الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليـم العالـي والبحـث العلمـي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعـة مصطفـى اسطمبولـي - معسكـر
UNIVERSITE MUSTAPHA STAMBOULI - MASCARA

كليـة العلـوم الدقيقـة
FACULTE DES SCIENCES EXACTES

قســم الرياضيــات
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

الشعبـــة : رياضيــات
Filière: Mathématiques

التخصـص : الهندســة التفاضليـة وتطبيقاتـها
Spécialité : Géométrie Différentielle et Applications

Cours de Module :

Structures de contact

Présenté par : Dr Bouzir Habib

Table des matières

Introduction

Ce polycopié est un cours de Master d'une matière de l'unité fondamentale de troisième semestre de spécialité géométrie différentielle et applications et de filière mathématiques et de domaine mathématiques et informatiques. Ce polycopié est destiné aux étudiants de deuxième année Master géométrie différentielle et applications (LMD). Le contenu de ce polycopié, il a été préparé conformément au programme enseigné. Il est rédigé sous forme de cours détaillés avec des exemples et des exercices résolus et il a été présenté avec un style très simple qui permet aux étudiants une compréhension très rapide.

Ce polycopié qui représente une branche de la géométrie Riemannienne, ce qu'on appelle ***la structure de contact*** *ou la variété de contact. Cette géométrie de contact, elle entretient d'étroits liens avec la géométrie symplectique, la géométrie complexe, la théorie des feuilletages de codimension un et les systèmes dynamiques. Elle est née de l'étude de la thermodynamique et de l'optique géométrique.*

Par ailleurs, la théorie de structure sur les variétés est un sujet intéressant de la géométrie différentielle moderne et les aspects géométriques différentiels des sous-variétés des variétés avec certaines structures qui sont des champs vastes et très fructueux pour la géométrie Riemannienne.
Il est bien connu que pour étudie d'une variété Riemannienne donnée (M, g)*, parfois, il est approprié de plonger certaines structures dans une variété de Riemann connue, puis arrivé à une géométrie induite. Ce travail se situe à l'interface de la géométrie Riemannienne et de la géométrie de contact, exactement dans* ***la géométrie Sasakienne****.*
Ces variétés Sasakiennes ont été introduites en 1960 par le Japonais géomètre Sasaki Shigeo. Il n'y avait pas beaucoup d'activités dans ce domaine après la mi-1970, jusqu'à l'avènement de la théorie des cordes (String theory). Depuis, les variétés Sasakiennes ont gagné en importance dans la physique et la géométrie algébrique, principalement due à une chaine de documents par Boyer, Galicki et leurs co-auteurs.

Ce travail comprend quatre chapitres essentielles :

Le premier chapitre est consacré à l'étude des structures presque de contact et structures de contact sur une variété différentiable M *de dimension impaire et la relations entre eux. Où nous avons présenté, dans ce chapitre, les définitions, les théorèmes, les propriétés et quelques remarques relatives à cette structure, avec aborder les preuves en détails, qui permet aux étudiants une compréhension très large. Nous rappelons aussi quelques structures qui interviendront dans cette étude.*
Puis, nous avons étudié une métrique Riemannienne associe une structure presque de contact, qui nous permet de construit une variété métrique de contact, où nous avons arrivé, qu'une variété de contact avec la forme de contact η *porte une structure métrique presque de contact* (φ, ξ, η, g) *avec* $\Phi = d\eta$*. Cette structure a été mentionnée comme une structure associée ou simplement comme une structure*

métrique de contact. Jusqu'à ce que nous arrivions à déterminer la condition de normalité en terme de tenseur de Nijenhuis de cette structure.
En fin nous avons donné des exemples (exercices) pour comprendre les notions et pour manipuler les différents calculs. Où dans la plupart des cas prenons des exemples de structure de contact sur S^3 *(ou* $\mathbb{R}^3$*) qui est le modèle local de toutes les structures de contact en dimension trois.*

Le deuxième chapitre est consacré à la notion de la variété K*-contact, ce qui représente par une variété métrique de contact avec* ξ *un champ de vecteurs de Killing qui conserve la métrique Riemannienne* g*. Nous présentons les définitions et les propriétés, avec aborder les preuves en détails. ensuite, nous avons traité certains cas particuliers de courbure de Riemann sur une variété* K*-contact. Nous avons discuté aussi pour certains structures liées à la structure presque de contact sur une variété de dimension impaire. Parmi ces structures, structure cosymplectique et Structure coKähler.*

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié la notion de la géométrie Sasakienne où nous avons axé notre étude sur la variété de Sasaki, ce qui représente par une structure métrique de contact normale sur une variété Riemannienne. Nous présentons les définitions, théorèmes et certains propriétés, avec preuves en détails. Nous avons également discuté du rôle important qui ce fait par la courbure de Riemann du variété Sasakienne. Finalement, nous avons arrivé à conclure que la structure Sasakienne, la structure de Kenmotsu et la structure cosymplectique, sont des cas particuliers de structure trans-Sasakienne.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du courbure holomorphique d'une variété Sasakienne. Dans ce chapitre on introduit la notion de courbure φ*-sectionnelle. Cette notion joue un rôle en géométrie Sasakienne comme le joue la courbure sectionnelle holomorphique en géométrie de Kähler, c'est à dire la courbure* φ*-sectionnelle déterminer la courbure Riemannienne de variété de Sasaki, lorsque la courbure* φ*-sectionnelle est constante, cela se reflète dans un théorème important. Puis, nous arrivons à donné la notion d'une variété Sasakienne space forme.*

1 Variétés presque de Contact

1.1 Variétés de contact

La géométrie de contact est la partie de la géométrie différentielle qui étudie les formes et les structures de contact. Elle entretient d'étroits liens avec la géométrie symplectique, la géométrie complexe, la théorie des feuilletages de codimension un et les systèmes dynamiques. La géométrie de contact est née de l'étude de la thermodynamique et de l'optique géométrique. Une structure de contact sur une variété est un champ d'hyperplan, c'est-à-dire la donnée en tout point d'un hyperplan dans l'espace tangent.

Pour plus de détail, voir [1], [2], [3],[22]...

Définition 1

Une variété différentiable M de dimension impair $(2n+1)$ est dite variété de contact si elle existe une 1-forme η globale sur M telle que :

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

On dit que M est une variété de contact munie d'une forme de contact η.

Remarque 1.

En particulier, $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ est un élément de volume de M, de sorte qu'une variété de contact est orientable. Aussi le rang de $d\eta$ est $2n$ sur l'algèbre de Grassmann T_p^*M à chaque point $p \in M$, et donc nous avons un sous-espace de dimension 1, $\{X \in T_pM / d\eta(X, T_pM) = 0\}$, dont $\eta \neq 0$ et qui est complémentaire au sous-espace défini par $\eta = 0$. Par conséquent le choix de ξ_p dans ce sous-espace normalisée par $\eta(\xi_p) = 1$, nous avons un champ de vecteurs globale ξ satisfaisant

$$d\eta(\xi, X) = 0, \qquad \eta(\xi) = 1.$$

ξ est appelé le champ de vecteur caractéristique ou le champ de Reeb de la structure de contact η. Utilisant la dérivée de Lie on obtient immédiatement,

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0, \qquad \mathcal{L}_\xi d\eta = 0.$$

On note $\mathcal{D}$ la distribution de contact ou sous-fibré défini par le sous-espace $\mathcal{D}_p = \{X \in T_pM : \eta(X) = 0\}$. Grosso modo, le sens de la condition $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, est que le sous-fibré de contact est aussi loin d'être *intégrable que possible, en particulier, $\mathcal{D}$ tourne comme un seul mouvement sur la variété. Pour un sous-fibré défini par une 1-forme η d'être intégrable, il faut et il suffit que $\eta \wedge (d\eta)^n \equiv 0$.*

Théorème 1

Soit w une 1-forme sur une variété différentiable M^n et supposons que $w \wedge (dw)^p \neq 0$ et $(dw)^{p+1} \equiv 0$ sur M^n. Ensuite, sur chaque point, il existe un systéme de coordonnées $(x^1, \ldots, x^p, y^1, y^{n-p})$ de telle sorte que $w = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$. Ainsi, sur chaque point d'une variété de contact (M^{2n+1}, η) il existe des coordonnées $(x^i, y^i, z),\ i = 1, \ldots, n$ telle que

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i. \tag{1.1}$$

Exemples 1.

- $\mathbb{R}^3$ *est une variété de contact, munie d'une forme de contact :*

$$\eta = dz + \frac{1}{2}(xdy - ydx)$$

avec (x, y, z) système de coordonnées sur $\mathbb{R}^3$.

- $\mathbb{R}^{2n+1}$ *est une variété de contact, munie d'une forme de contact :*

$$w = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

avec $(x^i, y^i, z) \quad i = 1, ..., n$ système de coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.

- T^3 *est une variété de contact, munie d'une forme de contact :*

$$\eta = coszdx + sinzdy$$

avec (x, y, z) système de coordonnées sur T^3.

- *La variété M^3 munie d'une 1-forme $\eta = (x + y)dx$, n'est pas une variété de contact, avec (x, y, z) système de coordonnées sur M^3.*

1.2 Variétés presque de contact

Définition 1

Soit M une variété différentiable de dimension impaire $(2n+1)$.
On appelle structure presque de contact sur M la donnée d'un triplet (η, ξ, φ) tel que :

1. φ un champ de tenseur de type $(1,1)$
2. ξ un champ de vecteurs
3. η une 1-forme sur M

vérifiant les conditions suivantes

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi,$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Définition 2

Une variété de dimension $(2n+1)$ munie d'une structure presque de contact (φ, ξ, η) est une variéte presque de contact.

Exemples 2.

$(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta)$ est une variété presque de contact, dans les cas suivantes :

1) $\xi = \partial y, \quad \eta = dy, \quad \varphi\partial x = -\partial z, \quad \varphi\partial y = 0, \quad \varphi\partial z = \partial x,$

2) $\xi = \partial x, \quad \eta = dx, \quad \varphi\partial x = 0, \quad \varphi\partial y = \partial z, \quad \varphi\partial z = -\partial y,$

3) $\xi = -\partial z, \quad \eta = -dz, \quad \varphi\partial x = -\partial y, \quad \varphi\partial y = \partial x, \quad \varphi\partial z = 0,$

avec $\{\partial x, \partial y, \partial z\}$ une base local et (x, y, z) système de coordonnées sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1

Soit (φ, ξ, η) une structure presque de contact ,alors on a les propriétés suivantes :

1. $\varphi\xi = 0$
2. $\eta \circ \varphi = 0$
3. $rang\varphi = 2n$.

Preuve .

1- On a

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi.$$

remplacent X par ξ, on trouve :

$$\varphi^2\xi = -\xi + \eta(\xi)\xi = 0 = \varphi(\varphi\xi)$$

Ce qui implique : $\varphi\xi = 0$ ou $\varphi\xi$ est un vecteur propre de φ qui correspond à la valeur 0.
Raisonnement par absurde :
Supposons que $\varphi\xi \neq 0$ on trouve

$$0 = \varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi$$

c'est-à-dire :

$$\eta(\varphi\xi)\xi = \varphi\xi$$

Donc :

$$\eta(\varphi\xi)\xi \neq 0$$

et :

$$\eta(\varphi\xi)\varphi\xi = \varphi^2\xi = 0$$

Contradiction, avec le fait que $\eta(\varphi\xi) \neq 0$ et $\varphi\xi \neq 0$,
donc

$$\varphi\xi = 0$$

2- Maintenant prenant $\varphi\xi = 0$,

$$\begin{aligned}
\eta(\varphi X)\xi &= \varphi^3 X + \varphi X \\
&= \varphi(\varphi^2 X) + \varphi X \\
&= \varphi\big(-X + \eta(X)\xi\big) + \varphi X \\
&= \eta(X)\varphi\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(\varphi X)\xi = 0 &\implies \eta(\varphi X) = 0 \\
&\implies \eta \circ \varphi = 0
\end{aligned}$$

3- On a $\varphi\xi = 0$, $\xi \neq 0$, φ non injective, d'où $rang(\varphi) < 2n+1$.

Supposons qu'il existe $\overline{\xi}$ tel que $\varphi\overline{\xi} = 0$

alors remplacer X par $\overline{\xi}$ dans $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$,

on trouve

$$0 = \varphi^2\overline{\xi} = -\overline{\xi} + \eta(\overline{\xi})\xi \Longrightarrow \overline{\xi} = \eta(\overline{\xi})\xi$$

$\overline{\xi}$ est proportionnel par rapport à ξ

donc $dimker\varphi = 1$, et puis $rang\varphi = dim(Im\varphi) = (2n+1) - 1$ alors on a

$$rang\varphi = 2n$$

■

Exercice 1. *(TD)*

Soit (M^{2n}, J) une variété presque complexe.

Montrer que $\big(M^{2n} \times \mathbb{R}, (\varphi, \xi, \eta)\big)$ est une variété presque de contact, telle que :

$$\eta := dt \equiv (0, dt) \qquad \xi := \partial t \equiv (0, \partial t) \qquad \varphi(X, f\partial t) := (JX, 0)$$

avec $t \in \mathbb{R}$, $\quad f \in C^\infty(M^{2n} \times \mathbb{R})$ et $X \in \Gamma(TM)$.

1.3 Variétés métriques presque de contact

1.3.1 Métrique Riemannienne associée à une structure presque de contact

Théorème 1

Toute variété presque de contact (M, φ, ξ, η) admet une métrique Riemannienne g telle que,

$$g(X, \xi) = \eta(X), \qquad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Preuve . Soit (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact.

Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on pose

$$g(X, Y) = h\big(X - \eta(X)\xi, Y - \eta(Y)\xi\big) + \eta(X) \cdot \eta(Y)$$

où h est une métrique Riemannienne sur M^{2n+1}

On remplace Y par ξ on aura

$$\begin{aligned} g(X,\xi) &= h\big(X-\eta(X)\xi, \xi-\eta(\xi)\xi\big)+\eta(X)\cdot\eta(\xi) \\ &= h\big(X-\eta(X)\xi, 0\big)+\eta(X) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

■

Proposition 1

Toute variété presque de contact (M,φ,ξ,η) admet une métrique Riemannienne g telle que,

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y), \qquad \forall X,Y\in\Gamma(TM). \tag{1.2}$$

et g dans ce cas dite compatible avec la structure.

Preuve .

Soit h une application définie pour tous $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ par
$h(X,Y)=h'(\varphi^2X,\varphi^2Y)+\eta(X)\eta(Y)$
où h' est une métrique Riemannienne sur M^{2n+1}
Alors, on a :

$$\begin{aligned} h(\xi,X) &= h'(\varphi^2\xi,\varphi^2X)+\eta(\xi)\eta(X) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

on défini g par

$$g(X,Y)=\frac{1}{2}\big(h(X,Y)+h(\varphi X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)\big).$$

Donc g est une métrique Riemannienne et :

$$\begin{aligned} g(\varphi X,\varphi Y) &= \frac{1}{2}\Big(h(\varphi X,\varphi Y)+h\big(-X+\eta(X)\xi,-Y+\eta(Y)\xi\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(h(\varphi X,\varphi Y)+h(X,Y)-2\eta(X)\eta(Y)+\eta(X)\eta(Y)\big) \\ &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

■

Exercice 2.

Soit (M,φ,ξ,η) une variété presque de contact,
et g une métrique Riemannienne sur M.
Monter que pour $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$, on a : $\quad g(X,\varphi Y)+g(\varphi X,Y)=0.$

Vérification :

D'après la définition on obtient,

$$\begin{aligned} g(\varphi x, \varphi^2 Y) &= g(\varphi X, -Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -g(\varphi X, Y) + \eta(Y) g(\varphi X, \xi) \\ &= -g(\varphi X, Y) + \eta(Y)\eta(\varphi X) \\ &= -g(\varphi X, Y). \end{aligned}$$

Or,

$$g(\varphi x, \varphi^2 Y) = g(X, \varphi Y) - \eta(X)\eta(\varphi Y) = g(X, \varphi Y)$$

implique,

$$g(X, \varphi Y) = -g(\varphi X, Y)$$

1.3.2 Variétés métriques presque de contact

Définition 1

On appelle une variété métrique presque de contact toute variété presque de contact (M, φ, ξ, η) munie d'une métrique Riemannienne g compatible avec la structure presque de contact (φ, ξ, η).

Remarques 1.

1) *Dans ce cas une variété métrique presque de contact est notée par* $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$.

2) *Une variété métrique presque de contact* $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *admet une base orthonormé de* $T_x M$ *de type* $\{X_i, \varphi X_i, \xi\}_{i=1}^{n}$*, appelée* $\varphi-$*base.*

Exercice 3. *(TD)*

Montrer que $(\mathbb{R}^3, (\varphi, \xi, \eta, g))$ *est une variété métrique presque de contact, telle que :*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\big(dz - y\, dx\big), \quad et \quad \xi = 2\,\partial z$$

avec $\{\partial x, \partial y, \partial z\}$ *une base local et* (x, y, z) *système de coordonnées sur* $\mathbb{R}^3$.

Définition 2

Pour chaque structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) sur M on définit la 2-forme fondamental Φ par,

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Exercice 4. *(TD)*

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact, avec Φ la 2-forme fondamental de cette structure.

- Vérifier les propriétés suivantes :

1) $\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X)$, *c.a.d, Φ est anti-symétrique.*

2) $\Phi(\varphi X, \varphi Y) = \Phi(X, Y)$, *c.a.d, Φ est invariante à φ.*

Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposition 2

Soit M^{2n+1} une variété différentiable munie d'une 1-forme différentielle globale η et d'un 2-forme différentielle globale Φ sur M telle que :

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0$$

alors M^{2n+1} admet une structure presque de contact.

De plus, si M^{2n+1} est une variété de contact avec la forme de contact η, alors il existe une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) telle que la 2-forme fondamentale Φ est définie par,

$$\Phi = d\eta.$$

c.a.d,

$$g(X, \varphi Y) = \Phi(X, Y) = d\eta(X, Y) := \frac{1}{2}\Big(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\Big)$$

pour tout X, Y $\in \Gamma(TM)$.

Remarque 2.

*Une structure métrique presque de contact construite à partir d'une forme de contact η (c.a.d, $\Phi = d\eta$), cette structure est appelée **structure métrique de contact**, et une variété munie d'une telle structure est une variété métrique de contact.*

Exercice 5. *(TD)*

On considère une variété Riemannienne (S^3, g) *telle que* g *le produit scalaire.*
Avec l'utilisation d'une paramétrisation nous posons :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & cos^2\alpha\, cos^2\beta \end{pmatrix} \qquad avec\ (\alpha, \beta, \gamma)\ des\ coordonnes\ sur\ S^3.$$

Nous pouvons définir une 1-forme η *comme suit :*

$$\eta = sin\beta\, d\alpha - cos\alpha\, sin\alpha\, cos\beta\, d\beta + cos^2\alpha\, cos^2\beta\, d\gamma$$

1- Nous montrons que (S^3, η) *est une variété de contact :*
Après des calcules simple, on trouve :

$$d\eta = -2cos\beta\, cos^2\alpha\, d\alpha \wedge d\beta - 2\, cos\alpha\, sin\alpha\, cos^2\beta\, d\alpha \wedge d\gamma - 2cos\beta\, sin\beta\, cos^2\alpha\, d\beta \wedge d\gamma$$

puis, on obtient,

$$\eta \wedge d\eta = -2cos^2\alpha\, cos\beta\, d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \;\neq 0$$

Donc, (S^3, η) *est une variété de contact.*

2- Maintenant, nous allons construire une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) *sur* S^3 *:*

Calculons le champ de vecteur ξ*, nous posons :*

$$\xi = \xi_1 \partial_\alpha + \xi_2 \partial_\beta + \xi_3 \partial_\gamma$$

et sachons que $g(X, \xi) = \eta(X)$ *on peut avoir*

$$\xi = \begin{pmatrix} \sin\beta \\ -\tan\alpha\cos\beta \\ 1 \end{pmatrix}$$

et nous pouvons facilement voir que $\eta\,(\xi) = 1$

Calculons maintenant l'endomorphisme φ, nous avons

$$\begin{cases} g\left(X, \varphi Y\right) & = & d\eta\left(X, Y\right) \\ 2d\eta(X,Y) & = & X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \end{cases}$$

c.à.d.

$$g(X, \varphi Y) = \frac{1}{2}\big(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\big)$$

localement l'équation précédente donne,

$$\varphi_j^k = \frac{1}{2} g^{ki}\Big(\partial_i\big(\eta(\partial_j)\big) - \partial_i\big(\eta(\partial_j)\big)\Big)$$

d'où la matrice associé à φ est donnée par

$$(\varphi_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 0 & -\cos^2\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta \\ \cos\beta & 0 & -\cos\beta\sin\beta \\ \tan\alpha & \tan\beta & 0 \end{pmatrix},$$

ou par l'utilisation des opérations sur les matrices, nous utilisons $g.\varphi = d\eta$.
et on peut vérifier que

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

Suivant la base locale $\{\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma\}$, nous pouvons vérifier que :

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y).$$

Donc, $(S^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété métrique de contact.

1.4 Déformation du structure presque de contact

1.4.1 Déformation $\mathcal{D}$-homothetique de Tanno

En géométrie classique (Euclidien), une homothétie est une application ponctuelle caractérisée par un point invariant appelé centre et un réel appelé rapport. Par l'homothétie de centre O et de rapport k, le point M est transformé en un point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$.

En d'autres termes, l'homothétie laisse O fixe et envoie le point M sur un point M' situé sur la droite (OM) par un agrandissement ou une réduction de rapport k. L'homothétie correspond donc à un changement d'échelle des figures, c'est à dire L'**homothétie** est une **transformation** géométrique qui permet d'agrandir ou de réduire une figure selon un rapport d'homothétie k et un centre O.

En 1968, Tanno [20] a introduit une notion dite **déformation $\mathcal{D}$-homothétique** ou déformation $2n$-homothétique sur les structures métrique de contact (φ, ξ, η, g) où $\mathcal{D}$ est la distribution définie par $\eta = 0$.
Cette déformation donnée par la proposition suivante [20] :

Proposition 1

Soit (φ, ξ, η, g) une structure métrique de contact et a une constante strictement positive, posons la déformation suivante :

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = a\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \overline{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta, \tag{1.3}$$

alors $(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ est aussi une structure métrique de contact.
Dans ce $\overline{g}$ appelé métrique $\mathcal{D}$-homothétique.

Preuve . (Exercice de TD)
Puisque (φ, ξ, η, g) est une structure métrique de contact, alors on obtient :

$$\eta(\xi) = 1, \qquad \varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi,$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \qquad d\eta(X, Y) = \Phi(X, Y)$$

pour $\quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$.
D'où, 1.

$$\begin{aligned} \overline{\eta}(\overline{\xi}) &= \eta(\xi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}^2(X) &= \varphi^2(X) \\
&= -X + \eta(X)\xi \\
&= -X + \frac{1}{a}\overline{\eta}(X).a\overline{\xi} \\
&= -X + \overline{\eta}(X)\overline{\xi}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\overline{g}(\overline{\varphi}X, \overline{\varphi}Y) &= \overline{g}(\varphi X, \varphi Y) \\
&= ag(\varphi X, \varphi Y) \\
&= ag(X, Y) - a\eta(X)\eta(Y) \\
&= \overline{g}(X, Y) - a(a-1)\eta(X)\eta(Y) - a\eta(X)\eta(Y) \\
&= \overline{g}(X, Y) - a^2\eta(X)\eta(Y) \\
&= \overline{g}(X, Y) - \overline{\eta}(X)\overline{\eta}(Y)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
d\overline{\eta}(X, Y) &= ad\eta(X, Y) \\
&= a\Phi(X, Y) \\
&= ag(X, \varphi Y) \\
&= ag(X, \overline{\varphi}Y) \\
&= \overline{g}(X, \overline{\varphi}Y) \\
&= \overline{\phi}(X, Y).
\end{aligned}$$

Donc, $(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ est une structure métrique de contact. ■

Remarques 2.

1. Posons,

$$\mathcal{D} := \{X \in \Gamma(TM) \;/\; \eta(X) = 0\}$$

alors, pour $\forall X \in \mathcal{D}$*, on a,*

$$\begin{aligned}
\overline{g}(X, X) &= ag(X, X) + a(a-1)\eta(X)\eta(X) \\
&= ag(X, X)
\end{aligned}$$

c.a.d,

$$\overline{|X|} = \sqrt{a}|X|$$

tandis que,

$$\begin{aligned}
\overline{|\xi|}^2 &= \overline{g}(\xi,\xi) \\
&= a\overline{g}(\xi,\xi) + a(a-1)\eta(\xi)\eta(\xi) \\
&= a|\xi|^2 + a(a-1) \\
&= a + a(a-1) \\
&= a^2
\end{aligned}$$

c.a.d,

$$\overline{|\xi|} = a|\xi|$$

pour cette raison, on dit que cette transformation est appelle déformation $\mathcal{D}$-homothétique ou déformation $2n$-homothétique.

2. La déformation de Tanno reste valable pour les structures métrique presque de contact.

1.5 Variété presque de contact normale

Définition 1

Soit M^{2n+1} une variété presque de contact munie d'une structure presque de contact (φ, ξ, η). On définit le tenseur de Nijenhuis N_φ (Normalisateur) de φ par :

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y]$$

Pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Remarque 3.

Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ une variété presque de contact et $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ la variété produit où $(X, f\frac{\partial}{\partial t})$ un champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$ tel que X un champ de vecteurs sur M, f une fonction sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ et t système de coordonnée sur $\mathbb{R}$.
On définit sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ une structure presque complexe J par,

$$J(X, f\frac{\partial}{\partial t}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{\partial}{\partial t})$$

Vérification :

Montrons que J est une structure presque complexe, ie : $J^2 = -I$?

on a

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J\left(J(X, f\frac{\partial}{\partial t})\right) \\
&= J\left(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&= \left(\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \varphi(f\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\varphi X) - \eta(f\xi))\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - f\varphi(\xi) - \eta(X)\xi, -f\eta(\xi)\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&= \left(\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -f\frac{\partial}{\partial t}\right)
\end{aligned}$$

On sait que

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi \Rightarrow -X = \varphi^2 X - \eta(X)\xi$$

donc

$$\begin{aligned} J^2(X, f\frac{\partial}{\partial t}) &= \left(-X, -f\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ &= -\left(X, f\frac{\partial}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$J^2 = -I$$

Définition 2

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ une variété presque de contact.
On considère la variété presque complexe $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ munie d'une structure presque complexe J telle que :

$$J(X, f\frac{\partial}{\partial t}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{\partial}{\partial t})$$

avec $f \in C^\infty(M^{2n+1} \times \mathbb{R})$.
Alors, si J est intégrable (ie, $N_J = 0$), on dit que (φ, ξ, η) est une structure presque de contact **normale**.

Remarque 4.

On va exprimer la condition de normalité en termes de N_φ le tenseur de Nijenhuis de φ avec :

$$N_\varphi(X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y]$$

Puisque N_J est un tenseur de type $(1, 2)$ (anti-symétrique), alors il suffit de calculer $N_J\left((X, 0), (Y, 0)\right)$ *et* $N_J\left((X, 0), \left(0, \frac{\partial}{\partial t}\right)\right)$, *pour* $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$
Rappelons que : $[(X, f\frac{\partial}{\partial t}), (Y, g\frac{\partial}{\partial t})] = \left([X, Y], (Xg - Yf)\frac{\partial}{\partial t}\right)$, *avec* $f, g \in C^\infty(M)$.

On trouve :

$$
\begin{aligned}
N_J\left((X,0),(Y,0)\right) &= J^2\left[(X,0),(Y,0)\right]+\left[J(X,0),J(Y,0)\right] \\
&\quad -J\left[(X,0),J(Y,0)\right]-J\left[J(X,0),(Y,0)\right] \\
&= \begin{pmatrix} -\left([X,Y],0\right)+\left([\varphi X,\varphi Y],(\varphi X\eta(Y)-\varphi Y\eta(X))\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \\ -\left(\varphi\left([X,\varphi Y]\right)-X\eta(Y)\xi,\eta([X,\varphi Y])\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \\ -\left(\varphi\left([\varphi X,Y]\right)+Y\eta(X)\xi,\eta([\varphi X,Y])\frac{\partial}{\partial t}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi\left([X,\varphi Y]\right) \\ \\ -\varphi\left([\varphi X,Y]\right)+\left(X\eta(Y)-Y\eta(X)\right)\xi, \\ \\ \left(\varphi X\eta(Y)-\varphi Y\eta(X)-\eta([X,\varphi Y])-\eta([\varphi X,Y])\right)\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi\left([X,\varphi Y]\right) \\ \\ -\varphi\left([\varphi X,Y]\right)+\left(2d\eta(X,Y)+\eta([X,Y])\right)\xi, \\ \\ \left(\varphi X\eta(Y)-\eta([\varphi X,Y])-\varphi Y\eta(X)-\eta([X,\varphi Y])\right)\frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \\
&= \left(N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y),(\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta(Y)-\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta(X))\frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&= \left(N^1(X,Y),N^2(X,Y)\right).
\end{aligned}
$$

On a utiliser les propriétés suivantes :

$$d\eta(X,Y)=\frac{1}{2}\{X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\}$$

$$(\mathfrak{L}_X\eta)Y=X(\eta(Y))-\eta([X,Y])$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
N_J\left((X,0),\left(0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) &= J^2\left[(X,0),\left(0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]+\left[J(X,0),J\left(0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\\
&\quad -J\left[(X,0),J\left(0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]-J\left[J(X,0),\left(0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\\
&= -(0,0)+\left[\left(\varphi X,\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\right),(-\xi,0)\right]-J\left[\left(\varphi X,\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\right),\left(0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\\
&\quad -J\left[(X,0),(-\xi,0)\right]\\
&= \left(-[\varphi X,\xi],\xi\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\right)-J\left(-[X,\xi],0\right)-J(0,0)\\
&= \left([\xi,\varphi X],\xi\eta(X)\frac{\partial}{\partial t}\right)-\left(\varphi([\xi,X]),\eta([\xi,X])\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&= \left([\xi,\varphi X]-\varphi([\xi,X]),(\xi\eta(X)-\eta([\xi,X]))\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&= \left((\mathfrak{L}_\xi\varphi)X,(\mathfrak{L}_\xi\eta)X\frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&= \left(N^{(3)}(X),N^{(4)}(X)\right),
\end{aligned}$$

parce que, on sait que :

$$(\mathfrak{L}_X\varphi)Y := [X,\varphi Y]-\varphi([X,Y]), \qquad (\mathfrak{L}_X\eta)Y := X(\eta(Y))-\eta([X,Y])$$

d'où, on obtient :

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(X,Y) &:= N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi\\
&= N_\varphi(X,Y)+X\eta(Y)\xi-Y\eta(X)\xi-\eta([X,Y])\xi\\
N^{(2)}(X,Y) &:= (\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)Y-(\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)X\\
&= \varphi X\eta(Y)-\eta([\varphi X,Y])-\varphi Y\eta(X)+\eta([\varphi Y,X])\\
N^{(3)}(X) &:= (\mathfrak{L}_\xi\varphi)X\\
&= [\xi,\varphi X]-\varphi([\xi,X])\\
N^{(4)}(X) &:= (\mathfrak{L}_\xi\eta)X\\
&= \xi\eta(X)-\eta([\xi,X])
\end{aligned}$$

Donc : *La structure métrique presque de contact* (φ,ξ,η,g) *est* ***normale*** *si*

$$N^{(1)}=N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0.$$

Lemme 1

Soit (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact, si $N^{(1)} = 0$ alors,

$$N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$$

Preuve . (Exercice de TD)

On a $\quad N^{(1)}(X,Y) := N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$

posons $Y = \xi$,

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(X,\xi) &= N_\varphi(X,\xi) + 2d\eta(X,\xi)\xi \\
&= \varphi^2[X,\xi] + [\varphi X, \varphi\xi] - \varphi[\varphi X, \xi] - \varphi[X, \varphi\xi] + X\eta(\xi)\xi - (\xi\eta(X))\xi - \eta([X,\xi])\xi \\
&= -[X,\xi] + \eta([X,\xi])\xi - \varphi[\varphi X, \xi] - (\xi\eta(X))\xi - \eta([X,\xi])\xi \\
&= -[X,\xi] - \varphi[\varphi X, \xi] - (\xi\eta(X))\xi \\
&= [\xi, X] + \varphi[\xi, \varphi X] - (\xi\eta(X))\xi \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc,

$$[\xi, X] + \varphi[\xi, \varphi X] - (\xi\eta(X))\xi = 0 \tag{1.4}$$

En appliquant η à (1.4), on obtient :

$$\eta([\xi, X]) - (\xi\eta(X)) = 0 \tag{1.5}$$

ce qui donne :

$$(\mathfrak{L}_\xi \eta)X = 0 \qquad c.a.d \qquad N^{(4)} = 0$$

Dans (1.5), remplaçons X par φX, on obtient :

$$\eta([\xi, \varphi X]) = 0 \tag{1.6}$$

En appliquant φ à (1.4) et utilisant (1.6), on obtient :

$$\varphi[\xi, X] + \varphi^2[\xi, \varphi X] = 0$$

$$\varphi[\xi, X] - [\xi, \varphi X] = 0$$

$$[\xi, \varphi X] - \varphi[\xi, X] = 0$$

ce qui donne :

$$(\mathfrak{L}_\xi\varphi)X = 0 \qquad c.a.d \qquad N^{(3)} = 0$$

Finalement, dans l'expression de $N^{(1)}(X,Y) = 0$, on remplaçons Y par φY, on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= N^{(1)}(X,\varphi Y)\\
&= N_\varphi(X,\varphi Y) + 2d\eta(X,\varphi Y)\xi\\
&= \varphi^2[X,\varphi Y] + [\varphi X,\varphi^2 Y] - \varphi[\varphi X,\varphi Y] - \varphi[X,\varphi^2 Y] + X\eta(\varphi Y)\xi - (\varphi Y\eta(X))\xi - \eta([X,\varphi Y])\xi\\
&= -[X,\varphi Y] + \eta([X,\varphi Y])\xi + [\varphi X,-Y] + [\varphi X,\eta(Y)\xi] - \varphi[\varphi X,\varphi Y] + \varphi[X,Y] - \varphi[X,\eta(Y)\xi]\\
&\quad -(\varphi Y\eta(X))\xi - \eta([X,\varphi Y])\xi\\
&= -[X,\varphi Y] - [\varphi X,Y] - \varphi[\varphi X,\varphi Y] + \varphi[X,Y] - \varphi[X,\eta(Y)\xi]\\
&\quad -(\varphi Y\eta(X))\xi + \varphi X\Big(\eta(Y)\Big)\xi + \eta(Y)\ [\varphi X,\xi] \qquad ....(*)
\end{aligned}$$

car, ona

$$\begin{aligned}
[\varphi X,\eta(Y)\xi] &= \varphi X\Big(\eta(Y)\xi\Big) - \eta(Y)\xi\Big(\varphi X\Big)\\
&= \varphi X\Big(\eta(Y)\Big)\xi + \eta(Y)\ \varphi X\Big(\xi\Big) - \eta(Y)\ \xi\Big(\varphi X\Big)\\
&= \varphi X\Big(\eta(Y)\Big)\xi + \eta(Y)\ [\varphi X,\xi]
\end{aligned}$$

En appliquant η sur cette dernière formule $(*)$, et utilisant (1.6), on trouve :

$$-\eta[X,\varphi Y] + \eta([Y,\varphi X]) - (\varphi Y\eta(X)) + (\varphi X\eta(Y)) \;=\; 0$$

d'où,

$$((\varphi X\eta(Y)) - \eta([\varphi X,Y])) - ((\varphi Y\eta(X)) - \eta[\varphi Y,X]) \;=\; 0$$

c.a.d,

$$(\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)Y - (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)X = 0 \qquad c.a.d \qquad N^{(2)} = 0$$

■

Finalement, on peut arrivée a la proposition suivante :

Proposition 1

Une variété presque de contact (M,φ,ξ,η) est **normale** si et seulement si

$$N_\varphi + 2d\eta\otimes\xi = 0 \qquad\qquad (c.a.d, \quad N^{(1)} = 0)$$

Exercice 6. *(TD)*

Soit $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ *et* $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
Prenons la paramétrisation suivante :

$$X = \begin{cases} x = cos\alpha \ cos\beta \ cos\gamma \\ y = cos\alpha \ cos\beta \ sin\gamma \\ z = cos\alpha \ sin\beta \\ t = sin\alpha \end{cases}$$

et utilisons le produit scalaire

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial X}{\partial x_j} \right\rangle,$$

nous trouvons la matrice associée à la métrique Riemannienne g

$$(g_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\alpha\cos^2\beta \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons définir la 1-forme η *comme suit :*

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} x^i dy^i - y^i dx^i \Leftrightarrow \eta = xdy - ydx + zdt - tdz.$$

Avec la paramétrisation ci-dessus on a

$$\eta = \left(\sin\beta, -\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta, \cos^2\alpha\cos^2\beta\right).$$

Remarquer que

$$\eta \wedge d\eta = -2\cos^2\alpha\cos\beta d\alpha \wedge d\beta \wedge d\gamma \neq 0$$

Donc, (S^3, η) *est une variété de contact.*
Maintenant, nous allons construire une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) *sur* S^3 *:*

Calculons le champ de vecteur ξ*, nous posons :*

$$\xi = \xi_1\partial_\alpha + \xi_2\partial_\beta + \xi_3\partial_\gamma$$

et sachons que $g(X,\xi)=\eta(X)$ on peut avoir

$$\xi=\begin{pmatrix}\sin\beta\\ -\tan\alpha\cos\beta\\ 1\end{pmatrix}$$

et nous pouvons facilement voir que $\eta(\xi)=1$

Calculons maintenant l'endomorphisme φ, nous avons

$$\begin{cases} g(X,\varphi Y) &= d\eta(X,Y)\\ 2d\eta(X,Y) &= X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\end{cases}$$

c.à.d.

$$g(X,\varphi Y)=\frac{1}{2}\big(X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\big)$$

localement l'équation précédente donne,

$$\varphi_j^k=\frac{1}{2}g^{ki}\Big(\partial_i\big(\eta(\partial_j)\big)-\partial_i\big(\eta(\partial_j)\big)\Big)$$

d'où la matrice associé à φ est donnée par

$$(\varphi_{ij})_{1\le i,j\le 3}=\begin{pmatrix}0 & -\cos^2\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\alpha\cos^2\beta\\ \cos\beta & 0 & -\cos\beta\sin\beta\\ \tan\alpha & \tan\beta & 0\end{pmatrix},$$

ou par l'utilisation des opérations sur les matrices, nous utilisons $g.\varphi=d\eta$.
et on peut vérifier que

$$\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi.$$

Suivant la base locale $\{\partial_\alpha,\partial_\beta,\partial_\gamma\}$, nous pouvons vérifier que :

$$\eta\circ\varphi=0,\qquad \varphi\xi=0,\qquad g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y).$$

Donc, (S^3,φ,ξ,η,g) est une variété métrique de contact.
Vérifions maintenant que la structure (φ,ξ,η) est normale. on a

$$N(X,Y)=N_\varphi(X,Y)+2d\eta(X,Y)\xi, \tag{1.7}$$

l'expression locale du $N(X,Y)$ *peut s'écrire sous la forme,*

$$N^i_{kj} = \varphi^h_k(\partial_h\varphi^i_j - \partial_j\varphi^i_h) - \varphi^h_j(\partial_h\varphi^i_k - \partial_k\varphi^i_h) + \eta_k(\partial_j\xi^i) - \eta_j(\partial_k\xi^i)$$

et avec des calculs simples on peut vérifier que $N^i_{kj} = 0$ *pour tous* $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.
Ou par l'utilisation du base locale $\{\partial_\alpha, \partial_\beta, \partial_\gamma\}$, *nous pouvons vérifier la formule* (1.7).

Donc, $(S^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété métrique de contact normale.*

Définition 3

Un champ de vecteur ξ est dit un champ de Killing s'il conserve la métrique g, (c.a.d, $\mathfrak{L}_\xi g = 0$).

Remarque 5. *Rappelons que :*

$$\begin{aligned}(\mathfrak{L}_\xi g)(X,Y) &= \xi g(X,Y) - g(\mathfrak{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathfrak{L}_\xi Y)\\ &= \xi g(X,Y) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y])\end{aligned}$$

Proposition 2

Si M une variété métrique de contact, alors $N^{(2)} = 0$ et $N^{(4)} = 0$.
De plus, ξ est un champ de Killing par rapport à g si et seulement si $N^{(3)} = 0$.

Preuve .

On a $d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\}$.

$$\begin{aligned}d\eta(\varphi X, \varphi Y) &= g(\varphi X, \varphi^2 Y)\\ &= g(\varphi X, -Y) + g(\varphi X, \eta(Y)\xi)\\ &= -g(\varphi X, Y) + \eta(Y) g(\varphi X, \xi)\\ &= -g(\varphi X, Y) + \eta(Y)\eta(\varphi X)\\ &= g(X, \varphi Y)\\ &= \Phi(X,Y)\\ &= d\eta(X,Y)\end{aligned}$$

Donc, $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X,Y)$.
A partir de ce résultat, on obtient,

$$\begin{aligned}d\eta(\varphi X, Y) &= d\eta(\varphi^2 X, \varphi Y)\\ &= -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X) d\eta(\xi, \varphi Y)\\ &= -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X) d\eta(\varphi\xi, \varphi^2 Y)\\ &= -d\eta(X, \varphi Y)\end{aligned}$$

d'où, $d\eta(\varphi X, Y) + d\eta(X, \varphi Y) = 0$......................(*)

$$\begin{array}{rcl} (*) \implies \quad 0 &=& \frac{1}{2}\{\varphi X\eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) - \varphi Y\eta(X) - \eta([X, \varphi Y])\} \\ 0 &=& \varphi X\eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) - \varphi Y\eta(X) - \eta([X, \varphi Y]) \\ 0 &=& (\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)\,Y - (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)\,X \\ 0 &=& N^{(2)}(X). \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& g(X, \varphi\xi) \\ 0 &=& d\eta(X, \xi) \\ 0 &=& \frac{1}{2}\{X\eta(\xi) - \xi\eta(X) - \eta([X, \xi])\} \\ 0 &=& \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) \\ 0 &=& (\mathfrak{L}_\xi\eta)X \\ 0 &=& N^{(4)}(X) \end{array}$$

De plus, ξ un champ de Killing par rapport à g si $\mathfrak{L}_\xi g = 0$.

On va montrer que : $(\mathfrak{L}_\xi\varphi)X = 0 \iff \mathfrak{L}_\xi g = 0$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} (\mathfrak{L}_\xi d\eta)(X, Y) &=& \xi d\eta(X, y) - d\eta([\xi, X], Y) - d\eta(X, [\xi, Y]) \\ &=& \frac{1}{2}\xi\{X\eta Y - Y\eta X - \eta([X, Y])\} - \frac{1}{2}\{[\xi, X]\eta Y - Y\eta([\xi, X]) - \eta([[\xi, X], Y])\} \\ && -\frac{1}{2}\{X\eta([\xi, Y]) - [\xi, Y]\eta X - \eta([X, [\xi, Y]])\} \\ &=& \frac{1}{2}\{[\xi, X]\eta Y + X\xi\eta Y - [\xi, Y]\eta X - Y\xi\eta X - \xi\eta([X, Y]) - [\xi, X]\eta Y + Y\eta([\xi, X]) \\ && +\eta([\xi, X], Y) - X\eta([\xi, Y]) + [\xi, Y]\eta X + \eta([X, [\xi, Y]])\} \\ &=& X((\mathfrak{L}_\xi\eta)Y - Y((\mathfrak{L}_\xi\eta)X - \xi\eta([X, Y]) + \eta([[\xi, X], Y]) + \eta([X, [\xi, Y]]) \\ &=& \eta([X, [\xi, Y]]) + \eta([[\xi, X], Y]) - \xi\eta([X, Y]) \\ &=& \eta([\xi, [X, Y]]) - \xi\eta([X, Y]) \\ &=& -((\mathfrak{L}_\xi\eta)[X, Y] \\ &=& 0. \qquad\qquad (car\ N^{(4)} = 0) \end{array}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathfrak{L}_\xi d\eta)(X,Y)\\
0 &= \xi d\eta(X,y) - d\eta([\xi,X],Y) - d\eta(X,[\xi,Y])\\
0 &= \xi g(X,\varphi Y) - g([\xi,X],\varphi Y) - g(X,\varphi[\xi,Y])\\
0 &= \xi g(X,\varphi Y) - g([\xi,X],\varphi Y) - g(X,[\xi,\varphi Y]) - g(X,\varphi[\xi,Y]) + g(X,[\xi,\varphi Y])\\
0 &= (\mathfrak{L}_\xi g)(X,\varphi Y) + g(X,(\mathfrak{L}_\xi \varphi)Y)\\
0 &= (\mathfrak{L}_\xi g)(X,\varphi Y) + g(X,N^{(3)}(Y)).
\end{aligned}$$

Donc,

$$N^{(3)} \equiv 0 \iff \mathfrak{L}_\xi g = 0$$

Et

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_\xi g)(X,\xi) &= \xi g(X,\xi) - g([\xi,X],\xi)\\
&= \xi\eta(X) - \eta([\xi,X])\\
&= (\mathfrak{L}_\xi \eta)X\\
&= 0.
\end{aligned}$$

∎

Lemme 2

Pour une structure métrique presque de contact (φ,ξ,η,g), la dérivée covariante de φ est donnée par,

$$\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) + g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\
&+ N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y) \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

avec, Φ la 2-forme fondamentale de la structure.

Preuve .

Rappelons que la connexion Riemannienne ∇ de g est donnée par la formule de Koszul suivante :

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y)\\
&+g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)
\end{aligned}$$

et que l'application de d sur la 2-forme Φ est donnée par :

$$\begin{aligned} d\Phi(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\big(X\Phi(Y,Z)+Y\Phi(Z,X)+Z\Phi(X,Y)\\ &\quad -\Phi([X,Y],Z)-\Phi([Z,X],Y)-\Phi([Y,Z],X)\big). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 2g(\nabla_X\varphi Y,Z)+2g(\nabla_X Y,\varphi Z)\\ &= Xg(\varphi Y,Z)+\varphi Y g(X,Z)-Zg(X,\varphi Y)\\ &\quad +g([X,\varphi Y],Z)+g([Z,X],\varphi Y)-g([\varphi Y,Z],X)\\ &\quad +Xg(Y,\varphi Z)+Yg(X,\varphi Z)-\varphi Z g(X,Y)\\ &\quad +g([X,Y],\varphi Z)+g([\varphi Z,X],Y)-g([Y,\varphi Z],X)\\ &= -X\Phi(Y,Z)+\varphi Y\Big(\Phi(\varphi Z,X)+\eta(Z)\eta(X)\Big)-Z\Phi(X,Y)\\ &\quad -\Phi([X,\varphi Y],\varphi Z)+\eta([X,\varphi Y])\eta(Z)\\ &\quad +\Phi([Z,X],Y)-g(\varphi[\varphi Y,Z],\varphi X)+\eta(X)\eta([Z,\varphi Y])\\ &\quad +X\Phi(\varphi Y,\varphi Z)-Y\Phi(Z,X)-\varphi Z\Big(\Phi(\varphi Y,X)\\ &\quad +\eta(Y)\eta(X)\Big)+\Phi([X,Y],Z)-\Phi([\varphi Z,X],\varphi Y)\\ &\quad +\eta([\varphi Z,X])\eta(Y)-g(\varphi[Y,\varphi Z],\varphi X)+\eta(X)\eta([\varphi Z,Y])\\ &\quad +\{\Phi([Y,Z],X)-g([Y,Z],\varphi X)\}............(1)\\ &\quad +\{\Phi([\varphi Y,\varphi Z],X)-g([\varphi Y,\varphi Z],\varphi X)\}.........(2)\\ &\quad +\{g(2d\eta(Y,Z)\xi,\varphi X)\}................(3) \end{aligned}$$

sachant que

$$\begin{aligned} 2d\eta(\varphi Y,X) &= \varphi Y\big(\eta(X)\big)-X\big(\eta(\varphi Y)\big)-\eta\big([\varphi Y,X]\big)\\ N^{(1)}(Y,Z) &= N_\varphi(Y,Z)+2d\eta(Y,Z)\xi\\ &= \varphi^2[Y,Z]+[\varphi Y,\varphi Z]-\varphi([Y,\varphi Z])-\varphi([\varphi Y,Z])+2d\eta(Y,Z)\xi\\ N^{(2)}(Y,Z) &= (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)Z-(\mathfrak{L}_{\varphi Z}\eta)Y\\ &= -\eta([Y,\varphi Z])+\varphi Y\eta(Z)-\eta([\varphi Y,Z])-\varphi Z\eta(Y)\\ \Phi(\varphi X,\varphi Y) &= \Phi(X,Y)\\ g(\varphi X,\varphi Y) &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

et, on a ajouté les formules (1), (2) et (3) par ce que sont nulles.

Finalement, nous obtenons le résultat finale :

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z)-3d\Phi(X,Y,Z)+g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)\\ &\quad +N^{(2)}(Y,Z)\eta(X)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y).\end{aligned}$$

∎

Lemme 3

Si (M,φ,ξ,η,g) est une variété métrique de contact, avec $\Phi = d\eta$ et $N^2 = 0$, alors nous avons :

$$2g\big((\nabla_X\varphi)Y,Z\big) = g\big(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\big)+2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z)-2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y).$$

Particulièrement, nous avons : $\nabla_\xi\varphi = 0.$

Preuve .

La première equation est trivial (utiliser l'équation (2.1) du Lemme (2) précédente).
Nous démontrons que $\nabla_X\varphi = 0$, d'aprés $N^2 = 0$, nous avons $d\eta(X,\xi) = 0$,
alors la première equation implique que $\nabla_X\varphi = 0$. ∎

Exercice 7.

Soit (φ,ξ,η,g) *une structure métrique presque de contact, montrer que :*

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(g(Y,\nabla_X\xi)-g(X,\nabla_Y\xi)\Big)$$

pour $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$

Comme ∇ est une connexion compatible avec la métrique Riemannienne g, alors on obtient,

$$\begin{aligned}d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\Big(X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(Xg(\xi,Y)-Yg(\xi,X)-g(\xi,[X,Y])\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(g(\nabla_X\xi,Y)+g(\xi,\nabla_XY)-g(\nabla_Y\xi,X)-g(\xi,\nabla_YX)-g(\xi,\nabla_XY)+g(\xi,\nabla_YX)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(g(\nabla_X\xi,Y)-g(\nabla_Y\xi,X)\Big)\end{aligned}$$

2.1 Variétés $K-$contact

Définition 1

Soit $(M^{2n+1}, (\varphi, \xi, \eta, g))$ une variété métrique de contact.
Si ξ est un champ de Killing par rapport à g (c.a.d, $\mathfrak{L}_\xi g = 0$),
alors la structure (φ, ξ, η, g) sur M^{2n+1} est dite **structure** $K-$**contact**,
et M^{2n+1} dite **variété** $K-$**contact**.

Proposition 1

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique de contact.
Alors, M est une variété $K-$contact si et seulement si $N^{(3)} \equiv 0$.

Preuve .

Preuve est claire, voir la proposition (2) précédente. ■

Proposition 2

Soit $(M, (\varphi, \xi, \eta, g))$ une variété métrique de contact, alors on a,

$$M \text{ est } K-\text{contact} \iff \nabla_X \xi = -\varphi X, \qquad pour\ \forall X \in \Gamma(TM)$$
où ∇ la connexion Riemannienne de g.

les références que nous avons utilisé, ([6] , p 220) et [22].

Preuve .

$$\begin{aligned}
g(-\varphi X,Y) &= g(X,\varphi Y)\\
&= d\eta(X,Y)\\
&= \frac{1}{2}\{X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\}\\
&= \frac{1}{2}\{Xg(Y,\xi)-Yg(X,\xi)-g([X,Y],\xi)\}\\
&= \frac{1}{2}\{g(\nabla_X Y,\xi)+g(Y,\nabla_X\xi)-g(\nabla_Y X,\xi)-g(X,\nabla_Y\xi)-g([X,Y],\xi)\}\\
&= \frac{1}{2}\{g\Big(\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],\ \ \xi\Big)+g(Y,\nabla_X\xi)-g(X,\nabla_Y\xi)\}\\
&= \frac{1}{2}\{g(Y,\nabla_X\xi)-g(X,\nabla_Y\xi)\}\\
&= \frac{1}{2}\{g(Y,\nabla_X\xi)+g(Y,\nabla_X\xi)\} \qquad\qquad d'aprs\ (*)\\
&= g(\nabla_X\xi,Y)
\end{aligned}$$

parce que, M est $K-$contact (ie, $(\mathfrak{L}_\xi g)(X,Y)=0$ (ξ Killing))

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathfrak{L}_\xi g)(X,Y)\\
0 &= \xi g(X,Y)-g([\xi,X],Y)-g(X,[\xi,Y])\\
0 &= g(\nabla_\xi X,Y)+g(X,\nabla_\xi Y)-g(\nabla_\xi X,Y)+g(\nabla_X\xi,Y)-g(X,\nabla_\xi Y)+g(X,\nabla_Y\xi)\\
0 &= g(\nabla_X\xi,Y)+g(\nabla_Y\xi,X)...............(*)
\end{aligned}$$

donc,

$$\nabla_X\xi=-\varphi X, \qquad\qquad pour\ \ \forall X\in\Gamma(TM)$$

Inverse est existe, parce que puisque $\nabla_X\xi=-\varphi X$ et φ est semi-symétrique et $\nabla g=0$, alors,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_\xi g)(X,Y) &= \xi g(X,Y)-g([\xi,X],Y)-g(X,[\xi,Y])\\
&= g(\nabla_\xi X,Y)+g(X,\nabla_\xi Y)-g(\nabla_\xi X,Y)+g(\nabla_X\xi,Y)-g(X,\nabla_\xi Y)+g(X,\nabla_Y\xi)\\
&= g(\nabla_X\xi,Y)+g(\nabla_Y\xi,X)\\
&= g(-\varphi(X),Y)+g(-\varphi(Y),X)\\
&= g(X,\varphi(Y))-g(\varphi(Y),X)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

d'où, ξ est un champs de Killing.

Donc, M est une variété $K-$contact. ∎

Théorème 1

Soit $(M,(\varphi,\xi,\eta,g))$ une variété $K-$contact, alors, la courbure sectionnelle de toute section plane contenant ξ est égale à 1.

Preuve .

Soit X un champ de vecteurs unitaire orthogonal à ξ et R le tenseur de courbure de g (ie, $g(X,\xi)=0=\eta(X)$ et $\|X\|^2=1=g(X,X)$), et P le plan du base $\{X,\xi\}$.

Alors, on sait que : $$K(P)=\frac{g(R(X,\xi)\xi,X)}{g(X,X).g(\xi,\xi)-g(X,\xi)^2}=g(R(X,\xi)\xi,X)$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
R(X,\xi)\xi &= \nabla_X\nabla_\xi\xi-\nabla_\xi\nabla_X\xi-\nabla_{[X,\xi]}\xi\\
&= 0-\nabla_\xi(-\varphi X)-\varphi(-[X,\xi]) \qquad car\;\; \nabla_\xi\xi=0,\;\; \nabla_X\xi=-\varphi X\\
&= \nabla_\xi(\varphi X)+\varphi(\nabla_X\xi-\nabla_\xi X)\\
&= \nabla_\xi(\varphi X)+\varphi(-\varphi X)-\varphi\nabla_\xi X\\
&= -\varphi^2X \qquad car\;\; (\nabla_\xi\varphi)X=0=\nabla_\xi(\varphi X)-\varphi\nabla_\xi X\\
&= X-\eta(X)\xi\\
&= X-g(X,\xi)\xi\\
&= X.
\end{aligned}$$

Donc, $\quad K(P)=g(R(X,\xi)\xi,X)=g(X,X)=1.$ ∎

Lemme 2

Pour une structure métrique de contact (φ,ξ,η,g) sur M^{2n+1}, nous avons :

$$R(X,\xi)Y=\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_XY}\xi-\Big(\mathfrak{L}_\xi\nabla\Big)_X^Y$$

telle que, $\quad \Big(\mathfrak{L}_\xi\nabla\Big)_X^Y=\mathfrak{L}_\xi\nabla_XY-\nabla_{\mathfrak{L}_\xi X}Y-\nabla_X\mathfrak{L}_\xi Y$

Preuve .

$$\begin{aligned}
R(X,\xi)Y &= \nabla_X\nabla_\xi Y - \nabla_\xi\nabla_X Y - \nabla_{[X,\xi]}Y \\
&= \nabla_X\Big(\nabla_Y\xi + [\xi,Y]\Big) - \nabla_{\nabla_X Y}\xi - [\xi,\nabla_X Y] - \nabla_{[X,\xi]}Y \\
&= \nabla_X\nabla_Y\xi + \nabla_X[\xi,Y] - \nabla_{\nabla_X Y}\xi - [\xi,\nabla_X Y] - \nabla_{[X,\xi]}Y \\
&= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi - \Big([\xi,\nabla_X Y] - \nabla_{[\xi,X]}Y - \nabla_X[\xi,Y]\Big) \\
&= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi - \Big(\mathfrak{L}_\xi\nabla_X Y - \nabla_{\mathfrak{L}_\xi X}Y - \nabla_X\mathfrak{L}_\xi Y\Big) \\
&= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi - \Big(\mathfrak{L}_\xi\nabla\Big)_X^Y
\end{aligned}$$

■

Proposition 3

Soit M^{2n+1} une variété Riemannienne admettant un champ de vecteurs de Killing unitaire ξ tel que $R(X,\xi)\xi = X$, pour tout champs de vecteur X orthogonal à ξ, alors M^{2n+1} est une variété K-contact.

Preuve .

On définit une 1-forme η et le champ de tenseurs φ de type $(1,1)$ par :
$\eta(X) = g(X,\xi)$ et $\varphi X = -\nabla_X\xi$ ....$(*)$
Comme ξ est un champ de vecteurs de Killing, $\nabla_\xi\xi = 0$ et donc $\varphi\xi = 0$.
Encore puisque ξ est de Killing, (ie, $\Big(\mathfrak{L}_\xi\nabla\Big)_X^Y = 0$), on a
$R(X,\xi)Y = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi$ ....(I)
et donc pour tout champ de vecteurs X orthogonal à ξ, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi^2 X &= -\varphi(\nabla_X\xi) \\
&= \nabla_{\nabla_X\xi}\xi && de\ (*) \\
&= -R(X,\xi)\xi + \nabla_X\nabla_\xi\xi && de\ (I)\ et\ y=\xi \\
&= -R(X,\xi)\xi \\
&= -X
\end{aligned}$$

par conséquent, $\varphi^2 = -I + \eta\otimes\xi$ parce que $\eta(X) = g(X,\xi) = 0$ qui signifie, $\eta(X)\xi = 0$.
et d'autre pat, $\eta(\xi) = g(\xi,\xi) = 1$, et g compatible avec la structure,
$g(\varphi X,\varphi Y) = -g(X,\varphi^2 Y) = -g(X,-Y+\eta(Y)\xi) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$.
Donc, $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une variété métrique presque de contact.

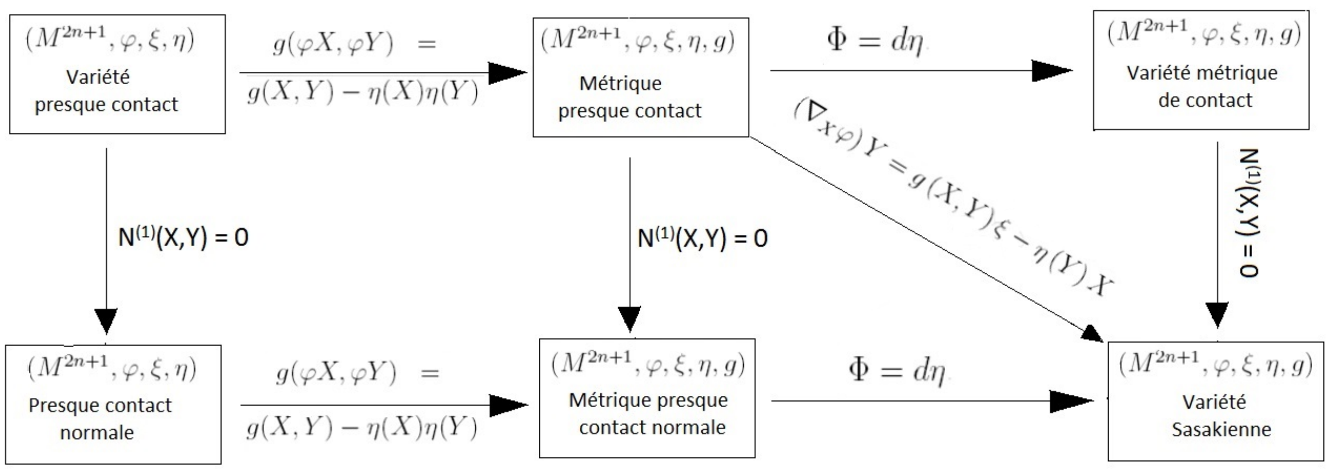
De plus,

$$\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}\Big(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(Xg(\xi,Y) - Yg(\xi,X) - g(\xi,[X,Y])\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(g(\nabla_X\xi,Y) + g(\xi,\nabla_X Y) - g(\nabla_Y\xi,X) - g(\xi,\nabla_Y X) - g(\xi,\nabla_X Y) + g(\xi,\nabla_Y X)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(g(\nabla_X\xi,Y) - g(\nabla_Y\xi,X)\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(-g(\nabla_Y\xi,X) - g(\nabla_Y\xi,X)\Big) \qquad\qquad car\ \xi\ Killing\\
&= -g(\nabla_Y\xi,X)\\
&= g(X,\varphi Y)\\
&= \Phi(X,Y).
\end{aligned}$$

Donc, $\quad d\eta = \Phi.$

Alors, $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ est une variété K-contact.

$\blacksquare$



2.1.1 Plan de déférents pesages entre les structures que nous avons vus.

2.2 Quelques structures liées à la structure presque de contact :

2.2.1 Structure cosymplectique :

Les variétés cosymplectiques ont été introduits par Libermann (voir [12], [13], [7]).

Définition 1

Une **structure presque cosymplectique** sur une variété M de dimension impaire $2n+1$ est une paire (η, ω), où η est une 1-forme et ω est une 2-forme telle que $\eta \wedge \omega^n \neq 0$ (i.e. forme de volume) sur M. Cette structure est dite **cosymplectique** si η et ω sont fermés.

Si (η, ω) est une structure presque cosymplectique sur M, le triple (M, η, ω) est considéré comme une variété presque cosymplectique.

2.2.2 Structure coKähler :

Historiquement, les variétés coKähler ont été définies par Blair dans [1], [7] et [18].

Définition 2

Une variété **presque coKähler** est une variété métrique presque contact $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ de telle sorte que la 2-forme fondamentale ω et la 1-forme η sont fermés (i.e. $d\omega = 0$ et $d\eta = 0$).
Si, en plus, la structure presque contact est *normale*, on dit que M est une variété **coKähler**.

Remarque 6.
Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact métrique et ω la 2-forme fondamentale.
On peut distinguer les classes suivantes, on dit que :

- *M est cosymplectique si $d\omega = d\eta = 0$ (i.e, ω et η sont fermées),*
- *M est coKähler si elle est normale et cosymplectique.*

Théorème 1

Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact de dimension $(2n+1)$ et ∇ la connexion de Levi-Cevita sur M. Alors on a :

$$M \;\; est \;\; coKahler \Longleftrightarrow \;\; pour\ tous \;\; X, Y \in \mathfrak{X}(M) : (\nabla_X \varphi)Y = 0$$

Preuve .

Supposons que M une variété coKähler $\big($i.e. $d\Phi = 0, d\eta = 0$, et (φ, ξ, η) est normale$\big)$

$$\begin{aligned}(\varphi, \xi, \eta) \;\; est \;\; normale \;\; &\Longrightarrow \;\; N^{(1)} = 0 \\ &\Longrightarrow \;\; N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0\end{aligned}$$

suivant le lemme (2), pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ on a,

$$\begin{aligned}2g\big((\nabla_X\varphi)Y, Z\big) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &\quad + g\big(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X\big) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

donc

$$(\nabla_X\varphi)Y = 0$$

Pour l'inverse, supposons $(\nabla_X\varphi)Y = 0$ on a,

$$\begin{aligned}3d\Phi(X, Y, Z) &= X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) + Z\Phi(X, Y) - \Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) - \Phi([Y, Z], X) \\ &= g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, \nabla_X\varphi Z) + g(\nabla_Y Z, \varphi X) + g(Z, \nabla_Y\varphi X) + g(\nabla_Z X, \varphi Y) \\ &\quad + g(X, \nabla_Z\varphi Y) - g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \varphi Z) - g(\nabla_Z X - \nabla_X Z, \varphi Y) \\ &\quad - g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, \varphi X) \\ &= 0\end{aligned}$$

alors $d\Phi = 0$
et $[\varphi, \varphi](X, Y) = 0 \Longrightarrow N^{(1)}(X, Y) = 2d\eta(X, Y)\xi$
Maintenant

$$\begin{aligned}N^{(2)}(Y, \xi) &= (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)(\xi) \\ &= -\eta\big([\varphi Y, \xi]\big) \\ &= -g(\xi, \nabla_{\varphi Y}\xi - \nabla_\xi\varphi Y) \\ &= g(\xi, \varphi\nabla_\xi Y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

dans le lemme (2) posons $Z = \xi$, on obtient $d\eta(\varphi Y, X) = 0, \quad \forall X, Y$
d'où $d\eta = 0$ i.e. $N^{(1)} = 0$ donc M est coKähler. ∎

Proposition 1

Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété coKähler.
Alors pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, on a : $(\nabla_X \omega)(Y, Z) = 0$.
où ω 2-forme fondamentale.

Preuve . On a

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \omega)(Y, Z) &= X\omega(Y, Z) - \omega(\nabla_X Y, Z) - \omega(Y, \nabla_X Z) \\
&= Xg(Y, \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi \nabla_X Z) \\
&= g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, \nabla_X \varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi \nabla_X Z) \\
&= g\big(Y, (\nabla_X \varphi) Z\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

d'ou

$$(\nabla_X \omega)(Y, Z) = 0.$$

∎

Exemple 1.

$(\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \eta, \xi, \phi)$ *est une variété cosymplectique, telle que,*

$$\eta = dz, \qquad \xi = \partial z, \qquad \Phi = 2dx \wedge dy.$$

3.1 Variété Sasakienne

Dans cette section on donne une définition importante, à savoir celle d'une variété Sasakienne. On a vu qu'une variété de contact avec la forme de contact η porte une structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) avec $\Phi = d\eta$. Cette structure a été mentionnée comme une structure associée ou simplement comme une structure métrique de contact (voir [3]).

Définition 1

Soient (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est une variété de **Sasaki** ou **Sasakienne** si $\Phi = d\eta$ et la triplet (φ, ξ, η) est normale.

Définition 2

Si une structure métrique de contact (φ, ξ, η, g) est normale, on l'appelle métrique de contact normale ou structure Sasakienne.

Théorème 1

Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variéré métrique presque de contact.
M est une variété de Sasaki si et seulement si

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y) \xi - \eta(Y) X$$

pour tous champs de vecteurs $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.
c.a.d, $\quad (\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y) \xi - \eta(Y) X = g(X, Y) \xi - g(Y, \xi) X := (\xi \wedge X)Y.$

Preuve . Exercice (TD).

$(\Longrightarrow)$ Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Sasaki alors

$$\Phi = d\eta, \qquad N^{(1)} = 0, \qquad N^2 = 0$$

Utilisant le lemme (2) précédente avec $\Phi = d\eta$ on a

$$\begin{aligned} 2g\big((\nabla_X \varphi)Y, Z\big) &= g\big(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X\big) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ \Longleftrightarrow g\big((\nabla_X \varphi)Y, Z\big) &= d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \qquad car \quad N^{(1)} = 0 \end{aligned}$$

puisque

$$d\eta\left(X,Y\right)=g\left(X,\varphi Y\right)$$

alors

$$\begin{aligned}
g\left(\left(\nabla_X\varphi\right)Y,Z\right) &= g(\varphi Y,\varphi X)\eta(Z)-g(\varphi Z,\varphi X)\eta(Y)\\
&= g(Y,X)\eta(Z)-g(X,Z)\eta(Y)\\
&= g\big(g(Y,X)\xi,Z\big)-g\big(\eta(Y)X,Z\big)\\
&= g\big(g(Y,X)\xi-\eta(Y)X,Z\big)
\end{aligned}$$

d'ou

$$\left(\nabla_X\varphi\right)Y=g\left(X,Y\right)\xi-\eta\left(Y\right)X$$

($\Longleftarrow$) Soit (φ,ξ,η,g) une structure métrique presque de contact avec

$$\left(\nabla_X\varphi\right)Y=g\left(X,Y\right)\xi-\eta\left(Y\right)X$$

remplacent Y par ξ on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_X\varphi\right)\xi=\eta\left(Y\right)\xi-X &\Longleftrightarrow \nabla_X\varphi\xi-\varphi\nabla_X\xi=\eta\left(Y\right)\xi-X\\
&\Longleftrightarrow -\varphi^2(\nabla_X\xi)=-\varphi X\\
&\Longleftrightarrow \nabla_X\xi-\eta(\nabla_X\xi)\xi=-\varphi X\\
&\Longleftrightarrow \nabla_X\xi-g(\nabla_X\xi,\xi)\xi=-\varphi X\\
&\Longleftrightarrow \nabla_X\xi-\frac{1}{2}(2g(\nabla_X\xi,\xi))\xi=-\varphi X\\
&\Longleftrightarrow \nabla_X\xi-\frac{1}{2}\big(g(\nabla_X\xi,\xi)+g(\nabla_X\xi,\xi)\big)\xi=-\varphi X\\
&\Longleftrightarrow \nabla_X\xi-\frac{1}{2}\big(Xg(\xi,\xi)\big)\xi=-\varphi X\\
&\Longleftrightarrow \nabla_X\xi=-\varphi X.
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
d\eta\,(X,Y) &= \frac{1}{2}\,(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])) \\
&= \frac{1}{2}\,(Xg(Y,\xi) - Yg(X,\xi) - g([X,Y],\xi)) \\
&= \frac{1}{2}\,(g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X \xi) - g(\nabla_Y X,\xi) - g(X,\nabla_Y \xi) - g(\nabla_X Y,\xi) + g(\nabla_Y X,\xi)) \\
&= \frac{1}{2}\,(g\,(\nabla_X \xi, Y) - g\,(\nabla_Y \xi, X)) \\
&= \frac{1}{2}\,(g\,(-\varphi X, Y) - g\,(-\varphi Y, X)) \\
&= \frac{1}{2}\,(g\,(X, \varphi Y) + g\,(\varphi Y, X)) \\
&= g(X,\varphi Y) \\
&= \phi(X,Y).
\end{aligned}$$

Donc (φ,ξ,η,g) est une structure métrique de contact.

et on sait que

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X,Y) &= \varphi^2[X,Y] + [\varphi X,\varphi Y] - \varphi[\varphi X,Y] - \varphi[X,\varphi Y] \\
&= \varphi^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (\nabla_{\varphi X}\varphi Y - \nabla_{\varphi Y}\varphi X) \\
&\quad -\varphi(\nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y \varphi X) - \varphi(\nabla_X \varphi Y - \nabla_{\varphi Y} X) \\
&= \varphi^2(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y + \varphi\nabla_{\varphi X} Y - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X - \varphi\nabla_{\varphi Y} X \\
&\quad -\varphi\nabla_{\varphi X} Y + \varphi(\nabla_Y\varphi)X + \varphi^2\nabla_Y X - \varphi(\nabla_X\varphi)Y - \varphi^2(\nabla_X Y) + \varphi\nabla_{\varphi Y} X \\
&= (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X + \varphi(\nabla_Y\varphi)X - \varphi(\nabla_X\varphi)Y \\
&= g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X - g(\varphi Y,X)\xi + \eta(X)\varphi Y \\
&\quad +\varphi g(Y,X)\xi - \varphi\eta(X)Y - \varphi g(X,Y)\xi + \varphi\eta(Y)X \\
&= -2g(X,\varphi Y)\xi \\
&= -2d\eta\,(X,Y)\,\xi
\end{aligned}$$

donc

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi\,(X,Y) + 2d\eta\,(X,Y)\,\xi = 0$$

Alors la structure (φ,ξ,η,g) est de Sasaki. ■

Exercice 8.

Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété métrique de contact.

Montrer que si M est une variété de Sasaki alors M est une variété K-contact.

Vérification :

Puisque M est une variété de Sasaki, nous avons :

$(\nabla_X\varphi)\,Y = \nabla_X\varphi(Y) - \varphi\nabla_X Y = g\,(X,Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,X$

En remplace Y par ξ, on trouve :

$(\nabla_X\varphi)\xi = \nabla_X\varphi(\xi) - \varphi\nabla_X\xi = -\varphi\nabla_X\xi$

et d'autre part, $\quad (\nabla_X\varphi)\xi = g\,(X,\xi)\,\xi - \eta\,(\xi)\,X = \eta(X)\xi - X$

d'où,

$\Longrightarrow \quad -\varphi\nabla_X\xi = \eta(X)\xi - X$

$\Longrightarrow \quad -\varphi^2(\nabla_X\xi) = \eta(X)\varphi(\xi) - \varphi(X) = -\varphi(X)$..........(1)

$\Longrightarrow \quad -\varphi^2(\nabla_X\xi) = \nabla_X\xi - \eta(\nabla_X\xi)\xi = \nabla_X\xi$............(2)

parce que, $\quad \eta(\nabla_X\xi) = g(\nabla_X\xi,\xi) = \frac{1}{2}X(g(\xi,\xi)) = \frac{1}{2}X(1) = 0$

d'aprés (1) et (2), on obtient,

$$\nabla_X\xi = -\varphi(X)$$

Donc, $\quad M$ est une variété K-contact.

Exercice 9.

Soit (M,φ,η,ξ,g) est une variété de Sasaki.

Montrer que :

(1) $\quad \nabla_\xi\varphi = 0$

(2) $\quad \nabla_\xi\varphi X = \varphi(\nabla_\xi X)$

(3) $\quad \nabla_\xi\xi = 0$

(4) $\quad \mathcal{L}_\xi\eta = 0$

3.2 Courbure d'une variété de Sasaki

les références que nous avons utilisé [22] et [2].

Proposition 1

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété Sasakienne, nous avons les propriétés suivantes :

(1) $R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$

(2) $R(X,\xi)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi$

(3) $S(X,\xi) = 2n\,\eta(X)$

pour $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, où S la courbure de Ricci.

Preuve . (Exercices TD)

1.

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\
&= \nabla_X(-\varphi Y) - \nabla_Y(-\varphi X) + \varphi([X,Y]) \\
&= -\nabla_X(\varphi Y) + \nabla_Y(\varphi X) + \varphi(\nabla_X Y) - \varphi(\nabla_Y X) \\
&= \nabla_Y\varphi X - \varphi(\nabla_Y X) - \nabla_X\varphi Y + \varphi(\nabla_X Y) \\
&= (\nabla_Y\varphi)X - (\nabla_X\varphi)Y \\
&= g(X,Y)\xi - \eta(X)Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \\
&= \eta(Y)X - \eta(X)Y
\end{aligned}$$

Donc, $R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y.$

2.

$$\begin{aligned}
g(R(X,\xi)Y,Z) &= g(R(Y,Z)X,\xi) \\
&= -g(R(Y,Z)\xi,X) \\
&= -g(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z, X) \\
\\
&= -\eta(Z)g(Y,X) + \eta(Y)g(Z,X) \\
&= -g\Big(g(Y,X)\xi, Z\Big) + g\Big(\eta(Y)X, Z\Big) \\
&= g\Big(-g(Y,X)\xi + \eta(Y)X, Z\Big)
\end{aligned}$$

Donc, $R(X,\xi)Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi.$

3.

$$\begin{aligned}
S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(R(X,e_i)e_i,\xi)\\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i,X)\xi,e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} g\Big(\eta(X)e_i - \eta(e_i)X, e_i\Big) \qquad\qquad du\ (1)\\
&= \sum_{i=1}^{2n+1} \eta(X)g(e_i,e_i) - \eta(e_i)g(X,e_i)\\
&= \eta(X)(2n+1) - \eta(X) \qquad\qquad (II)\\
&= 2n\ \eta(X)
\end{aligned}$$

parce que,

$\eta(e_i)g(X,e_i) = g(e_i,\xi)g(X^j e_j, e_i) = g(e_j,\xi)X^j g(e_j,e_j) = g(X^j e_j,\xi) = g(X,\xi) = \eta(X)$..............(II)

■

Proposition 2

Sur une variété Sasakienne, pour un champ de vecteurs unitaire X orthogonale à ξ, nous avons :

$$R(X,\xi)X = -\xi$$

Preuve .

Puisque X un champ de vecteurs unitaire orthogonale à ξ, alors $g(X,X)=1$ et $g(X,\xi)=0$, d'où :

$$\begin{aligned}
g(R(X,\xi)X,Y) &= -g(R(X,Y)\xi,X)\\
&= -g(\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_Y\nabla_X\xi-\nabla_{[X,Y]}\xi,\quad X)\\
&= -g(\nabla_X(-\varphi Y)-\nabla_Y(-\varphi X)+\varphi([X,Y]),\quad X)\\
&= -g(-\varphi\nabla_X Y-(\nabla_X\varphi)Y+(\nabla_Y\varphi)X+\varphi\nabla_Y X+\varphi\nabla_X Y-\varphi\nabla_Y X,\quad X)\\
&= g((\nabla_X\varphi)Y-(\nabla_Y\varphi)X,\quad X)\\
&= g(g(X,Y)\xi-\eta(Y)X-g(Y,X)\xi+\eta(X)Y,\quad X)\\
&= -g(\eta(Y)X-\eta(X)Y,\quad X)\\
&= -g(\eta(Y)X-g(X,\xi)Y,\quad X)\\
&= -\eta(Y)g(X,X)\\
&= -\eta(Y)\\
&= g(-\xi,Y)
\end{aligned}$$

Donc, $\qquad R(X,\xi)X=-\xi.$

■

Théorème 1

Soit M^{2n+1} une variété Riemannienne, admettent un champs de Killing unitaire ξ, de telle sorte que, $R(X,\xi)Y=\eta(Y)X-g(X,Y)\xi$, alors M^{2n+1} est une variété de Sasaki.

Preuve .

Comme ξ un champs de Killing, alors M est une variété K-contact,
et $\left(\mathfrak{L}_\xi\nabla\right)_X^Y := \mathfrak{L}_\xi\nabla_X Y-\nabla_{\mathfrak{L}_\xi X}Y-\nabla_X\mathfrak{L}_\xi Y=0$
d'autre part,

$$\begin{aligned}
R(X,\xi)Y &= \nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_X Y}\xi-\left(\mathfrak{L}_\xi\nabla\right)_X^Y\\
&= \nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_X Y}\xi\\
&= -\nabla_X\varphi Y+\varphi(\nabla_X Y)\\
&= -(\nabla_X\varphi Y-\varphi(\nabla_X Y))\\
&= -(\nabla_X\varphi)Y\text{..........................}(I)
\end{aligned}$$

et nous avons, $\qquad R(X,\xi)Y=\eta(Y)X-g(X,Y)\xi$ ....(II)
d'aprés, (I) et (II), nous obtenons :

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

Donc, M^{2n+1} est une variété de Sasaki. ■

Lemme 2

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété Sasakienne, alors nous avons,

$$R(X,Y)\varphi Z = \varphi R(X,Y)Z + g(\varphi X, Z)Y - g(Y,Z)\varphi X + g(X,Z)\varphi Y - g(\varphi Y, Z)X$$

pour $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Preuve .

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\varphi Z &= \nabla_X\nabla_Y\varphi Z - \nabla_Y\nabla_X\varphi Z - \nabla_{[X,Y]}\varphi Z \\
&= \nabla_X\Big((\nabla_Y\varphi)Z + \varphi\nabla_Y Z\Big) - \nabla_Y\Big((\nabla_X\varphi)Z + \varphi\nabla_X Z\Big) - \Big((\nabla_{[X,Y]}\varphi)Z - \varphi\nabla_{[X,Y]}Z\Big) \\
&= \nabla_X\Big(g(Y,Z)\xi - \eta(Z)Y + \varphi\nabla_Y Z\Big) - \nabla_Y\Big(g(X,Z)\xi - \eta(Z)X \\
&\quad +\varphi\nabla_X Z\Big) - \Big(g([X,Y],Z)\xi - \eta(Z)[X,Y] + \varphi\nabla_{[X,Y]}Z\Big) \\
&= -g(Y,Z)\varphi X + (\nabla_X g(Y,Z))\xi - (\nabla_X\eta(Z))Y - \eta(Z)\nabla_X Y + (\nabla_X\varphi)\nabla_Y Z + \varphi\nabla_X\nabla_Y Z \\
&\quad +g(X,Z)\varphi Y - (\nabla_Y g(X,Z))\xi + (\nabla_Y\eta(Z))X + \eta(Z)\nabla_Y X \\
&\quad -(\nabla_Y\varphi)\nabla_X Z - \varphi\nabla_Y\nabla_X Z - g([X,Y],Z)\xi + \eta(Z)[X,Y] - \varphi\nabla_{[X,Y]}Z \\
&= g(X,Z)\varphi Y + (\nabla_X g(Y,Z))\xi - g(Y,Z)\varphi X - (\nabla_Y g(X,Z))\xi \\
&\quad +\varphi R(X,Y)Z - (\nabla_X\eta(Z))Y + g(X,\nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_Y Z)X \\
&\quad +(\nabla_Y\eta(Z))X - g(Y,\nabla_X Z)\xi + \eta(\nabla_X Z)Y - g(\nabla_X Y, Z)\xi + g(\nabla_Y X, Z)\xi \\
&= g(X,Z)\varphi Y + (\nabla_X g(Y,Z))\xi - g(Y,Z)\varphi X - (\nabla_Y g(X,Z))\xi \\
&\quad +\varphi R(X,Y)Z - \Big(\nabla_X\eta(Z) - \eta(\nabla_X Z)\Big)Y + \Big(\nabla_Y\eta(Z) - \eta(\nabla_Y Z)\Big)X \\
&\quad +\Big(g(X,\nabla_Y Z) + g(\nabla_Y X, Z)\Big)\xi - \Big(g(\nabla_X Y, Z) + g(Y,\nabla_X Z)\Big)\xi \\
&= g(X,Z)\varphi Y - g(Y,Z)\varphi X + \varphi R(X,Y)Z - \Big((\nabla_X\eta)Z \\
&\quad +\eta(\nabla_X Z) - \eta(\nabla_X Z)\Big)Y + \Big((\nabla_Y\eta)Z + \eta(\nabla_Y Z) - \eta(\nabla_Y Z)\Big)X \\
&= g(X,Z)\varphi Y - g(Y,Z)\varphi X + \varphi R(X,Y)Z - \Big((\nabla_X\eta)Z\Big)Y + \Big((\nabla_Y\eta)Z\Big)X \\
&= g(X,Z)\varphi Y - g(Y,Z)\varphi X + \varphi R(X,Y)Z - g(\nabla_X\xi, Z)Y + g(\nabla_Y\xi, Z)X \qquad du\ (*) \\
&= g(X,Z)\varphi Y - g(Y,Z)\varphi X + \varphi R(X,Y)Z + g(\varphi X, Z)Y + g(\varphi Y, Z)X
\end{aligned}$$

d'où,

$$R(X,Y)\varphi Z = \varphi R(X,Y)Z + g(\varphi X,Z)Y - g(Y,Z)\varphi X + g(X,Z)\varphi Y - g(\varphi Y,Z)X.$$

Vérification $(*)$:

$$\begin{aligned}(\nabla_X\eta)Y &= \nabla_X\eta(Y) - \eta(\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X g(Y,\xi) - g(\nabla_X Y,\xi)\\ &= g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X\xi) - g(\nabla_X Y,\xi)\\ &= g(Y,\nabla_X\xi)\\ &= -g(Y,\varphi X) \qquad \textit{car Sasaki} \Rightarrow K-\textit{contact}.\end{aligned}$$

■

Lemme 3

Soit $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété Sasakienne, alors nous avons,

$$R(X,Y)Z = -\varphi R(X,Y)\varphi Z + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - g(\varphi Y,Z)\varphi X + g(\varphi X,Z)\varphi Y$$

pour $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$.

Preuve .

D'après le Lemme précédente, nous avons :

$$R(X,Y)\varphi Z = \varphi R(X,Y)Z + g(\varphi X,Z)Y - g(Y,Z)\varphi X + g(X,Z)\varphi Y - g(\varphi Y,Z)X$$

En applique φ sur cette formule, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\varphi R(X,Y)\varphi Z &= \varphi^2 R(X,Y)Z + g(\varphi X,Z)\varphi Y - g(Y,Z)\varphi^2 X + g(X,Z)\varphi^2 Y - g(\varphi Y,Z)\varphi X\\ &= -R(X,Y)Z + \eta(R(X,Y)Z)\xi + g(\varphi X,Z)\varphi Y + g(Y,Z)X - g(Y,Z)\eta(X)\xi\\ &\quad -g(X,Z)Y + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(\varphi Y,Z)\varphi X\\ &= -R(X,Y)Z + g(\varphi X,Z)\varphi Y + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - g(\varphi Y,Z)\varphi X\\ &\quad +\eta(R(X,Y)Z)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi + g(X,Z)\eta(Y)\xi\\ &= -R(X,Y)Z + g(\varphi X,Z)\varphi Y + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - g(\varphi Y,Z)\varphi X \qquad du\ (I)\end{aligned}$$

Vérification (I) :

$$\begin{aligned}\eta(R(X,Y)Z)\xi &= g(R(X,Y)Z,\xi)\\ &= g(R(Z,\xi)X,Y)\\ &= g(g(\xi,X)Z-g(X,Z)\xi,Y)\\ &= g(\xi,X)g(Z,Y)-g(X,Z)g(\xi,Y)\\ &= g(Z,Y)\eta(X)-g(X,Z)\eta(Y)\end{aligned}$$

Donc,

$$R(X,Y)Z=-\varphi R(X,Y)\varphi Z+g(Y,Z)X-g(X,Z)Y-g(\varphi Y,Z)\varphi X+g(\varphi X,Z)\varphi Y.$$

■

Lemme 4

Soit $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété Sasakienne, alors nous avons,

$$\begin{aligned}g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W) &= g(R(X,Y)Z,W)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\\ &- \eta(X)\eta(W)g(Y,Z)+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)+\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)\end{aligned}$$

pour $\forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$.

Preuve . (Exercice TD)

Indication : nous pouvons utiliser les Lemmes précédentes.

■

Propriété 5

Soit $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ une variété Sasakienne, alors nous avons les propriétés suivantes :

(1) $\quad g(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W)=g(R(X,Y)Z,W)$

(2) $\quad S(\varphi X,\varphi Y)=S(X,Y)$

pour $\forall\ X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ qui sont orthogonales à ξ, où S la courbure de Ricci.

Preuve . (Exercice TD)

1.

Comme les champs des vecteurs X, Y, Z sont orthogonales à ξ, alors d'après le Lemme précédente, nous obtenons directement la première formule.

2.

Supposons $\{X_i, \varphi X_i, \xi\}_{i=1}^n$ une φ-base, d'où :

$$\begin{aligned}
S(\varphi X, \varphi Y) &= \sum_{i=1}^n g(R(\varphi X, X_i)X_i, \varphi Y) + \sum_{i=1}^n g(R(\varphi X, \varphi X_i)\varphi X_i, \varphi Y) + g(R(\varphi X, \xi)\xi, \varphi Y) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R(\varphi X, -\varphi^2 X_i)(-\varphi^2 X_i), \varphi Y) + \sum_{i=1}^n g(R(\varphi X, \varphi X_i)\varphi X_i, \varphi Y) \\
&\quad + g(\eta(\xi)\varphi X - \eta(\varphi X)\xi, \varphi Y) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R(X, -\varphi X_i)(-\varphi X_i), Y) + \sum_{i=1}^n g(R(X, X_i)X_i, Y) + g(\varphi X, \varphi Y) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R(X, \varphi X_i)\varphi X_i, Y) + \sum_{i=1}^n g(R(X, X_i)X_i, Y) + g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R(X, \varphi X_i)\varphi X_i, Y) + \sum_{i=1}^n g(R(X, X_i)X_i, Y) + g(X, Y) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R(X, \varphi X_i)\varphi X_i, Y) + \sum_{i=1}^n g(R(X, X_i)X_i, Y) + g(R(X, \xi)\xi, Y) \\
&= S(X, Y).
\end{aligned}$$

■

Exercice 10.

La sphère d'unité S^{2n+1} munie de la structure canonique (φ, ξ, η, g) est une variété Sasakienne. Suivant la déformation de Tanno [20] on a la structure :

$$\eta' = a\eta, \qquad \xi' = \frac{1}{a}\xi, \qquad \varphi' = \varphi, \qquad g' = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta, \qquad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

- Montrer que la nouvelle structure $(S_a^{2n+1}, \varphi', \xi', \eta', g')$ est aussi une variété Sasakienne.

Exercice 11.

Soit $(\mathbb{R}^{2n+1}, g)$ une variété Riemannienne. Avec une métrique g donnée par,

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + (dy^i)^2\Big)$$

d'où, sa matrice associe :

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, montrer que $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété Sasakienne, avec,*

$$\eta = \frac{1}{2}\Big(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i\Big)\,, \qquad\qquad \xi = 2\frac{\partial}{\partial z},$$

et le tenseurs φ *donnée par :*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Où, $(x^i, y^i, z),\ i = 1..n$ *les coordonnées sur* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

3.3 Variété de Kenmotsu

Définition 1

Soient (M, φ, ξ, η) une variété presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est de Kenmotsu si η est fermée (c.à.d. $d\eta = 0$), $d\Phi = 2\Phi \wedge \eta$ et la triplet (φ, ξ, η) est normale.

Théorème 1

Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact de dimension $(2n+1)$ et ∇ la connexion de Levi-Cevita sur M. On dit que M est de Kenmotsu si et seulement si pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X.$$

De plus, on a la notion la plus générale d'une structure β-Kenmotsu [9], qui peut être définie par

$$(\nabla_X \varphi)Y = \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big),$$

où β est une constante non nulle.

Exemple 2.

Soit $\{x, y, z\}$ les coordonnés cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$ posons

$$g = \begin{pmatrix} \rho^2 + \tau^2 & 0 & -\tau \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ -\tau & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

telle que ρ et τ des fonction sur $\mathbb{R}^3$.
On définie une structure presque de contact (φ, ξ, η) sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta = (-\tau, 0, 1)$$

$(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété métrique presque de contact.
La 1-forme η et la 2-forme fondamentale Φ sont donnée par,

$$\eta = dz - \tau dx \qquad \textit{and} \qquad \Phi = -2\rho^2 dx \wedge dy,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d\eta &= \tau_2 dx \wedge dy + \tau_3 dx \wedge dz \\ d\Phi &= -4\rho_3 \rho dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

tel que $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}$ *et* $\tau_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$.
Les composantes du tenseur $N^{(1)}$ *peut s'écrire sous la forme,*

$$\begin{aligned} N^i_{kj} &= \varphi^h_k(\partial_h \varphi^i_j - \partial_j \varphi^i_h) - \varphi^h_j(\partial_h \varphi^i_k - \partial_k \varphi^i_h) + \eta_k(\partial_j \xi^i) - \eta_j(\partial_k \xi^i) \\ &= 0 \qquad \forall i, j, k \end{aligned}$$

c.à.d. la structure métrique presque de contact (φ, ξ, η, g) *est normale pour toutes* ρ *et* τ *des fonctions sur* $\mathbb{R}^3$.
Donc, $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété :*

(1) Sasakienne si $\rho_3 = 0$, $\tau_2 = -2\rho^2$ *et* $\tau_3 = 0$,
cas particulière si : $\rho = e^{-y}$, $\tau = e^{-2y}$,

(2) Cosymplectique si $\rho_3 = 0$, $\tau_2 = 0$, *et* $\tau_3 = 0$,
cas particulière si : $\rho = 2xy$, $\tau = x^3$,

(3) Kenmotsu si $\rho_3 = \rho$, $\tau_2 = 0$ *et* $\tau_3 = 0$.
cas particulière si : $\rho = e^z$ *et* $\tau = x$.

Exercice 12.

Soit (x, y, z) *les coordonnées cartésiennes sur* $\mathbb{R}^3$ *on pose*

$$\eta = dz, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Phi = -2e^{2z} dx \wedge dy, \quad g = e^{2z}(dx^2 + dy^2) + dz^2.$$

Alors, montrer que la variété $(\mathbb{R}^3, \varphi, \eta, \xi, g)$ *est une variété de Kenmotsu.*

3.4 Structure trans-Sasakienne

3.4.1 Variété trans-Sasakienne

les références que nous avons utilisé, [16], [3], [14] et [15].

Définition 1

Soient $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique presque de contact et Φ la 2-forme fondamentale. On dit que M est trans-Sasakienne si et seulement si elle est normale et

$$d\eta = \alpha\Phi, \quad d\Phi = 2\beta\Phi \wedge \eta, \tag{3.1}$$

où $\alpha = \frac{1}{2n}\delta\Phi(\xi)$ et $\beta = \frac{1}{2n}div\xi$ sont des fonctions différentiables sur M et $\delta\Phi$ est la codifférentielle de Φ (la divergence)(voir [15], page 17) définie par :

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\Phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\Phi)(\varphi e_i, X)\Big) - (\nabla_\xi\Phi)(\xi, X),$$

avec $\{e_1, ..., e_n, \varphi e_1, ..., \varphi e_n, \xi\}$ une φ-base locale d'un ouvert quelconque de M.

Théorème 1

Soient $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact de dimension $(2n+1)$ et ∇ la connexion de Levi-Cevita sur M. On dit que M est trans-Sasakienne si et seulement si pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla_X\varphi)Y = \alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big)$$

où α et β sont des fonctions différentiables sur M, et on dit aussi que la structure trans-Sasakienne est de type (α, β).

En particulier, la structure est normale en plus,

- si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, la structure est dite **Sasakienne**,
- si $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ et $\beta = 0$, la structure est dite α-**Sasakienne**,
- si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, la structure est dite de **Kenmotsu**,
- si $\alpha = 0$, et $\beta \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ la structure est dite β-**Kenmotsu**,
- si $\alpha = \beta = 0$, la structure est dite **cosymplectique**.

Proposition 1

Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété trans-Sasakienne. Pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, nous avons :

(1) $\nabla_X \xi = -\alpha\varphi X + \beta(X - \eta(X)\xi)$,

(2) $(\nabla_X \eta)Y = -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta\big(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\big)$,

(3) $(\nabla_X \Phi)(Y, Z) = \alpha\big(g(X, Z)\eta(Y) - g(X, Y)\eta(Z)\big) - \beta\big(g(X, \varphi Z)\eta(Y) - g(X, \varphi Y)\eta(Z)\big)$.

Preuve . (Exercice TD)

1. On a :

$$(\nabla_X \varphi)Y = \alpha(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) + \beta(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X)$$

on remplace Y par ξ on trouve

$$(\nabla_X \varphi)\xi = \alpha(\eta(X)\xi - X) - \beta(\varphi X)$$

d'autre part, $\quad (\nabla_X \varphi)\xi = -\varphi(\nabla_X \xi)$

on obtient,

$$-\varphi(\nabla_X \xi) = \alpha(\eta(X)\xi - X) - \beta(\varphi X)$$

appliquant φ on trouve

$$\nabla_X \xi - \eta(\nabla_X \xi)\xi = -\alpha\varphi X - \beta(\varphi^2 X$$

on sait que,

$$\begin{aligned} Xg(\xi, \xi) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2g(\nabla_X \xi, \xi) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \eta(\nabla_X \xi) = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi X - \beta(X - \eta(X)\xi).$$

2. On sait que :

$$\begin{aligned} (\nabla_X \eta)Y &= X\eta(Y) - \eta(\nabla_X Y) \\ &= Xg(Y, \xi) - g(\nabla_X Y, \xi) \\ &= g(Y, \nabla_X \xi) \\ &= g\big(Y, -\alpha\varphi X - \beta(X - \eta(X)\xi)\big) \\ &= -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g(Y, -\varphi^2 X) \\ &= -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g(\varphi Y, \varphi X) \\ &= -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\Phi)(Y,Z) &= X\Phi(Y,Z) - \Phi(\nabla_X Y, Z) - \Phi(Y, \nabla_X Z)\\
&= Xg(Y,\varphi Z) - g(\nabla_X Y, \varphi Z) - g(Y, \varphi\nabla_X Z)\\
&= g(Y, \nabla_X \varphi Z) - g(Y, \varphi\nabla_X Z)\\
&= g\big(Y, (\nabla_X\varphi)Z + \varphi\nabla_X Z\big) - g(Y, \varphi\nabla_X Z)\\
&= g\big(Y, (\nabla_X\varphi)Z\big)\\
&= g\big(Y, \alpha(g(X,Z)\xi - \eta(Z)X) + \beta(g(\varphi X, Z)\xi - \eta(Z)\varphi X)\big)\\
&= \alpha\big(g(X,Z)\eta(Y) - g(X,Y)\eta(Z)\big) - \beta\big(g(X,\varphi Z)\eta(Y) - g(X,\varphi Y)\eta(Z)\big).
\end{aligned}$$

■

Remarque 7.

D'après la proposition 1 on peut trouver :

$$(\nabla_X\Phi)(X,\xi) = -\alpha, \qquad (\nabla_X\eta)X = \beta.$$

pour X orthogonal à ξ et $g(X,X)=1$, on a aussi

$$\delta\Phi(\xi) = 2n\alpha, \qquad \delta\eta = -2n\beta.$$

avec $\{X_i, \varphi X_i, \xi\}_{i=1}^n$ une $\varphi-$base.

Exemple 3. *[3]*

Soit (x,y,z) les coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^3$ on pose

$$\xi = \frac{\partial}{\partial_z}, \qquad \eta = dz - ydx$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -y & 0\end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} e^z + y^2 & 0 & -y\\ 0 & e^z & 0\\ -y & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Utilisant

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\Phi)(e_i,X) + (\nabla_{\varphi e_i}\Phi)(\varphi e_i, X)\Big) - (\nabla_\xi\Phi)(\xi,X),$$

et

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{2n}\Big((\nabla_{e_i}\eta)e_i + (\nabla_{\varphi e_i}\eta)\varphi e_i\Big),$$

on trouve

$\delta\Phi(\xi) = -e^{-z}$, $\delta\eta = -1$ *et* $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *est une variété trans-Sasakienne de type* $(-\frac{1}{2}e^{-z}, \frac{1}{2})$.

4.1 Courbure φ-sectionnelle

Dans cette section on introduit la notion de courbure φ-sectionnelle. Cette notion joue un rôle en géométrie Sasakienne comme le joue la courbure sectionnelle holomorphique en géométrie de Kähler, c'est à dire la courbure φ-sectionnelle déterminer la courbure Riemannienne de variété de Sasaki.

Définition 1

Soit M une variété Riemannienne. Pour $x \in M$, posons $P =< \{X, Y\} >$ un plan engendré par les vecteurs tangents X et Y de l'espace tangent T_xM (ie, $P \subset T_xM$). Le nombre réel :

$$K(x, P) = \frac{g(R(X,Y)Y, X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

qui ne dépend que du plan P et le point $x \in M$, est appelé **courbure sectionnelle** de M en x pour le plan P.

Remarque 8.

Une variété Riemannienne M est dite à courbure sectionnelle constante c, si
$K(x, P) = c, \quad$ *pour* $\forall\, x \in M$ *et* $P \subset T_xM$.

Définition 2

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact et R le tenseur de courbure Riemannienne. Nous avons :

(1) Pour tout plan P de T_xM où $x \in M$, la courbure sectionnelle $K(x, P)$ est donnée par :

$$K(x, P) = K(X, Y) := g(R(X,Y)Y, X)$$

avec, $\{X, Y\}$ est une base orthonormée de P dans T_xM.

(2) Si P est **invariant** par φ (ie, $\varphi P = P$), alors la courbure sectionnelle $K(x, P)$ est dite **holomorphe** et P est appelé **φ-plan** ou φ-section.

Définition 3

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété presque de contact.
Si P est un φ-plan, donc pour tout vecteur unitaire $X \in P$ et $X \perp \xi$ telle que la paire $\{X, \varphi X\}$ est une base orthonormée de P, donc la courbure sectionnelle d'un tel plan est donnée par :

$$K(x, P) = K(X, \varphi X) = g(R(X, \varphi X)\varphi X, X) = R(X, \varphi X, \varphi X, X)$$

pour tout $X \in P$.
Dans ce cas, la courbure sectionnelle est appelée la **courbure φ-sectionnelle holomorphe** de M.
elle est noté par H, et sa valeur par rapport au φ-plan $P =< \{X, \varphi X\} >$ est noté $H(X)$.

Remarques 3.

(1) *La courbure sectionnelle holomorphe ne dépend pas du choix de la base.*

(2) *Si $K(x, P)$ est constante pour $\forall P$ invariant par φ dans T_xM pour $x \in M$, on dit que la variété M à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

4.2 Espace forme de Sasaki (Sasakian space form)

La courbure des variétés de Sasaki est complètement déterminée par sa courbure φ-sectionnelle (voir [3] et [22]).
Le théorème suivant est important, nous donne une expression de la courbure Riemannienne R lorsque la courbure φ-sectionnelle est constante :

Théorème 1

Si la courbure φ-sectionnelle en tout point x d'une variété Sasakienne M de dimension ≥ 5 est indépendante du choix de la φ-section en x, alors elle est constante sur M et le tenseur de courbure est donné par :

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\Big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\Big) \\ &+ \frac{c-1}{4}\Big(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi \\ &+ \Phi(Z,Y)\varphi X + \Phi(X,Z)\varphi Y + 2\Phi(X,Y)\varphi Z\Big). \end{aligned}$$

Pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.
où c est la courbure φ-sectionnelle constante, et Φ la 2-forme fondamentale.

Preuve .

Comme M est une variété de Sasaki, alors nous avons :

$$R(X,\xi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X$$

$$R(X,Y)\varphi Z = \varphi R(X,Y)Z + g(\varphi X, Z)Y - g(Y,Z)\varphi X + g(X,Z)\varphi Y - g(\varphi Y, Z)X$$

$$R(X,Y)Z = -\varphi R(X,Y)\varphi Z + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - g(\varphi Y,Z)\varphi X + g(\varphi X,Z)\varphi Y$$

Nous remarquons aussi que

$$R(X,\xi)X = -\xi \qquad et \qquad R(\xi,X)\xi = -X$$

pour chaque vecteur X orthogonale à ξ.
Donc pour chaque vecteur vérifié les propriétés précédentes sur cette variété de Sasaki, est satisfait la symétrie de tenseur de courbure et l'identité de Bianchi, et qui coïncide avec les valeurs de la courbure φ-sectionnelle, donc, il doit être le tenseur de courbure.
et rappelons que pour $dimM \geq 5$ la courbure φ-sectionnelle est constant c.
A partir de cela, nous trouvons le tenseur de courbure,

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \frac{c+3}{4}\Big(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\Big)\\
&+ \frac{c-1}{4}\Big(\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi\\
&+ \Phi(Z,Y)\varphi X + \Phi(X,Z)\varphi Y + 2\Phi(X,Y)\varphi Z\Big).
\end{aligned}
$$

■

Définition 1

Une variété Sasakienne avec une courbure φ-sectionnnelle constante est appelée **espace forme Sasakienne** (Sasakian space form), et noté par $M^{2n+1}(c)$.
où c est la courbure φ-sectionnelle constante.

Exercice 13.

1. $\mathbb{R}^{2n+1}$ *est une espace forme Sasakienne, telle que :*
une métrique Riemannienne :

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 + (dy^i)^2\Big)$$

d'où, sa matrice associe :

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

avec,

$$\eta = \frac{1}{2}\Big(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i\Big)\ , \qquad\qquad \xi = 2\frac{\partial}{\partial z},$$

et le tenseurs φ donnée par :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Où, (x^i, y^i, z), $i = 1..n$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.
Dans ce cas $\mathbb{R}^{2n+1}$ est une Sasakienne space form,

avec une courbure φ-sectionnelle constante $c = -3$, noté par $\mathbb{R}^{2n+1}(-3)$.

2. S^{2n+1} *est une espace forme Sasakienne, avec :*

la structure Sasakienne déformée $(\overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ (déformation de Tanno) suivante :

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\eta} = a\eta, \qquad \overline{\xi} = \frac{1}{a}\xi, \qquad \overline{g} = ag + a(a-1)\eta \otimes \eta, \tag{4.1}$$

où a une constante strictement positive, et $(S^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ est une variété Sasakienne. Alors $(S^{2n+1}, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ est une variété espace forme Sasakienne (Sasakian space form), avec une courbure φ-sectionnelle constante $c = \frac{4}{a} - 3$.

Exercice 14.

Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété Sasakienne à courbure φ-sectionnnelle constante c.

Montrer que :

(1) $$S(X,Y) = \frac{n(c+3)+c-1}{2} g(X,Y) - \frac{(n+1)(c-1)}{2}\eta(X)\eta(Y)$$

(2) $$\rho = \frac{1}{2}\Big(n(2n+1)(c+3) + n(c-1)\Big),$$

où S le tenseur de Ricci et ρ la courbure scalaire.

Vérification :

Soit $\{e_j, e_{n+j}, \xi\}_{j=1}^{n}$ une φ-base avec $e_{n+j} = \varphi(e_j)$.

On a,

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n} g(R(X,e_i)e_i, Y) + g(R(X,\xi)\xi, Y)$$

et

$$\begin{aligned}
R(X,e_i)e_i &= \frac{c+3}{4}\Big(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_i\Big) + \frac{c-1}{4}\Big(\eta(X)\eta(e_i)e_i - \eta(e_i)\eta(e_i)X + g(X,e_i)\eta(e_i)\xi \\
&- g(e_i,e_i)\eta(X)\xi + \Phi(e_i,e_i)\varphi X - \Phi(e_i,X)\varphi e_i + 2\Phi(X,e_i)\varphi e_i\Big) \\
&= \frac{c+3}{4}\Big(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_i\Big) + \frac{c-1}{4}\Big(0 - g(e_i,e_i)\eta(X)\xi - 3\Phi(e_i,X)\varphi e_i\Big) \\
&= \frac{c+3}{4}\Big(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_i\Big) + \frac{c-1}{4}\Big(- g(e_i,e_i)\eta(X)\xi - 3g(e_i,\varphi X)\varphi e_i\Big) \\
&= \frac{c+3}{4}\Big(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_i\Big) + \frac{c-1}{4}\Big(- g(e_i,e_i)\eta(X)\xi - 3\varphi(g(e_i,\varphi X)e_i)\Big)
\end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} g(R(X,e_i)e_i, Y) &= \sum_{i=1}^{2n}\Big(\frac{c+3}{4} g(e_i,e_i)g(X,Y) - \frac{c+3}{4} g(g(X,e_i)e_i, Y) \\
&- \frac{c-1}{4}\Big(g(e_i,e_i)\eta(X)g(\xi,Y) + 3g(\varphi(g(e_i,\varphi X)e_i),Y)\Big) \\
&= \frac{c+3}{4}(2n)g(X,Y) - \frac{c+3}{4}g(X,Y) + \frac{c+3}{4}\eta(X)g(\xi,Y) \\
&- \frac{c-1}{4}(2n)\eta(X)\eta(Y) - \frac{c-1}{4}3g(\varphi^2 X, Y) \\
&= \frac{n(c+3)}{2}g(X,Y) - \frac{c+3}{4}g(X,Y) + \frac{c+3}{4}\eta(X)\eta(Y) \\
&- \frac{n(c-1)}{2}\eta(X)\eta(Y) - \frac{3(c-1)}{4}(-g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)) \\
&= \frac{n(c+3)}{2}g(X,Y) - \frac{c+3}{4}g(X,Y) + \frac{c+3}{4}\eta(X)\eta(Y) \\
&- \frac{n(c-1)}{2}\eta(X)\eta(Y) + \frac{3(c-1)}{4}(g(X,Y) - \frac{3(c-1)}{4}\eta(X)\eta(Y))
\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\begin{aligned}
R(X,\xi)\xi &= \frac{c+3}{4}\Big(g(\xi,\xi)X, g(X,\xi)\xi\Big) + \frac{c-1}{4}\Big(\eta(X)\eta(\xi)\xi \\
&- \eta(\xi)\eta(\xi)X + g(X,\xi)\eta(\xi)\xi - g(\xi,\xi)\eta(X)\xi + \Phi(\xi,\xi)\varphi X \\
&- \Phi(\xi,X)\varphi\xi + 2\Phi(X,\xi)\varphi\xi\Big) \\
&= \frac{c+3}{4}\Big(X - \eta(X)\xi\Big) + \frac{c-1}{4}\Big(\eta(X)\xi - X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi\Big) \\
&= \Big(\frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{4}\Big)\Big(X - \eta(X)\xi\Big) \\
&= X - \eta(X)\xi
\end{aligned}$$

d'où,

$$g(R(X,\xi)\xi, Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

donc,

$$\begin{aligned}
S(X,Y) &= \Big(\frac{n(c+3)}{2} - \frac{(c+3)}{4} + \frac{3(c-1)}{4} + 1\Big)g(X,Y) \\
&- \Big(-\frac{(c+3)}{4} + \frac{n(c-1)}{2} + \frac{3(c-1)}{4} + 1\Big)\eta(X)\eta(Y) \\
&= \Big(\frac{n(c+3)}{2} + \frac{c-1}{2}\Big)g(X,Y) - \Big(\frac{n(c-1)}{2} + \frac{(c-1)}{2}\Big)\eta(X)\eta(Y) \\
&= \frac{n(c+3)+c-1}{2}g(X,Y) - \frac{(n+1)(c-1)}{2}\eta(X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

2. Pour la courbure scalaire, on obtient,

$$\begin{aligned}
\rho &= tr_g(S(X,Y) \\
&= \sum_{i=1}^{2n}\Big(\frac{n(c+3)+c-1}{2}g(e_i,e_i) - \frac{(n+1)(c-1)}{2}\eta(e_i)\eta(e_i)\Big) \\
&+ \frac{n(c+3)+c-1}{2}g(\xi,\xi) - \frac{(n+1)(c-1)}{2}\eta(\xi)\eta(\xi) \\
&= \frac{n(c+3)+c-1}{2}(2n) + \frac{n(c+3)+c-1}{2} - \frac{(n+1)(c-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\Big(n(2n+1)(c+3) + n(c-1)\Big).
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] D. E. Blair, The theory of quasi-Sasakian structures, J. Diff. Geometry 1 (1967), 331-345.

[2] D. E. Blair, Contact manifolds in Riemannian geometry, Lecture notes in Mathematics, Springer (1976).

[3] D. E. Blair, Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds, Progress in Mathematics Vol. 203, Birkhauser, Boston, 2002.

[4] D. E. Blair, J. A. Oubi*ñ*a, Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds, Publ. Mat. **34** (1), 199-207 (1990).

[5] D. E. Blair, $\mathcal{D}$-homothetic warping, Publications de l'institut mathématique, Nouvelle série, tome **94** (108) , 47-54 (2013).

[6] C. P. Boyer and K. Galicki, Sasakian Geometry, Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, Albuquerque, N.M. 87131 (2007).

[7] B. Cappelletti-Montano, A. De Nicola, AND I. Yudin, A Survey on cosymplectic geometry, arXiv :1305.3704v3 [math.DG] 21 Nov 2013.

[8] J. Inoguchi, A note on almost contact Riemannian 3-manifolds II, https ://doi.org/10.4134/BKMS.b150772, pISSN : 1015-8634 / eISSN : 2234-3016

[9] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, J. Tohoku Math, **24** (1972), 93-103.

[10] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. I, Interscience and Wiley, New York, 1963.

[11] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. II, Interscience and Wiley, New York, 1969.

[12] P. Libermann, Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact, colloque G'eom. Diff. Globale (Bruxelles, 1958), Centre Belge Rech. Math., Louvain, 1959, pp. 37 ?59.

[13] P. Libermann, Sur quelques exemples de structures pfaffiennes et presque cosymplectiques, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 60(1962), 153 ?172.

[14] J. C. Marrero, The local structure of trans-Sasakian manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata 1992, Volume **162**, Issue 1, pp 77-86.

[15] T. T. Matamba, Induced structures on the product of Riemannian manifolds. International Electronic Journal of Geometry, V 4 No. 1 pp. 15-25 (2011).

[16] J. A, Oubi*ñ*a, J. A., New classes of almost contact metric structures. Publ. Math. Debrecen, **32**(1985), 187-193.

[17] Z. Olszak, Normal almost contact metric manifolds of dimension three. Annales Plonici Mathematici XLVII (1986)

[18] Z. Olszak, Almost cosymplectic manifolds with Kählérian leaves, Tensor N. S. 46(1987), 117-124.

[19] S. Tanno, Almost complex structures in boundle spaces over almost contact manifolds. J. Math Soc. Japan 17 (1965), 167-186.

[20] S. Tanno, The topology of contact Riemannian manifolds, Illinois J. Math, 12 (1968), 700-717.

[21] S. Tanno, The automorphism groups of almost contact Riemannian Manifolds, Tohoku Math. Journ., 21 (1969), 21-38.

[22] K. Yano, M. Kon, Structures on manifolds, Series in Pure Math., Vol **3**, World Sci.,1984.