en forme et d'enrobage. Cette méthode présente le risque de libération de nanoparticules après le séchage de la solution [79].

III.4.2.2 Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

Le dépôt chimique en phase vapeur (CVD : Chemical vapour deposition) consiste à activer une réaction chimique entre la surface du substrat et un précurseur gazeux. L'activation peut être réalisée soit avec température (CVD thermique) ou avec un plasma (PECVD : Plasma Enhanced Chemical Vapour Deposition). Le principal avantage est l'aspect non directif de cette technologie. Le plasma permet de réduire considérablement la température du processus par rapport au procédé CVD thermique. Le dépôt chimique en phase vapeur est largement utilisé pour produire des nanotubes de carbone [80].

III.4.2.3 Auto-assemblage moléculaire (MSA)

En général, quatre stratégies sont utilisées pour la synthèse chimique des nanoparticules, à savoir la synthèse chimique séquentielle, la polymérisation covalente, la synthèse auto-organisée et l'auto-assemblage moléculaire. Le processus d'auto-assemblage moléculaire (MSA : Molecular Self-Assembly) regroupe les propriétés de chacune des méthodes ci-dessus. Le MSA est un processus dans lequel des atomes ou des molécules s'assemblent dans des conditions d'équilibre pour former une nanophase stable et bien définie par des liaisons non covalentes [81]. Toutes les matières naturelles (organiques ou inorganiques) sont traitées par un processus d'auto-assemblage ; par exemple, dans un processus biologique naturel, une double hélice d'ADN est formée par auto-assemblage. Cette approche peut être utilisée comme un mécanisme de structuration de base pour fabriquer des nanostructures complexes [82]. Le processus d'auto-assemblage moléculaire est hautement capable de fabriquer des nanostructures dans la gamme de 1 à 100 nm. Afin de créer des nanostructures complexes en utilisant le processus d'auto-assemblage, des paramètres critiques tels que la géométrie bien définie et les interactions spécifiques entre les unités de base doivent être prises en compte de manière significative [83,84].

III.4.3 Procédés par voie mécanique

III.4.3.1 Technique mécano synthétique

Parmi les techniques de fabrication par procédés mécaniques, technique mécanosynthétique, cette technique consiste généralement à broyer des poudres micrométriques (1 à 30 μm) d'alliages multiples qui présentent une composante importante dans les industries des minéraux, de la céramique et de la métallurgie des poudres. Les poudres sont introduites dans une chambre fermée, accompagnées de billes en acier ou en tungstène. Une déformation plastique continue de dite matière se produit lors une forte agitation de l'ensemble jusqu'à l'obtention des nano poudres. Les objectifs du broyage mécanique comprennent la réduction de la taille des particules, les changements de forme des particules et la synthèse de nanocomposites. Le broyeur typique utilisé à ces fins a été le broyeur à billes à haute énergie tels que les broyeurs à billes à tambour, les broyeurs vibratoires, les broyeurs planétaires, et les broyeurs d'attrition etc. [85].

III.4.3.2 Consolidation et densification

La consolidation et densification peut être simplement décrit comme le passage d'un matériau pulvérulent a un matériau massive sous l'action d'une contrainte mécanique ou thermique .Ce procédé est basée sur deux processus : par la compression mécanique ou par le frittage libre ou sous contrainte.

La phase de pressage est dirigée vers deux objectifs qui sont la densification du grain solide avec une pression externe et l'obtention des comprimés ayant la forme et des dimensions souhaitées.

Le frittage est un traitement thermique permettre la densification et la consolidation du matériau pulvérulent suite à une température élevé mais d'être inférieure à celle de fusion. Ce qui a pour effet de collecte les grains et réduire la porosité.

III.4.3.3 Les techniques de forte déformation

D'autres techniques de fabrication des nanomatériaux par procédés mécaniques peuvent être utilisées (torsion, extrusion, friction, laminage, ...) afin de produire une forte déformation d'un matériau en vrac cristallin (métal, céramique) et décomposer le matériau en structures ou particules nanométriques.

III.5 Méthode de calcul des nanostructures

Actuellement, deux approches Différentes sont disponibles pour la modélisation théorique des matériaux à l'échelle nanométrique: les approches atomistiques et la mécanique des milieux continus. Le premier comprend la dynamique moléculaire classique (MD), la dynamique moléculaire de fortes liaisons (TBMD) et la théorie de la densité fonctionnelle (DFT) [86]. Toutefois le calcul de ces approches est souvent très long et très coûteux. Cela permettra de recourir à des calculs de la mécanique des milieux continus qui dépend de la théorie de déformation, la théorie de la contrainte, et la théorie de l'élasticité non locale [87].

La théorie de l'élasticité non locale est consacré au développement des méthodes mathématiques pour l'exploration de nombreux échecs des théories classiques des champs et pour les découvertes de nouveaux phénomènes physiques et / ou explications des anciens.

À cet égard, Des scientifiques [88-90] sont réusis à développer une théorie de l'élasticité non locale pour résoudre les problèmes de propagation, de dislocation et de fissure des ondes. La théorie inclut les effets d'échelle et les interactions atomiques à longue portée afin qu'elle puisse être utilisée comme modèle continu pour la dynamique du réseau atomique.

L'idée principale du modèle non local est que les effets non locaux sont représentés par des forces corporelles à longue portée mutuellement exercées par des éléments volumiques élémentaires qui sont modélisés comme des interactions centrales. C'est à dire elle tient compte des forces d'action à distance entre les atomes. Cela fait que les contraintes dépendent des contraintes non seulement à un point unique considéré, mais également dans tous les points du corps.

La représentation mathématique de la théorie linéaire, pour les solides élastiques homogènes et isotropes est exprimée par [89] :

$$t_{kl,k} + \rho (f_i - \ddot{u}_i) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Où : ρ , f , u sont, respectivement, la masse volumique, la densité de la force du corps, le vecteur de déplacement en un point de référence x dans le corps à l'instant t et t_{kl} , le tenseur des contraintes non local est défini par:

$$t_{kl}(x) = \int_v \alpha(|x' - x|, \zeta) \sigma_{kl}(x') dv(x') \quad , \zeta = e_0 a_0 / l \quad (\text{III.2})$$

Où : x est un point de référence dans le corps , σ_{kl} est le tenseur de contrainte local de la théorie classique de l'élasticité en tout point x' du corps au temps t , $\alpha(|x' - x|, \zeta)$ est la fonction de base non locale , ζ est la constante matérielle , elle dépend de : a_0 est une longueur caractéristique interne (paramètre de réseau, distance granulaire...etc.) , l est une longueur caractéristique externe (longueur de fissure, longueur d'onde...etc.) et e_0 est une constante appropriée à chaque matériau.

Selon Eringen, lorsque $\alpha(|x' - x|, \zeta)$ la fonction de base non locale prend une fonction de Green d'un opérateur différentiel linéaire, l'équation constitutive non locale (III.2) est réduite à une équation différentielle c.-à-d. :

$$L\alpha(|x' - x|, \zeta) = \delta(|x' - x|) \Rightarrow Lt_{kl} = \sigma_{kl} \quad (\text{III.3})$$

Avec : L est l'opérateur différentiel linéaire défini par :

$$L = 1 - (e_0 a_0)^2 \nabla^2 \quad (\text{III.4})$$

Par conséquent, d'après (III.2), (III.3) et (III.4), les relations constitutives avec cette fonction noyau peuvent être simplifiées à :

$$(1 - \zeta^2 l^2 \nabla^2) t_{ij} = \sigma_{ij} \quad , \zeta^2 l^2 = (e_0 a_0)^2 \quad , \text{Noté : } (e_0 a_0)^2 = \mu \quad (\text{III.5})$$

Où : ∇ est l'opérateur de Laplace et μ est le paramètre non local.

Par souci de simplicité et pour éviter de résoudre des équations différentielles intégrales partielles, le modèle d'élasticité non locale, défini par les relations (III.2) - (III.4), a été largement adopté pour aborder divers problèmes d'élasticité linéaire et de mécanique micro- / nanostructurale [91].

Le modèle élastique non local précédent peut être étendu à des structures deux dimensions telles que les plaques. Un système de coordonnées cartésiennes x_i ($i=1, 2, 3$) est introduit de sorte

que les axes x_1 et x_2 se trouvent dans le plan médian de la plaque .Puisque l'épaisseur (h) de la plaque est très petite par rapport aux deux autres dimensions, on suppose que $\sigma_{33} = \mathbf{0}$. Les relations constitutives des efforts N_{ij}^{nl} et des moments M_{ij}^{nl} non locaux peuvent donc exprimer [91]:

$$N_{ij}^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{ij} dx_3, \quad M_{ij}^{nl} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t_{ij} x_3 dx_3 \quad (\text{III.6})$$

En substituant l'opérateur différentiel linéaire (III.4) et l'équation (III.5) à l'équation (III.6), on obtient :

$$\left[1 - (e_0 a_0)^2 \nabla^2\right] N_{ij}^{nL} = N_{ij}, \quad \left[1 - (e_0 a_0)^2 \nabla^2\right] M_{ij}^{nL} = M_{ij} \quad (\text{III.7})$$

Avec : N_{ij} et M_{ij} sont les forces résultantes locales et les moments résultants locaux (classiques) définis par :

$$N_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (\text{III.8})$$

L'opérateur différentiel est (∇^2) dans l'équation (III.5) est l'opérateur de Laplace tridimensionnel en général. Pour les modèles à plaques dans l'équation (III.7), il peut être réduit à l'opérateur de Laplace bidimensionnel en ignorant la composante différentielle par rapport à x_3 , soit :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (\text{III.9})$$

Nous renvoyons aux chapitres suivants pour plus de détails sur l'application de la méthode.

III.6 Avantage et inconvénient de la nanotechnologie

Bien que la nanotechnologie soit une voie vers l'avenir, avec de grands avantages dans divers domaines, rien n'est parfait. Les avantages et les inconvénients de la nanotechnologie sont facilement énumérés, et en voici quelques-uns:

La nanotechnologie peut en fait révolutionner de nombreux produits, procédures et applications électroniques. Les domaines qui bénéficient du développement continu de la nanotechnologie en matière de produits électroniques comprennent les nano transistors, les nano diodes, les écrans à plasma, les ordinateurs quantiques et bien d'autres. Les points quantiques aussi, par exemple, sont de minuscules cellules produisant de la lumière qui pourraient être utilisées pour l'éclairage ou à des fins telles que des écrans d'affichage. Les puces de silicium peuvent déjà contenir des millions de composants, mais la technologie atteint sa limite; à un certain moment, les circuits deviennent si petits que si une molécule n'est pas à sa place, le circuit ne fonctionnera pas correctement. La nanotechnologie permettra de construire des circuits de manière très précise au niveau atomique. Les nanomatériaux peuvent encore offrir l'avantage aux outils informatique industriels (ordinateur, les téléphones intelligents et les clés USB, etc.) d'être plus rapides et devenir de plus en plus petits.

La nanotechnologie peut également profiter au secteur de l'énergie. Le développement de produits de production d'énergie, d'absorption d'énergie et de stockage d'énergie plus efficaces dans des dispositifs plus petits et plus efficaces est possible grâce à cette technologie. Des éléments tels que les batteries, les piles à combustible et les cellules solaires peuvent être construits plus petits, mais peuvent être rendus plus efficaces avec cette technologie.

Une autre industrie qui peut bénéficier de la nanotechnologie est le secteur de la fabrication qui aura besoin de matériaux tels que des nanotubes, des aérogels, des nanoparticules et d'autres articles similaires pour fabriquer leurs produits. Ces matériaux sont souvent plus solides, plus durables et plus légers que ceux qui ne sont pas produits à l'aide de la nanotechnologie.

Dans le monde médical, la nanotechnologie est également considérée comme une aubaine, car elle peut aider à créer ce que l'on appelle des médicaments intelligents. Ceux-ci aident à guérir les gens plus rapidement et sans les effets secondaires des autres médicaments traditionnels. Vous constaterez également que la recherche sur les nanotechnologies en médecine se concentre

désormais sur des domaines tels que la régénération tissulaire, la réparation osseuse, l'immunité et même les remèdes pour des maladies telles que le cancer, le diabète et d'autres maladies potentiellement mortelles. De plus, le domaine de l'imagerie médicale peut être amélioré avec la capacité de ciblage spécifique des tissus malades à des résolutions non compatibles avec technologies actuelles [92]

Outre leurs avantages, il existe également un certain nombre d'inconvénients associés à l'utilisation des nanomatériaux. L'émergence de la nanotechnologie a conduit à la pollution causée par des milliards de minuscules particules de plastique dans les océans, les cours d'eau et même dans notre corps; l'impact à long terme de ces particules n'est pas bien compris. Les travailleurs de haute technologie sont exposés à des nanoparticules et/ou des solvants inhabituels peuvent causer de graves maladies ou endommager le corps humain par exemple les nanotubes de carbone peuvent provoquer une infection des poumons, Il est même possible d'être confronté aux nanomatériaux lors de la consommation des aliments contaminés. Il permette aussi de fabriquer des machines «intelligentes» à grande échelle et très précises a étendu les opérations de forage pétrolier et d'exploitation minière dans des zones de l'environnement qui étaient auparavant protégées de ces activités ainsi que le coût d'installation des nano- équipements est souvent très élevé.

III.7 Conclusion

C'est pourquoi les nanomatériaux suscitent une grande attention en raison de leur potentiel à faire développer et à améliorer les dispositifs actuels. Ce chapitre présente un bilan de connaissance sur la classification des matériaux nanostructurés ainsi que leurs différentes méthodes de fabrication et leurs avantages et inconvénients. Il examine également la théorie des champs du continuum non local des matériaux nanostructurés afin d'ouvrir la voie aux chercheurs et aux scientifiques des nanosciences et des nanotechnologies et produire des produits innovants de nouvelle génération qui offrent des performances plus élevées à un coût inférieur et une durabilité améliorée.

CHAPITRE IV

***«COMPORTEMENTS DES PLAQUES
FONCTIONNELLEMENT GRADUEES»***

Comportements des plaques fonctionnellement graduées

IV.1 Introduction

Les plaques sont largement utilisées dans une variété d'applications ; elles peuvent être des composants structurels ou même des structures complètes comme les planchers, les dalles de fondation, les murs de soutènement, les tabliers de pont et les ponts à dalles.

Devant ce vaste éventail de domaine d'applications, les plaques de matériaux fonctionnellement gradués éveillent l'intérêt de certaines futures applications qui souhaitent mieux de comprendre leur comportement mécanique dû aux différentes contraintes imposées, ce qui est permis également d'optimiser leurs performances mécaniques, pour répondre d'une manière plus efficace aux différents besoins.

Plusieurs théories des plaques sont présentées dans la littérature, chacun présentant un modèle analytique permettant une étude approfondie sur la réponse des plaques soumises à différentes charges statiques et dynamiques. Ces théories des plaques peuvent également être regroupées selon leurs relations contrainte-déformation tout en tenant compte la géométrie de la plaque (mince ou épaisse), le comportement du matériau utilisé, le type et le mode de chargement appliqué. Les théories des plaques élastiques linéaires sont basées sur l'hypothèse d'une relation linéaire entre la contrainte et la déformation selon la loi de Hooke bien connue, tandis que l'élasticité non linéaire, la plasticité et la viscoélasticité considèrent des relations contrainte-déformation plus complexes. Toutes ces théories, à l'exception de la viscoélasticité, qui ne traite que les conditions dynamiques, peuvent être subdivisées en statique et dynamique des plaques, selon que les charges externes sont de nature statique ou dynamique, comme cela se fait dans les théories de poutres plus élémentaires [93]. Dans la pratique, c'est certainement le comportement le plus couramment utilisé, toutefois les autres types de comportement sont de plus en plus utilisés, car ils sont plus appropriés à la réalité. Différentes théories des plaques FGM sont également présentées dans ce chapitre afin de caractériser ces structures conçues par un matériau dont le comportement est linéaire élastique ou linéaire viscoélastique et de sa modélisation afin de nous permettre donc un dimensionnement plus strict des structures réalisées.

IV.2 Elasticité linéaire :

En physique, l'élasticité est la propriété d'un matériau solide à retrouver sa forme et ses dimensions d'origine, après avoir été déformé, dès que la cause qui l'a déformé cesse d'agir. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des sollicitations lui sont appliquées. On admet généralement l'hypothèse du régime linéaire dont les déformations produites sont petites.

IV.2.1 Tenseur d'élasticité :

La loi de Hooke est une loi permettant d'évaluer le comportement élastique des solides soumis à des contraintes de faibles amplitudes dont la réponse est proportionnelle à l'amplitude du chargement et la relation entre les contraintes (σ) et les déformations (ϵ) est exprimé comme une fonction linéaire. Cette relation s'exprime ainsi de la manière suivante :

$$\sigma_{ij} = C : \epsilon \quad (\text{IV.1})$$

Où : σ_{ij} est une contrainte équivalente au tenseur des contraintes, définie par :

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

Sachant que les contraintes (σ_{11} , σ_{22} , σ_{33}) sont les contraintes principales ; ils permettent d'interpréter immédiatement le type de sollicitation subie. Par ailleurs, les termes en dehors de la diagonale principale sont correspondent à du cisaillement. La relation entre les composants du tenseur de contrainte et la notation conventionnelle des composants de contrainte est la suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{xx}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{yy}, \quad \sigma_{33} = \sigma_{zz} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{23} = \tau_{zy} = \tau_{yz}, \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Le terme C : est un tenseur des modules d'élasticité du quatrième ordre (comportant 81 termes pour les matériaux anisotropes) appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité (les composantes covariantes de ce tenseur sont C_{ijkl}). Le tenseur des rigidités fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. Notons qu'une relation inverse peut s'établir de manière équivalente en exprimant les déformations en fonction des contraintes à l'aide d'un tenseur appelé tenseur de complaisance (S) sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = S: \sigma_{ij} \quad (\text{IV.4})$$

En pratique, la loi linéaire introduite précédemment est souvent trop générale et peut être simplifiée. Si l'on considère que le matériau est isotrope, c'est-à-dire qu'il a le même comportement dans toutes les directions $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ et $C_{ijkl} = C_{jikl}$. Alors des raisons de symétrie des tenseurs des déformations et des contraintes, la loi de comportement se simplifie alors grandement et se réduit à 36 coefficients ; le tenseur des contraintes représenté par une matrice dans une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

IV.2.1.1 Matériau anisotrope

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie $C_{ijkl} = C_{klij}$. Un tel matériau est appelé matériau triclinique. Donc on peut représenter le tenseur d'élasticité par une matrice 6×6 symétrique :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Les composantes de la matrice présente dans la relation précédente sont souvent notées C_{IJ} , avec I et J variant de 1 à 6.

IV.2.1.2 Matériau monoclinique

Ce matériau possède un plan de symétrie. L'expression de la matrice de passage ne change pas pour tout changement de repère symétrique par rapport à ce plan. Supposons le plan (e_1, e_2) plan de symétrie du matériau, la matrice de rigidité se résume à l'expression suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

La matrice de souplesse à la même forme, le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

IV.2.1.3 Matériau orthotropique

Le matériau orthotrope est un matériau à 03 plans de symétrie orthogonale deux à deux. En pratique, c'est le cas des tissus noyés dans un polymère. La même démarche que précédemment conduite aux expressions dans un repère défini par les axes d'orthotrope :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 09.

IV.2.1.4 Matériau transversalement isotrope

Le matériau unidirectionnel est un matériau possédant un axe de symétrie, par exemple l'axe (e_1) . C'est le cas pour un ensemble de fibres unidirectionnelles dans un substrat. Par géométrie, le matériau unidirectionnel est orthotrope, il est souvent appelé orthotrope de révolution. Dans le repère d'orthotropie, la matrice s'écrit :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

La matrice de rigidité d'un matériau transversalement isotrope à 05 constantes d'ingénieur.

IV.2.1.5 Matériau isotrope

Si le matériau possède un nombre infini de plan de symétrie, on dit qu'il est isotrope. Dans ce cas le nombre de constantes indépendantes vaut seulement deux (02) :

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (\text{IV.10})$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

IV.2.2 Termes de rigidité élastique

Pour un milieu supposé homogène et isotrope, la formulation de la loi de comportement doit être identique en tout point et indépendante de la direction. Dans une telle base, la loi de Hooke possède une écriture relativement simple, de la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{IV.12})$$

C'est alors qu'on peut également écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.13})$$

On peut inverser l'équation(IV.12), on obtient donc les déformations en fonction des contraintes :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{IV.14})$$

Cela signifie que le tenseur des rigidités a deux composantes indépendantes (λ , μ) : les coefficients élastiques de Lamé sont donnés par:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{parfois noté } G), \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{IV.15})$$

Où : G est le module d'élasticité transversale, E est le module de Young (Pa), ν est le coefficient de Poisson (sans dimension) et ils sont obtenus expérimentalement à partir des essais physiques (traction....etc.).

IV.2.3 Théories des plaques élastiques :

IV.2.3.1 Définitions et hypothèses :

La plaque est un solide délimité par des surfaces, plat en géométrie, dont les dimensions latérales sont grandes par rapport à la séparation entre les surfaces « épaisseur» (**Fig IV.1**).

- Nous supposons un plan de symétrie (le plan moyen) est équidistant des faces supérieure et inférieure.
- Les plaques sont soumises à des charges transversales (charges normal à sa surface).
- Déplacements latéraux et les rotations de la mi- épaisseur sont petits ($w \ll h$, $\theta \ll h$).
- Charges transversales supportées par flexion combinée à l'action de cisaillement.
- Plaque mince $\Rightarrow h/b < 1/10$ avec b est le côté le plus petit
- Plaque épaisse $= 1/10 \leq h/b \leq 1/4$

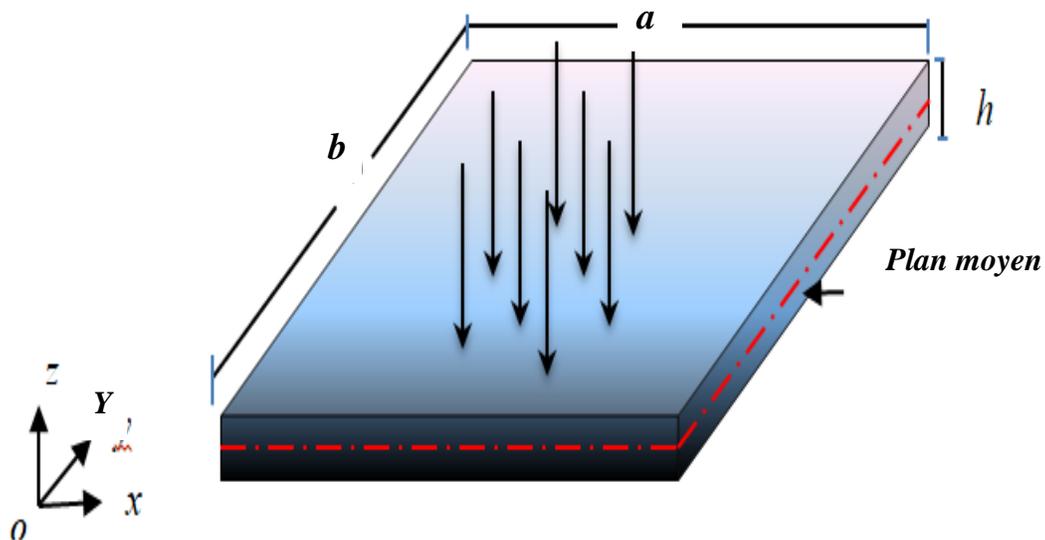


Figure IV.1 Géométrie d'une plaque

IV.2.3.2 Théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Kirchhoff a annoncé une théorie de la plaque mince, dans laquelle énonce les hypothèses suivantes :

- La plaque est initialement plat et le matériau constituant isotrope et avoir un comportement élastique linéaire ; c'est-à-dire qu'il suit la loi de Hooke.
- L'épaisseur de la plaque est beaucoup plus petite par rapport à ses autres dimensions ; c'est-à-dire que la plus petite dimension latérale de la plaque est au moins 10 fois plus grande que son épaisseur.
- la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque
- Les déformations restent planes et normales à la surface moyenne après déformation. Par conséquent, Les déformations transversales de cisaillement sont négligeables. i.e.,

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = 0$$

- Les contraintes normales σ_{zz} dans le sens transversal sont négligées par rapport aux autres contraintes.
- Dans le plan, les déformations sont petites par rapport à l'unité - ne considérez que les déformations linéaires.

- Le plan moyen de la plaque ne subit aucune déformation.
- L'inertie rotative est négligée

Grâce à ces hypothèses, les déformations peuvent être décrites entièrement en termes de déformation du plan de la surface moyenne ; la plaque est donc réduite à l'étude d'un problème bidimensionnel constitué par la surface moyenne de la plaque. **La figure IV.2** montre l'hypothèse de déplacement « u » dans le plan x - z .

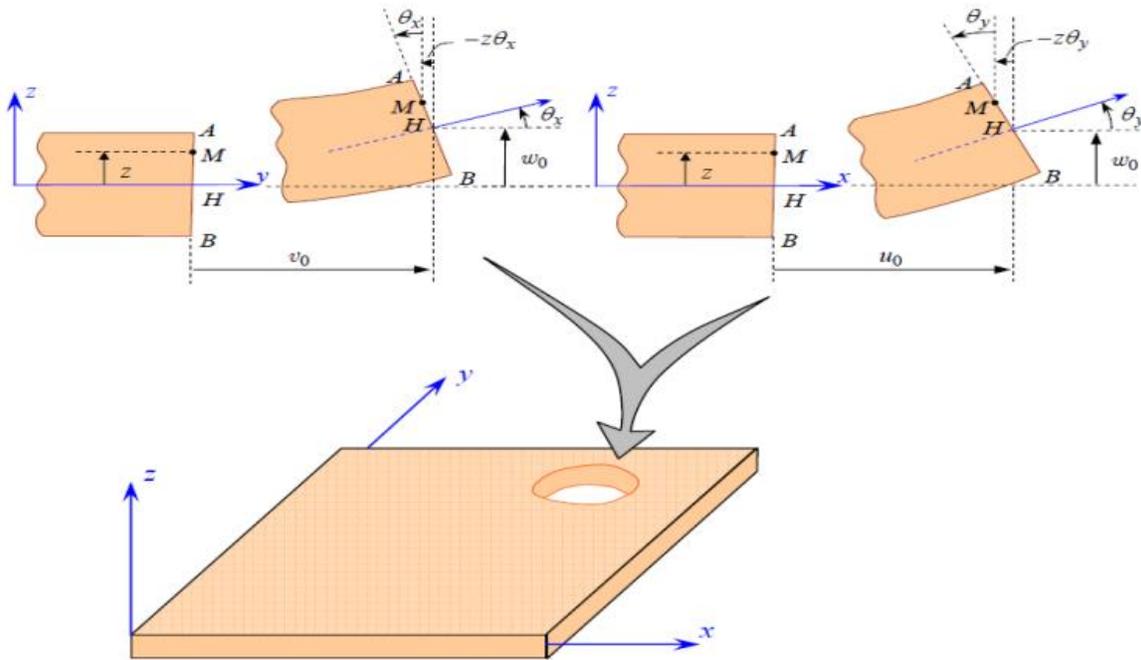


Figure IV.2 la plaque avant et après déformation (Modèle de Kirchhoff) [94]

Cette hypothèse représente une extension de l'hypothèse de Bernoulli pour les poutres ou le champ de déplacements est représenté comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{IV.16}$$

Où : u , v , w sont les composantes du champ de déplacement d'un point à la surface moyenne ($z = 0$).

La théorie de Kirchhoff a présenté des meilleurs résultats pour les plaques minces qui reviennent à négliger à la fois le cisaillement transversal et les effets transversaux normaux sous les hypothèses de petites déformations et petits déplacements. Tandis que pour une plaque épaisse l'influence des déformations de cisaillement doit être inclus, cela conduit plusieurs chercheurs à développer d'autres théories pour prendre ces effets en compte.

IV.2.3.3 Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin (FSDT)

Les théories de déformation par cisaillement du premier ordre pour des plaque moyenne épaisse, l'une proposée par Reissner [95] et l'autre par Mindlin [96], sont largement utilisées, même aujourd'hui, afin d'éliminer le défaut susmentionné de la théorie classique des plaques et d'obtenir des prédictions précises du global caractéristiques de réponse de ces structures. La théorie Reissner – Mindlin (**Fig IV.3**) se base sur les hypothèses suivantes :

- La déformation transversale ε_{zz} est nul (pas de variation d'épaisseur).
- Les contraintes normales σ_{zz} dans le sens transversal sont négligées par rapport aux autres contraintes.
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas perpendiculaire à la surface moyenne déformée. Cependant, les déformations transversales de cisaillement sont incluses dans la théorie.
- L'effet de l'inertie de rotation est pris en compte.

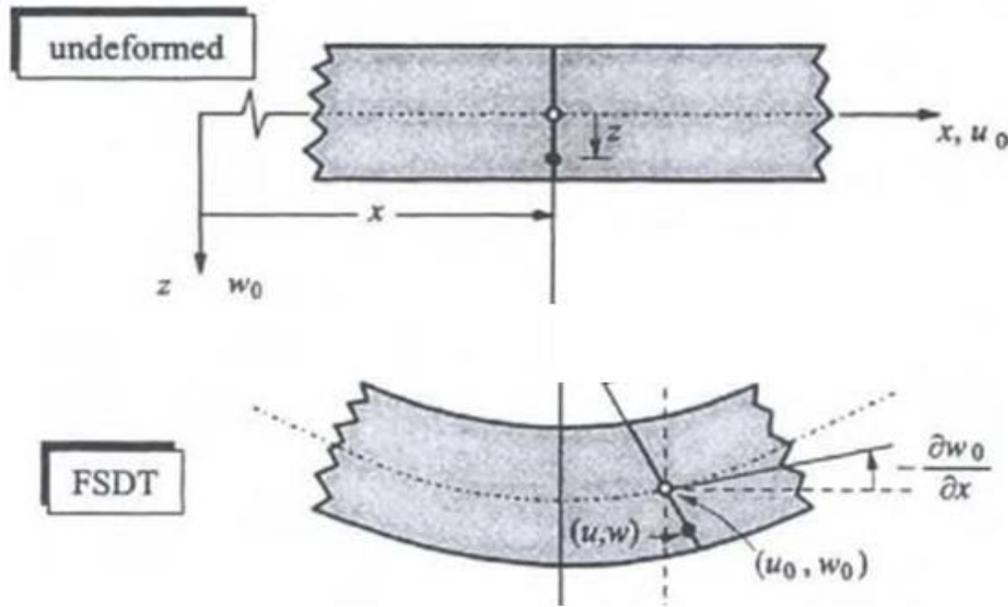


Figure IV.3 la plaque avant et après déformation (Reissner-Mindlin)

Les déformations en termes de déplacements proposé par la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre de Reissner-Mindlin(FSDT) sont données comme suit:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{IV.17}$$

Où : $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$, (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements et les rotations d'un point à la surface moyenne ($z = 0$) respectivement.

Le champ de déplacement définis par le modèle FSDT permet une déformation de cisaillement transversale constante dans l'épaisseur ainsi une distribution uniforme des contraintes de cisaillement correspondant. Afin de corriger cet aspect, un facteur de correction de cisaillement est introduit, pour compenser la distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites au niveau des faces supérieure et inférieure de la plaque.

IV.2.3.4 Théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

Les théories des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont pour objet d'améliorer la cinématique des théories de déformation par cisaillement du premier ordre

(FSDT), afin d'obtenir des résultats plus fiables, une description plus précise de comportement et décrire correctement le mouvement des structures de type plaque. Elles sont présentées par des polynômes d'ordre supérieur dans l'expansion des composantes de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque et introduisent des inconnues supplémentaires qui sont souvent difficiles à interpréter en termes physiques permettre de montrer l'effet de cisaillement sans nécessité d'un facteur de correction, particulièrement pour des plaques avec des épaisseurs plus importantes. La plupart des modèles d'ordre supérieur proposé sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque, permettant de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée (**Fig IV.4**).

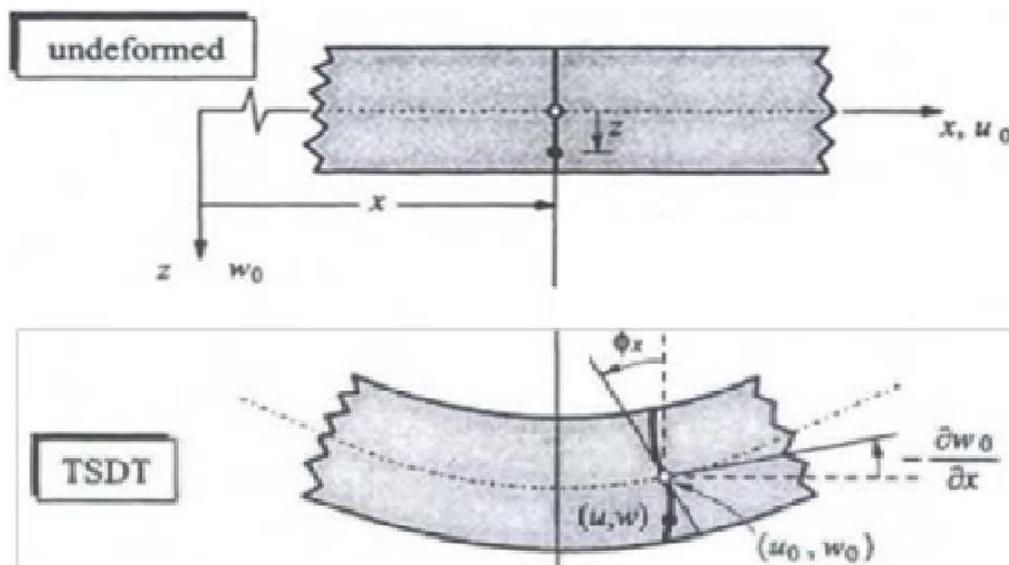


Figure IV.4 la plaque avant et après déformation (TSDT)

Durant ces dernières années, plusieurs théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur ont été développées. La théorie la plus populaire utilisée est celle de J. N. Reddy [97], la théorie de troisième ordre de déformation en cisaillement (TSDT), elle compte non seulement l'effet de cisaillement, mais aussi une variation parabolique de la déformation de cisaillement transverse, dont le modèle de champ des déplacements ainsi présenté:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) + f(z) \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) + f(z) \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Où : $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$, (ϕ_x, ϕ_y) sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement et $f(z)$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur, donnée par :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \tag{IV.19}$$

De nouvelles formulations et théorie d'ordre supérieur sont proposées dans la littérature tout sont caractérisé par sa fonction de forme ou sa fonction de cisaillement transverse, Touratier [98] et Shimpi [99] ont proposés une fonction trigonométrique sinusoidale pour décrire la distribution des déformations transversales(SSDT), Karama et al [100] ont élaboré une théorie d'ordre élevé avec une variation exponentielle de déformation de cisaillement (ESDPT), Mechab. I [101], Mechab et al [102] et sobhy [103] ont présentés une variation hyperbolique (HSDPT) des déformations et des contraintes de cisaillement transverse (**Tableau VI.1**).

Tableau IV. 1 Différentes fonctions de déformation par cisaillement transverse.

HSDT	$f(z)$
Touratier [98]	$f(z) = \frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Shimpi [99]	$f(z) = h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{z}{h}\right) - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right]$
Karama et al [100]	$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Mechab .I [101]	$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{\cosh(\pi/2)-1} z - \frac{h/\pi \sinh(\pi z/h)}{\cosh(\pi/2)-1}$
Mechab et al [102]	$f(z) = \frac{2z \sinh(z^2/h^2)}{2 \sinh(1/4) + \cosh(1/4)}$
Sobhy [103]	$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$

IV.3 Visco-élasticité linéaire:

Le comportement élastique des matériaux peut rendre compte pour les matériaux qui disposent la capacité de stocker de l'énergie mécanique sans dissipation d'énergie. En revanche, un fluide visqueux newtonien dans un état de contrainte non hydrostatique implique une capacité à dissiper l'énergie, sans la stocker. De ce fait, les matériaux dont le comportement est viscoélastique sont les matériaux qui doivent sortir du cadre de ces deux théories, c'est-à-dire sont ceux pour lesquels une partie, mais pas la totalité, du travail effectué pour les déformer, peut être récupérée [104]. De tels matériaux possèdent une capacité à la fois à stocker et à dissiper l'énergie mécanique dont la relation entre la contrainte et la déformation dépend du temps. Certains phénomènes dans les matériaux viscoélastiques sont [105]:

1. si la contrainte est maintenue constante, la déformation augmente avec le temps (fluage);
2. si la déformation est maintenue constante, la contrainte diminue avec le temps (relaxation);
3. la rigidité effective dépend du taux d'application de la charge;
4. si une charge cyclique est appliquée, une hystérésis (un retard de phase) se produit, conduisant à une dissipation d'énergie mécanique;
5. les ondes acoustiques subissent une atténuation;
6. le rebond d'un objet suite à un impact est inférieur à 100 cents;
7. pendant le laminage, une résistance de frottement se produit.
8. Le matériau viscoélastique avoir un comportement non-vieillissant si ses propriétés mécaniques ne varient pas avec le temps sous divers phénomènes (température, hygrométrie, réaction chimique...etc.) indépendamment des sollicitations mécaniques auxquelles il est exposé.

IV.3.1 Essais mécaniques

Différent essais mécanique permettent de caractériser le comportement des matériaux viscoélastiques sont présentés.

IV.3.1.1 .Essai de fluage et recouvrance de la déformation:

L'essai de fluage correspond à l'application d'un champ de contraintes constantes (notée σ_0) ou des sollicitations uniaxiales (traction ou compression) et à l'observation de l'évolution de la

déformation résultante (notée $\varepsilon(t)$) pendant un certain temps, puis en retirant la charge. La réponse d'un matériau viscoélastique utilisé pour cet essai est illustrée à la **figure IV.5**.

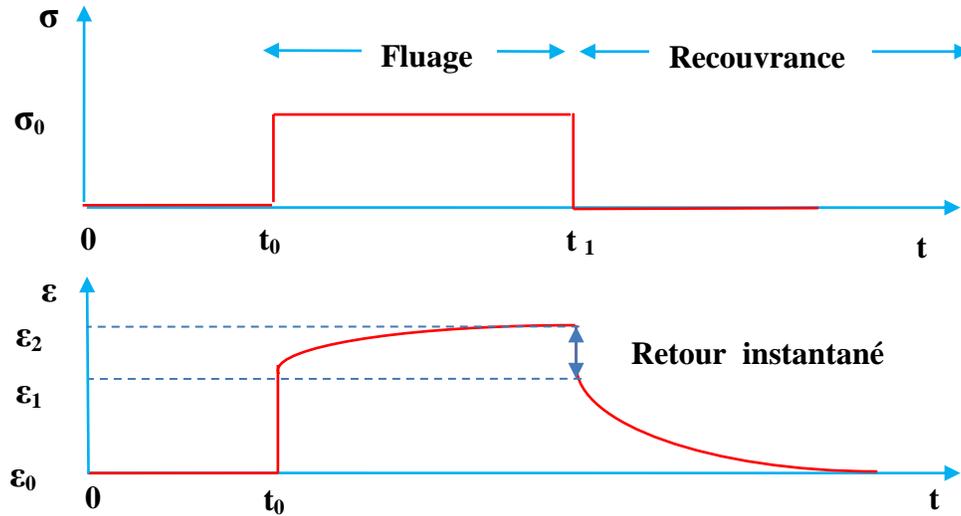


Figure IV.5 Essai de fluage-recouvrance

La **figure IV.5** montre le résultat d'un essai de fluage recouvrance présenté par un graphique de déformation en fonction du temps d'un matériau auquel une contrainte constante (notée σ_0) a été appliquée pendant un certain temps, puis on l'interrompt par une décharge instantanée de même amplitude à l'instant t_1 . La ligne verticale initiale représente la déformation initiale que le matériau subit en raison de la contrainte (notée ε_0) à t_0 . Ceci est similaire aux ressorts qui s'étirent immédiatement lorsqu'une force est appliquée. Avec la contrainte constamment appliquée (notée σ_0), la déformation du matériau continue de se évoluer au fil du temps (notée ε_1). Lorsque la force est supprimée, la diminution initiale de la déformation est égale à la quantité de déformation que le matériau subit instantanément lors de la première application de la force. Au fil du temps, le matériau atteint l'équilibre, et sa déformation devient nulle. L'histoire de la contrainte appliquée $\sigma(t)$ est déterminé sous la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) = \sigma_0 H_{t_0}(t) \quad (\text{IV.20})$$

$$\text{Où: } H_{t_0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < t_0 \\ 1/2, & \text{si } t = t_0 \\ 1, & \text{si } t > t_0 \end{cases} \text{ est la fonction Heaviside ;} \quad (\text{IV.21})$$

La réponse correspondante est souvent présentée en termes de déformation, par la formule :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J_{t_0}(t) \quad (\text{IV.22})$$

Où : $J_{t_0}(t)$ est la fonction de fluage ou de complaisance correspondante à l'expérience de retard effectuée à l'instant t_0 sous l'amplitude constante σ_0 . Elle possède les propriétés suivantes [106] :

$$J_{t_0}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < t_0 \\ J_{t_0}(t) > 0, & \text{si } t = t_0 \\ \text{croissante,} & \text{si } t \geq t_0 \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

A l'instant $t = t_0$ La fonction $J_{t_0}(t)$ présente une discontinuité, correspondant à la réponse instantanée du matériau qu'on a notée $J_{t_0}(t_0^+)$. Par ailleurs, si le matériau ne subit pas de transformation physique ou chimique brutale qui modifierait instantanément ses propriétés mécaniques, la fonction de fluage $J_{t_0}(t)$ est continue par rapport au variable t_0 .

IV.3.1.2 Essai de relaxation et effacement des contraintes:

L'essai de relaxation consiste à imposer une marche de déformation d'amplitude ε_0 à l'instant t_0 et à le maintenir constant pour un temps donné puis on l'annule instantanément à l'instant t_1 et de suivre l'évolution des contraintes $\sigma(t)$. La contrainte mesurée instantanément, lors de l'application de la déformation initiale montre une décroissance exponentielle au cours du temps comme montre la **figure IV.6**.

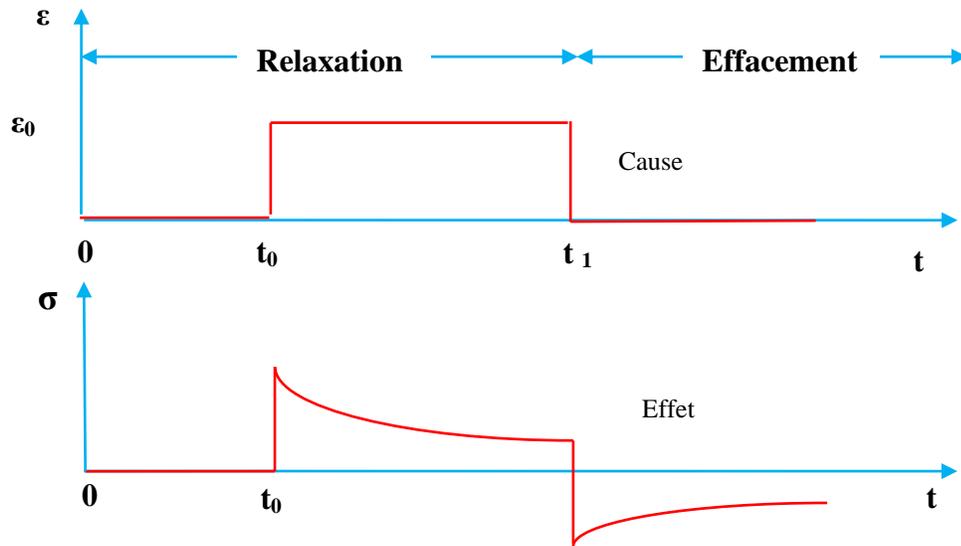


Figure IV.6 Essai de relaxation-effacement

Dans l'essai de relaxation, on peut exprimer La marche de déformation imposée, par la relation :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) = \varepsilon_0 H_{t_0}(t) \quad (\text{IV.24})$$

Le module de relaxation $R_{t_0}(t)$ est défini comme étant le ratio de la contrainte enregistrée en fonction du temps par l'amplitude de l'échelon de déformation constante:

$$R_{t_0}(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{telle que : } R_{t_0}(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < t_0 \\ R_{t_0}(t^+); 0 < R_{t_0}(t) < \infty, \text{ si } t = t_0 \\ \text{décroissante, si } t > t_0 \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

À partir des essais dépendant du temps aux matériaux décrits ci-dessus, nous pouvons établir les principes de base régissant le comportement dépendant du temps. Cependant, dans la pratique, l'historique des contraintes ou des déformations peut se rapprocher de l'une de celles décrites ou d'un mélange, c'est-à-dire que le fluage et la relaxation peuvent se produire simultanément sous une charge combinée, ou que l'historique des charges ou des déformations peut être une variation cyclique ou aléatoire.

IV.3.2 Principe de superposition de Boltzmann(1867)

Le principe de superposition de Boltzmann émet l'hypothèse que la superposition des sollicitations implique la superposition homologue des réponses, c'est-à-dire que la réponse en déformation d'un historique de chargement est simplement la somme des réponses des déformations pour chaque incrément de contraintes pris individuellement et vice versa et ceci que pour les matériaux ayant un comportement linéaire (**Fig IV.7**).

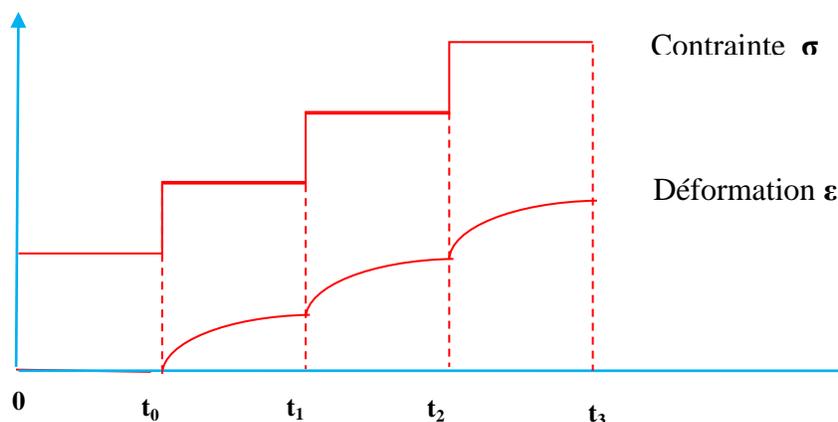


Figure IV.7 Principe de Boltzmann

La **figure IV.7** stipule que la contrainte (σ) au temps (t) est la somme des effets de contrainte de chaque impulsion (τ) donnée produit par toute histoire de déformation ε dans l'intervalle $[0, t]$. En utilisant la linéarité du comportement, on peut exprimer la réponse à toute l'histoire de sollicitation (contrainte ou déformation) à partir de la connaissance des fonctions de fluage (J) et de relaxation (R). Dans la limite, lorsque la largeur d'impulsion (τ) devient petite, la sommation converge vers une intégrale, la relation contrainte-déformation en viscoélasticité linéaire peut s'exprimer, à l'aide des intégrales de Boltzmann sous la forme:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} \quad (\text{IV.26})$$

Et inversement :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \quad (\text{IV.27})$$

Où : $R(t-\tau)$ et $J(t-\tau)$ des fonctions de relaxation et de fluage respectivement intégrables pour le variable (τ) dans tout temps $t \geq 0$ lorsque l'histoire de déformation (contrainte) se disparaît de $-\infty$ à 0 .

IV.3.3 Modèles rhéologiques :

Avant la résolution d'un problème viscoélastique, on a besoin d'identifier les lois fondamentales permettant de décrire le comportement linéaire de matériaux viscoélastiques. Plusieurs modèles rhéologiques qui servent à caractériser le comportement complexe de ses matériaux sont constitués à partir de la combinaison des éléments simples mécaniques à savoir :

- Le ressort qui traduit la réponse élastique linéaire parfaite, dont la contrainte σ est proportionnelle à la déformation ε obéissant à la loi d'Hooke : $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$, où E est la constante de proportionnalité appelée module d'élasticité ou module d'Young (Fig. III.8).
- L'amortisseur, qui symbolise un élément linéaire visqueux ou un fluide de Newton, dont la contrainte σ est proportionnelle au gradient de vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ défini par la loi de comportement linéaire de Newton : $\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t)$, où η est une constante de proportionnalité caractéristique du matériau appelée coefficient de viscosité et $(\dot{\cdot})$ représente une dérivée par rapport au temps (**Fig IV.8**).



Figure IV.8 Modèles rhéologiques élémentaires

Pour calculer des équations différentielles pour des modèles rhéologiques plus compliqués dont les éléments de base sont reliés en série ou en parallèle, les règles suivantes sont utilisées :

- Pour les éléments reliés en parallèle, leurs déformations est constante, et la contrainte totale équivaut à une somme de contraintes dans des éléments individuels.
- Pour les éléments reliés en série, leurs contraintes est constant, et la déformation totale est égale à une somme de contraintes dans des éléments individuels.

IV.3.3.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle de Kelvin-Voigt correspond à l'assemblage parallèle d'un ressort de module d'élasticité (E) et d'un amortisseur de viscosité (η) représenté sur la **figure IV.9**.

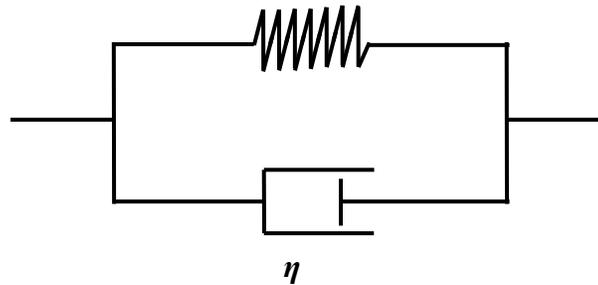


Figure IV.9 Modèle Kelvin-Voigt

Afin qu'ils subissent tous les deux la même déformation, la contrainte totale est la somme des contraintes dans chaque élément. Alors, la contrainte totale est définie de la manière suivante :

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \quad (\text{IV.28})$$

Avec : σ_e , σ_v sont les contraintes élastiques du ressort et visqueuses de l'amortisseur respectivement.

La déformation totale est donnée par:

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \quad (\text{IV.29})$$

Avec : ε_e , ε_v sont les déformations élastique du ressort et visqueuse de l'amortisseur respectivement.

L'équation différentielle de comportement s'écrit comme:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow \frac{\sigma}{\eta} = \frac{E}{\eta} \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{IV.30})$$

La solution de l'équation (IV.30) est donné par :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-\left(\frac{E}{\eta}t\right)}\right) \quad (\text{IV.31})$$

La fonction du fluage est donc :

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right) \quad (\text{IV.32})$$

Noté : $\tau = \eta/E$ est le « **temps de fluage** » ou « **de retard** ».

Pour un essai de fluage, au moment de l'application de la charge, la déformation totale sera nulle. Par contre, si la force est maintenue, la déformation a subi une évolution progressive. En effet, la déformation est décroît après la suppression de la contrainte jusqu'à atteint sa valeur initiale et le matériau retrouve progressivement sa forme initiale (**Fig IV.10**).

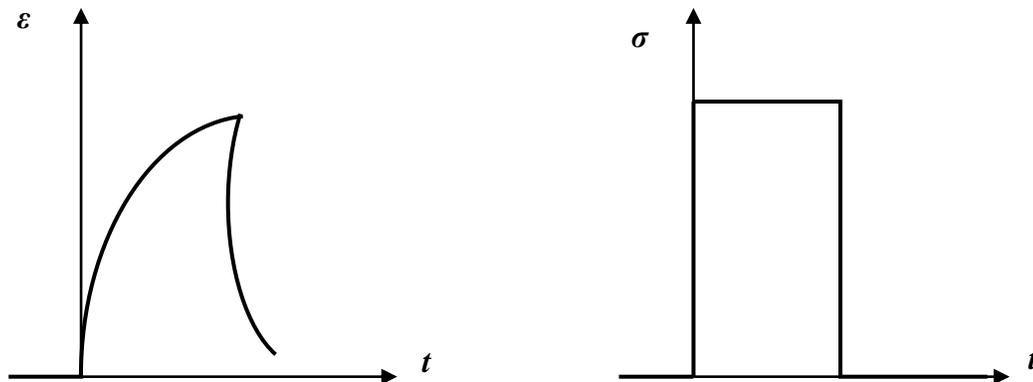


Figure IV.10 Modèle Kelvin-Voigt

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter l'effet de relaxation, lors l'application d'un saut de déformation en $t = 0$ se résulte une contrainte infinie produit par l'amortisseur, cependant si on maintient une déformation constante (noté ε_0) de ce fait, la vitesse de déformation ($\dot{\varepsilon}$) sera nulle et la contrainte se stabilise à la valeur ($E \varepsilon_0$) donc, Il n'y a pas une diminution et une disparition complète de la contrainte.

IV.3.3.2 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Le modèle de Kelvin Voigt généralisé est obtenu par l'assemblage de « n » éléments du modèle de Kelvin-Voigt associés en série (**Fig IV.11**).

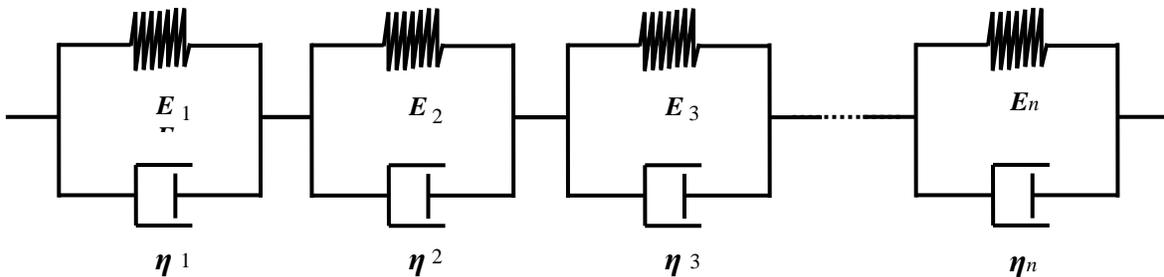


Figure IV.11 Modèle du Kelvin-Voigt généralisé

La déformation totale est donnée par :

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n \quad (\text{IV.33})$$

Ce modèle permis une bonne description expérimentale de comportement d'un matériau viscoélastique soumis à l'essai de fluage (évolution de la déformation pour une contrainte constante). La fonction de complaisance $J(t)$ de fluage s'écrit alors :

$$J(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau_i}\right)} \right) \quad (\text{IV.34})$$

IV.3.3.3 Modèle de Maxwell

Le modèle Maxwell présente une similitude avec le modèle Voigt en ce qu'il est composé d'un ressort de Hooke linéaire et d'un amortisseur newtonien comme le montre la **figure IV.12**, sauf qu'ils sont connectés en série.

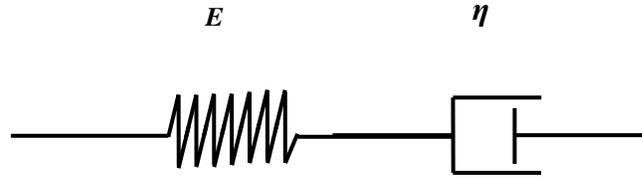


Figure IV.12 Modèle du Maxwell

Par conséquent, les relations des contraintes et des déformations peuvent être obtenues:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \quad (\text{IV.35})$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (\text{IV.36})$$

Après intégration de l'équation (IV.36) on obtient l'expression de la fonction de fluage suivante:

$$J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad (\text{IV.37})$$

Le modèle de Maxwell inadapté pour décrire le fluage, car sous une contrainte constante, le terme

$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\eta}$ d'où un écoulement newtonien est observé, ce qui n'est généralement pas vrai

pour les matériaux viscoélastiques. Néanmoins, dans le cas de relaxation, sous une déformation

constante appliquée à l'instant $t = 0$, $\dot{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma = 0$ on mesure $\sigma = \sigma_0$ (contrainte

initiale) correspondant à une réponse élastique du modèle $\sigma_0 = E\varepsilon$ puis elle

diminuée progressivement jusqu'à disparaître (**Fig IV.13**).

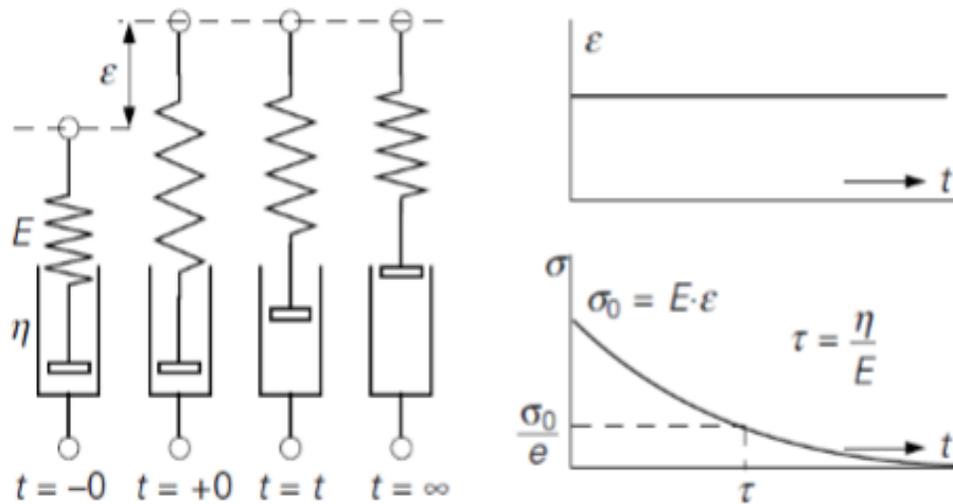


Figure IV.13 Relaxation du modèle Maxwell [107]

La fonction de relaxation, s'exprimera alors :

$$R(t) = Ee^{\left(\frac{-t}{\tau}\right)} \tag{IV.38}$$

Cette équation montre que la contrainte décroît de manière exponentielle avec une constante de temps caractéristique $\tau = \eta / E$ (temps de relaxation).

IV.3.3.4 Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle de maxwell généralisé est constitué d'un assemblage en parallèle de « n » éléments de modèle de maxwell (**Fig IV.14**) duquel la contrainte totale est donnée par :

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_n \tag{IV.39}$$

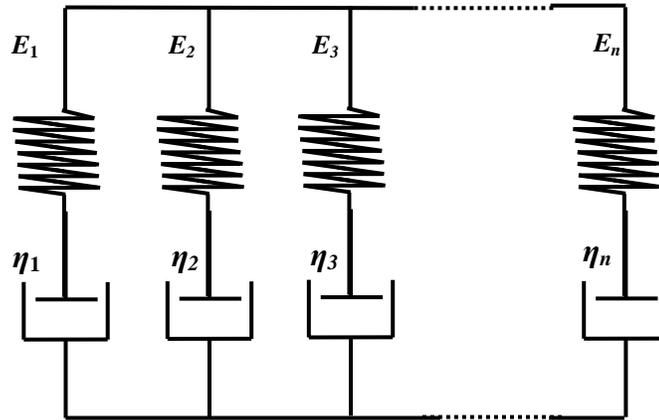


Figure IV.14 Modèle du Maxwell généralisé

Ce modèle donne aussi une meilleure description du comportement viscoélastique à la relaxation d'où la fonction de relaxation est donnée par la somme des fonctions de relaxation de chaque élément :

$$R(t) = \sum_{i=1}^n E_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (\text{IV.40})$$

IV.3.3.5 Solide linéaire standard

Le solide linéaire standard est le modèle le plus typique pour un matériau à une réponse élastique instantané dont la recouvrance ainsi que l'effacement est total car ils réagissent instantanément comme des matériaux élastiques et se rétablissent complètement lors du déchargement .Ce modèle est représenté par deux modèles équivalent :

a. Modèle de Zener

Le modèle de Zener est représenté par un ressort Hookéen auquel traduit la réponse élastique instantané associé en parallèle avec un élément de modèle Maxwell comme illustré sur la **figure IV.15**. On écrira donc :

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow \sigma = E_2 \varepsilon_2 + E_1 \varepsilon_1 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (\text{IV.41})$$

D'où : σ_1 et σ_2 sont les contraintes dépend à l'élément de Kelvin et à l'élément élastique respectivement. La déformation totale correspondant :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (\text{IV.42})$$

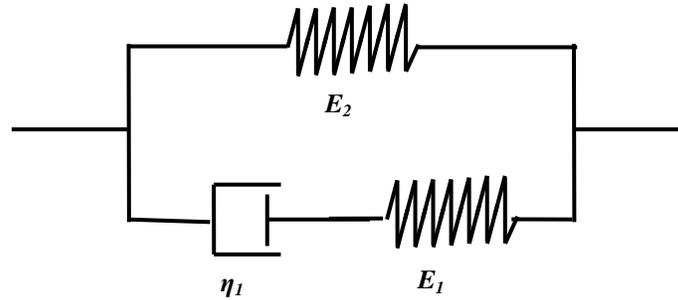


Figure IV.15 Modèle de Zener

On obtient ainsi rapidement la fonction de relaxation par :

$$R(t) = E_2 + E_1 e^{-t/\tau_1} \quad (\text{IV.43})$$

b. Modèle de Poynting-Thomson

Le modèle de Poynting –Thomson (**FigIV.16**) est le montage en série d'un élément de modèle de Kelvin-Voigt (E_1, η_1) associé à un ressort Hookéen (E_2) soumis à la même contrainte axiale :

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \sigma = E_2 \varepsilon_2 = E_1 \varepsilon_1 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (\text{IV.44})$$

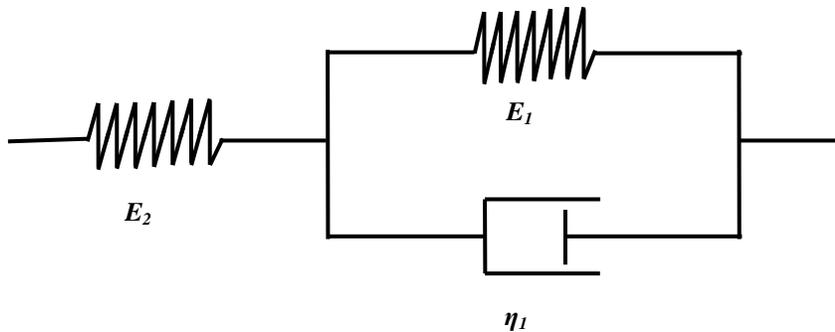


Figure IV.16 Modèle de Poynting-Thomson

La déformation totale est donnée par la somme des deux déformations résultante : l'élément de kelvin (ε_1) et l'élément élastique du ressort (ε_2) comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (\text{IV.45})$$

En déduit donc, la fonction du fluage :

$$J(t) = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) \quad (\text{IV.46})$$

c. Modèle de Burgers

Le modèle de Burgers est constitué de deux parties élastiques et deux parties visqueuses duquel associer en série les deux modèles de Kelvin-Voigt et celui de Maxwell (**Fig.IV.17**).

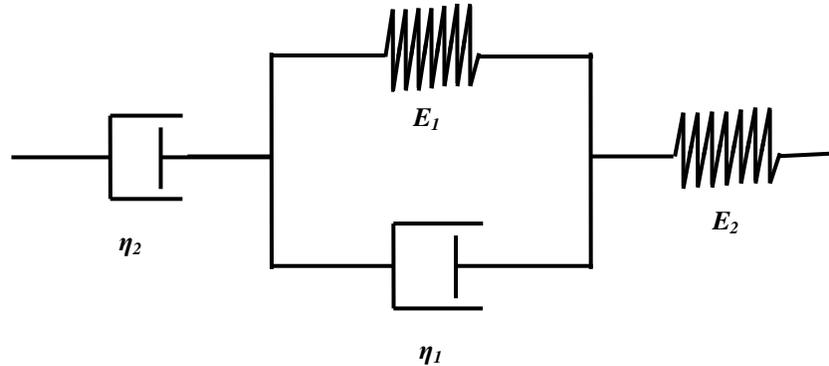


Figure IV.17 Modèle de Burgers

La déformation totale à un instant donné (t) serait la somme des déformations des trois éléments, où le ressort et l'amortisseur, du modèle de Maxwell sont considérés comme deux éléments.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (\text{IV.47})$$

Où : ε_1 est la déformation selon le modèle de Kelvin, ε_2 est la déformation du ressort et ε_3 est la déformation de l'amortisseur, à la fois du modèle de Maxwell, la fonction du fluage donnée par :

$$J(t) = \frac{1}{E_2} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) \quad (\text{IV.48})$$

IV.3.3.6 Viscoélasticité harmonique

Avant d'introduire des termes d'inertie et d'écrire des équations dynamiques, il faut examiner l'équation constitutive du matériau viscoélastique pour le cas particulier où la contrainte et la déformation sont des fonctions harmoniques de temps. Cette tâche peut être abordée de deux manières différentes. Soit on applique une contrainte harmonique à une éprouvette de tension et on demande la déformation qu'elle produit, ou on force sur l'échantillon une déformation décrite par une déformation oscillante et on demande la contrainte qui va se produire. Alors que la première approche peut sembler plus naturelle, le second a l'avantage de ne pas conduire à des signes négatifs à des endroits. Cependant, pour caractériser le comportement viscoélastique sous

un régime harmonique, la contrainte et la déformation pour un matériau purement élastique sont en phases d'un angle ($\varphi=0^\circ$), par contre pour un matériau purement visqueux sont déphasées d'un angle ($\varphi=90^\circ$) de ce fait, pour un matériau viscoélastique le déphasage sera confiné entre ces deux valeurs ($\varphi = [0^\circ, 90^\circ]$) (**FigIV.18**).

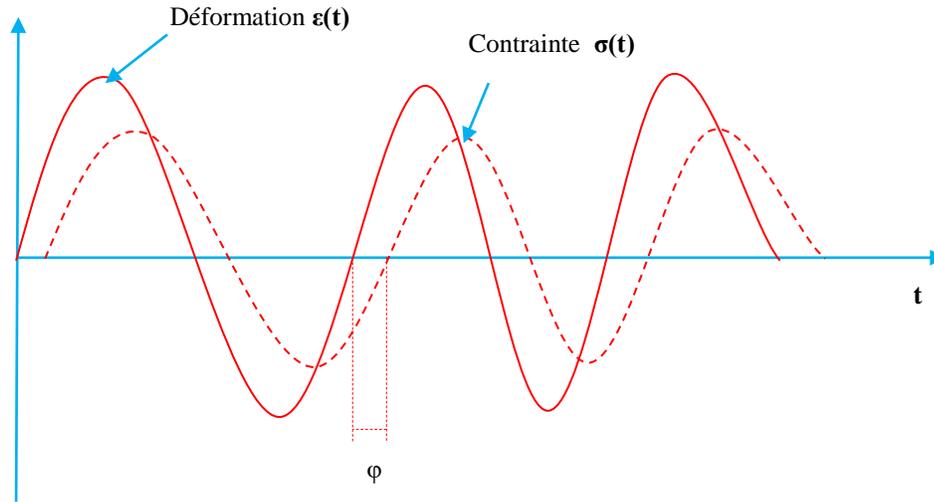


Figure IV.18 Représentation du déphasage contrainte-déformation

Considérons un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant subissant une déformation sinusoïdale de pulsation ω de la forme :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (\text{IV.49})$$

Par conséquent, sa réponse correspondante sera également harmonique de même fréquence avec un déphasage φ s'écrit :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.50})$$

Où : ε_0 et σ_0 sont l'amplitude maximum de déformation et de contrainte respectivement.

Ainsi, l'équation (IV.50) peut être réécrite comme :

$$\sigma = \sigma_0 [\cos \varphi \sin \omega t + \cos \omega t \sin \varphi] \quad (\text{IV.51})$$

La relation contrainte-déformation peut être définie par

$$\sigma = E_0 \varepsilon_0 [\cos \varphi \sin \omega t + \cos \omega t \sin \varphi] \quad (\text{IV.52})$$

Pour un matériau viscoélastique, la contrainte peut exprimer par deux composantes dont :

- **le module de stockage** noté $E_1 = E_0 \cos\varphi$: qui définit l'énergie stockée dans l'échantillon en raison de la déformation appliquée (exprime la contribution élastique)
- **le module de perte** noté $E_2 = E_0 \sin\varphi$: qui définit l'énergie dissipée dans l'échantillon (exprime la contribution visqueuse).

De ce fait, **le module complexe (raideur complexe) E^*** est donné sous forme cartésienne par la relation:

$$E^* = E_1 + iE_2 \quad (\text{IV.53})$$

Avec: E_1 est la partie réelle du module et E_2 est la partie imaginaire du module.

De même, si on l'impose une contrainte harmonique de la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (\text{IV.54})$$

On obtiendra sa réponse correspondant en déformation :

$$\varepsilon = J^* \sigma_0 e^{i\omega t} \quad (\text{IV.55})$$

Où: J^* est la **complaisance complexe** définie par :

$$J^* = J_1 + iJ_2 = 1 / E^* \quad (\text{IV.56})$$

Avec: J_1 est la complaisance de stockage (partie réel du module) et J_2 est la complaisance de perte (partie imaginaire du module).

On peut ainsi définir **le facteur de dissipation η** comme étant le rapport du module de perte au module de stockage (la tangente de l'angle de phase).

$$\eta = \tan(\varphi) = E_2 / E_1 \quad (\text{IV.57})$$

IV.3.3.7 L'amortissement visqueux élastique

Lors d'un cycle de chargement dynamique, les forces de friction internes et les déformations localisées dans les matériaux permettent de dissiper une certaine quantité d'énergie du système,

même si leur comportement global reste dans le domaine linéaire. C'est pourquoi on qualifie ce type d'amortissement d'« élastique ». On peut représenter ce comportement par une boucle d'hystérésis de forme elliptique fermée. L'amortissement influence deux paramètres de la réponse dynamique d'un système : l'amplitude et la durée. Ainsi, la réponse d'une structure ayant un amortissement élevé est de moins grande amplitude et de moins grande durée que celle d'un système ayant un amortissement faible, tel qu'illustré sur la **figure IV.19** [108].

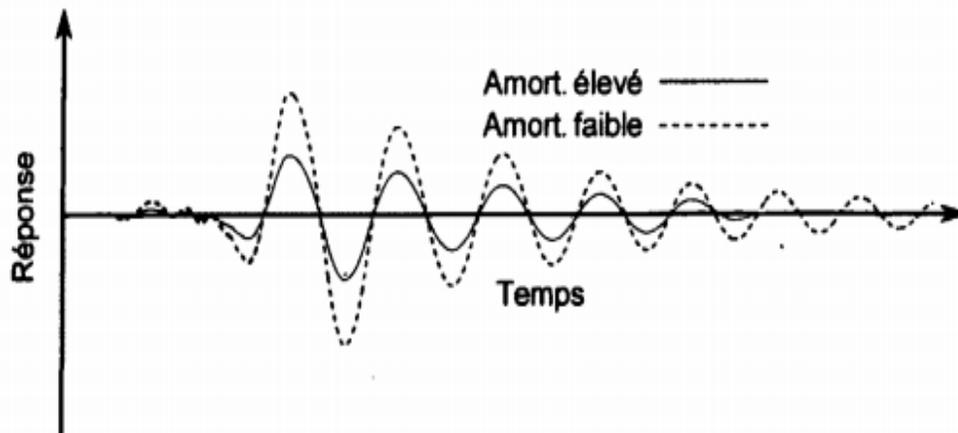


Figure IV.19 Illustration de l'effet de l'amortissement sur la réponse d'un système [108]

Pour pouvoir intégrer facilement cette dissipation d'énergie dans les calculs, on utilise le concept d'amortissement visqueux (L'amortissement de type visqueux est représenté par un amortisseur qui exerce la force dissipative), qui produit une force dissipative visqueuse proportionnelle et opposée à la vitesse du mouvement :

$$F_d = -cv \quad (\text{IV.58})$$

Où : F_d , c et v sont respectivement la force dissipative, le coefficient d'amortissement et la vitesse du mouvement. Dans un souci de simplicité, un oscillateur mécanique avec un régime vibratoire libre de masse m , de rigidité k et d'amortissement visqueux c en fonction d'un déplacement $u(t)$ est modélisé à sa position d'équilibre (**Fig IV.20**).

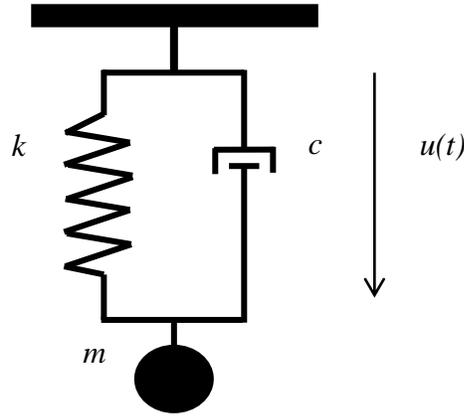


Figure IV.20 Schéma d'un oscillateur avec un régime libre

La représentation de l'équation dynamique du mouvement dudit système s'écrit:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (\text{IV.59})$$

Tel que :

- $m\ddot{u}(t)$: force d'inertie due à l'accélération subie par la masse m
- $c\dot{u}(t)$: force dissipative visqueuse produit par l'amortissement c
- $ku(t)$: force de rappel élastique produit par le ressort de raideur k

Ou encore :

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = 0 \quad (\text{IV.60})$$

Les termes : ω est appelé la fréquence naturelle angulaire du système ou la pulsation propre (rad/s), ξ est le facteur ou le taux d'amortissement (s^{-1}) et qui sont donnés par :

$$2\xi = \frac{c}{m} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{IV.61})$$

La solution de l'équation différentielle (IV.60) est sous la forme d'une exponentielle complexe:

$$u(t) = Ae^{rt} \quad (\text{IV.62})$$

En substituant l'équation (IV.62) dans l'équation différentielle du mouvement (IV.60), on obtient l'équation caractéristique du système :

$$r^2 + 2\xi r + \omega^2 = 0 \quad (\text{IV.63})$$

Pour résoudre l'équation différentielle (IV.63) du second degré, il faut d'abord calculer le discriminant réduit Δ :

$$\Delta = \xi^2 - \omega^2 \quad (\text{IV.64})$$

En fonction aussi du signe du discriminant Δ , on peut distinguer les différents régimes d'amortissements du système: un amortissement faible ou sous critique, un amortissement critique ou un amortissement fort ou sur critique. **La figure (IV.21)** illustre ces trois cas d'amortissement, on note T_n est un pseudo-période : $T_n = 2\pi/\omega$.

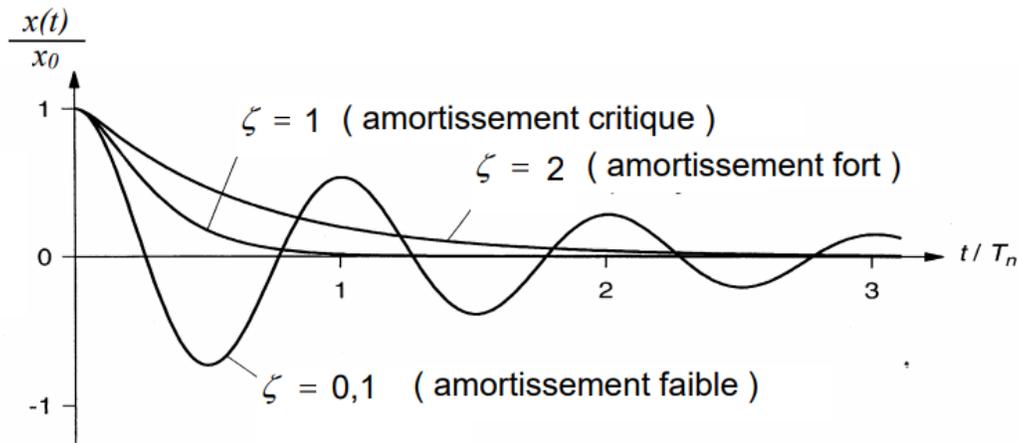


Figure IV.21 Réponse d'un oscillateur en fonction de l'amortissement [109]

- **Amortissement sous critique : ($\xi < 1$)**

Dans ce cas, les racines r_1 et r_2 sont complexes car le discriminant est négatif ($\Delta < 0$) et le régime correspondant est appelé régime pseudo-périodique. Celles-ci peuvent alors s'écrire comme suit :

$$r_{1,2} = -\xi\omega \pm i\sqrt{\omega^2(1-\xi^2)} \quad \text{avec } i^2 = -1 \quad (\text{IV.65})$$

On pose, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2(1-\xi^2)}$ la pseudo-pulsation propre, les racines s'écrivent alors :

$$r_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_1 \quad (\text{IV.66})$$

Donc la solution en générale de l'équation du mouvement de ce système est :

$$x(t) = C_1 e^{(-\xi\omega + i\omega_1)t} + C_2 e^{(-\xi\omega - i\omega_1)t} \quad (\text{IV.67})$$

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[(C_1 + C_2) \cos \omega_1 t + i(C_1 - C_2) \sin \omega_1 t \right]$$

En remplaçons les termes $C_1 + C_2 = A$ et $i(C_1 - C_2) = B$, l'équation (IV.67) peuvent être simplifiée, de la manière suivante :

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t \right] \quad (\text{IV.68})$$

Cette expression permet de faire ressortir la forme de la réponse, Les oscillations sont caractérisées par un déplacement dont l'amplitude décroît exponentiellement avec une pseudo-période « $T_n = 2\pi/\omega_1$ » due à une modulation de l'amplitude des oscillations. L'amortissement tend à allonger faiblement la période des oscillations par rapport à celle des oscillations harmonique libre non amorties nul ($\xi = 0$).

- **Amortissement critique : ($\xi=1$)**

Dans ce cas le discriminant est nul ($\Delta=0$) et l'équation caractéristique du système admet une solution unique :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega \quad (\text{IV.69})$$

Et la solution générale s'écrit :

$$x(t) = e^{-\omega t} \left[C_1 + C_2 t \right] \quad (\text{IV.70})$$

Dans ce type de régime, le système s'approche rapidement de sa position d'équilibre sans oscillation.

- **Amortissement sur critique : ($\xi>1$)**

Le discriminant de l'équation caractéristique est positif ($\Delta>0$) et les deux solutions possibles sont alors réelles et négatives et leur produit vaut : $r_1 r_2 = \omega^2$

$$r_{1,2} = -(\xi\omega) \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} \quad (\text{IV.71})$$

Par conséquent, La solution générale est une combinaison des deux termes correspondants, à savoir:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (\text{IV.72})$$

Avec : C_1 et C_2 sont des constantes qui peuvent être déterminées en fonction des conditions initiales.

Il est utile de noter que le régime est dit apériodique correspond à l'amortissement fort appliqué dans lequel le système s'approche lentement de sa position d'équilibre sans aucune vibration que le régime critique.

IV.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, un bilan de connaissance en ce qui concerne les différentes théories des plaques fonctionnellement graduée fondées sur des différents modèles analytique est présenté pour simuler le comportement mécanique de ces structures à une application donnée. Dans un premier lieu une revue bibliographique sur l'élasticité linéaire ainsi que quelques modèles pertinents sont présentés, qui permettent de modéliser de manière assez pertinente la réponse de ces structures lors de leur déformation. Du point de vue pratique, la conception des structures robustes nécessite la conception des modèles plus performants, et l'utilisation des matériaux pouvant réduire d'une manière très importante la fréquence de ces structures. C'est pourquoi la deuxième partie de ce chapitre consiste en un état de l'art sur le comportement viscoélastique a eu lieu en parallèle de ses essais de caractérisation. Après un bref rappel sur les modèles représentatifs de ce comportement, capables d'identifié les dissipations internes dans les matériaux et admettant la modélisation des structures beaucoup plus rigide.

CHAPITRE V

***«MODELES DE FONDATION :
APPROCHE THEORIQUE»***

Modèles de fondation : approche théorique

V.1 Introduction

Les fondations sont très souvent des supports assez complexes; par exemple, un liant de carburant caoutchouteux, de la neige ou un sol granulaire [110]. Elles sont considérées comme des éléments très importants de différents systèmes physiques en raison de leurs applications cruciales dans différents domaines de la science et de l'ingénierie, notamment la mécanique, civile, électrique, nanotechnologie, et même biotechnologie.

Les fondations jouent un rôle central pour préserver le système structurel sous les oscillations. En fait, il est inévitable d'utiliser des fondations dans un système structurel pour éviter une défaillance mécanique. Par conséquent, trois critères principaux doivent être pris en compte par les ingénieurs et les chercheurs lors de la conception d'un système sous tout type d'oscillations. Premièrement, il est indispensable de développer un modèle de continuum pour la structure ; deuxièmement, il est incontournable de développer un modèle mathématique pour les fondations du système, et enfin, un modèle complet de l'ensemble du système structurel, qui prend en compte l'interaction entre les fondations et le système reposant sur elle [111]. Dans le texte suivant, plusieurs modèles de fondation récemment proposés sont brièvement discutés.

V.2 Modèles linéaires

V.2.1 Le modèle de Winkler

En 1867, le professeur Emil Winkler de l'Université de Prague a initialement proposé le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli sur une fondation élastique pour l'application assez évidente aux traverses et rails supportés par la terre sur lesquels ils reposent [112]. L'idéalisation de Winkler représente le milieu du sol comme un système de ressorts identiques mais mutuellement indépendants, étroitement espacés, discrets et linéairement élastiques. Selon cette idéalisation, la déformation de la fondation en raison de la charge appliquée est limitée aux régions chargées uniquement comme illustré par la **figure V.1** (comportement bilatéral). De sorte que la force de rappel « p », d'une fondation élastique est linéairement proportionnelle à la déflexion « w » qu'elle subit [110] :

$$p(x, t) = kw(x, t) \quad (\text{V.1})$$

Où : k est la rigidité des ressorts linéaires

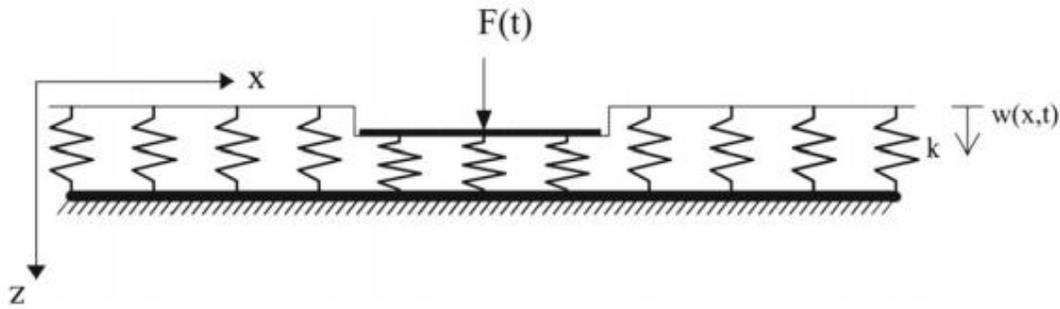


Figure V.1 modèle de Winkler [111]

Selon cette idéalisation, la déformation de la fondation due à la charge appliquée est confinée aux régions chargées uniquement. Cependant, pour certains matériaux, la fondation soumise à des charges se comportait différemment de ce que prévoyait cette théorie (sols granulaires, sols argileux, sols humides, sols pressurisés, etc.). Il a été constaté, par exemple, pour le sol, que les déplacements de surface à l'écart de la région chargée diminuaient plus rapidement que prévu par la théorie [113]. On peut également se demander si les matériaux de type caoutchouc mousse avec un taux de vide relativement important se comporteront comme un milieu isotrope homogène. Par conséquent, les chercheurs ont commencé avec la théorie de Winkler et ont inséré plus de paramètres et d'éléments dans le modèle de Winkler pour tenter de trouver une représentation physiquement proche et mathématiquement simple de ces matériaux et de présenter un comportement de réaction plus précis pour une fondation structurelle[110,111,113].

V.2.1 Le modèle de Kelvin-Voigt

Une des limites du modèle de Winkler est l'absence d'éléments viscoélastiques. Le modèle de Kelvin-Voigt introduit les effets de la viscoélasticité dans le modèle élastique de Winkler et présente le comportement d'un milieu avec une série de ressorts discrets parallèles à des amortisseurs (**Fig V.2**). La relation entre la force de réaction de la fondation et le déplacement est trouvée en utilisant la relation suivante [111,114] :

$$p(x, t) = kw(x, t) + cw(x, t) \quad (\text{V.2})$$

Où : c représente l'amortissement des éléments visqueux.

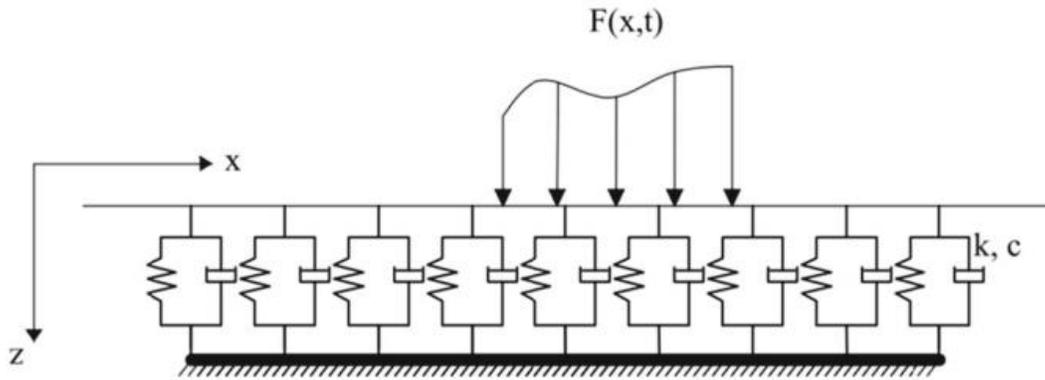


Figure V.2 modèle de Kelvin Voigt [111]

Le modèle Kelvin Voigt a fait objet de plusieurs publications. H.H Zhu et al ont proposé un modèle fractionnaire de Kelvin-Voigt pour rendre compte du comportement d'une fondation viscoélastique sous une charge linéaire verticale qui peut entraîner un tassement excessif et une défaillance des superstructures [115]; l'analyse dynamique non linéaire du nanotube viscoélastique fractionné reposant sur une fondation Kelvin – Voigt et vague étude sur la réponse dynamique d'une poutre ou d'une plaque reposant sur une fondation Kelvin – Voigt [116–119].

V.2.2 Le modèle de Maxwell

Ce modèle se présente comme une série de ressorts et d'amortisseurs placés comme montre la **figure V.3**. La force de réaction de la fondation peut être obtenue à partir de l'équation suivante [111,114] :

$$p(x, t) = k\Delta_1(x, t) = c\dot{\Delta}_2(x, t) \quad (\text{V.3})$$

Et le déplacement est donné par l'équation suivante :

$$w(x, t) = \Delta_1(x, t) + \Delta_2(x, t) \quad (\text{V.4})$$

On substitue l'équation (V.3) dans l'équation (V.4), on obtient :

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{k} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{c} p(x, t) \quad (\text{V.5})$$

Senalp, A. D et al. ont modélisé une poutre Euler-Bernoulli de longueur finie, simplement supportée, avec une section transversale uniforme reposant sur une fondation viscoélastique de type maxwell sur laquelle agit une force concentrée en mouvement [120] ;Morgan, M. R., & Sinha, S. C.ont modélisé la stabilité de la colonne de Beck supportée par trois fondations viscoélastiques différentes, à savoir, le solide linéaire standard, le Maxwell et le Kelvin-Voigt via une analyse dynamique exacte pour chaque modèle de fondation. Les résultats montrent que la fondation Maxwell a une influence positive sur la stabilité de ce système [121].

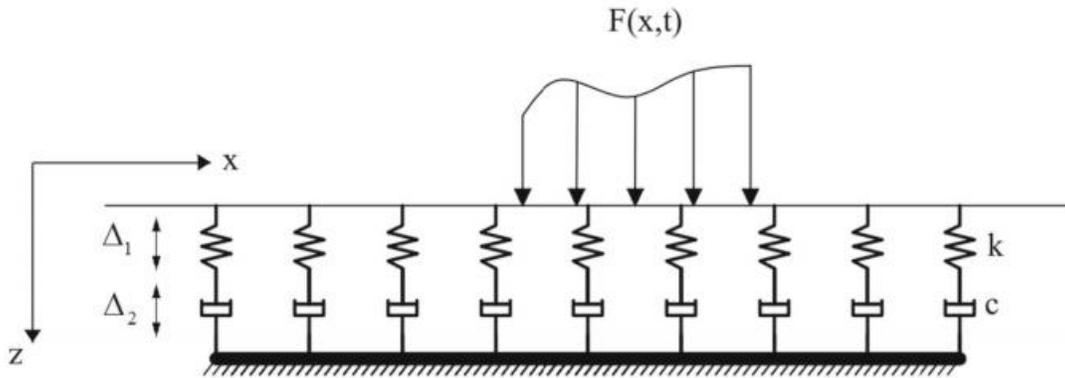


Figure V.3 modèle de Maxwell [111]

V.2.3 Le modèle de Zener

Le modèle de Zener ou modèle du solide linéaire standard (SLS) se résulte d'une combinaison des modèles de Winkler et de Maxwell en parallèle (**Fig V.4**).La réaction de la fondation est donnée par [111,114] :

$$p(x, t) = k_2 \Delta_2(x, t) + k_1 \Delta_{s1}(x, t) = k_2 \Delta_2(x, t) + c_1 \dot{\Delta}_{d1}(x, t) \quad (V.6)$$

Et le déplacement peut être défini par la relation :

$$w(x, t) = \Delta_{total}(x, t) = \Delta_{s1}(x, t) + \Delta_{d1}(x, t) = \Delta_2(x, t) \quad (V.7)$$

Donc la relation force-déplacement s'écrit :

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} + \frac{k_1}{c_1} p(x, t) - k_1 k_2 w(x, t)}{k_1 + k_2} \quad (V.8)$$

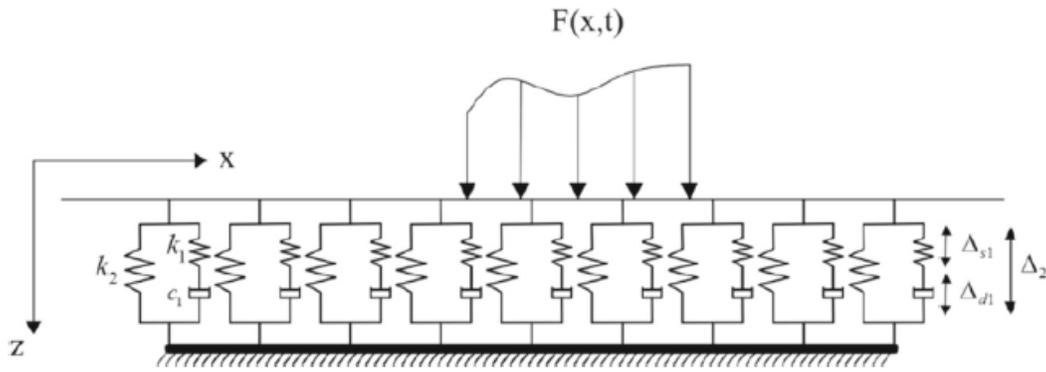


Figure V.4 modèle de Zener [111]

Le modèle de Zener ainsi traité par plusieurs chercheurs a savoir, Atanacković, T.M. et al à étudié les ondes dans une tige viscoélastique dont l'équation constitutive est de type Zener généralisée contenant des dérivées fractionnaires d'ordre complexe [122] ; Muscolino & Palmeri [123] ont utilisé le modèle SLS en combinaison avec une formulation d'espace d'états pour décrire les vibrations d'une poutre reposant sur une fondation viscoélastique; Atanackovic, T [124] a analysé la déformation isotherme uniaxiale d'un corps viscoélastique via le modèle de zener généralisé.

V.2.4 Le modèle de Poynting-Thomson

Ce type de fondation est construit par un arrangement de trois éléments amortisseur et ressort. L'arrangement peut avoir des combinaisons différentes, dont deux sont présentées sur la **figure V.5**. La relation force-déplacement pour le premier type du modèle de Poynting-Thomson (**Fig V.5a**) peut être exprimée comme [111]:

$$k_1 \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \frac{k_1 k_2}{c_2} w(x,t) = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{k_1 + k_2}{c_2} p(x,t) \quad (\text{V.9})$$

Dont la force de réaction de fondation :

$$p(x,t) = k_1 \Delta_1(x,t) = k_2 \Delta_2(x,t) + c_2 \dot{\Delta}_2(x,t) \quad (\text{V.10})$$

Et le déplacement est donné par :

$$w(x,t) = \Delta_{total}(x,t) = \Delta_1(x,t) + \Delta_2(x,t) \quad (\text{V.11})$$

Et pour le deuxième type présenté sur la **figure V.5b**, nous avons :

$$k_2 \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{c_1+k_2}{c_1} p(x,t) \quad (\text{V.12})$$

Avec, La force de réaction de fondation s'exprimé par:

$$p(x,t) = c_1 \dot{\Delta}_1(x,t) = k_2 \Delta_2(x,t) + c_2 \dot{\Delta}_2(x,t) \quad (\text{V.13})$$

Et le déplacement s'écrit :

$$w(x,t) = \Delta_{total}(x,t) = \Delta_1(x,t) + \Delta_2(x,t) \quad (\text{V.14})$$

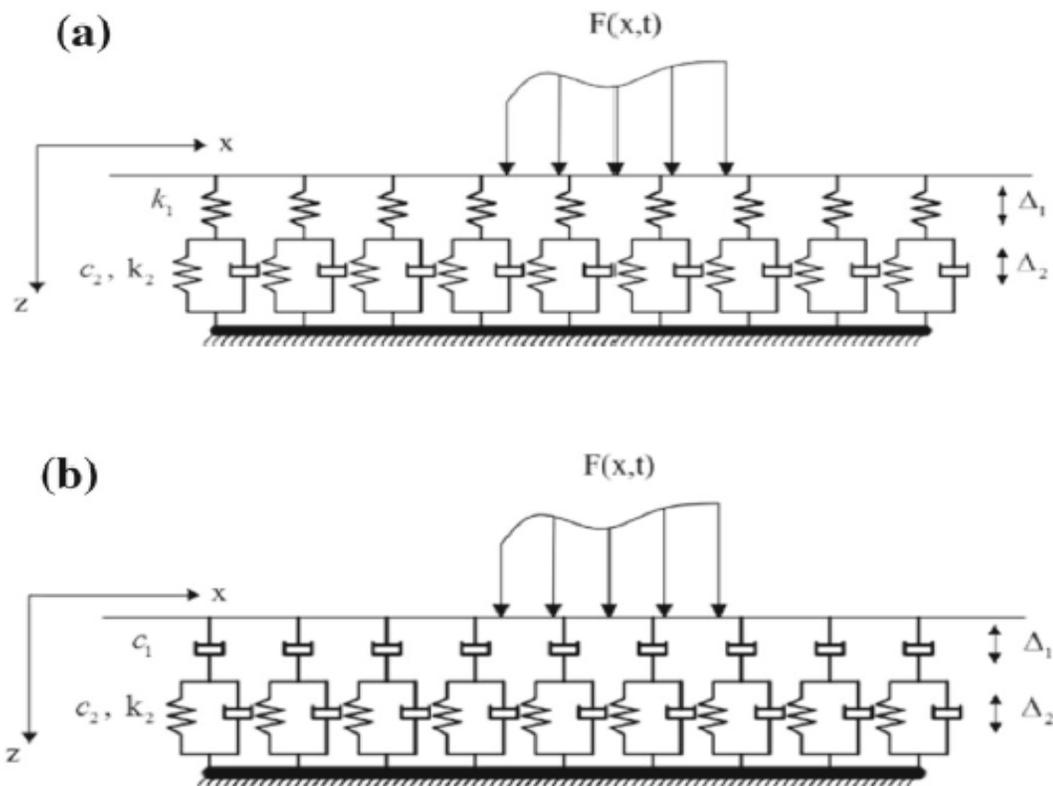


Figure V.5 modèle de Poynting-Thomson [111]

Le modèle de Poynting-Thomson est optimal pour simuler le comportement au fluage des matériaux viscoélastiques [125]. Jia, L., & Huang, G. ont conclu dans leur publication que ce modèle peut donner une prédiction précise pour représenter le comportement au fluage des remblais à haut remplissage, soumis à une compression unidimensionnelle [126]. En fait, ce modèle peut être atteint par une combinaison du modèle Maxwell et à un élément ressort /

amortisseur en série ou d'un corps Kelvin-Voigt connecté en série avec un ressort. Saksa. T., & Jeronen.J ont constaté que la poutre mobile est avérée perdre sa stabilité dans le sens du flottement si le temps de fluage est suffisamment grand. Ainsi que les caractéristiques dynamiques de la poutre de Poynting – Thomson a donné des prédictions qualitativement similaires à celles du modèle de poutre Kelvin –voigt si le module d'élasticité E_1 (**FigV.5a**) lié au ressort devient suffisamment grand [127].

V.2.5 Le modèle de Burger

Le modèle de Burger comporte quatre éléments de type ressort et amortisseur, qui peuvent être placés dans différentes dispositions .L'une des combinaisons les plus connues est le montage en série du modèle de Kelvin-Voigt avec le modèle de Maxwell (**Fig V.6**).La force de restauration de la fondation peut être calculée comme suit [111,114] :

$$p(x, t) = k_1 \Delta_2(x, t) = c_1 \dot{\Delta}_2(x, t) = k_2 \Delta_3(x, t) + c_2 \dot{\Delta}_3(x, t) \quad (\text{V.15})$$

Et le déplacement peut être défini par la relation :

$$w(x, t) = \Delta_{total}(x, t) = \Delta_1(x, t) + \Delta_2(x, t) + \dot{\Delta}_3(x, t) \quad (\text{V.16})$$

On remplace l'équation (V.16) dans l'équation (V.15), on obtient la relation force-déplacement :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{k_1}{c_1} + \frac{k_1}{c_2} + \frac{k_2}{c_2} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{k_1 k_2}{c_1 c_2} \right] p(x, t) = \left[k_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{k_1 k_2}{c_2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \partial w(x, t) \quad (\text{V.17})$$

Okuka, A. S., & Zorica, D.ont examiné le modèle de Burger aux exigences thermodynamiques dans les tests de fluage et de relaxation des contraintes, ils ont obtenu que le module de relaxation soit complètement monotone et peut même être une fonction oscillatoire avec une amplitude décroissante [128].Dey et al. ont montré l'excellent potentiel du modèle de Burger dans la présentation du comportement en fonction du temps des milieux continus soumis à des charges cycliques notamment les argiles saturées et les sols argileux [129].

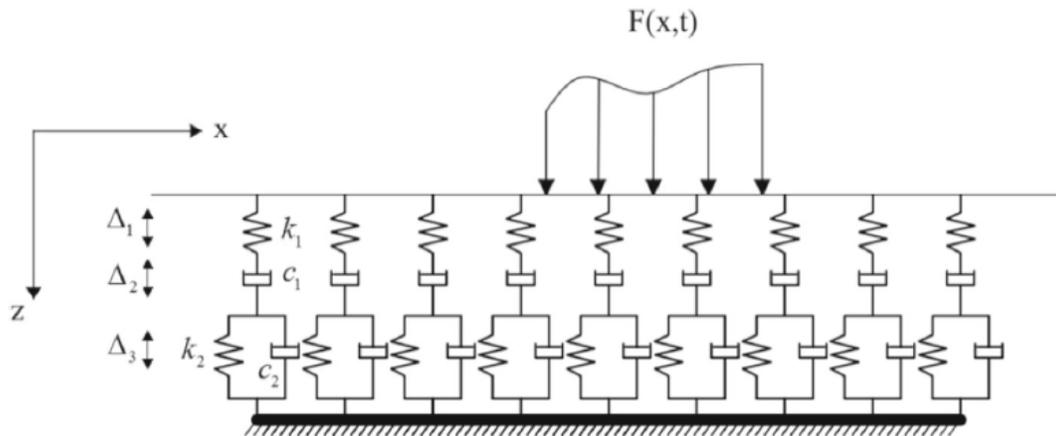


Figure V.6 modèle de Burger [111]

En raison du fait que le modèle de Winkler n'utilise qu'un seul paramètre dans la modélisation des réactions de la fondation, ce modèle est connu sous le nom de modèle à un paramètre. Le modèle à un paramètre ne tient pas compte des interactions entre les ressorts et réagit uniformément, qu'il soit soumis à une charge uniforme ou non, c'est-à-dire que chaque point de ce modèle réagit proportionnellement à la charge qui lui est appliquée. Il convient de noter que, dans le modèle à un paramètre, le déplacement du point est indépendant de la charge appliquée aux autres points (**Fig V.7**). Par conséquent, des résultats inexacts apparaissent dans les cas pratiques. Les modèles de Kelvin-Voigt, Maxwell, Zener, Poynting-Thomson et Burger présentent le même défaut. Par conséquent, des fondements à deux paramètres sont présentés pour résoudre le problème ci-dessus [110]. Le modèle à deux paramètres désigne les fondations dans lesquelles une couche a relié les extrémités des ressorts et des amortisseurs les unes aux autres. En conséquence, une continuité est créée dans le déplacement et la force de restauration des points adjacents (**Fig V.8**). Différentes hypothèses et contraintes ont été envisagées pour la couche supérieure du modèle à deux paramètres, et sur cette base, plusieurs modèles à deux paramètres ont été développés, tels que Filonenko-Borodich, Hetényi, Pasternak, Vlasov et Reissner. Les modèles Filonenko-Borodich, Hetényi et Pasternak ont été développés sur la base du modèle de Winkler. Ces modèles ont été initialement développés sur la base de la théorie de Winkler ; et en ajoutant certains éléments et constantes, les fonctions continues pour le déplacement et la force de restauration sont fournies. Les modèles Vlasov et Reissner sont issus du modèle continu, et par l'utilisation de certaines contraintes, ils fournissent la relation force-déplacement pour la fondation [111].

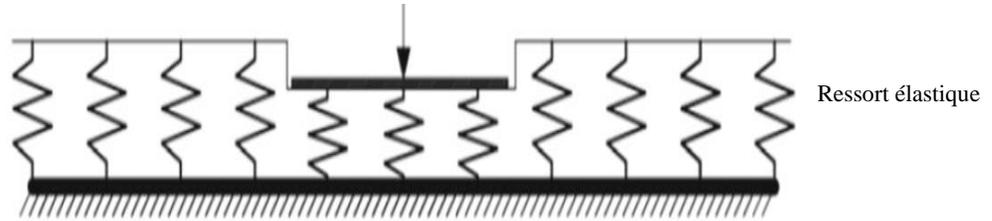


Figure V.7 Fondation à un paramètre [111]

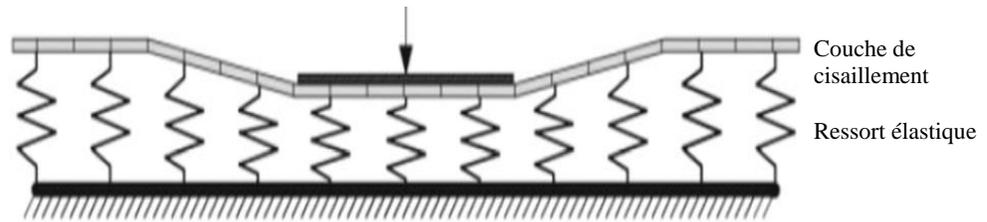


Figure V.8 Fondation à deux paramètres [111]

V.2.6 Le modèle de Filonenko – Borodich

Filonenko-Borodich (1940) ont considéré une membrane lisse élastique étendue sur les ressorts de Winkler. Cette membrane assure l'interaction entre les ressorts. L'équation différentielle résultante pour ce type de modèle (**Fig V.9**) avec une force de traction (T) dans la membrane est la suivante [130] :

$$p(x, t) = kw(x, t) - T\nabla^2 w(x, t) \quad (\text{V.18})$$

Où : ∇^2 est l'opérateur Laplacien en coordonnées cartésiennes.

Des exemples typiques de profils de déflexion de surface de ce modèle particulier dus à des charges externes concentrées, flexibles et rigides sont illustrés à la **figure V.9**.

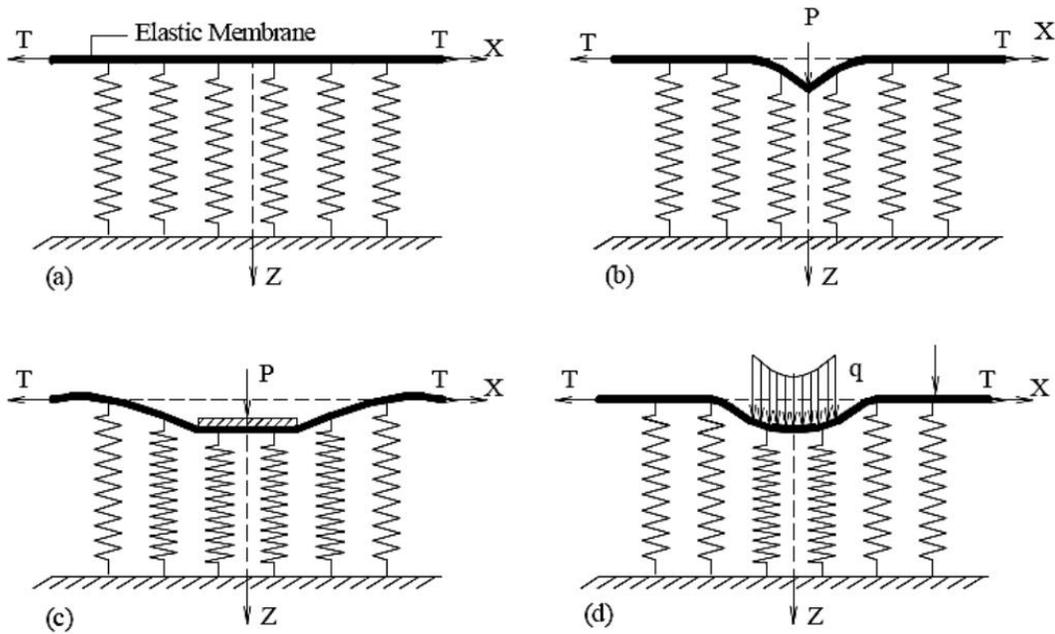


Figure V.9 Profils de déplacement de surface du modèle de Filonenko-Borodich [131]

(a) modèle de base (b) charge concentrée, (c) charge rigide, et (d) charge flexible uniforme

V.2.7 Le modèle de Hetényi

Ce modèle proposé peut être considéré comme un compromis équilibré entre deux approches extrêmes à savoir, la fondation de Winkler et le milieu isotrope. Dans ce modèle, l'interaction entre les ressorts discrets est réalisée par l'incorporation d'une poutre ou d'une plaque élastique, qui ne subit qu'une déformation en flexion (**Fig V.10**). L'équation de réponse pour ce modèle est donnée par :

$$p(x, t) = kw(x, t) - D\nabla^4 w(x, t) \quad (\text{V.19})$$

Dont :

$$D = Eh^3 / 12(1-\nu) \quad , \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (\text{V.20})$$

Où : D , E , ν et h sont la rigidité à la flexion de la poutre / plaque, le module de Young, le coefficient de poisson et l'épaisseur de la poutre/plaque respectivement.

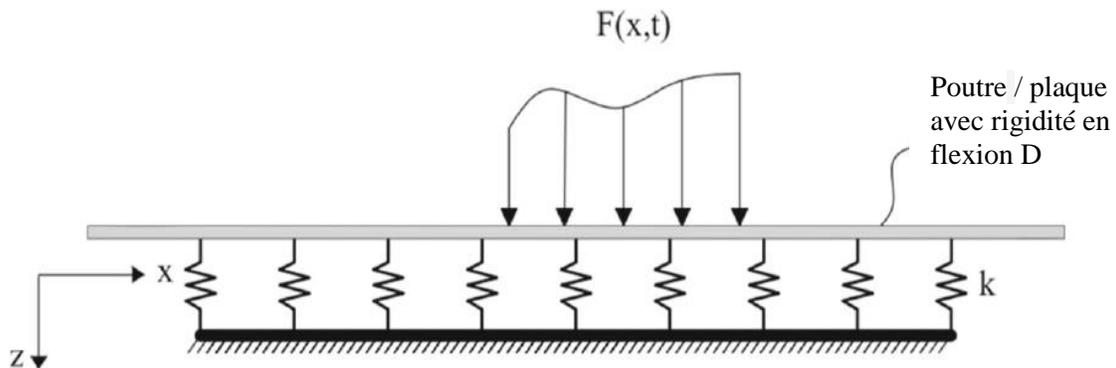


Figure V.10 modèle de Hetenyi [111]

Après que Winkler a établi l'analyse de la poutre de Euler -Bernoulli sur le modèle de Winkler, elle a été largement appliquée pour les poutres sur des fondations élastiques par de nombreux chercheurs dans les domaines du génie civil et mécanique, comme par exemple pour les voies ferrées sur le sol. Hetényi a publié le livre "Beams on Elastic Foundation" en 1946, dans lequel il a discuté de manière exhaustive la poutre de Bernoulli-Euler sur le modèle de Winkler, y compris les poutres de longueur infinie et finie, et les poutres avec une charge axiale [132]. Ainsi, la poutre de Bernoulli-Euler sur le modèle de Winkler a été attribuée au modèle de Hetényi [110]. Bien qu'il existe de nombreux modèles mécaniques composés de poutres et de fondations, en général, les "poutres d'Euler -Bernoulli sur fondations élastiques" se penchent sur le modèle de Winkler ou le modèle de Hetényi [133].

V.2.8 Le modèle de Pasternak

V.2.8.1 Le modèle élastique

Le modèle de comportement du sol proposé par Pasternak (1954) [134] suppose l'existence d'une interaction de cisaillement entre les éléments du ressort. Ceci est réalisé en reliant les éléments de ressort à une couche qui agit comme une liaison horizontale (**Fig V.11a**). Les déformations et les forces de maintien de l'équilibre dans la couche de cisaillement sont illustrées aux **figures V.11b** et **V.11c**. Pour une couche de cisaillement linéaire isotrope dans le plan (x, y) avec des modules de cisaillement $G_x = G_y = G$, les expressions des contraintes de cisaillement dans la direction verticale sont [131] :

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{V.21})$$

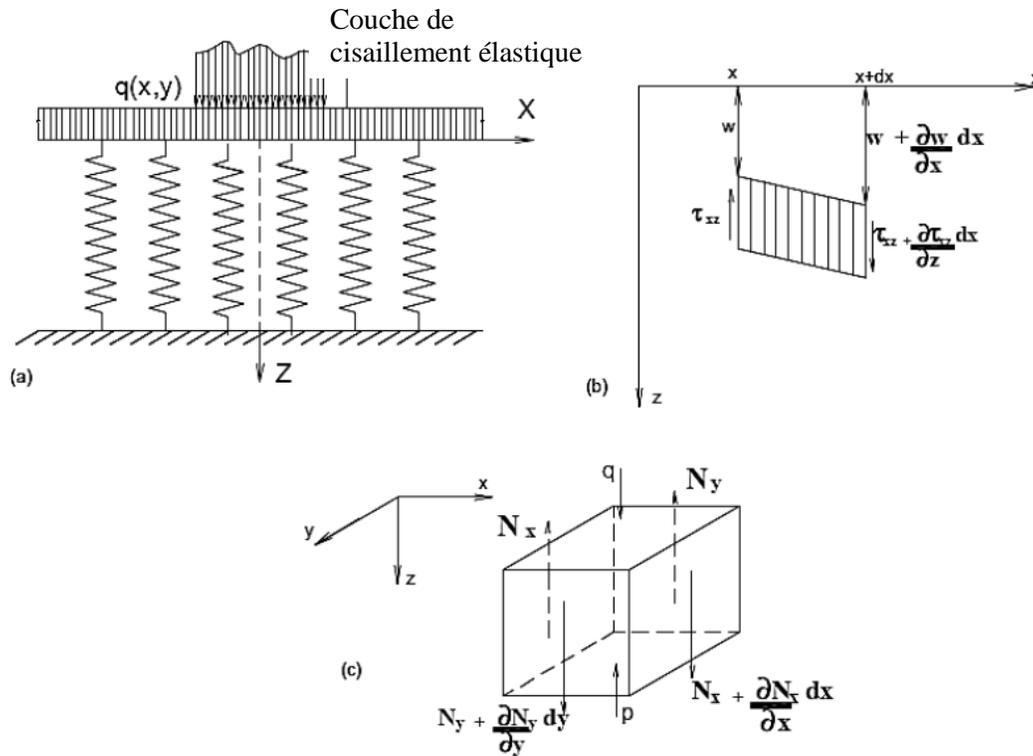


Figure V.11 Modèle de Pasternak (1954): (a) modèle de base, (b) état de contrainte de l'élément infinitésimal de la couche de cisaillement, et (c) forces agissant sur l'élément de couche de cisaillement [131]

La réaction de fondation exprimée par le modèle de fondation Pasternak en tant que modèle typique à deux paramètres peut être formulée comme :

$$p(x, t) = kw(x, t) - G\nabla^2 w(x, t) \quad (V.22)$$

Le modèle de Pasternak fait partie de plusieurs publications. Balaš, J. et al [135] ont utilisé le modèle Pasternak en combinaison avec la méthode des éléments finis de frontière pour décrire le problème de la flexion des plaques sur une fondation élastique biparamétrique et soumises à un chargement concentré. J. T. Katsikadelis & L. F. Kallivokas [136] ont présenté une analyse complète d'une structure composite de forme plaque comprenant des trous et reposé sur une fondation en considérant le modèle de Pasternak. La dynamique et la stabilité d'une plaque viscoélastique infinie supportée par une fondation Pasternak et soumis à un chargement normal axisymétrique est encore étudié par Khazanovich, L., & Levenberg [137].

V.2.8.2 Le modèle viscoélastique

Dans ce contexte, nous considérons la fondation comme un média viscoélastique ce qui signifie que la déflexion est dépendante du temps. Par conséquent, des éléments élastiques sont combinés en parallèle avec des éléments visqueux. Les extrémités supérieures des éléments viscoélastiques sont reliées à une couche viscoélastique au lieu de la couche de cisaillement élastique (**Fig V.12**). La relation force-déformation dans la direction de « z » dans lequel les déflexions de la zone de contact sont $w = w(x, y)$, est donnée comme suit [111]:

$$p(x, y, t) = kw(x, y, t) + c \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} - k_1 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w(x, y, t) \quad (\text{V.23})$$

Notant que, k_l est le coefficient de résistance élastique.

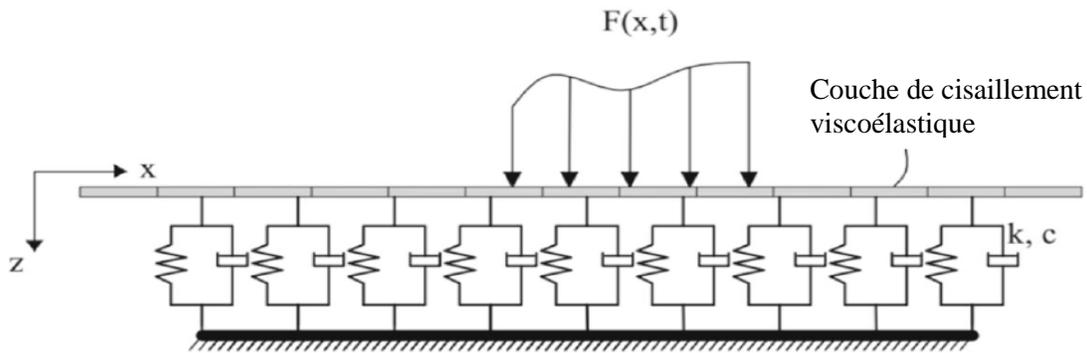


Figure V.12 modèle viscoélastique de Pasternak [111]

Peng, L., & Wang, Y. ont étudié les vibrations transversales d'une poutre finie d'Euler-Bernoulli reposant sur Fondations viscoélastiques à trois paramètres. Les résultats obtenus via l'application de la méthode de quadrature différentielle résument l'effet des paramètres de fondation sur les fréquences naturelles. De ce fait l'augmentation du coefficient d'amortissement visqueux de la fondation conduit à diminuer les fréquences naturelles. Par contre l'augmentation des paramètres de fondation linéaire et de cisaillement conduit à l'augmentation des fréquences naturelles [138].

V.2.8.3 Le modèle généralisé

Kargarnovin, M., & Younesian, D. ont ajouté la réaction du moment cinétique au modèle viscoélastique de Pasternak et ont nommé ce modèle "fondation viscoélastique généralisée de

Pasternak" (**Fig V.13**). La relation force-déplacement peut être écrite sous la même forme de l'équation (V.23) et le moment de la fondation transmis à la structure est exprimé par [111,139]:

$$M(x, t) = k_{\phi}\phi(x, t) + c_{\phi}\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial t} \quad (\text{V.24})$$

Où : k_{ϕ} et c_{ϕ} sont la rigidité et le coefficient d'amortissement rotationnelles, respectivement.

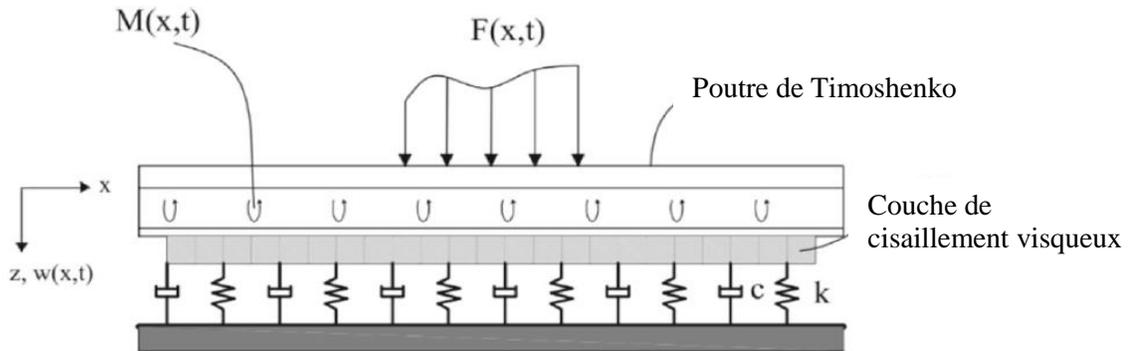


Figure V.13 modèle généralisé de Pasternak [111]

Le modèle Pasternak est le modèle à deux paramètres généralisé le plus adapté pour les applications géotechniques car le sol présente une compressibilité et se déforme en cisaillement. Selon l'étude présentée par Pavlovic, R. & Pavlovic, I. R sur la stabilité d'une poutre reposant sur une fondation viscoélastique généralisée de Pasternak, l'augmentation de la rigidité du milieu élastique peut augmenter les régions de stabilité, tandis que la croissance de la force de compression axiale au laquelle la poutre est soumise diminuer les régions de stabilité [140].

V.2.9 Le modèle de Kerr

Afin d'améliorer encore le modèle de fondation à deux paramètres, Kerr [141] avait ajouté le troisième paramètre de fondation, conduisant au modèle de fondation "à trois paramètres". Le rôle majeur du troisième paramètre de fondation consiste à fournir plus de flexibilité dans le contrôle du degré de continuité de la surface de la fondation entre les régions chargées et déchargées du système poutre - fondation[142]. Par conséquent, le modèle de Kerr est composé de deux couches de ressort élastiques interconnectées par une couche de cisaillement élastique (**Fig V.14**). L'équation différentielle de ce modèle peut être écrite comme suit [143] :

$$\left(1 + \frac{k}{k_0}\right)p(x, t) - \frac{G}{k_0}\nabla^2 p(x, t) = kw(x, t) - G\nabla^2 w(x, t) \quad (\text{V.25})$$

Où : k_0 , k et G sont les constantes des ressorts élastiques et la rigidité en flexion.

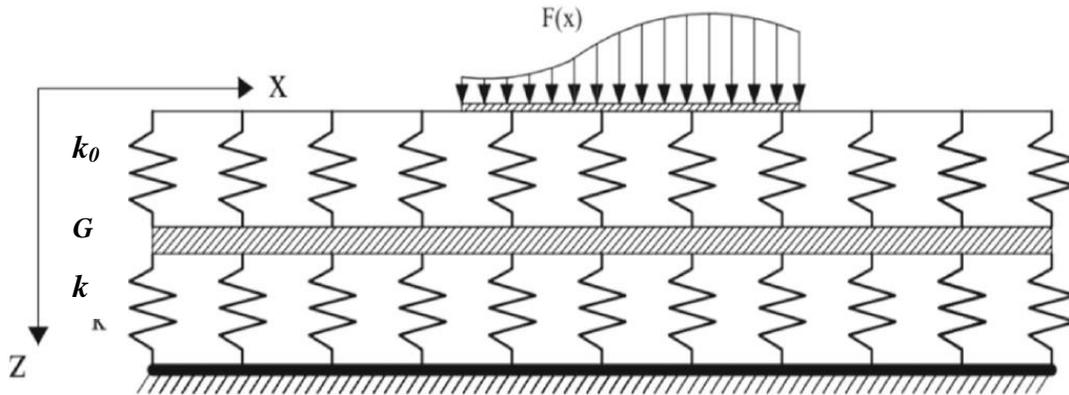


Figure V.14 modèle de Kerr [111]

Ce type de fondation a été principalement utilisé pour modéliser le comportement d'un sol flexible [111]. Ammar A. & Abdul R ont élaboré un programme en utilisant Matlab pour résoudre les problèmes de plaques rectangulaires et circulaires reposant sur une fondation de type Kerr. Le programme a montré sa facilité à programmer et à résoudre des problèmes de forme mathématique aussi compliqués [143]. Kneifati, M. C a présenté une étude comparative entre la réponse des paramètres des fondations du modèle Winkler, du modèle Pasternak et du modèle de Kerr ; il a conclu que le modèle de Kerr a fournissait des résultats plus précis que d'autres modèles pour la représentation de la réponse d'une fondation soumis à tous type de chargement [144]. De plus, Alisjahbana, S. W. et al ont démontré que le modèle de Kerr est le modèle le plus réaliste pour représenter la réponse d'un sol sous revêtement routier rigide. Ils ont également conclu que la déformation dynamique maximale du dit système due à des charges mobiles dynamiques diminue significativement par rapport à celle du modèle Pasternak [145].

V.2.10 Le modèle de Vlasov

En 1966, Vlasov et Leontiev ont élaboré un nouveau modèle à deux paramètres pour les fondations élastiques basé sur une méthode variationnelle. Selon leur méthode, la fondation est traitée comme une couche élastique et les contraintes sont imposées en limitant la déformation dans la fondation à une forme de mode appropriée « $\varphi(z)$ » (**Fig V.15**) [146]. Dans le cas d'une

déformation plane de la couche élastique dans le plan x-z, les composants de déplacement, sont les suivantes [111]:

$$u(x, z) = 0 \quad , \quad w(x, z) = w(x)\varphi(z) \quad (\text{V.26})$$

Où la fonction $\varphi(z)$ représente les variations verticales du déplacement. Pour un cas de variation linéaire, la fonction peut être définie par [111]:

$$\varphi(z) = 1 - \frac{z}{H} \quad (\text{V.27})$$

Sachant que H est l'épaisseur verticale du milieu élastique.

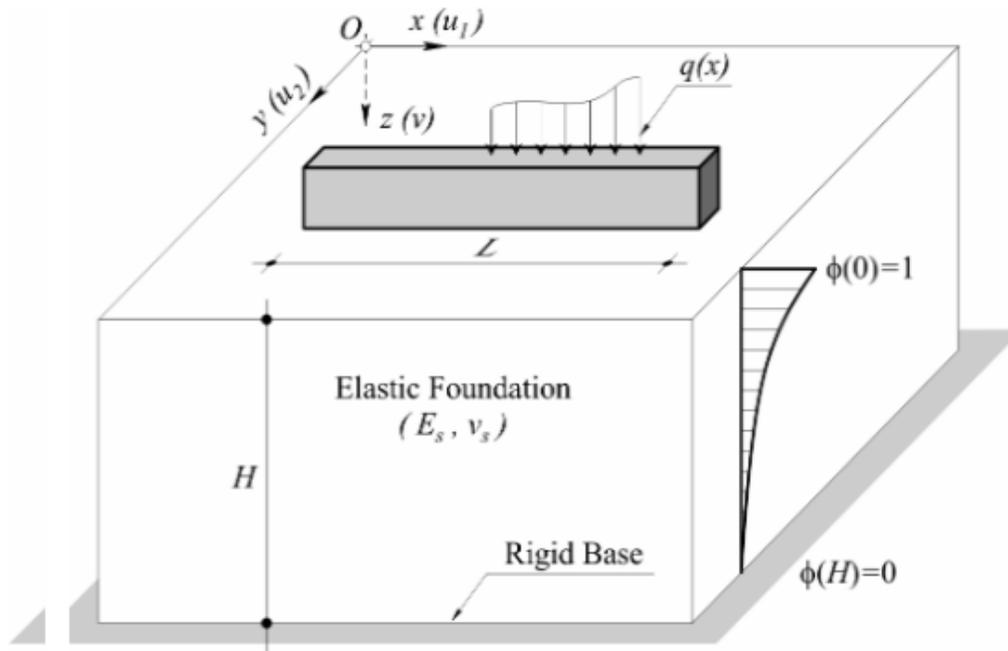


Figure V.15 modèle de Vlasov [146]

La relation force-déplacement de la fondation de Vlasov peut être formulée comme suit [111]:

$$p(x) = kw(x) - k_1 \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (\text{V.28})$$

Avec :

$$k = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)} \int_0^H \left(\frac{dh(z)}{dz} \right)^2 dz \quad , \quad k_1 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \int_0^H (dh(z))^2 dz \quad (\text{V.29})$$

Et :

$$E_0 = \frac{E_s}{(1-\nu_s^2)} , \nu_0 = \nu_s(1 - \nu_s) \quad (\text{V.30})$$

Ce modèle tient compte l'effet de l'énergie de déformation en cisaillement négligée dans le sol et des forces de cisaillement qui proviennent du sol alentour en introduisant un paramètre arbitraire, γ , caractérisant la distribution verticale de la déformation dans le sous-sol. Cependant, ce modèle n'a fourni aucun mécanisme pour calculer sa valeur réelle. Plus tard, Vallabhan & Das (1988) ont déterminé le paramètre γ en fonction de la caractéristique de la poutre et du sol de fondation, en utilisant une procédure itérative. Ils ont nommé ce modèle fondation de Vlasov modifiée (Vallabhan et Das, 1991) [146-148].

V.2.11 Le modèle demi-espace de Boussinesq

La théorie du demi-espace élastique continu ou le modèle Boussinesq implique que le sol de fondation forme un corps continu, homogène et parfaitement élastique de taille infiniment grande, limité par le haut par le plan sur lequel repose la structure de la fondation. Le milieu de fondation peut être présenté par un milieu demi-espace, lorsque la surface de contact est petite par rapport aux dimensions du problème, comme montre **la figure V.16** [149].

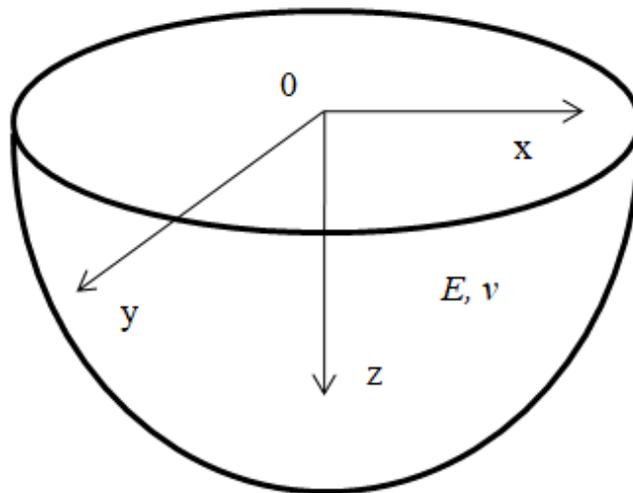


Figure V.16 modèle de demi-espace

L'équation qui régit le mouvement d'un demi-espace élastique isotrope dans la direction de x (la même relation peut être écrite dans les directions y et z) et soumit à une charge $F_x(x, y, z, t)$ est [111,150] :

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + F_x = p \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (\text{V.31})$$

Où : $u_x(x, y, z, t)$, ρ , θ , λ , G et ∇^2 sont respectivement le déplacement dans la direction de x , la densité du milieu, la variation relative du volume, le constante de Lamé, le module de cisaillement et l'opérateur de Laplace.

Tvrda, K. [149] a traité l'interaction entre la fondation et le sous-sol. La fondation élastique est modélisée par différents types de modèles, le modèle à un paramètre, le modèle bi-paramétrique et le modèle complet - Boussinesq (demi-espace élastique) en utilisant la méthode des éléments finis. Bashir F. et al [151] ont montré que la théorie du demi-espace a donné une très bonne estimation de la fréquence de résonance de différentes tailles de fondation. Après avoir construit un modèle fini en laboratoire pour simuler un milieu élastique en demi-espace soumis à une excitation harmonique et vérifier les limites élastiques et dynamiques des performances de ce modèle. S. Guenfoud et al [152] ont présenté une approche semi-analytique de poutres et de plaques reposant sur la surface d'un demi-espace élastique en utilisant la fonction de Green et la méthode de Ritz pour déterminer les déplacements de la zone de contact, en tenant compte la fondation élastique de Winkler.

V.2.12 Le modèle de Reissner

Reissner(1958) a suggéré que les diverses équations régissant le comportement d'un corps élastique pourraient être plus facilement résolues si l'on faisait des hypothèses sur le comportement de ce corps. Il a résolu le problème en supposant que toutes les contraintes dans le plan z (σ_x , σ_y et τ_{xy}) sont nulles et que le module d'Young E était constant avec l'épaisseur H . En utilisant ses hypothèses, nous pouvons définir la réaction de la fondation p en fonction de la déformation w comme [153,154]:

$$p - \frac{H^2 G}{12 E} \nabla^2 p = \frac{E}{H} \left(w - \frac{H^2 G}{3 E} \nabla^2 w \right) \quad (\text{V.32})$$

Pour le cas où le module de cisaillement G est nul, l'équation se réduit au cas classique de la fondation de Winkler. H. QIN [155] a analysé la réponse statique nonlinéaire d'une plaque Reissner sur une fondation élastique. Trois exemples d'une plaque carrée, d'une plaque circulaire et d'une plaque sandwich sont étudiés au moyen de la méthode des éléments de frontière, pour illustrer l'exactitude et la précision de la méthode proposée. Horvath, J. S [156] a développé un nouveau modèle mathématique pour l'analyse des fondations sous charge statique. Le modèle proposé est basé sur le modèle de Reissner, mais dans le cas où le module de rigidité varie linéairement avec la hauteur. Challamel, N et al [157] ont montré que le modèle de fondation de Reissner peut être exprimé dans un format intégral. Pour ce modèle les effets d'échelle sont mis en évidence pour l'analyse du flambement d'une poutre élastique chargée axialement reposant sur un milieu non local linéairement élastique.

V.3 Modèles discrets

Tous les modèles précités décrivent les fondations continues ; cependant, la fondation peut être présentée sous une forme discrète. La voie ferrée, par exemple, est une infrastructure, qui est en fait supportée par une fondation discrète, et dans le cas où la longueur du système considéré est finie, le modèle discret est plus approprié. Au contraire, pour le problème infini, la fondation est généralement supposée être continue. Par conséquent, toutes les théories présentées pour différents modèles peuvent être étendues aux modèles discrets. La force de réaction de la fondation discrète de Winkler (**Fig V.17**), peut être décrite par l'équation suivante :

$$p(x) = k \sum_{i=1}^n w(x_i) \delta(x - x_i) \quad (\text{V.33})$$

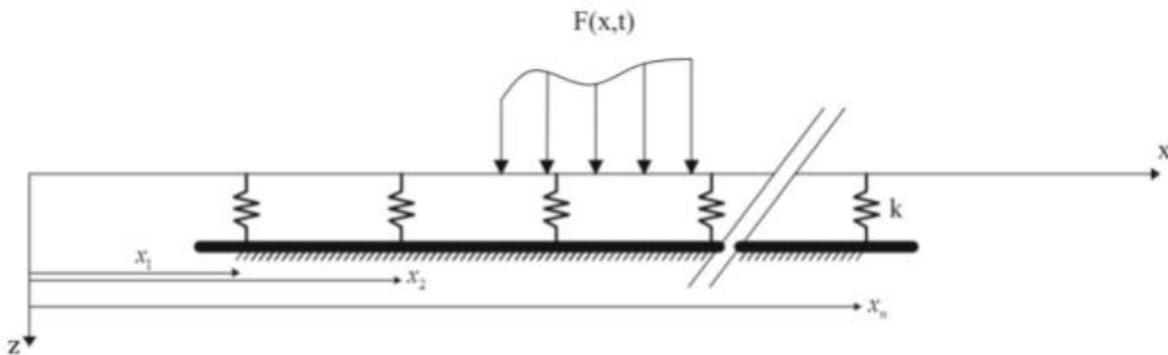


Figure V.17 la fondation discrète de Winkler

Et pour le modèle de Kelvin-Voigt (**Fig V.18**), la relation peut être exprimée sous la forme suivante :

$$p(x) = k \sum_{i=1}^n w(x_i) \delta(x - x_i) + c \sum_{i=1}^n \dot{w}(x_i) \delta(x - x_i) \quad (\text{V.34})$$

Dans laquelle x_i est le positionnement du $i^{\text{ème}}$ ressort ou du $i^{\text{ème}}$ amortisseur et δ est la fonction de Dirac.

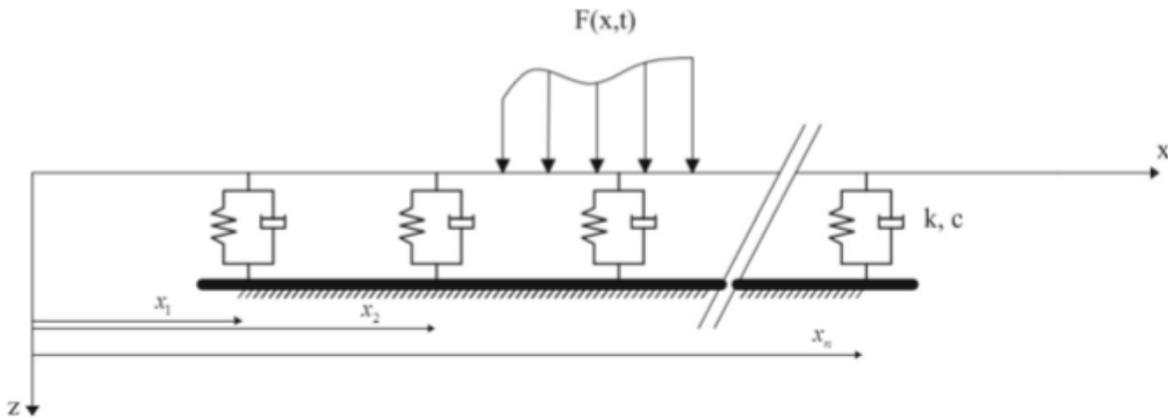


Figure V.18 la fondation discrète de Kelvin-Voigt

V.4 Modèles multicouches

Au fil du temps, en raison des tassements et des décompositions, les fondations (en particulier les sols) se comportent comme un modèle multicouche dans lequel les propriétés de chaque couche sont différentes. Dans ce cas, les modèles multicouches ont fourni des réponses plus réalistes que les modèles monocouches ou à demi-espace continu. Le nombre de couches considérées varie dans la modélisation numérique d'une fondation en fonction du type d'analyse, de la structure / fondation et de la plage de fréquences. Le modèle monocouche est mis en œuvre lorsque le sous-sol est rigide et la fréquence des vibrations est faible. Par contre, le modèle multicouche est généralement utilisé dans la modélisation des structures sur les fondations du sol et pour la modélisation à haute fréquence des voies ferrées [111,158].

Les chercheurs ont également proposé des modèles à deux couches, continus et discrets (**Fig V.19**), pour analyser le comportement dynamique des voies ferrées ballastées. Ces modèles sont considérés comme une amélioration par rapport aux modèles à une couche, car ils permettent de

simuler les semelles de rail, les traverses et le ballast. Dans le modèle à deux couches, le ballast et les patins sont supposés être sans masse, mais ils peuvent être inclus en introduisant des couches supplémentaires (des modèles à trois couches ou des poly-couches (plus de trois), permettant aussi de prendre en compte d'autres effets (interactions voie-sol, de la rigidité ainsi que de l'amortissement du sol (**Fig V.20**) [111,158].

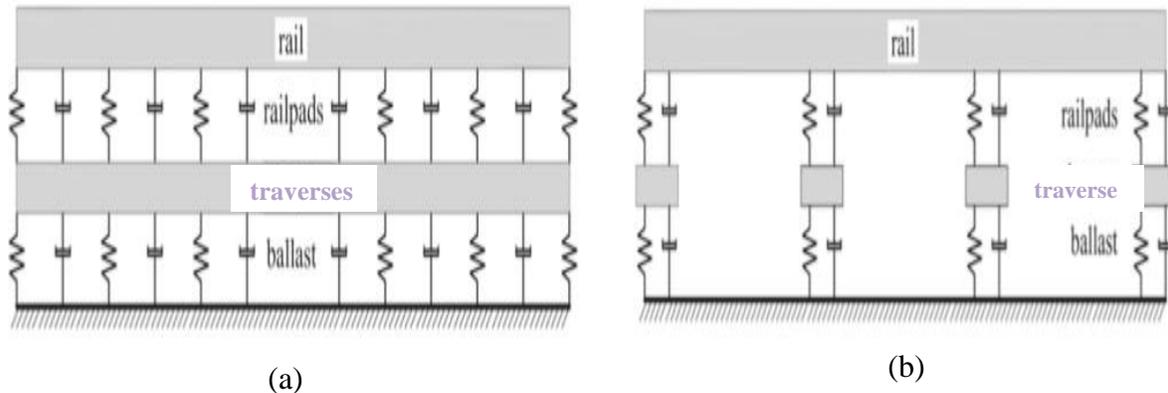


Figure V.19 (a) Modèle continu à deux couches ; (b) Modèle discret à deux couches

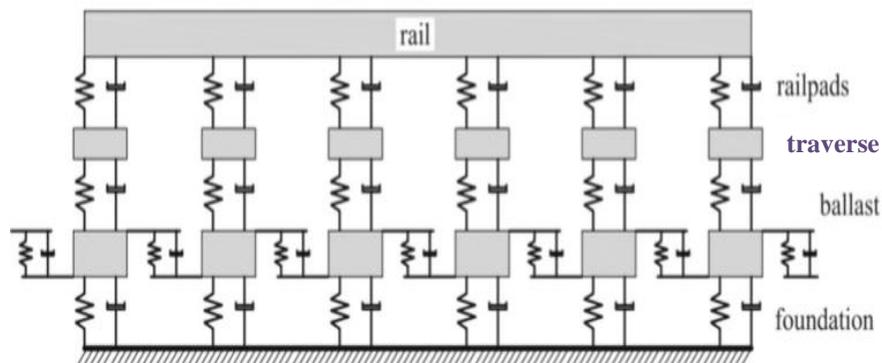


Figure V.20 Modèle à trois couches d'une voie ferrée comprenant une masse de ballast

V.5 Modèles renforcés

L'utilisation de sols renforcés pour soutenir des fondations mous a fait l'objet d'une attention considérable. De nombreuses études expérimentales, numériques et analytiques ont été réalisées pour étudier le comportement des fondations en sol renforcé pour différents types de sol [160]. Un nouveau modèle de fondation a été conçu en introduisant une couche granulaire sur un sol mou afin d'améliorer sa résistance au cisaillement et d'engendrer le tassement du système. Ce type de fondation dites "renforcé" montrée une distribution des contraintes de contact plus élevée

et plus uniforme que dans une fondation non renforcée [111,159]. Sharma, R., et al. ont développé des solutions analytiques pour estimer la capacité de la charge ultime des fondations de sol renforcées par des géogrilles pour les sols de type siliceuse. Différents mécanismes de défaillance des fondations de sol renforcé sont proposés sur la base des résultats d'une étude expérimentale réalisés par les auteurs [160]. Chen, Q. et al ont analysé le comportement des fondations sur un sol argileux de plasticité faible à moyenne renforcé par des géosynthétiques à l'aide d'essais sur des modèles de semelles en laboratoire [161]. Maheshwari et al. ont examiné le modèle d'une poutre infinie reposant sur une fondation granulaire renforcé recouvrant une couche de sol mou soumise à une charge mobile avec une vitesse constante. Une couche de membrane placée entre deux couches de Pasternak a été supposée comme le renforcement, et le sol sous-jacent a été considéré comme le modèle de Winkler. Ils ont également observés que la réponse en flexion de la poutre infinie ainsi que du renforcement sont grandement influencés par la vitesse, l'intensité de la charge, et la rigidité du géosynthétique [111,162].

V.6 Modèles non linéaires

La compréhension, la conception et l'analyse correctes des fondations qui soutiennent les structures sont essentielles à la sécurité de ces structures. Avec l'introduction de codes de conception plus complexes, il devient de plus en plus nécessaire d'utiliser des analyses numériques non linéaires dans la conception des fondations pour modéliser avec précision la réponse de la structure au chargement [163]. Jang et al. [164] ont proposé une nouvelle méthode d'évaluation de la déformation non linéaire d'une poutre infinie sur une fondation élastique non linéaire. Ils abordent les problèmes non linéaires élevés en utilisant une méthode itérative. Une procédure itérative pour l'analyse des poutres reposant sur des fondations élastiques non linéaires est également formulée par Yankelevsky et al [165]. Kuo, Y. H., & Lee, S. Y [166] ont étudié le problème d'une poutre reposé sur une fondation élastique non linéaire et soumise à des forces axiales et transversales. Nguyen, T. P. et al [167] ont proposé un nouveau modèle de fondation pour l'analyse dynamique d'une poutre sur une fondation non linéaire soumise à une masse mobile. Ce modèle est comprend une considération spéciale de l'influence du paramètre de masse de la fondation et l'équation de mouvement du système est formulée par la méthode des éléments finis.

V.7 Domaines d'applications

Les applications les plus connues et les plus tangibles du modèle d'une structure reposant sur une fondation ont nombreuses applications dans les pratiques d'ingénierie modernes (l'aérospatiale, la mécanique, la biomécanique, la marine, génie civil ...ect), comme les coques aérospatiales, les chaussées d'autoroutes, la voie ferrée, les ponts, les semelles, et les pipelines à support continu [111]. Li, S et al ont étudié la dynamique non linéaire des interactions véhicule-route. La route a été modélisée comme une double plaque simplement appuyé sur une fondation viscoélastique non linéaire dont le comportement de la fondation a été présenté par un modèle non linéaire de Kelvin-Voigt [168]. Cependant, Yang et al. ont examiné les effets de l'action de couplage sur les interactions voiture-route. Ils ont également étudié les effets de la rugosité sur l'action de couplage. Ils ont montré que lorsque l'amplitude de la rugosité de la route diminue, les effets de l'action de couplage deviennent plus considérables ; par conséquent les effets de l'action de couplage ne peuvent pas être négligés lorsqu'un véhicule roule sur une surface lisse [169]. Brun et al. ont modélisé un pont simplifié comme un élément de poutre d'Euler-Bernoulli reposant sur un support discret et sur une fondation élastique continue [170]. Ainsi les vibrations à excitation paramétrique d'un pont sur une fondation non linéaire ont été étudié par Zhou et al [171]. Les vibrations induites par l'homme peuvent être également considérées comme une structure sur une fondation. Les chaussées et les ponts piétonniers sont les principaux exemples de vibrations induites par l'homme sur une fondation [172,173]. Chai, Y.-Y et al ont examiné les vibrations aérothermoélastiques et de flambement thermique des panneaux sandwichs reposant sur des fondations élastiques de type winkler [174]. ZAN, Y et al ont proposé un modèle numérique pour évaluer un pipeline J-lay posé en eaux profondes et ultra-profondes. Le modèle développé par la méthode J-lay en tient compte de la rigidité non linéaire du sol [175]. De plus, l'analyse des vibrations du corps humain est importante du point de vue de l'hygiène, de la sécurité et de l'environnement, et elle est également très nécessaire pour la conception d'organes artificiels. A cet égard, certaines parties du corps humain reproduit avec la permission du corps humain peuvent être représentées par les modèles susmentionnés ; par exemple, le crâne humain peut être modélisé par une membrane, les tissus et les vaisseaux sont modélisés par une corde, et la peau est modélisée par une fine couche sur un substrat mou [111]. De même, la nanotechnologie et l'analyse nanostructurale ont été fascinantes pour les chercheurs dans le domaine de la mécanique appliquée, De nombreux articles ont été publiés jusqu'à présent pour étudier les

vibrations des nanostructures considérant différents types de fondations. L'analyse non linéaire des vibrations libres et forcées d'une nanopoutre d'Euler-Bernoulli reposant sur une fondation élastique de type Pasternak a été développé par Togun, N., Bagdatli, S.M [176]. Kazemi-Lari, et al. ont utilisé Les modèles Kelvin-Voigt, Maxwell et Standard linear solid types de fondations viscoélastiques pour modéliser l'interaction entre les nanotubes de carbone et les fondations viscoélastiques et étudier l'influence de la fondation viscoélastique sur l'instabilité non-conservative du cantilever [177].

V.8 Conclusion

Les fondations sont des éléments essentiels d'une construction. Ce sont elles qui assurent la stabilité et la pérennité de la superstructure. Ce chapitre dédié à présenter les différents modèles théoriques des fondations en considérant un large éventail modèles élastiques et viscoélastiques linéaires et non linéaires pour une meilleure compréhension du comportement mécanique des fondations et satisfaire aux exigences des applications du système structurel .

CHAPITRE VI
«MODELISATION DES
NANOPLAQUES FGM
VISCOELASTIQUE REPOSANT SUR
DES FONDATIONS
VISCOELASTIQUES»

Modélisation des nanoplaques FGM viscoélastique reposant sur des fondations viscoélastiques

VI.1 Introduction

La durabilité des structures est d'un intérêt majeur pour les domaines de l'ingénierie : aéronautique, aérospatial, mécanique et génie civil. Dans la documentation publiée récemment, le développement des nouveaux matériaux à gradient fonctionnel a attiré vivement l'attention des chercheurs, notamment son comportement mécanique, statique et dynamique avec des différentes méthodes et modèles pour micro et nanostructure. S. J. Singh & S. P. Harsha [178] ont analysé les mécanismes de flambement d'une plaque en en FGM soumise à des charges uniformes, linéaires et non linéaires dans le plan. Ainsi, B. Sidda Reddy et al [179] ont utilisé la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur afin de développer une nouvelle solution permettant une étude analytique des vibrations d'une plaque à gradient fonctionnel. Aussi, Talha, M., & Singh, B. N. [180] a proposé une formulation théorique avec des modèles d'éléments finis pour l'analyse statique des plaques à gradient fonctionnel en utilisant la théorie du cisaillement d'ordre supérieur avec une modification spéciale du déplacement transversal. M.N.A.Gulshan Taj et al [181] ont traité l'analyse statique des plaques de matériaux à gradient fonctionnel (FGM) en utilisant la théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur dont les contraintes de cisaillement transversales sont représentées comme quadratiques à travers l'épaisseur. M. Bhandari et Dr. Kamlesh Purohit [182] ont effectué une analyse par éléments finis d'une plaque inhomogène où les propriétés des matériaux sont supposées être variables selon une loi de distribution sinusoïdale (S-FGM), exponentielle (E-FGM) et polynomiale (P-FGM) pour différentes conditions aux limites. A. Chikh [183] a appliqué la théorie d'élasticité non locale et la théorie de la déformation en cisaillement à quatre variables pour analyse de la vibration libre d'une nanoplate fonctionnellement gradée et simplement supportée. Ramin Aghababaei et J.N.Reddy [184] ont appliqué la théorie non locale pour illustrer les effets de petite échelle sur une plaque rectangulaire simplement soutenue. I. Mechab et al [185] ont traité une nouvelle fonction hyperbolique de la théorie de déformation en cisaillement des plaques avec seulement quatre variables pour la modélisation statiques et dynamiques des plaques FGM. P. Malekzadeh [186] a utilisé la méthode de quadrature différentielle (DQM) pour étudier la caractéristique de vibration d'une plaque FG épaisse sur une fondation élastique basée sur la théorie d'élasticité

tridimensionnelle. M. Sobhy [103] a obtenu des solutions analytiques d'une étude au flambement d'une plaque sandwich FGM reposant sur des fondations élastiques en utilisant différentes conditions aux limites.

Plus récemment, les avantages de l'utilisation de matériaux viscoélastiques et de fondations viscoélastiques dans les industries et les structures d'ingénierie pour le contrôle et la réduction de la transmission des vibrations sont clairement visibles [187]. Peu d'articles ont été publiés pour exprimer la théorie viscoélastique appliquée à la propriété du matériau de la plaque FGM, parmi lesquels, Holm Altenbach & Victor Eremeyev [188] ont étudié la flexion d'un nouveau modèle des plaques viscoélastiques linéaires constituées de FGM tels que la mousse polymère avec une distribution non homogène de la porosité. A. H. Sofiyev et al [189] ont analysé la vibration libre et la stabilité dynamique des plaques viscoélastiques à gradient fonctionnel soumises à une charge de compression et reposant sur des fondations élastiques. Zhang, N.-H., & Wang, M.-L [190] ont formulé un modèle mathématique simplifié de plaques thermoviscoélastiques à gradient fonctionnel sur la base du théorème classique des plaques (l'hypothèse de Kirchhoff).

Néanmoins, ces méthodes sont très lourdes et prohibitives en termes de calcul lorsqu'elles sont appliquées à des systèmes de nanostructures comportant un grand nombre d'atomes [191]. C'est pourquoi G. Ahmadi a formulé un nouveau modèle de la théorie linéaire des matériaux viscoélastiques qui prend en compte l'effet d'échelle atomique [192]. Le nouveau modèle est appliqué pour présenter différente sollicitation à savoir la flexion, le flambage (J.C.Liu et al [193]) et la vibration libre (S. Poursmaeeli et al [194], Y. Lei et al [195], Ansari et al [196], Hosseini & A. Jamalpoor [197], S. Hamzi & I. Mechab [198]) à différentes structures.

L'objectif de ce chapitre est de présenter un nouveau modèle pour la théorie des plaques à déformation par cisaillement d'ordre supérieur couplé au modèle viscoélastique interne de Kelvin - Voigt et au modèle de fondation viscoélastique à trois paramètres dans le but de réduire et de minimiser la réponse vibratoire du système. Il est largement admis que les propriétés mécaniques de ces nouveaux matériaux à gradient fonctionnel (FGM) varient en fonction de l'épaisseur de la plaque et dépendent de sa fraction volumique. L'utilisation de plaques FGM semble être une solution idéale pour l'étude des vibrations libres en raison de leur multifonctionnalité qui est pleinement intégrée à l'effet Eringen non local. La réponse dynamique d'un tel système complexe

a été étudiée en faisant varier le rapport d'aspect de la plaque, les caractéristiques mécaniques du matériau utilisé, l'amortissement interne et externe et la rigidité de la fondation.

VI.2 Formulation du problème

Considérons une nanoplaque constituée de matériaux viscoélastiques fonctionnellement gradué, avec une longueur a , une largeur b et une épaisseur h . La plaque repose sur une fondation viscoélastique dont les coordonnées sont illustrées à la figure VI.1.

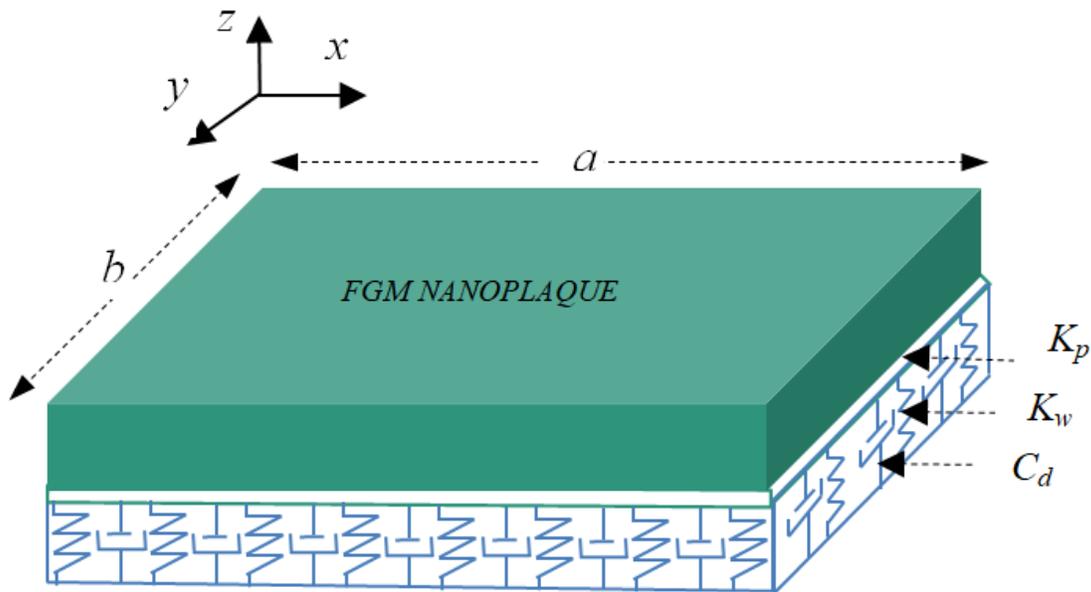


Figure VI.1 Géométrie d'une nano-plaque viscoélastique FG reposant sur une fondation viscoélastique

Les propriétés des matériaux élastiques de la plaque FG, qui contiennent de la céramique et du métal uniformément réparti, tel que le module d'Young « $E(z)$ », la densité massique « $\rho(z)$ » et le coefficient de Poisson du matériau « ν » sont supposés être variés progressivement à travers son épaisseur, conformément à la distribution de la loi de puissance FGM (P-FGM), qui s'écrit comme la règle générale de mélange sous la forme suivante :

$$P(z) = (P_c - P_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + P_m. \quad (\text{VI.1})$$

Où : P désigne la propriété effective du matériau, et les indices "c" et "m" désignent respectivement la céramique et le métal.

Donc, les équations exprimant le module de Young $E(z)$ et la densité $\rho(z)$ du matériau d'une plaque à gradient fonctionnel peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + E_m \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p + \rho_m \end{aligned} \quad (\text{VI.2})$$

Où : E_c , E_m , ρ_c et ρ_m sont le module d'Young et les densités volumiques correspondant à la céramique et au métal, respectivement ; p représente l'exposant de la fraction volumique qui ne prend que des valeurs supérieures ou égales à zéro ($0 \leq p \leq \infty$). La valeur zéro correspond à une plaque en céramique. Notons que, le coefficient de Poisson est supposé être constant.

VI.2.1 Le champ de déplacement

Les déplacements de tout point de la nanoplaque peuvent être exprimés en termes de composantes moyennes de déplacement de la surface. Le champ de déplacement est donné par la théorie de plaques de déformation en cisaillement d'ordre supérieur comme suit:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial x} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b(x, y, t)}{\partial y} + (f(z) - z) \frac{\partial w_s(x, y, t)}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

Notons que u , v et w sont les composantes du déplacement suivant les directions x , y et z , respectivement. Les inconnues fondamentales sont constituées des quatre déplacements généralisés u_0 , v_0 , w_b et w_s qui sont des fonctions des coordonnées x et y . Dont u_0 et v_0 sont les composantes du déplacement le long de x et y , et que w_b et w_s sont les composantes du déplacement le long de z . $f(z)$ représente la fonction de forme déterminant la distribution des déformations et des contraintes de cisaillement transversales le long de l'épaisseur. Dans la présente étude, une nouvelle fonction de forme est proposée, suivant l'expression suivante:

$$f(z) = \frac{1}{1 - \pi \cdot e^{-\frac{1}{4}}} \left(z - h \cdot e^{\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{1}{4}} \cdot \sin\left(\frac{z}{h} \pi\right) \right) \quad (\text{VI.4})$$

En outre, la fonction de forme doit satisfaire aux trois conditions ci-après :

- a. Leurs dérivées doivent être égales à zéro au point $(x, y, \pm h/2)$, sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque (**Fig VI.2**).

$$f'(z) \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (\text{VI.5})$$

- b. La fonction $f(z)$ doit être une fonction impaire (**Fig VI.3**).

$$\int_{z=-h/2}^{z=h/2} f(z) dz = 0 \quad (\text{VI.6})$$

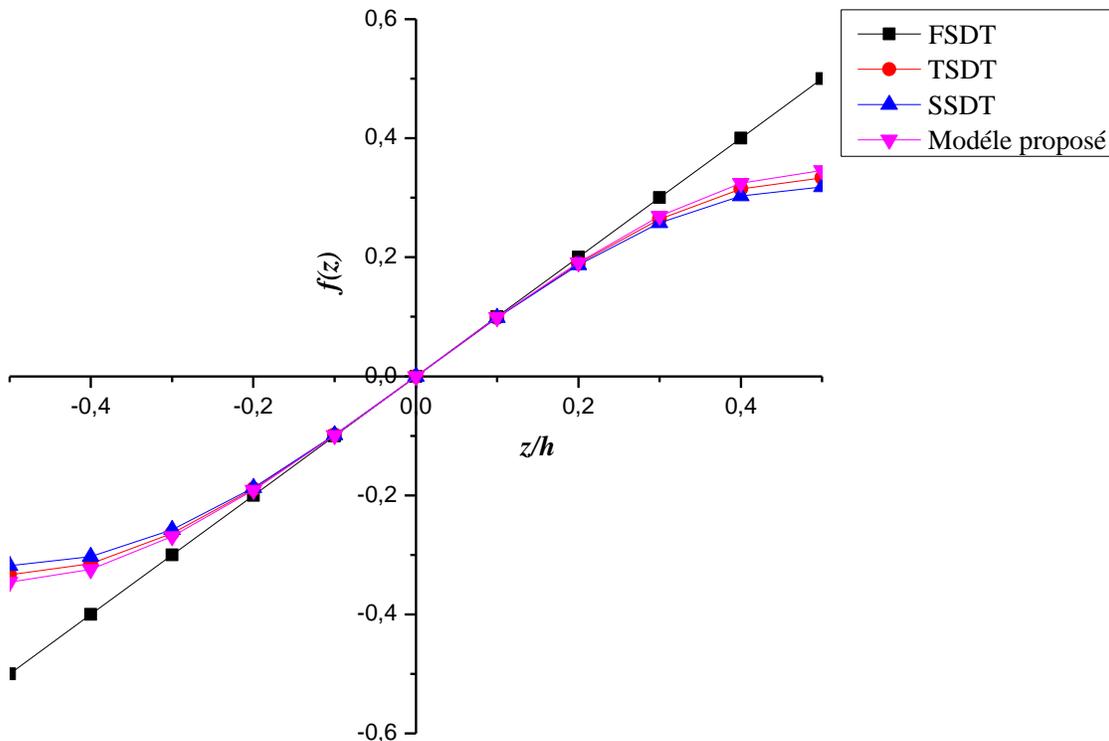


Figure VI.2 Convergence de la fonction proposée $f(z)$ avec celles de (FSDT), (TSDT), (SSDT)

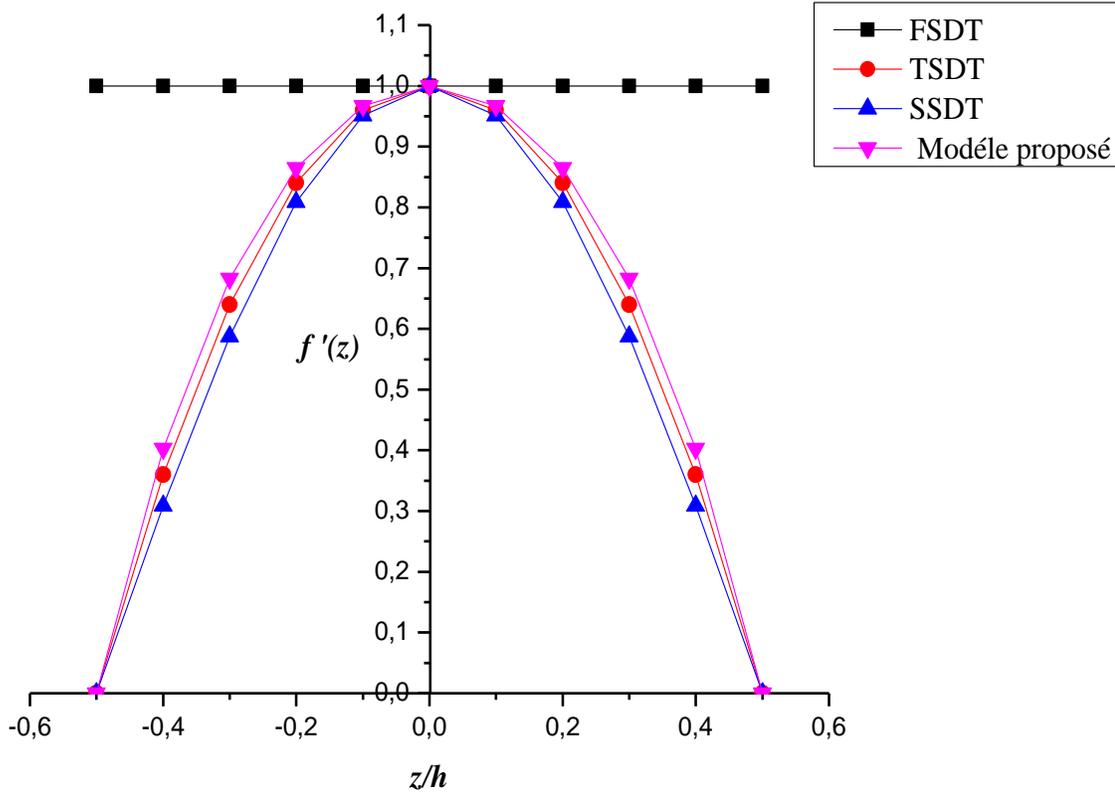


Figure VI.3 Convergence de la dérivé de la fonction proposée $f'(z)$ avec celles de (FSDT), (TSDT), (SSDT)

VI.2.2 Le champ de déformation

En tenant compte de la déformation de la section droite de la plaque et la théorie raffinée des plaques épaisses, le champ de déformation associé au champ de déplacement de l'équation (VI.3) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (VI.7)$$

VI.2.3 Les relations constitutives

VI.2.3.11 Modèle d'élasticité locale:

Les champs de déformation et de contrainte dans un milieu sont liés par des lois constitutives; ces lois caractérisent le comportement mécanique du milieu. Par conséquent, la relation élastique linéaire pour une plaque FGM peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & C_{16}(z) \\ C_{12}(z) & C_{22}(z) & 0 & 0 & C_{26}(z) \\ 0 & 0 & C_{44}(z) & C_{45}(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_{45}(z) & C_{55}(z) & 0 \\ C_{16}(z) & C_{26}(z) & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.8})$$

Où: $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$, $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les éléments de contraintes et de déformations, respectivement. Les termes $C_{ij}(z)$ représentent les constantes de rigidité qui dépendent des constituants du matériau FGM.

$$\begin{aligned} C_{11}(z) &= C_{22}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, C_{12}(z) = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ C_{44}(z) &= C_{55}(z) = C_{66}(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \\ C_{16}(z) &= C_{26}(z) = C_{45}(z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

VI.2.3.12 Modèle d'élasticité non-locale:

La théorie de l'effet non local développée par Eringen, qui a tenu compte l'importance des attractions intermoléculaires du matériau (effet d'échelle), suggère que les contraintes en un point de référence « x » du corps dépendent non seulement des déformations en « x » mais aussi des déformations en tous points du corps. La relation constitutive de la loi élastique d'une nanoplaque est exprimée par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \tau_{yz}^{nl} \\ \tau_{xz}^{nl} \\ \tau_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \tau_{yz}^{nl} \\ \tau_{xz}^{nl} \\ \tau_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & C_{16}(z) \\ C_{12}(z) & C_{22}(z) & 0 & 0 & C_{26}(z) \\ 0 & 0 & C_{44}(z) & C_{45}(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_{45}(z) & C_{55}(z) & 0 \\ C_{16}(z) & C_{26}(z) & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.10})$$

Avec: $\mu = (e_0 a)^2$ est le paramètre non local qui dépend de la constante matérielle « e_0 » et de la caractéristique interne « a » (paramètre de réseau, longueur de fissure ou diamètres moléculaires), et le terme ∇^2 est l'opérateur de Laplace en coordonnées cartésiennes à deux dimensions. Il est exprimé par:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{VI.11})$$

VI.2.3.13 Modèle de la viscoélasticité locale:

La théorie de la viscoélasticité permet de prendre en compte les matériaux capables de stocker et de dissiper l'énergie mécanique. Sur la base du modèle de Kelvin-Voigt sur les matériaux viscoélastiques avec un coefficient d'amortissement structural viscoélastique η , les rigidités C_{ij} qui dépendent du module de Young E et du module de cisaillement G sont remplacées par les opérateurs, $C_{ij} \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right)$. Par conséquent, l'équation (VI.8) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & C_{16}(z) \\ C_{12}(z) & C_{22}(z) & 0 & 0 & C_{26}(z) \\ 0 & 0 & C_{44}(z) & C_{45}(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_{45}(z) & C_{55}(z) & 0 \\ C_{16}(z) & C_{26}(z) & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.12})$$

VI.2.3.14 Modèle de la viscoélasticité non-locale:

Le concept de la théorie de la viscoélasticité non locale, précédemment développée par plusieurs chercheurs [18-25], supposait initialement une combinaison des modèles d'élasticité non locale et de la viscoélasticité. Par conséquent, pour les plaques viscoélastiques non locales, le champ de contraintes viscoélastiques non locales peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \tau_{yz}^{nl} \\ \tau_{xz}^{nl} \\ \tau_{xy}^{nl} \end{pmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^{nl} \\ \sigma_{yy}^{nl} \\ \tau_{yz}^{nl} \\ \tau_{xz}^{nl} \\ \tau_{xy}^{nl} \end{pmatrix} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t}\right) \begin{bmatrix} C_{11}(z) & C_{12}(z) & 0 & 0 & C_{16}(z) \\ C_{12}(z) & C_{22}(z) & 0 & 0 & C_{26}(z) \\ 0 & 0 & C_{44}(z) & C_{45}(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_{45}(z) & C_{55}(z) & 0 \\ C_{16}(z) & C_{26}(z) & 0 & 0 & C_{66}(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{VI.13})$$

VI.2.4 Les équations du mouvement:

Pour établir les équations régissant l'équilibre d'une nanoplaque viscoélastique FGM reposant sur la fondation viscoélastique de Winkler-Pasternak, le principe du travail virtuel (principe de Hamilton) peut être utilisé comme suit :

$$\int_{t_0}^{t_1} \Pi dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta U - \delta K - \delta W_{fe}) dt = 0 \quad (\text{VI.14})$$

Avec : δU est la variation de l'énergie de déformation; δK est la variation de l'énergie cinétique et δW_{fe} est la variation de l'énergie potentielle.

Dans ce cas, l'énergie de déformation virtuelle peut être exprimée par :

$$\delta U = \iiint_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (\text{VI.15})$$

En substituant l'équation (VI.8) dans l'équation (VI.15), l'énergie de déformation virtuelle devient alors :

$$\delta U = \iint_A \left[N_{xx} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - M_{xx} \delta \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) + S_{xx} \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial x^2} \right) + N_{yy} \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - M_{yy} \delta \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) + S_{yy} \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial y^2} \right) + N_{xy} \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \right) + S_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) + Q_{xz} \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial x} \right) + Q_{yz} \delta \left(\frac{\partial w_s}{\partial y} \right) \right] dA \quad (\text{VI.16})$$

Où : N_{ij} , M_{ij} et Q_{ij} sont les forces normales, les moments de flexion et les forces de cisaillement, respectivement. Le terme inhabituel S_{ij} a la dimension d'un moment qui est induit par $(f(z) - z)$ dans le champ de déplacement ; ils sont définis comme suit :

$$(N_{ij}, M_{ij}, S_{ij}, Q_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} \left(1, z, f(z) - z, \frac{\partial f(z)}{\partial z} \right) dz \quad (\text{VI.17})$$

En outre, les expressions des forces et des moments élastiques locaux sont données par :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & B_{11}^f & B_{12}^f & B_{16}^f \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & B_{12}^f & B_{22}^f & B_{26}^f \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & B_{16}^f & B_{26}^f & B_{66}^f \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & D_{11}^f & D_{12}^f & D_{16}^f \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & D_{12}^f & D_{22}^f & D_{26}^f \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & D_{16}^f & D_{26}^f & D_{66}^f \\ B_{11}^f & B_{12}^f & B_{16}^f & D_{11}^f & D_{12}^f & D_{16}^f & F_{11}^f & F_{12}^f & F_{16}^f \\ B_{12}^f & B_{22}^f & B_{26}^f & D_{12}^f & D_{22}^f & D_{26}^f & F_{12}^f & F_{22}^f & F_{26}^f \\ B_{16}^f & B_{26}^f & B_{66}^f & D_{16}^f & D_{26}^f & D_{66}^f & F_{16}^f & F_{26}^f & F_{66}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ -w_{s,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \\ w_{s,x} \\ w_{s,y} \\ 2w_{s,xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.18})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44}^f & A_{45}^f \\ A_{45}^f & A_{55}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix} \quad (\text{VI.19})$$

De même, les éléments de la matrice donnée par les équations (VI.18) et (VI.19) peuvent être exprimés comme suit:

$$\begin{aligned}
\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^f\} &= \int C_{ij}(z) \{1, z, z^2, f(z) - z\} dz \quad i, j = 1, 2, 6, \\
\{D_{ij}^f, F_{ij}^f\} &= \int C_{ij}(z) \{z(f(z) - z), (f(z) - z)^2\} dz \quad i, j = 1, 2, 6, \\
\{A_{ij}^f\} &= \int C_{ij}(z) \left\{ \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \quad i, j = 4, 5.
\end{aligned} \tag{VI.20}$$

D'autre part, la variation de l'énergie cinétique de la plaque est exprimée par :

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dV \tag{VI.21}$$

En substituant l'équation (VI.3) dans l'équation (VI.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta K &= \iint_A \left[\left(I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} - I_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} + I_4 \frac{\partial w_s}{\partial x \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) - \left(I_2 \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + I_5 \frac{\partial w_s}{\partial x \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\
&\quad \left(I_4 \frac{\partial u_0}{\partial t} - I_5 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} + I_6 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \right) + \left(I_1 \frac{\partial v_0}{\partial t} - I_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial t} + I_4 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) - \\
&\quad \left(I_2 \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial t} + I_5 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial t} \right) + \left(I_4 \frac{\partial v_0}{\partial t} - I_5 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial t} + I_6 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y \partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial y \partial t} \right) + \\
&\quad \left. I_1 \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} \right) \right] dV
\end{aligned} \tag{VI.22}$$

Avec : I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 et I_6 sont les inerties massiques définies par :

$$\{I_i\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \{1, z, z^2, f(z) - z, z(f(z) - z), (f(z) - z)^2\} dz, i = 1..6 \tag{VI.23}$$

La variation de l'énergie potentielle effectuée par la fondation viscoélastique de Winkler-Pasternak peut calculer par

$$\begin{aligned}
\delta W_{fe} &= \iint_A f_e(x, y) \delta W dA \\
\delta W_{fe} &= \iint_A \left(k_w W - k_p \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) W + c_d \frac{\partial W}{\partial t} \right) \delta W dA.
\end{aligned} \tag{VI.24}$$

Où : f_e , K_w , K_p , C_d sont la force de réaction de la fondation, la rigidité de la fondation de Winkler, le coefficient de Pasternak et le paramètre d'amortissement.

En effectuant une intégration par partie de l'équation (VI.16), de l'équation (VI.22) et de l'équation (VI.24), on obtient les équations de mouvement utilisées dans la théorie raffinée des plaques FGM :

$$\begin{aligned}
\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2}, \\
\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial t^2}, \\
\delta w_b : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} &= f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) \\
+ I_2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - I_3 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_5 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right), & \quad (VI.25) \\
\delta w_s : \frac{\partial^2 S_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_{yy}}{\partial y^2} - \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} &= f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) \\
+ I_4 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_6 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right). &
\end{aligned}$$

Les forces internes avec des paramètres viscoélastiques non locales sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} N_{xx}^{nl} \\ N_{yy}^{nl} \\ N_{xy}^{nl} \\ M_{xx}^{nl} \\ M_{yy}^{nl} \\ M_{xy}^{nl} \\ S_{xx}^{nl} \\ S_{yy}^{nl} \\ S_{xy}^{nl} \end{array} \right\} - \mu \nabla^2 \left\{ \begin{array}{c} N_{xx}^{nl} \\ N_{yy}^{nl} \\ N_{xy}^{nl} \\ M_{xx}^{nl} \\ M_{yy}^{nl} \\ M_{xy}^{nl} \\ S_{xx}^{nl} \\ S_{yy}^{nl} \\ S_{xy}^{nl} \end{array} \right\} &= \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\begin{array}{cccccccccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & B_{11}^f & B_{12}^f & B_{16}^f & \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & B_{12}^f & B_{22}^f & B_{26}^f & \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & B_{16}^f & B_{26}^f & B_{66}^f & \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & D_{11}^f & D_{12}^f & D_{16}^f & \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & D_{12}^f & D_{22}^f & D_{26}^f & \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & D_{16}^f & D_{26}^f & D_{66}^f & \\ B_{11}^f & B_{12}^f & B_{16}^f & D_{11}^f & D_{12}^f & D_{16}^f & F_{11}^f & F_{12}^f & F_{16}^f & \\ B_{12}^f & B_{22}^f & B_{26}^f & D_{12}^f & D_{22}^f & D_{26}^f & F_{12}^f & F_{22}^f & F_{26}^f & \\ B_{16}^f & B_{26}^f & B_{66}^f & D_{16}^f & D_{26}^f & D_{66}^f & F_{16}^f & F_{26}^f & F_{66}^f & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \\ -w_{s,xx} \\ -w_{b,yy} \\ -2w_{b,xy} \\ w_{s,x} \\ w_{s,y} \\ 2w_{s,xy} \end{array} \right\} \quad (VI.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz}^{nl} \\ Q_{yz}^{nl} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} Q_{xz}^{nl} \\ Q_{yz}^{nl} \end{Bmatrix} = \left(1 + \eta \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} A_{44}^f & A_{45}^f \\ A_{45}^f & A_{55}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{s,x} \\ w_{s,y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{VI.27})$$

Les équations de mouvement régissant les nanoplates viscoélastiques FGM reposant sur un milieu viscoélastique à trois paramètres dans le cas de vibrations libres, en termes de déplacements, sont obtenues en introduisant les équations constitutives (VI.26) et (VI.27) dans les équations d'équilibre (VI.25). Ceci permet d'obtenir les quatre relations fondamentales de la théorie raffinée des plaques viscoélastiques non locales des matériaux FGM:

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \right) + \\ & \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + B_{11}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + \\ A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^2 \partial x} + B_{12}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial x} \end{pmatrix} + \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} + \\ 2B_{66}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} \end{pmatrix} \\ & = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.28})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial t^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial t^2} \right) + \\ & \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + B_{12}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \\ + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} + B_{22}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} \end{pmatrix} + \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{pmatrix} A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} + \\ 2B_{66}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y} \end{pmatrix} \\ & = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} + I_4 \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

$$\begin{aligned}
\delta w_b : & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + I_2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + I_2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) \right) + \\
& \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-I_3 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_5 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right) + \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(-I_3 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_5 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right) + \\
& \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + D_{11}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + B_{12} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{12} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& \left. - D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} + D_{22}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \right) + \\
& 2 \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2D_{66}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + I_2 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - \\
& I_3 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_5 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{VI.30}$$

$$\begin{aligned}
\delta w_s : & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + I_4 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - \right. \\
& \left. I_5 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_6 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + I_4 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) \right) + \\
& \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{11}^f \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11}^f \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + F_{11}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + \right. \\
& \left. B_{12}^f \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} - D_{12}^f \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + F_{12}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{12}^f \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^2 \partial x} - D_{12}^f \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + F_{12}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{55}^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \right) + \\
& \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{22}^f \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{22}^f \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} + F_{22}^f \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + A_{55}^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + \\
& 2 \left(1 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(B_{66}^f \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right) - 2D_{66}^f \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + 2F_{66}^f \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = f_e + I_1 \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \right) + I_4 \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) - \\
& - I_5 \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_6 \left(\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{VI.31}$$

VI.3 Solution analytique

La solution de Navier est utilisée pour obtenir les solutions analytiques des équations (VI.28) à (VI.31) sous différentes conditions aux limites imposées aux bords latéraux de la plaque rectangulaires en fonction du type de support utilisé, comme indiqué dans le **tableau VI.1**. Les conditions aux limites utilisées sont les suivantes :

Plaque en appuie simple (S) le long de la direction x :

à $x = 0, a$:

$$\begin{aligned}
 & \bullet v_0 = w_b = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \\
 & \bullet N_{xx} = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{11}^f \frac{\partial w_s}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \\
 & 2B_{16} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial x} + B_{12}^f \frac{\partial w_s}{\partial y} + 2B_{16}^f \frac{\partial w_s}{\partial y \partial x} = 0 \\
 & \bullet M_{xx} = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{11}^f \frac{\partial w_s}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \\
 & 2D_{16} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial x} + D_{12}^f \frac{\partial w_s}{\partial y} + 2D_{16}^f \frac{\partial w_s}{\partial y \partial x} = 0 \\
 & \bullet S_{xx} = B_{11}^f \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{16}^f \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{11}^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + F_{11}^f \frac{\partial w_s}{\partial x} + B_{12}^f \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12}^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \\
 & 2D_{16}^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial x} + F_{12}^f \frac{\partial w_s}{\partial y} + 2F_{16}^f \frac{\partial w_s}{\partial y \partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{VI.32}$$

Plaque en appuie simple (S) le long de la direction y :

à $y = 0, b$:

$$\begin{aligned}
 & \bullet u_0 = w_b = \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \\
 & \bullet N_{yy} = A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + B_{12}^f \frac{\partial w_s}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \\
 & 2B_{26} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial x} + B_{22}^f \frac{\partial w_s}{\partial y} + 2B_{26}^f \frac{\partial w_s}{\partial y \partial x} = 0 \\
 & \bullet M_{yy} = B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{12}^f \frac{\partial w_s}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \\
 & 2D_{26} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial x} + D_{22}^f \frac{\partial w_s}{\partial y} + 2D_{26}^f \frac{\partial w_s}{\partial y \partial x} = 0 \\
 & \bullet S_{yy} = B_{12}^f \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{26}^f \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12}^f \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + F_{12}^f \frac{\partial w_s}{\partial x} + B_{22}^f \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{22}^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - \\
 & 2D_{26}^f \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial x} + F_{22}^f \frac{\partial w_s}{\partial y} + 2F_{26}^f \frac{\partial w_s}{\partial y \partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{VI.33}$$

Plaque encadrée (C)

$$\text{à } x = 0, a, y = 0, b \quad , u_0 = v_0 = w_b = \frac{\partial w_s}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = 0 \quad (\text{VI.34})$$

Tableau VI. 1 Les fonctions admissibles $X_i(x)$ et $Y_i(x)$ [103]

Les conditions aux limites	$X_i(x)$	$Y_i(x)$
SSSS 	$\sin(\alpha x)$	$\sin(\beta x)$
CCCC 	$1 - \cos(2\alpha x)$	$1 - \cos(2\beta x)$
CCSS 	$1 - \cos(2\alpha x)$	$\sin(\beta x)$
CSCS 	$\cos\left(\frac{3\alpha x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{3\beta x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{2}\right)$
CSSS 	$\cos\left(\frac{3\alpha x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha x}{2}\right)$	$\sin(\beta x)$
CCSC 	$1 - \cos(2\alpha x)$	$\cos\left(\frac{3\beta x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta x}{2}\right)$

Les fonctions de déplacement, qui satisfont les conditions aux limites, sont exprimées par les séries de Fourier suivantes :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{ij} \frac{\partial X_i(x)}{\partial x} Y_j(y) \\ V_{ij} X_i(x) \frac{\partial Y_j(y)}{\partial y} \\ W_{bij} X_i(x) Y_j(y) \\ W_{sij} X_i(x) Y_j(y) \end{Bmatrix} e^{-i\omega t} \quad (\text{VI.35})$$

Où : U_{ij} , V_{ij} , W_{bij} and W_{sij} sont des paramètres arbitraires à déterminer, et ω correspond à la fréquence propre complexe du ($i^{\text{ème}}$, $j^{\text{ème}}$) mode propre vibratoire, avec :

$$\alpha = \frac{i\pi}{a}, \beta = \frac{i\pi}{b} \quad (\text{VI.36})$$

En substituant les équations (35) et (36) dans les équations de mouvements (28-31), nous obtenons:

$$\left(\begin{array}{cccc} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{array} \right) \omega^2 + I\eta \left(\begin{array}{cccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{array} \right) \omega + \left(\begin{array}{cccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{bij} \\ W_{sij} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad (\text{VI.37})$$

Avec: $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, respectivement.

Il convient de noter que la fréquence naturelle « ω » est obtenue à partir du moment où le déterminant du système d'équations présenté (VI.37) est nul.

L'équation fondamentale du mouvement (VI.37) peut être réécrite sous sa forme générale comme suit:

$$\left(\begin{array}{cccc} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U_{ij} \\ V_{ij} \\ W_{bij} \\ W_{sij} \end{array} \right) = \{0\} \quad (\text{VI.38})$$

Avec : $[U_{ij}, V_{ij}, W_{bij}, W_{sij}]$ est le vecteur des déplacements, et $[L]$ est la matrice globale du système dans laquelle les éléments de la matrice des coefficients est symétrie ($L_{ij} = L_{ji}$). Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \int_0^a \int_0^b \left(-\frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) \left(-I_1 \lambda^2 \frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) + I_1 \mu \lambda^2 \frac{\partial X(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + I_1 \mu \lambda^2 \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) + A_{66} \frac{\partial X(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A_{66} \eta \lambda \frac{\partial X(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) + A_{11} \eta \lambda \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) \right) dx dy \right. \\
L_{12} &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} \right)^2 Y(y) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} (A_{12} + A_{66}) (1 + \eta \lambda) dx dy \frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) \\
L_{13} &= \int_0^a \int_0^b \left(\left(\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial X(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) \right) \mu - \frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) \right) I_2 \lambda^2 + (2B_{66} + B_{12}) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial X(x)}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) \right. \\
&\quad \left. + \left((2B_{66} + B_{12}) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial X(x)}{\partial x} + B_{11} \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) \right) \eta \lambda \right) dx dy \\
L_{14} &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) \left(\left(\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial X(x)}{\partial x} + \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) \right) \mu - \frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) \right) I_4 \lambda^2 + (2B_{66}^f + B_{12}^f) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial X(x)}{\partial x} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. B_{11}^f \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) + \left((2B_{66}^f + B_{12}^f) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial X(x)}{\partial x} + B_{11}^f \frac{\partial^3 X(x)}{\partial x^3} Y(y) \right) \eta \lambda \right) dx dy \right. \\
L_{22} &= \int_0^a \int_0^b \left(-X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \left(\left(\left(\frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) \mu - X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) I_1 \lambda^2 + A_{22} \frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) + A_{66} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(A_{22} \frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) + A_{66} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) \eta \lambda \right) dx dy \right. \\
L_{23} &= \int_0^a \int_0^b \left(X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \left(\left(\left(\frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) \mu - X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) I_2 \lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(B_{22} \frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) \eta \lambda \right) dx dy \right. \\
L_{24} &= \int_0^a \int_0^b \left(-X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \left(\left(\left(\frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) \mu - X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) I_4 \lambda^2 + (B_{12}^f + 2B_{66}^f) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} + B_{22}^f \frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(B_{22}^f \frac{\partial^3 Y(y)}{\partial y^3} X(x) + (B_{12}^f + 2B_{66}^f) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial Y(y)}{\partial y} \right) \eta \lambda \right) dx dy \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{33} = & \int_0^a \int_0^b -X(x)Y(y) \left(\left(\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) I_1 - \left(2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) I_3 \right) \mu - \right. \\
& \left. X(x)Y(y) I_1 + \left(X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) I_3 \right) \lambda^2 + \left(\left(X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) \mu - X(x)Y(y) \right) \lambda c_d + \\
& \left((-2D_{12} - 4D_{66}) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - D_{11} Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - D_{22} X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) \lambda \eta - D_{11} Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - D_{22} X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \\
& + \left(\left(-2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) \mu + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) k_p + \\
& \left(\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) \mu - X(x)Y(y) \right) k_w + (-2D_{12} - 4D_{66}) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \Big) dx dy \\
L_{34} = & \int_0^a \int_0^b -X(x)Y(y) \left(\left(\left(\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) I_1 - \left(2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) I_5 \right) \mu - \right. \\
& \left. X(x)Y(y) I_1 - \left(X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) I_5 \right) \lambda^2 + \left(\left(X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) \mu - X(x)Y(y) \right) \lambda c_d + \\
& \left((2D_{12}^f + 4D_{66}^f) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} - D_{11}^f Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - D_{22}^f X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) \lambda \eta + D_{11}^f Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + D_{22}^f X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} + \\
& \left(\left(-2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) \mu + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) k_p + \\
& \left(\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) \mu - X(x)Y(y) \right) k_w + (2D_{12}^f + 4D_{66}^f) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \Big) dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{44} = & \int_0^a \int_0^b -X(x)Y(y) \left(\left(- \left(\left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) I_1 + \left(2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) I_6 \right) \mu + \right. \\
& X(x)Y(y) I_1 - \left(X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) I_6 \left. \right) \lambda^2 + \left(- \left(X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) \mu + X(x)Y(y) \right) \lambda c_d + \\
& \left(\left(2F_{12}^f + 4F_{66}^f \right) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + F_{11}^f Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + F_{22}^f X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} - A_{44}^f X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - A_{55}^f \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) \lambda \eta + \\
& D_{11}^f Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + D_{22}^f X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} + F_{11}^f Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + F_{22}^f X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} - A_{44}^f X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - A_{55}^f \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \\
& \left(\left(2 \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + Y(y) \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} + X(x) \frac{\partial^4 Y(y)}{\partial y^4} \right) \mu - X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) k_p + \\
& \left(X(x)Y(y) - \left(\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x) + \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) \right) \mu \right) k_w + \left(2F_{12}^f + 4F_{66}^f \right) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \Big) dx dy
\end{aligned}$$

VI.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude paramétrique de vibration libre des nanoplaques viscoélastiques en matériaux à gradient de propriété « FGM » reposant sur une fondation viscoélastique a été effectuée par le biais d'une nouvelle théorie de la déformation du cisaillement d'ordre supérieur à quatre variables. La présente théorie propose une nouvelle description des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur et satisfait la nullité de la contrainte de cisaillement transversale sur les bords libres de la plaque. Les équations du mouvement et les solutions analytiques sont développées en tenant compte l'effet de cisaillement transversal, ce qui permet à la fois la modélisation de plaques stratifiées homogènes minces et épaisses.

CHAPITRE VII

«RESULTATS ET DISCUSSIONS»

Résultats et discussions

VII.1 Introduction

Par le présent chapitre, nous soulevons la question de l'efficacité de la théorie proposée en termes de convergence et de précision dans l'analyse du comportement de vibration libre des nano plaques FGM viscoélastique reposant sur une fondation viscoélastique soumise à un environnement thermique constant. Nous procédons d'abord à la validation du modèle proposé avec ceux obtenus dans la littérature. Ensuite, une étude paramétrique et un modèle numérique est présenté afin de mettre en évidence l'influence des différents paramètres à savoir, l'effet d'échelle, le rapport d'aspect de la plaque, les caractéristiques mécaniques du matériau FGM, l'amortissement interne du matériau FGM ainsi que l'amortissement externe et la rigidité de la fondation sur la réponse dynamique du système étudié.

VII.2 Validation analytique

En vue de démontrer l'exactitude et la fiabilité de ce modèle, une étude comparative est fournie avec ceux obtenus précédemment par plusieurs autres chercheurs.

VII.2.1 Le premier exemple :

Les trois premiers modes des fréquences naturelles, d'une nanoplaque simplement appuyées sont étudiés en utilisant la théorie de déformation en cisaillement du troisième ordre (TSDT) pour différentes valeurs du paramètre non local (μ), les résultats obtenus par ce modèle sont comparés à celles données par la théorie d'ordre supérieur non locale rapportés par Aghababaei, R. & Reddy, J.N [184], comme présenté dans le **tableau VII.1**, en considérant les paramètres suivants : $E = 30 \times 10^6$, $\nu = 0.3$, $a = 1$, $a/b = 1$, $a/h = 10$.

Tableau VII. 4 Comparaison des fréquences fondamentales non dimensionnelles ($\Omega = \omega h \sqrt{\rho/G}$) d'une plaque simplement soutenue avec différentes valeurs du paramètre non local μ .

Fréquences	μ	TSDT	FSDT	Classique	La présente étude
Ω_{11}	0	0.094	0.093	0.096	0.093
	1	0.085	0.085	0.088	0.085
	2	0.079	0.079	0.082	0.079
	3	0.074	0.074	0.076	0.074
	4	0.070	0.070	0.072	0.070
	5	0.066	0.066	0.068	0.066

Ω_{22}	0	0.346	0.341	0.385	0.341
	1	0.259	0.255	0.288	0.255
	2	0.215	0.213	0.240	0.212
	3	0.188	0.186	0.210	0.185
	4	0.170	0.167	0.189	0.167
	5	0.156	0.154	0.173	0.153
Ω_{33}	0	0.702	0.689	0.867	0.684
	1	0.421	0.413	0.520	0.410
	2	0.329	0.323	0.406	0.320
	3	0.279	0.274	0.345	0.271
	4	0.247	0.242	0.305	0.239
	5	0.223	0.219	0.276	0.217

L'approche suivie ici est assez simple. En effet, il a été révélé que pour le premier mode vibratoire, (Ω_{11}) deuxième mode vibratoire (Ω_{22}), troisième mode vibratoire (Ω_{33}), et pour toute valeur de paramètre non local, cette méthode donne des résultats très précis. De plus, il est important de mentionner que les résultats obtenus par cette méthode concordent très bien avec ceux obtenus par la théorie développée par Aghababaei, R. & Reddy, J.N. (Théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur ou TSDT) [184].

VII.2.2 Le deuxième exemple :

Les premières fréquences propres d'une plaque sandwich en matériau à gradient fonctionnel reposant sur des fondations élastiques sont obtenues par le modèle présent. Les propriétés du matériau sont supposées varier continuellement à travers l'épaisseur de la plaque conformément à la fonction exponentielle (E-FGM). Il est intéressant de noter que les valeurs obtenues étaient pour des plaques inhomogènes ($p= 0.5$, $p= 3.5$) et des plaques homogènes ($p = 0$) reposant sur des fondations élastiques sous différentes conditions aux limites et pour différentes valeurs du rapport longueur/épaisseur (a/h), sont comparées à celles suggérées par Sobhy [103], comme indiqué sur le **tableau VII.2**. Il est important de mentionner que les résultats obtenus sont assez précis.

Tableau VII. 5 Comparaison de la fréquence naturelle ω de la plaque sandwich EGM avec ($b/a=2$, $K_w=50$ et $K_p=10$)

CLs	Sobhy [103]	$p=0$			$p=0.5$			$p=3.5$		
		$a/h=5$	10	20	$a/h=5$	10	20	$a/h=5$	10	20
SSSS	FSDT	1.5386	1.5942	1.6113	1.3971	1.4304	1.4399	1.3361	1.3589	1.3653
	TSDT	1.5387	1.5947	1.6113	1.3989	1.4310	1.4401	1.3375	1.3594	1.3655
	SSDT	1.5388	1.5947	1.6113	1.3990	1.4310	1.4401	1.3376	1.3594	1.3655
	Présente	1.5387	1.5947	1.6113	1.3989	1.4310	1.4401	1.3374	1.3594	1.3654
CCSS	FSDT	2.2578	2.5112	2.5997	1.9476	2.0880	2.1341	1.7472	1.8273	1.8519
	TSDT	2.2590	2.5114	2.5997	1.9610	2.0930	2.1355	1.7622	1.8320	1.8532
	SSDT	2.2596	2.5115	2.5998	1.9614	2.0932	2.1356	1.7630	1.8323	1.8533
	Présente	2.2590	2.5114	2.5997	1.9608	2.0930	2.1355	1.7617	1.8318	1.8531
CCCC	FSDT	2.3359	2.6010	2.6940	2.0111	2.1586	2.2072	1.8022	1.8847	1.9107
	TSDT	2.3372	2.6012	2.6940	2.0250	2.1638	2.2087	1.8157	1.8895	1.9121
	SSDT	2.3379	2.6013	2.6941	2.0255	2.1640	2.2088	1.8165	1.8898	1.9121
	Présente	2.3372	2.6012	2.6941	2.0248	2.1638	2.2087	1.8151	1.8893	1.9120
CSSS	FSDT	2.2176	2.3921	2.4491	1.9319	2.0302	2.0610	1.7653	1.8242	1.8421
	TSDT	2.2181	2.3922	2.4493	1.9395	2.0330	2.0618	1.7720	1.8267	1.8428
	SSDT	2.2185	2.3923	2.4493	1.9397	2.0331	2.0618	1.7724	1.8268	1.8428
	Présente	2.2182	2.3922	2.4493	1.9394	2.0329	2.0618	1.7717	1.8266	1.8428
CSCS	FSDT	2.3323	2.5262	2.5904	2.0265	2.1364	2.1712	1.8456	1.9117	1.9319
	TSDT	2.3328	2.5262	2.5904	2.0349	2.1395	2.1720	1.8531	1.9145	1.9327
	SSDT	2.3332	2.5263	2.5905	2.0352	2.1396	2.1721	1.8535	1.9146	1.9327
	Présente	2.3329	2.5263	2.5904	2.0348	2.1395	2.1720	1.8528	1.9144	1.9327

VII.3 Étude paramétrique

En vue d'étudier l'effet des différents paramètres géométriques et matériels sur la réponse vibratoire d'une nanoplaque viscoélastique FGM reposant sur une fondation viscoélastique, une étude paramétrique a été réalisée sur une plaque carrée constituée du métal et du céramique (Al/Al_2O_3) et ayant les propriétés matérielles suivantes :

- **Céramique** : alumina: $E_c=380GPa$, $\rho_c=3800 kg/m^3$, $\nu=0.3$.
- **Métal** : aluminium: $E_m=70 GPa$, $\rho_m=2702 kg/m^3$, $\nu=0.3$.

Les résultats sont présentés en termes de paramètres non dimensionnels, à savoir :

- Le paramètre de Winkler non dimensionnel : $K_w = \frac{k_w a^4}{D_c}$,
- Le paramètre de Pasternak non dimensionnel : $K_p = \frac{k_p a^2}{D_c}$,
- Le coefficient de la viscosité non dimensionnel : $\psi = \frac{\eta}{a^2} \sqrt{\frac{D_c}{\rho_c h}}$,
- L'amortissement non dimensionnel : $C_d = \frac{c_d a^2}{\sqrt{\rho_c h D_c}}$,
- La rigidité non dimensionnelle : $D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}$,
- La fréquence propre non dimensionnelle : $\varpi = -\Omega \left(\xi \pm i \sqrt{1-\xi^2} \right)$,
- La fréquence non amortie : $\Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_c h}{D_c}}$.

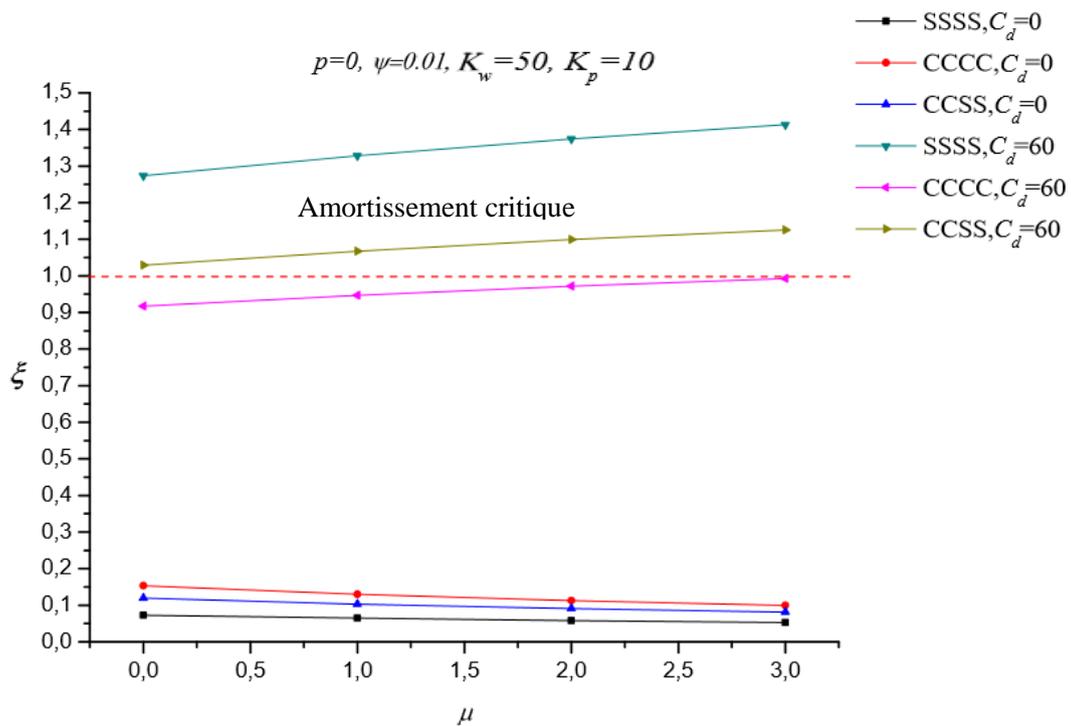
Les termes Ω et ξ sont respectivement la fréquence non amortie et le rapport d'amortissement sans dimension.

Le **tableau VII.3** représente l'influence de l'indice de la fraction volumique « p » et le paramètre d'échelle « μ » ainsi que l'amortissement externe de la fondation « C_d » correspondant à différentes conditions aux limites sur la fréquence propre de la nano plaque considérée. On constate que plus le système est rigide, tant au niveau du matériau (cas de la céramique) qu'au niveau du conditionnement qu'il a subi (plaque encastree ou encastree à deux coté), plus les fréquences propres sont importantes par rapport aux autres conditions, tandis que le paramètre non local a pour effet de réduire son amplitude d'oscillation.

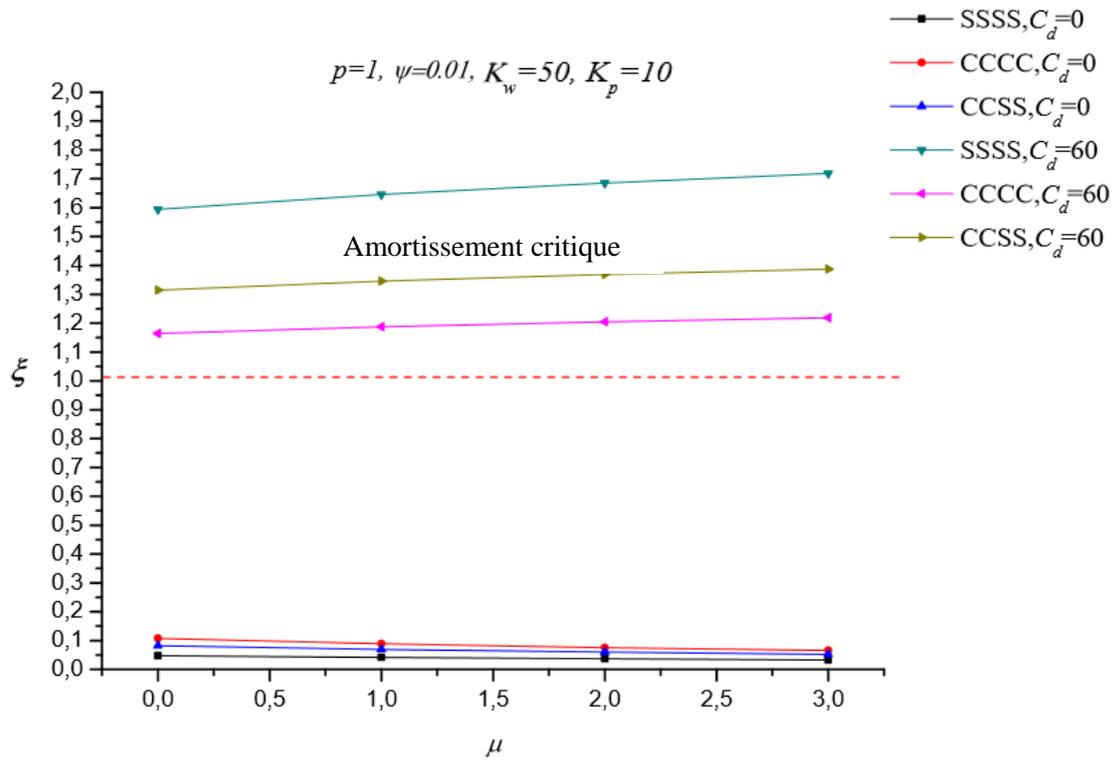
Tableau VII.6 Effet de l'indice de la fraction volumique, le paramètre d'échelle et l'amortissement externe de la fondation sur la fréquence propre de la nano plaque avec ($\psi=0.01$, $K_w=50$ et $K_p=10$)

p	μ	$Cd=0$			$Cd=30$			$Cd=60$		
		SSSS	CCCC	CCSS	SSSS	CCCC	CCSS	SSSS	CCCC	CCSS
0	0	-1.817+24.575i	-5.924+38.181i	-3.893+32.239i	-16.599+18.214i	-20.678+32.639i	-18.661+26.577i	-11.951, -50.822	-35.438+15.406i	-25.488,-41.384
	1	-1.517+23.346i	-4.673+35.688i	-3.158+30.410i	-16.299+16.783i	-19.377+30.333i	-17.899+24.787i	-10.619, -51.558	-34.091+11.569i	-21.210,-44.087
	2	-1.303+22.420i	-3.859+33.941i	-2.656+29.085i	-16.085+15.674i	-18.530+28.699i	-17.378+23.474i	-09.692, -52.058	-33.215+08.024i	-18.779,-45.445
1	0	-1.141+21.697i	-3.286+32.645i	-2.292+28.078i	-15.923+14.783i	-17.933+27.477i	-17.000+22.465i	-09.009, -52.420	-32.600+3.820i	-17.154,-46.292
	1	-1.065+22.277i	-3.514+32.396i	-2.297+27.857i	-18.306+12.742i	-20.710+25.160i	-19.517+20.012i	-07.867,-63.302	-18.539,-57.339	-12.899,-60.642
	1	-0.889+21.482i	-2.771+31.093i	-1.863+26.880i	-18.131+11.560i	-19.901+24.055i	-19.047+19.063i	-07.285,-63.545	-17.110,-57.058	-12.012,-60.545
2	0	-0.763+20.892i	-2.287+30.205i	-1.567+26.189i	-18.005+10.630i	-19.374+23.292i	-18.726+18.381i	-06.871,-63.595	-16.167,-56.900	-11.404,-60.488
	1	-0.669+20.437i	-1.948+29.560i	-1.353+25.673i	-17.911+09.872i	-19.004+22.734i	-18.493+17.866i	-06.560,-63.746	-15.499,-56.804	-10.961,-60.455
	2	-0.744+21.768i	-2.480+29.898i	-1.642+26.220i	-20.165+08.257i	-21.836+20.583i	-21.016+15.778i	-06.541,-72.780	-12.968,-69.669	-09.715,-71.331
3	0	-0.646+21.177i	-1.956+29.327i	-1.331+25.725i	-20.039+06.910i	-21.235+20.339i	-20.665+15.369i	-06.180,-72.935	-12.635,-68.785	-09.405,-70.943
	1	-0.555+20.743i	-1.615+28.943i	-1.120+25.379i	-19.949+05.751i	-20.844+20.171i	-20.425+15.131i	-05.922,-73.052	-12.411,-68.248	-09.190,-70.700
	2	-0.486+20.410i	-1.375+28.667i	-0.967+25.124i	-19.882+04.693i	-20.569+20.048i	-20.252+14.932i	-05.728,-73.143	-12.251,-67.896	-09.033,-70.540
1/0	0	-0.721+21.752i	-2.285+29.470i	-1.519+25.974i	-20.709+06.719i	-22.248+19.471i	-21.497+14.673i	-06.312,-75,342	-12.080,-72.605	-09.180,-74.039
	1	-0.602+21.202i	-1.803+29.070i	-1.232+25.587i	-20.592+05.123i	-21.694+19.450i	-21.171+14.442i	-05.988,-75.469	-11.907,-71.669	-08.962,-73.619
	2	-0.517+20.798i	-1.489+28.800i	-1.037+25.316i	-20.508+03.560i	-21.334+19.430i	-20.949+14.279i	-05.757,-75.582	-11.792,-71.095	-08.811,-73.355
3	0	-0.453+20.489i	-1.268+28.607i	-0.895+25.117i	-20.446+01.565i	-21.080+19.413i	-20.788+14.157i	-05.583,-75.646	-11.709,-70.716	-08.701,-73.180

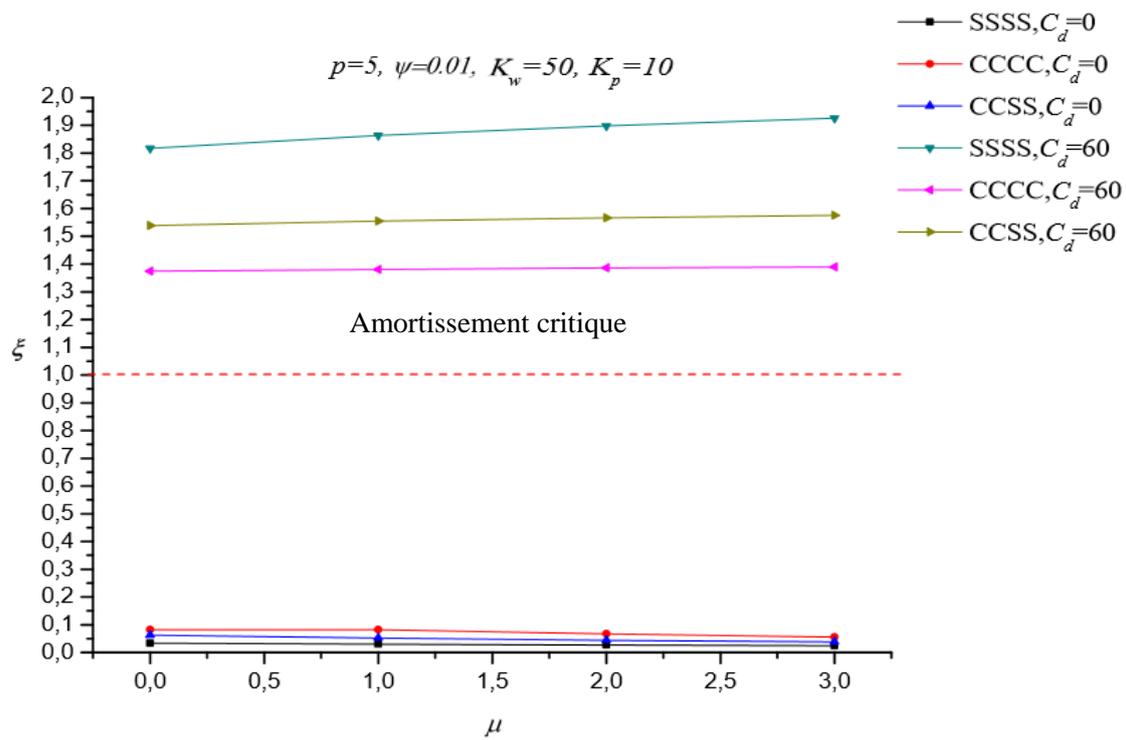
La **figure VII.1** illustre la variation du coefficient d'amortissement « ξ » en fonction du paramètre non local « μ » pour les deux valeurs de coefficient d'amortissement $C_d=0$ et $C_d=60$ de la fondation viscoélastique et cela sous différentes conditions aux limites (SSSS, CCSS et CCCC) dont le paramètre de Winkler $K_w=50$, le paramètre de Pasternak $K_p=10$ et une viscosité $\psi=0.01$. Trois variantes sont présentées avec un indice de matériau différent $p=0$, $p=1$ et $p=5$.



(a)



(b)



(c)

Figure VII.1 la variation du coefficient d'amortissement ξ en fonction du paramètre non local μ , pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement C_d de la fondation viscoélastique, de l'indice de matériau p , sous différentes conditions aux limites.

On peut voir à partir de la **figure VII.1** que pour les trois conditions aux limites (SSSS, CCSS et CCCC) et pour un coefficient d'amortissement de la fondation nul $C_d=0$, le rapport d'amortissement ξ décroît à chaque fois que le paramètre non local μ et l'indice p augmentent. Pour un macro/micromatériau céramique isotrope soit $p=0$ et le paramètre non local $\mu=0$, le rapport d'amortissement ξ est égal à 0.0737, 0.1198 et 0.1533, respectivement, pour les conditions aux limites (SSSS, CCSS et CCCC). Cependant, il est important de mentionner que ξ diminue et peut prendre les valeurs 0.0525, 0.0813 et 0.1001, respectivement, lorsque l'effet d'échelle est pris en compte et le paramètre non local $\mu=3$.

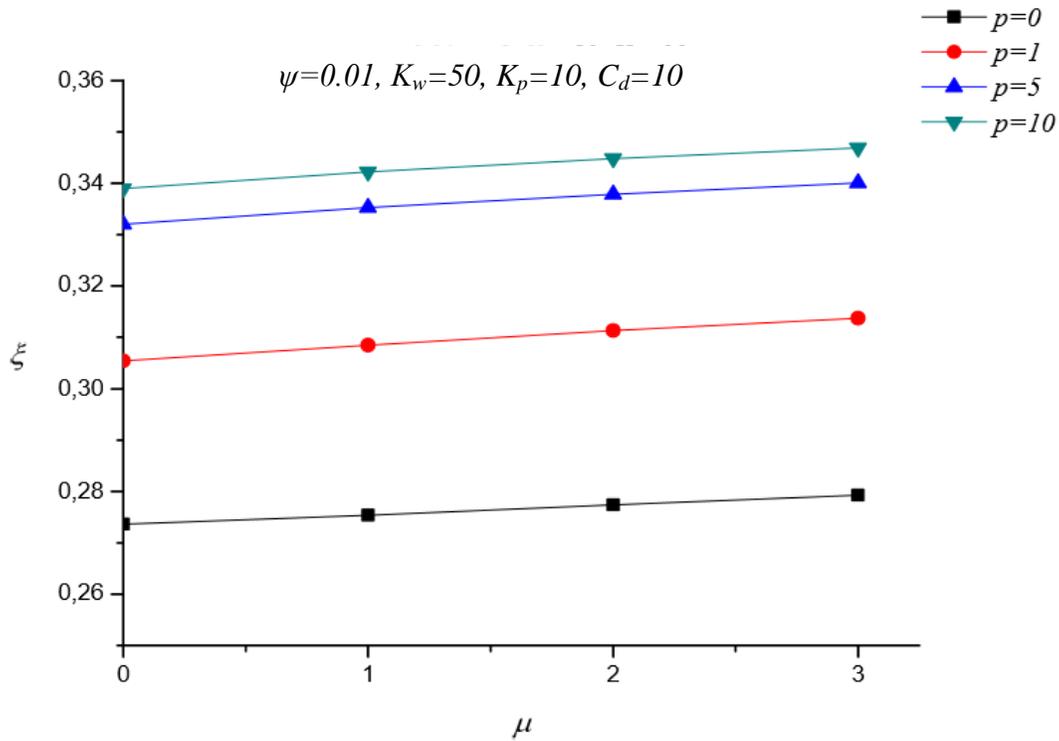
Pour un coefficient d'amortissement de la fondation élevé $C_d=60$, le coefficient d'amortissement ξ augmente proportionnellement à la croissance du paramètre non local μ et de l'indice du matériau p , sous différentes conditions aux limites. En général, pour un amortissement de la fondation nul c.-à-d. la valeur de C_d égale à zéro, l'amortissement est dit sous-critique. Cependant, pour un amortissement de la fondation élevé c.-à-d. $C_d=60$, l'amortissement devient sur-critique sauf pour une plaque isotrope encadrée sur les quatre côtés (CCCC) comme illustré la **figure VII.1(a)**.

Le **tableau VII.4** révèle l'effet de l'indice de matériaux « p », le paramètre non local « μ » ainsi que la viscosité du matériau « ψ » sur la vibration libre de la nano plaque viscoélastique. Les résultats obtenus sont traités sous différentes conditions aux limites. Il est évident que la fréquence diminue à mesure que la valeur du coefficient de viscosité du matériau augmente. Ceci est clairement visible dans les valeurs imaginaires des fréquences propres dans lesquelles expriment l'amortissement du système, par exemple pour une nano plaque FGM encadrée de chaque côté la valeur imaginaire de la fréquence propre est égale à 5.7090 pour une viscosité du matériau nul $\psi=0$, d'autre part pour une viscosité du matériau $\psi=0.02$, la valeur imaginaire de la fréquence atteint la valeur 11.2518. Il est important d'observer que les fréquences propres diminuent à mesure que la nano plaque FGM viscoélastique est simplement appuyée à ces quatre côtés. En outre, les fréquences diminuent avec la prise en compte de l'influence de l'indice de la fraction volumique et de l'effet d'échelle.

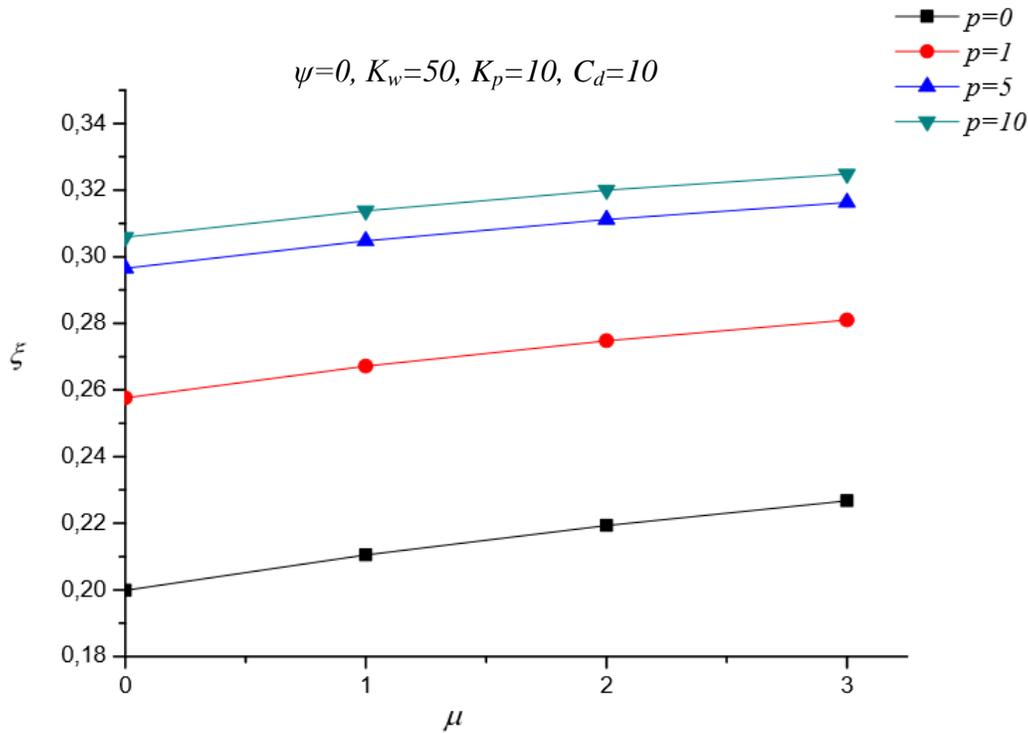
Tableau VII.7 Effet de l'indice de la fraction volumique, le paramètre d'échelle et l'amortissement interne du matériau sur la fréquence propre de la nano plaque avec ($C_d=10$, $K_w=50$ et $K_p=10$)

p	μ (nm^2)	$\psi=0$			$\psi=0.02$		
		SSSS	CCCC	CCSS	SSSS	CCCC	CCSS
0	0	24.145+4.927i	38.3238+4.9179i	32.0988+4.9227i	23.1077+8.5620i	34.8106+16.7663i	29.8839+12.7088i
	1	22.8709+4.9271i	35.6583+4.9010i	30.1767+4.9134i	21.9988+7.9628i	33.0529+14.2488i	28.4369+11.2301i
	2	21.9116+4.9271i	33.8089+4.8898i	28.7913+4.9070i	21.1576+7.5332i	31.7484+12.6087i	27.3596+10.2209i
1	0	21.1615+4.9271i	32.4453+4.8820i	27.7422+4.9023i	20.4963+7.2101i	30.7456+11.4554i	26.5260+9.4882i
	1	21.5499+5.7460i	32.0784+5.7316i	27.3565+5.7388i	20.8653+7.8770i	29.9841+12.7600i	25.9711+10.3347i
	2	20.7188+5.7459i	30.6909+5.7090i	26.3300+5.7265i	20.1405+7.5256i	29.1186+11.2518i	25.2322+9.4543i
5	0	20.1018+5.7458i	29.7526+5.6940i	25.6061+5.7180i	19.6006+7.2737i	28.4980+10.2698i	24.6974+8.8536i
	1	19.6250+5.7480i	29.0749+5.6832i	25.0675+5.7117i	19.1823+7.0842i	28.0328+9.5795i	24.2924+8.4175i
	2	20.8029+6.4592i	29.3005+6.4495i	25.4675+6.4675i	20.2568+8.0076i	27.7468+11.4103i	24.4006+9.7382i
10	0	20.1801+6.4589i	28.6837+6.4221i	24.9434+6.4393i	19.7188+7.7520i	27.5161+13.0042i	24.0983+9.1026i
	1	19.7215+6.4586i	28.2744+6.034i	24.5793+6.4285i	19.3218+7.5687i	27.3412+9.6332i	23.8799+8.6687i
	2	19.3694+6.4583i	27.9827+6.3894i	24.3115+6.4203i	19.0475+7.5633i	27.2060+9.1402i	23.7150+8.3535i
10	0	20.7211+6.6584i	28.8014+6.6518i	25.1544+6.6556i	20.2005+8.1004i	27.3458+11.2224i	24.1459+9.9644i
	1	20.1394+6.6581i	28.3632+6.6261i	24.7421+6.6411i	19.6997+7.8624i	27.2694+10.2319i	23.9437+9.1063i
	2	19.7117+6.6579i	28.0735+6.6086i	24.4566+6.6308i	19.3309+7.6917i	27.1992+9.5862i	23.7961+8.7047i
	3	19.3839+6.6576i	27.8677+6.5955i	24.2471+6.6231i	19.0165+7.4308i	27.1399+9.1319i	23.6838+8.4129i

La **figure VII.2** illustre la variation du rapport d'amortissement « ξ » d'une plaque (SSSS) supportée par une fondation viscoélastique en fonction du paramètre non local « μ », pour les valeurs 0, 1, 5 et 10 de l'indice de matériau « p » et des coefficients d'amortissement du matériau viscoélastique $\psi=0$ et $\psi=0.01$ avec le coefficient d'amortissement de la fondation $C_d=10$, le paramètre de Winkler $K_w=50$ et le paramètre de Pasternak $K_p=10$.



(a)

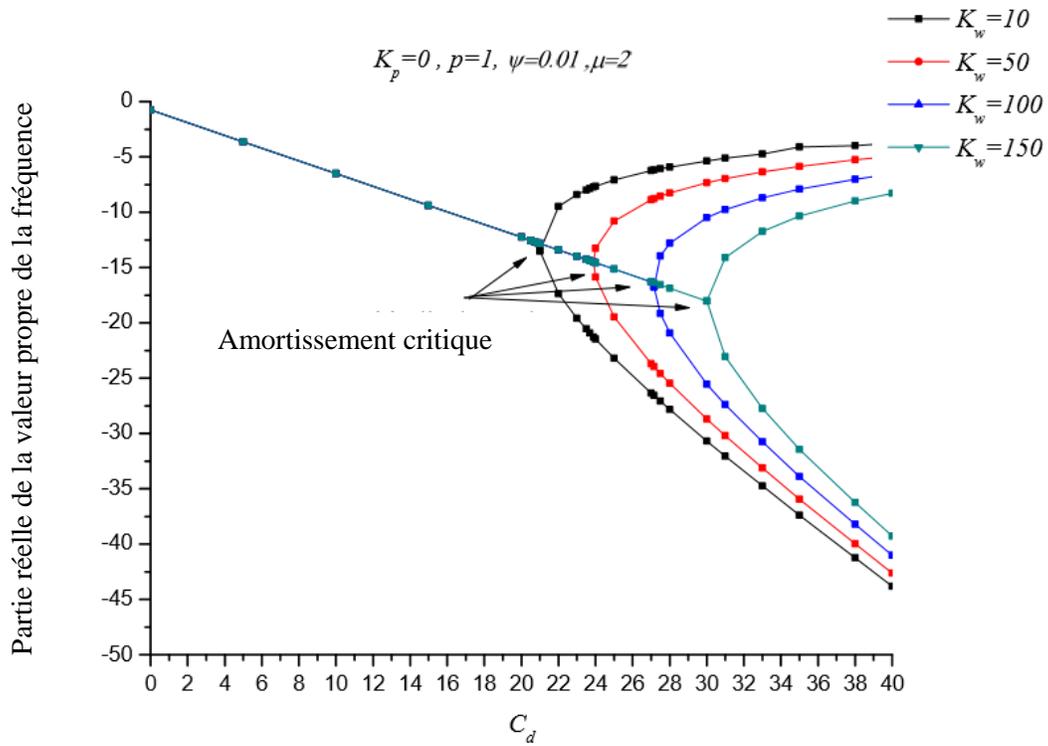
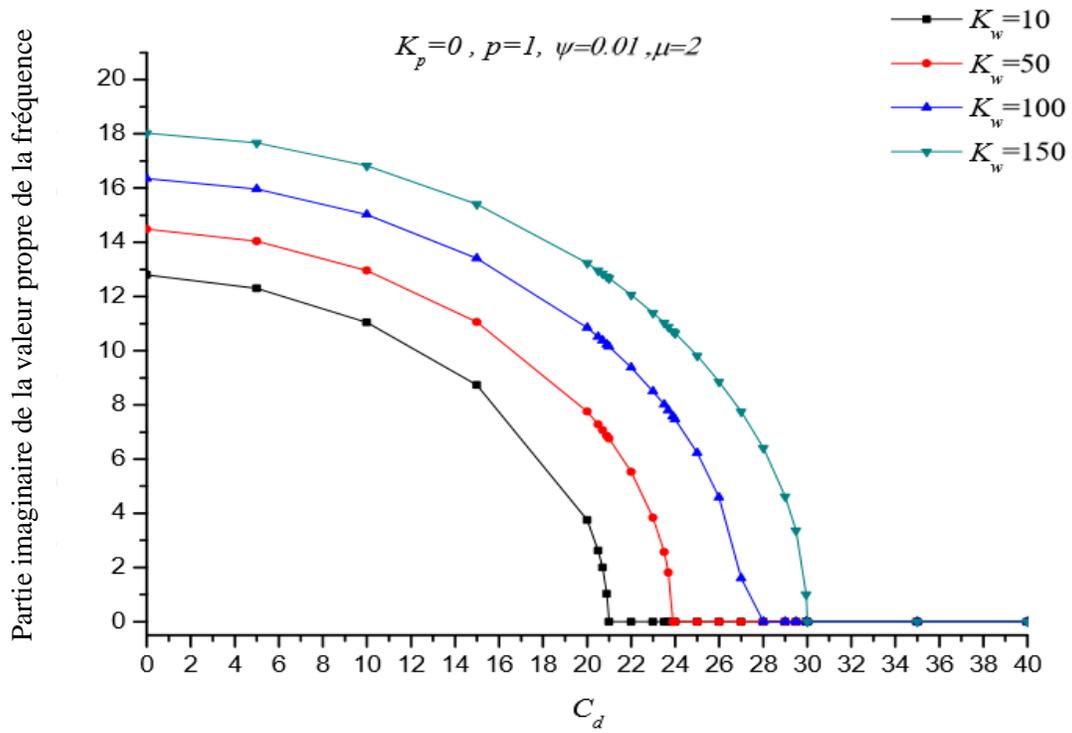


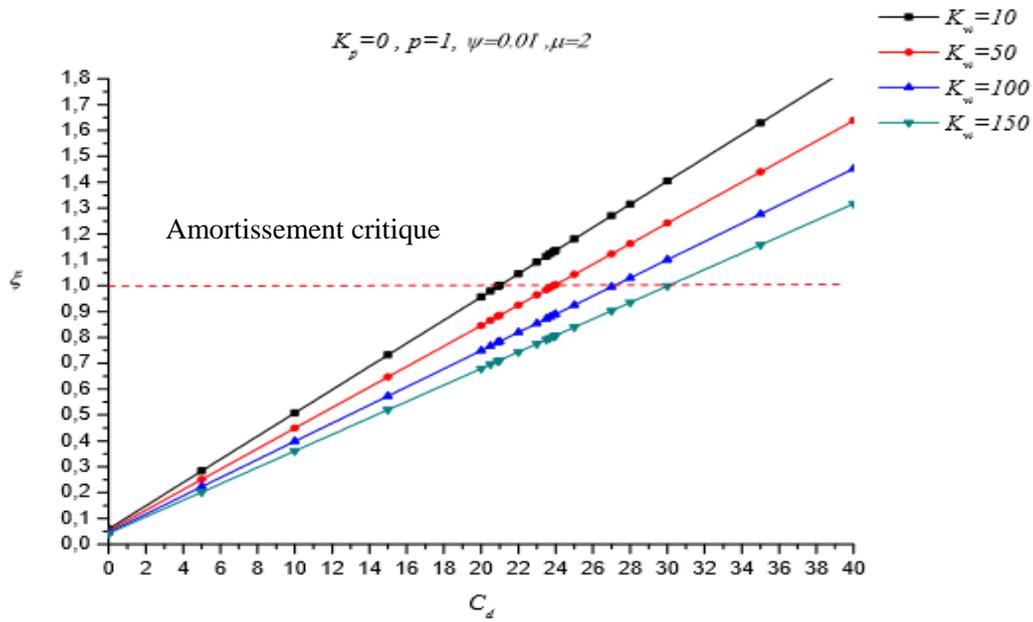
(b)

Figure VII.2 la variation du rapport d'amortissement ξ en fonction du paramètre non local μ pour différentes valeurs de l'indice de fraction volumique p et du coefficient d'amortissement ψ du matériau viscoélastique.

On constate sur **figure VII.2** que le rapport d'amortissement ξ augmente proportionnellement avec le paramètre non local μ , l'indice de matériau p , et les coefficients d'amortissement du matériau viscoélastique ψ . Ici, le système oscille, et l'amplitude de l'oscillation décroît progressivement jusqu'à zéro. Dans ce cas ($\xi < 1$), le système est dit sous-amorti.

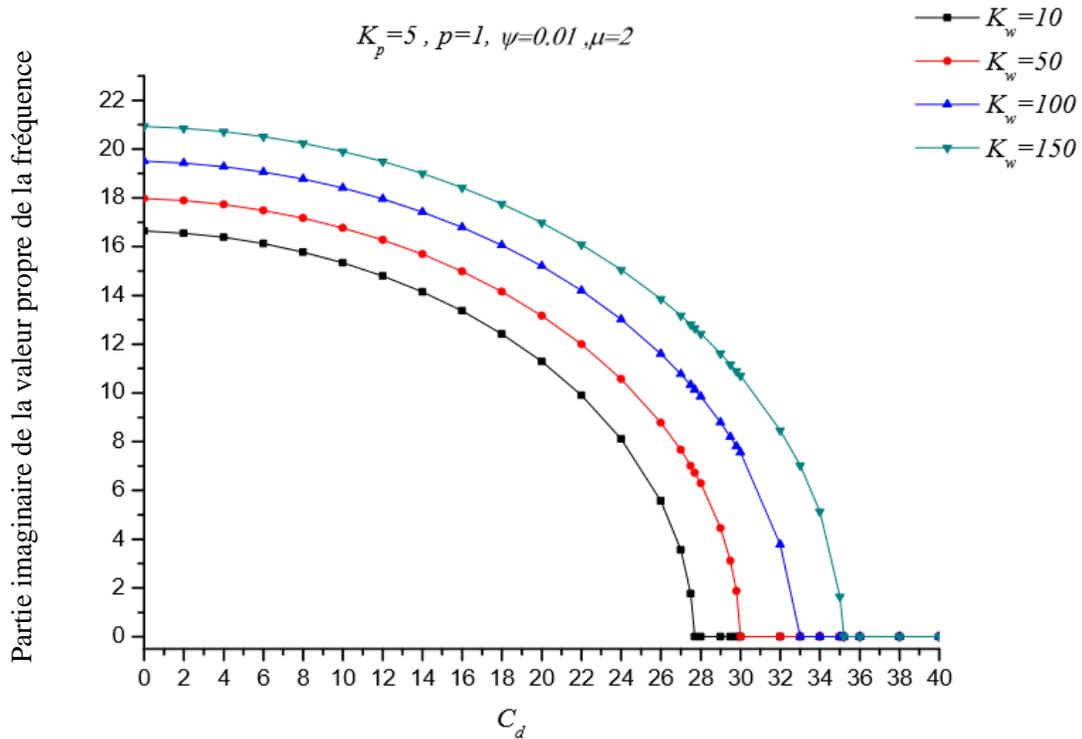
Par ailleurs, les résultats confirment l'avantage d'utiliser des matériaux à gradient fonctionnels. Il convient de noter que lorsque l'indice de matériau p augmente ($p = 10$), comme dans le cas d'un métal pur, le rapport d'amortissement augmente également ($\xi = 0,3422$) ; cependant, c'est le cas inverse lorsque l'indice de matériau diminue ($p = 0$), comme dans le cas de la céramique pure, où le rapport d'amortissement diminue ($\xi = 0,2754$), avec $\mu = 1$ et $\psi = 0,01$. Comme on peut le voir sur la **figure VII.2b**, le rapport d'amortissement ξ est plus décroissant pour un coefficient d'amortissement du matériau viscoélastique $\psi = 0$. Par conséquent, un faible facteur d'amortissement indique une diminution de la capacité à dissiper l'énergie.



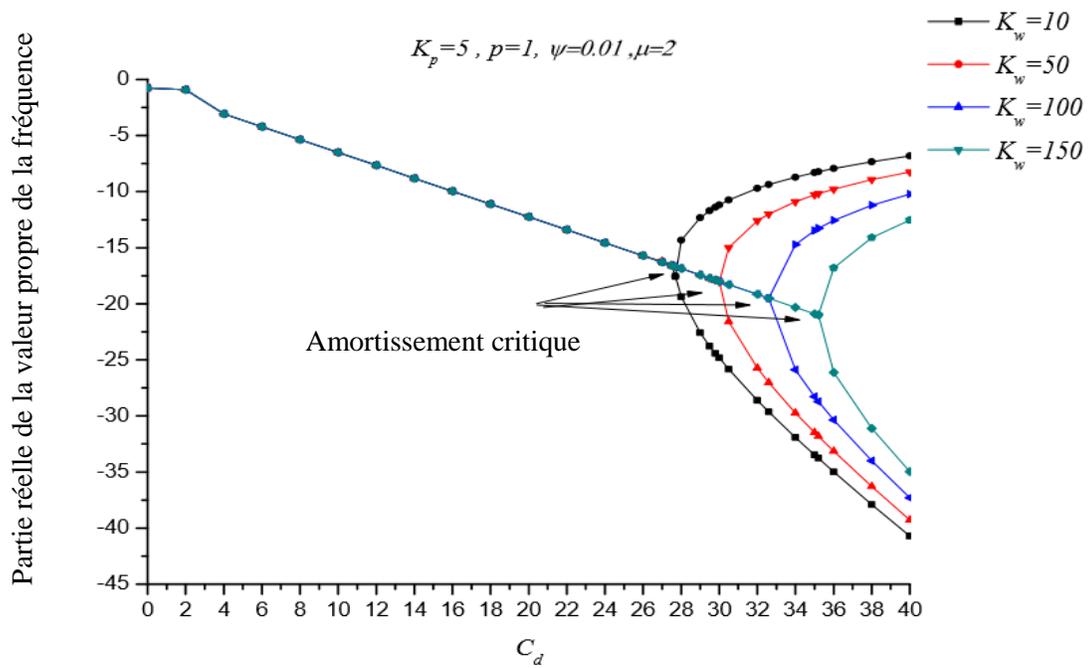


(c)

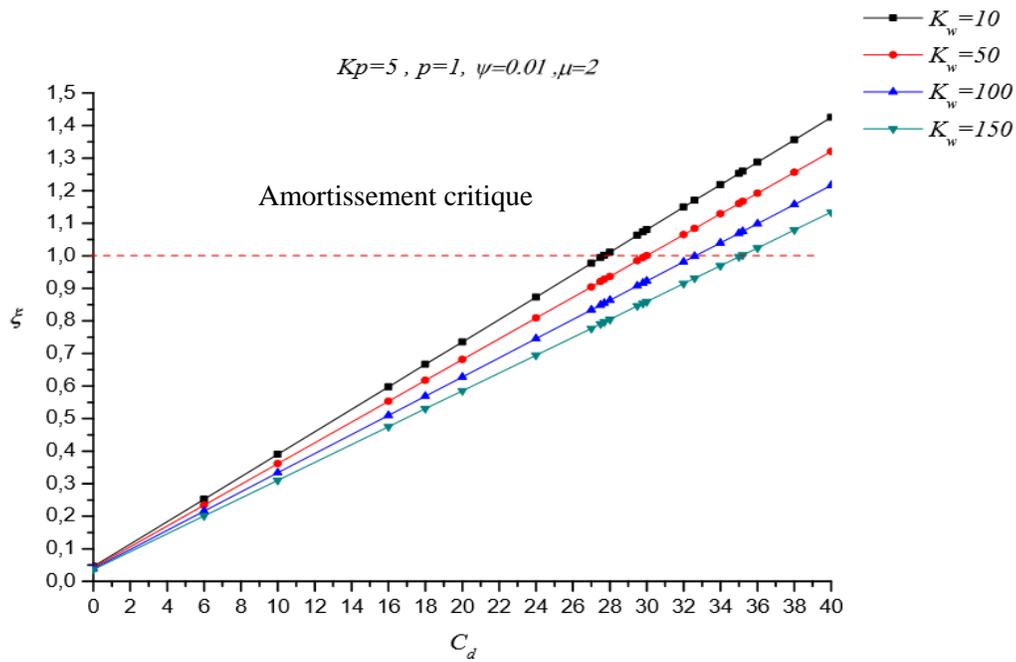
Figure VII.3 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents coefficients de rigidité de Winkler K_w avec un coefficient de Pasternak nul $K_p=0$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.



(a)

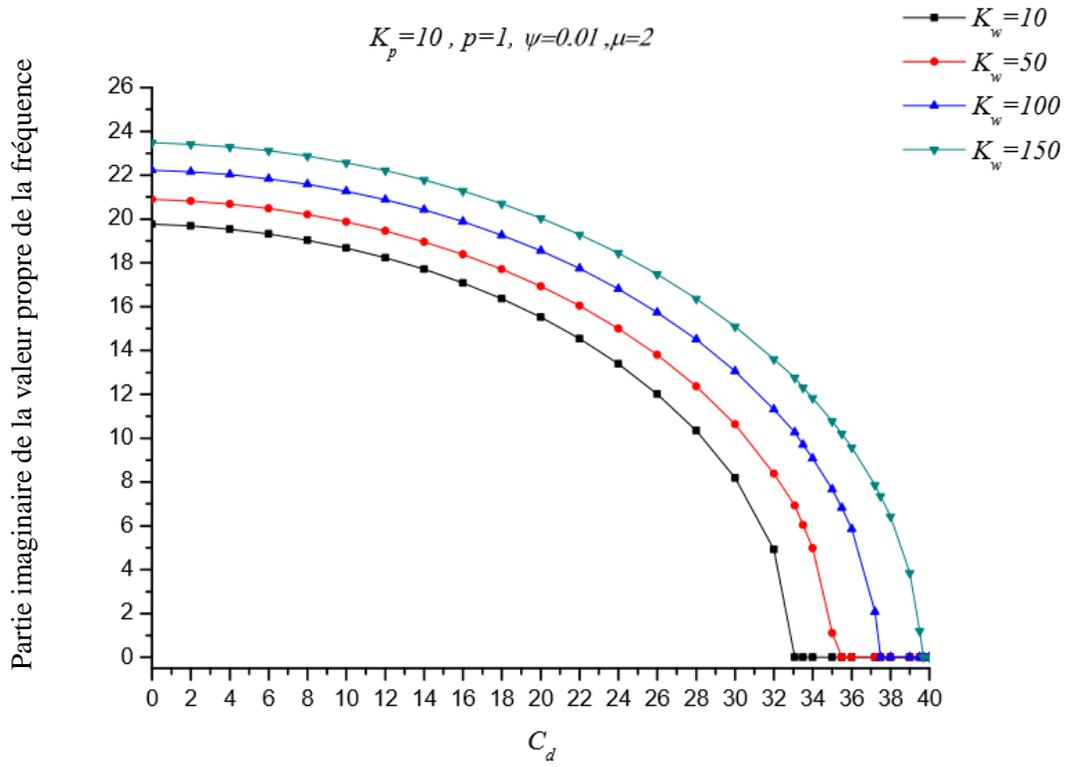


(b)

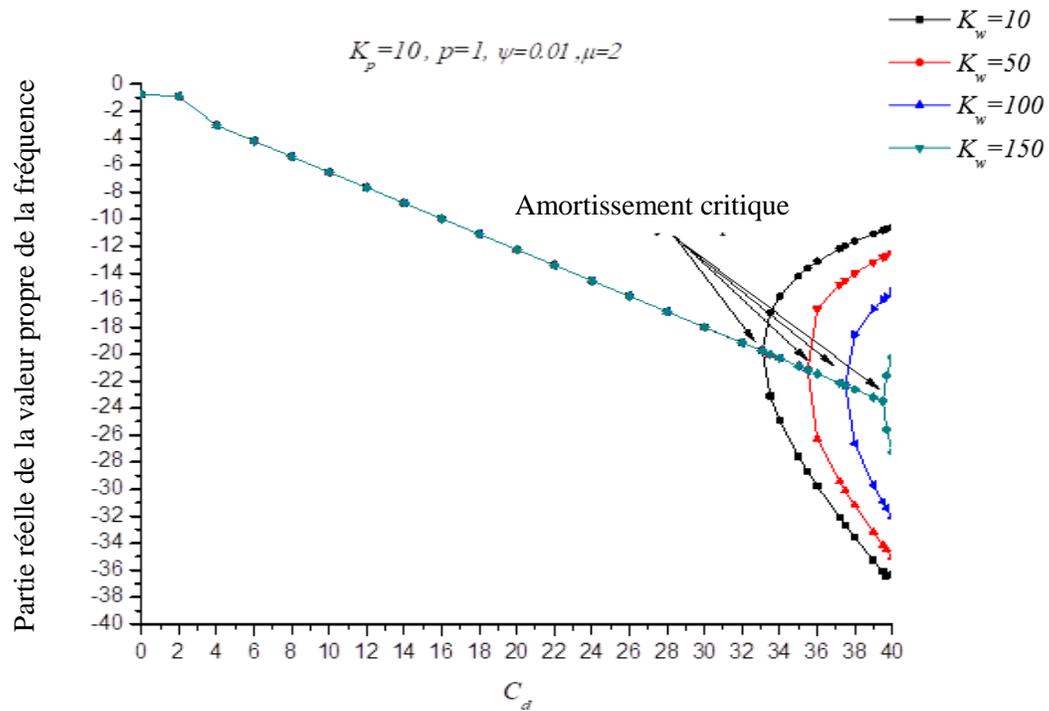


(c)

Figure VII.4 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents coefficients de rigidité de Winkler K_w avec un coefficient de Pasternak $K_p=5$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.



(a)



(b)

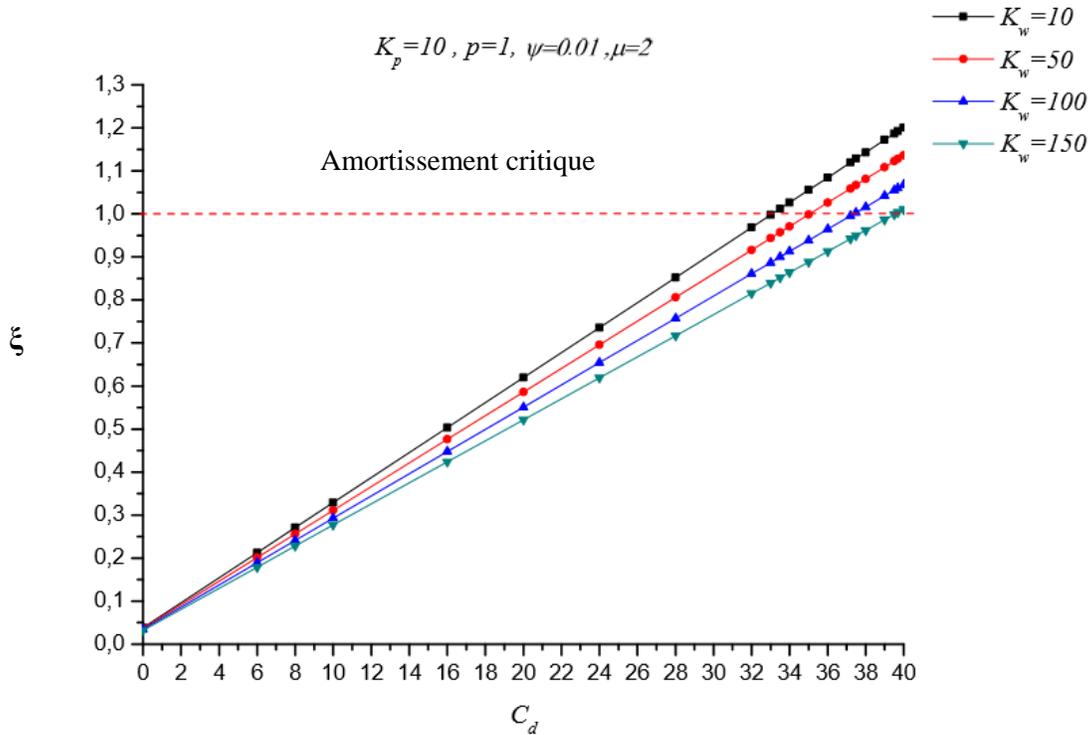
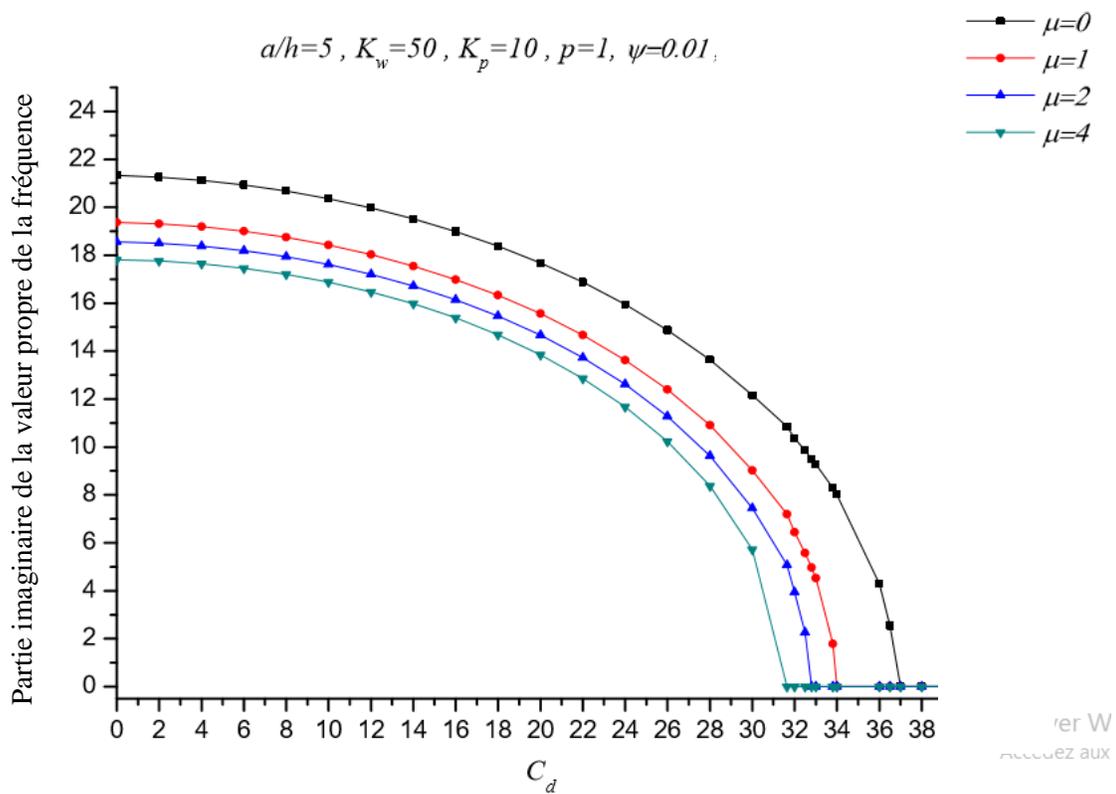


Figure VII.5 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents coefficients de rigidité de Winkler K_w avec un coefficient de Pasternak $K_p = 10$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.

Les **figures VII.3-VII.5** illustrent l'effet des paramètres de la fondation viscoélastique sur la variation de la fréquence de la vibration libre de la nano-plaque carrée FGM simplement appuyée (SSSS). Différentes valeurs de rigidité de Winkler ($K_w = 10, 50, 100, 150$) et de Pasternak ($K_p = 0, 5, 10$) de la fondation sont considérées. De ce fait, les courbes (a), (b) et (c) représentent la variation imaginaire de la fréquence, réelle de la fréquence et du rapport d'amortissement, respectivement. Le rapport d'amortissement ζ augmente progressivement avec le paramètre d'amortissement de la fondation C_d jusqu'à un point critique ($\zeta = 1$), c'est-à-dire que le système revient très rapidement à sa position d'équilibre, sans osciller. De plus, les deux autres paramètres de la fondation élastique, à savoir les paramètres de Winkler K_w et de celui de Pasternak K_p pour un sol rigide ont un impact important sur les valeurs des fréquences propres, par conséquent l'influence de l'amortissement du sol sur la fréquence de la plaque ne doit pas être négligeable et

le coefficient d'amortissement arrive à des valeurs optimales. Comme montre la **figure VII.4**, le système oscillant est amorti pour les valeurs $K_p= 5$, $K_w= 10$, et le coefficient d'amortissement C_d de la fondation est égal à 27.669. Cependant, dans la **figure VII.5**, pour $K_p= 10$, le coefficient d'amortissement C_d de la fondation atteint la valeur 33.085, avec $K_w =10$.Donc on peut noter que la valeur croissante du coefficient d'amortissement est due à l'augmentation de la rigidité de la fondation.

Au-delà de ce point pour lequel ($\xi >1$), l'amortissement devient sur-critique dont la partie réelle de la fréquence augmente et admet deux solutions pour une même valeur de chacun des trois paramètres C_d , K_p et K_w , et la partie imaginaire de la fréquence tend vers zéro. Dans un tel cas, la plaque oscille plus lentement vers la position d'équilibre que dans le cas d'un amortissement critique.



(a)

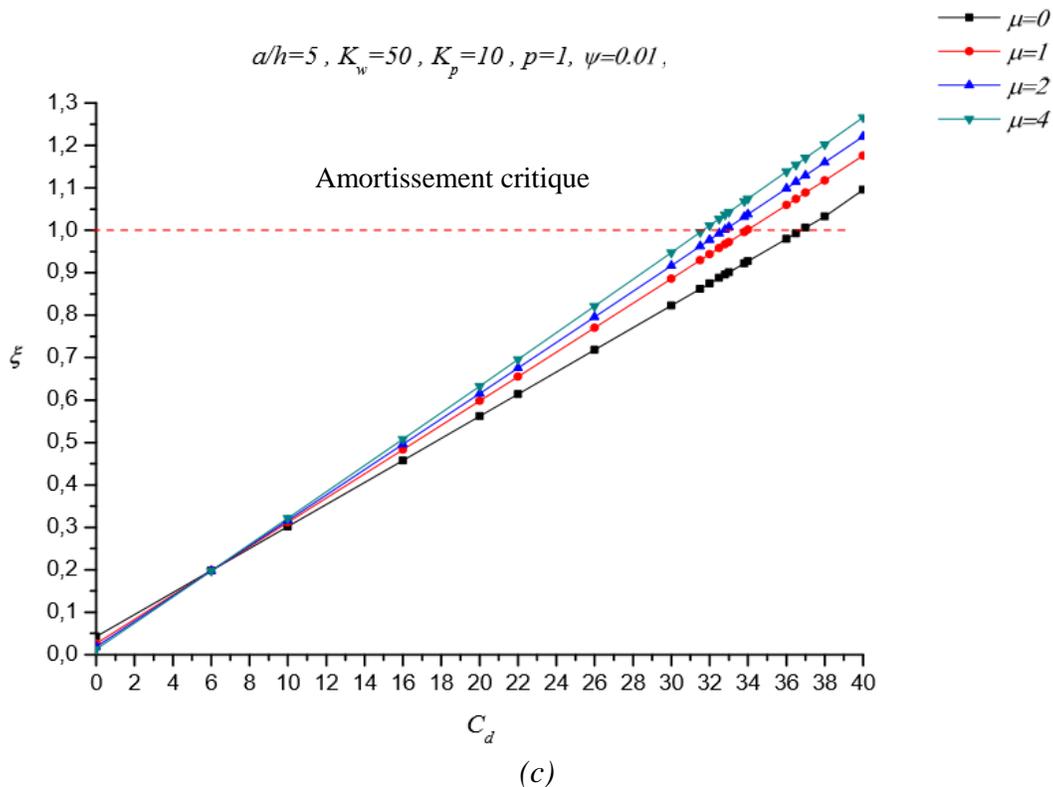
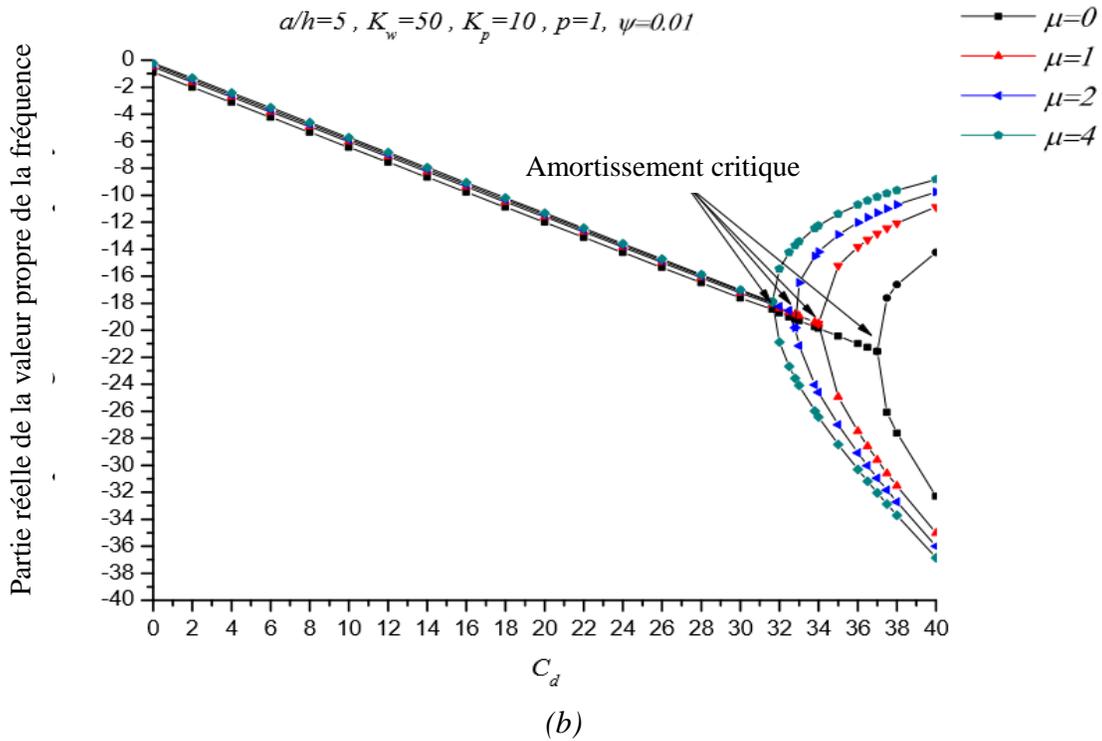
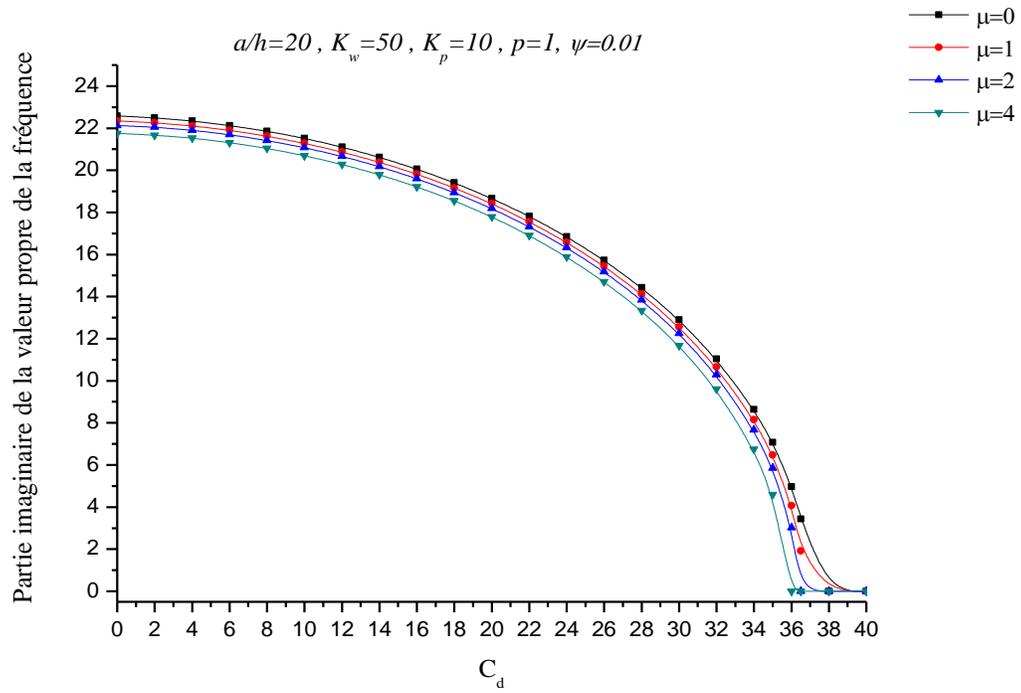
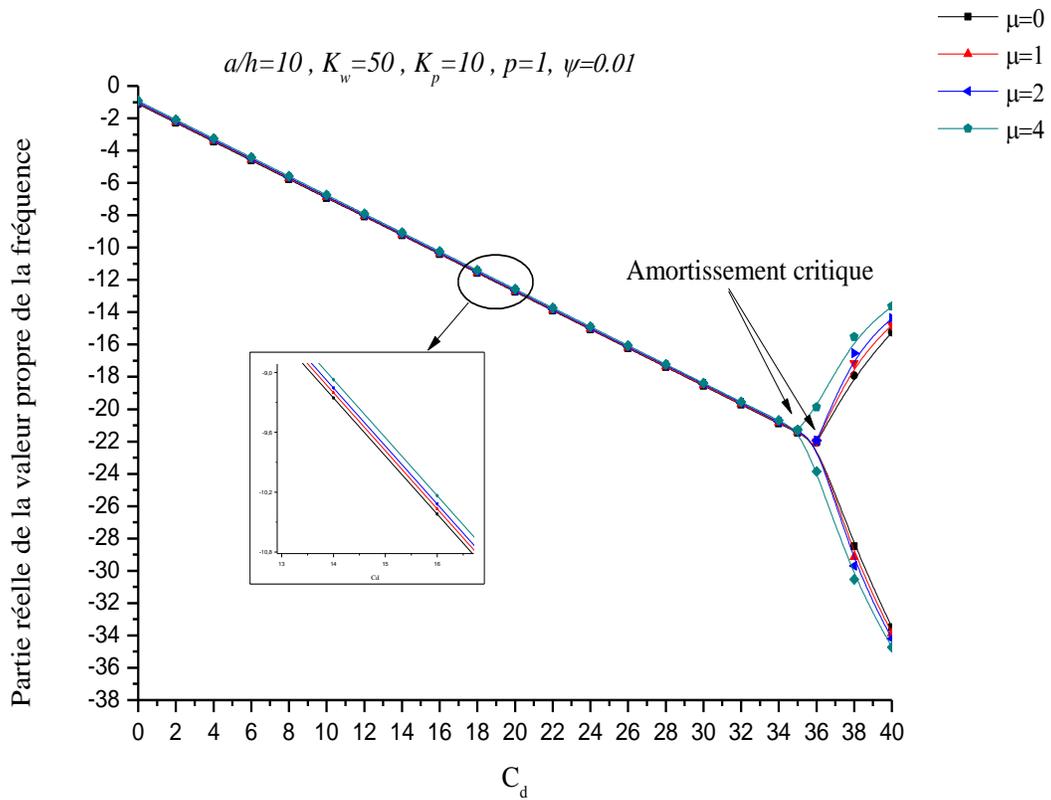


Figure VII.6 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents parametreq non locales μ avec un rapport de l'élanement $a/h=5$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.



(a)



(b)

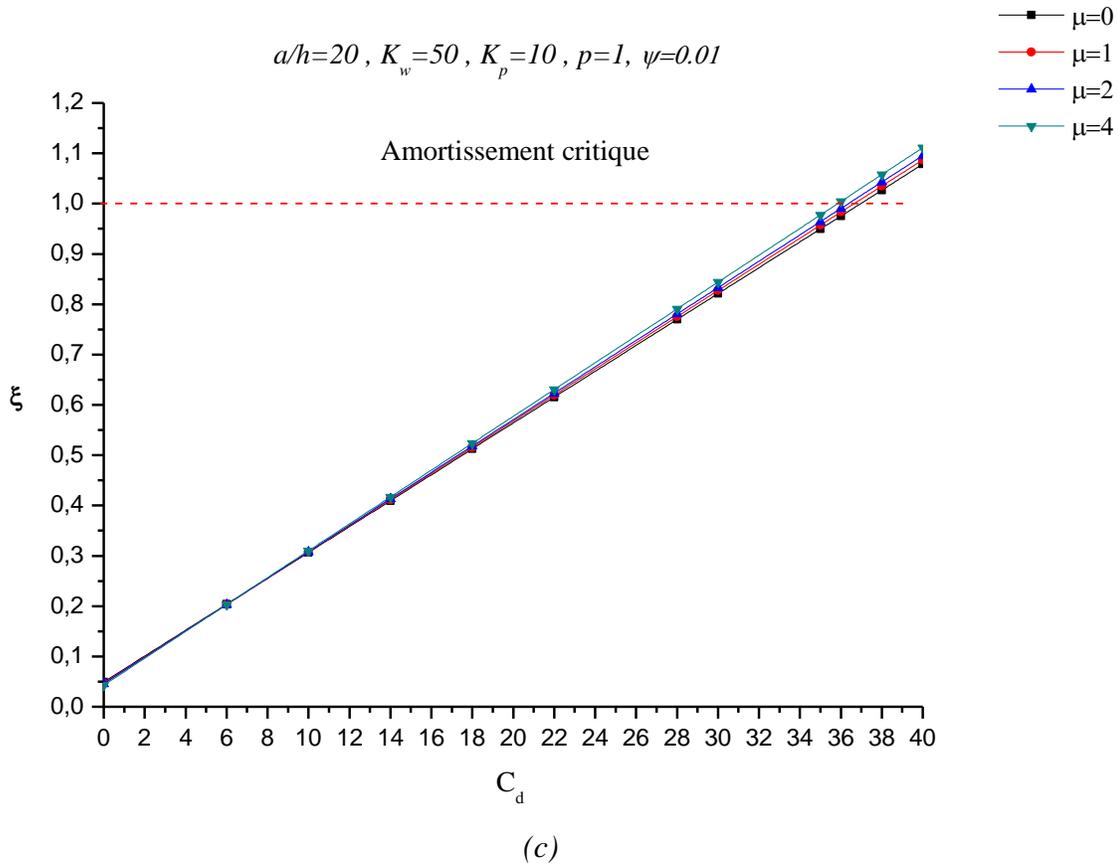
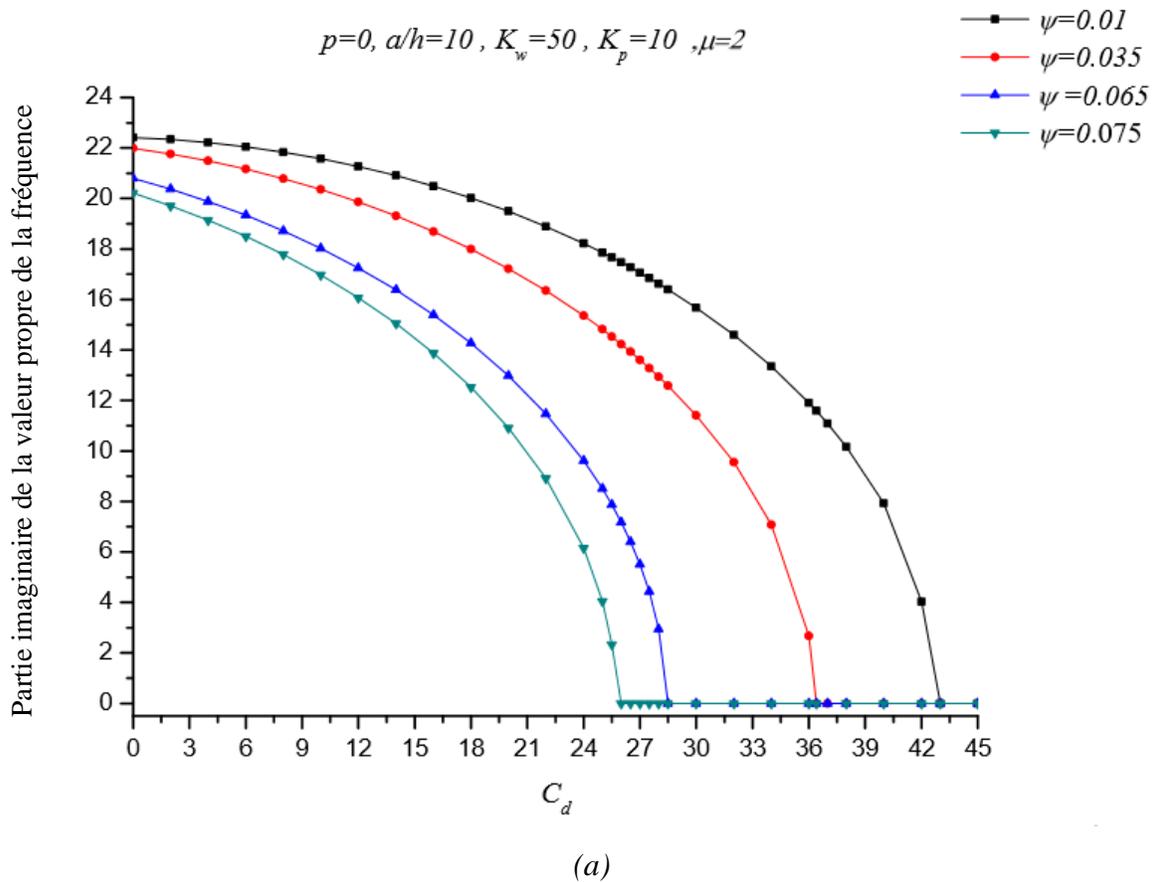


Figure VII.7 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la fréquence propre du nanoplaque FGM simplement supportées, pour différents paramètreq non locales μ avec un rapport de l'élanement $a/h=20$; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.

Les **figures VII.6** et **VII.7** montrent l'évolution des fréquences non dimensionnelles de la plaque FGM ($p=1$) viscoélastique, simplement supportées en fonction du coefficient d'amortissement de la fondation « C_d », pour différentes valeurs du paramètre non local « μ ». Les plaques en question sont analysées dans les cas où elles sont épaisses avec un rapport géométrique $a/h=5$ et minces avec un rapport $a/h=20$, respectivement, dont les raideurs de la fondation $K_w=50$ et $K_p=10$. Il a été observé que la partie réelle de la fréquence naturelle non dimensionnelle augmente proportionnellement avec le paramètre non local μ ; cependant, la partie imaginaire est inversement proportionnelle à ce paramètre. Il est clair aussi que l'amortissement de la fondation réduit les fréquences de résonance et limite bien la vibration de la plaque. Pour une plaque mince avec un rapport géométrique $a/h=20$, les valeurs des fréquences non dimensionnelles sont trop proches pour les différentes valeurs du paramètre non local μ ,

puisque l'effet de la déformation transversale sur ces fréquences est négligeable (théorie de Love-Kirchhoff). Par contre, pour une plaque épaisse avec un rapport géométrique $a/h=5$, l'effet du cisaillement est important ce qui provoque une augmentation de la fréquence non dimensionnelle qui est représentée par une différence significative entre les courbes en fonction de C_d jusqu'au le point critique. Par exemple, dans la **figure VII.6b**, pour une nanoplaque épaisse ($a/h=5$, $\mu=4$), l'amortissement critique est atteint pour une valeur de C_d égale à 31.646, cependant dans la **figure VII.7b**, pour une nanoplaque mince ($a/h=20$, $\mu=4$), l'amortissement critique est atteint pour une valeur de $C_d=35.845$.



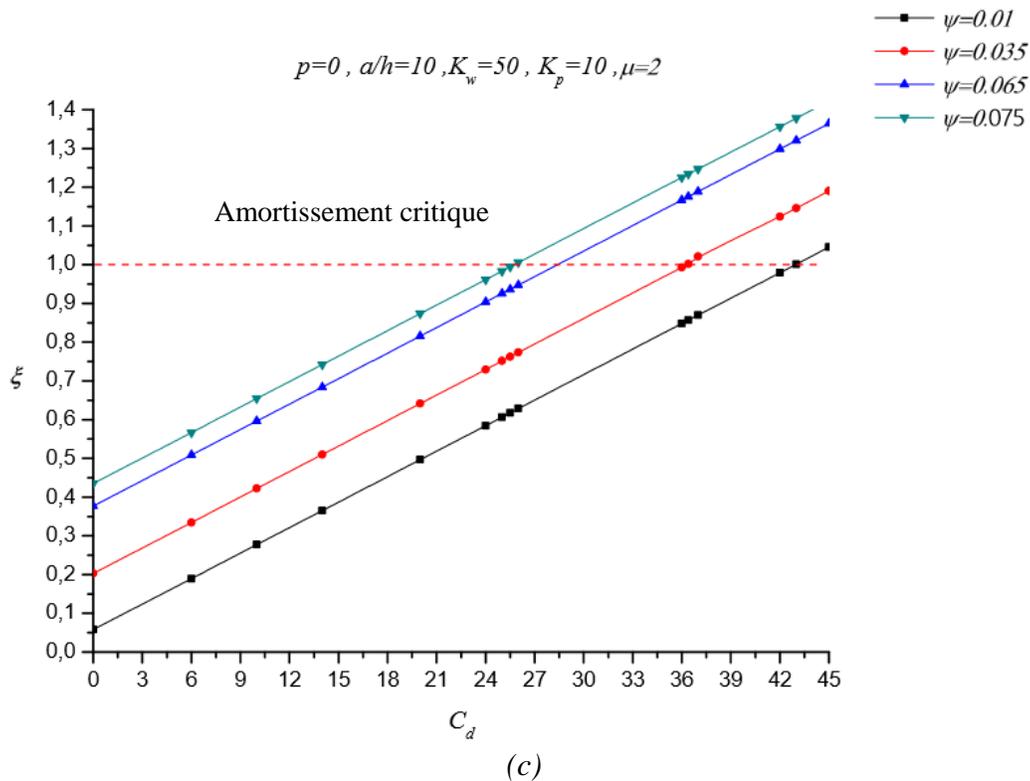
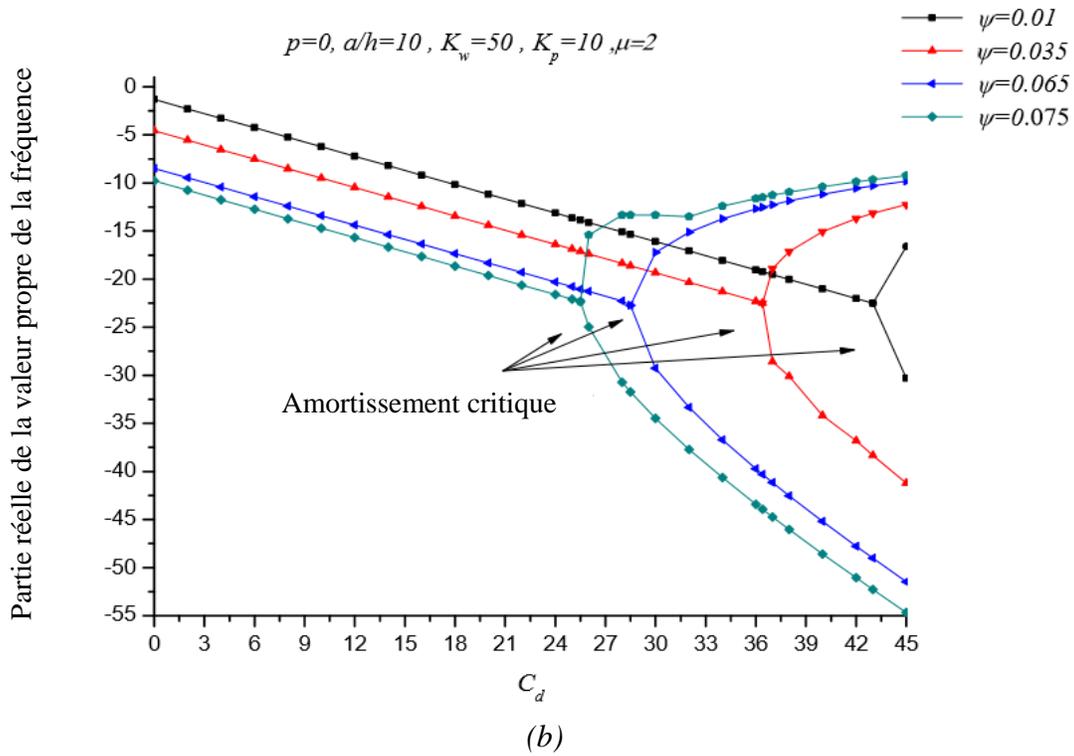
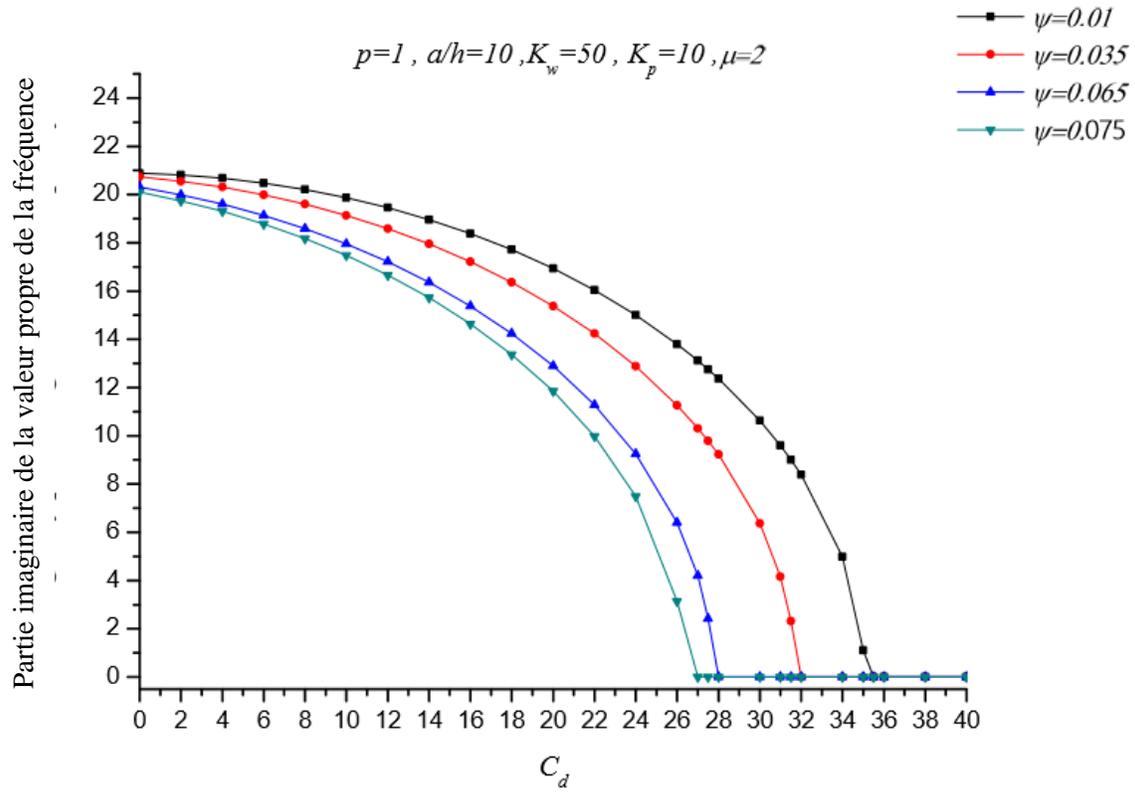
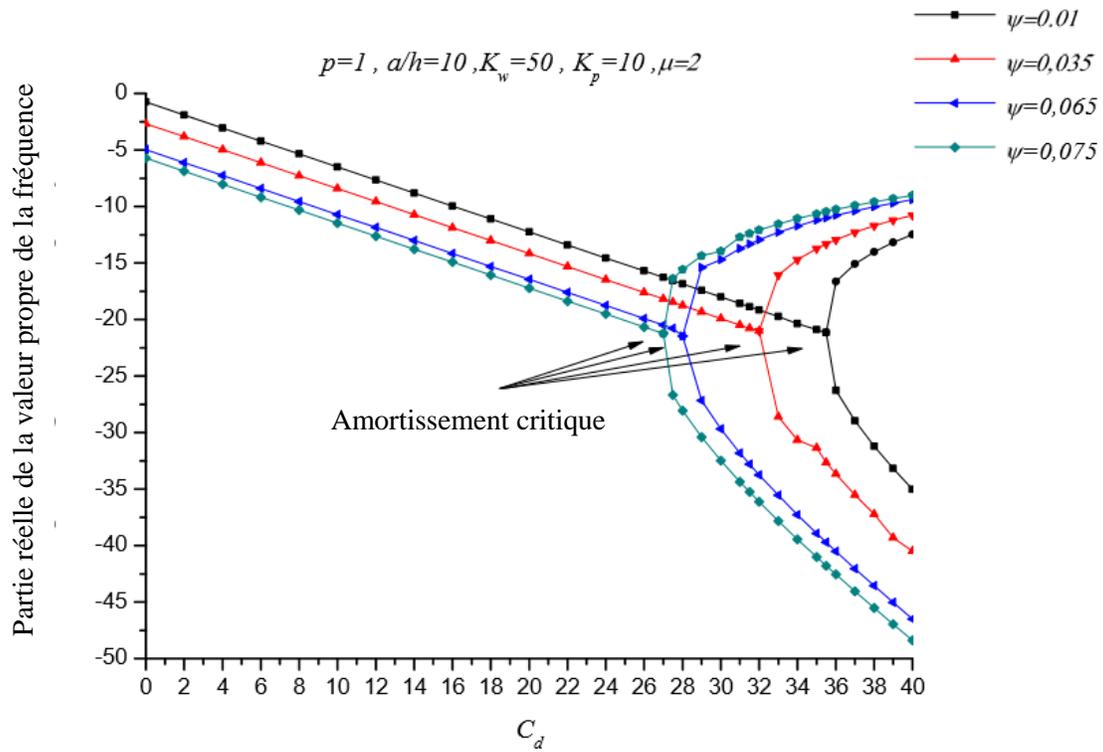


Figure VII.8 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la vibration libre de la nanoplaque isotrope et ce pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique Ψ du matériau qui constitue la plaque ; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.



(a)



(b)

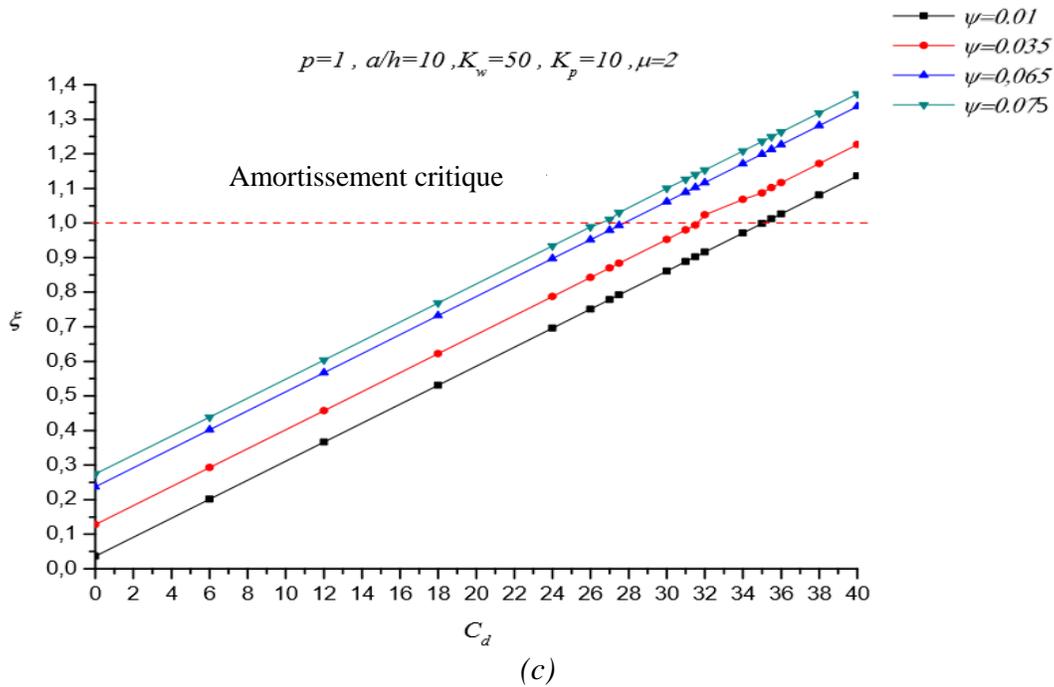
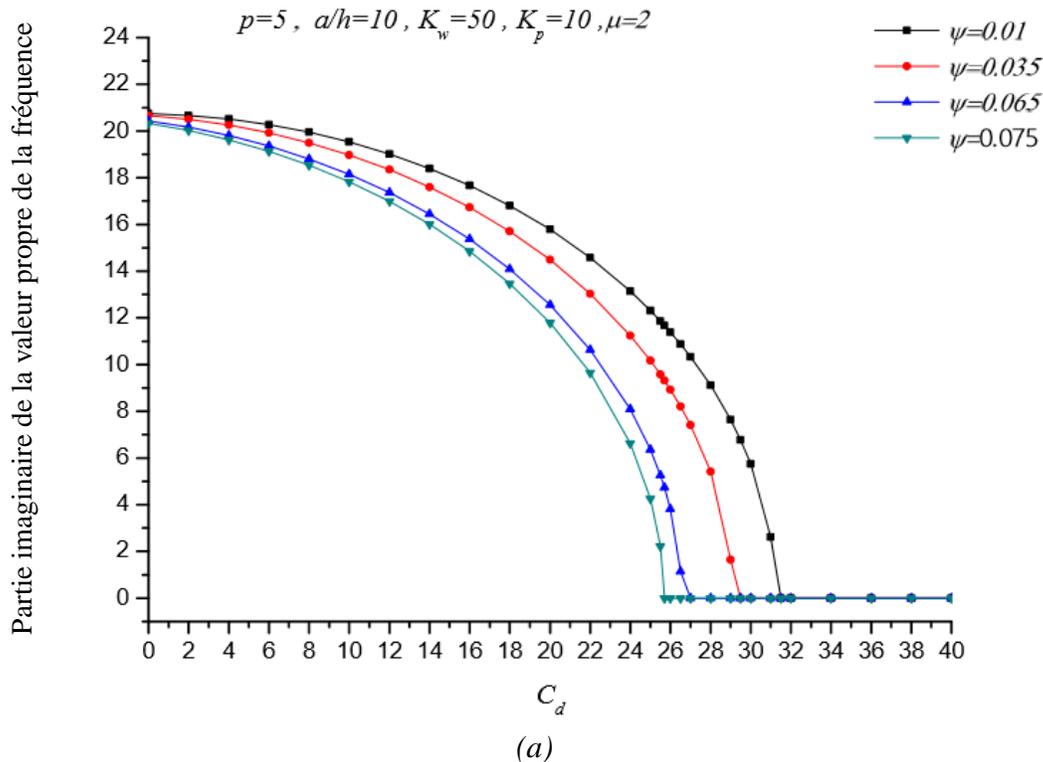


Figure VII.9 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la vibration libre de la nanoplaque FGM ($p=1$) et ce pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique Ψ du matériau qui constitue la plaque ; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.



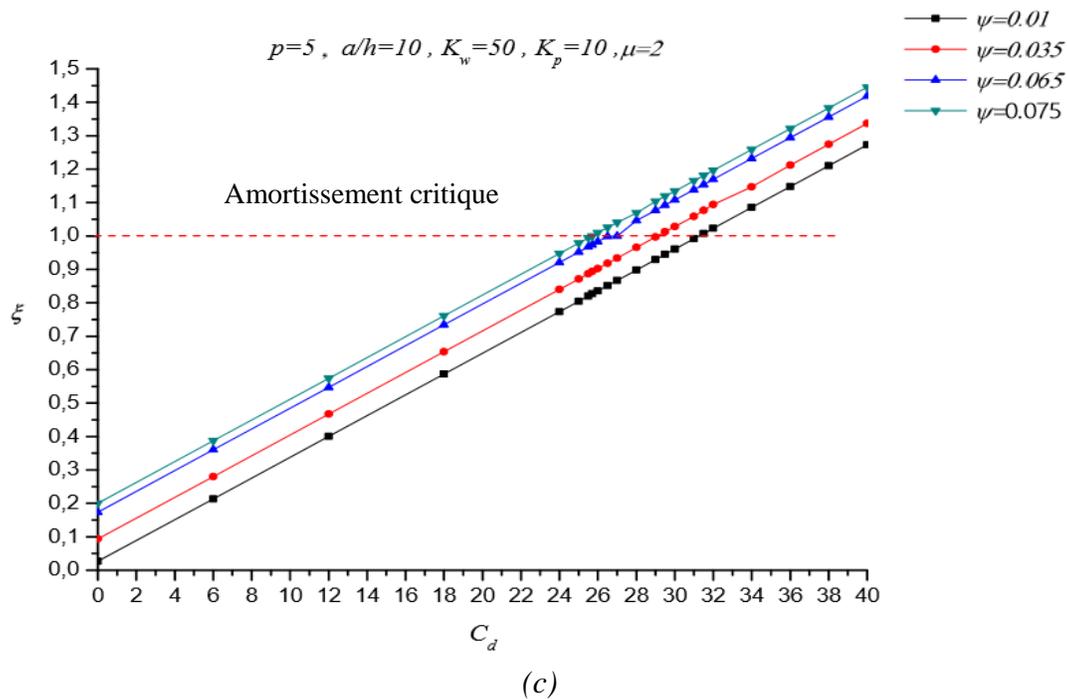
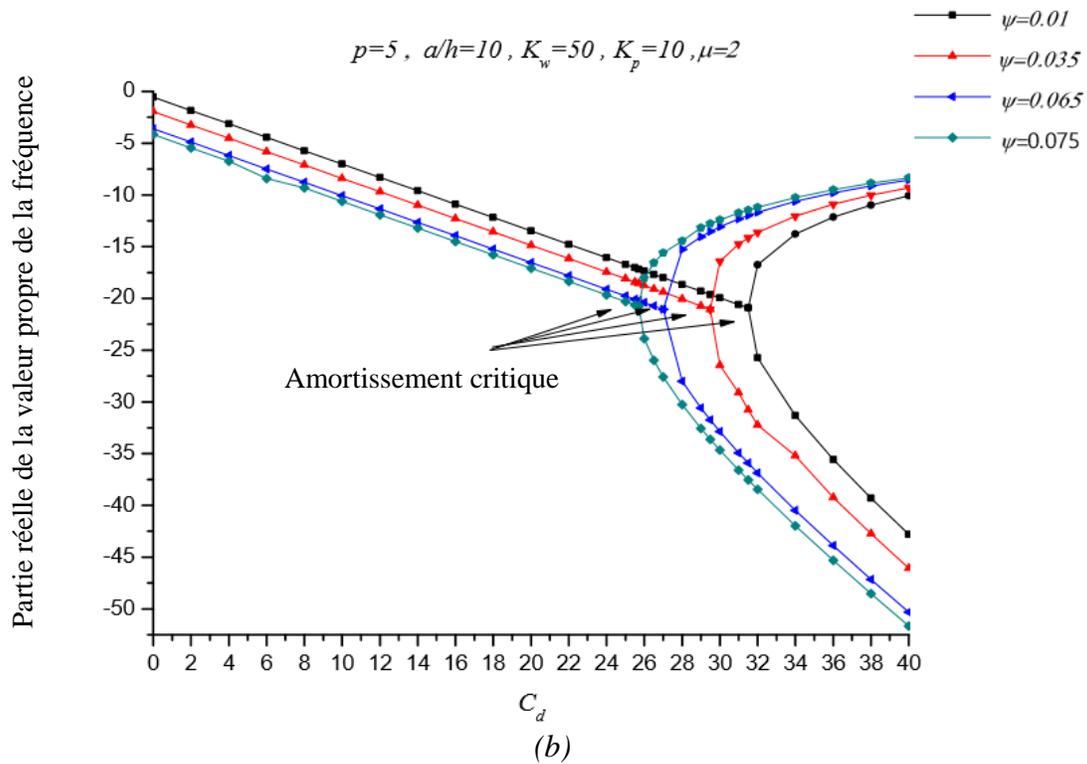


Figure VII.10 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la vibration libre de la nanoplaque FGM ($p=5$) et ce pour différentes valeurs du paramètre viscoélastique Ψ du matériau qui constitue la plaque ; (a) Partie imaginaire, (b) Partie réelle et (c) Rapport d'amortissement.

Les figures **VII.8 -VII.10** montrent l'effet du coefficient d'amortissement de la fondation « C_d », de la viscosité du matériau « ψ », sur les fréquences vibratoires d'une nano-plaque carrée simplement supportée, et cela pour différents indices de fraction volumique « p ». Les courbes (a), (b) et (c) montrent respectivement la variation de la fréquence imaginaire, de la fréquence réelle et du coefficient d'amortissement. On constate que la viscosité ψ du matériau induit une réduction considérable des parties réelles et imaginaires des fréquences jusqu'à atteindre un point critique, où la fréquence imaginaire devient nulle. À ce point ($\zeta=1$), la nanoplaque est amortie de façon critique et ne présente aucune oscillation. La rigidité de la plaque a toujours un effet remarquable sur la résonance de la plaque, pour un matériau isotrope rigide (céramique), une valeur de la viscosité est $\psi = 0.065$, et un amortissement de fondation $C_d = 27$, le système n'est pas encore amortie et la fréquence propre, $\omega = -21.7730 + 05.5077i$. Par contre pour matériau moins rigide (métal), pour les mêmes valeurs de la viscosité du matériau et d'amortissement de la fondation le système est amortie de façon critique ou la fréquence propre avoir deux solution réelle, $\omega = -17.5870, -24.5385$. Il est clair donc que les valeurs des fréquences diminuent légèrement avec l'augmentation de l'indice du matériau. Notons également que le point critique peut être atteint lorsque $C_d = 42.934$, pour la valeur de viscosité $\psi = 0.01$. Ce comportement est certainement dû à la diminution de la viscoélasticité du matériau ψ .

Les figures **VII.11** et **VII.12** illustrent la variation du rapport d'amortissement « ζ » de la plaque FGM en fonction des raideurs de la fondation viscoélastique K_p ou K_w et ce, en considérant différents paramètres d'amortissement interne et externe. Dans les deux cas, on a observé que l'influence des rigidités est illimitée et son augmentation mène à une diminution du rapport d'amortissement. De plus, il est observable que l'augmentation de l'indice de Pasternak K_p fournit une fréquence naturelle plus élevée par rapport à l'indice de Winkler K_w . Nous remarquons aussi que l'amortissement du système est plus important pour la plaque viscoélastique reposant sur une fondation viscoélastique. Ceci est dû à l'influence des paramètres d'amortissement du matériau et de la fondation utilisée.

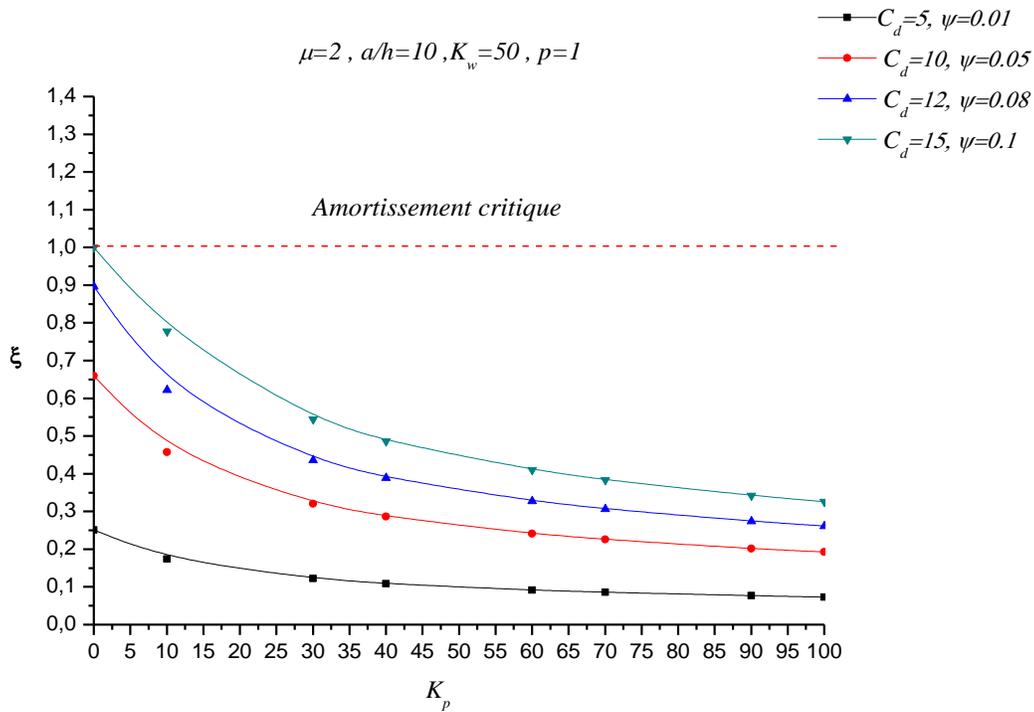


Figure VII.11 Effet du paramètre de Pasternak K_p sur la variation du rapport d'amortissement ξ de la nanoplaque et ce pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement C_d, Ψ .

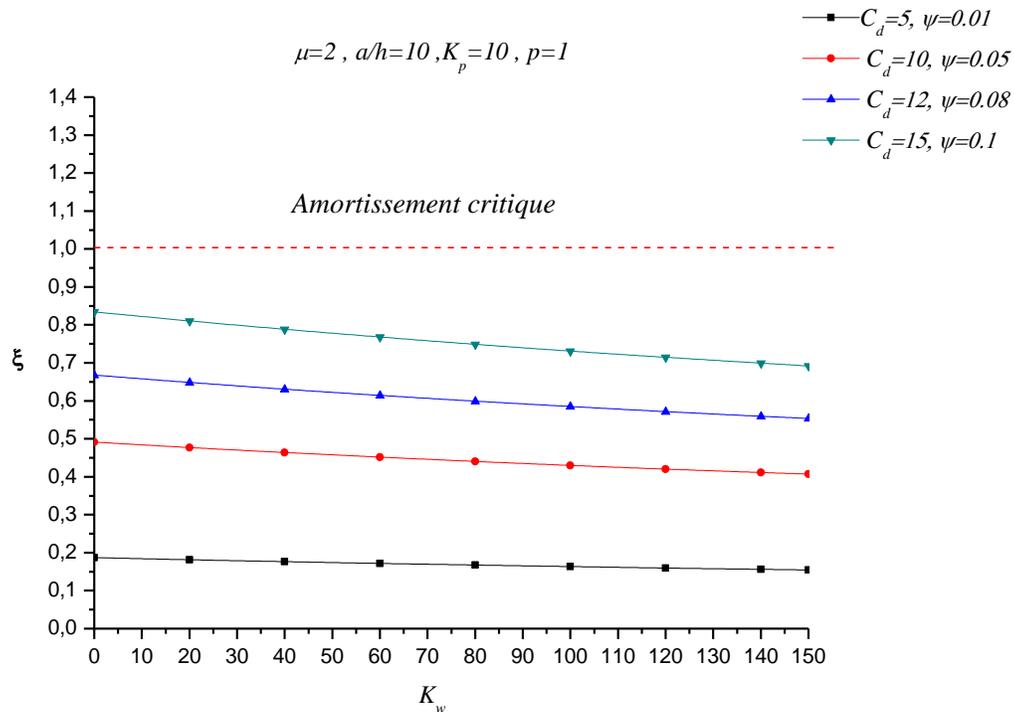


Figure VII.12 Effet du paramètre de Winkler K_w sur la variation du rapport d'amortissement ξ de la nanoplaque et ce pour différentes valeurs du paramètre d'amortissement C_d, Ψ .

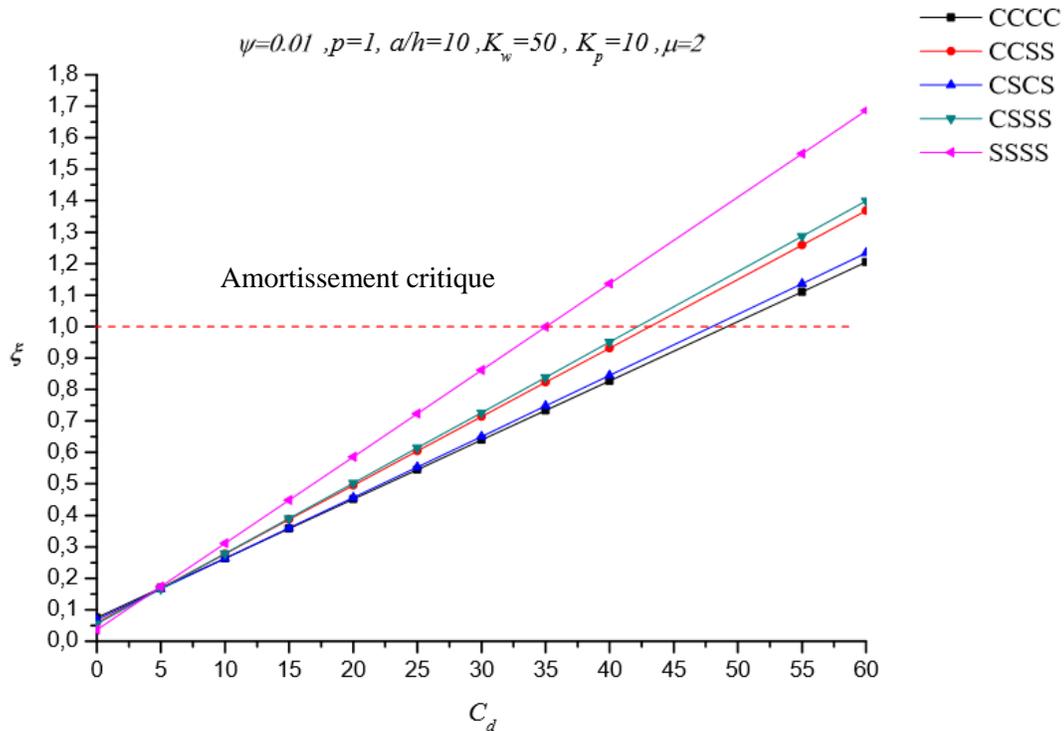


Figure VII.13 Effet du coefficient d'amortissement C_d de la fondation sur la variation du rapport d'amortissement ξ de la nanoplate FGM sous différentes conditions aux limites.

L'évolution du rapport d'amortissement « ξ » en fonction du coefficient d'amortissement « C_d » de la fondation viscoélastique, sous diverses conditions aux limites est illustrée sur la **figure VII.13**. Il est facile de remarquer également que pour une plaque simplement supportée (SSSS), l'amortissement est sous-critique pour un coefficient viscoélastique d'amortissement de la fondation $C_d < 35$. En revanche, pour les plaques sous conditions limites CCSS et CSSS, ces valeurs de coefficient viscoélastique sont supérieures et peuvent être égales à 42, $C_d = 42$. Pour les plaques plus rigides, sous conditions limites CSCS et CCCC, l'amortissement reste sous-critique pour un coefficient viscoélastique $C_d < 48,34$. Par conséquent, la rigidité élevée de la plaque pour les encastremets permettent d'obtenir une vibration très élevée, ce qui implique de prévoir un amortissement important par la fondation viscoélastique pour la réduire.

VII.4 Conclusion

Dans ce chapitre, la vibration libre d'une nanoplate viscoélastique FGM, reposant sur une fondation viscoélastique a été étudiée, en se référant au modèle de Kelvin-Voigt. Un nouveau modèle, qui prend en compte la théorie de la déformation transversale d'ordre supérieur, a été développé pour élaborer les équations d'équilibre non locales sur la base du principe de Hamilton

et la théorie non local d'Eringen, sous différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus sont présentés dans le but de montrer l'impact de différents paramètres sur la vibration libre du modèle considéré.

**«*CONCLUSION GENERALE ET
PERSPECTIVES*»**

Conclusion générale et perspectives

Dans le cadre de ce travail, nous avons développé une méthode analytique directe permettant de déterminer les fréquences propres dues à la vibration libre d'une nano plaque en FGM viscoélastiques reposant sur des fondations viscoélastiques. Les propriétés mécaniques de la plaque FGM sont supposées varier en fonction de l'épaisseur de la plaque et dépendent de leur fraction volumique qui suit la loi de puissance. L'utilisation de ces matériaux semble être une solution idéale pour l'étude des vibrations libres grâce à leur multifonctionnalité intégrée lorsque l'effet non-local d'Eringen est pris en compte. La formulation proposée s'intéresse particulièrement à la théorie des plaques de déformation de cisaillement d'ordre élevé raffinée qui prend en compte le module viscoélastique dans les matériaux à gradient fonctionnel afin de réduire la résonance structurale. Les équations d'équilibre non locales ont été élaborées sur la base du principe d'Hamilton et la théorie non local d'Eringen, sous différentes conditions aux limites. Comparée aux résultats rencontrés dans la littérature, notre méthode analytique a montré son efficacité pour la détermination des fréquences de vibration pour les structures minces et épaisses qui sont à l'origine d'un éventuel désordre des plaques et poutres lorsqu'elles dépassent une certaine valeur. Par conséquent, il est très intéressant de les déterminer. L'étude paramétrique menée a permis de souligner les effets des différents paramètres influant sur la réponse des plaques FGM.

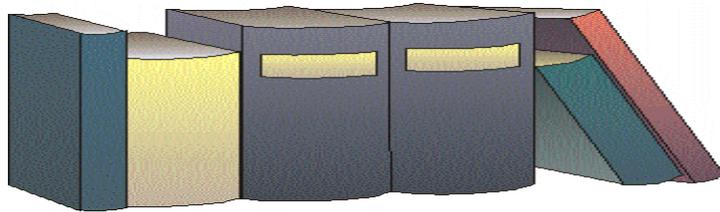
La rareté des solutions exactes pour les problèmes de vibration libre qui dépendent de la fonction de gauchissement, nous a conduits à évaluer le nouveau modèle par rapport aux modèles analytiques existant (Kirchoff_Love, Reissner_Mindlin, Reddy, sinus de Touratier et le présent modèle) basés sur des approximations du champ de déplacements. De ce fait, le modèle étudié est plus riche que les autres modèles et permet de traiter à la fois les structures minces et épaisses sans introduire des coefficients supplémentaires, en général le modèle basé sur la fonction exponentielle est plus performant de tous autres modèles, il permet selon son développement en série de Taylor de trouver les différentes théories. Les conclusions tirées par rapport aux différentes études sont présentées ci-dessous :

- La fréquence adimensionnelle augmente lorsque le rapport (a/h) de la nanoplaque FGM augmente. De plus, l'effet de la déformation transversale a été clairement remarqué pour les nanoplaques épaisses.

- Les fréquences propres de vibration des nanoplaques FGM simplement supportées (SSSS) sont plus petites que celles des nanoplates encastrées (CCCC). Il est intéressant de noter que pour les plaques avec des conditions aux limites intermédiaires (CSSS, CCSS et CSCS), les fréquences propres présentaient des valeurs intermédiaires.
- Les nanoplaques à gradient fonctionnel sont mieux amorties que les plaques FG locales ($\mu = 0$) ; ceci est certainement dû au fait que le paramètre non local réduit la rigidité de la structure de manière significative.
- En présence d'une fondation élastique, la rigidité du nanoplaque FGM augmente, ce qui conduit à une augmentation significative de la fréquence propre de la vibration.
- Les résultats de l'étude indiquent que la partie réelle prédominante de la fréquence de vibration des structures FGM est significativement influencée par le paramètre viscoélastique du matériau et par le coefficient d'amortissement de la fondation. En outre, il a été constaté que la partie réelle de la fréquence diminue lorsque les valeurs d'amortissement structurel et externe de la fondation augmente par contre la partie imaginaire de la fréquence augmente.
- Les fréquences propres de vibration libre des nanoplaques FG sont généralement plus faibles que celles des nanoplaques céramiques homogènes (rigidité élevée). De plus, une diminution de la valeur de l'indice de loi de puissance ($p = 0$, céramique pure) conduit à une réduction du facteur d'amortissement, ce qui indique une moindre capacité à dissiper l'énergie.
- Les effets d'amortissement dans les matériaux viscoélastiques réduisent les valeurs de pointe de la réponse dynamique, et peuvent donc être appliqués à la conception pour réduire les vibrations du système.

En perspective à cette partie analytique nous envisageons d'étudier le problème du gauchissement dans les sections ouvertes telles que les poutres caissons en composite tout en introduisant la non linéarité matérielle et géométrique pour le comportement élastique et visqueux. L'objectif à l'avenir est de développer un outil par éléments finis efficace pour l'analyse non locale des multicouches en traitons le problème des contraintes interlaminaires.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES



Références bibliographiques

- [1]. Berthelot, J. M. (1992). Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures. Paris. Masson. 615 p.
- [2]. Jérémie Aucher. (2009). Etude comparative des comportements composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable. Autre. INSA de Rouen. Français. ffNNT : 2009ISAM0012ff.
- [3]. Kaskas Saliha. (2010). Etude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites. Mémoire de Magister. Université Mentouri – Constantine.
- [4]. Baptiste Paul Revol. (2017). Caractérisation de l'interface dans des composites polyamides-6 - viscoses haute ténacité obtenus par injection réactive. Thèses doctorat. Université de Haute Alsace – Mulhouse.
- [5]. Djebbloun, Youcef. (2004). Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites. Mémoire de Magister. Université Mohamed Khider- Biskra.
- [6]. J. Cugnoni. (2004). Identification par recalage modale et fréquentiel des propriétés constitutives de coques en matériaux composites. Thèse de doctorat. Ecole polytechnique fédérale de Lausanne-Suisse.
- [7]. Miyamoto, M., Kaysser, W.A., Rabin, B.H, Kawasaki, A., Ford. (1999). "Functionally Graded Materials Design". Processing and Applications.
- [8]. Bourada Fouad. (2018). Etude de la stabilité des plaques composites épaisses en utilisant des théories de déformation d'ordre élevé. Thèse de Doctorat de Centre Universitaire Belhadj Bouchaib-Ain Témouchent .
- [9]. Ziou, Hassina. (2017). Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel. Thèse de Doctorat . Université Mohamed Khider - Biskra.
- [10]. Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M. (2013). Novel applications of functionally graded nano, opto electronic and thermo-electric materials. International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing. 1, 221–224 .
- [11]. Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2015). Laser metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC. Materials & Design. 84, 402–410. doi:10.1016/j.matdes.2015.06.135.
- [12]. Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T., Shukla M., Pityana. (2012). S. Functionally graded material: An overview. In: Proceedings of the world congress on engineering WCE 2012. vol. 3, pp.1593–1597.

- [13]. Lu, L., Chekroun, M., Abraham, O., Maupin, V., Villain, G. (2011). Mechanical properties estimation of functionally graded materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT and E Int.* 44(2), 169–177.
- [14]. Shumiya, H., Kato, K., Okubo, H. (2004). Feasibility studies on FGMs (functionally graded materials) application for gas insulated equipment. In: *IEEE Conference on Electrical Insulation and dielectric Phenomena*. pp. 360–363.
- [15]. Rasheedat Modupe Mahamood, Esther Titilayo Akinlabi. (2017). *Functionally Graded Materials, Topics in Mining, Metallurgy and Materials Engineering*. 1st ed .springer. 2364-3293.
- [16]. Abdelmadjid Bouhafs. (2017). Etude de la vibration libre d'une plaque composite semi-épaisse à gradient fonctionnel renforcée par des nanotubes en carbone. Mémoire de Master. Institut D'aéronautique Et Des Etudes Spatiales. Université Blida 1.
- [17]. Groves, J.F. and Wadley, H.N.G. (1997). Functionally graded materials synthesis via low vacuum directed vapor deposition. *Composites Part B: Engineering*. 28(1-2), pp.57-69.
- [18]. Knoppers, G.E., Gunnink, J.W., Van Den Hout, J. and Van Vliet, W. (2005), December. The reality of functionally graded material products. In *Intelligent Production Machines and Systems-First I* PROMS Virtual Conference: Proceedings and CD-ROM set*. Elsevier (p. 467).
- [19]. Nabaa S. Radhi. (2018). A review for functionally gradient materials processes and useful application .*Journal of University of Babylon for Engineering Sciences*. Vol. (26), No. (9).
- [20]. L. Lostec. (1997). Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L. Thèse de Doctorat. Université de Limoges-France.
- [21]. Zhu J, Lai Z, Yin Z, Jeon J, and Lee S. (2001) .Fabrication of ZrO₂-NiCr functionally graded material by powder metallurgy *Materials. Chemistry and Physics*. 68(1-3):130-135.
- [22]. .C.Pai,R.M.Pillai and T.P.D.Rajan. (2004). Functionally graded materials and composites for engineering applications. *Regional research laboratory .Thiruvananthapuram*-695 109.
- [23]. M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya. (1990). Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*. 129-34.
- [24]. Bao, G., Wang, L. (1995). Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings. *International Journal of Solids and Structure* .32, 2853–28710.
- [25]. Chung, Y.L., Chi, S.H. (2001). The residual stress of functionally graded materials. *Journal of the Chinese Institute of Civil and Hydraulic Engineering* .13, 1–9.
- [26]. Delale, F., Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609–614.

- [27]. European Commission. Commission recommendation of 18 October 2011 on the definition of nanomaterial. Off J Eur Union 2011, L 275:38e40.
- [28]. ISO/TS 80004-1. (2010). Nanotechnologies-Vocabulary-Part 1: core terms. International Organization for Standardization.
- [29]. Sharma VK, Filip J, Zboril R, Varma RS. (2015). Natural inorganic nanoparticles—formation, fate, and toxicity in the environment. *Chemical Society Reviews* .44:8410–8423. <https://doi.org/10.1039/C5CS00236B>
- [30]. Hochella MF Jr, Spencer MG, Jones KL. (2015) .Nanotechnology: nature’s gift or scientists’ brainchild. *Environmental Science: Nano* .2:114–119. <https://doi.org/10.1039/C4EN00145A>
- [31]. Hochella MF, Aruguete DM, Kim B, Madden AS. (2012). Naturally occurring inorganic nanoparticles: general assessment and a global budget for one of earth’s last unexplored geochemical components. In: Guo H, Barnard A, editors. *Nature’s nanostructures*. Victoria (Australia): Pan Stanford Publishing; 2012.
- [32]. Wagner S, Gondikas A, Neubauer E, Hofmann T, von der Kammer F.(2014) .Spot the difference: engineered and natural nanoparticles in the environment—release, behavior, and fate. *Angew Chem Int Ed* 53:12398–12419. <https://doi.org/10.1002/anie.201405050>
- [33]. Firdos Alam Khan. (2020). *Applications of Nanomaterials in Human Health*. 1st ed. Springer. Singapore.
- [34]. Ghrieb Sifi. (2018). *Elaboration et étude des poudres nanostructurées de FeS₂ obtenues par broyage haute énergie*. Thèse de doctorat, Université de Annaba.
- [35]. Gleiter H. (2000). Nanostructured materials: basic concepts and microstructure. *Acta Materialia*, 48:1–29. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(99\)00285-2](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(99)00285-2)
- [36]. Tiwari JN, Tiwari RN, Kim KS. (2012) .Zero-dimensional, one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional nanostructured materials for advanced electrochemical energy device. *Progress in Materials Science*.57:724–803. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2011.08.003>
- [37]. Pokropivny VV, Skorokhod VV. (2007). Classification of nanostructures by dimensionality and concept of surface forms engineering in nanomaterial science. *Materials Science and Engineering: C* .27:990–993. <https://doi.org/10.1016/j.msec.2006.09.023>
- [38]. Patricia I. Dolez.(2015). Chapter 1.1 - Nanomaterials Definitions, Classifications, and Applications. Patricia I. Dolez, *Nanoengineering*, Elsevier. Pages 3-40, ISBN 9780444627476. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-62747-6.00001-4>

- [39]. Oldenburg SJ. Silver nanoparticles: properties and applications, www.sigmaaldrich.com/materialsscience/nanomaterials/silver-nanoparticles_printer.html [accessed 09.02.13].
- [40]. Applications of nano-copper powder. Hefei Quantum Quelle Nano Science and Technology Co., LTD, www.quantum-nano.com [accessed 09.02.13].
- [41]. Gold nanomaterials. Blue Nano, www.bluenanoinc.com/nanomaterials/gold-nanomaterials.html [accessed 09.02.13].
- [42]. Kharisov BI, Rasika Dias HV, Kharissova OV, Jimenez-Perez VM, Perez BO, Munoz Flores B. (2012). Iron-containing nanomaterials: synthesis, properties, and environmental applications. *RSC Adv*; 2:9325e58.
- [43]. Platinum nanomaterials. Blue Nano. www.bluenanoinc.com/nanomaterials/platinum-nanomaterials.html [accessed 09.02.13].
- [44]. Morris DG. (2010). The origins of strengthening in nanostructured metals and alloys. *Rev Metal.* 46 (2): 173e86.
- [45]. Yardley VA, Tsurekawa S, Fujii H, Matsuzaki T. (2007). Thermodynamic study of magnetic field-enhanced nanocrystallisation in amorphous Fe-Si-B(-Nb-Cu). *Mater Trans.* 48(11):2826e32.
- [46]. Eastern Research Group. (2010). State of the science literature review: nano titanium dioxide environmental matters. EPA/600/R-10/089. U.S. Environmental Protection Agency. 486 p.
- [47]. Application of nano ZnO powder. Nano-infinity Nanotech Co., Ltd, www.b2bnano.com/application.html [accessed 09.02.13]. Nanomaterials Definitions, Classifications, and Applications 35
- [48]. Ismail Ab Rahman, Vejayakumaran Padavettan. (2012). Synthesis of Silica Nanoparticles by Sol-Gel: Size-Dependent Properties, Surface Modification, and Applications in Silica-Polymer Nanocomposites—A Review. *Journal of Nanomaterials*. vol. 2012, Article ID 132424, 15 pages . <https://doi.org/10.1155/2012/132424>
- [49]. Nano-alumina. Forever Chemical Co. Ltd, www.forever-chem.com.tw/inorg_nano.html [accessed 20.12.14].
- [50]. Mohapatra M, Anand S. (2010). Synthesis and applications of nano-structured iron oxides/hydroxides: a review. *International Journal of Engineering, Science and Technology*. 2(8):127e46.

- [51]. Tawfik A. Saleh.(2020). Nanomaterials: Classification, properties, and environmental toxicities. *Environmental Technology & Innovation*, Volume 20: 101067. <https://doi.org/10.1016/j.eti.2020.101067>
- [52]. Zihao Li, Ling Wang, Yu Li, Yiyu Feng, Wei Feng.(2019).Carbon-based functional nanomaterials: Preparation, properties and applications,*Composites Science and Technology*.Volume 179: 10-40.ISSN 0266-3538.<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2019.04.028>.
- [53]. Parappurath N. Sudha, Kirubanandam Sangeetha, Kumar Vijayalakshmi, Ahmed Barhoum.(2018).Chapter 12 - Nanomaterials history, classification, unique properties, production and market.Editor(s): Ahmed Barhoum, Abdel Salam Hamdy Makhlof.In *Micro and Nano Technologies, Emerging Applications of Nanoparticles and Architecture Nanostructures*.Elsevier.Pages 341-384.<https://doi.org/10.1016/B978-0-323-51254-1.00012-9>
- [54]. Yan, Q.-L., Gozin, M., Zhao, F.-Q., Cohen, A., Pang, S.-P. (2016). Highly energetic compositions based on functionalized carbon nanomaterials. *Nanoscale* 8:4799–4851.
- [55]. Uddin, F. (2008). Clays, Nanoclays, and Montmorillonite Minerals. *Metall Mater Trans A* 39: 2804–2814 .<https://doi.org/10.1007/s11661-008-9603-5>
- [56]. Teruoki Tago and Takao Masuda (October 6th 2010). Zeolite Nanocrystals- Synthesis and Applications, *Nanocrystals*, Yoshitake Masuda, IntechOpen, DOI: 10.5772/intechopen.83960. Available from: <https://www.intechopen.com/books/nanocrystals/zeolite-nanocrystals-synthesis-and-applications>
- [57]. Ihn T. (2010).Semiconductor nanostructuresdquantum states and electronic transport. Press Inc .New York: Oxford University.
- [58]. Manas Kumar Sahu.(2019). Semiconductor nanoparticles theory and applications, *International Journal of Applied Engineering Research*. Volume 14(2): 491-494.
- [59]. Lozhkomoev, A.S., Pervikov, A.V., Chumaevsky, A.V., Dvilis, E.S., Paygin, V.D., Khasanov, O.L., Lerner, M.I.5. (2019). Fabrication of Fe-Cu composites from electroexplosive bimetallic nanoparticles by spark plasma sintering. *Vacuum* 170, 108980.
- [60]. Oh, Y., Lee, J., Lee, M. (2018). Fabrication of Ag-Au bimetallic nanoparticles by laser-induced dewetting of bilayer films. *Applied Surface Science*. 434 :1293–1299.
- [61]. G.R. Iglesias, F. Reyes-Ortega, B.L. Checa Fernandez, Á.V. Delgado. (2018).Hyperthermia-triggered gemcitabine release from polymer-coated magnetite nanoparticles, *Polymers (Basel)* 10 (3) 27.

- [62]. Stanisić, D., Costa, A. F., Cruz, G., Durán, N., & Tasić, L. (2018). Applications of flavonoids, with an emphasis on hesperidin, as anticancer prodrugs: phytotherapy as an alternative to chemotherapy. *Studies in Natural Products Chemistry*, 161–212. Doi:10.1016/b978-0-444-64056-7.00006-4
- [63]. Luther, W. (2004). In *Industrial application of nonmaterial's chances and risks*, W. Luther (Ed.), Future Technologies Division, Dusseldorf,
- [64]. Cauchetier, M., Croix, O., Luce, M., Baraton, M. I., Merle, T., & Quintard, P. (1991). Nanometric Si/C/N composite powders: Laser synthesis and IR characterization. *Journal of the European Ceramic Society*. 8(4):215–219. Doi:10.1016/0955-2219(91)90097-j
- [65]. Casey, J. D., & Haggerty, J. S. (1987). Laser-induced vapour-phase synthesis of titanium dioxide. *Journal of Materials Science*, 22(12): 4307–4312. Doi:10.1007/bf01132022
- [66]. Cauchetier, M., Armand, X., Herlin, N. et al. (1999). Si/C/N nanocomposite powders with Al (and Y) additives obtained by laser spray pyrolysis of organometallic compounds. *Journal of Materials Science*. 34:5257–5264 <https://doi.org/10.1023/A:1004776300121>
- [67]. Ehbrecht, M., Faerber, M., Rohmund, F., Smirnov, V., Stelmach, O., and Huisken, F. (1993). CO₂ Laser Driven Production of Carbon Clusters and Fullerenes from the Gas Phase. *Chemical Physics Letters*. 214: 34-38.
- [68]. X.X. Bi, P.C. Englund. (1993). *Nanophase and Nanocomposite Materials*. Materials Research Society Symposium. Materials Research Society. Pittsburgh, PA, USA .p. 141.
- [69]. Reau, A., Guizard, B., Mengeot, C., Boulanger, L., & Ténégal, F. (2007). Large scale production of nanoparticles by laser pyrolysis. *Materials Science Forum*. 534-536: 85–88. Doi:10.4028/www.scientific.net/msf.534-536.85
- [70]. [http://iramis.cea.fr/Phoce/Vie des labos/Ast/ast sstechnique.php?id_ast=2888](http://iramis.cea.fr/Phoce/Vie%20des%20labos/Ast/ast%20sstechnique.php?id_ast=2888)
- [71]. Claverie, F. (2020). Laser ablation. *Sample Introduction Systems in ICPMS and ICPOES*, 469–531. Doi:10.1016/b978-0-444-59482-2.00010-5
- [72]. Yamagishi Y, Furukawa S, Tanaka A, Kobayashi Y, Sugiyama A. (2016). Histopathological localization of cadmium in rat placenta by LA-ICP-MS analysis. *J Toxicol Pathol*. 29 (4):279-283. Doi: 10.1293/tox.2016-0022
- [73]. V. P. Dravis, J. J. Host, M. H. Teng, B. Elliott, T. O. Mason, J. R. Weertman. (1995). *Nature* 374, 602.
- [74]. J. Jiao, S. Seraphin, X. Wang, J. C. Withers. (1996) .Preparation and properties of ferromagnetic carbon-coated Fe, Co, and Ni nanoparticles. *Journal of Applied Physics*. 80, 103.

- [75]. R. Sashardi, R. Sen, G. N. Subanna, K. R. Kannan, C. N. R. Rao. (1994). *Chemical Physics Letters*. 231-308
- [76]. Céline d'Orleans. (2003). *Elaboration par implantation ionique de nanoparticules de cobalt dans la silice et modifications de leurs propriétés sous irradiation d'électrons et d'ions de haute énergie*. Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur - Strasbourg I,
- [77]. Prashant V. Kamat. (1997). *Composite semiconductor nanoclusters*, *Studies in Surface Science and Catalysis*. Elsevier. Volume 103: 237-259. [https://doi.org/10.1016/S0167-2991\(97\)81105-6](https://doi.org/10.1016/S0167-2991(97)81105-6).
- [78]. Dervin S., Pillai S.C. (2017) .An Introduction to Sol-Gel Processing for Aerogels. In: Pillai S., Hehir S. (eds) *Sol-Gel Materials for Energy, Environment and Electronic Applications*. *Advances in Sol-Gel Derived Materials and Technologies*. Springer. Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-50144-4_1
- [79]. W. Luther. (2004). In *Industrial application of nanomaterials-chances and risks*, W. Luther (Ed.). Future Technologies Division. Dusseldorf.
- [80]. Meyya Meyyappan , Lance Delzeit , Alan Cassell and David Hash .(2003).Carbon Nanotube growth by PECVD: a review .*Plasma Sources Science and Technology* .12: 205-216.
- [81]. Whitesides GM, Mathias JP, Seto CT. (1991). Molecular self-assembly and nanochemistry: a chemical strategy for the synthesis of nanostructures. *Science* 254(5036):1312–1319
- [82]. Mijatovic D, Eijkel J, Den Van, Berg A.(2005) .Technologies for nanofluidic systems: top-down versus bottom-up—a review. *Lab Chip* 5(5):492–500
- [83]. Rothmund PW. (2005).Design of DNA origami. In: *Proceedings of the 2005 IEEE/ACM international conference on computer-aided design*. IEEE Computer Society. 471–478
- [84]. Kumar S., Bhushan P., Bhattacharya S. (2018).Fabrication of Nanostructures with Bottom-up Approach and Their Utility in Diagnostics, Therapeutics, and Others. In: Bhattacharya S., Agarwal A., Chanda N., Pandey A., Sen A. (eds) *Environmental, Chemical and Medical Sensors. Energy, Environment, and Sustainability*. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7751-7_8
- [85]. Thakur Prasad Yadav, Ram Manohar Yadav, Dinesh Pratap Singh. (2012). Mechanical Milling: a Top Down Approach for the Synthesis of Nanomaterials and Nanocomposites,*Nanoscience and Nanotechnology* . 2(3): 22-48 .DOI: 10.5923/j.nn.20120203.01

- [86]. N.V. Lavrik, M.J. Sepaniak, P.G. Datskos. (2004). Cantilever transducers as a platform for chemical and biological sensors. *Review of Scientific Instruments*. 75:2229-2253.
- [87]. Berrabah Hamza Madjid ,Adda Bedia El Abbas , Tounsi Abdelouahed. (2016). Comparaison des différentes théories de poutre non locale raffinée pour la flexion et l'analyse du flambement des nano-poutres. *Journal Of Materials And Engineering Structures*. 3 : 2–13.
- [88]. Kroner, E. (1967). Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*. 3: 731–742. Doi:10.1016/0020-7683(67)90049-2
- [89]. Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*. 54:4703–4710. Doi:10.1063/1.332803
- [90]. Eringen, A. C. (2002). *Nonlocal continuum field theories*. New York, NY: Springer.
- [91]. PIN LU, P. Q. Zhang, H. P. Lee, C. M. Wang, J. N. Reddy. (2007). Non-local elastic plate theories, *Proc. R. Soc. A* 463: 3225–3240. Doi: 10.1098/rspa.2007.1903
- [92]. Anderson DS, Sydor MJ, Fletcher P, Holian A. (2016) .Nanotechnology: the risks and benefits for medical diagnosis and treatment. *Journal of Nanomedicine and Nanotechnology*. 7: e143. Doi:10.4172/2157-7439.1000e143
- [93]. Rudolph Szilard. (2004). *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*. Front Cover. John Wiley, 1024 p.
- [94]. Zemani Kada, Sebakhi Faiza. (2015). *Etude des vibrations libres des plaques épaisses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur un support élastique de Winkler-Pasternak*. Master structures aéronautiques. Institut d'aéronautique et des études spatiales. Blida.
- [95]. Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* .12: 68–77.
- [96]. Mindlin, R., Mar. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 18:31–38.
- [97]. Reddy, J. N. [1984a]. A simple higher-order theory for laminated plates. *Journal of Applied Mechanics* .51:745–752.
- [98]. Touratier M. (1991). An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*. 29 (8):901–16.
- [99]. Shimpi, R.P. (2002). Théorie des plaques raffinée et ses variantes. *AIAA Journal*. 137–146.

- [100]. Karama M, Afaq KS, Mistou S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of Solids and Structures* .40:1525–46.
- [101]. Mechab, I. (2009). Etude des structures composites en utilisant les théories d'ordre élevé sous chargement thermomécanique. Thèse de doctorat. Université de Sidi Bel Abbès. Sidi Bel Abbès. Algérie.
- [102]. Mechab, I., Mechab, B., & Benaissa, S. (2013). Static and dynamic analysis of functionally graded plates using Four-variable refined plate theory by the new function. *Composites Part B: Engineering*. 45(1): 748–757. doi:10.1016/j.compositesb.2012.07.015
- [103]. Sobhy, M. (2013). Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions. *Composite Structures*.99: 76–87.
- [104]. R. M. Christensen. (2013). *Theory of Viscoelasticity*. Dover Civil and Mechanical Engineering.
- [105]. Lakes, R.S. (2009) .*Viscoelastic Materials*. Cambridge University Press, New York. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511626722>
- [106]. J. SALENCON.(2009).*Viscoélasticité pour le calcul des structures*. L'école polytechnique – Mai 2009, 19128 Palaiseau cedex.
- [107]. Aoun Badis. (2013).*Modélisation de l'influence de l'insertion d'une couche viscoélastique sur le comportement dynamique des structures «Cas de sol soumis a une sollicitation sismique »*.Magistère en génie civil. Université Cheikh Larbi Tebessi .Tebessa.Algerie.
- [108]. X. Robert-Veillette. (2013).*Impact du taux d'amortissement visqueux élastique des ponts routiers sur les résultats d'analyses sismiques linéaires et non linéaires*. Mémoire de maîtrise en génie civil. Université de Sherbrooke. Sherbrooke. Québec. Canada.114 pages.
- [109]. Lestuzzi, P., Smith, I. *Dynamique des structures*, Semestre d'automne 2013/2014. Laboratoire d'Informatique et de Mécanique Appliquées à la Construction. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. <http://www.mcours.net/cours/pdf/hascl1/hascl1643.pdf>.
- [110]. Kerr, A. D. (September 1, 1964). "Elastic and Viscoelastic Foundation Models." *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 31(3): 491–98. <https://doi.org/10.1115/1.3629667>
- [111]. Younesian, D., Hosseinkhani, A., Askari, H., & Esmailzadeh, E. (2019). Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. *Nonlinear Dynamics*.97:853–895.<https://doi.org/10.1007/s11071-019-04977-9>

- [112]. Dillard, D. A., Mukherjee, B., Karnal, P., Batra, R. C., & Frechette, J. (2018). A review of Winkler's foundation and its profound influence on adhesion and soft matter applications. *Soft Matter*. 14(19) : 3669–3683. doi:10.1039/c7sm02062g .
- [113]. A. Foppl. (1909). *Vorlesungen ilber Technische Mechanik* .fourth edition, B. B. Teubner. Leipzig. Germany. vol. 3. p. 228.
- [114]. Findley, W.N., Lai, J.S., Onaran, K. (1976). *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. Dover Publications, INC. New York
- [115]. Hong-Hu Zhu, Lin-Chao Liu, Hua-Fu Pei, Bin Shi .(2012).Settlement analysis of viscoelastic foundation under vertical line load using a fractional Kelvin-Voigt model.*Geomechanics and Engineering* .4 (1):67-78. DOI: [10.12989/gae.2012.4.1.067](https://doi.org/10.12989/gae.2012.4.1.067)
- [116]. Olga Martin (2021). Nonlinear vibrations of fractional nonlocal viscoelastic nanotube resting on a Kelvin–Voigt foundation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*.DOI: [10.1080/15376494.2021.1878401](https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1878401)
- [117]. Çalim, FF. (2009). Dynamic analysis of beams on viscoelastic foundation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 28: 469–476.
- [118]. Ansari, M., Esmailzadeh, E., Younesian, D. (2011). Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin–Voigt foundation under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*. 330(7) :1455– 1471
- [119]. Andersen, L., Nielsen, S.R., Kirkegaard, P.H. (2001).Finite element modelling of infinite Euler beams on Kelvin foundations exposed to moving loads in convected co-ordinates. *Journal of Sound and Vibration*. 241(4) : 587–604
- [120]. Senalp, A. D., Arikoglu, A., Ozkol, I., & Dogan, V. Z. (2010). Dynamic response of a finite length euler-bernoulli beam on linear and nonlinear viscoelastic foundations to a concentrated moving force. *Journal of Mechanical Science and Technology*.24(10) : 1957–1961. doi:10.1007/s12206-010-0704-x
- [121]. Morgan, M. R., & Sinha, S. C. (1983). Influence of a viscoelastic foundation on the stability of Beck's column: An exact analysis. *Journal of Sound and Vibration*.91 (1): 85–101. doi:10.1016/0022-460x(83)90453-4
- [122]. Atanacković, T.M., Janev, M., Konjik, S.,S.Pilipović.(2017). Wave equation for generalized Zener model containing complex order fractional derivatives. *Continuum Mech. Thermodyn*. 29: 569–583. <https://doi.org/10.1007/s00161-016-0548-4>
- [123]. Muscolino, G., Palmeri, A. (2007). Response of beams resting on viscoelastically damped foundation to moving oscillators. *International Journal of Solids and Structures*. 44(5):1317–1336

- [124]. Atanackovic, T. (2002). A modified Zener model of a viscoelastic body. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 14, 137–148. <https://doi.org/10.1007/s001610100056>
- [125]. Xu, H., & Jiang, X. (2017). Creep constitutive models for viscoelastic materials based on fractional derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 73(6), 1377–1384. doi:10.1016/j.camwa.2016.05.002
- [126]. Jia, L., & Huang, G. (2019). Application of a Viscoelastic Model to Creep Settlement of High-Fill Embankments. *Advances in Civil Engineering*.1–8. doi:10.1155/2019/4627174
- [127]. Saksa, T., & Jeronen, J. (2015). Dynamic Analysis for Axially Moving Viscoelastic Poynting–Thomson Beams. *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures*. 131–151. doi:10.1007/978-3-319-23564-6_9
- [128]. Okuka, A. S., & Zorica, D. (2019). Fractional Burgers models in creep and stress relaxation tests. *Applied Mathematical Modelling*. doi:10.1016/j.apm.2019.09.035
- [129]. Dey, A., & Basudhar, P. K. (2010). Applicability of Burger Model in Predicting the Response of Viscoelastic Soil Beds. *GeoFlorida 2010. Advances in Analysis, Modeling and Design*. Vol 2010 : 2611–2620
- [130]. Pál Albert and Miklós Kovács. (2003). Modelling of Reinforced Soil .*Periodica Polytechnica*. VOL. 47(2): 169–174
- [131]. Yoshiyuki Suzuki (2020). Review on the mechanical models and formulations of Madhira Madhav.Venkata Abhishek Sakleshpur. K. Rajyalakshmi .(December 2015). *Modelling Ground-Foundation Interactions .Conference: International Conference on Innovations in Structural Engineering At: Osmania University, Hyderabad, India, 91-106*
- [132]. Hetényi M. (1946). *Beams on Elastic Foundation*. Ann Arbor, MI: The University of Michigan Press.
- [133]. Hideaki Tanahashi & Yoshiyuki Suzuki. Review on the mechanical models and formulations of embedment of traditional timber joints in Japan. *Japan Architectural Review*. Vol 3 (2) : 148-164. <https://doi.org/10.1002/2475-8876.12137>
- [134]. Pasternak, P.L. (1954). On a New Method of Analysis of an Elastic Foundation by Means of Two Foundation Constants. *Gosudarstvennoe Izdatelstro Liberaturi po Stroitelstvui Arkhitekture*. Moscow.
- [135]. Balaš, J., Sládek, V., & Sládek, J. (1984). The Boundary Integral Equation Method for Plates Resting on a Two-Parameter Foundation. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*. 64(3): 137–146. doi:10.1002/zamm.19840640302

- [136]. J T ,Katsikadelis & L F ,Kallivokas.(1986).Clamped plates on Pasternak-type elastic foundation by the boundary element method Journal of Applied Mechanics. Vol 53(4):909-917
- [137]. Khazanovich, L., & Levenberg, E. (2020). Analytical solution for a viscoelastic plate on a Pasternak foundation. Road Materials and Pavement Design.21(3) :800–820. <https://doi.org/10.1080/14680629.2018.1530693>.
- [138]. Peng, L., & Wang, Y. (2015). Free Vibrations of Beams on Viscoelastic Pasternak Foundations. Applied Mechanics and Materials.Vol (744-746):1624–1627. doi:10.4028/www.scientific.net/amm.744-746.1624
- [139]. Kargarnovin, M., Younesian, D. (2002). Dynamic response analysis of Timoshenko beam on viscoelastic foundation under an arbitrary distributed harmonic moving load. In: Proceedings of the 4th International Conference on Structural Dynamics, Germany, p. 875.
- [140]. Ratko Pavlović & Ivan R. Pavlović .(2018).Dynamic stability of Timoshenko beams on Pasternak viscoelastic foundation. Theoretical and Applied Mechanics. Vol 45 (1): 67–81.DOI: <https://doi.org/10.2298/TAM171103005P>.
- [141]. A. D. Kerr.(1965). A study of a new foundation model. Acta Mechanica.vol 1(2):135–147.
- [142]. Suchart Limkatanyu, Woraphot Prachasaree, Nattapong Damrongwiriyanupap, Minho Kwon, Wooyoung Jung, ,(2013). Exact Stiffness for Beams on Kerr-Type Foundation: The Virtual Force Approach. Journal of Applied Mathematics. Vol. 2013:13 pages. <https://doi.org/10.1155/2013/626287>.
- [143]. Ammar A. Abdul Rahman.(2017). Closed Formed Solution for Thick Plates Resting on Kerr Foundation. International Journal of Applied Engineering Research . Vol 12(22):12133-12143
- [144]. Kneifati, M. C. (1985). Analysis of Plates on a Kerr Foundation Model. Journal of Engineering Mechanics. Vol 111(11):1325–1342. doi:10.1061/(asce)0733-9399(1985)111:11(1325)
- [145]. Alisjahbana Sofia W., Alisjahabana Irene, Kiryu Shota and Gan Buntara S.(2018).Semi analytical solution of a rigid pavement under a moving load on a Kerr foundation model. Journal of Vibroengineering, Vol 20, Issue 5: 2165-2174. <https://doi.org/10.21595/jve.2018.20082>
- [146]. Teodoru I. B., Muşat V. (2010). Modified Vlasov foundation model: An attractive approach for beams resting on elastic supports. European Journal of Comparative Economics. Vol 15 : 1-13.
- [147]. Vallabhan, C.V.G. and Das, Y.C. (1988).Parametric study of beams on elastic foundations.114(12):2072-2082. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:12\(2072\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:12(2072))
- [148]. Vallabhan, C. V. G. and Y. C. Das. (1991). Modified Vlasov Model for Beams on Elastic Foundations. Journal of Geotechnical Engineering.Vol 117:956–966. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9410(1991)117:6(956)

- [149]. Tvrďá, K. (2017). Foundation plate on the elastic half-space, deterministic and probabilistic approach. MATEC Web of Conferences. Vol 107:00058 .doi:10.1051/mateconf/201710700058
- [150]. Frýba, L. (2013). *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. Springer, Berlin
- [151]. Bashir F. Alsaidi, Ehsan Sarfaraz, and Hamid R. Hamidzadeh. (2014). Vibration Response of Foundation on Elastic Half-Space Medium-Experimental Analysis. March 2014. Conference: 23rd Annual Research Symposium 2014. At: Minneapolis, MN.
- [152]. S Guenfoud, SV Bosakov, DF Laefer .(2014). Dynamic analysis of a plate resting on elastic half-space with distributive properties. The 2014 World Congress on: Advances in Civil, Environmental, and Materials Research (ACEM 14), BEXCO, Busan, Korea, 24-28 August 2014
- [153]. Horvath, J. S. (1983). New Subgrade Model Applied to Mat Foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*. 109(12) :1567–1587. doi:10.1061/(asce)0733-9410(1983)109:12(1567)
- [154]. Reissner, E. (1967). Note on the formulation of the problem of the plate on an elastic foundation. *Acta Mechanica*. 4(1) :88–91. doi:10.1007/bf01291090
- [155]. Qin, Q. H. (1993). Nonlinear analysis of Reissner plates on an elastic foundation by the BEM. *International Journal of Solids and Structures*. 30(22) : 3101–3111. doi:10.1016/0020-7683(93)90141-s
- [156]. Horvath, J. S. (1983). New Subgrade Model Applied to Mat Foundations. *Journal of Geotechnical Engineering*. 109(12) :1567–1587. doi:10.1061/(asce)0733-9410(1983)109:12(1567)
- [157]. Challamel, N., Meftah, S. A., & Bernard, F. (2010). Buckling of elastic beams on non-local foundation: A revisiting of Reissner model. *Mechanics Research Communications*. 37(5) :472–475. doi:10.1016/j.mechrescom.2010.05.007
- [158]. Connolly, D., Kouroussis, G., Laghrouche, O., Ho, C., Forde, M. (2015). Benchmarking railway vibrations-track, vehicle, ground and building effects. *Constr. Build. Mater.* Vol 92 : 64–81
- [159]. Dey, A. (2009). Distribution of Contact Stress beneath Footing Resting on Unreinforced and Reinforced Elastic Foundation Beds. Indian Institute of Technology, Kanpur
- [160]. Sharma, R., Chen, Q., Abu-Farsakh, M., & Yoon, S. (2009). Analytical modeling of geogrid reinforced soil foundation. *Geotextiles and Geomembranes*. 27(1) : 63–72. doi:10.1016/j.geotexmem.2008.07.002

- [161]. Chen, Q., Abu-Farsakh, M. Y., Sharma, R., & Zhang, X. (2007). Laboratory Investigation of Behavior of Foundations on Geosynthetic-Reinforced Clayey Soil. Transportation Research Record. Journal of the Transportation Research Board. 2004(1):28–38. doi:10.3141/2004-04
- [162]. Maheshwari, P., Chandra, S., Basudhar, P. (2004). Response of beams on a tensionless extensible geosynthetic-reinforced earth bed subjected to moving loads. Computers and Geotechnics . 31(7):537–548
- [163]. John W. Bull .(2009). Linear and non-linear numerical analysis of foundations. 1st ed . Taylor & Francis e-Library, CRC Press. London.
- [164]. T.S.Jang,H.S.Baek,andJ.K.Paik.(2011).A new method for the non-linear deflection analysis of an infinite beam resting on a non-linear elastic foundation. International Journal of Non-Linear Mechanics.Vol 46(1): 339–346
- [165]. Yankelevsky, D. Z., Eisenberger, M., & Adin, M. A. (1989). Analysis of beams on nonlinear winkler foundation. Computers & Structures. 31(2):287–292. doi:10.1016/0045-7949(89)90232-0
- [166]. Kuo, Y. H., & Lee, S. Y. (1994). Deflection of nonuniform beams resting on a nonlinear elastic foundation. Computers & Structures. 51(5):513–519. doi:10.1016/0045-7949(94)90058-2
- [167]. Nguyen, T. P., Pham, D. T., & Hoang, P. H. (2016). A New Foundation Model for Dynamic Analysis of Beams on Nonlinear Foundation Subjected to a Moving Mass. Procedia Engineering.142:166–173.doi:10.1016/j.proeng.2016.02.028
- [168]. Li, S., Yang, S., Chen, L. (2013).A nonlinear vehicle-road coupled model for dynamics research.Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 8(2) : 021001
- [169]. Yang, S., Li, S., Lu, Y. (2010). Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement. Vehicle System Dynamics. 48(8) :923–944
- [170]. Brun, M., Movchan, A.B., Slepyan, L.I. (2013). Transition wave in a supported heavy beam. Journal of the Mechanics and Physics of Solids .61(10) :2067–2085
- [171]. Zhou, S., Song, G., Wang, R., Ren, Z., Wen, B. (2017).Nonlinear dynamic analysis for coupled vehicle-bridge vibration system on nonlinear foundation. Mechanical Systems and Signal Processing . 87 :259–278
- [172]. Qin, J., Law, S., Yang, Q., Yang, N. (2013). Pedestrian-bridge dynamic interaction, including human participation. Journal of Sound and Vibration. 332(4) :1107–1124
- [173]. Roos, I. (2009). Human induced vibrations of footbridges: application and comparison of pedestrian load model. In: MS Thesis. Delft University of Technology, Delft, Netherlands

- [174]. Chai, Y.-Y., Song, Z.-G., Li, F.-M. (2017). Investigations on the influences of elastic foundations on the aerothermoelastic flutter and thermal buckling properties of lattice sandwich panels in supersonic airflow. *Acta Astronaut.* 140 :176–189
- [175]. Zan, Y.-F., Yang, C., Han, D.-F., Yuan, L.-H., Li, Z.-G. (2016). A numerical model for pipelaying on nonlinear soil stiffness seabed. *Journal of Hydrodynamics.* 28(1) : 10–22
- [176]. Togun, N., Bağdatlı, S.M. (2016). Nonlinear vibration of a nanobeam on a Pasternak elastic foundation based on nonlocal Euler–Bernoulli beam theory. *Mathematical and Computational Applications.* 21(1) : 3
- [177]. Kazemi-Lari, M.A.; Fazelzadeh, S.A.; Ghavanloo, E.(2012).Non-conservative instability of cantilever carbon nanotubes resting on viscoelastic foundation. *Physica E* 2012.44 :1623–1630
- [178]. Singh, S.J., Harsha, S.P. (2019).Buckling analysis of FGM plates under uniform, linear and non-linear in-plane loading. *Journal of Mechanical Science and Technology.*33 :1761–1767. <https://doi.org/10.1007/s12206-019-0328-8>
- [179]. B. Sidda Reddy, J. Suresh Kumar, C. Eswara Reddy and K. Vijaya Kumar Reddy. (2014). Free vibration behaviour of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. *Journal of Applied Science and Engineering.* Vol. 17, No. 3: pp. 231-241
- [180]. Talha, M., & Singh, B. N. (2010). Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling.*34(12) :3991–4011. doi:10.1016/j.apm.2010.03.034
- [181]. Gulshan Taj, M. N. A., Chakrabarti, A., & Sheikh, A. H. (2013). Analysis of functionally graded plates using higher order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling,* 37(18-19), 8484–8494. doi:10.1016/j.apm.2013.03.058
- [182]. Manish Bhandari, Dr. Kamlesh Purohit.(2014). Analysis of Functionally Graded Material Plate under Transverse Load for Various Boundary Conditions, *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)* e-ISSN: 2278-1684,p-ISSN: 2320-334X, Volume 10, Issue 5 (Jan. 2014) : PP 46-55
- [183]. Abdelbaki, Chikh. (2019).Free Vibration Analysis of Simply Supported P-FGM Nanoplate Using a Nonlocal Four Variables Shear Deformation Plate Theory" *Strojnícky časopis - Journal of Mechanical Engineering.*69(4):9-24. <https://doi.org/10.2478/scjme-2019-0039>
- [184]. Ramin Aghababaei. J.N.Reddy. (2009).Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates , *Journal of Sound and Vibration.*326 : 277–289.

- [185]. I. Mechab, B. Mechab, S. Benaissa.(2013).Static and dynamic analysis of functionally graded plates using four-variable refined plate theory by the new function, *Composites, Part B, Eng.* 45 : 748–757.
- [186]. P. Malekzadeh.(2009). Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations, *Composite Structures* .89 :367–373.
- [187]. M. Hosseini & A. Jamalpoor .(2015). Analytical Solution for Thermomechanical Vibration of Double-Viscoelastic Nanoplate-Systems Made of Functionally Graded Materials, *Journal of Thermal Stresses*. 38(12) :1430-1458.
- [188]. Holm Altenbach, Victor Eremeyev.(2011).Mechanics of Viscoelastic Plates Made of FGMs. Computational Modelling and Advanced Simulations, Springer Netherlands,pp.33-48Computational Methods in Applied Sciences Volume 24. fhal-00826449f
- [189]. Sofiyev, A.H., Zerín, Z. & Kuruoglu, N. (2020).Dynamic behavior of FGM viscoelastic plates resting on elastic foundations. *Acta Mech* .231 :1–17.<https://doi.org/10.1007/s00707-019-02502-y>
- [190]. Zhang, N.-H., & Wang, M.-L. (2007). Thermoviscoelastic deformations of functionally graded thin plates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 26(5) :872–886. doi:10.1016/j.euromechsol.2007.03.002
- [191]. Karličić, D., Kozić, P., Pavlović, R.(2014). Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium, *Composite Structures*.
- [192]. G. Ahmadi.(1975). Linear theory of non-local viscoelasticity. *International Journal of Nonlinear Mechanics*.10(6):253–258.
- [193]. J.C.Liu, Y.Q.Zhanga, L.F.Fan.(2017).Nonlocal vibration and biaxial buckling of double-viscoelastic-FGM-nanoplate system with viscoelastic Pasternak medium in between, *Physics Letters .A*.
- [194]. S. Poursmaeeli, E. Ghavanloo, S.A. Fazelzadeh. (2013). Vibration analysis of viscoelastic orthotropic nanoplates resting on viscoelastic medium, *Composite Structures* .96 :405–410.
- [195]. Lei, Y., Murmub, T., Adhikari, S., Friswell, M.I. (2013). Dynamic characteristics of damped viscoelastic nonlocal Euler-Bernoulli beams. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 42 :125–136
- [196]. Ansari, R., Oskouie, M.F., Sadeghi, F., Bazdid-Vahdati, M.(2015). Free vibration of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams using the nonlocal elasticity theory. *Phys. E*. 74 :318–327 .

- [197]. M. Hosseini & A. Jamalpoor .(2015).Analytical Solution for Thermomechanical Vibration of Double-Viscoelastic Nanoplate-Systems Made of Functionally Graded Materials. *Journal of Thermal Stresses*.38(12) :1430-1458
- [198]. Hamzi S., Mechab I., Senhadji Y. (2018).Non Local Vibration of Damped Viscoelastic—FGM-Beam. In: Abdelbaki B., Safi B., Saidi M. (eds) *Proceedings of the Third International Symposium on Materials and Sustainable Development. SMSD 2017*. Springer, Cham.