

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MUSTAPHA STAMBOULI DE MASCARA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

## **Polycopié de Cours**

# **COMPORTEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX METALLIQUES.**

*Présenté par :*

**Ahmed DRAI**

Ce cours est destiné aux étudiants de licence et Master Génie  
Mécanique, Option : Génie des Matériaux et autre options.

Algérie  
2020

# TABLE DES MATIERES

<b>AVANT PROPOS</b>	v
<b>PROGRAMME ET CONTENU PEDAGOGIQUE</b>	vi
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	viii
<b>CHAPITRE I</b>	
<b>GENERALITES SUR LES MATERIAUX.</b>	
I.1. Introduction à la science des matériaux	1
I.2. Les matériaux	3
I.2.1. Classe de matériaux et leurs propriétés	4
I.2.2. Liaison chimique et les propriétés des matériaux	5
I.2.2.1. Les liaisons atomiques	6
I.2.2.2. La liaison ionique	7
I.2.2.3. La liaison covalente	7
I.2.2.4. La liaison métallique	8
I.2.2.5. Les liaisons de type Van der Waals	8
I.2.3. L'empilement des atomes	9
I.2.4. Raideur et résistance ultime	9
I.3. Les matériaux polymères	12
I.4. La haute élasticité caoutchoutière	14
I.5. Propriétés des matériaux	15
<b>CHAPITRE II</b>	
<b>RAPPELS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS.</b>	
II.1. Introduction	19
II.2. La mécanique des solides continus	19
II.3. Milieux déformables	20
II.4. Forces externes et équilibre mécanique	20
II.5. Forces internes, forces de surface et transmission des efforts	20
II.6. Raideur, rigidité, état mécanique local	22
II.7. Etat de contraintes dans un solide	23
II.7.1. Tenseur des contraintes	23
II.7.2. Force exercée en un point sur un élément de surface	23
II.7.3. Signification physique des composantes du tenseur de contraintes	25
II.7.4. Composantes normale et tangentielle du vecteur de contraintes	26
II.7.5. État de déformations en un point	27
II.7.6. Tenseur des déformations	27
II.8. Conditions de compatibilité	29
II.9. Problème d'élasticité plane	29
II.9.1. Déformations planes	29
II.9.2. Contraintes planes	30
II.10. Forme des tenseurs de contraintes et déformations en coordonnées cylindriques	31
II.11. Méthodes de résolution des problèmes de la mécanique des solides déformables	32
II.11.1. Méthode en déplacement (déplacements imposés)	33
II.11.2. Méthode en contraintes (contraintes imposées)	33
II.12. Expression des conditions aux limites	35
II.12.1. Formulations dynamiques et quasi-statiques	35
II.12.2. Conditions aux limites de quelques problèmes	36

II.13. Résolution des Problèmes axisymétriques plans	42
II.13.1. Problème d'un cylindre épais sous pressions interne et externe	44
II.13.2. Cas du cylindre très mince	46
II.13.3. Cas du rayon intérieur tendant vers zéro	47
II.13.4. Cas du rayon extérieur tendant vers l'infini	48
II.14. Problèmes à résoudre	49
II.14.1. Problème d'un solide immergé dans un fluide	49
II.14.2. Problème d'une enceinte cylindrique sous pression	49

### **CHAPITRE III**

#### **LOIS DE COMPORTEMENT MECANIQUE DES SOLIDES.**

III.1. Introduction	50
III.1.1. Diversité des comportements	50
III.2. Élasticité linéaire	53
III.2.1. Description du comportement élastique	53
III.2.1.1. Tenseur d'élasticité	53
III.2.2 Isotropie et anisotropie	55
III.2.2.1. Anisotropie de structure	56
III.2.2.2. Élasticité anisotrope	57
III.3. Élasticité linéaire isotrope	59
III.3.1. Coefficients d'élasticité	59
III.4. forme de coefficients de quelques états particuliers	60
1. Tension ou compression hydrostatique	60
2. Cisaillement simple	61
3. Traction simple	62
III.5. Généralisation	63
III.6. Critère de limite d'élasticité	65
III.6.1. Forme générale du critère	65
III.6.2. Critères de von Mises et de Tresca	67
1. Critère de Von Mises	67
2. Critère de Tresca	68
III.7. Problèmes à résoudre	70
III.7.1. Problème 1	70
III.7.2. Problème 2	70
III.7.3. Problème 3	71
III.7.4. Problème 4	71
III.7.5. Problème 5	71
III.7.6. Problème 6	72

### **CHAPITRE IV**

#### **TECHNIQUES MECANQUES ET NUMERIQUES DE CARACTERISATION DES MATERIAUX**

IV. Introduction	74
IV.1. Méthodes de caractérisation mécanique des matériaux	74
IV.2. Essais mécaniques uni-axiaux	74
IV.2. 1. Introduction	74
IV.2.2. Fluage	75
IV.2.1.1. Eprouvettes	75
IV.2.1.2. Dispositif de chargement	76
IV.2.1.3. Four thermique	77
IV.2.1.4. Mesure des déplacements	77

IV.2.1.5. Résultats de fluage	77
IV.2.2. Essais de traction	77
IV.2.2.1. présentation de machine de traction	79
IV.2.2.2. Eprouvettes de traction	79
IV.2.2.3. Mesure et calcul du déplacement	80
IV.2.2.3.1. Extensomètre	80
IV.2.2.4. Cellule de charge	81
IV.2.3. Essais dynamiques	81
IV.3.1. Traction grande vitesse	82
IV.3.2. Essais Hopkinson	84
IV.4. Essais multiaxiaux	85
IV.4.1. Essai de traction bi-axiale	86
IV.4.2. Essai de traction-torsion	87
IV.5. Essais d'indentation	87
IV.5.1. Macro-dureté	88
IV.5.1.1. Essai Vickers	88
IV.5.2. Nanodureté (indenteur Berkovitch)	89
IV.6. Essais de fatigue	89
IV.7. Méthodes d'identification numériques	90
IV.7.1. Généralités	90
IV.7.2. Méthode des moindres carrés linéaire	91
IV.7.3. Méthode de Gauss-Newton	92
IV.7.4. Variation des paramètres caractéristiques en fonction de la température	93
IV.7.5. Notions sur la méthode des éléments finis	94
IV.7.5.1. Généralités	94
IV.7.5.2. Formulation des caractéristiques d'un élément	94
IV.7.5.3. Assemblage	97
IV.7.5.4. Organisation d'un calcul par les codes de calculs en éléments finis	98

## **CHAPITRE V**

### **CLASSIFICATION RHEOLOGIQUE DES COMPORTEMENTS MECANIQUES**

V.1. Schématisation des comportements réels	101
V.1.1. Introduction	101
V.1.2. Modèles rhéologiques	101
V.1.3. Solide rigide et fluide parfait	102
V.2. Elasticité	103
V.2.1. Solides élastiques	103
V.2.1.1. Solide élastique parfait	103
V.3. Fluide visqueux	104
V.4. Viscoélasticité	104
V.4.1. Solide viscoélastique	105
V.5. Plasticité	106
V.5.1. Solides plastiques	106
V.5.2. Solide rigide parfaitement plastique	107
V.5.3. Solide élastique linéaire parfaitement plastique	107
V.5.4. Solide élasto-plastique écrouissable	108
V.6. Viscoplasticité	110
V.6.1. Solides viscoplastiques	110
V.6.1.1. Solide parfaitement viscoplastique	110
V.6.1.2. Solide élastique parfaitement viscoplastique	110

V.6.1.3. Solide élasto-visco-plastique écrouissable	111
V.7. Formulation thermodynamique de la viscoélasticité	112
V.7.1. Domaine de validité et d'emploi	112
V.7.2. Solide de Kelvin-Voigt	112
V.7.3. Solides de Maxwell	114
V.7.4. Modèle de Maxwell généralisé pour les solides	115
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b>	<b>117</b>

## AVANT-PROPOS

**C**onforme aux programmes LMD (Licence-Master-Doctorat) défini par arrêté ministériel du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique, Ce support de cours de comportement mécanique des matériaux s'adresse aux étudiants de première et deuxième année Master de la filière de génie Mécanique, spécialité de Génie des matériaux et construction mécanique du domaine des Sciences et Techniques (ST), de l'université Mustapha STAMBOULI de Mascara et autres universités. Il est conçu de façon à aplanir au mieux les difficultés inhérentes au discours scientifique tout en conservant la rigueur nécessaire. Cet ouvrage présente l'ensemble des notions de bases abordées en mécanique des milieux continus et les lois de comportement mécanique durant la première année et deuxième année de Master Génie mécanique, et même de l'utiliser dans leurs projets de fin d'études. Ainsi également, des exercices corrigés sont proposés en fin de chaque chapitre permettent à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux et aux examens.

Le premier chapitre est dédié à rappeler d'une façon général les matériaux. Son but est de décrire une différence entre les matériaux et prononcer l'importance des ses utilisation dans le domaine de la technologie.

Le deuxième chapitre est consacré à des rappels sur les notions de base de la mécanique des milieux continus. En plus des rappels nécessaires, l'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées sur les problèmes des matériaux déformables.

Le troisième chapitre représente une recherche bibliographique riche sur les différentes lois de comportement. Il est consacré à illustrer la partie d'élasticité et identification des paramètres mécanique analytiquement.

Le quatrième chapitre pour objectif d'orienter les lecteurs vers les méthodes et les techniques de caractérisation mécaniques et numériques des matériaux. Une grande importance est donnée aux essais mécaniques et méthode de moindres carrées.

Le cinquième chapitre résume la classification rhéologique des différents comportements des matériaux, avec un passage douce et sous silence sur quelques formulations thermodynamique de la viscoélasticité

Le cours présenté dans ce polycopié de cours est le fruit de 15 ans d'enseignement et d'encadrement dans le domaine de mécanique des solides déformables dispensé aux étudiants ingénieurs d'ancien système et les titulaires de master 1 et 2 en mécanique de système LMD à l'université Mustapha STAMBOULI de Mascara.

Ce support, dans sa 1ère version, peut contenir des fautes d'ordre scientifiques ou techniques d'inattention, de frappe, des fautes d'orthographe...

Je remercie mes chers lecteurs de me les faire part. Ainsi, leurs questions et leurs suggestions seront les bienvenus en vue d'améliorer le contenu et la forme de ce présent support.

Je remercie bien mes chers collègues et mes amis, surtout Yacine, Kader, Ghani, Ilies, Hicham, Benziane, Hachemi, Walid, Djalil et Kada durant la préparation et la rédaction de support de cours.

J'espère bien que ce support de cours soit à la hauteur de mes chers collègues et de mes chers étudiants pour leurs aider à bien connaître la mécanique des solides déformables et l'identification de son comportement.

# Première Année Master Génie des Matériaux.

## Semestre 1.

### Unité d'Enseignement Fondamentale : UEF 1.1.1

#### Contenus pédagogiques de matière :

#### Comportement mécanique des matériaux métalliques.

(3h00 de cours +1h30 TD)/semaine.

Crédits	Coefficients	Mode d'évaluation	
		Contrôle Continu	Examen
06	03	40%	60%

#### CHAPITRE I (1 SEMAINE)

##### GENERALITES SUR LES MATERIAUX

1. Les matériaux
2. Les matériaux polymères
3. Propriétés des matériaux

#### CHAPITRE II (3 SEMAINES)

##### RAPPELS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

1. La mécanique des solides continus
2. Forces externes et équilibre mécanique
3. Etat des contraintes dans un solide
4. Tenseur des contraintes
5. État des déformations en un point
6. Tenseur des déformations
7. Conditions de compatibilité
8. Problème d'élasticité plane
9. Méthodes de résolution des problèmes de la mécanique des solides déformables
10. Expression des conditions aux limites
11. Problèmes et exercices

#### CHAPITRE III (4 SEMAINES)

##### LOIS DE COMPORTEMENT MECANIQUE DES SOLIDES

1. Isotropie et anisotropie
2. Description du comportement élastique
3. Élasticité anisotrope
4. Élasticité linéaire isotrope
5. Coefficients d'élasticité
6. Critère de limite d'élasticité
7. PROBLEMES A RESOUDRE

## **CHAPITRE IV (2 SEMAINES)**

### **TECHNIQUES MECANIQUES ET NUMERIQUES DE CARACTERISATION DES MATERIAUX**

1. Méthodes de caractérisation mécanique des matériaux
2. Essais mécaniques uni-axiaux
3. Essais dynamiques
4. Essais multiaxiaux
5. Essais d'indentation
6. Essais de fatigue
7. Méthodes d'identification numériques
8. Méthode des moindres carrés linéaire
9. méthode des éléments finis

## **CHAPITRE V (2 SEMAINES)**

### **CLASSIFICATION RHEOLOGIQUE DES COMPORTEMENTS MECANIQUES**

1. Schématisation des comportements réels
2. Modèles rhéologiques
3. Elasticité
4. Viscoélasticité
5. Plasticité
6. Viscoplasticité



### INTRODUCTION GENERALE

L'ingénieur mécanicien a besoin de connaître le comportement mécanique des matériaux utilisés pour fabriquer diverses structures. Ce sont les essais mécaniques qui peuvent lui fournir ces données nécessaires. Elles sont tout d'abord indispensables pour la mise au point des procédés de mise en forme. En effet, si, pendant longtemps, l'empirisme et l'habitude suffisaient pour mener à bien les opérations de laminage, de filage, d'extrusion, de forgeage, d'usinage, etc., l'augmentation de la dimension des demi-produits, les exigences accrues de qualité et de précision, les économies d'énergie à réaliser concourent à rendre nécessaires les calculs détaillés de ces diverses opérations. Il est évident qu'ils ne peuvent être menés à bien sans une connaissance précise des lois de comportement mécanique des matériaux faisant intervenir la vitesse de sollicitation et la température, ainsi que les interactions entre les propriétés mécaniques et les évolutions de la structure microscopique.

Les propriétés mécaniques des métaux et alliages sont d'un grand intérêt puisqu'elles conditionnent non seulement les problèmes de mise en forme des matériaux mais également leur comportement en service dans des applications industrielles extrêmement diversifiées. Le choix du matériau d'une pièce industrielle dépendra de propriétés mécaniques, résistance, dureté, ductilité ...

Il est donc nécessaire de mesurer ces grandeurs physiques par des essais mécaniques. L'essai de traction est le procédé expérimental le plus largement utilisé dans l'étude du comportement mécanique, il permet l'étude des propriétés mécaniques de base.

Parmi ces propriétés, une caractéristique incontournable, au point que son évidence pourrait presque la faire oublier, est la tenue mécanique. Tout produit doit résister aux actions extérieures subies au cours de sa vie, qu'il s'agisse de son usage propre ou de sollicitations extérieures accidentelles, qu'il soit destiné à supporter des efforts comme fonction principale ou non. Ces actions extérieures sont ressenties au cœur du matériau par ce que la mécanique du solide déformable nomme contrainte, la capacité d'un matériau à supporter ces contraintes caractérisant sa tenue mécanique. Tout le monde souhaite qu'un objet garde sa forme, qu'il ne se brise pas, qu'il ne se raye ni ne s'use... à un tel point que cette fonction mécanique conditionne souvent le dimensionnement de l'objet. Dans d'autres cas, au contraire, on préfère qu'il rompe (sinon, ouvrir une boîte de conserve ou une canette deviendrait délicat !).

A regarder plus finement, on se rend vite compte que la tenue mécanique recouvre en fait beaucoup de choses différentes : bien sûr, sous faibles sollicitations, la plupart des matériaux solides ont un comportement élastique, que l'on va caractériser par une déformation proportionnelle à la contrainte appliquée (comme un ressort parfait où l'allongement relatif est proportionnel à la force de traction). Cependant, lorsque les forces augmentent, la déformation peut devenir irréversible (et l'on parlera de plasticité ou de viscoélasticité), elle peut engendrer des microfissures (endommagement) ou encore donner lieu à une fracture... La formalisation de ces notions en une description mathématiquement et physiquement satisfaisante est tout l'art de la mécanique des solides.

Cette description mécanique repose sur deux piliers : d'une part, une déclinaison adaptée aux milieux continus du principe fondamental de la dynamique que l'on doit à Newton, et d'autre part, une loi de comportement qui décrit la relation entre contrainte et déformation, assortie éventuellement de variables internes qui complètent la caractérisation de l'état du milieu. Autant le premier pilier est indiscutable, autant le second est une affaire de choix : tout matériau montre un comportement complexe lorsque l'on rentre dans les détails, et le plus souvent on ne se propose que d'en décrire les traits les plus saillants. En effet, plus la

description est fine, plus elle réclame de nombreux paramètres qu'il est de plus en plus difficile d'apprécier précisément.

Les lois de comportement donc sont le reflet des propriétés mécaniques d'un matériau et sont aussi des données d'entrée indispensables pour les logiciels de simulation par éléments finis. Pour pouvoir identifier le comportement d'un matériau, il existe plusieurs méthodes (traction statique, barres Hopkinson...) mais la plupart de ces essais sont couteux et exigent des dimensions spécifiques d'éprouvettes.

Une loi de comportement a pour objet de rendre compte de la manière dont se déforme un volume élémentaire de solide dans une histoire de sollicitation. L'aspect historique est important car souvent le passé influe très sensiblement sur le présent (par le biais des déformations irréversibles ou de l'endommagement subis par le volume considéré). Elle a l'intérêt majeur d'être intrinsèque, générique et de pouvoir rendre compte de toutes les actions (ou au moins un ensemble représentatif d'entre elles) auxquelles est soumis un volume élémentaire représentatif du milieu. Ainsi il sera possible de prédire le comportement d'un solide de géométrie arbitraire et soumis à des efforts ou des déplacements imposés divers. L'objectif est donc de présenter le formalisme et les bases physiques des principales lois utilisées pour décrire le comportement mécanique des différentes classes de matériaux (métaux, céramiques, polymères)

Il est donc nécessaire de disposer d'une évaluation quantitative des paramètres de la loi de comportement du matériau de façon à déterminer une géométrie qui garantira une certaine durée de vie à l'objet. De plus, cette quantification doit généralement être validée, d'abord sur des échantillons de géométries simples, puis par des tests sur l'objet dans sa forme finale ou proche de celle-ci. Aujourd'hui, on a également souvent recours à la simulation numérique à des fins de tests virtuels pour diminuer le nombre d'essais effectués dans la phase de conception.

Pour quantifier les paramètres d'une loi de comportement, la stratégie classique consiste à concevoir des géométries d'éprouvette (échantillon du matériau à étudier) et des sollicitations telles que les champs de déformation et de contrainte soient les plus homogènes possibles. Ainsi, on pourra apprécier, par le biais de quelques mesures locales ou globales, ces états de contraintes et de déformation et donc construire facilement la loi de comportement. La puissance des techniques de mesures de champ est alors de pouvoir aborder le problème de la mesure de la loi de comportement dans un cadre plus large d'essais mécaniques, sans recourir à une exigence d'homogénéité. Cela est d'autant plus important que la complexification des lois de comportement, aujourd'hui concevable dans le cadre de la simulation numérique, rend très lourd le travail expérimental d'identification des paramètres de ces lois constitutives.

L'enjeu des techniques de mesure de champ de déplacement est d'offrir une opportunité unique de pouvoir exploiter des essais mécaniques non standards, en maîtrisant l'hétérogénéité du champ de déformation et surtout en l'exploitant comme représentant autant de micro-essais mécaniques indépendants que de points de mesure du champ. Cependant, cette exploitation n'est pas à ce jour une démarche habituelle, et clairement des procédures stables et validées doivent être développées pour cette application précise.

Le cœur du problème n'est que très rarement concentré sur l'évaluation des déplacements en tant que tels. La finalité la plus fréquente est d'appréhender les paramètres intrinsèques (du matériau) qui vont caractériser son comportement mécanique, opération que l'on qualifie souvent « d'identification ». L'identification fait intervenir le cadre générique formel d'une loi

de comportement. L'expérience nous a appris à distinguer quelques grandes familles de comportement. Selon le caractère réversible (ou non) des déformations du solide, on parlera d'élasticité (ou d'inélasticité) pour qualifier comportement. Si la vitesse de sollicitation conditionne la réponse du solide on qualifiera son comportement de visqueux... Bref, l'ensemble de ces critères nous conduira à formuler des lois de comportement plus ou moins complexes qui relieront contraintes et déformations (incluant le cas échéant leurs histoires) par le biais d'équations constitutives dont les paramètres sont caractéristiques du matériau étudié.

L'identification consiste alors à évaluer ces paramètres à partir d'essais mécaniques. C'est cette identification qui a conduit à élaborer des tests mécaniques bien balisés qui permettent d'ajuster les paramètres de ces lois à partir de sollicitations contraintes par le faible nombre de mesures cinématiques. Il faudra s'assurer qu'une mesure d'une déformation en un point renseigne de fait sur tout en domaine, et donc le plus souvent l'essai doit être très homogène, ce qui se heurte parfois à des lois rebelles à cette homogénéité (par exemple celles qui donnent lieu à des déformations localisées). Les mesures de champ nous libèrent en grande partie de ce cadre très contraignant et nous offrent la possibilité de pouvoir exploiter des essais imparfaits ou de développer de nouveaux essais. C'est ici encore une véritable révolution culturelle qui va bouleverser dans les années à venir la définition même des tests mécaniques.

La sophistication poussée des lois de comportement alliées à la puissance croissante des ordinateurs, et aux algorithmes puissants développés pour traiter cette complexité croissante nous conduisent aujourd'hui souvent à des situations où le recours à la simulation numérique est indispensable pour pouvoir apprécier le champ de déplacement développé dans un essai. L'identification consiste alors à ajuster les paramètres des lois constitutives pour reproduire au mieux le résultat d'un essai. On conçoit ainsi aisément que les mesures de champ nous posent un nouveau problème : la comparaison entre champs de déplacement mesuré et calculé devient considérablement plus exigeante et donc plus discriminante sur l'identification, mais elle interdit de fait la plupart des approches habituelles fondées sur un faible nombre de mesures, pour nous inviter à un traitement informatique de ces données sous la forme de champs. On perçoit donc l'intérêt de choisir une base de description des champs qui assure une parfaite continuité entre mesure et calcul, comme la base de fonctions de type éléments finis que l'on pourra mettre en œuvre sur ces deux procédures, facilitant ainsi leur confrontation, et minimisant les erreurs additionnelles liées aux traductions entre deux représentations différentes.

La simulation numérique du comportement des solides part habituellement de données d'entrées relatives à la géométrie et aux sollicitations mécaniques, mais aussi à la loi de comportement pour produire différents résultats dont le champ de déplacement. La formulation de l'identification en tant que problème « inverse », consiste à échanger ce sens traditionnel, pour admettre maintenant le champ de déplacement comme une entrée du problème, où les inconnues sont alors les paramètres constitutifs. Nous ne rentrerons pas dans le détail du traitement adapté à ce renversement de perspectives qui devient vite très technique, mais nous nous bornerons à mentionner que différentes méthodes existent, dont certaines sont optimales pour des lois simples, et que dans le cadre général des lois non linéaires de nombreux développements et progrès sont attendus dans les années à venir. Se dessinent ainsi deux maillons bien distincts qui relient l'un les images acquises lors d'un essai au champ de déplacement, et l'autre ce champ de déplacement aux paramètres de la loi de comportement. Cette courte chaîne permet alors d'entrevoir l'identification comme travaillant directement sur les images dans une démarche où le champ de déplacement n'est plus qu'un

intermédiaire, certes utile à l'appréciation de la qualité du résultat, mais sans finalité autre, procédure que nous qualifions « d'intégrée ». Cette fusion comporte, elle aussi, un gain propre: la même démarche est ainsi capable de propager non seulement l'information (ici de nature cinématique) mais aussi son incertitude associée, incertitude que l'on sait apprécier point par point en fonction de la texture locale de l'image : cela permet alors de pallier localement le manque d'information liée à la texture pour la compenser par la connaissance (même approximative) de la loi de comportement. De plus la variété des sollicitations élémentaires rencontrées localement dans un essai inhomogène apportera un ensemble suffisamment riche pour pouvoir apprécier finement de nombreux paramètres. Nous sommes aujourd'hui à la porte de cette révolution pour la mécanique des matériaux.

# CHAPITRE I

## GENERALITES SUR LES MATERIAUX.

### I.1. Introduction à la science des matériaux

Les matériaux métalliques constituent la base du développement technologique. Ceci est également valable pour la construction des outils, des machines, des installations et des automobiles que pour l'aéronautique et l'aérospatial et la médecine. Les alliages à base de fer, aciers et fontes, constituent en masse près de 90 % de la production mondiale de matériaux métalliques.

Alors que la résistance des structures et des matériaux est un domaine qui nous concerne tous dans notre vie quotidienne, elle est restée pendant des siècles le parent pauvre des sciences. Essayer de comprendre pourquoi se produisent des catastrophes telles que l'effondrement d'un pont ou la rupture d'un barrage était le lot des hommes de l'art dont les connaissances étaient surtout affaire d'empirisme et de tradition.

C'est en 1638, sur la fin de sa vie, que Galilée (1564-1642) publia son « *Dialoghi delle due nuove scienze* », premier ouvrage publié qui traitait sérieusement de résistance mécanique. Il étudia l'influence de la section sur la résistance statique des tiges, montrant que la charge de rupture était bien proportionnelle à l'aire de la section droite, et s'intéressa aussi, avec plus ou moins de bonheur (il ne pouvait bénéficier des travaux d'Isaac Newton (1642-1727) sur le principe de l'action et de la réaction), à la résistance en flexion de divers types de poutres.

Alors qu'il partageait avec les Grecs leur mépris pour les Sciences appliquées, Isaac Newton apporta deux outils d'importance primordiale : le calcul différentiel et sa troisième loi, plus connue sous le nom de « *Principe de l'action et de la réaction* ». Cette loi stipule que si un corps pesant exerce sur un corps support une force due à l'action de la pesanteur (contact statique) ou à celle de l'accélération (contact dynamique), ce support exerce en sens inverse une force de réaction égale et opposée sur le corps pesant. Si les lois de Newton nous donnent les forces auxquelles une structure peut être soumise, elle ne nous donne aucune information sur les forces de réaction au sein des matériaux qui la compose.

Comment et pourquoi la structure résiste-t-elle ? La réponse fut donnée par Robert Hooke (1635-1703). Etudiant l'allongement produit par l'action de charges croissantes appliquées sur divers matériaux, il établit une relation de proportionnalité, dans la limite de précision des mesures de l'époque, et il formula la loi de l'élasticité qui porte son nom en 1679 dans son document « De potentiel restitua sous la forme « *Ut tension, sic vis* » . Telle tension, telle force, » car en latin tension signé généralement étirement et non tension - au sens de force - bien que les romains aient souvent confondu les deux acceptations.

Nous savons aujourd'hui que cette loi s'applique bien à presque tous les solides usuels (cristallins ou amorphes) aux faibles contraintes mais que les matériaux constitutifs des structures biologiques la suivent rarement. Cependant, pour les structures et les matériaux usuels, elle joue un rôle essentiel. Malgré leur richesse, les idées de Hooke ne débouchèrent que cent ans plus tard sous la forme des concepts de contrainte et de déformation introduits par Augustin Cauchy (1789-1857). Bien que recouvrant des notions très simples ces deux termes restent souvent mystérieux et rebutants.

Jusqu'alors les études avaient porté sur des structures plus ou moins élaborées pour lesquelles les analyses en termes d'allongement et de force ne distinguaient pas ce qui était la contribution de la géométrie de la structure de celle intrinsèque au matériau. La définition de l'état mécanique local en termes de contrainte et de déformation a véritablement sorti la science des matériaux de l'impasse.

L'idée qu'un matériau puisse être caractérisé par une rigidité intrinsèque est due à Thomas Young (1773-1829) qui démontrait ainsi que la déformation globale d'une structure résulte en fait de la combinaison de la raideur du matériau et de la taille et de la forme de cette structure. Cependant on doit à Henri Navier (1785-1836) d'avoir formulé mathématiquement le concept développé par Thomas Young, en s'appuyant sur les notions de déformation et de contrainte formulées par Augustin Cauchy. Les bases étaient posées pour entreprendre la résolution analytique des problèmes de calcul des structures.

Fort de ces progrès, le début du XIXe siècle fut la période privilégiée des tentatives de prédiction des résistances pratiques des matériaux à partir des connaissances acquises sur les forces des liaisons interatomiques et des catastrophes, les résultats obtenus s'écartant de plusieurs ordres de grandeur des valeurs expérimentales. Il fallut attendre plus d'un siècle pour voir se dessiner une approche satisfaisante des mécanismes comportementaux au-delà de la zone élastique : ductilité et plasticité, fragilité et rupture. En effet, ce n'est qu'en 1920 que A. Griffith publia son article révolutionnaire sur la résistance à la rupture des solides, et ce n'est qu'en 1934 que Geoffrey Taylor suggéra l'existence de dislocations dans les cristaux pour interpréter les propriétés de ductilité des métaux purs.

La science des matériaux disposait enfin des outils conceptuels nécessaires à son développement.

Les travaux de Griffith et de Taylor sont à la base des méthodes d'élaboration de nos matériaux modernes. Le développement conjoint des nouveaux matériaux et des moyens de calcul par éléments finis permettent aujourd'hui aux ingénieurs de concevoir des structures mécaniquement aptes de plus en plus complexes comme en témoignent les réalisations de haute technologie du pont de Normandie ou du viaduc de Millau pour ne citer que le domaine des ouvrages d'art.

## I.2. Les matériaux

Le physico-chimiste étudie les propriétés de la matière, métaux, alliages, verres, polymères, tissus biologiques, . . . mais ne s'occupe que rarement des matériaux correspondants. Les matériaux sont de la matière travaillée par l'homme pour fabriquer des objets. Le procès d'élaboration procure au matériau une certaine microstructure qui à son tour détermine ses propriétés chimiques, physiques, mécaniques, électriques, thermiques. Il s'agit-là des propriétés intrinsèques du matériau. La synthèse des matériaux en laboratoire s'appuie sur la trilogie mise en œuvre - structure – propriétés comme indiqué dans les tableaux (I.1, I.2 et I.3) :

Procèdes de fabrication	Coulée, frittage, dépôts (électrolytique,..) Laminage, extrusion, étirage, forgeage,
Mise en forme par déformation Mise en forme par enlèvement de matière	emboutissage, martelage, . . . Usinage, rectification, découpe (chalumeau, laser, jet d'eau), électroérosion,. . .
Traitements thermiques Assemblage	Recuit, trempe, vieillissement, revenu, .. Soudage, collage, rivetage, boulonnage, vissage, fretage
Traitement de surface	Grenailage, rodage, trempe superficielle, revêtement par dépôt (électrolytique, phase vapeur, projection ...)

**Tab. I.1 Procèdes de mise en œuvre**

Type de Liaison, Molécules	Type et taille
Système cristallin, Ordre Polymères	à longue et courte distance
Hétérogène eu tes chimiques	Taux de réticulation et de cristallinité
Précipites cohérents, incohérents	Ségrégation aux joints de grains
Composites	Dimension, forme, fraction volumique
Texture, Porosité...	Plis, brefs (courtes longues trachytes)

**Tab. I.2. Microstructures**

Mécaniques	Modules et limites élastiques, écoulement (contrainte d'écoulement), charge à la rupture, vitesse de fluage, ductilité, allongement réparti à la rupture, taux de striction, viscosité, capacité d'amortissement, dureté, résistance (fatigue, usure, abrasion, . . .) . . .
------------	--

**Tab. I.3. Propriétés mécaniques**

**I.2.1. Classe de matériaux et leurs propriétés**

L'ingénieur groupe les matériaux en trois classes correspondant approximativement à trois types de comportement :

Matériaux	Comportement	Propriétés
Verres et céramiques	Dureté et fragilité	Isolants et réfractaires
Métaux et Alliages	Ductilité	Conducteurs et Recteurs
Polymères	Déformabilité	

**Tab. I.4. Les trois classes de matériaux**

Cette classification recoupe celle des matériaux en fonction de leur type de liaison chimique. Ce résultat n'est pas fortuit dans la mesure où une grande partie des propriétés physiques et en particulier des propriétés mécaniques sont conditionnées par les propriétés des liaisons chimiques.

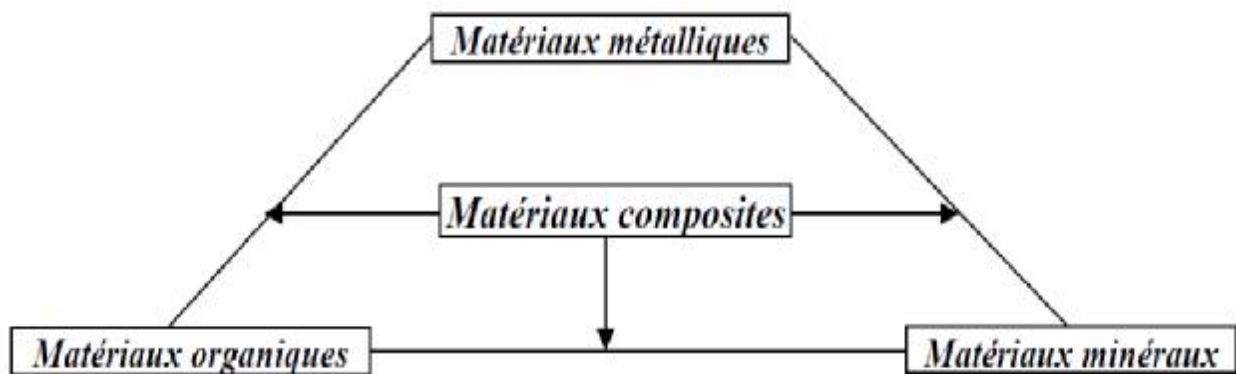
Liaison covalente	
Bore Carbone diamant Silicium – germanium Carbures – nitrures Polymères	Fibres Poudres abrasives - brefs Composants électroniques Meules, paliers, brefs réfractaires Thermorécifsables
Liaison ionique	
Alumine, silice, zircon Verres, Oxydes et carbures d'uranium	Abrasifs, réfractaires Vitrres, emballages, brefs Industrie nucléaire
Liaison métallique	
Aluminium Zinc Titane Zirconium Cuivre Or, Argent Etain, Plomb	Alliages légers. Bâtiment, fonderie. Aéronautique. Industrie chimique, gaines combustible nucléaire Laitons, bronzes Monnaies, brasures, photographie,



Tantale Fer, Cobalt, Nickel	contacts Plomberie, soudure Réfractaire, électronique Aciers, fontes, superalliages
<b>Chaines covalentes avec liaisons Van der Waal ou Hydrogène</b>	
Polymères Elastomères Bois, Papiers, Cartons Ciments, Bétons	Thermoplastiques

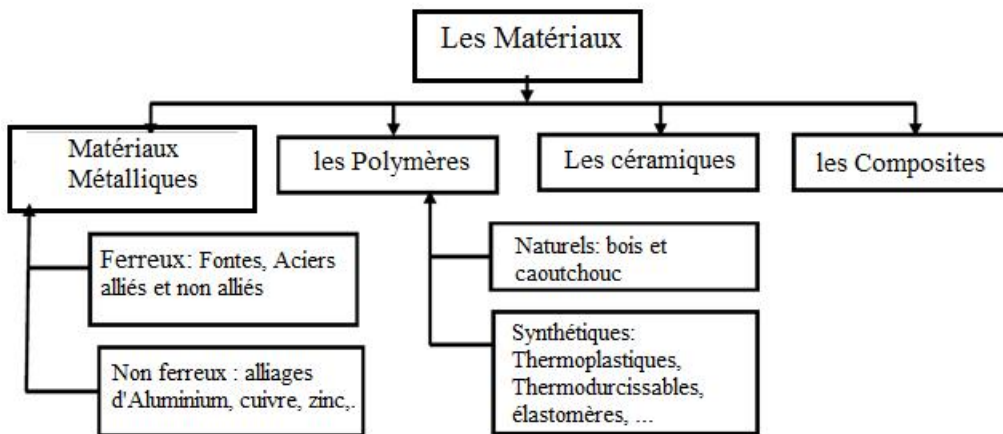
**Tab. I.5 Matériaux et type de liaisons chimiques**

A ces trois classes s'ajoute la classe des composites qui permet une grande souplesse de combinaisons de propriétés.



**Fig. I.1 Les grandes familles des matériaux.**

Ces matériaux peuvent être regroupés en grandes familles selon l'organigramme suivant :



**Fig. I.2. Classification des matériaux.**

**I.2.2. Liaison chimique et les propriétés des matériaux**

Pour résister aux efforts qui lui sont appliqués un matériau n'a d'autre ressource que de se déformer de manière à stocker ou à dissiper l'énergie qui lui est fournie. Dans les matériaux cristallins la déformation est associée à de légères variations des distances interatomiques, mais elles entraînent des variations considérables de l'énergie de cohésion (énergie interne). Ainsi, pour

comprendre les caractéristiques mécaniques des matériaux comme leur module il faut descendre à l'échelle atomique. Deux facteurs ont un effet prépondérant sur ces propriétés :

- Les forces qui retiennent les atomes les uns aux autres (les liaisons atomiques). Elles agissent comme de petits ressorts qui lient un atome à ses proches voisins dans l'état solide.
- La manière dont les atomes sont empilés (l'empilement atomique) qui va déterminer le nombre de ressorts par unité de surface et l'angle sous lequel ils sont étirés.

### I.2.2.1. Les liaisons atomiques

Les propriétés des matériaux sont fortement corrélées au type de liaison entre atomes car il détermine l'énergie de cohésion de la matière, la force nécessaire pour écarter les atomes les uns des autres jusqu'à rupture, le coefficient de dilatation, la conductibilité électrique ou thermique, la stabilité des phases, la réactivité, ... Le chimiste distingue deux types de liaisons : les liaisons fortes (ionique, covalente et métallique) toutes assez résistantes qui se désagrègent entre 1000 et 5000 °K et les liaisons faibles ou secondaires (Van der Waals et hydrogène) relativement faibles qui fondent entre 100 et 500 °K. La température de fusion du corps est un bon indicateur de la résistance de ses liaisons.

Liaisons	Ionique ou Covalente	Métallique	Van der Waals
Energie	10	5	0,1

**Tab. I.6. Energie de liaison typique en eV/atome**

La cohésion des métaux et des céramiques est entièrement due à des liaisons fortes, covalentes et ioniques pour les céramiques, métalliques et covalentes pour les métaux. Ces liaisons fortes et rigides se caractérisent par des modules mécaniques élevés. Bien que beaucoup plus faibles, les liaisons secondaires n'en sont pas moins importantes. Elles sont responsables de liens entre les molécules de polymères, leur permettant d'exister à l'état solide. Sans elles, l'eau bouillirait à -80°C et la vie sur terre n'existerait pas. Il faut cependant garder à l'esprit que de nombreux atomes sont retenus les uns aux autres par des liaisons mixtes qui combinent plusieurs sortes de liaisons élémentaires. Ainsi le carbone graphite Possède des liaisons de covalence et des électrons libres lui conférant un caractère métallique et les oxydes réfractaires possèdent des liaisons ioniques partiellement covalentes.

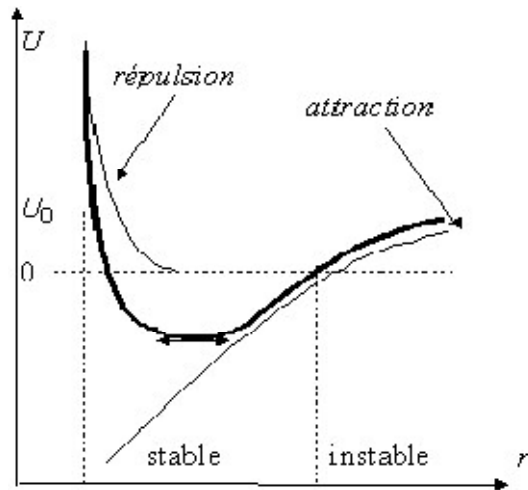


Fig. I.3. L'énergie de liaison  $U$  (potentiel de Lennard-Jones)

La longueur d'équilibre  $r_0$  d'une liaison résulte de la compétition entre un terme répulsif  $U_R = \frac{B}{r^n}$  (avec  $n$  compris entre 6 et 12) résultant de l'interpénétration des distributions de charges électroniques et un terme attractif  $U_A = \frac{A}{r^m}$  (avec  $m < n$ ). L'énergie de liaison  $U$  (potentiel de Lennard-Jones) est fonction de la distance  $r$  entre atomes :

$$U = U_R + U_A = \frac{B}{r^n} - \frac{A}{r^m} \quad (\text{I.1})$$

### I.2.2.2. La liaison ionique

La liaison ionique est une liaison forte dont le terme attractif est d'origine Coulombienne  $U_A = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  elle assure la cohésion des halogénures d'alcalins comme NaCl et partiellement celle des oxydes (magnésie, alumine, . . .) et des constituants du ciment (carbonates hydrates). Les électrons de chaque ion évoluent dans des domaines complexes (les orbitales) autour du noyau. En première approximation les ions peuvent être supposés sphériques et, à condition de respecter la nullité de la charge totale, la tolérance d'empilement des ions les uns autour des autres est élevée : la liaison ionique n'est pas directionnelle.

### I.2.2.3. La liaison covalente

Est une liaison forte très stable dont le terme attractif provient de la mise en commun d'orbitales électroniques. Dans la plupart des atomes, les électrons mis en commun occupent des régions bien délimitées de l'espace et leur recouvrement (orbitales à fort degré de symétrie) conduit au caractère directionnel de la liaison covalente qui détermine à son tour la manière dont s'empilent les atomes dans les cristaux. Pure, on la rencontre dans le diamant, le silicium et le germanium dont les modules sont élevés (celui du diamant est le plus grand connu). C'est la liaison dominante des céramiques au silicium et du verre (pierres, poteries, briques, verres ordinaires et constituants du

ciment). Elle contribue aussi à la cohésion des métaux à température de fusion élevée (tungstène, molybdène, tantale, . . .). C'est également la liaison des atomes de C des chaînes carbonées de polymères. Ces derniers comportant également des liaisons faibles, leurs modules sont généralement petits.

#### I.2.2.4. La liaison métallique

Est une liaison forte délocalisée. C'est la liaison principale (mais pas unique) des métaux et de leurs alliages. Dans un métal les électrons d'énergie élevée ont tendance à quitter leurs atomes d'origine (qui se transforment en ions) pour former un gaz d'électrons plus ou moins libres ce qui explique la conductivité électrique élevée des métaux. De ce fait, la liaison métallique n'est pas directionnelle et les ions métalliques ont tendance à s'empiler en structures simples et denses (comme des billes rangées dans une boîte).

#### I.2.2.5. Les liaisons de type Van der Waals

Sont des liaisons faibles dont le terme attractif entre atomes électriquement neutres est d'origine dipolaire et varie en  $r^{-6}$ . Si la symétrie des charges d'un atome existe en moyenne dans le temps (neutralité électrique), la distribution instantanée autour du noyau ne l'est pas, créant un moment dipolaire aléatoire. Ce moment induit un moment similaire sur un atome voisin et les deux dipôles ainsi formés s'attirent. Ce sont ces liaisons qui sont responsables de l'état liquide des gaz à basse température, lorsque l'agitation thermique est trop faible pour les rompre, et la glace n'existe que grâce aux liaisons hydrogène. C'est par la formation de liaisons fortes et faibles que la matière se condense pour passer de l'état gazeux à l'état liquide ou solide. Les liaisons faibles des liquides ordinaires ont fondu ; pour cette raison ils opposent une forte résistance à la compression mais faible à la traction ou au cisaillement. Leur module de compressibilité  $K$  est grand devant celui des gaz, mais leur module de cisaillement  $G$  et leur module d'Young  $E$  sont nuls. De manière générale les modules dépendent de l'état des liaisons (Solides ou fondus) et de la structure de la matière.

Etat	Liaisons		Modules	
	Faibles	Fortes	K	G et E
Liquides	rompues		grand	nuls ( $E = G = 0$ )
Cristaux liquides	rompues		grand	quasi nuls ( $E \cong G \cong 0$ )
Caoutchoucs	établies	établies	grand	petits ( $E \cong G \ll K$ )
Verres		Etablies	grand	grands ( $E \cong G \cong K$ )
Cristaux		établies	grand	grands ( $E \cong G \cong K$ )

Tab. I.7 Liaisons chimiques et états de la matière

### I.2.3. L'empilement des atomes

La façon dont les atomes sont empilés est également une donnée importante pour déterminer les propriétés mécaniques des matériaux. De nombreux matériaux (presque tous les métaux et céramiques) sont constitués d'un assemblage de petits cristaux dans lesquels les atomes sont empilés en une structure régulière répétée dans les trois dimensions. Les cristaux les plus simples peuvent être modélisés assimilant les atomes à des sphères dures. Il s'agit là cependant d'une simplification considérable quoique commode. En simplifiant encore plus un corps pur avec une seule taille de sphères dures aux liaisons non directives n'aura tendance à s'organiser en une structure compacte où les sphères sont rangées sans contrainte autre que géométrique.

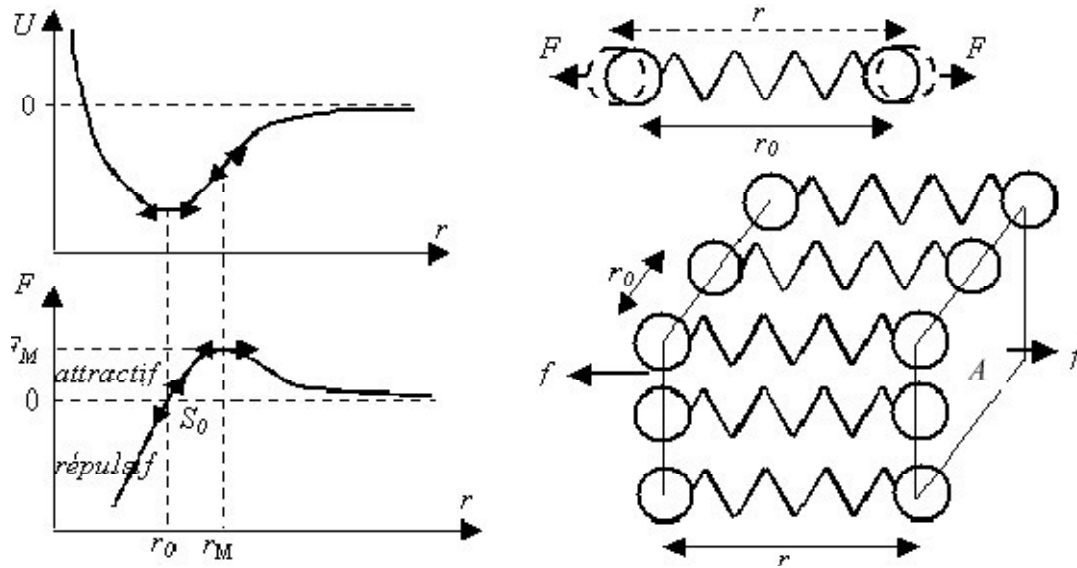
Le Cuivre est un bon exemple de matériau répondant à ces conditions. Les caractéristiques principales de l'empilement atomique s'expriment au travers de la masse volumique du matériau qui est l'expression de la masse et du diamètre des atomes constituants, mais aussi de la densité de l'empilement dans le cristal. La plupart des métaux ont de fortes densités parce que leurs atomes sont lourds et empilés de façon compacte. Les verres minéraux sont constitués d'oxydes (comme  $\text{SiO}_2$ ) amorphes dans lesquels l'empilement n'est pas cristallin.

La masse volumique des polymères et de nombreuses céramiques est plus faible que celle des métaux parce que les atomes constituants (C, H, O) sont plus légers et qu'ils adoptent des structures d'empilement non compactes.

### I.2.4. Raideur et résistance ultime

La connaissance du potentiel de Lennard-Jones permet de calculer la force interatomique  $F = \frac{dU}{dr}$  et la longueur au repos  $r_0$  ( $F = 0$ ) de la liaison qui correspond au minimum de l'énergie  $U$  de la liaison. Lorsque l'on étire la liaison la force croît progressivement jusqu'à la valeur maximale  $F_M$  pour une longueur  $r_M$  correspondant à la dissociation de la liaison qui se produit au point d'inflexion de la courbe  $U(r)$ . La pente  $S = \frac{dF}{dr}$  de la courbe  $F(r)$  définit la raideur de la liaison. Au repos,  $F = 0$  et  $r = r_0$ , elle a pour valeur :

$$S_0 = \frac{d^2U}{dr^2} \Big|_{r_0} \quad (I.2)$$



**Fig. I.4. Energie et résistance d'une liaison.**

Elle augmente depuis cette valeur lorsque la liaison est de plus en plus comprimée, traduisant la résistance de plus en plus grande du matériau à la compression hydrostatique. Au contraire, lorsque la liaison est étirée, sa raideur diminue jusque à s'annuler au point de dissociation  $r = r_m$  ou la liaison ne présente plus de résistance à la traction. Pour de faibles variations  $r - r_0$  de la longueur de la liaison autour de sa valeur d'équilibre  $r = r_0$ , la force de résistance  $F = S_0(r - r_0)$  varie donc linéairement avec  $r - r_0$  pour tous les matériaux. On peut donc calculer la valeur  $S_0$  de la raideur de la liaison en fonction de sa nature à partir des courbes théoriques  $U(r)$ . C'est le domaine de la physique du solide et de la chimie quantique.

Type de liaison	$S_0$ ( $N.m^{-1}$ )	$E = \frac{S_0}{r_0}$ (GPA)
Covalentes, liaison C – C	180	1000
Ionique pure (i.e Na-Cl)	9 - 21	30 - 70
Métallique pure (i.e Cu-Cu)	15 - 40	30 - 70
Hydrogène (i.e H <sub>2</sub> O - H <sub>2</sub> O)	2	8
Van der Waals (cires, polymères)	1	2

**Tab. I.8. Raideurs de liaisons : valeurs typiques**

La cohésion d'un matériau cristallin étant assurée par les liaisons interatomiques, leur raideur permet théoriquement de calculer les modules élastiques du matériau condition de prendre en compte la structure cristalline qui va définir les directions des liaisons par rapport à l'exorât appliqué d'où un comportement généralement anisotrope.

Pour passer de la raideur microscopique (liaison) à la raideur macroscopique (module d'Young  $E$ ) associée à chaque type de liaison, donc à chaque classe de matériau, considérons le modèle simple dans lequel tous les atomes sont situés sur un réseau cubique.  $N = \frac{A}{r_0^2}$  étant le nombre de liaisons qui traversent une section droite d'aire  $A$  normale à la force macroscopique appliquée  $f$ , la résistance à la traction microscopique de chaque liaison faiblement étirée de  $r_0$  à  $r$  étant  $F = S_0(r-r_0)$ , la force macroscopique appliquée est donc :

$$f = NF = A \frac{S_0}{r_0} \frac{r-r_0}{r_0} \quad (\text{I.3})$$

Réécrite en terme de contrainte, densité surfacique de force  $\sigma = \frac{f}{A}$  et de déformation, variation relative d'allongement  $\varepsilon = \frac{r-r_0}{r_0}$  cette relation devient  $\sigma = \frac{S_0}{r_0} \varepsilon$  Soit l'expression du module d'Young  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  caractérisant la raideur macroscopique en fonction de la raideur microscopique  $E = \frac{S_0}{r_0}$ .

En comparant les ordres de grandeur ainsi calculent (Tab. I.8) avec les valeurs mesurées, on constate un bon accord pour les matériaux cristallins : céramiques et métaux. On peut également noter la très bonne corrélation entre les valeurs des modules élastiques et les températures de fusion des matériaux qui traduisent bien la résistance des liaisons. Ainsi le diamant qui présente le plus fort module d'Young connu est aussi le matériau dont la température de fusion est la plus élevée.

Le modèle précédent permet également d'estimer la limite théorique de résistance ultime à l'attraction  $\sigma_M$  d'un matériau en fonction de son type de liaison. C'est la contrainte associée à la force  $F_M$  qui conduit à la dissociation de la liaison au maximum de la courbe  $F(r)$ , donc au point d'annulation de la courbe  $U(r)$  ou encore à la valeur  $S=0$  de la raideur. Il lui correspond une déformation maximale  $\varepsilon_M$  associée à la longueur maximale  $r_M$  d'extension de la liaison.

$$\frac{\sigma_M}{E} = \frac{1}{n+1} \frac{m+1}{n+1} \frac{m+1}{n+1} \quad (\text{I.4})$$

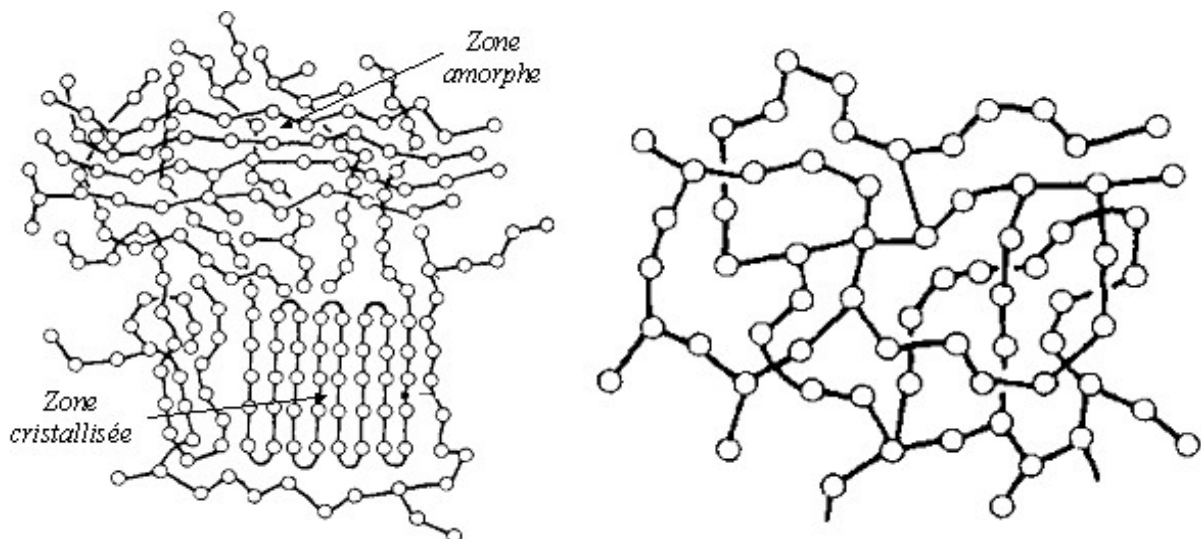
$$\varepsilon_M = \frac{n+1}{m+1} \frac{1}{n+1} - 1 \quad (\text{I.5})$$

Pour un cristal ionique,  $m=1$  et  $n=9$ , la limite ultime à la traction est  $\sigma_M \cong \frac{E}{15}$  et la déformation  $\varepsilon_M \cong 20\%$ . En faisant varier  $m$  de 1 à 6 et  $n$  de 6 à 12, le rapport  $\frac{\sigma_M}{E}$  varie assez peu, entre  $\frac{1}{10}$  et  $\frac{1}{25}$  et  $\varepsilon_M$  varie entre 10 et 30%.

### I.3. Les matériaux polymères

D'après le Tab. I.8, tous les matériaux véritablement à l'état solide devraient avoir des modules élastiques supérieurs à la valeur minimale calculée de 2GPa. Or, pour la classe des matériaux polymères, les estimations basées sur la raideur des liaisons présentent une divergence de plusieurs ordres de grandeur par rapport aux valeurs mesurées. Ceci provient de leur structure particulière. Les polymères sont constitués de très longues molécules. Bien que les atomes qui en constituent le squelette (généralement composé d'atomes de carbone) soient liés par des liaisons covalentes rigides, la longueur de ces chaînes les rend exiles et, selon les conditions, ces chaînes s'arrangent :

- Au hasard et non en structures périodiques tridimensionnelles (polymères amorphes).
- Se replient les unes sur les autres de manière symétrique et régulière la manière d'une rame de papier informatique (polymères cristallins).
- Ou présentent une structure mixte contenant à la fois des zones amorphes et des zones cristallisées.



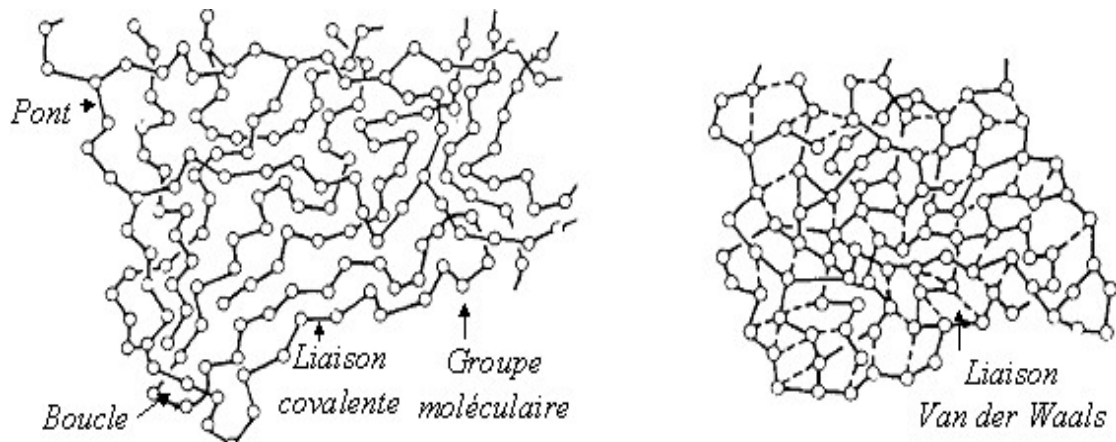
**Fig. I.5. Structure des polymères**

**À gauche : amorphe partiellement cristallise, à droite : fortement réticulé par de nombreux ponts covalents intercalés.**

Leurs propriétés mécaniques sont conditionnée par l'indice de cristallinité, le degré de pontage entre les chaînes et la densité des liaisons faibles intercalés de type Van der Waal. Les liaisons le long du squelette des macromolécules et les pontages occasionnels entre chaînes (liaisons covalentes très raides) ne participent que très peu à la raideur globale, sauf à très forte déformation lorsque toutes les chaînes sont complètement étirées. Ce sont les liaisons secondaires faibles (inter-chaînes de type Van der Waal) qui contrôlent les propriétés mécaniques des polymères. Or la densité des liaisons faibles inter-chaînes étant une fonction de la température, la température de fusion du matériau doit être remplacée par la température de transition vitreuse  $T_g$  qui caractérise la transition



entre un état normal basse température ( $T < T_g$ ) dans lequel les liaisons faibles sont établies et un état fondu haute température ( $T > T_g$ ) dans lequel les liaisons secondaires ont fondu. La plupart des polymères très flexibles ont partiellement fondu à l'ambiante.



**Fig. I.6. Influence de  $T_g$  sur la structure des élastomères**

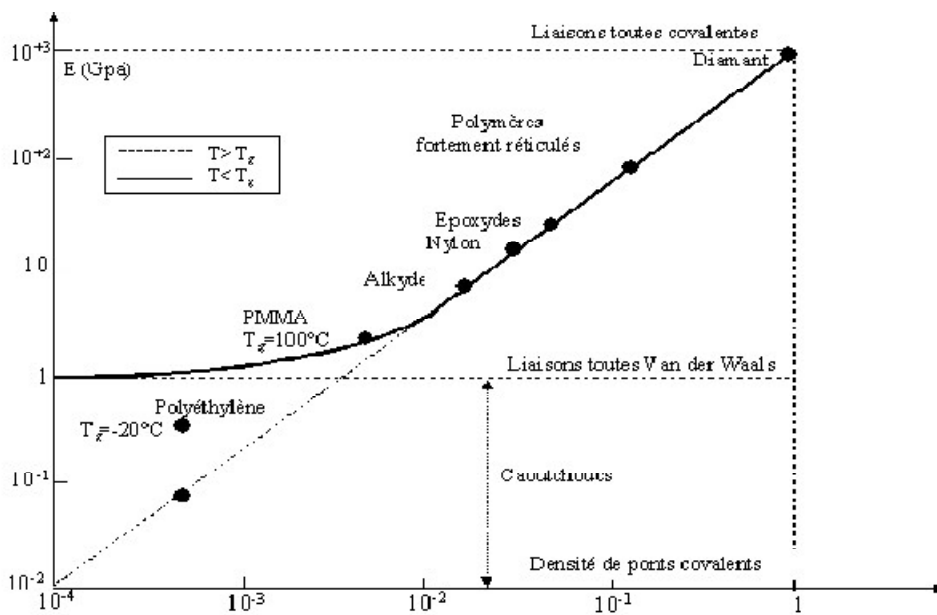
**A gauche : amorphe à  $T > T_g$  pontage inter-chainés covalents occasionnels, à droite : à  $T < T_g$  liaisons Van der Waal secondaires inter-chainés établies au niveau des groupes.**

Au delà de  $T_g$  les polymères non pontés fondent complètement et deviennent des liquides visqueux. Les polymères réticulés deviennent viscoélastiques (PVC) ou caoutchouteux (Polystyrène butadiène). Cette fusion des liaisons secondaires est la cause de leurs propriétés mécaniques particulières comme par exemple la formabilité du polyéthylène ou la grande déformabilité élastique du caoutchouc. Sous contrainte les chaînes peuvent alors facilement glisser les unes sur les autres partout où il n'y a pas de pont, ce qui explique la grande déformabilité et la faible valeur des modules élastiques des polymères à l'ambiante. Par contre, en dessous de  $T_g$  les polymères sont de véritables solides de module élastique 2GPa. Leur module est élevé par suite de la formation de ponts Van der Waal dont la densité avoisine de 1. La simple expo éreinte qui consiste à refroidir un morceau de caoutchouc à la température de l'azote liquide permet de rendre compte de la qualité de la prédiction théorique. En été ce dernier devient alors rigide (et cassant) et son module passe rapidement d'une valeur 1MPa à une valeur normale d'environ 4GPa. L'autre paramètre qui caractérise le comportement mécanique des polymères est leur degré de réticulation qui mesure la densité de ponts covalents inter-chainés. La rigidité des polymères augmente corrélativement à l'augmentation de leur taux de réticulation pour tendre vers la limite du diamant que l'on peut considérer comme un polymère dont toutes les liaisons sont pointées.

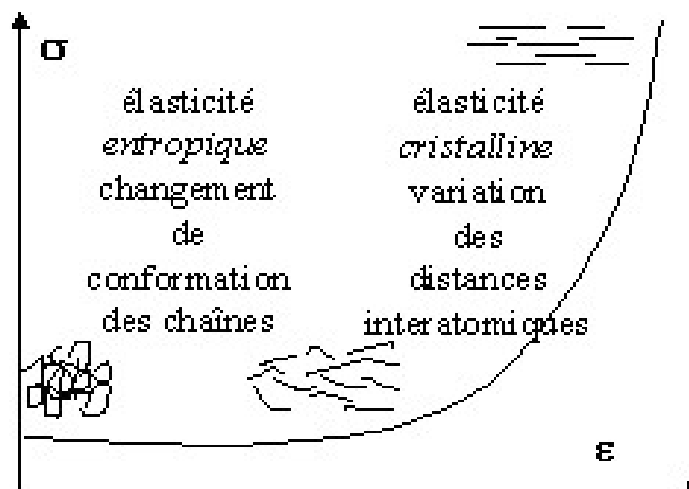
Les polymères les plus rigides ont aujourd'hui des modules comparables à celui de l'aluminium. Le module d'Young est donc une fonction croissante de la densité de ponts covalents, même pour les caoutchoucs au-dessus de la température de transition vitreuse, en dessous de  $T_g$  leur module étant élevé par suite de la formation de ponts Van der Waal dont la densité avoisine de 1.

**I.4. La haute élasticité caoutchoutière**

Pour les matériaux tels que les élastomères et les tissus biologiques, les conformations des chaînes macromoléculaires peuvent être considérablement modifiées par les déformations quasiment sans variation des distances interatomiques et le comportement du matériau résulte de la variation de résistance au changement de conformation des macromolécules, désenchevêtrement, étirement, alignement, responsables de la haute élasticité caoutchoutique, élasticité d'origine entropique. La déformation se produit quasiment à contrainte constante et les pelotes s'étirent progressivement, la faible résistance à ce étirement provenant de l'agitation thermique qui tend à réemmêlé les chaînes.



**Fig. I.7. Nuance de la  $T_g$  et du taux de réticulation**



**Fig. I.8. L'élasticité d'origine entropique**

A très haute déformation, le module tangent croit brutalement car ce sont les liaisons covalentes du squelette carboné de la plupart des chaînes qui sont maintenant étirées et la rupture (fragile) intervient sans accroissement notable de déformation.

**I.5. Propriétés des matériaux**



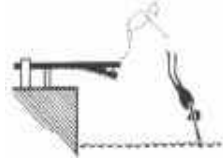

Rappelons que le comportement d'un matériau est caractérisé par sa réaction à une sollicitation. Il existe trois types de propriétés :


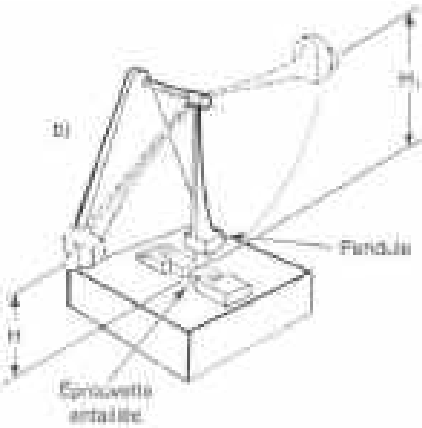

**F Propriétés mécaniques** : comportement des matériaux déformés par un système de forces.

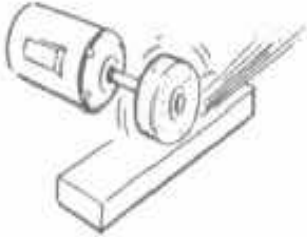
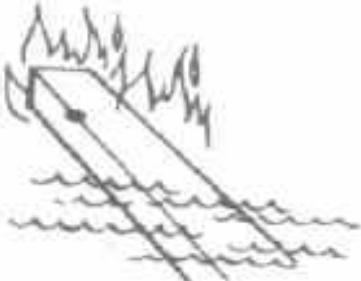
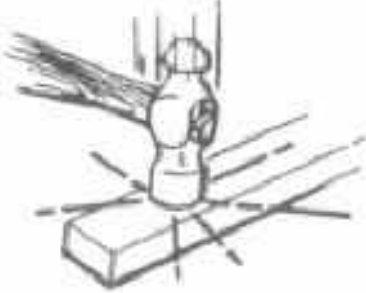
**F Propriétés physiques** : comportement des matériaux soumis à l'action de la température, d'un champ électrique E, d'un champ magnétique B ou d'une radiation électromagnétique.

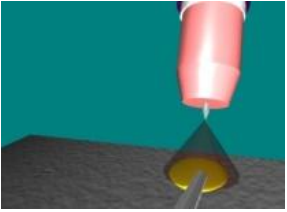
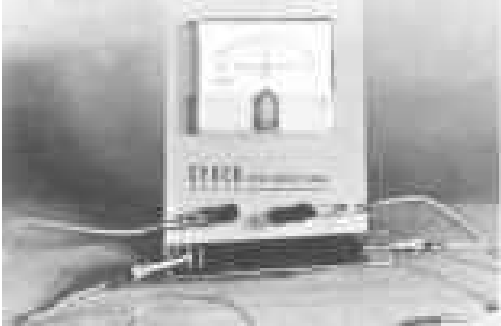
**F Propriétés chimiques** : comportement des matériaux soumis à un environnement plus ou moins agressif.

On résume ces différentes propriétés dans le tableau ci-dessous :

<p style="text-align: center;">Fragilité</p> 	<p>Un métal fragile est un métal qui se rompt au lieu de se déformer. Le verre, la fonte, le béton et les céramiques sont d'excellents exemples de matériaux fragiles. Ils ne supportent pas les efforts de pliage et se brisent lors d'un choc ou impact.</p>
<p style="text-align: center;">Ductilité</p> 	<p>Un matériau est dit ductile lorsqu'il peut être étiré, allongé ou déformé sans se rompre. Des métaux comme l'or, le cuivre et l'acier doux sont ductiles</p>
<p style="text-align: center;">Élasticité</p> 	<p>L'élasticité d'un métal désigne sa capacité à reprendre sa forme, tel un ressort que vous étirez et relâchez. La limite d'élasticité représente le point à partir duquel la pièce est déformée de manière permanente.</p>
<p style="text-align: center;">Dureté</p> 	<p>La dureté d'un matériau est définie comme la résistance qu'il oppose à la pénétration d'un corps plus dur que lui. Par exemple, l'acier est plus dur que l'aluminium, car il est plus difficile à rayer. En d'autres termes, la dureté dépend de la facilité avec laquelle un corps peut déformer ou détruire la surface d'un matériau en y pénétrant.</p>

<p style="text-align: center;">Malléabilité</p> 	<p>La malléabilité est la facilité avec laquelle un matériau se laisse façonner, étendre et aplatir en feuille mince sous un effort de compression. Les procédés de compression sont le forgeage (martèlement) et le laminage (rouleau compresseur). L'or, l'argent, le fer blanc et le plomb sont très malléables. La malléabilité croît avec l'augmentation de la température.</p>
<p style="text-align: center;">Ténacité</p> 	<p>Cette propriété est en quelque sorte le contraire de la fragilité. Connue aussi sous le terme de "résilience", la ténacité est la capacité d'un matériau à résister à la rupture sous l'effet d'un choc. Par exemple, l'acier est plus tenace que la fonte, et la fonte plus tenace que le verre. Les machinistes-outilleurs œuvrant dans la fabrication de systèmes de poinçon et de matrices en acier connaissent fort bien l'importance de cette propriété. Lorsque les systèmes ont pour fonction de découper des plaques d'acier par poinçonnage, il faut que les poinçons résistent bien aux chocs, sans se briser ni s'écailler, étant donné le rythme de production de plus en plus élevé.</p>
<p style="text-align: center;">Résistance à la corrosion</p> 	<p>La résistance à la corrosion désigne la capacité d'un matériau de ne pas se dégrader sous l'effet de la combinaison chimique de l'oxygène de l'air et du métal. Les alliages d'acier au nickel-chrome (aciers inoxydables), d'aluminium-silicium-magnésium et d'aluminium-zinc résistent tous bien à la corrosion.</p>

<p>Résistance à l'abrasion</p> 	<p>La résistance à l'abrasion désigne la résistance d'un corps dur à l'usure par frottement. Plus un matériau est dur, plus il résiste à l'abrasion. Les aciers à outils (à haute teneur en carbone), les aciers inoxydables et les aciers rapides (aciers alliés très durs) présentent une bonne résistance à l'abrasion. Par exemple, pour meuler un acier à outils, on choisit une meule différente de celle qu'on utilise pour de l'aluminium, qui, lui a très peu de résistance à l'abrasion.</p>
<p>Dilatation et contraction thermiques</p> 	<p>D'une manière générale, les matériaux subissent un allongement sous l'effet de la chaleur; c'est la dilatation. À l'opposé, ils subissent un raccourcissement sous l'effet de froid; il s'agit de la contraction. Les matériaux ne réagissent pas tous de la même façon sous une même température, car ils ont des coefficients thermiques différents. Par exemple, l'aluminium peut se dilater environ deux fois plus que l'acier sous une même variation de température.</p>
<p>Le magnétisme</p>	<p>Le magnétisme est la propriété des métaux ferreux d'être attirés par les aimants. Seuls les métaux ferreux sont sensibles aux aimants. Les métaux ne contenant pas de fer, comme le cuivre, l'aluminium et le laiton ne sont donc pas soumis aux effets du magnétisme.</p>
<p>Fatigue</p> 	<p>La fatigue est la détérioration d'un matériau soumis à des charges répétées. Ces sollicitations répétées se terminent souvent par une rupture. Même si les forces de sollicitations ne sont pas importantes, elles finissent par provoquer la rupture. Il existe de nombreux exemples de rupture sous l'effet de fatigue. Pensez, par exemple, aux ailes d'avions, aux pièces de transmission, aux vilebrequins, etc. Les charges variables et les conditions de fonctionnement répétitives sollicitent ces éléments constamment.</p>

<p style="text-align: center;">Point de fusion</p> 	<p>Le point de fusion d'un métal est la température à laquelle il passe à l'état liquide sous l'action de la chaleur. Le point de fusion d'un métal détermine en grande partie sa soudabilité. Les métaux dont le point de fusion est bas exigent moins de chaleur pour être soudés.</p>
<p style="text-align: center;">Conductivité</p> 	<p>La conductivité est la capacité d'un matériau de conduire ou de transférer la chaleur ou l'électricité. La conductivité thermique est particulièrement importante en soudage, puisqu'elle détermine la vitesse à laquelle le métal transfère la chaleur depuis la zone thermique affectée. La conductivité thermique d'un métal permet de déterminer le préchauffage nécessaire et la quantité de chaleur requise pour le soudage. Parmi les métaux usuels, le cuivre possède la meilleure conductivité thermique. L'aluminium possède environ la moitié de la conductivité du cuivre, et les aciers, seulement environ un dixième. La conductivité électrique est surtout importante lorsqu'il s'agit de souder des métaux grâce à des procédés électriques. Plus la température augmente, plus la conductivité électrique diminue. La conductivité électrique s'exprime généralement en pourcentage en fonction du cuivre.</p>

**Tab. I.9. Propriétés des matériaux**

## CHAPITRE II

### RAPPELS DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

#### II.1. Introduction

Les objets de la mécanique sont la matière sous ses formes fluides (liquides, gaz, plasmas...) et solides, les matériaux et les structures qui sont des assemblages d'éléments de matériaux ou de sous-structures. On étudie leurs mouvements sous l'action de forces, et les variations de mouvement d'un point matériel à un autre. La variable de température influe aussi sur le mouvement de ces objets et doit donc être prise en compte dans le cadre plus général de la thermomécanique des milieux continus. La modélisation en mécanique des milieux continus est un dialogue incessant et subtile entre le discret et le continu dans le but de trouver l'outil de modélisation le plus efficace pour un objectif donné.

L'ingénieur voudrait pouvoir calculer simplement la distribution des contraintes et des déplacements dans ce volume (afin de vérifier, par exemple, qu'elles ne dépassent pas des seuils imposés). Dans certains cas, le volume étudié présente une dimension négligeable devant les deux autres (coques et plaques) ou deux dimensions négligeables devant la troisième (poutres) ; moyennant un certain nombre d'hypothèses, les calculs de la MMC se simplifient : il faut calculer des champs plus simples. On parle alors de résistance des matériaux (RDM ou mécanique des structures), ainsi la RDM est une simplification de la MMC : elle fournit des résultats qui ne sont, en toute rigueur, non exacts mais assez proches de la réalité pour permettre de dimensionner des structures. Certains des résultats de la RDM contredisent même certains principes de la MMC, mais ils s'avèrent suffisamment proches des résultats exacts fournis par la MMC. Bien entendu, les modèles simplifiés de la RDM sont nombreux, plus ou moins proches de la réalité et les résultats présentés sont valables dans un cadre théorique bien donné. En RDM, on utilise les notions de tenseurs de déformations, de contraintes ainsi que la loi de Hooke ; ces notions appartiennent au domaine de la MMC.

#### II.2. La mécanique des solides continus

La mécanique des Milieux Continus (MMC) a pour objet l'étude de milieux continus ; on suppose connues leurs lois de comportements, qui lient le champ des contraintes et le champ de déformations, Lui-même lié au champ de déplacement où sont rappelées quelques notions de MMC).

Un cas particulier de la MMC consiste à étudier un volume donné de matériau, supposé élastique Linéaire (la relation entre contraintes et déformations est linéaire). On suppose de plus que cette relation entre contraintes et déformations vérifie certaines hypothèses (vérifiées dans le cas de la loi

d'élasticité de Hooke). En écrivant l'équilibre local de la matière, en explicitant les conditions limites (une partie de la surface du volume est soumise à un chargement donné, l'autre est soumise à un déplacement donné) et en se plaçant sous l'hypothèse des «petites déformations», on peut montrer qu'il existe un unique champ de déplacements, de déformations et de contraintes qui décrit l'équilibre statique de ce volume de matériau. Le problème est dit mathématiquement bien posé. Ce résultat nécessite une certaine abstraction mathématique et demeure assez difficile; néanmoins, il est toujours admis par les mécaniciens. Malheureusement, si sur le plan théorique, on sait que la solution existe, sur le plan pratique, on ne peut rarement calculer cette solution de façon explicite ; on peut aussi mettre au point des calculs approchés (par exemple, par éléments finis), mais qui exigent l'utilisation de logiciels ainsi que des connaissances d'analyse numérique.

C'est le domaine de la Science qui étudie et modélise le comportement de la matière en prenant en compte, contrairement à la Mécanique Rationnelle, sa déformabilité. Comme les déformations dépendent non seulement des forces, mais aussi de la température, il faut également prendre en compte les lois d'échange de chaleur et les principes de la Thermodynamique. Contrairement à ces principes bien établis, les lois de déformation sont loin d'être simples et connues avec autant de certitude. Si théorie et calculs sont nécessaires pour modéliser et prédire, la théorie doit être précédée d'observations et les calculs vers l'expérience.

### II.3. Milieux déformables

### II.4. Forces externes et équilibre mécanique

La loi fondamentale de la dynamique appliquée a un corps :

$$m\dot{\mathbf{g}} = \sum \dot{\mathbf{F}} \quad (\text{II.1})$$

En équilibre mécanique statique implique la nullité de la résultante et du moment résultant des efforts externes appliqués :

$$\sum \dot{\mathbf{M}} = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\sum \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad (\text{II.3})$$

- Si le nombre des efforts externes est égal au nombre d'équations, le corps est en état d'équilibre isostatique et les efforts sont entièrement déterminés.
- Si ce nombre est supérieur au nombre d'équations, le corps est en état d'équilibre hyperstatique et la détermination des efforts implique la prise en compte de la déformation du milieu pour obtenir les équations complémentaires.

### II.5. Forces internes, forces de surface et transmission des efforts

Sous l'action d'efforts externes tout corps se déforment. Cette déformation fait apparaître des forces internes dont l'origine se situe à l'échelle atomique. Ce sont les liaisons atomiques



distendues (ou comprimées) qui exercent des forces de rappel qui tendent à ramener les atomes à leur position d'équilibre et le corps dans son état initial. Ces forces se caractérisent par un rayon d'action de l'ordre de quelques distances interatomiques.

Or la Mécanique des Milieux Continus, théorie macroscopique, ne considère que des distances grandes par rapport aux dimensions atomiques et leur rayon d'action doit être considéré comme nul à cette échelle. Les forces de rappel à l'origine de l'existence des forces internes sont des forces à courte portée qui ne se transmettent qu'à leur environnement immédiat. Il en résulte que les forces exercées sur une partie du corps par les parties environnantes agissent directement par sa surface. Les forces internes sont des forces surfaciques, des actions de contact.



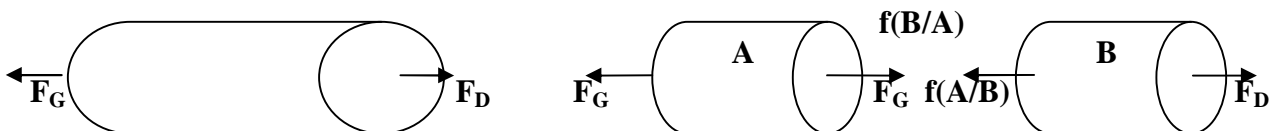
Barreau soumis à un effort de traction



Efforts intérieurs appliqués par la partie B sur la partie A.



Efforts intérieurs appliqués par la partie A sur la partie B



**Fig. II.1. Principe de l'action et de la réaction : l'action de la partie A sur la partie B est égale et opposée à l'action de la partie B sur la partie A**

Considérons un corps soumis à l'action des forces externes  $\vec{F}_G$  et  $\vec{F}_D$ , L'équilibre mécanique statique impose :

$$\vec{F}_G + \vec{F}_D = \vec{0} \tag{II.4}$$

Séparons par la pensée ce corps en deux parties A et B. L'équilibre de la partie A prise isolément impose l'existence d'une force :  $\mathbf{f}(B/A)$

Telle que :

$$\mathbf{F}_G + \mathbf{f}(B/A) = 0 \tag{II.5}$$

Est la force interne représentant l'action de la partie B sur la partie A. Réciproquement, l'équilibre de la partie B prise isolément impose l'existence d'une force :  $\mathbf{f}(A/B)$

Telle que :

$$\mathbf{F}_D + \mathbf{f}(A/B) = 0 \tag{II.6}$$

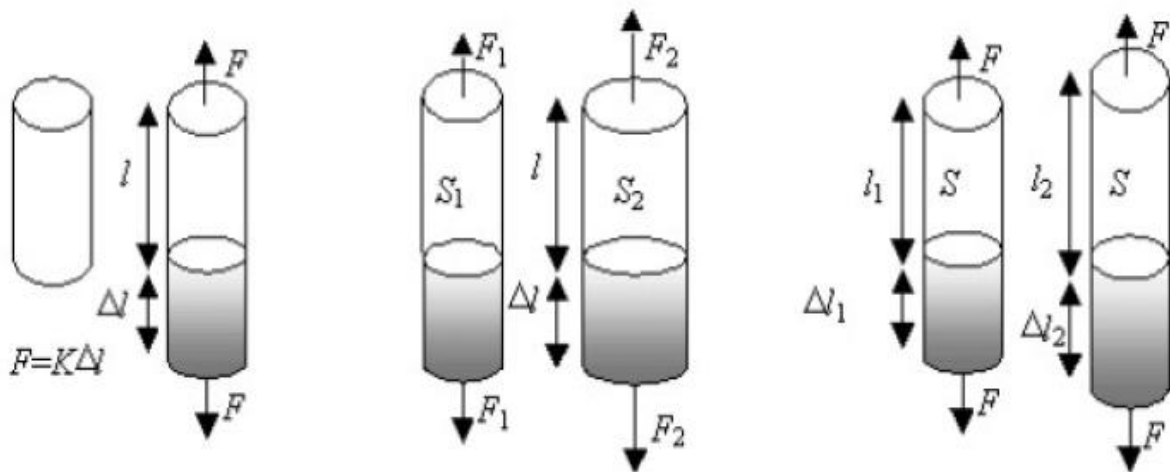
La force interne représentant l'action de la partie A sur la partie B.

Il résulte de l'équilibre du corps pris dans son ensemble que la résultante des forces internes est toujours nulle :

$$\mathbf{f}(B/A) + \mathbf{f}(A/B) = 0 \tag{II.7}$$

**II.6. Raideur, rigidité, état mécanique local**

Un corps ne pouvant résister à la sollicitation appliquée qu'en se déformant, l'essai de traction donne accès à la raideur  $K$  de l'éprouvette défini comme le rapport de la force  $F$  de traction à l'allongement  $\Delta l$  résultant. La raideur  $K$  prend en compte à la fois la géométrie de l'éprouvette et la rigidité intrinsèque du matériau.



**Fig. II.2. Raideur de l'éprouvette et rigidité du matériau.**

L'expérience a montré que pour étirer de la même quantité  $\Delta l$  deux éprouvettes du même matériau, De même longueur initiale  $L$  mais d'aire ou de section droite  $S$  différente, la force  $F$  à appliquer varie proportionnellement à  $S$ . Elle a également montré qu'à aire de section  $S$  et à force  $F$  ixés, l'allongement résultant  $\Delta l$  varie proportionnellement à la longueur initiale  $l$ .

Il en résulte que la raideur  $K$  varie proportionnellement à  $S$  et inversement proportionnellement à  $l$  de sorte que la relation  $F = K\Delta l$  se met sous la forme :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \tag{II.8}$$

Là quantité  $E$  indépendante de la géométrie de l'éprouvette étant une caractéristique intrinsèque du matériau : sa rigidité.

Les variables décrivant l'état mécanique local, indépendamment de la géométrie de la structure, seront donc :

§ La contrainte :  $s = \frac{F}{S}$ , Ou la densité surfacique de force.

§ La déformation :  $e = \frac{\Delta l}{l}$ , Ou  $e$  est la variation relative de longueur.

**II.7. Etat de contraintes dans un solide**

L'état des contraintes en un point  $M$  d'un solide soumis à un chargement mécanique (figure II.3) permet de caractériser les actions mécaniques exercées sur la matière en ce point.

**II.7.1. Tenseur des contraintes**

En tout point  $M$  d'un milieu continu, l'état des contraintes est entièrement déterminé par la connaissance du tenseur des contraintes, noté  $s(M)$ . Ce tenseur est un tenseur de rang 2, symétrique, représenté par la matrice :

$$s = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{bmatrix} \tag{II.9}$$

$$s_{21} = s_{12} \quad s_{31} = s_{13} \quad s_{32} = s_{23} \tag{II.10}$$

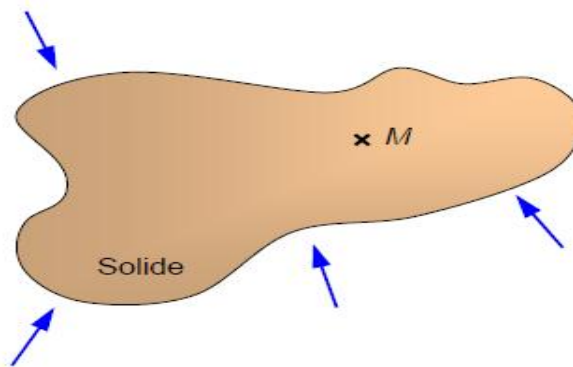


Fig. II.3. Solide soumis à un chargement mécanique.

**II.7.2. Force exercée en un point sur un élément de surface**

L'action mécanique exercée sur la surface unité (considérée comme infiniment petite) d'orientation  $\vec{n}$  (figure II.4), par la matière située du côté de l'orientation positive définie par le vecteur  $\vec{n}$  (vecteur unitaire), est une force dont la résultante  $\vec{t}(M, \vec{n})$ , appelée *vecteur contrainte*, s'exprime par la relation :

$$\overset{\mathbf{r}}{t}(M, \overset{\mathbf{u}}{n}) = \overset{\mathbf{r}}{t} = S(M) \overset{\mathbf{u}}{n} \tag{II.11}$$

La force  $\overset{\mathbf{u}}{dF}$  exercée sur l'élément  $dS$  de surface de même orientation s'exprime donc par :

$$\overset{\mathbf{u}}{dF} = \overset{\mathbf{r}}{t} dS$$

L'expression (II.11) peut s'écrire sous forme matricielle en introduisant :

La matrice des composantes du vecteur contrainte  $\overset{\mathbf{r}}{t}$  dans la base  $(\overset{\mathbf{u}}{e}_1, \overset{\mathbf{u}}{e}_2, \overset{\mathbf{u}}{e}_3)$  :

$$\overset{\mathbf{r}}{t} = \begin{bmatrix} \overset{\mathbf{r}}{t}_1 \\ \overset{\mathbf{r}}{t}_2 \\ \overset{\mathbf{r}}{t}_3 \end{bmatrix} \tag{II.12}$$

La matrice des composantes du vecteur normale  $\overset{\mathbf{u}}{n}$  dans la base  $(\overset{\mathbf{u}}{e}_1, \overset{\mathbf{u}}{e}_2, \overset{\mathbf{u}}{e}_3)$  :

$$\overset{\mathbf{u}}{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{II.13}$$

est suivante :

$$\begin{bmatrix} \overset{\mathbf{r}}{t}_1 \\ \overset{\mathbf{r}}{t}_2 \\ \overset{\mathbf{r}}{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \tag{II.14}$$

D'où les composantes du vecteur  $\overset{\mathbf{r}}{t}$  dans la base  $(\overset{\mathbf{u}}{e}_1, \overset{\mathbf{u}}{e}_2, \overset{\mathbf{u}}{e}_3)$  :

$$\begin{cases} \overset{\mathbf{r}}{t}_1 = S_{11}n_1 + S_{12}n_2 + S_{13}n_3 \\ \overset{\mathbf{r}}{t}_2 = S_{12}n_1 + S_{22}n_2 + S_{23}n_3 \\ \overset{\mathbf{r}}{t}_3 = S_{13}n_1 + S_{23}n_2 + S_{33}n_3 \end{cases} \tag{II.15}$$

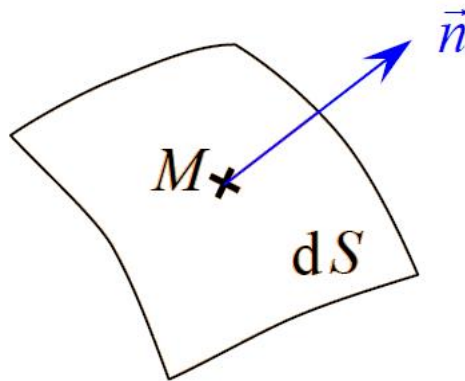


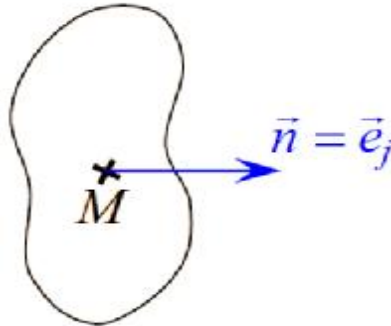
Fig. II.4. Élément de surface en un point M.

et le vecteur contrainte s'écrit :

$$\overset{\mathbf{r}}{t} = \overset{\mathbf{u}}{t}_1 \overset{\mathbf{u}}{e}_1 + \overset{\mathbf{u}}{t}_2 \overset{\mathbf{u}}{e}_2 + \overset{\mathbf{u}}{t}_3 \overset{\mathbf{u}}{e}_3 \tag{II.16}$$

**II.7.3. Signification physique des composantes du tenseur de contraintes**

Considérons un élément de surface dont la direction de la normale est confondue avec la direction de l'un des axes de référence (figure II.5). Soit :  $\vec{n} = \vec{e}_j$  avec  $j = 1, 2, 3$ .



**Fig. II.5. Élément de surface normal à la direction  $\vec{e}_j$  de l'un des axes de référence.**

D'après la relation (II.16), les composantes du vecteur de contrainte sont :

$$\begin{aligned} t_1 &= S_{1j} \\ t_2 &= S_{2j} \\ t_3 &= S_{3j} \end{aligned} \tag{II.17}$$

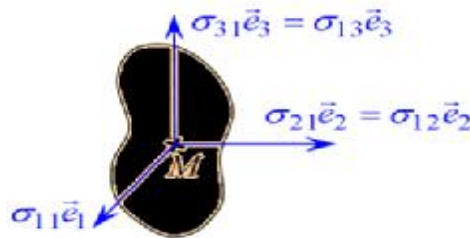
Les grandeurs  $S_{1j}, S_{2j}, S_{3j}$  sont donc respectivement les composantes suivant les directions  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  du vecteur contrainte relatif à une surface de direction normale  $\vec{n} = \vec{e}_j$  ( $j = 1, 2$  ou  $3$ ).

Par exemple, si  $\vec{n} = \vec{e}_1$  les composantes sont respectivement  $S_{11}, S_{21} = S_{12}, S_{31} = S_{13}$ , et le vecteur contrainte s'écrit :

$$\vec{t}(M, \vec{e}_1) = S_{11}\vec{e}_1 + S_{12}\vec{e}_2 + S_{13}\vec{e}_3 \tag{II.18}$$

D'où le schéma de la figure II.6.

Il est usuel de représenter les composantes des vecteurs contraintes exercées sur les faces d'un cube d'arêtes parallèles aux axes de référence. Deux notations sont utilisées et sont reportées sur la figure II.6, suivant les directions considérées :  $(1, 2, 3)$  ou  $(x, y, z)$ .



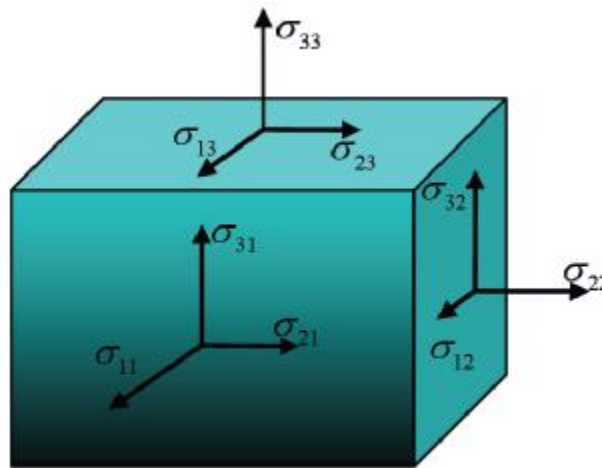
**Fig. II.6. Composantes du vecteur de contrainte sur une surface de direction normale.**

**II.7.4. Composantes normale et tangentielle du vecteur de contraintes**

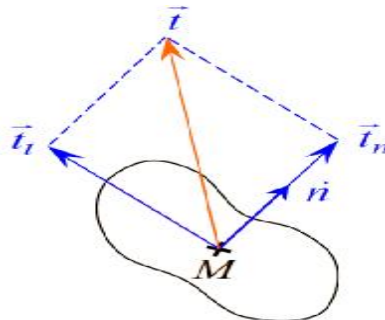
Le vecteur contrainte  $\vec{t}$  est habituellement décomposé (figure II.8) en :

- Ø Une *contrainte normale*  $\vec{t}_n$  de direction  $\vec{n}$ ,
- Ø Une *contrainte tangentielle*  $\vec{t}_t$  de direction contenue dans le plan vectoriel de l'élément de surface. Cette contrainte tangentielle est généralement appelée contrainte de cisaillement. Le vecteur de contrainte s'écrit alors :

$$\vec{t} = \vec{t}_n + \vec{t}_t \tag{II.19}$$



**Fig. II.7. Composantes de tenseur de contraintes agissant sur trois plans mutuellement orthogonaux quelconques.**



**Fig. II.8. Composantes normale et tangentielle du vecteur contrainte.**

La contrainte normale s'exprime suivant :

$$\vec{t}_n = t_n \vec{n} \quad \text{Avec} \quad t_n = \vec{n} \cdot \vec{t}$$

Où  $t_n$  est la composante normale du vecteur de contrainte. Introduisant la relation précédente, cette composante s'écrit suivant :

$$t_n = \vec{n} \cdot \left[ \mathbf{S}(M) \vec{n} \right] \tag{II.20}$$

Cette relation peut être réécrite en utilisant la notation matricielle sous la forme :

$$t_n = n' \mathbf{S}(M) n \tag{II.21}$$

En introduisant la matrice ligne  $n^t = [n_1 \ n_2 \ n_3]$  transposée de la matrice  $n$  Nous obtenons :

$$t_n = s_{11}n_1^2 + s_{22}n_2^2 + s_{33}n_3^2 + 2s_{11}n_1n_3 + 2s_{23}n_2n_3 \tag{II.22}$$

Si  $t_n$  est positif, on dit que le solide en  $M$  subit dans la direction  $\mathbf{n}$  une tension ou traction. Si  $t_n$  est négatif, le milieu subit une compression. La contrainte de cisaillement peut être déterminée par la relation :

$$t_i = n \wedge \left\{ [S(M)n]n \right\} \tag{II.23}$$

**II.7.5. État de déformations en un point**

Soit un solide ( $S$ ) déformable (figure II.9). Dans son état non déformé, la position d'un point  $M$  quelconque du solide ( $S$ ) est définie, dans un repère  $(O / \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , par le vecteur de position :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \tag{II.24}$$

Sous l'effet d'actions mécaniques extérieures, le solide se déforme, et les points du solide se déplacent : le point  $M$  vient en  $M'$ . La position du point  $M$  dans l'état déformé est définie par :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'} \tag{II.25}$$

Le vecteur déplacement  $\overrightarrow{MM'}$  est une fonction du point  $M$ , généralement notée  $\mathbf{u}(M)$ . Ce déplacement varie d'une manière continue à l'intérieur d'un solide.

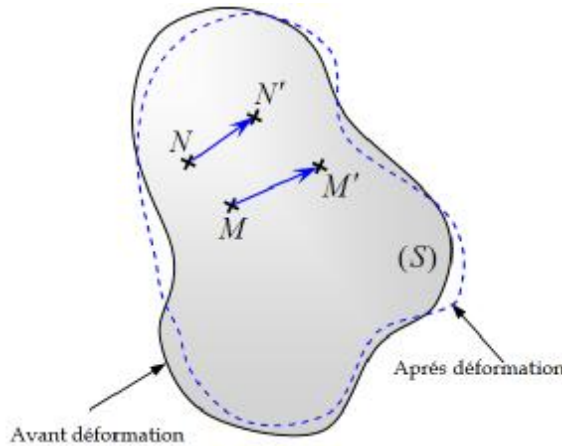


Fig. II.9. Solide déformable.

**II.7.6. Tenseur des déformations**

Le tenseur des déformations est donné par la relation suivante :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \tag{II.26}$$

Les 9 quantités  $e_{ij}$  constituent les composantes du *tenseur des déformations* dans la base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Dans le cadre d'une théorie dite des petites déformations ou HPP (hypothèse des petites perturbations), l'infiniment petit du deuxième ordre  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$  est négligé par rapport à ceux du premier ordre. Les composantes du tenseur des déformations se réduisent alors à :

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.27})$$

Le tenseur des déformations est un tenseur de rang 2, symétrique :

$$e_{ij} = e_{ji} \quad (\text{II.28})$$

Il s'écrit sous forme matricielle suivant :

$$e(M) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Avec :

$$\begin{cases} e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \\ e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

et

$$\begin{cases} e_{12} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ e_{13} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ e_{23} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

$$g_{12} = 2e_{12} \quad (\text{II.32})$$

La composante  $g_{12}$  du tenseur des déformations représente donc la moitié de la déformation angulaire au point  $M$  entre les directions  $\overline{MN_1}$  et  $\overline{MN_2}$ . Cette déformation angulaire  $g_{12}$  est appelée déformation en cisaillement au point  $M$  entre les directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ .

De la même manière :

- la composante  $e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$  représente l'allongement unitaire au point  $M$  dans la direction  $\underline{e}_3$  ;
- la composante  $e_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$  représente la moitié de la déformation en cisaillement  $g_{13}$  entre les directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_3$  ;
- la composante  $e_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$  représente la moitié de la déformation en cisaillement  $g_{23}$  entre les directions  $\underline{e}_2$  et  $\underline{e}_3$ .



### II.8. Conditions de compatibilité

Le champ des déplacements correspondant à un état de déformation donné est obtenu par intégration des équations (II.30 et II.31). Soit au total six équations pour déterminer les trois composantes ( $u_1, u_2, u_3$ ) du déplacement. Pour que la solution soit unique, les composantes du tenseur des déformations doivent vérifier les six relations :

$$\frac{\partial^2 e_{ii}}{\partial^2 x_j^2} + \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial^2 x_i^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j, \quad (II.33)$$

$$\frac{\partial^2 e_{ii}}{\partial x_i \partial x_K} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial e_{jK}}{\partial x_i} + \frac{\partial e_{iK}}{\partial x_j} + \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_K} \right) \quad i \neq j \neq K, \text{ avec } i, j, k=1, 2, 3.$$

Ces expressions constituent les six relations de compatibilité.

### II.9. Problème d'élasticité plane

Un champ de déformations ou de contraintes est dit plan si l'une des valeurs propres (déformation ou contrainte principale) est nulle ( $\varepsilon_3$  ou  $\sigma_3$  par exemple).

#### II.9.1. Déformations planes

Si l'une des composantes de (disons  $u_3$ ) est nulle ou constantes, alors ses dérivées ( $u_{3,j}$ ) sont toutes nulles (en particulier  $\varepsilon_{33} = 0$ ). Un cas plus intéressant se rencontre lorsqu'on a une symétrie de translation le long d'un axe. Dans ce cas, ce sont toutes les dérivées par rapport à  $x_3$  qui sont nulles et en outre  $u_3$  est forcément nul ou constant de sorte que :

$$2e_{i3} = \frac{\partial u_i}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_i} = 0$$

Le tenseur des déformations se réduit alors à :

$$e_{i3} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.34)$$

Ou dans les axes principaux

$$e_{i3} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (II.35)$$

Dans le cas pris en exemple, le chargement doit être dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  et indépendant. On parle alors d'état de déformation plane (Figure II.10). Il peut arriver que le corps déformable soit incompressible (c'est en première approximation le cas de nombreux liquides comme l'eau par exemple). Les états de déformation plane correspondent à des états de contrainte non plane. En effet, la loi de Hooke donne :

$$e_{33} = \frac{1}{E} [s_{33} - \nu(s_{11} + s_{22})] = 0$$

$$s_{33} = \nu(s_{11} + s_{22}) \neq 0$$
(II.36)

Cela signifie que pour maintenir un état plan de déformation ( $u_3 = 0$ ), le matériau isotrope exerce des efforts dans la direction qui s'ajoutent aux efforts appliqués dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

**II.9.2. Contraintes planes**

Cet état de contrainte est pratiquement réalisé dans une plaque mince qui n'est pas chargée sur ces grandes faces de normale comme sur l'exemple de la figure (II.11). En effet, sur ces faces, on peut considérer que le vecteur contrainte  $T_3 = 0$  et que cette condition est vraie dans toute l'épaisseur de la plaque, ce qui implique :  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ . Les composantes du tenseur des contraintes ne sont fonction que des coordonnées  $X_1$  et  $X_2$  dans le plan de la plaque  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  c'est-à-dire indépendante de la position dans l'épaisseur. Le tenseur s'écrit :

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(II.37)

La relation de comportement permet de dire qu'est une direction principale de contrainte et de déformation. Le tenseur de déformation s'écrit :

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}$$
(II.38)

Ses composantes ne sont fonction que de  $X_1$  et  $X_2$  également. La déformation  $e_{33}$  est non nulle et elle vaut :

$$e_{33} = -\frac{\nu}{1 + 2\nu} (e_{11} + e_{22}) \neq 0$$
(II.39)

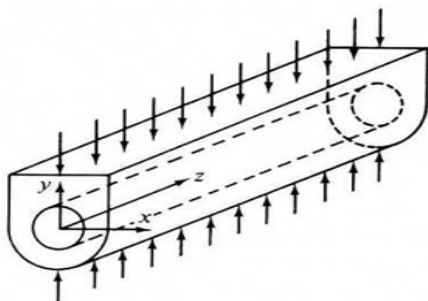


Fig. II.10. État de déformation plane.

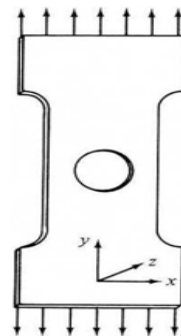


Fig. II.11. État de contrainte plane.

**II.10. Forme des tenseurs de contraintes et déformations en coordonnées cylindriques**

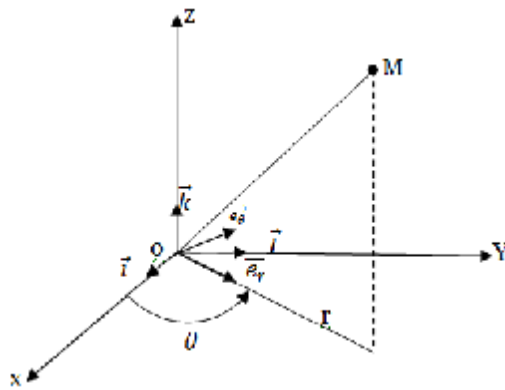
L'utilisation de coordonnées cylindriques s'impose dans de nombreux problèmes, en particulier lorsque le problème est de révolution. Le point M est repéré par ses coordonnées  $(r, q, z)$  (figure II.12). Les matrices des contraintes et déformations sont de la forme :

$$s(M) = \begin{bmatrix} s_{rr} & s_{rq} & s_{rz} \\ s_{rq} & s_{qq} & s_{qz} \\ s_{rz} & s_{qz} & s_{zz} \end{bmatrix}, \text{ et } e(M) = \begin{bmatrix} e_{rr} & e_{rq} & e_{rz} \\ e_{rq} & e_{qq} & e_{qz} \\ e_{rz} & e_{qz} & e_{zz} \end{bmatrix}, \tag{II.40}$$

avec :

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{qq} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_q}{\partial q}, \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\begin{cases} 2e_{rq} = \frac{\partial u_q}{\partial r} - \frac{u_q}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial q} \\ 2e_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ 2e_{qz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{cases} \tag{II.41}$$



**Fig. II.12. Coordonnées cylindriques.**

en introduisant les composantes  $(u_r, u_q, w)$  du vecteur déplacement  $\vec{u}$  dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_q, \mathbf{k})$  obtenue à partir de la base  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  des coordonnées cartésiennes, par rotation  $\theta$  autour de la direction  $\vec{k}$ . Les relations entre les composantes des matrices des contraintes exprimées dans la base des coordonnées cartésiennes et des coordonnées cylindriques s'obtiennent aisément à l'aide de la théorie générale de passage.

Les relations fondamentales en coordonnées cylindriques sont ensuite déduites en transposant les relations précédentes dans la base  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_q, \mathbf{k})$  et s'écrivent dans le cas d'un problème de statique :

$$\begin{cases} \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial s_{rq}}{\partial q} + s_{rr} - s_{qq} \right) + \frac{\partial s_{rz}}{\partial z} + f_r = 0 \\ \frac{\partial s_{rq}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial s_{qq}}{\partial q} + 2s_{rq} \right) + \frac{\partial s_{qz}}{\partial z} + f_q = 0 \\ \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial s_{qz}}{\partial q} + s_{rz} \right) + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

**II.11. Méthodes de résolution des problèmes de la mécanique des solides déformables**

A partir de la formulation des transformations du milieu continu (déformations), du système des efforts intérieurs (contraintes) et de la loi de comportement, la résolution d'un problème d'élasticité revient à trouver un champ de déplacement et un champ de contrainte vérifiant :

- o les équations d'équilibres,
- o la loi de comportement locale,
- o les conditions aux limites du problème. Pour un problème régulier de type I, ces conditions aux limites doivent prescrire en tout point de la surface extérieure du solide étudié les trois composantes du vecteur déplacement et du vecteur contraint. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$u_i = \mathbf{h}_{sur} S_u \quad (\text{II.43})$$

$$s_{ij} n_j = \mathbf{H}_i \text{sur} S_f \quad (\text{II.44})$$

En quasi-statique, la résolution du problème revient finalement à trouver  $u_i(\bar{X})$  et  $s_{ij}(\bar{X})$

Vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + p f_i = 0 \\ s_{ij} = f(e_{kl}) \Rightarrow \bar{s} l Tr(\bar{e}) \bar{d} 2 u \bar{e} \\ e_{ij} = g(s_{kl}) \Rightarrow \bar{e} = \frac{1}{2u} \left( \bar{s} - \frac{l}{(3l + 2u)} Tr(\bar{s}) \bar{d} \right) \\ s_{ij} n_j = \mathbf{H}_i \text{sur} S_f \end{array} \right. \quad (\text{II.45})$$

Ainsi posé, on démontre qu'un problème d'élasticité est dit 'bien posé', c'est-à-dire qu'il admet une et une seule solution. Ce théorème est essentiel car il garantit d'une part que, une fois formulé ainsi, il existe une solution, mais surtout d'autre part que, si nous trouvons une solution, elle sera alors exacte (aux hypothèses du modèle ainsi formulé près). Comment trouver cette solution ?

Malheureusement, seuls des problèmes simples peuvent être résolus explicitement. Ces solutions simples sont néanmoins très utiles et elles permettent souvent de trouver une première réponse à un problème même a priori complexe. Une démarche est de commencer par établir une liste exhaustive des conditions qui doivent être vérifiées, puis de faire des hypothèses sur le champ des contraintes et/ou des déplacements. Le problème est résolu au fur et à mesure que les diverses équations sont vérifiées.

### II.11.1. Méthode en déplacement (déplacements imposés)

Une solution du problème est construite à partir d'hypothèses sur le champ des déplacements (la forme analytique supposé du champ des déplacements). Il reste alors à vérifier toutes les conditions du problème, et on revient à substituer dans les équations d'équilibre, l'expression des contraintes en fonction des déplacements. Ainsi,

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{ij} = I e_{kk} \mathbf{d}_{ij} + 2u e_{ij} \\ \mathbf{s}_{ij} = I u_{k,k} \mathbf{d}_{ij} + u(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

Nous devons aussi exprimer la divergence de  $\sigma_{ij}$  pour développer la condition d'équilibre, soit :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{ij} = I e_{kk} \mathbf{d}_{ij} + m u_{i,jj} + m u_{j,ji} \\ \mathbf{s}_{ij,j} = (I + u) u_{k,ki} + m u_{i,jj} \end{cases} \quad (\text{II.47})$$

Les équations de mouvement (avec le terme d'inertie) s'écrivent donc en fonction des déplacements comme :

$$(I + m) \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_k \partial X_i} + m \frac{\partial^2 u_i}{\partial X_j \partial X_j} + r f_i = r \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{II.48})$$

Ce sont les équations de *Navier* que l'on écrit souvent sous une forme vectorielle :

$$(I + m) \text{grad div} u + m \Delta u + r f = r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{II.49})$$

### II.11.2. Méthode en contraintes (contraintes imposées)

Dans d'autres problèmes, il pourra être plus commode de partir des contraintes. La démarche est analogue, mais elle se fait dans le sens inverse de celle présentée en déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{s}_{ij} = f(X_k) \Rightarrow \\ \mathbf{s}_{ij} n_j = \mathbf{F}_i \text{ sur } S_f \Rightarrow \\ \frac{\partial \mathbf{s}_{ij}}{\partial x_j} + r f_i = 0 \Rightarrow \\ \mathbf{e} \frac{1}{2m} (\overline{\mathbf{s}} - \frac{l}{3l+2m} \text{Tr}(\overline{\mathbf{s}}) \overline{\mathbf{d}}) \Rightarrow \\ \partial^2_{kl} \mathbf{e}_{ij} + \partial^2_{ij} \mathbf{e}_{kl} - \partial^2_{ik} \mathbf{e}_{jl} = 0 \Rightarrow \\ u_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \Rightarrow \\ u_i = \mathbf{u}_i \text{ sur } S_u \Rightarrow \end{array} \right. \quad (\text{II.50})$$

1. faire une hypothèse sur le champ des contraintes,
2. vérifier les conditions aux limites statiques,
3. écrire/vérifier les conditions d'équilibre,
4. calculer le champ des déformations,
5. vérifier les équations de compatibilité,
6. calculer les champs de déplacement,
7. vérifier les conditions aux limites cinématiques.

Lorsqu'il n'y a pas de conditions aux limites cinématiques, il est possible d'éviter le calcul, parfois difficile, du déplacement, mais pas celui des équations de compatibilité : le déplacement doit pouvoir être calculé même si il ne l'est pas réellement. Là encore, il est possible de regrouper les étapes 4 et 5 en écrivant directement en fonction des contraintes les équations de compatibilité. On obtient ainsi les équations de *Beltrami* :

$$\mathbf{s}_{ij,il} + \frac{1}{1+\nu} \mathbf{s}_{kk,ij} + (r f_i)_{,i} + \frac{\nu}{1-\nu} (r f_l)_{,l} \mathbf{d}_{ij} = 0 \quad (\text{II.51})$$

L'apparition des forces de volume dans ces équations tient aux équations d'équilibre qui interviennent dans le calcul. Si les forces de volume sont nulles ou constantes, alors ces équations prennent la forme particulièrement simple donnée par les relations (II.52). Notons qu'elles ne s'appliquent qu'aux problèmes d'élasticité linéaire isotrope. Bien évidemment, elles sont automatiquement vérifiées si le champ de contrainte (ou de déformation) sont des fonctions linéaires des coordonnées.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s}_{ij}}{\partial X_l \partial X_l} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_i} = 0 \quad (\text{II.52})$$

## II.12. Expression des conditions aux limites

Nous présentons dans ce paragraphe quelques cas de conditions aux limites.

### II.12.1. Formulations dynamiques et quasi-statiques

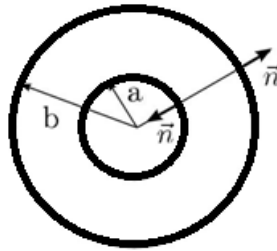
Pour résoudre un problème de Mécanique des Solides, il faut calculer la solution  $(u_i, \mathbf{S}_{ij})$ , c'est-à-dire calculer les champs de vecteurs déplacements  $u_i(x)$  et de tenseurs des contraintes  $\mathbf{S}_{ij}(x)$ , à partir des données, qui sont constituées par :

#### a. L'ensemble des sollicitations imposées au solide :

- forces volumiques ;
- conditions aux limites (forces ou déplacements imposés à la surface).

#### b. Les conditions initiales, précisant la position et la vitesse initiale du solide.

**Exemple : Réservoir sphérique soumis à une pression intérieure  $n$**



- les forces volumiques sont supposées nulles (pesanteur négligeable)

$$f_i = 0 \quad (\text{II.53})$$

- la surface extérieure  $r = b$  est soumise à la pression atmosphérique, la contrainte est donc nulle, et on a donc :

$$r = b : \mathbf{S}_{ij} n_j = T_i = 0 \quad (\text{II.54})$$

- la surface intérieure  $r = a$  est soumise à la pression  $p$  (supposée mesurée par rapport à la pression atmosphérique) d'où

$$r = a : \mathbf{S}_{ij} n_j = T_i = -pn_i \quad (\text{II.55})$$

**a) Problème dynamique :** on donne la pression  $p(t)$  comme fonction du temps ; on donne également les conditions initiales – par exemple, à  $t = 0$ , le réservoir est au repos

$$u_i(x, 0) = 0 \quad V_i(x, 0) = \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (\text{II.56})$$

Et on cherche la solution  $u_i(x, t)$ ,  $\mathbf{S}_{ij}(x, t)$  qui doit vérifier l'équation du mouvement :

$$r_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad (\text{II.57})$$

Avec (II.53), les conditions aux limites (II.54) et (II.55), et les conditions initiales (II.56). Ce problème correspond par exemple à l'étude de la mise en charge brutale du réservoir. Moyennant une modification des conditions initiales (II.56), il correspond aussi à l'étude des vibrations du réservoir, si l'on impose une pression  $p(t)$  sinusoïdale

$$p(t) = p_0 \cos \omega t \quad (\text{II.58})$$

On recherche alors une solution périodique en  $t$ , condition qui remplace (II.56).

**b) Problème statique :** la pression  $p$  est constante c'est la pression en service du réservoir. On recherche alors une solution statique, c'est-à-dire indépendante du temps  $u_i(x), s_{ij}(x)$  vérifiant les équations d'équilibre

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (\text{II.59})$$

Avec (II.53) et les CI (conditions aux limites) (II.54) et (II.55). Le temps a disparu, et les conditions initiales n'ont plus lieu d'être.

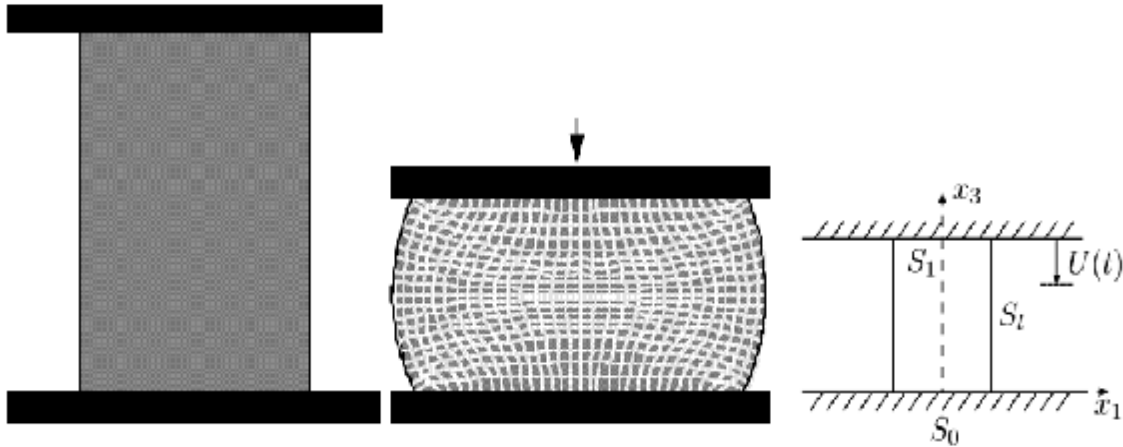
**c) Problème quasi-statique :** On suppose comme en a) que la pression  $t$  varie au cours du temps,  $p(t)$ , mais on fait l'hypothèse quasi-statique : les évolutions sont suffisamment lentes pour que, dans l'équation du mouvement (II.57), on puisse négliger le terme d'accélération et donc la remplacer par l'équation d'équilibre (II.59). En d'autres termes, la sollicitation dépend du temps, mais on résout à chaque instant un problème statique. Cette hypothèse est tout à fait essentielle en mécanique des solides, car elle permet de ramener à des problèmes statiques les problèmes réels qui, eux, dépendent toujours du temps. L'essentiel de ce cours sera désormais limité au cas où cette hypothèse est valable, l'étude des problèmes réellement dynamiques (chocs, vibrations) étant renvoyée au cours de mécanique des vibrations.

### II.12.2. Conditions aux limites de quelques problèmes

**Exemple 1. Ecrasement d'un bloc métallique cylindrique entre deux plateaux rigides d'une presse.**

Un bloc métallique cylindrique est écrasé entre les deux plateaux rigides d'une presse.





Le plateau inférieur  $x_3 = 0$  est immobile, tandis que le plateau supérieur  $x_3 = h$  s'enfonce d'une longueur  $U(t)$ . À nouveau, on peut s'intéresser aux problèmes dynamique, statique ou quasi-statique, mais nous nous limiterons au dernier cas : la solution dépend du temps puisque la sollicitation en dépend, mais nous écrirons néanmoins les équations d'équilibre de la statique. Comme dans l'exemple précédent, et comme dans la majorité des cas en Mécanique des Solides, la seule force de volume est la pesanteur, et nous la négligerons, d'où (II.53). La surface latérale  $S$  est libre de contraintes, Sur  $S_l$

$$T_i = S_{ij} n_j = 0 \tag{II.60}$$

Sur les extrémités  $S_0$  ( $x_3 = 0$ ) et  $S_l$  ( $x_3 = h$ ), la condition exprimant la rigidité des plateaux porte sur le déplacement vertical :

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : \quad u_3 &= 0 \\ x_3 = h : \quad u_3 &= -U(t) \end{aligned} \tag{II.61}$$

Mais les autres conditions aux limites dépendent des conditions de contact entre les plateaux et le lopin. S'il n'y a pas de frottement, c'est-à-dire si le contact est parfaitement lubrifié, alors la force de contact, qui est donnée par exemple, en  $x_3 = h$ , par

$$\vec{n} = (0, 0, +1), \quad \vec{T} = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \tag{II.62}$$

Doit être normale à la surface de contact. Les conditions (II.61) doivent être complétées par les conditions  $\sigma_{13}, = \sigma_{23} = 0$

$$x_3 = 0 : \quad u_3 = 0, \quad \sigma_{13}, = \sigma_{23} = 0 \tag{II.63}$$

$$x_3 = h : \quad u_3 = -U(t), \quad \sigma_{13}, = \sigma_{23} = 0$$

S'il n'y a pas de glissement, c'est-à-dire s'il y a adhérence complète entre le lopin et le plateau, alors il faut compléter (II.61) par les conditions cinématiques d'adhérence  $u_1 = u_2 = 0$

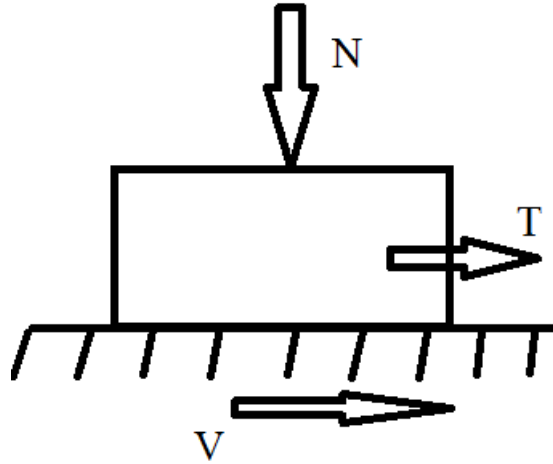
$$x_3 = 0 : u_1 = u_2 = u_3 = 0 \tag{II.64}$$

$$x_3 = h : u_1 = u_2 = 0, u_3 = -U(t)$$

Dans le cas réel, il y a frottement entre le plateau et le lopin, et il faut compléter (II.61) par les conditions exprimant la loi de frottement. Nous adoptons la loi de frottement de coulomb, avec un coefficient de frottement  $f$ ,

$$\vec{V} = 0 \quad \text{si} \quad |\vec{T}| < fN \tag{II.65}$$

$$\vec{V} = \quad \text{si} \quad |\vec{T}| < fN$$



Que l'on peut encore réécrire sous la forme

$$\vec{V} = I \vec{T}, \quad I \geq 0 \quad fN - |\vec{T}| \geq 0, \quad I (fN - |\vec{T}|) = 0 \tag{II.66}$$

On obtient alors

$$x_3 = 0 : u_3 = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = I s_{13} \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = I s_{23},$$

$$I \geq 0, \quad -f s_{33} - \sqrt{s_{13}^2 + s_{23}^2} \geq 0, \quad I \left( -f s_{33} - \sqrt{s_{13}^2 + s_{23}^2} \right) = 0 \tag{II.67}$$

$$x_3 = h : u_3 = -U(t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = -I s_{13} \dots$$

Le problème de l'écrasement d'un lopin consiste donc à trouver  $u_i(x, t)$ ,  $s_{ij}(x, t)$  vérifiant à chaque instant les équations (II.59) avec  $f_i = 0$  et les conditions aux limites (II.60) et (II.63), (II.64) ou (II.65), suivant la nature du problème et suivant la précision des résultats recherchés : le problème (II.67) est certainement plus proche de la réalité que les problèmes (II.63) ou (II.64), mais les problèmes (II.63) et (II.64) sont beaucoup plus simples, et peuvent constituer une approximation suffisante pour nos besoins.

De même si le frottement est important, le problème (II.64) est certainement plus proche de la réalité que le problème (II.63). Néanmoins, le problème (II.63), qui, comme on le verra, se résout très simplement, peut être une approximation suffisante, par exemple pour le calcul de la force  $F$  à appliquer sur la presse et qui sera donnée par :

$$F(t) = -\iint_{S_0} s_{33} dx_1 dx_2 = -\iint_{S_1} s_{33} dx_1 dx_2 \quad (\text{II.68})$$

### Exemple 2. Bloc pesant posé sur un plan rigide.

Considérons un bloc pesant posé sur un massif rigide. La surface supérieure et la surface latérale sont des surfaces libres. On écrira simplement :

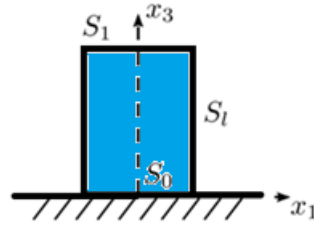
$$\mathbf{T} = 0 \text{ sur } S_f^{\text{sup}} \text{ et } S_f^{\text{lat}}$$

Par contre, les conditions de contact avec la table sont moins évidentes et nécessitent des hypothèses supplémentaires sur la nature du contact. Un premier cas simple est celui d'un contact adhérent, interdisant tout déplacement relatif du bloc par rapport à la table. Le déplacement doit donc être nul et la condition aux limites adaptée est :  $\mathbf{u} = 0$  sur  $S_u^{\text{inf}}$ . Dans le cas d'un contact sans frottement, au contraire, le bloc peut glisser sur la table. Donc, si la composante verticale  $u_3$  du déplacement doit toujours être nulle pour assurer le contact entre le bloc et la table, les composantes horizontales  $u_1$  et  $u_2$  représentent le glissement et sont donc des inconnues. Par contre, le contact étant sans frottement, la réaction, c'est-à-dire le vecteur contraint, devra être normale à la surface, et donc verticale. Les conditions aux limites traduisant un contact sans frottement seront donc finalement :

$$u_3 = 0 \text{ sur } S_u^{\text{inf}} \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = 0 \text{ sur } S_u^{\text{inf}}$$

Ces deux cas sont évidemment deux idéalizations de la réalité (frottement infini dans le premier cas de contact adhérent, et frottement nul dans le second cas de contact glissant). Pour être plus proche de la réalité, il faudrait écrire en plus de la condition de contact  $u_3 = 0$ , une relation entre les composantes horizontales du déplacement et du vecteur contrainte traduisant les conditions physiques du contact, par exemple le frottement de Coulomb.

Le bloc est soumis à la seule action de la pesanteur.



En notant  $r_0 = r$ , la masse volumique du solide, et  $g$ , l'accélération de la pesanteur, on a donc

$$f_1 = f_2 = 0, f_3 = -rg \tag{II.69}$$

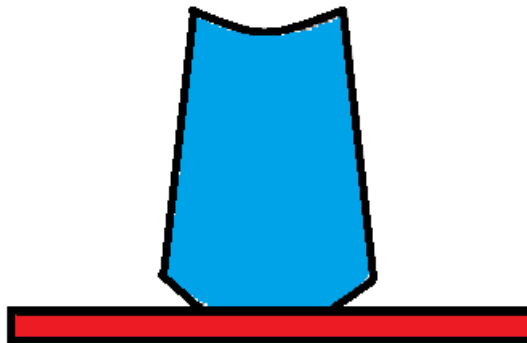
La surface latérale  $S_l$  et l'extrémité  $S_1(x_3=h)$  sont libres de contraintes

Sur  $S_l$ :

$$S_{ij} n_j = 0$$

$$x_3 = h : \sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$$

Sur l'extrémité  $S_0 (x_3=0)$ , les conditions aux limites dépendent, comme dans le cas précédent,



**Des conditions de contact:**

Dans le cas de non frottement on a :

$$x_3 = 0 : u_3 = 0 \quad S_{13} = S_{23} = 0 \tag{II.70}$$

et dans le cas de non glissement, on a

$$x_3 = 0 : u_1 = u_2 = u_3 = 0 \tag{II.71}$$

Dans le cas du frottement coulombien, on a une expression analogue à (II.67). Toutes ces conditions supposent que le contact entre le bloc et le plan reste maintenu. Il peut arriver qu'une partie du bloc se soulève. Il s'agit alors d'une liaison unilatérale. La surface  $S_0$  se décompose en deux zones (que l'on ne connaît pas, leur détermination fait partie du problème)

**Une zone de contact :**

$$x_3 = 0 : s_{33} \leq 0 \quad (\text{II.72})$$

**Une zone de non contact, libre de contraintes :**

$$u_3 \geq 0 : s_{33} = 0 \quad (\text{II.73})$$

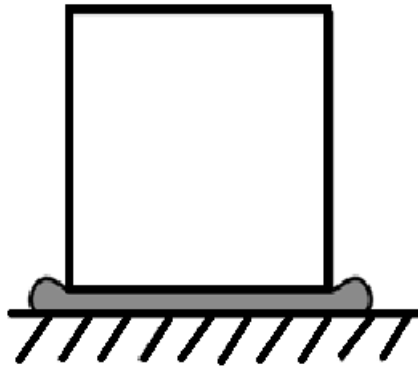
On peut regrouper (II.72) et (II.73) en

$$u_3 \geq 0 : \quad s_{33} = 0 \quad u_3 = s_{33} = 0 \quad (\text{II.74})$$

En supposant le contact sans frottement, il faut donc remplacer (II.70) par

$$x_3 = 0 : \quad s_{13} = s_{23} = 0, u_3 \geq 0, s_{33} \leq 0, u_3 s_{33} = 0 \quad (\text{II.75})$$

En toute rigueur, il aurait aussi fallu envisager cette possibilité dans l'exemple précédent, mais elle était peu plausible physiquement.



On pourrait également envisager d'autres types de conditions aux limites sur  $S_0$ .

Par exemple, on peut imaginer de poser le bloc sur le plan par l'intermédiaire d'un ballon de baudruche contenant un gaz à la pression  $p$ . Les efforts exercés sur le solide par le ballon se ramènent alors à une pression hydrostatique

$$x_3 = 0 : \quad s_{33} = -p, s_{13} = s_{23} = 0 \quad (\text{II.76})$$

On peut déterminer  $p$  en remarquant que, d'après les équations d'équilibre, les efforts exercés sur le bloc à travers  $S_0$  doivent équilibrer les autres efforts appliqués, en l'occurrence, le poids du bloc. On obtient donc la condition suivante :

$$-\iint_{S_0} s_{33} dx_1 dx_2 = r g S h \quad (\text{II.77})$$

Valable quelles que soient les conditions aux limites sur  $S_0$ . Avec les conditions (II.76), on déduit la valeur de  $p$

$$p = rgh \quad (\text{II.78})$$

De manière générale, dans un problème réel, l'écriture des conditions aux limites est une étape tout à fait essentielle, car d'une part ces conditions comprennent l'essentiel de la physique du problème, d'autre part elles conditionnent la facilité de la résolution du problème mathématique obtenu. Il faudra souvent faire un compromis entre la précision de la description physique et la facilité de résolution du problème mathématique.

### II.13. Résolution des problèmes axisymétriques plans

Un problème plan est axisymétrique si sa géométrie est circulaire et la sollicitation, purement radiale. Dans les coordonnées polaires, on a alors :

$$u = ue_r \quad (\text{II.79})$$

Et

$$\text{Rot}(u) = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} e_r & e_q & e_3 \\ D_r & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{II.80})$$

Si bien que l'équation plane de Navier se ramène à :

$$\frac{2G}{1-\nu} [\text{grad}(\text{div})u] = \frac{E}{1-\nu^2} [\text{grad}(\text{div})u] = -f \quad (\text{II.81})$$

Soit, pour  $f = fe_r$ ,

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right) = -f \quad (\text{II.82})$$

Pour  $f = 0$ , tout d'abord, on a :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) = 2A = \text{Cte} \quad (\text{II.83})$$

D'où :

$$\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d}{dr} (ru) = 2Ar \quad (\text{II.84})$$

Et :

$$\frac{E}{1-\nu^2} ru = 2Ar^2 + B \quad (\text{II.86})$$

Soit :

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \quad (\text{II.87})$$

Pour le cas  $f \neq 0$ , cherchons une solution particulière de la forme :

$$u = rC(r) + \frac{D(r)}{r} \quad (\text{II.88})$$

On a alors :

$$\frac{d}{dr}(ru) = \frac{d}{dr}(r^2C + D) = 2Cr + C'r^2 + D' \quad (\text{II.89})$$

Et :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) = 2C + C'r + \frac{D'}{r} \quad (\text{II.90})$$

D'où :

$$D' = -C'r^2 \quad (\text{II.91})$$

On obtient alors :

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) \right) = 2C' = -\frac{1-\nu^2}{E} f \quad (\text{II.92})$$

Et :

$$D' = -C'r^2 = \frac{1-\nu^2}{2E} fr^2 \quad (\text{II.93})$$

D'où :

$$C = -\frac{1-\nu^2}{2E} \int f dr \quad (\text{II.94})$$

$$D = \frac{1-\nu^2}{2E} \int fr^2 dr \quad (\text{II.95})$$

La solution générale de l'équation est donc :

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ Ar + \frac{B}{r} - \frac{r}{2} \int f dr + \frac{1}{2r} \int fr^2 dr \right] \quad (\text{II.96})$$

On en déduit aisément les déformations :

$$e_r = \frac{du}{u} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ A - \frac{B}{r^2} - \frac{1}{2} \int f dr - \frac{1}{2r^2} \int fr^2 dr \right] \quad (\text{II.97})$$

$$e_q = \frac{u}{r} = \frac{1-\nu^2}{E} \left[ A + \frac{B}{r^2} - \frac{1}{2} \int f dr + \frac{1}{2r^2} \int fr^2 dr \right] \quad (\text{II.98})$$

Auxquelles correspondent les contraintes :

$$\begin{aligned} s_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_r + \nu e_q) \\ &= (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{1+\nu}{2} \int f dr - \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \int fr^2 dr \end{aligned} \quad (\text{II.99})$$

$$\begin{aligned} s_q &= \frac{E}{1-\nu^2} (e_q + \nu e_r) \\ &= (1+\nu)A + (1-\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{1+\nu}{2} \int f dr + \frac{1-\nu}{2} \frac{1}{r^2} \int fr^2 dr \end{aligned} \quad (\text{II.100})$$

### II.13.1. Problème d'un cylindre épais sous pressions interne et externe

Ce problème a été résolu par *Lamé et Clapeyron en 1833*.

#### *Cas général*

Pour traiter le cas d'un cylindre sous pressions interne et externe, il suffit, dans les équations (II.99), de poser  $f = 0$  et :

$$\begin{cases} s_r(R_i) &= (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{R_i^2} = -pi \\ s_r(R_e) &= (1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{R_e^2} = -pe \end{cases} \quad (\text{II.101})$$

En éliminant alternativement  $A$  et  $B$ , on obtient :



$$(1+\nu)A = \frac{\frac{p_i}{R_e^2} - \frac{p_e}{R_i^2}}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (\text{II.102})$$

$$(1+\nu)B = \frac{p_i - p_e}{\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_e^2}} = \frac{(p_i - p_e)R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \quad (\text{II.103})$$

D'où :

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \\ S_q &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.104})$$

Les contraintes circonférentielles aux rayons extrêmes sont :

$$\begin{aligned} S_q(R_i) &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2 + (p_i - p_e)R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ &= p_i \frac{R_i^2 + R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - p_e \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{aligned} \quad (\text{II.105})$$

$$\begin{aligned} S_q(R_e) &= \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2 + (p_i - p_e)R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ &= p_i \frac{2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} - p_e \frac{2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{aligned} \quad (\text{II.106})$$

Enfin, le déplacement radial est donné par :

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \frac{r}{1+\nu} \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{1}{1-\nu} \frac{p_i - p_e}{R_e^2 - R_i^2} \frac{R_i^2 R_e^2}{r} \right\} \quad (\text{II.107})$$

Aux rayons extrêmes, il vaut :

$$\left. \begin{aligned} u(R_i) &= \frac{R_i}{E(R_e^2 - R_i^2)} \left\{ p_i \left[ (1-\nu)R_i^2 + (1+\nu)R_e^2 \right] - 2p_e R_e^2 \right\} \\ u(R_e) &= \frac{R_e}{E(R_e^2 - R_i^2)} \left\{ 2p_i R_i^2 - p_e \left[ (1-\nu)R_e^2 + (1+\nu)R_i^2 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.108})$$

**II.13.2. Cas du cylindre très mince**

Examinons le cas particulier d'un cylindre très mince. Posant, dans ce cas,

$$t = R_e - R_i, \quad R = \frac{R_e + R_i}{2} \quad (\text{II.109})$$

La condition de minceur s'écrit :

$$\frac{t}{R} = h \ll 1 \quad (\text{II.110})$$

Alors :

$$\begin{cases} r = R(1 + rh), & r \in [-1/2, 1/2] \\ R_i = R(1 - r/h), & R_e = R(1 + h/2) \end{cases} \quad (\text{II.111})$$

Et, en notant  $p^*$  l'ordre de grandeur des pressions,

$$\begin{cases} R_e^2 - R_i^2 & = R^2(1 + h + \frac{h^2}{4}) - R^2(1 - h + \frac{h^2}{4}) = 2R^2h \\ R_i^2 & = R^2[1 - h + o(h^2)] \\ R_e^2 & = R^2[1 + h + o(h^2)] \\ r^2 & = R^2[1 + 2rh + o(h^2)] \\ R_i^2 R_e^2 & = R^4[1 + o(h^2)] \\ p_i R_i^2 - p_e R_e^2 & = p_i R^2(1 - h) - p_e R^2(1 + h) + o(p^* h^2) \\ & = R^2[(p_i - p_e) - h(p_i + p_e) + o(p^* h^2)] \end{cases} \quad (\text{II.112})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} s_r &= \frac{1}{2R^2h} \left[ R^2(p_i - p_e) - hR^2(p_i + p_e) - (p_i - p_e)R^2(1 - 2rh) + o(h^2 p^*) \right] \\ &= -\frac{1}{2} [(p_i - p_e) - 2r(p_i - p_e)] + o(h p^*) \end{aligned} \quad (\text{II.113})$$

$$\begin{aligned} s_q &= \frac{1}{2R^2h} \left[ R^2(p_i - p_e) - hR^2(p_i + p_e) + (p_i - p_e)R^2(1 - 2rh) + o(h^2 p^*) \right] \\ &= \frac{p_i - p_e}{h} - \frac{1}{2} [(p_i + p_e) - 2r(p_i - p_e)] + o(h p^*) \end{aligned} \quad (\text{II.114})$$

La plus grande contrainte est visiblement

$$s_q = (p_i - p_e) \frac{R}{t} + o(p^*) \quad (\text{II.115})$$

Comme

$$s_r = o(p^*) \quad (\text{II.116})$$

Cette contrainte est négligeable devant la première. On a d'autre part

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left[ (1-\nu) \frac{R^2(p_i - p_e)}{2Rh} + (1+\nu) \frac{R^2(p_i - p_e)}{2Rh} + o(p^*R) \right] \\ &= \frac{(p_i - p_e)R}{Eh} + o\left(\frac{p^*R}{E}\right) \\ &= \frac{(p_i - p_e)R^2}{Et} + o\left(\frac{p^*R}{E}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.117})$$

Les formules (II.113) à (II.117) sont connues sous le nom de formules des chaudières.

### II.13.3. Cas du rayon intérieur tendant vers zéro

Dans le cas d'un cylindre creux sous pression externe, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} s_q(R_i) &= -\frac{2p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ s_r(R_i) &= 0 \\ u(R_i) &= -\frac{2p_e R_e^2 R_i^2}{E(R_e^2 - R_i^2)} \\ u(R_e) &= -\frac{p_e R_e}{E(R_e^2 - R_i^2)} \left[ (1-\nu)R_e^2 + (1+\nu)R_i^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (\text{II.118})$$

Dans ces formules, faisons tendre le rayon intérieur vers zéro. Il vient

$$\left. \begin{aligned} \lim_{R_i \rightarrow 0} s_q(R_i) &= -2p_e, & \lim_{R_i \rightarrow 0} s_r(R_i) &= 0 \\ \lim_{R_i \rightarrow 0} u(R_i) &= 0, & \lim_{R_i \rightarrow 0} u(R_e) &= -\frac{p_e R_e (1-\nu)}{E} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.119})$$

Comparons cette solution à celle d'un cylindre plein. Dans ce dernier cas, le déplacement devant être ni en  $r = 0$ , on doit avoir  $B = 0$  et :

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} Ar \quad (\text{II.120})$$

Ce qui donne :

$$S_r = (1+\nu)A, \quad S_q = (1+\nu)A \quad (\text{II.121})$$

D'où :

$$\begin{aligned} S_r = S_q &= -p_e \\ A &= \frac{-p_e}{1+\nu} \\ u &= -\frac{1-\nu}{E} p_e r \end{aligned} \quad (\text{II.122})$$

La comparaison de ces résultats avec les formules (II.119) montre que les déplacements sont identiques, mais que la contrainte maximale dans le cylindre ayant un trou infiniment petit est double de celle qui règne dans le cylindre plein. Le trou infiniment petit provoque donc une concentration de contrainte mesurée par :

$$S_k = \frac{\lim_{R_i \rightarrow 0} S_k(R_i)}{S_q(\text{sans trou})} = 2 \quad (\text{II.123})$$

#### II.13.4. Cas du rayon extérieur tendant vers l'infini

Le cas  $R_e \rightarrow \infty$  correspond à un tunnel profondément enfoncé dans le sol. On a alors, pour  $p_e = 0$  et en posant  $n = R_i/R_e$ ,

$$S_r = p_i \frac{n^2}{1-n^2} - \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r^2} \rightarrow -p_i \frac{R_i^2}{r^2} \quad (\text{II.124})$$

Et :

$$S_q = p_i \frac{n^2}{1-n^2} + \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r^2} \rightarrow p_i \frac{R_i^2}{r^2} \quad (\text{II.125})$$

La contrainte maximale vaut donc pi. Le déplacement se calcule par :

$$u = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu) r p_i \frac{n^2}{1-n^2} + (1+\nu) \frac{p_i}{1-n^2} \frac{R_i^2}{r^2} \right] \rightarrow \frac{1+\nu}{E} p_i \frac{R_i^2}{r} \quad (\text{II.126})$$

Sa valeur maximale est :

$$u(R_i) = \frac{1+\nu}{E} p_i R_i \quad (\text{II.127})$$

## II.14. Problèmes à résoudre

### II.14.1. Problème d'un solide immergé dans un fluide

Considérons un solide immergé dans un fluide (de l'eau par exemple). Il est soumis sur toute sa frontière  $S$  à la pression de l'eau. Les lois de l'hydrostatique nous disent que cette pression est proportionnelle à la hauteur d'eau par rapport à la surface :  $p = -\rho_0 gz$ , où  $\rho_0$  est la masse volumique de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $z$  la profondeur. Sur chaque élément de la frontière  $S_f$  du solide s'exerce donc une force : On peut donc écrire comme condition aux limites sur la normale extérieure à l'élément de frontière  $S_f$ . Les conditions aux limites donnent le vecteur de contraintes en chaque point de frontière.

*Remarque.* Si le solide est à une très grande profondeur, il pourra être légitime de négliger la variation de pression entre les divers points du solide et on remplacera la condition aux limites précédente par : avec  $p_0$  la pression régnant à la profondeur considérée. C'est également le cas si le solide est plongé dans un réservoir sous pression.

### II.14.2. Problème d'une enceinte cylindrique sous pression

Considérons une enceinte sous pression interne  $p_0$ . La paroi interne du solide est soumise à cette pression et la condition aux limites s'exprime comme :  $\mathbf{T} = -p_0 \mathbf{n}$  sur  $S_f^{\text{int}}$ . Si la paroi extérieure se trouve à l'air libre, alors elle est soumise à la pression atmosphérique. En mécanique du solide, la pression atmosphérique est prise nulle, ce qui revient en fait à prendre comme origine des contraintes la pression atmosphérique (cela est légitime sur Terre, puisque tous les objets sont soumis à cette pression). On écrira donc sur la paroi extérieure la condition aux limites suivantes

$\mathbf{T} = 0$  sur  $S_f^{\text{ext}}$  et on parlera de surface libre. *Remarque.* En coordonnées cylindriques ou sphériques,

nous écrirons :  $\mathbf{T} = -p_0 \mathbf{n}$  sur  $S_f^{\text{int}}$  Soit  $\mathbf{T} = p_0 \mathbf{e}_r$  D'où

$$s_{rr} = -p_0 \text{ sur } S_f^{\text{int}}$$

## CHAPITRE III

### LOIS DE COMPORTEMENT MECANIQUE DES SOLIDES.

#### III.1. Introduction

Le comportement mécanique relève de la réponse du matériau lorsqu'une force lui est appliquée. Sous contrainte un matériau peut soit se déformer soit se rompre. Le type de déformation engendrée dépend de l'intensité de la contrainte. Lorsqu'elle est faible la déformation est élastique: le matériau retrouve sa forme originale lorsque la contrainte est levée. Si le retour vers la forme initiale prend un certain temps après l'annulation de la contrainte on parle d'effet anélastique ou viscoélastique.

Des contraintes plus élevées peuvent mener à une déformation plastique: le matériau ne retrouve pas sa forme originale lorsque la contrainte est supprimée.

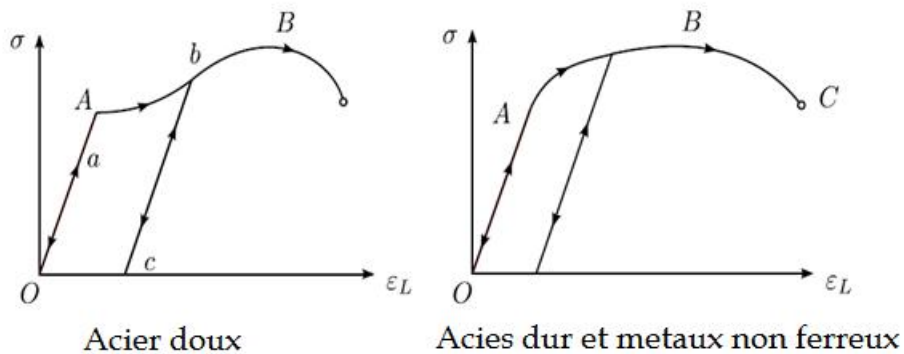
A haute température, une déformation plastique peut se développer avec un certain retard suite à l'application de la contrainte, cet effet est appelé: fluage.

A plus forte contrainte on assiste à la fracture, le matériau casse et se sépare en plusieurs morceaux. Si la fracture intervient avant que le matériau n'ait subi une large déformation plastique on parle de fracture fragile; dans le cas contraire il s'agit d'une fracture ductile.

#### III.1.1. Diversité des comportements

Le but de ce chapitre est double : d'une part, nous allons décrire quelques-uns des comportements types ; d'autre part, nous allons introduire la terminologie utilisée pour caractériser ces comportements.

Pour les métaux à température ambiante, le comportement est convenablement décrit par la courbe de traction, résultat de l'essai de traction. On fait croître la force  $F$  et on mesure l'allongement longitudinal  $e_L$ .



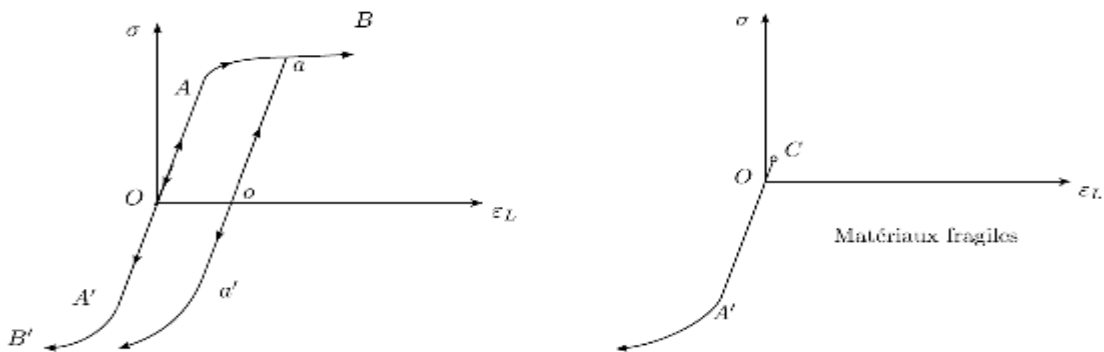
La courbe se divise en trois régions. La région  $OA$  correspond à un comportement élastique linéaire, dont les deux caractéristiques essentielles sont :

- Réversibilité : si, arrivé au point  $a$  on diminue la contrainte, on redescend suivant la même courbe ;
- Linéarité : la contrainte est proportionnelle à la déformation.

Cette région correspond à la déformation réversible du réseau cristallin.

À partir du seuil  $A$ , on entre dans la zone  $AB$  de comportement plastique, essentiellement caractérisé par son irréversibilité : si, arrivé en  $b$ , on décharge, alors on redescend, non pas le long de la courbe de charge  $bA$ , mais sur une droite  $bc$  parallèle à  $OA$ . En fait le comportement est alors à nouveau élastique tant que l'on ne dépasse pas le nouveau seuil  $b$ . En particulier, on ne constate que la déformation plastique entre  $A$  et  $b$  a eu comme effet d'élargir la région élastique. C'est le phénomène d'écrouissage.

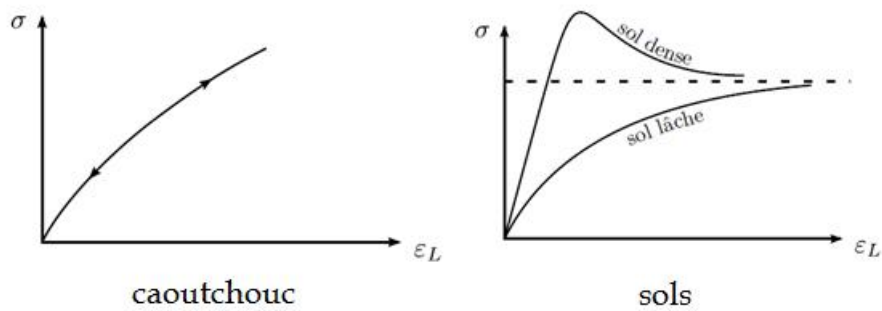
Le point  $B$  correspond à l'apparition de la striction ; instabilité géométrique qui conduit à la localisation de la déformation. La contrainte diminue alors jusqu'à rupture. En fait, il s'agit de la contrainte apparente, c'est-à-dire ramenée à la surface initiale et la contrainte vraie ramenée à la surface réelle de la striction, elle, continue à augmenter. De toute façon, la déformation n'est plus homogène, et cette portion de courbe ne décrit pas directement le comportement. Qui plus est, l'hypothèse des petites déformations n'est plus vérifiée.



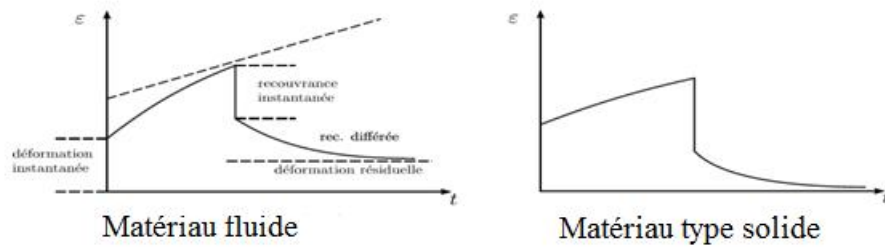
En compression simple, on obtient en général un comportement symétrique  $OA'OB'$  (mais sans striction). Pour certains matériaux fragiles (béton, fonte, roches, etc.), cependant, on obtient en compression simple un comportement ductile, comme celui que nous avons décrit, et en traction simple, un comportement fragile conduisant à rupture très rapide. Pour les métaux, on observe souvent l'effet Bauschinger : après une décharge  $Oa$  en traction, l'écrouissage qui se traduit par une augmentation du seuil en traction, entraîne également une diminution du seuil en compression, alors qu'au départ les deux étaient approximativement égaux.

La courbe de traction permet également de décrire le comportement d'autres matériaux, comme le caoutchouc, (comportement élastique non linéaire en première approximation) ou les sols. On représente alors le résultat d'un essai triaxial à  $p$  fixé, qui présentent un comportement de type

élasto-plastique avec une région élastique très réduite et avec ou sans pic suivant que le matériau est initialement plus ou moins tassé.



Pour des matériaux comme les matières plastiques ou les métaux à haute température, la courbe de traction perd toute signification car elle dépend de manière cruciale de la vitesse de déformation. On caractérise alors le comportement par des essais de fluage et de relaxation.



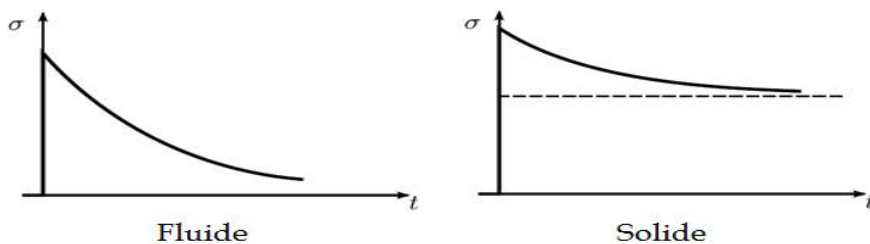
Pour l'essai de fluage, toujours en traction ou compression simple, on impose une contrainte constante et on observe la déformation en fonction du temps : l'application de la contrainte s'accompagne d'une déformation instantanée, puis la déformation se poursuit, puis se stabilise, soit vers une constante, soit vers un état de fluage stationnaire à vitesse de déformation constante.

Si à un l'instant  $t_0$  on relâche la contrainte, alors la déformation se décompose en trois parties :

- une déformation instantanée (recouvrance instantanée),
- une déformation obtenue progressivement (recouvrance différée),
- une déformation résiduelle qui subsiste,

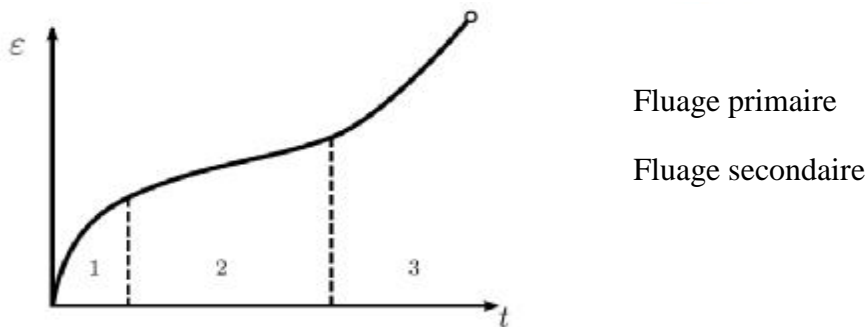
Cette dernière pouvant disparaître pour un matériau de type solide.

L'essai de relaxation consiste à appliquer une déformation constante, et à observer la contrainte nécessaire.





Si l'on pousse plus loin l'essai de fluage, on voit apparaître après le fluage primaire (régime transitoire) et le fluage secondaire (régime stabilisé) une zone de fluage tertiaire qui correspond au phénomène d'endommagement (détérioration du matériau qui conduit à la rupture).



Ce type de comportement dépendant du temps est appelé viscoplastique ou viscoélastique, selon qu'il existe ou non un seuil en dessous duquel le comportement peut être considéré comme élastique. En première approximation, les matières plastiques ont un comportement viscoélastique et les métaux à haute température, un comportement viscoplastique.

**III.2. Élasticité linéaire**

**III.2.1. Description du comportement élastique**

Le modèle de comportement le plus simple est le modèle élastique. Pour des matériaux ayant un comportement élasto-plastique ou viscoplastique, ce modèle convient parfaitement, pourvu que l'on ne dépasse pas le seuil de plasticité. Pour des matériaux ayant un comportement de type viscoélastique, la transformation de Laplace permet de se ramener à un comportement élastique. Même pour des matériaux ayant un comportement plus complexe, un calcul élastique peut fournir des résultats intéressants, par exemple « pour le calcul des fondations en mécanique des Sols ». Enfin, la résolution numérique d'un problème de mécanique des solides, avec une loi de comportement quelconque, s'effectue presque toujours par résolution d'une suite de problèmes élastiques. Il est donc naturel, dans un cours de mécanique des solides, de réserver une place importante à ce modèle de comportement.

**III.2.1.1. Tenseur d'élasticité**

Le comportement élastique est caractérisé par une relation linéaire entre contraintes et déformations. Dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle, cette relation s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{s}_{ij} = A_{ijkh} \cdot \underline{e}_{kh} \\ \underline{s} = A[\underline{e}] \end{cases} \quad \text{Ou inversement} \quad \begin{cases} \underline{e}_{ij} = \Lambda_{ijkh} \cdot \underline{s}_{kh} \\ \underline{e} = \Lambda[\underline{s}] \end{cases} \quad \text{(III.1)}$$

où  $A_{ijkh}$  et  $\Lambda_{ijkh}$  sont les composantes de deux applications  $A$  et  $\Lambda$ , inverses l'une de l'autre, de l'espace des tenseurs symétriques dans lui-même. Ce sont les tenseurs d'élasticité. Souvent  $A$  est

appelé tenseur de rigidité et  $\Lambda$  tenseur de complaisance. Compte-tenu de la symétrie des tenseurs des contraintes et des déformations, on doit avoir, par exemple pour  $A$  ;

$$A_{ijkh} = A_{jikh} A_{ijkh} = A_{jihk} \quad (\text{III.2})$$

Nous ferons de plus sur ces applications les deux hypothèses suivantes :

ü *Hypothèse thermodynamique — le tenseur d'élasticité est symétrique*

$$A_{ijkh} = A_{khij} \quad (\text{III.3})$$

ü *Hypothèse de stabilité — le tenseur d'élasticité est défini positif*

$$A_{ijkh} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{kh} \geq a \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{kh}, \quad a > 0 \quad (\text{III.4})$$

La première hypothèse est à peu près invérifiable, mais elle conduit à une théorie bien plus agréable et satisfaisante. La seconde a une signification tout à fait claire, que nous verrons plus loin. Compte-tenu des relations de symétrie (III.2) et (III.3). Constate que le tenseur d'élasticité fait apparaître 21 coefficients. On peut le représenté par une matrice 6×6symétrique

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} \\ \mathbf{S}_{22} \\ \mathbf{S}_{33} \\ \mathbf{S}_{23} \\ \mathbf{S}_{31} \\ \mathbf{S}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{11} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{e}_{31} \\ \mathbf{e}_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

On peut aussi obtenir le comportement élastique par une approche thermodynamique : un matériau élastique est un matériau sans dissipation, c'est-à-dire un matériau dans lequel toutes les évolutions sont réversibles. En se plaçant d'un point de vue purement mécanique, puisque la dissipation  $j$  est nulle, la relation :

$$r \frac{du}{dt} = \mathbf{S}_{ij} \frac{d\mathbf{e}_{ij}}{dt} \quad (\text{III.6})$$

(en petites déformations ;  $D_{ij} = d\mathbf{e}_{ij} / dt$ )

Ceci incite à prendre l'énergie interne  $u$  fonction des déformations

$$ru = w(\underline{\mathbf{e}}) \quad (\text{III.7})$$

Où  $w$  est le potentiel élastique. En dérivant (III.7) et en identifiant avec (III.6), on obtient

$$\mathbf{S}_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{e}_{ij}} \quad (\text{III.8})$$

Les déformations étant petites, on peut développer  $w$  en série de Taylor où  $a_{ij}$  est symétrique et où  $A_{ijk}$  vérifie les conditions de symétrie (III.2) et (III.3) qui, dans cette approche, sont automatiquement vérifiées. En reportant dans (III.8) il vient

$$\mathbf{s}_{ij} = \underline{a}_{ij} + A_{ijkh} \mathbf{e}_{kh} \quad (\text{III.9})$$

Qui montre que  $a_{ij}$  est nul puisque la configuration de référence est supposée libre de contrainte. On obtient donc (III.1), mais avec cette approche l'hypothèse thermodynamique (III.3) est automatiquement vérifiée, alors que l'hypothèse de stabilité (III.4) exprime le fait que l'énergie interne du matériau atteint son minimum dans l'état de référence : c'est donc bien une hypothèse de stabilité. Autrement dit, il faut fournir un travail positif pour déformer le matériau à partir de son état naturel. Nous introduisons également  $w^*(\underline{\underline{s}})$ , transformée de *Legendre* de  $w$

$$w^*(\underline{\underline{s}}) = \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} - w(\underline{\underline{e}}) \quad (\text{III.10})$$

Qui permet d'écrire

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{s}_{ij}} \quad (\text{III.11})$$

Finalement, en prenant  $w_0 = 0$ , on peut réécrire la loi de comportement élastique (I.1) sous la forme

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} A_{ijkh} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{kh} = w^* = \frac{1}{2} \Lambda_{ijkh} \mathbf{s}_{ij} \mathbf{s}_{kh} \\ \mathbf{s}_{ij} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{e}_{ij}} &= A_{ijkh} \mathbf{e}_{kh} \\ \mathbf{e}_{ij} &= \frac{\partial w^*}{\partial \mathbf{s}_{ij}} = \Lambda_{jkhl} \mathbf{s}_{kl} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

### III.2.2 Isotropie et anisotropie

Le tenseur d'élasticité, qui caractérise complètement les propriétés élastiques du matériau dépend, dans le cas le plus général, de 21 coefficients. Fort heureusement, on peut restreindre ce nombre en utilisant les symétries du matériau, c'est-à-dire les propriétés d'isotropie ou d'anisotropie. Lors d'un changement de repère, les matrices  $\mathbf{s}_{ij}$  et  $\mathbf{e}_{ij}$  représentatives des tenseurs des contraintes et de déformations. Les tenseurs d'élasticité  $A$  et  $\Lambda$  se transforment donc par

$$A_{ijkh} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{hq} A_{mnpq} \quad (\text{III.13})$$

Les composantes  $A_{ijkl}$  du tenseur d'élasticité, ou la matrice d'élasticité (III.5), dépendent donc du repère choisi. Les propriétés de symétrie matérielle caractérisent les transformations qui laissent invariantes ces composantes.

On dira qu'un matériau est isotrope si toutes ses directions sont équivalentes, c'est-à-dire si la matrice d'élasticité (III.5) est indépendante du repère choisi. On doit donc avoir, pour  $A_{ij}$  tout orthogonal :

$$A'_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{hq} A_{mnpq} \quad (\text{III.14})$$

Si, au contraire, il existe des directions privilégiées, le matériau sera dit *anisotrope* et la matrice d'élasticité dépendra du repère choisi. Il conviendra de choisir au mieux ce repère. Pour caractériser plus précisément l'anisotropie, nous introduisons le groupe d'isotropie  $V$  : groupe des transformations orthogonales laissant invariantes les composantes du tenseur d'élasticité. Si l'on a choisi un repère,  $V$  est le groupe des matrices orthogonales vérifiant (III.14). Il est clair que  $V$  est un sous-groupe du groupe orthogonal. Si  $V$  est le groupe orthogonal tout entier, alors le matériau est isotrope, sinon le matériau est anisotrope, et l'anisotropie est caractérisée par  $V$  :

L'origine physique de l'anisotropie peut être liée à la structure du matériau ou à son mode de formation :

### III.2.2.1. Anisotropie de structure

- monocristaux métalliques pour lesquels le groupe d'isotropie est alors le groupe cristallographique. Pour les matériaux métalliques polycristallins, habituellement considérés comme isotropes, cette isotropie est de nature statistique ; le polycristal est en effet formé de la juxtaposition d'un grand nombre de grains monocristallins, donc anisotropes. L'isotropie globale du polycristal résulte donc du caractère aléatoire de la répartition des orientations cristallographiques de chacun des grains.
- matériaux composites renforcés par fibres unidirectionnelles ou multi directionnelles.
- matériaux composites stratifiés. Ces matériaux, de développement relativement récent, permette d'obtenir des performances très élevées.
- matériaux fibreux naturels comme le bois.

Anisotropie de formation pour des matériaux initialement isotropes mais qui ont été rendus anisotropes par les traitements subis :

- produits métalliques semi-finis obtenus par forgeage : tôles minces obtenues par laminage et qui présentent trois directions privilégiées (direction de laminage, direction transversale et épaisseur), barres obtenues par filage et qui ont une direction privilégiée.
- roches ou sols de nature sédimentaire ou qu'ils ont subi d'importants tassements géologiques.

On voit donc que les manifestations de l'anisotropie sont variées. Nous avons présenté le concept dans le cadre de l'élasticité linéaire mais le problème se pose pour tout comportement. Il s'agit néanmoins d'une question difficile et encore imparfaitement comprise.

### III.2.2.2. Élasticité anisotrope

Les propriétés de symétrie, décrites par le groupe d'isotropie  $G$ , permettent de réduire le nombre des coefficients d'élasticité. Nous allons envisager quelques cas particuliers correspondant aux types d'anisotropie que l'on rencontre le plus fréquemment en mécanique.

#### A. Orthotropie

Il existe trois directions privilégiées mutuellement orthogonales et le groupe d'isotropie est formé des symétries laissant invariantes chacune de ces trois directions (non orientées) ; c'est à-dire des symétries par rapport aux axes correspondants. Si nous choisissons le repère formé par ces trois directions, alors le groupe d'isotropie  $G$  est formé des quatre matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

En écrivant (I.14) pour ces matrices, on obtient directement la nullité des coefficients  $A_{112}$ ,  $A_{113}$ ,  $A_{123}$ ,  $A_{1213}$ , Etc., et la matrice d'élasticité a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} \\ \mathbf{s}_{22} \\ \mathbf{s}_{33} \\ \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{31} \\ \mathbf{s}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & A_1 & B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ B_{13} & B_{23} & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{23} \\ \mathbf{e}_{31} \\ \mathbf{e}_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

Pour un matériau orthotrope, la matrice élastique ne fait plus intervenir que neuf coefficients. La matrice d'élasticité associée à  $\Lambda$ , inverse de (III.16), a évidemment la même structure. Cette forme simple est liée au choix du repère associé aux directions d'orthotropie.

Dans un autre repère, cette matrice aurait une forme plus compliquée, déduite de (III.16) par (III.13). Des essais de traction sur des éprouvettes découpées dans les directions d'orthotropie

permettent de déterminer assez facilement les coefficients  $A_1, A_2$  et  $A_3$ , beaucoup plus difficilement les coefficients  $B_{12}, B_{13}$  et  $B_{23}$ . Quant aux coefficients  $C_4, C_5$  et  $C_6$ , ils sont très difficiles à obtenir expérimentalement. Physiquement, cette anisotropie s'applique par exemple aux tôles laminées ou aux matériaux composites renforcés par deux ou trois systèmes de fibres dans des directions perpendiculaires.

**B. Symétrie cubique**

C'est un cas particulier de la précédente ; il existe toujours trois directions privilégiées mutuellement orthogonales, mais en plus, ces trois directions sont équivalentes.

Physiquement, cette anisotropie est celle d'un monocristal d'un matériau cubique ou cubique à face centrée. Aux matrices (III.15), il faut rajouter les quatre matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{III.17}$$

Ainsi que celles qu'elles engendrent par produit entre elles et avec celles de (III.15). On obtient alors:

$$\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{23} \\ s_{31} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B & 0 & 0 & 0 \\ B & A & B & 0 & 0 & 0 \\ B & B & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \end{bmatrix} \tag{III.18}$$

Forme qui ne fait intervenir que trois coefficients  $A, B$  et  $C$ . Physiquement, cette anisotropie correspond, par exemple, à un matériau composite renforcé par trois systèmes de fibres identiques et dans des directions perpendiculaires. Elle correspond aussi à un monocristal en système cubique ou cubique à face centrée. Plus généralement, on sait construire les matrices d'élasticité associées aux divers systèmes cristallographiques, mais ce type d'anisotropie intervient rarement en mécanique.

**C. Isotropie transverse**

Le matériau a une direction privilégiée, et le groupe d'isotropie  $G$  est le groupe des transformations laissant invariante cette direction non orientée. Nous choisissons un repère ayant l'axe  $x_3$  comme direction privilégiée. Le groupe  $G$  est alors formé :

- ∅ des rotations autour de  $x_3$  (d'angle quelconque) ;
- ∅ des symétries par rapport aux droites du plan  $X_1X_2$ .

C'est donc le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q & \sin q & 0 \\ -\sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos j & \sin j & 0 \\ \sin q & -\cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (III.19)$$

Par conséquent, on peut obtenir la forme suivante pour la matrice d'élasticité:

$$\begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{31} \\ S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E & 0 & 0 & 0 \\ B & A & E & 0 & 0 & 0 \\ E & E & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A-B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (III.20)$$

Il reste cinq coefficients d'élasticité. Les coefficients  $D$  et  $E$  s'obtiennent par un essai de traction sur une éprouvette parallèle à la direction privilégiée, les coefficients  $A$  et  $B$ , par un essai de traction sur une éprouvette perpendiculaire à la direction privilégiée, enfin le coefficient  $C$  peut s'obtenir par une expérience de torsion sur un tube minée parallèle à l'axe privilégié. C'est le type d'anisotropie que l'on rencontre le plus fréquemment : composites renforcés par fibres unidirectionnelles, composites stratifiés, bois, barres obtenues par filage, roches et sols sédimentaires, etc.

### III.3. Élasticité linéaire isotrope

#### III.3.1. Coefficients d'élasticité

Pour un matériau isotrope, sans direction privilégiée, les composantes, du tenseur d'élasticité doivent vérifier la relation (III.14) pour toute matrice orthogonale  $Q_{ij}$ . On vérifie facilement que le tenseur :

$$A_{ijkh} = l d_{ij} d_{kh} + m (d_{ik} s_{ih} + d_{ih} d_{jk}) \quad (III.21)$$

Satisfait à cette condition. Réciproquement, on peut montrer que cette condition ne peut être vérifiée que si le tenseur d'élasticité a la forme (III.21). En écrivant (III.1), on obtient la loi de comportement :

$$s_{ij} = l s_{ij} e_{kh} + 2m e_{ij} \quad (III.22)$$

Ou en composant

$$s_{11} = (l + 2m) e_{11} + l e_{22} + l e_{33} \quad (III.23)$$

$$s_{12} = 2m e_{12} \quad (\text{III.24})$$

Ce qui donne pour la matrice d'élasticité :

La matrice d'élasticité a la même forme que pour un matériau à symétrie cubique, avec en plus la relation :

$$C = A - B \quad (\text{III.25})$$

C'est normal puisque l'isotropie est une restriction plus forte que la symétrie cubique. En fait, on peut construire (III.21) ou (III.24) en remarquant que la relation (III.14), vraie pour tout  $Q_{ij}$  orthogonal, doit l'être en particulier pour les  $Q_{ij}$  (III.15) et (III.17), ce qui donne (III.18). La relation (III.25) se démontre alors en prenant pour  $Q_{ij}$  une rotation quelconque, par exemple une rotation infinitésimale d'angle  $dq$  autour de  $X_1$ .

Pour calculer les coefficients  $Aijkl$  de la loi de comportement inverse, nous prenons la trace de (III.22) :

$$s_{kk} = (3l + 2m) e_{kk} \quad (\text{III.26})$$

qui donne les déformations en fonction des contraintes :

$$e_{ij} = \frac{1}{2m} s_{ij} - \frac{l}{2m(3l + 2m)} s_{kk} s_{ij} \quad (\text{III.27})$$

Ainsi, la loi élastique linéaire isotrope générale dépend de deux coefficients, les coefficients de Lamé  $l$  et  $m$ . Pour dégager leur signification physique, et en particulier pour les mesurer, envisageons quelques états de contraintes et de déformations particuliers.

### III.4. Forme de coefficients de quelques états particuliers

#### 1. Tension ou compression hydrostatique

Maintenant notre volume élémentaire à un tenseur de contraintes sphérique de pression  $p$  (figure III.1):

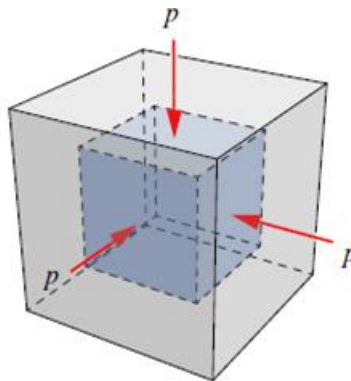


Fig. III.1. Pression uniforme



$$[s](\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \tag{III.28}$$

La relation de cet état donne alors :

$$s_{ij} = s d_{ij} , \quad e_{ij} = e d_{ij} , \quad s = (3l + 2m) e \tag{III.29}$$

$3K = 3l + 2m$  Est le module de rigidité à la compression.

Signe moins s'apparaît. La déformation correspondante est:

$$[e](\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) = \frac{-p(1-2\nu)}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-p}{3K} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{III.30}$$

Où l'on introduit le module de compressibilité:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{III.31}$$

On note que le cube est réduit de la même manière dans les trois directions du fait de l'isotropie. La réduction relative de volume est la trace du tenseur des déformations.

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = -\frac{p}{k}$$

Le module de compressibilité K relie la pression au changement de volume: c'est un raideur volumique, Plus K est élevé moins le volume est réduit pour une pression donnée.

### 2. Cisaillement simple

Sollicitons maintenant notre élément de volume avec un tenseur de cisaillement simple illustré sur la figure III.2:

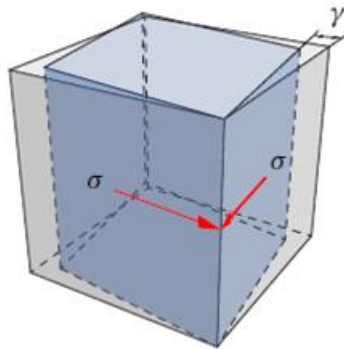


Fig. III.2. Cisaillement simple

La loi de comportement pour ce cas :

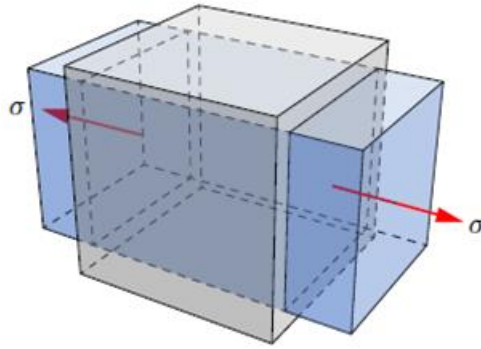
$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{mg} & 0 \\ \mathbf{mg} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{III.32})$$

L'état de contrainte est un cisaillement simple,  $G = m$  est le module de rigidité au cisaillement ou module de Coulomb.

**3. Traction simple**

On applique une force de traction dans une direction comme montrée dans la figure III.3.

D'après la loi de comportement (III.27), on a :



**Fig. III.3. Traction pure**

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{s}} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{e}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_L & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_T \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{III.33})$$

Avec :

$$\mathbf{e}_L = \frac{l + m}{m(3l + 2m)} \mathbf{s} = \frac{\mathbf{s}}{e} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_T = -\frac{l}{2m(3l + 2m)} \mathbf{s} = -\nu \mathbf{e}_L \quad (\text{III.34})$$

où  $E$ , module d'Young, et  $\nu$  est le coefficient de Poisson, sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{m(3l + 2m)}{l + m} \\ \nu = \frac{l}{2(l + m)} \end{array} \right. \quad (\text{III.35})$$

Ainsi, on peut obtenir par un essai de traction le module d'Young et le coefficient de Poisson : le module d'Young est la pente de la courbe de traction (qui est rectiligne dans le domaine élastique), et la mesure de la contraction transversale donne le coefficient de Poisson. On peut ensuite à partir de  $E$  et  $\nu$  calculer  $l$ ,  $m$  et  $K$  par :

$$m = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad l = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} ; \quad 3K = \frac{E}{1-2\nu} \quad \text{(III.36)}$$

On peut également réécrire (III.27) avec  $E$  et  $\nu$ , et il vient :

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} - \frac{\nu}{E} s_{kk} d_{ij} \quad \text{(III.37)}$$

Ou en composantes :

$$e_{11} = \frac{1}{E} [s_{11} - \nu(s_{22} + s_{33})] \quad \text{(III.38)}$$

$$e_{12} = \frac{1+\nu}{E} s_{12} = \frac{1}{2G} s_{12}$$

La matrice d'élasticité inverse de (III.24) peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{23} \\ s_{31} \\ s_{12} \end{bmatrix} \quad \text{(III.39)}$$

### III.5. Généralisation

Voici deux points importants à retenir sur les matériaux élastiques isotropes:

- Dans le comportement élastique isotrope, les cisaillements et élongations sont tout à fait découplés. C en 'est pas le cas dans les milieux anisotropes comme les matériaux composites;
- Le comportement n'est caractérisé que par deux paramètres scalaires. Ces deux paramètres peuvent être au choix: le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson, les deux coefficients de Lamé,  $\lambda$  et  $\mu$ , ou les modules de cisaillement et de compressibilité  $K$ .
- Notez que l'on a forcément  $-1 \leq \nu \leq 1/2$ .

La loi de Hooke peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{C} \cdot \underline{e}; \\ s_{ij} &= C_{ijkl} e_{kl}; \end{aligned} \quad \text{(III.40)}$$

$$C_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} d_{ik} d_{jl} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} d_{ij} d_{kl}$$

Ou sous forme inverse:

$$\varepsilon = D : \sigma \quad ; \varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl} \quad ; D_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{III.41})$$

Le tenseur  $\overset{\equiv}{\underline{\underline{C}}}$  d'ordre 4 est le tenseur d'élasticité et  $\overset{\equiv}{\underline{\underline{D}}}$ , son inverse.

Ces deux tenseurs s'expriment à l'aide de  $3^4 = 81$  composantes. Il n'ya, en fait, que 36 composantes indépendante car ces tenseurs possèdent les symétries suivantes (qui proviennent de la symétrie des tenseurs  $\bar{\varepsilon}$  et  $\bar{\sigma}$  ainsi que de l'existence d'une énergie):

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad ; \quad D_{ijkl} = D_{klij} = D_{jikl} = D_{ijlk} \quad (\text{III.42})$$

Les 36 composantes peuvent être rangées dans un tableau 6\*6 et les lois de comportement s'écrivent alors:

$$\begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

Et inversement:

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ s_{12} \\ s_{13} \\ s_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

Compte tenu du caractère isotrope de la loi de Hooke, les tableaux 6\*6 seront les mêmes quelle que soit la base orthonormée choisie. Par exemple, ils seront les mêmes pour des coordonnées cylindriques ou sphériques.

Pour terminer, le tableau III.2 donne les modules élastiques approximatifs de quelques matériaux usuels La plupart des métaux usuels sont, en bonne approximation, isotropes. Il en va de même pour la pierre, le béton, le verre...et pour les résines armées de fibres réparties uniformément dans toutes les directions. Le module de compressibilité du caoutchouc est infini puis que ce matériau est incompressible.

Matériaux	$n$	$E(\text{Mpa})$	$m(\text{Mpa})$	$K(\text{Mpa})$
Acier	0.3	205000	78800	170800
Aluminium	0.33	70000	26300	68600
Verre ordinaire	0.22	60000	24600	35700
Béton	0.2	30000	12500	16667
Plomb	0.45	17000	5860	56700
Pléxiglas	0.36	3000	1100	3570
Bakélites (polypropylène)	0.37	1000	365	1280
Caoutchouc	0.5	2	0.67	$\infty$

Tab. III.2. Modules élastiques approximatifs de quelques matériaux

Les coefficients d'élasticité  $E, I, m$  et  $K$  sont homogènes à des contraintes, tandis que le coefficient de Poisson  $\nu$  est sans dimension.

**III.6. Critère de limite d'élasticité**

**III.6.1. Forme générale du critère**

Le modèle élastique représentait le comportement des matériaux métalliques dans la région élastique, c'est-à-dire tant que l'on ne dépassait pas le seuil de limite élastique (figure III.4).

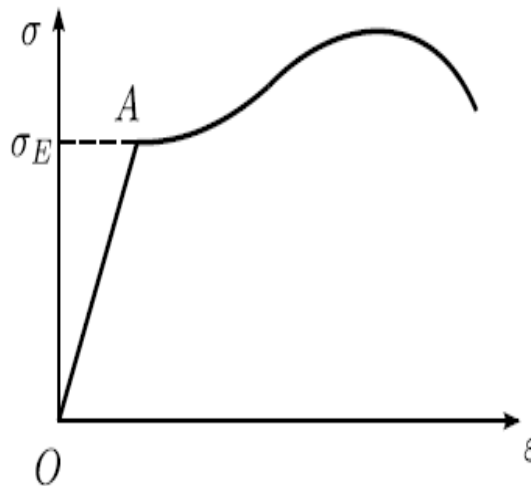


Fig. III.4. Comportement d'un matériau métallique.

Pour justifier les calculs issus de ce modèle, il faut donc vérifier, après avoir résolu le problème, que ce seuil n'est pas dépassé. C'est le principe du calcul élastique des structures ou des éléments de construction. Dans le cas unidimensionnel, cette vérification se réduit à s'assurer que :

$$|\underline{s}| < se \tag{III.48}$$

En appelant  $se$ , la limite élastique en traction simple, dont la valeur est également tirée de l'essai de traction. Dans le cas tridimensionnel, il faut vérifier un critère de limite d'élasticité qui, de manière général

$$f(\underline{\underline{s}}) < 0 \tag{III.49}$$

Où  $f$  est une fonction réelle, la fonction seuil élastique, qui limite, dans l'espace des contraintes, la région élastique dans laquelle doit rester le point représentatif des contraintes. Cette fonction doit vérifier les symétries du matériau, et doit donc être telle que :

$$f(Q_{ik}Q_{il}S_{kl}) = f(S_{ij}) \tag{III.50}$$

Pour toute matrice  $Q_{ij}$  orthogonale. En particulier, pour un milieu isotrope, la fonction doit vérifier l'identité (1.50) pour toute matrice  $Q_{ij}$  orthogonale. On dit alors que la fonction  $f$  est isotrope, et on montre que  $f$  est uniquement fonction des invariants principaux de  $\underline{\underline{S}}$ , ou ce qui revient au même, fonction symétrique des contraintes principales :

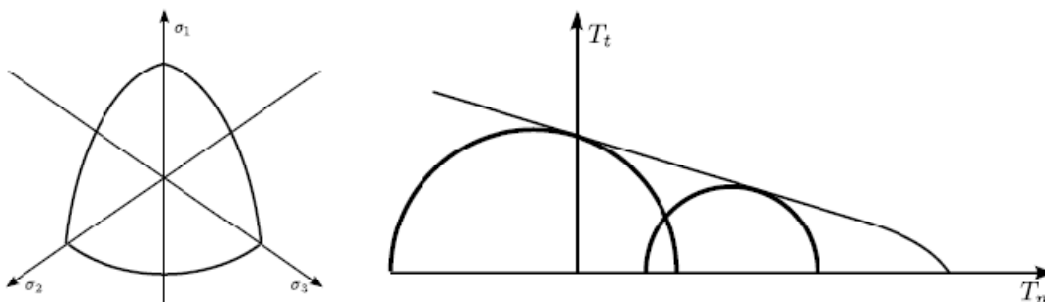
$$f(\underline{\underline{S}}) = f(I_1, J_2, J_3) = f(S_1, S_2, S_3) \tag{III.51}$$

Plutôt que les invariants  $I_1, I_2$  et  $I_3$  de  $\underline{\underline{S}}$ , on préfère introduire  $I_1$  lié à la partie sphérique de  $\underline{\underline{S}}$  et les invariants  $J_2$  du déviateur de  $\underline{\underline{S}}$ . En effet, ces variables permettent d'obtenir directement la surface seuil dans l'espace des contraintes principales. En particulier, si  $J_3$  n'intervient pas dans  $f$  alors cette surface seuil est de révolution autour de l'axe hydrostatique. Pour les métaux, on a montré expérimentalement qu'une pression hydrostatique, aussi élevée soit-elle, ne produisait aucune déformation plastique. Nous pouvons donc supposer que la partie sphérique du tenseur des contraintes n'intervient pas dans  $f$  :

$$f(J_2, J_3) < 0 \tag{III.52}$$

Dans l'espace des contraintes principales, la surface seuil est un cylindre de génératrice parallèle à l'axe hydrostatique.

Le seuil sera donc complètement défini par l'intersection de la surface seuil avec le plan déviatoire ou plutôt, compte tenu des symétries, par cette intersection limitée à un secteur de 60 degrés, le reste étant complété par symétrie. Il va de soi que la détermination expérimentale de cette courbe est très difficile.



Pour d'autres matériaux, en particulier pour les sols, la pression moyenne  $-\mathbf{s} = \frac{1}{3}\mathbf{s}_{kk}$  intervient crucialement dans  $f$ . On suppose alors souvent que la contrainte principale intermédiaire n'intervient pas dans  $f$ , c'est-à-dire que  $f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$  dépend uniquement de la plus grande et de la plus petite des contraintes principales :

$$f = f(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3) \leq 0 \quad \text{si} \quad \mathbf{s}_1 \geq \mathbf{s}_2 \geq \mathbf{s}_3 \quad (\text{III.53})$$

Il ressort que dans la représentation de Mohr, seul intervient le plus grand des trois demi-cercles.

Le critère est alors complètement défini par la courbe intrinsèque C, enveloppe des demi-cercles limites, c'est-à-dire correspondant à  $f = 0$ . C'est le critère de la courbe intrinsèque.

### III.6.2. Critères de von Mises et de Tresca

Pour les métaux, ou plus généralement pour les matériaux dont le critère peut s'écrire sous la forme (III.52), on utilise habituellement les critères de limite d'élasticité de Von Mises ou de Tresca. Le critère (III.52) peut s'écrire sous la forme :

$$-J_2 <_k (J_3) \quad (\text{III.54})$$

Qui définit l'équation polaire du courbe seuil dans le plan déviatoire II. Le critère le plus simple s'obtient en écrivant que  $k$  ne dépend pas de  $J_3$  autrement dit que le cylindre seuil est de révolution.

#### 1. Critère de von Mises

Ce critère s'écrit :

$$-J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} < k \quad (\text{III.55})$$

Où  $k$  est une constante, caractéristique du matériau, que l'on peut relier à la limite élastique en traction  $\mathbf{s}_e$ . En traction simple en effet, le critère (III.55) donne :

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{\mathbf{s}^2}{3} < k \quad (\text{III.56})$$

Soit, par comparaison avec (III.48),  $k = \mathbf{s}_e^2 / 3$  Le critère de Von Mises s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{\mathbf{s}_e^2}{3} \quad (\text{III.57})$$

On peut en donner diverses interprétations physiques. Par exemple, l'énergie de déformation  $w$  se décompose en deux parties, une partie due à la dilatation, et une partie due à la distorsion, ou

déformation sans changement de volume. Donc, le critère de Von Mises exprime que l'énergie de distorsion ne doit pas dépasser un certain seuil:

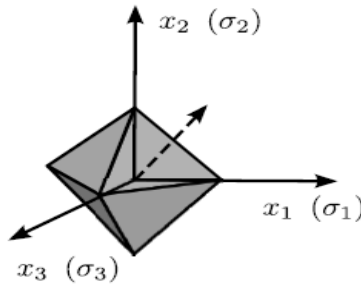
$$W_{dist} = \frac{1}{4m} s_{ij} s_{ij} < W_{lim} \quad (III.58)$$

On peut également introduire les facettes octaédriques normales aux quatre tri-sectrices des directions principales (ainsi nommées car elles forment un octaèdre). Les contraintes normale et tangentielle associées à ces facettes sont appelées contraintes normale et tangentielle octaédriques.

En repère principal, un calcul direct montre :

$$T_n^{oct} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

$$T_t^{oct} = \frac{1}{9} \left\{ (s_1 - s_2)^2 + (s_2 - s_3)^2 + (s_3 - s_1)^2 \right\} = -\frac{2}{3} J_2 \quad (III.59)$$



Le critère de Von Mises exprime donc que la contrainte tangentielle octaédrique ne doit pas dépasser un certain seuil

$$T_t^{oct} < T_{lim} \quad (III.60)$$

Le critère de Tresca exprime que la contrainte tangentielle ne doit pas dépasser un certain seuil.

**2. Critère de Tresca**

Ce critère s'écrit :

$$T_t = \max |T| < k \quad (III.61)$$

En un point donné, il faut donc vérifier que le maximum de la contrainte tangentielle, lorsque la facette varie, ne dépasse pas  $k$ . on peut écrire cette condition comme suit :

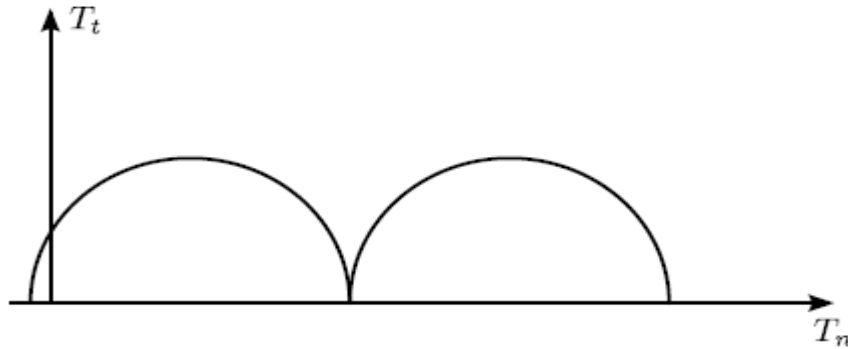
$$\sup T_t = \frac{s_1 - s_2}{2} < k \quad ; \quad s_1 \geq s_2 \geq s_3 \quad (III.62)$$

Et comme pour le critère de Von Mises, on obtient la valeur de  $k$  en identifiant à (III.62) dans le cas de la traction simple. Il vient :

$$s_1 - s_3 < s_e \quad ; \quad s_1 \geq s_2 \geq s_3 \quad (III.63)$$



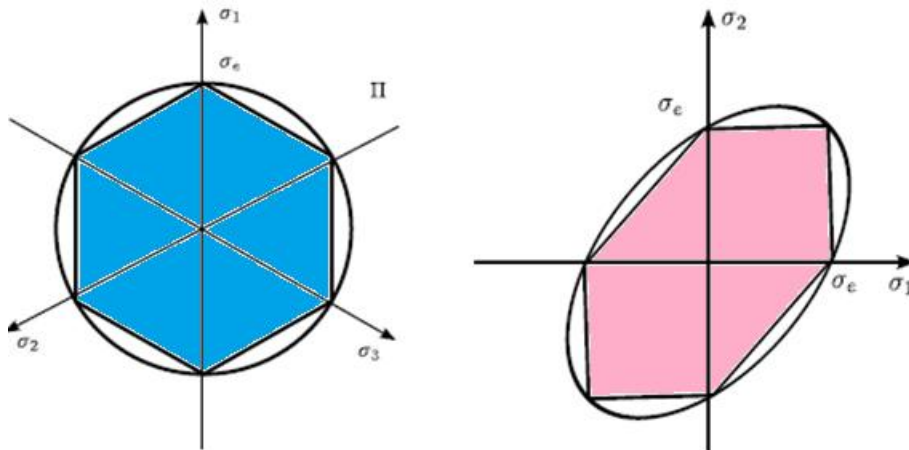
Le critère de Tresca est un critère du type (III.62), la courbe intrinsèque étant la droite  $T_t = s_e / 2$



Les deux critères de Von Mises et Tresca s'appliquent aux métaux. Ils conduisent à des résultats légèrement différents. La limite élastique  $T_e$  devient :

$$T_e = \begin{cases} s_e/2 \dots \text{pour Tresca} \\ s_e/\sqrt{3} \dots \text{pour Von Mises} \end{cases} \tag{III.64}$$

Dans l'espace des contraintes principales, la surface seuil est un cylindre à base circulaire pour Von Mises, hexagonale pour Tresca



La figure ci-dessus montre l'intersection de ces cylindres avec le plan déviatoire et avec le plan  $s_3 = 0$ , description qui conviendra pour les états de contraintes planes. Pratiquement, ils conduisent à des résultats suffisamment voisins pour que, dans les applications courantes, on puisse utiliser indifféremment l'un ou l'autre.

On utilisera donc le critère de Von Mises lorsque l'on connaîtra le tenseur des contraintes par ses composantes, puisque ce critère s'exprime alors par la relation :

$$(s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2 + 6s_{12}^2 + 6s_{23}^2 + 6s_{31}^2 < 2s_e^2 \tag{III.65}$$

Ce critère se prête donc bien aux calculs analytiques ou numériques. On utilisera le critère de Tresca (III.62) lorsque l'on connaîtra a priori les directions principales du tenseur des contraintes ; il conduira alors à des calculs plus simples que le critère de Von Mises.

### III.7. Problèmes à résoudre

#### III.7.1. Problème 1

Quel est l'allongement d'un fil de 1 m de long et de section  $S = 1\text{mm}^2 = 10^{-6}\text{m}^2$  accroché au plafond, au bout duquel on fait pendre une masse de 1 kg?

- Contrainte :  $s = mg / S = (1 \times 9,8) / 10^{-6} ; 10^7 \text{ pa.}$
- Allongement :  $\Delta l = \varepsilon \times l_0 = \sigma \cdot l_0 / E.$ 
  - Fil de nylon :  $\Delta l = 1 \text{ cm}$
  - Fil de caoutchouc :  $\Delta l = 5 \text{ m!}$  On est sorti du domaine linéaire  $\rightarrow$   
Hooke n'est pas valable.
  - Fil d'acier :  $\Delta l = 50 \mu\text{m}.$

#### III.7.2. Problème 2 : COMPRESSION UNI-AXIALE SELON L'AXE (OZ)

On considère la compression d'une barre maintenue sur les côtés de façon que ses dimensions latérales ne puissent pas varier (contrairement au cas de la traction uni-axiale on applique ici une contrainte sur les surfaces latérales pour les empêcher de se déplacer)

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

On obtient donc pour le tenseur des contraintes :

$$s_{xx} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} e = s_{yy}$$

$$s_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} e$$

$$s_{xy} = s_{yz} = s_{xz} = 0$$

En désignant la force de compression par unité de surface par  $s_{zz} = -P$ , on a :

$$e_{zz} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} p$$

$$e_{xx} = s_{yy} = -p \frac{\nu}{1-\nu}$$

L'énergie libre élastique de la barre s'écrit :

$$F_{el} = F - F_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \sum e_{ik}^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} e^2 u \right]$$

$$F_{el} = \frac{p^2}{2E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$$

**III.7.3. Problème 3 (Examen N°1 2018)**

Pour les trois cas trouver le tenseur de contraintes et de déformation, sachant que le comportement est élastique linéaire isotrope.

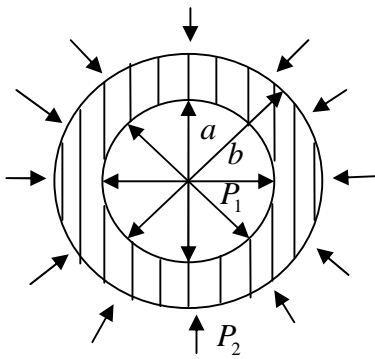
$$1 - \begin{cases} U_i = a x_i \\ a \neq 0 \end{cases} ; 2 - \begin{cases} U_1 = b x_1 \\ U_2 = b x_2 \\ U_3 = b x_3 \end{cases} ; 3 - \begin{cases} e_{ij} = \frac{s}{3l + 2m} \\ si \ i = j \\ e_{ij} = 0, si \ i \neq j \end{cases}$$

Avec :

$$e_{ij} = \frac{1}{2m} s_{ij} - \frac{l}{2m(3l + 2m)} d_{ij} s_{kk}$$

**III.7.4. Problème 4**

Un réservoir sphérique soumis à une pression intérieure P<sub>1</sub> une pression externe P<sub>2</sub>, les forces volumiques ne sont pas négligeables.



Définir les conditions aux limites pour les trois cas :

1. Le réservoir en statique.
2. Le réservoir en dynamique.
3. Le réservoir en quasi-statique.

**III.7.5. Problème 5 (Examen N° :01 (2019))**

**Question**

- Expliquer le phénomène d'écrouissage et l'effet de Banchinger ?

La loi de Hooke généralisée s'écrit sous la forme suivante :

$$s_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl}$$

- Monter que le tenseur des rigidités élastiques est symétrique

Problème : Une plaque carrée ‘ d’Acier’ est soumise à un vecteur de déplacement suivant :

$$U_1 = \frac{1}{10^6} [15x^2 - 3xy + 50]$$

$$U_2 = \frac{1}{10^6} [15y^2 - xy + 20]$$

-Quel est le type de ce problème ?

-Calculer le tenseur I et II en ‘ HPP’ , si le comportement est élastique linéaire isotrope, avec  $E=210 \text{ GPa}$  et  $\nu=0.3$

-Peut- on-Utiliser la théorie d’élasticité plaque ? Justifier votre réponse ?

-Maintenant une éprouvette de cette plaque est soumise à un essai de traction et le tenseur de contrainte I est donnée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} s_1 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = 0 \\ s_2 = s = 10 \text{ MPa} \end{cases}$$

-La loi de comportement est donnée sous la forme suivante :

$$s_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} d_{ij} \cdot \text{tr}(e) + \frac{E}{1+\nu} e_{ij}$$

-Trouver le tenseur de déformation II ?

-Ecrire les constantes (les coefficients) de LAME en fonction de module d’Young et le coefficient de poisson si le tenseur de déformations s’écrit sous la forme suivante :

$$e_{ij} = \frac{1}{2m} s_{ij} - \frac{l}{2m(3l+2m)} d_{ij} \cdot s_{kk}$$

-Calculer les déformations et les constantes de Lamé ?

### III.7.6. problème 6 (Rattrapage 2019)

**Exercice 01** : le tenseur de contrainte pour un essai de traction est donné par :

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{F}{S} = s \end{bmatrix}$$

- a) Calculer le tenseur de déformation si la loi de comportement est donnée par la relation suivante :

$$s_{ij} = l d_{ij} e_{kk} + 2m e_{ij}$$

- b) Calculer les constantes E et u en fonction de l et m.
- c) On donne maintenant la loi de comportement en fonction de et par la relation suivante :

$$e_{ij} = \frac{1+u}{E} s_{ij} + \frac{u}{E} d_{ij} s_{kk}$$

Et le vecteur de déplacement d'un point dans un solide par :

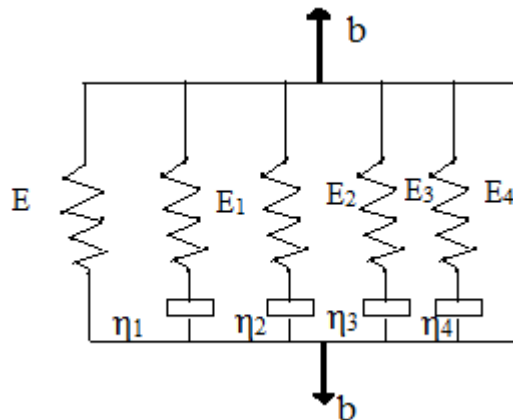
$$\begin{cases} 10^5 \cdot u = 50 - 3xy + 15x^2 \\ 10^5 \cdot v = 20 + 15y^2 - xy \end{cases}$$

- d) Quel est le type de ce problème ?
- e) Calculer en fonction de x, y, E et u les tenseurs I et II pour un état de déformations planes.
- f) Calculer les tenseur I et II dans les points M<sub>1</sub>(1,1) et M<sub>2</sub>(2,2) d'un solide dont le module de Young  $E = 3 \cdot 10^5 \text{ kgf / mm}^2$  et le coefficient de poisson  $u = 0.2$
- g) Ecrire l'équation d'équilibre.

**Exercice 02 :**

En associant un ressort de raideur avec d'autres éléments de type Maxwell comme indiqué dans la figure.

-Déterminer la loi de comportement du solide correspond à ce modèle ? (Voir chapitre V).



## **CHAPITRE IV**

### **TECHNIQUES MECANIKES ET NUMERIQUES DE CARACTERISATION DES MATERIAUX.**

#### **IV. Introduction**

A cause de besoins en matériaux de pointe et importance de leur caractérisation pour l'avancement des technologies actuelles, les recherches sont toujours en progression, et les spécialistes recourent vers les meilleurs matériaux qui s'adaptent avec leur utilisation en industrie, et pour cet objectif la caractérisation joue un rôle très important pour identifier les propriétés mécaniques des matériaux. Dans cet axe de caractérisation il existe plusieurs techniques, tel que les techniques optique, mécanique, numérique, thermique, électronique,...etc. Dans ce chapitre les méthodes mécaniques et numériques sont résumées d'une manière simple.

#### **IV.1. Méthodes de caractérisation mécanique des matériaux**

Les essais mécaniques sont l'étape indispensable pour accéder aux grandeurs caractéristiques des matériaux, du module d'Young à la limite d'élasticité, en passant par la ténacité ou la résistance à la fatigue, et ce dans des conditions variables, par exemple de température ou de vitesse de sollicitation.

Le propos de ce chapitre est de présenter les techniques expérimentales les plus couramment utilisées, aussi bien dans les laboratoires universitaires qu'industriels, pour caractériser le comportement mécanique des matériaux. Les techniques abordées seront : les essais uni-axiaux (quasi-statiques et dynamiques), les essais multiaxiaux, les mesures d'indentation, les essais de fatigue et les techniques gravitant autour du phénomène de rupture. En outre, les annexes apportent un complément sur les méthodes de mesure de la déformation et de la contrainte.

Il s'agit ici de donner les grandes idées et les modes opératoires propres à chacune des techniques abordées, sans entrer dans trop de détails, chacune d'entre elles pouvant faire l'objet d'un ou de plusieurs ouvrages à elle toute seule. L'intention de ce document est de donner un "bon sens physique" au futur ingénieur sur ce que l'on peut mesurer, comment et avec quelle précision, dans un temps relativement restreint, l'annexe C à la n de ce document s'efforçant de proposer quelques pistes pour aller plus loin.

#### **IV.2. Essais mécaniques uni-axiaux**

##### **IV.2. 1. Introduction**

La caractérisation des lois de comportement des matériaux sur une plage de vitesses importante implique d'utiliser des techniques variées, avec des précautions propres à chacune d'entre elles. Les résultats sont d'exploitation plus ou moins aisée, et l'on distinguera les essais quasi-statiques et les

essais dynamiques. Les premiers permettent, par leur caractère uni-axial, une exploitation relativement directe des résultats, alors que les seconds, qui impliquent des vitesses de déformation élevées, imposeront une modélisation qui prend en compte la propagation des ondes élastiques dans les matériaux et pourront imposer l'utilisation des éléments finis au lieu d'être "proprement" compris. La figure IV.1 présente les techniques à utiliser en fonction de la vitesse de déformation à laquelle la loi de comportement du matériau doit être évaluée.

Toutes ces techniques ne peuvent pas non plus mettre en jeu les mêmes énergies, et ne permettent donc pas de caractériser des échantillons de même taille. Certaines d'entre elles sont très consommatrices de matière, ce qui peut poser des problèmes de coût ou de faisabilité, alors que d'autres peuvent être pénalisantes en ne permettant pas de tester des échantillons de taille satisfaisante. Tout cela dépend, bien sûr, de ce que l'étude est appelée à caractériser.

Maintenant nous présentons quatre types d'essai : les essais de fluage et l'essai de traction (quasi statique) d'un usage très répandu, alors que les deux autres, traction à grande vitesse et essais Hopkinson, par leur complexité de mise en œuvre, se rencontrent plutôt dans le cadre des laboratoires de recherche.

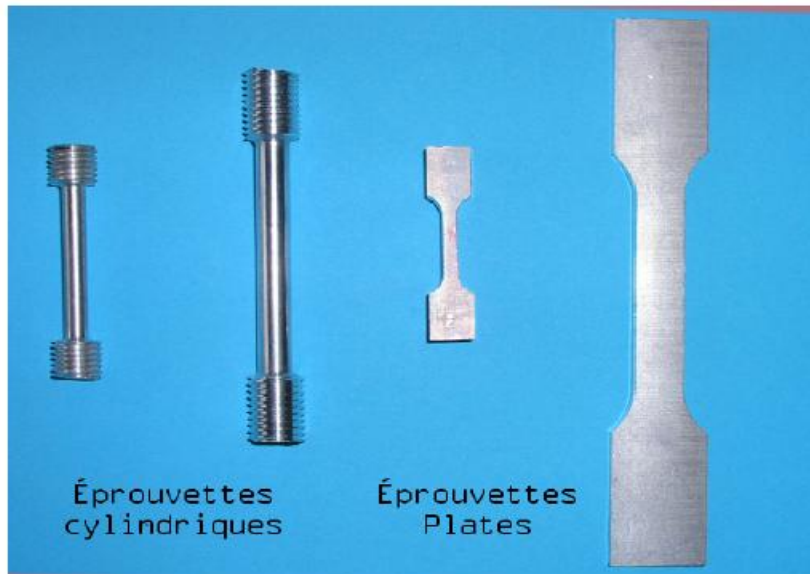
### IV.2.2. Fluage

Le fluage d'un matériau se produit à haute température et correspond à un régime de déformation lente, sous charge constante, la contrainte étant potentiellement inférieure à la limite d'élasticité. Ces essais intéressent donc les domaines où les matériaux sont soumis à des températures élevées, tels que l'aéronautique ou le nucléaire.

Les essais de fluage nécessitent l'usage d'une machine de mise en charge, d'un four et d'un extensomètre. Dans le cas des métaux, les essais de fluage sont le plus souvent effectués en traction, quoique des essais de compression soient également possibles pour des matériaux fragiles, le risque d'endommagement étant plus limité dans ce mode (les mesures perpendiculaires à l'axe de sollicitation ne pouvant pas se développer).

#### IV.2.1.1. Eprouvettes

Les éprouvettes de fluage sont analogues à celles utilisées en pour les essais de traction uni-axiale ordinaires : éprouvettes cylindriques ou plates (Fig. IV.1), encore que d'autres géométries peuvent être utilisées selon la disponibilité du matériau ou les contraintes géométriques. Il est préférable, toutefois, étant donnée la faible vitesse de déformation, de disposer d'éprouvettes relativement longues pour augmenter la précision de la mesure du déplacement.



**Fig. IV.1. Éprouvettes de traction plates et cylindriques ; les extrémités sont plus épaisses pour moins se déformer, elles se raccordent à la section utile (plus étroite et longue pour obtenir un état de contrainte réellement uni-axial) par des congés usinés de façon à éviter de trop fortes concentrations de contraintes (donc avec un rayon de courbure aussi grand que possible).**

#### IV.2.1.2. Dispositif de chargement

Lors d'une expérience de fluage, il est plus courant de travailler à charge qu'à contrainte constante, toutefois il est possible d'effectuer des essais à contrainte constante, ce qui implique de faire varier la charge appliquée au fur et à mesure de la déformation de l'échantillon. Les dispositifs de fluage sont généralement composés d'un poids et d'un bras de levier relié à un mors sur lequel l'éprouvette est axée. Il peut être nécessaire, pour conserver l'équilibre de cette balance, de disposer d'un moteur qui compense l'élongation de l'éprouvette, les dispositifs correctement conçus pouvant tout de même assurer une précision satisfaisant les normes pour des angles du bras de levier de l'ordre de  $10^\circ$ . Il faut porter une attention particulière à l'alignement des têtes d'amarrage, afin de limiter les moments de flexion imposés à l'éprouvette (la norme ASTM recommande une déformation en flexion inférieure à 10 % de la déformation axiale).

Une étape sensible de l'essai de fluage est la mise en charge qui doit être accomplie de façon soignée pour éviter de perturber l'essai. L'éprouvette doit déjà être à la température de l'essai pour cette opération. La mise en charge peut être réalisée soit de manière "instantanée" pour s'approcher de la courbe théorique de usage, mais cela peut entraîner une perturbation du dispositif de mesure de la déformation ou un effet de choc sur l'éprouvette qui entraîne l'apparition d'un transitoire. Autrement, on peut procéder à un chargement progressif qui a l'avantage d'être reproductible, soit par paliers discontinus (ajout de masses), soit en augmentant continûment la charge, typiquement à l'aide de petites billes de plomb.



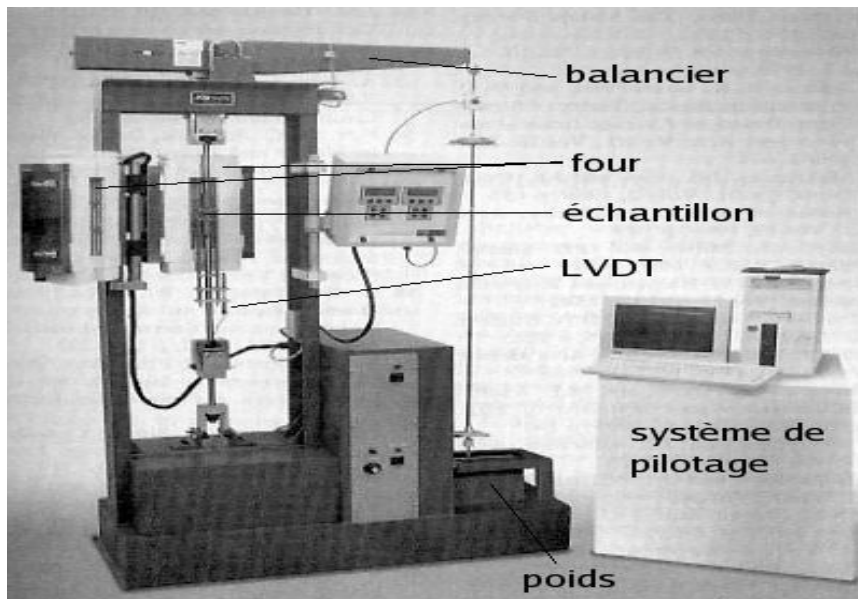


Fig. IV.2. Dispositif d'essai de fluage.

#### IV.2.1.3. Four thermique

Les fours utilisés sont en général des fours tubulaires à résistance électrique qui chauffe par radiation. Les variations de température ayant un impact fort sur les résultats de usage, il est important d'assurer un contrôle précis de la température (la norme e une variation maximale de  $\pm 1,7^\circ \text{C}$  au dessous de  $980^\circ \text{C}$  et  $\pm 2,8^\circ \text{C}$  au-dessus. La montée en température à elle seule peut durer plusieurs heures pour éviter de dépasser la température d'essai, ce qui invaliderait les résultats. La mesure de température est généralement effectuée par un thermocouple sur l'échantillon. Les éprouvettes longues peuvent imposer d'utiliser plusieurs thermocouples afin de s'assurer de l'homogénéité de la température.

#### IV.2.1.4. Mesure des déplacements

La mesure du déplacement est effectuée par extensomètre. Dans le cas des essais de fluage, la température élevée interdit le plus souvent de placer l'extensomètre directement dans le four et on utilise un système de tiges capables de supporter la température d'essai, transférant la déformation à un LVDT comme présenté sur la figure IV.3. Il est aussi possible de faire appel à de l'extensomètre sans contact, ce qui implique de disposer d'une fenêtre dans le four pour suivre le déplacement des points de la surface pris comme repères.

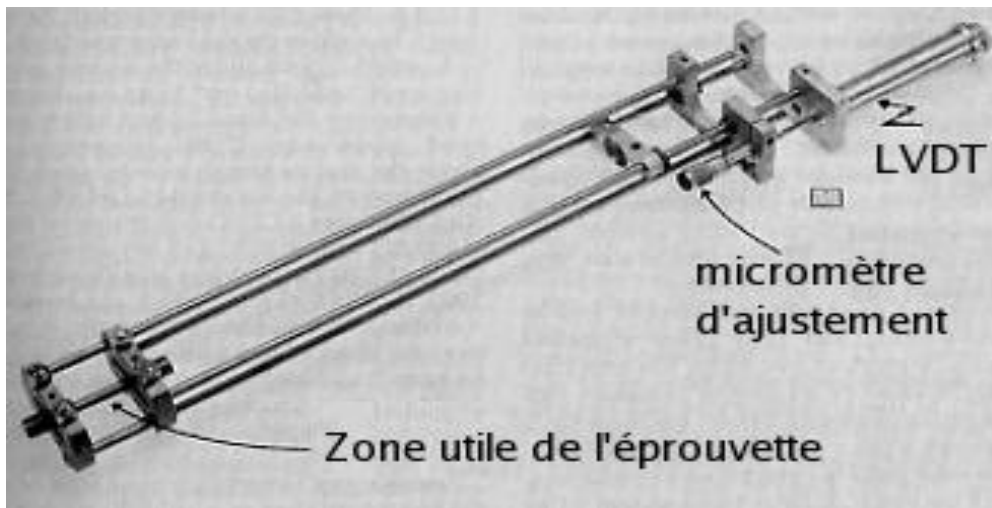


Fig. IV.3. Dispositif de mesure de la déformation pour essai de fluage.

#### IV.2.1.5. Résultats de fluage

Typiquement, le fluage des matériaux présente trois phases : le fluage primaire, pendant lequel la vitesse de déformation décroît continûment, le usage secondaire, à vitesse de déformation minimum, et enfin le fluage tertiaire pendant lequel la vitesse de déformation augmente jusqu'à la rupture de l'échantillon. La figure IV.4 présente une courbe type d'essai de Fluage.

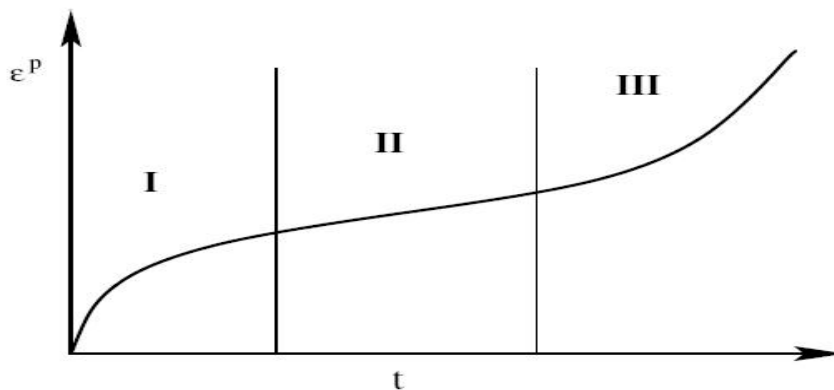


Fig. IV.4. Courbe de différents types de fluage.

#### IV.2.2. Essais de traction

L'essai de traction constitue un des essais les plus utilisés pour la caractérisation mécanique des matériaux. Etant purement uni-axial du moins tant qu'il n'y a pas de striction (diminution catastrophique de la section de l'éprouvette au centre de celle-ci), il permet de s'affranchir des méthodes de calcul inverse pour aboutir directement à une loi de comportement uni-axiale. Il permet de déterminer de nombreuses grandeurs normalisées, comme la contrainte à rupture, la contrainte maximale, la limites d'élasticité, etc. nécessaires dans les calculs de structure. Nous donnons ici tout d'abord la description générale d'une machine de traction, puis des éléments concernant les éprouvettes, les mesures de déformation et de charge appliquée.

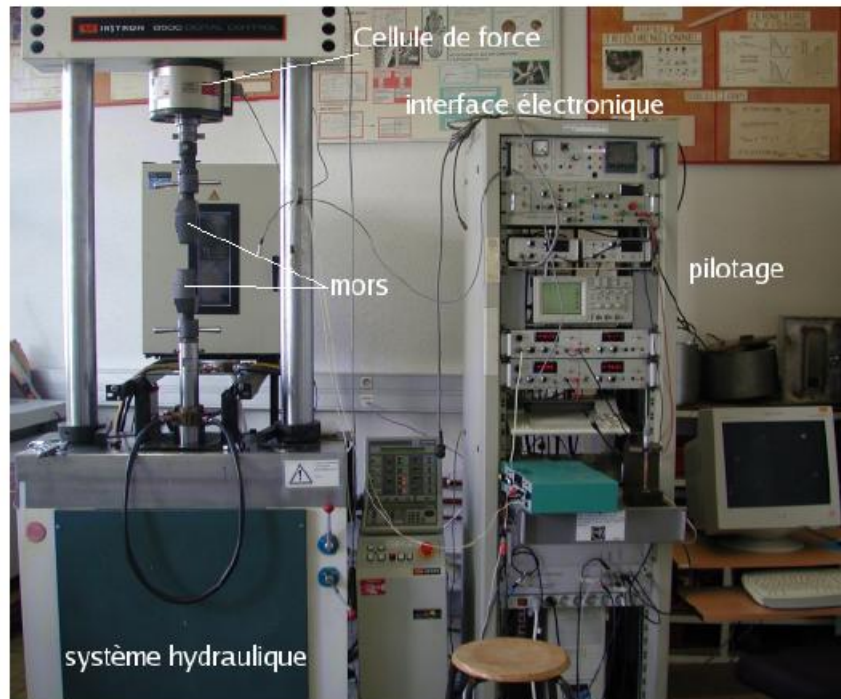


Fig. IV.5. Exemple de dispositif de traction.

#### IV.2.2.1. Présentation de machine de traction

Une machine de traction est constituée d'un bâti portant une traverse mobile. L'éprouvette de traction, vissée ou enserrée entre des mors, selon sa géométrie, est amarrée à sa partie inférieure à la base de la machine et à sa partie supérieure à la traverse mobile (dans le cas d'une machine mécanique) ou au vérin de traction (dans le cas d'une machine hydraulique). Le déplacement de la traverse vers le haut réalise la traction. Une machine de traction comporte une cellule de charge, qui permet de mesurer l'effort appliqué à l'éprouvette et le déplacement de l'éprouvette peut être suivi de diverses façons. Les dispositifs expérimentaux sont généralement asservis et peuvent être pilotés à vitesse de montée en charge, à charge constante, à vitesse de déformation constante, etc. selon ce qui peut être proposé par le système de pilotage.

#### IV.2.2.2. Eprouvettes de traction

Les éprouvettes de traction adoptent deux géométries : cylindrique ou plate. La section doit être constante sur une longueur suffisante pour obtenir un état de contrainte homogène pendant l'essai. Aux deux extrémités sont usinées des têtes d'amarrage avec des rayons de courbures suffisamment grands pour éviter des concentrations de contrainte excessives. Dans le cas des éprouvettes plates, le centrage de l'éprouvette peut devenir problématique si des trous calibrés ne sont pas percés dans les têtes.

### IV.2.2.3. Mesure et calcul du déplacement

La mesure du déplacement peut se faire de deux façons : soit en mesurant le déplacement de la traverse, soit en plaçant un dispositif de mesure sur la section utile de l'éprouvette. Les mesures peuvent atteindre une précision d'environ 1 à 0,1  $\mu\text{m}$  avec les dispositifs les plus sensibles, hors mesures de champs Déplacement de la traverse

Cette méthode de mesure implique l'ensemble de l'éprouvette, et donc des zones où l'uni-axialité de la contrainte n'est pas variée, ce qui introduit une erreur dans la mesure. En outre, lorsque le déplacement est évalué directement grâce à celui de la traverse, la raideur de la machine intervient dans les résultats de déformation obtenus : elle se comporte comme un ressort de raideur  $K$  (N/m)

en série avec l'éprouvette. Si la force mesurée par la cellule de charge est  $F$ ,  $v$  le déplacement de la traverse ou du vérin,  $L_0$  la longueur initiale de l'éprouvette et  $e$  la déformation, on peut écrire :

$$\Delta L / L_0 + F / (KL_0) = u / L_0 \quad (\text{IV.1})$$

Si  $K$  est grand, il est clair que la déformation mesurée est proche de celle du matériau testé : il faut donc disposer d'une machine aussi raide (ou "dure") que possible. Plus la machine sera molle, plus les résultats différeront du comportement vrai du matériau, au point de masquer des phénomènes comme des chutes de la charge. L'équation IV.1 se dérive en :

$$F = u \frac{S_0}{L_0} \frac{dS}{de} \left( 1 + \frac{1}{K} \frac{S_0}{L_0} \frac{dS}{de} \right)^{-1} \quad (\text{IV.2})$$

où  $dS/de$  représente l'écroutissage. Dans le cas où le matériau présenterait un adoucissement ( $dS/de < 0$ ) et si la machine de traction est trop molle ( $K$  petit), la variation de la force n'est pas forcément négative et peut tendre vers 0 et donc masquer la diminution de la contrainte d'écoulement.

#### IV.2.2.3.1. Extensomètre

Un extensomètre est un dispositif permettant de mesurer le déplacement directement sur la partie utile de l'éprouvette (i.e. où l'état de contrainte est homogène). Cela permet de s'affranchir de la raideur de la machine et des effets de tri-axialité, et d'obtenir une mesure plus précise que par la mesure du déplacement de la traverse. Il existe deux types d'extensomètre : avec ou sans contact ; on choisira l'une ou l'autre selon les conditions expérimentales. Il est possible également de mesurer la variation de section d'une éprouvette pour évaluer l'effet Poisson.

IV.2.2.4. Cellule de charge

La mesure des forces repose sur l'évaluation de la déformation d'un corps dont le module est connu ; la théorie de l'élasticité permet alors de remonter de la déformation à la force appliquée. Dans le cas des essais de traction, le principe des cellules de charge repose sur la déformation d'un corps d'épreuve sur lequel ont été disposées des jauges de déformation qui permettent de mesurer la déformation par une variation de signal électrique. Il est alors possible de déduire la charge appliquée de la tension lue aux bornes des extensomètres. Plus ce corps aura un module faible, plus il permettra de mesurer des forces faibles, mais il risquera alors de perturber l'expérience puisque la cellule de charge est en série avec les mors et l'éprouvette. En outre, la force mesurable maximale est bornée supérieurement par la limite élastique du corps d'épreuve. Pour éviter le risque d'endommager la cellule, certaines d'entre elles sont équipées d'une butée qui interdit la mesure au-delà d'une certaine force. La géométrie de la cellule de force dépendra de la sensibilité souhaitée ou de la rigidité nécessaire. La figure IV.6 présente un certain nombre de géométries de cellules de force classiques. En pratique, l'erreur de mesure sur les cellules de force commerciales varie typiquement de 0,02 à 2 % environ (selon la charge mesurée et le prix de la cellule).

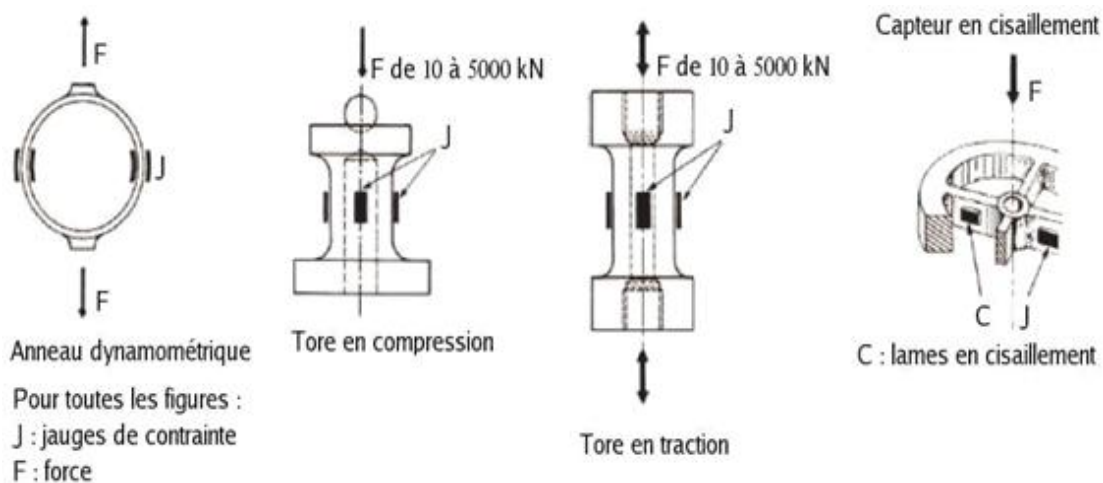


Fig. IV.6. Différents types de cellules de charge.

IV.2.3. Essais dynamiques

Les essais dynamiques sont les techniques expérimentales qui permettent de solliciter un matériau à des vitesses de déformation élevées. Ils intéressent des applications diverses comme la protection sismique, les calculs de déformation lors de crash test dans l'automobile, les procédés de mise en forme de métaux, notamment par usinage, ou encore les problèmes liés à la perforation des blindages, qui impliquent des vitesses de déformation pouvant atteindre, respectivement, 1 à  $10^2 \text{ s}^{-1}$ ,

$10^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $10^4 \text{ s}^{-1}$  et plus de  $10^7 \text{ s}^{-1}$ . Les deux méthodes expérimentales présentées ici intéresseront les plages allant de 1 à  $10^5 \text{ s}^{-1}$ .

Pour les essais de traction uni-axiale classiques présentés dans la section précédente, les vitesses de déformation atteintes vont de  $10^{-4}$  à  $0,1 \text{ s}^{-1}$ , environ, ce qui n'est de toute évidence pas suffisant face aux vitesses de déformation rencontrées dans certaines conditions réelles, comme celles mentionnées ci-dessus. Il est donc nécessaire de disposer de techniques expérimentales qui permettent de caractériser le comportement mécanique des matériaux dans des conditions contrôlées. Nous présenterons ici les essais de traction à grande vitesse, qui permettent de faire varier la vitesse de déformation de 1 à  $400 \text{ s}^{-1}$ , environ, et les essais Hopkinson, dont la plage de vitesse de déformation est typiquement de  $10^2$  à  $10^5 \text{ s}^{-1}$ .

### IV.3.1.Traction grande vitesse

Les essais de traction "grande vitesse" se distinguent des essais quasi-statiques, d'une part par la nécessité d'obtenir des vitesses de vérin très élevées (jusqu'à 25 m/s), et d'autre part par la mise en œuvre de techniques de mesure spécifiques que ce soit pour la mesure de la charge ou pour la mesure de l'allongement de l'éprouvette. Pour cette dernière, l'extensométrie sans contact est une des techniques les plus utilisées.

#### A. Déplacement et échantillon

Pour atteindre des vitesses de déplacement élevées (de l'ordre de 20 m/s), il est nécessaire d'utiliser des systèmes servo-hydrauliques ; en outre, an d'obtenir des vitesses de déformation aussi constantes que possible, il est nécessaire de démarrer le déplacement de la partie mobile sans entraîner l'éprouvette avant que la vitesse désirée ait été atteinte, que ce soit par des systèmes qui permettent de serrer les mors "à la volée" ou bien par un dispositif qui entraîne la traverse avec un retard suffisant.

#### B. Mesure de contrainte et de déformation

A de telles vitesses de déformation, il s'avère nécessaire de disposer de systèmes d'acquisition travaillant à des fréquences très élevées, de l'ordre de quelques MHz. En outre, la cellule de force montée sur le bâti va recevoir un signal fortement bruité par les ondes mécaniques se propageant dans le dispositif, ce qui peut nécessiter de réaliser les mesures de contrainte directement sur l'éprouvette, à l'aide de jauges de déformation appliquées sur les parties de l'éprouvette déformées de manière purement élastique. Les mesures de déformation doivent également être effectuées directement sur l'éprouvette, par un système d'extensométrie adapté. Les extensomètres laser à et

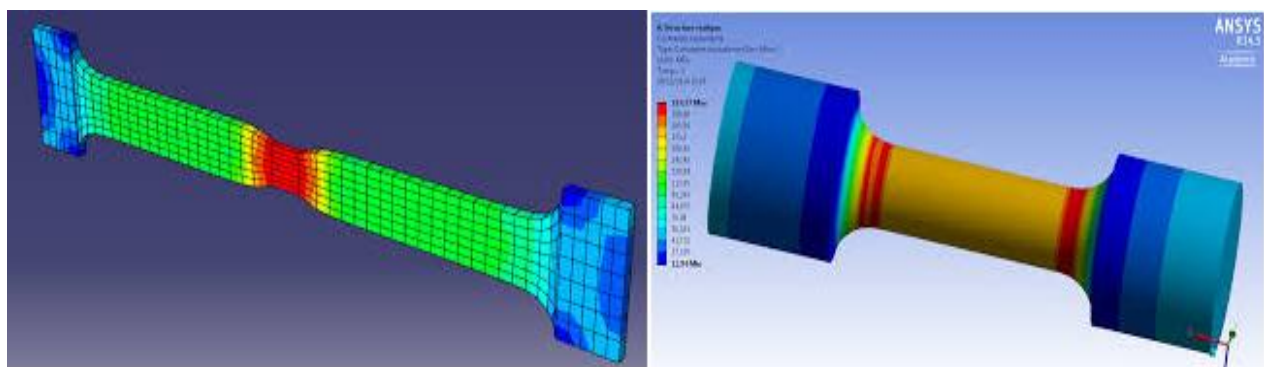
Doppler peuvent être utilisés dans ce cas 1. La figure IV.7 présente le dispositif de traction à grande vitesse du Centre des Matériaux (CdM) de l'Ecole des Mines de Paris.



**Fig. IV.7. Dispositif de traction grande vitesse (TGV) du CdM. 1) Cellules laser à effet Doppler pour la mesure de déformation 2) Dispositif de mors enserrant l'éprouvette "à la volée" lorsque la vitesse de déplacement désirée est atteinte. La vitesse de déplacement maximale de la traverse est de 25 m/s, la charge maximale de 80 KN, l'énergie d'environ 6 kJ ; il est possible de réaliser des essais en température, entre -135 et +250 °C.**

**C. Exploitation des résultats**

Les essais de traction à grande vitesse imposent de prendre en compte la propagation des ondes élastiques dans le système, et donc de modéliser chacun des essais. Une modélisation en éléments finis permet de reproduire la propagation des ondes élastiques dans l'éprouvette. L'image IV.8 présente le maillage utilisé ainsi qu'un état de contrainte au cours de la montée en charge.



**Fig. IV.8. Exemple de modélisation éléments finis d'un essai de traction/compression : Maillage d'une éprouvette cylindrique et plate.**

Le principe de cette méthode est d'éclairer la surface de l'échantillon par deux faisceaux lasers issues de la même source qui interfèrent sur la surface de l'échantillon, formant ainsi des franges dont la distance dépend de la longueur d'onde du faisceau et de l'angle que forment les lasers entre eux. Lorsque la surface de l'éprouvette se déplace dans le volume d'interférence des deux faisceaux, la rugosité procure une population naturelle de sources de diffusion qui diffuseront la lumière avec

une intensité modulée par le contraste d'intensité local. La fréquence de modulation est alors proportionnelle à la vitesse de déplacement de la surface. En mesurant simultanément deux points de la surface, leur mouvement relatif peut être déduit ce qui permet de remonter à la déformation.

### IV.3.2. Essais Hopkinson

#### a) Principe

Les essais Hopkinson consistent à placer l'échantillon entre deux barres à haute limite élastique. Un projectile vient heurter la barre d'entrée (propulsé par un canon à air comprimé constitué d'un compresseur et d'une électrovanne) ce qui génère un train d'ondes se propageant dans toute la chaîne mécanique, provoquant la compression de l'échantillon, les mesures étant effectuées sur le corps des deux barres. On préfère utiliser des barres longues qui permettent l'approximation élastique unidimensionnelle car la situation devient trop complexe pour être exploitable dans le cas 2D. Pour les essais Hopkinson, l'hypothèse d'homogénéité de la contrainte n'est pas toujours tenable - surtout aux plus hautes vitesses - et il s'avère nécessaire de prendre en compte la propagation des ondes dans l'échantillon lorsque l'on traite des régimes transitoires. Dans ce cadre, on a les relations suivantes :

$$\Delta s = -rC\Delta V, \Delta V = -C\Delta e \quad (IV.3)$$

avec  $\Delta S$  le saut de contrainte, de vitesse particulière  $\Delta V, \Delta e$  , le taux de déformation à travers le front d'onde,  $\rho$  la masse volumique et  $C$  la célérité des ondes élastiques.

Une jauge de déformation est collée au milieu de chacune des barres (d'entrée et de sortie). Ces jauges permettent d'enregistrer les déformations longitudinales associées aux ondes mécaniques se propageant dans les barres. Les mesures faites au niveau des jauges doivent être transportées virtuellement aux faces des barres pour déduire les efforts et déplacements au niveau des faces de l'échantillon, par intégration des vitesses. Les vitesses particulières aux faces entrantes et sortantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} V_e(t) &= -C(e_i(t)) - e_r(t) \\ V_s(t) &= -Ce_t(t) \end{aligned} \quad (IV.4)$$

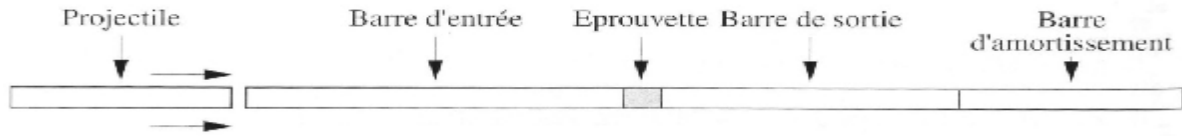
Ave  $e_i$  la déformation incidente,  $e_r$  la déformation réfléchie et  $e_t$  la déformation transmise, et les forces :



$$F_e(t) = S_b E (e_i(t) + e_r(t)) \quad (IV.5)$$

$$F_s = S_b E e_i(t)$$

Où  $S_b$  est la surface des barres et  $E$  leur module d'Young.



**Fig. IV.9. Schéma du principe de l'essai Hopkinson.**

On s'intéresse à trois types d'onde : incidente, transmise et réfléchi. Il est donc nécessaire, de toute évidence, de pouvoir distinguer les ondes incidentes des ondes réfléchies, ce qui ne permet plus d'effectuer de mesure lorsque deux trains d'onde se superposent. Le temps de mesure est donc donné par  $t = L/C$ , avec  $L$  la longueur de la barre entrante et  $C$  la célérité de l'onde. Par exemple, pour une barre d'acier ( $C = 5000$  m/s) de 2 m de long,  $\Delta t = 400$   $\mu$ s, ce qui autorise une déformation de 40 % pour une vitesse de déformation moyenne de  $10^3$   $s^{-1}$ . Ainsi, des vitesses de déformation trop faibles ne permettent pas de mesurer des déformations suffisamment importantes pour présenter un intérêt réel en termes de lois de comportement.

**b) Aspects pratiques**

Les dimensions types utilisées en pratique sont des barres de 3 m de long pour 20 mm de diamètre (une photo d'un dispositif expérimental présenté figure IV.10 ), pour un échantillon.



**Fig. IV.10. Dispositif expérimental d'essai Hopkinson, NTNU, Trondheim (Norvège).**

Les temps de mesure sont très faibles, inférieurs à la seconde, car elle ne peut être effectuée que sur des ondes se propageant dans une seule direction. Lorsque les ondes réfléchies et incidentes se mélangent, il devient impossible d'utiliser la proportionnalité entre les grandeurs mécaniques associées à une onde. Tout ceci impose des contraintes fortes sur le dispositif électronique d'acquisition des données qui doit travailler à haute fréquence afin de permettre d'enregistrer un nombre significatif de points de mesure. Un autre élément auquel il faut prêter attention est la

lubrification des contacts barres-échantillons an d'éviter des frottements qui gêneraient l'expansion radiale de l'éprouvette au cours de l'essai. Les effets mesurés pouvant être extrêmement faibles, il peut s'avérer important de disposer de jauges de déformation à semi-conducteur pour effectuer les mesures. Les jauges sont montées en pont, deux jauges longitudinales diamétralement opposées et deux transversales sensibles à l'effet Poisson, également diamétralement opposées.

#### IV.4. Essais multiaxiaux

Les essais multiaxiaux apportent une information précieuse pour tester les modèles de déformation, mais ils sont malheureusement peu pratiqués en raison des difficultés expérimentales. Les essais possibles, classiquement, sont les essais de traction (ou compression) - torsion, les essais de traction bi-axiale et les essais de compression triaxiale. L'essai de traction cisaillement est le plus riche pour tester les aspects d'anisotropie. Nous présenterons ici les essais de traction bi-axiale et les essais de traction - torsion. Les essais multiaxiaux peuvent être effectués suivant deux modes : en phase ou hors phase, selon que l'éprouvette subit simultanément ou non les différentes sollicitations. Les déplacements et les forces appliquées peuvent enregistrées de la même façon que dans le cas des essais de traction uni-axiale. Ces essais sont utilisés soit dans des conditions quasi statiques soit dans le cadre d'essais de fatigue multiaxiale.

##### IV.4.1. Essai de traction biaxiale

Les essais de traction bi-axiale consistent à exercer une contrainte dans deux directions perpendiculaires sur une même éprouvette. Ceci impose d'utiliser des éprouvettes cruciformes, comme celle présentées figure IV.11. Pour réaliser des états de contrainte uniformes, il faut que les bras de la croix aient des rigidités transversales assez faibles, ce que l'on peut obtenir en les évidant. Les directions principales des contraintes sont fixées et on peut effectuer des chargements dans l'espace de contraintes comme montré dans la figure IV.11 à gauche.

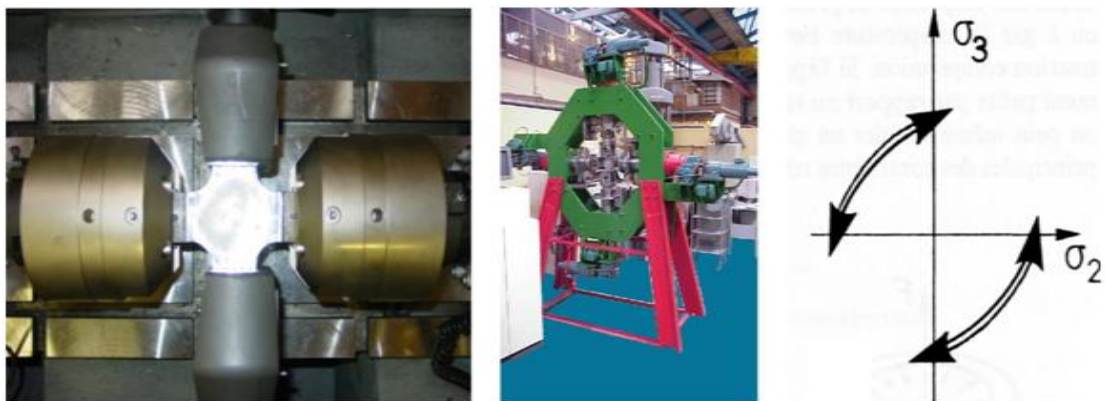


Fig. IV.11. Image de gauche : éprouvette de traction bi-axiale montée. Image du centre : dispositif de traction bi-axiale du laboratoire 3S à Grenoble. Image de droite : chemin mécanique pouvant être appliqué sur une éprouvette lors d'essais de traction bi-axiale.

#### IV.4.2. Essai de traction-torsion

Ce type d'essai permet d'étudier des trajets de chargement avec modification des directions principales des contraintes. La machine est constituée d'un vérin linéaire et d'un vérin torique avec dispositif de découplage. La figure IV.12 présente un dispositif de traction-torsion du CdM et un exemple de chemin mécanique dans l'espace des contraintes pouvant être appliqué à une éprouvette



**Fig. IV.12. Photo de gauche : dispositif de traction-torsion du Centre des Matériaux, image de droite : chemin mécanique pouvant être appliqué sur une éprouvette lors d'essais de traction torsion.**

#### IV.5. Essais d'indentation

Les essais d'indentation évaluent la "dureté" du matériau en mesurant la pression de contact pendant l'enfoncement d'un indenteur (pyramidal, conique ou sphérique). La dureté est calculée soit après l'essai, par mesure de la surface de l'empreinte (de gauche de la figure IV.13). Soit pendant l'essai, par mesure de l'enfoncement de l'indenteur dans les deux cas en fonction de la charge appliquée. Le résultat obtenu a la dimension d'une pression, mais s'exprime dans une unité liée à la géométrie de l'indenteur qui s'écrit : H (Hardness dureté en anglais) suivi d'un caractère indiquant le type d'indenteur utilisé (V pour Vickers (tête pyramidale) ou B pour Brinell (tête sphérique)).

Ces essais sont faciles à mettre en œuvre, puisqu'ils ne nécessitent qu'un polissage et peuvent être réalisés sur des échantillons de petite taille. Les essais de dureté peuvent porter sur des échelles millimétriques à nanométriques, selon le dispositif expérimental utilisé. Les essais classiques sont peu coûteux et selon les applications ils peuvent être considérés comme non destructifs. Cependant, contrairement aux essais de traction, les essais de dureté sont d'une interprétation beaucoup plus délicate et ne permettent pas d'accéder directement aux paramètres de la loi de comportement d'un matériau mais nécessitent une analyse inverse. En première approximation, on peut voir toutefois le lien entre limite élastique et dureté ainsi : au fur et à mesure que s'enfonce l'indenteur, à force

constante, l'aire de contact augmente et donc la contrainte appliquée diminue. Lorsque l'indenteur ne s'enfonce plus, c'est que la contrainte moyenne a atteint la limite d'élasticité du matériau.

Hertz a analysé le contact de deux solides élastiques (1882) et en a déduit des formules qui permettent de déduire le module élastique des essais de dureté. Hill a analysé le problème de l'indentation d'un plan parfaitement plastique par un coin rigide et a montré qu'il existe une proportionnalité, dans ce cas, entre la limite élastique du matériau et la dureté. Toutefois, en général, on ne peut déduire les propriétés de traction monotone à partir des essais de dureté seuls.

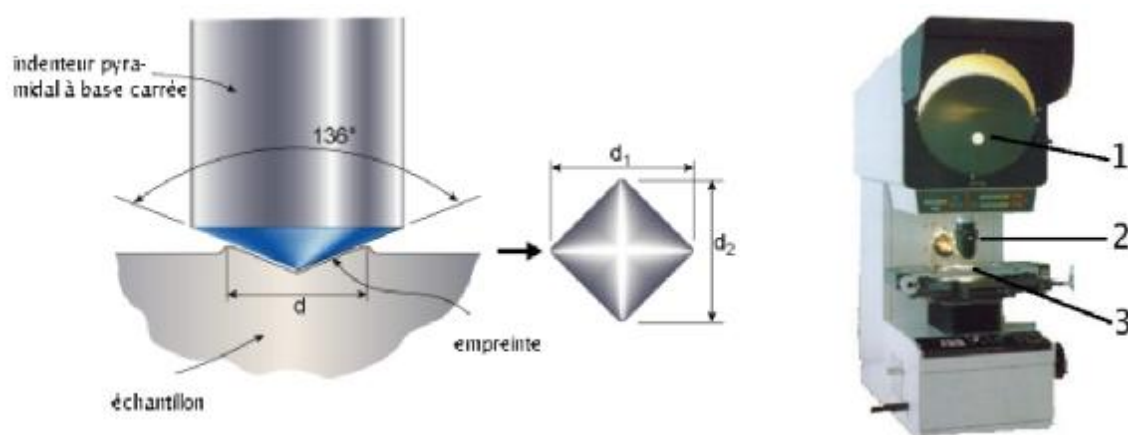
L'analyse de la courbe d'indentation permet, elle, d'accéder à davantage d'informations, si elle est couplée à la profilométrie des surfaces après indentation et à des calculs en éléments finis de l'essai. Par méthode inverse, et sous réserve de certaines hypothèses, il est alors possible d'accéder aux propriétés de traction du matériau. Il existe donc deux manières d'exploiter les essais de dureté, plus ou moins faciles à mettre en œuvre et donnant accès à moins ou plus d'information.

#### IV.5.1. Macro-dureté

Les essais Vickers (pyramide à base carrée) et Brinell (bille) sont les plus couramment utilisés. Ils consistent à mesurer la taille de la trace laissée par l'indenteur après chargement.

##### IV.5.1.1. Essai Vickers

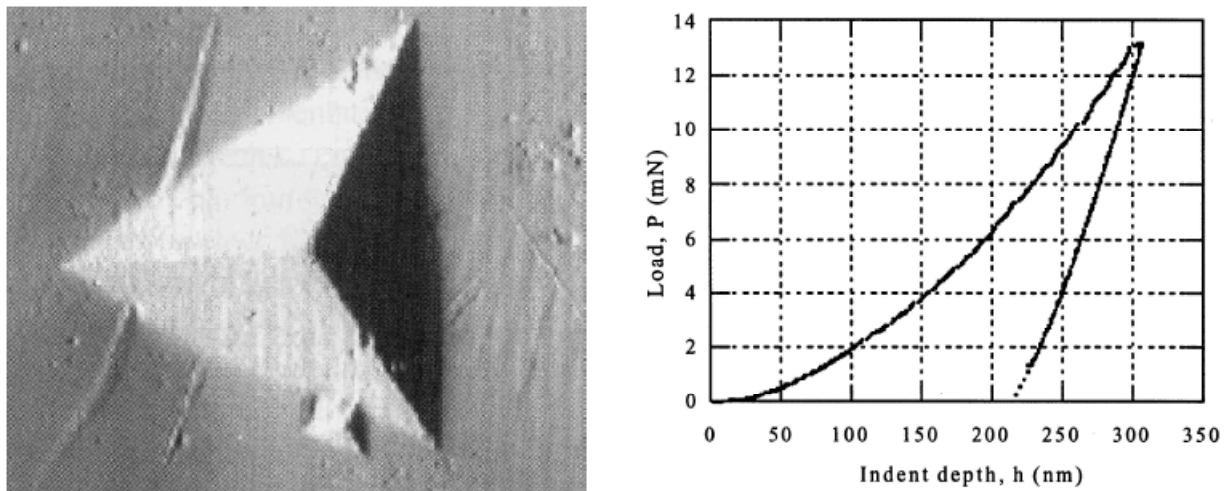
L'indenteur de l'essai Vickers est une pyramide à base carrée (voir image de gauche, figure IV.13), dont les faces forment entre elles des angles de  $136^\circ$ . La dureté est le rapport de la force appliquée (en Kgf) sur la surface de contact (en  $\text{mm}^2$ ), c'est-à-dire la pression moyenne dans le contact. L'épaisseur de l'échantillon doit être supérieure à 1,5 fois la diagonale des empreintes



**Fig. IV.13. Image de gauche : indenteur type Vickers et empreinte type laissée par l'indenteur. Image de droite : dispositif d'essai de macrodureté. 1) écran de visualisation de l'empreinte 2) indenteur 3) platine porte-échantillon. environ 7,5 fois la profondeur d'enfoncement  $h$ ) et la distance entre les centres de deux empreintes successives supérieure à 6 fois la diagonale pour éviter l'interaction entre celles-ci.**

**IV.5.2. Nanodureté (indenteur Berkovitch)**

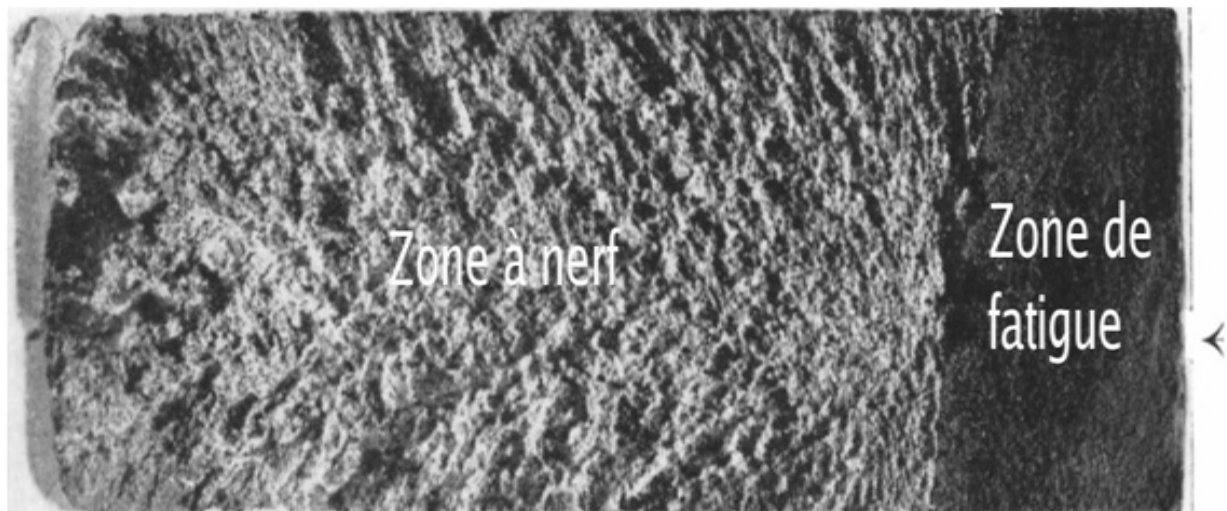
Les essais de nano-dureté permettent de mesurer des empreintes de taille inférieure au micron (sous la limite de résolution de la microscopie optique). Le mode opératoire de ces essais est un peu différent (figure IV.14) : le dispositif expérimental effectue une première indentation à faible charge pour localiser la surface puis la mesure à pleine charge. La courbe d'indentation est enregistrée et la proloométrie des surfaces peut être mesurée, par exemple par microscopie à force atomique. Cette méthode permet de mesurer la dureté des grains un par un dans un matériau biphasé, ou l'efficacité de traitements thermomécaniques qui portent sur de très faibles profondeurs.



**Fig. IV.14. Image de gauche : Empreintes d'un essai de nano-dureté observée en microscopie électronique à balayage. La petite empreinte correspond à la recherche de la surface par le dispositif expérimental, alors que la seconde empreinte plus grande constitue l'essai de nano-dureté. Image de droite : courbe charge/déplacement obtenue par nano-indentation d'un verre métallique.**

**IV.6. Essais de fatigue**

La fatigue est un endommagement structural, progressif et localisé qui se produit quand un matériau est sollicité cycliquement à des niveaux de contrainte inférieurs voire bien inférieurs à sa contrainte à rupture quasi-statique. La figure IV.15 présente un faciès type de rupture en fatigue où l'on peut distinguer la zone d'initiation de la fissure, la zone de propagation en fatigue (zone lisse) et la rupture finale catastrophique (zone à grain cristallin ou à nerf).



**Fig. IV.15. Fracture d'un tirant d'assemblage de rotor d'alternateur amorcé (à droite) au niveau de la flèche par une fissure de fatigue ayant amené la rupture fragile, caractérisée par l'aspect de chevrons (à gauche).**

Les essais de fatigue caractérisent la capacité d'un matériau à résister à une sollicitation cyclique. Si le nombre de cycles est petit, on parlera de fatigue oligocyclique. Il existe plusieurs modes de sollicitations possibles : flexion, efforts axiaux (traction et/ou compression) et torsion, et des modes combinés, statiques et dynamiques (torsion / flexion, tension / torsion, etc.).

#### **IV.7. Méthodes d'identification numériques**

La thermodynamique donne la formulation générale des modèles sans en préciser la forme analytique (sauf toutefois pour les comportements linéaires) ni les valeurs numériques. Les expériences fournissent, pour chaque matériau, les relations quantitatives que doivent vérifier les modèles pour être représentatifs des phénomènes étudiés. On appelle identification tout le travail qui consiste à préciser les fonctions qui interviennent dans les modèles et à trouver les valeurs numériques des coefficients qui les définissent pour chaque matériau.

Il s'agit d'un travail difficile qui n'obéit pas à des règles rigoureuses et où l'expérience et « l'art du faiseur de modèles » jouent un grand rôle pour évoluer entre la théorie et l'expérience.

##### **IV.7.1. Généralités**

Notons tout de suite que ce problème se pose de différentes manières, suivant les essais dont on dispose ou le modèle étudié. Deux cas sont à distinguer :

- on identifie directement la loi de comportement, c'est-à-dire l'entité (ou fonction de transfert) qui est représentative du matériau. Un exemple est celui d'une loi dans laquelle interviennent une variable  $X$  et sa vitesse  $\dot{X}$  :

$$H(X, \dot{X}, Y) = 0 \quad (IV.6)$$

Lorsque l'on a pu mesurer une série de triplets de valeurs  $(X, \dot{X}, Y)$  (au même instant), on peut obtenir les coefficients définissant la fonction  $H$  par lissage direct des points expérimentaux. Suivant les cas on fera appel à une méthode de moindres carrés linéaire ou non linéaire (voir ci-dessous).

- On identifie sur la réponse, c'est-à-dire que l'on cherche les coefficients caractéristiques de la fonction  $H$  en ajustant au mieux la réponse de l'équation de comportement à une sollicitation donnée (entrée), à la réponse observée expérimentalement pour la même sollicitation. Dans ce cas, on utilisera la méthode des moindres carrés non linéaires, les réponses étant le plus souvent non explicitées de façon analytique simple.

**Remarque :**

- Un modèle donné ne peut s'identifier correctement que si l'on dispose de résultats d'essais en nombre suffisant, mettant enjeu une plage de variation importante de chacun des paramètres (par exemple les paramètres  $X, \dot{X}, Y$  de la fonction  $H$ ). Dans le cas contraire, on risque une indétermination plus ou moins nette d'un ou plusieurs coefficients.

Pour un même matériau et un même modèle on peut être amené à définir plusieurs jeux de coefficients, chacun s'adaptant mieux à un domaine de variation ou à un type de chargement, Par exemple : chargements transitoires rapides, de courte durée, ou chargements de très longue durée, stationnaires.

**IV.7.2. Méthode des moindres carrés linéaire**

Il s'agit de minimiser l'écart entre des valeurs expérimentales et des valeurs calculées obtenues par un modèle. Différentes normes d'erreur peuvent être employées : on aboutit généralement à un problème de minimisation d'une fonction écart  $h(a)$  Qui dépend des coefficients caractéristiques inconnus  $a_i (i=1, 2, \dots, n)$ .

Diverses méthodes de minimisation peuvent être employées : elles sont plus ou moins efficaces, la convergence peut être difficile en raison des grandes non- linéarités des phénomènes généralement étudiés. On se limite ici à l'exposé de la méthode des moindres carrés ou méthode de Gauss-Newton qui s'applique lorsque la fonction écart choisie est la somme des carrés des écarts :

$$h(a) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m E_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [y_j^C(a, x_j) - y_j^E(x_j)]^2 \quad (IV.6)$$

$y_j^E$  et  $y_j^C$  représentent respectivement les valeurs expérimentales et calculées de l'un des paramètres en fonction des autres désignés par  $x_j$  (le j-ième point expérimental). La figure IV.16 indique schématiquement comment est définie cette fonction :

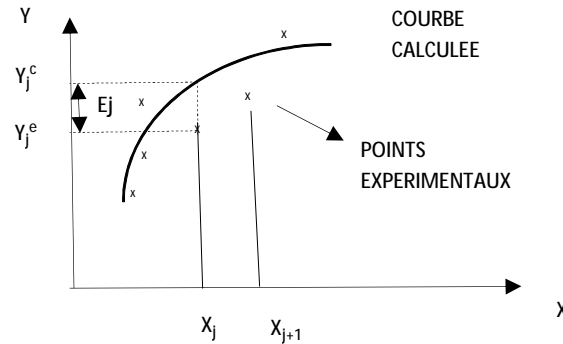


Fig. IV.16. Graphe d'identification.

La méthode des moindres carrés linéaire s'emploie lorsque l'expression de  $y^C$  est linéaire en fonction des coefficients  $a_i$

$$y_j^C = A_0(x_j) + A_1(x_j)a_1 + \dots + A_n(x_j)a_n \quad (IV.7)$$

Pour minimiser h il suffit d'écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial a_k} = 0 \quad (IV.8)$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, n$$

Grâce à la linéarité on trouve immédiatement, avec  $A_{ij} = A_i(X_j)$  :

$$\sum_i \left( \sum_j A_{jk} A_{ji} \right) a_i = \sum_j A_{jk} (y_j^E - A_0) \quad (IV.9)$$

La résolution de ce système linéaire, dont la matrice  $\sum_j A_{jk} A_{ji}$  est symétrique, fournit facilement les inconnues  $a_i$ .

### IV.7.3. Méthode de Gauss-Newton

C'est la généralisation de la méthode précédente, Pour une expression non linéaire de la fonction on introduit la linéarisation :

$$y_j^C(a) = y_j^C(a^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j^C}{\partial a_i}(a^0) \Delta a_i \quad (IV.10)$$

Pour un jeu de coefficients  $a^0$  donné, on calcule successivement la fonction écart en chaque point  $y_j^C$  et sa dérivée par rapport à chacun des coefficients (ce gradient peut rarement être établi



explicitement, il faut alors procéder par petits accroissements finis sur chaque coefficient). Cette expression est formellement identique à l'expression du paragraphe précédent : il suffit de remplacer pour obtenir un jeu de valeurs  $\Delta a_i$  qui conduit généralement à une moins mauvaise solution  $a^1$  par :

$$a_i^1 = a_i^0 + \Delta a_i \tag{IV.11}$$

On reprend alors de même à partir de cette nouvelle solution. Notons que la convergence de cette méthode itérative n'est pas toujours assurée. Quand elle converge, elle converge rapidement, ce qui fait qu'elle est assez pratique d'emploi et relativement peu coûteuse si le nombre de coefficients n'est pas trop élevé.

La figure IV.17 montre l'exemple de l'identification de la loi de plasticité de l'acier 316 L par un essai de traction à 20 °C. La loi choisie fait intervenir trois coefficients :

$$s = s_g + K_g e_p^{\frac{1}{M_g}} \tag{IV.12}$$

On voit que, pour diverses solutions de départ, la convergence est correcte et assez rapide.

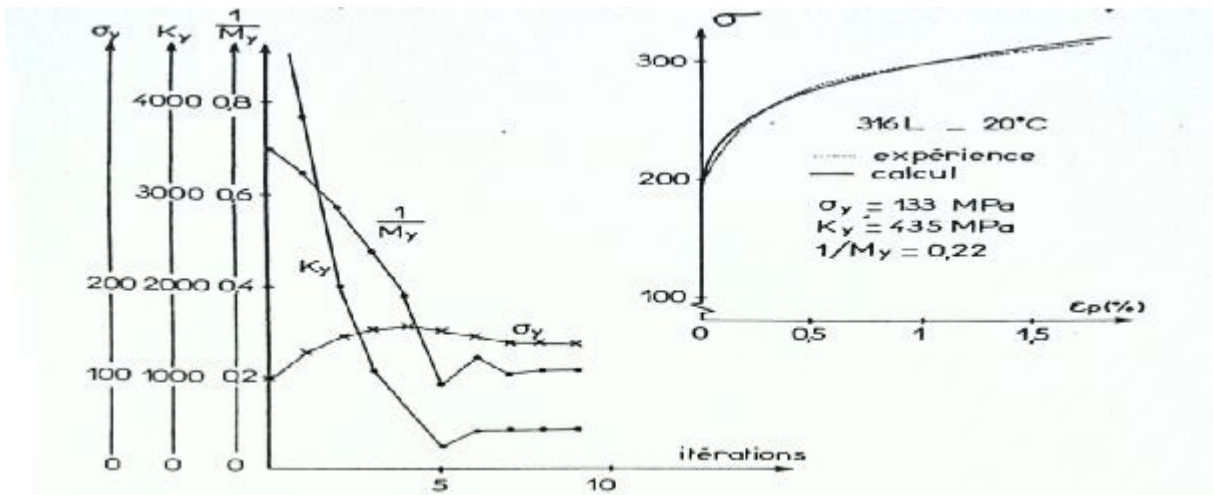


Fig. IV.17. Identification de la loi de plasticité à 3 coefficients de l'Acier 316L.

#### IV.7.4. Variation des paramètres caractéristiques en fonction de la température

Sauf exception, les paramètres caractéristiques d'un matériau, qui définissent chaque modèle de comportement, dépendent de la température. Une méthode générale permettant d'introduire cette dépendance consiste à écrire ces coefficients sous forme d'une fonction parabolique définie par morceaux. Soit par exemple, pour le paramètre  $\alpha$  :

$$a(T) = a_i(T - T_i)^2 + b_i(T - T_i) + c_i \tag{IV.13}$$

Pour  $T_i < T < T_{i+1}$

Les coefficients  $a_i, b_i, c_i$  Ci sont choisis de façon à assurer la continuité de  $\alpha$  et de  $d\alpha/dT$  :

$$c_{i+1} = a_i(T_{i+1} - T_i)^2 + b_i(T_{i+1} - T_i) + c_i \quad (\text{IV.14})$$

$$b_{i+1} = 2a_i(T_{i+1} - T_i) + b_i \quad (\text{IV.15})$$

Ils sont déterminés de proche en proche par les valeurs mesurées du paramètre  $\alpha$ , en introduisant éventuellement des valeurs intermédiaires pour assurer un bon lissage.

#### IV.7.5. Notions sur la méthode des éléments finis

On donne ici les bases de la méthode des éléments finis, considérée comme méthode standard de résolution des problèmes de champ en élasticité. D'autres méthodes existent, en particulier la méthode des équations intégrales, mais nous n'en parlerons pas.

##### IV.7.5.1. Généralités

Les méthodes numériques approchées de calcul des structures reviennent à trouver, dans une classe de champs de déplacements (ou de contraintes) « raisonnables », celui qui minimise l'énergie potentielle  $g$  pour les champs cinématiquement admissibles, ou qui maximise l'énergie potentielle complémentaire  $g^*$  pour les champs statiquement admissibles.

La méthode des éléments finis consiste à calculer l'énergie potentielle  $g$  ou  $g^*$  comme la somme des énergies de tous les éléments de la structure divisée en éléments finis (lignes, surfaces ou volumes selon la schématisation de la structure).

Dans chaque élément les champs inconnus (les déplacements) sont représentés par une combinaison linéaire de fonctions des coordonnées d'espace. Les coefficients de cette combinaison dépendent des déplacements des nœuds de l'élément (les sommets par exemple). Ce sont ces derniers qui constituent les inconnues du problème (inconnues nodales ou degrés de liberté). En pratique, il est équivalent d'utiliser le principe des travaux virtuels comme on le fait plus loin.

Après avoir écrit l'égalité des déplacements aux nœuds communs des éléments, la minimisation de l'énergie potentielle conduit à la résolution d'un système linéaire. On a ainsi remplacé un problème d'équations aux dérivées partielles par un problème d'équations algébriques linéaires. Le système résolu, on remonte aux déplacements dans les éléments puis aux déformations et aux contraintes.

##### IV.7.5.2. Formulation des caractéristiques d'un élément

De nombreux types d'éléments peuvent être développés. Une méthodologie générale existe pour l'écriture de tels éléments comportant beaucoup de degrés de liberté. On se contente ici d'illustrer le principe de la méthode des éléments finis sur le cas le plus simple, l'élément plan triangulaire à trois nœuds (Fig. IV.18).

Les déplacements d'un point A/, repéré par ses coordonnées „r,. x<sub>2</sub>, se met sous la forme d'une vectrice colonne \* :

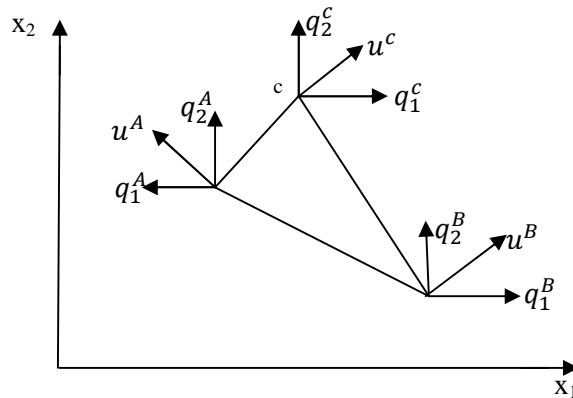


Fig. IV.18. Triangle à 3 nœuds.

$$U = \begin{bmatrix} U_1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \tag{IV.16}$$

Les degrés de liberté de l'élément sont les six composantes des déplacements des nœuds A, B, C :

$$q = \begin{Bmatrix} q_1^A \\ q_2^A \\ q_1^B \\ q_2^B \\ q_1^C \\ q_2^C \end{Bmatrix} \tag{IV.17}$$

Les déplacements inconnus u sont représentés par une combinaison linéaire de fonctions de base :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 + c_2x_1 + c_3x_2 \\ c_4 + c_5x_1 + c_6x_2 \end{Bmatrix} \tag{IV.18}$$

Les coefficients c<sub>1</sub> ... c<sub>6</sub> sont des fonctions linéaires des déplacements nodaux q, fonctions que l'on obtient en écrivant l'identité entre u et q en chacun des nœuds. Le déplacement en tout point s'exprime par :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^{BC}(x_1, x_2)q_1^A + N^{CA}(x_1, x_2)q_1^B + N^{AB}(x_1, x_2)q_1^C \\ N^{BC}(x_1, x_2)q_2^A + N^{CA}(x_1, x_2)q_2^B + N^{AB}(x_1, x_2)q_2^C \end{Bmatrix} \tag{IV.19}$$

Dans le cas présent, les fonctions N(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>) sont linéaires. Elles sont appelées fonctions de forme de l'élément. On écrira de façon abrégée

$$U=Nq \tag{IV.20}$$

Les déformations s'expriment par la vectrice colonne :

$$\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ 2\mathbf{e}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}q \quad (\text{IV.21})$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice 3x6 déduite de  $\mathbf{N}$  par dérivation. La composante  $2 \mathbf{e}_{12}$  est utilisée afin que l'énergie de déformation puisse s'écrire simplement par le produit  $\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ , où les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  sont représentées par le vecteur colonne \* :

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_{11} \\ \mathbf{s}_{22} \\ \mathbf{s}_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{22} \\ 2\mathbf{e}_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{a}e \quad (\text{IV.22})$$

si l'on est en élasticité isotrope et dans le cas d'un élément traité en contraintes planes. Pour écrire l'équilibre de l'élément on considère un champ de déplacement cinématiquement admissible  $\mathbf{u}'$  (M) auquel est associé le champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}'(\text{M})$  et l'on écrit le principe des travaux virtuels.

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}^T \mathbf{u}' d\mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F}^T \mathbf{u}' d\mathbf{s} - \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}' d\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u}' \quad (\text{IV.23})$$

où  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{F}$  sont les efforts extérieurs appliqués dans le volume (ici la surface  $\mathcal{D}$  de l'élément) et à la frontière  $\partial\mathcal{D}$ ). En tenant compte des relations portant sur les inconnues nodales on peut écrire :

$$\mathbf{s}^T \mathbf{e}' = \{\mathbf{a}e\}^T \mathbf{e}' = \mathbf{q}^T \mathbf{B}^T \mathbf{a} \mathbf{B} \mathbf{q}' \quad (\text{IV.24})$$

où  $\mathbf{q}'$  représente n'importe quel choix pour les valeurs des déplacements nodaux. En reportant on obtient facilement :

$$[\int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}^T \mathbf{N} d\mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F}^T \mathbf{N} d\mathbf{s} - \mathbf{q}^T \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B}^T \mathbf{a} \mathbf{B} d\mathbf{v}] \mathbf{q}' = \mathbf{0} \quad (\text{IV.25})$$

ou

$$[-\mathbf{q}^T \mathbf{K} + \mathbf{Q}^T] \mathbf{q}' = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{q}' \quad (\text{IV.26})$$

Cette égalité est vérifiée quel que soit  $\mathbf{q}'$ . Elle entraîne donc :

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

$\mathbf{K}$  est la matrice de rigidité de l'élément. Elle est symétrique

$$\mathbf{K} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{B}^T \mathbf{a} \mathbf{B} d\mathbf{v} \quad (\text{IV.27})$$

$\mathbf{Q}$  est la colonne des forces extérieures généralisées aux nœuds :

$$\mathbf{Q} = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{N}^T \mathbf{F} d\mathbf{s} \quad (\text{IV.28})$$

Si Ton connaît ces efforts extérieurs, la résolution du système linéaire  $Kq = Q$  fournit les déplacements nodaux  $q$ . On en déduit les déplacements  $u = Nq$ , les déformations  $\epsilon = Bq$  et les contraintes  $\sigma = a\epsilon$ .

**IV.7.5.3. Assemblage**

Pour résoudre le problème de la structure entière (calcul de  $q$  relatif à tous les éléments) il faut écrire le travail virtuel de toute la structure en sommant sur tous les éléments. En même temps on écrit que la structure est continue, c'est-à-dire que les déplacements aux nœuds communs à plusieurs éléments sont égaux. Notons que l'égalité aux nœuds assure l'égalité des déplacements en tout point de la frontière : on dit que les éléments sont conformes.

Dans la pratique cette opération d'assemblage revient à ajouter les contributions de rigidité (et d'efforts extérieurs) associées à chacun des éléments contenant un nœud donné. Plus précisément on peut appeler  ${}^E q$  l'ensemble des degrés de liberté de tous les éléments sans tenir compte des liaisons et  $q$  l'ensemble de tous les degrés de liberté en tenant compte des liaisons ; on a :  ${}^E q = Aq$ , où  $A$  est une matrice rectangulaire puisque la dimension de  $q$  est inférieure à celle de  ${}^E q$ . De même, on appelle  ${}^E K$  et  ${}^E Q$  la matrice et la colonne obtenues par juxtaposition simple des matrices de rigidité et des efforts nodaux de chacun des éléments :

$${}^E K = \begin{bmatrix} {}^1 K & & & & & & & & \\ & {}^2 K & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & & & & \\ & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad {}^E Q = \begin{bmatrix} {}^1 Q \\ {}^1 Q \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \tag{IV.29}$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$[- {}^E q^T {}^E K + {}^E Q^T] q' = 0 \tag{IV.30}$$

quel que soit  ${}^E q$  cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant les liaisons :  ${}^E q' = Aq'$ .

L'assemblage se fait par :

$$[- (Aq)^T {}^E K + {}^E Q^T] Aq' = 0 \quad \forall q' \tag{IV.31}$$

ce qui conduit à :

$$- A^T {}^E K A q + A^T {}^E Q = 0 \quad - A^T {}^E K A q + A^T {}^E Q = 0 \quad - A^T {}^E K A q + A^T {}^E Q = 0 \tag{IV.32}$$

que l'on peut encore écrire :

$$K g = Q \tag{IV.32}$$

Où  $K$  est la matrice de rigidité assemblée,  $Q$  et  $g$  respectivement la colonne des efforts extérieurs et la colonne des déplacements nodaux du système assemblé.

Résoudre un problème d'élasticité par la méthode des éléments finis nécessite donc l'établissement de la matrice  $K$  et du second membre  $Q$  et la résolution du système linéaire ci-dessus. Il est souvent nécessaire de décomposer une structure en un grand nombre d'éléments, avec de nombreux degrés de liberté (de 1 000 à 10 000 ou même plus). La matrice  $K$  peut donc être énorme ; elle présente cependant une structure en bande de coefficients situés autour de la diagonale principale, ce qui diminue le nombre de termes non nuis et facilite la résolution. La largeur de bande de la matrice de raideur assemblée dépend de la numérotation choisie pour les nœuds de la structure (si un élément contient des nœuds dont les numéros sont très éloignés les uns des autres il induit une largeur de bande élevée).

### IV.7.5.4. Organisation d'un calcul par les codes de calculs en éléments finis

Une analyse générale effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis peut se décomposer en quatre grandes étapes :

- le choix de la géométrie et du maillage,
- la définition du modèle mathématique,
- la résolution du problème discrétisé,
- l'analyse et le post-traitement des résultats.

Chacune des étapes peut également être décomposée en une série de processus élémentaires.

#### 1. Choix de la géométrie et du maillage :

Définition des points, lignes, surfaces et volumes.

Discrétisation.

#### 2. Définition du modèle mathématique :

Définition des données caractérisant le modèle :

Type d'analyse :

Déformations ou contraintes planes, axisymétrie, séries de Fourier, ...etc.

Formulation :

Mécanique, thermique, fluide, ...etc.

Comportement du matériau :

Élastique (isotrope, orthotrope, ...), plastique (isotrope, parfait, ...), ...etc.

Type d'éléments :

Poutres, barres, coques, ...etc.

-Définition des propriétés matérielles (constantes d'élasticité, masse volumique, ...etc.).

- Définition des propriétés géométriques (section des poutres, inerties, épaisseur des coques, ...etc.).
  - Définition des conditions aux limites.
  - Définition des sollicitations.
  - Conditions initiales.
  - Résolution du problème discrétisé :
  - Calcul des matrices de rigidité et de masse de chaque élément fini.
  - Assemblage des matrices de rigidité et de masse de la structure complète.
  - Application des conditions aux limites.
  - Application des chargements.
  - Résolution du système d'équations.
3. Analyse et post-traitement des résultats :
- Quantités locales : déplacements, contraintes, déformations, ...etc.
  - Quantités globales : déformation maximale, énergie de déformation, ...etc.

Les programmes de calcul par éléments finis classiques sont structurés selon cette logique, chaque étape étant associée à un module du code :

- le préprocesseur pour la définition du maillage et du modèle mathématique,
- le programme de calcul qui envoie une série de processus selon la procédure de calcul choisi par l'utilisateur, celui-ci ne peut maîtriser l'enchaînement des processus. La procédure agit comme une boîte noire sur laquelle l'utilisateur n'a aucune possibilité d'intervention.
- le post-processeur qui procède aux traitements nécessaires après avoir reçu les résultats des modules précédents.

Il apparaît clairement qu'un code de calcul classique exclut toute intervention de la part de l'utilisateur qui désirerait apporter des modifications répondant à ses propres besoins. Or, il peut s'avérer très utile de pouvoir définir pas-à-pas la séquence la mieux adaptée parmi les processus élémentaires disponibles pour chaque étape. Ceci est d'autant plus valable lorsque l'utilisateur doit résoudre des problèmes variés et localisés en différents points du processus de résolution.

En effet, outre les trois grandes étapes obligatoires, il faut pouvoir disposer de facilités telles que :

- Ø la visualisation des informations à toutes les étapes de manière à contrôler les données introduites et le déroulement du calcul,
- Ø L'archivage et la restauration des informations afin d'être capable d'interrompre un calcul et de le continuer ultérieurement,
- Ø La possibilité d'itérer dans les étapes désirées.

Chaque étape peut être décomposée en une série de processus élémentaires. Chacun de ces processus élémentaires acquiert de l'information existante, la met en forme, la traite et fabrique de nouvelles informations. Faire un calcul revient donc à sélectionner les processus élémentaires adaptés au type du problème et à leur fournir les informations nécessaires existantes ou nouvelles.



## CHAPITRE V

### CLASSIFICATION RHEOLOGIQUE DES COMPORTEMENTS MECANIQUES.

#### V.1. Schématisation des comportements réels

Dans le cas des matériaux métalliques, l'existence simultanée de trois mécanismes, que sont l'élasticité (mécanisme réversible), la plasticité (mécanisme irréversible) et la viscosité (dépendance vis-à-vis de la vitesse de déformation, fluage et relaxation) est clairement mise en évidence par de nombreuses études expérimentales et métallurgiques

##### V.1.1. Introduction

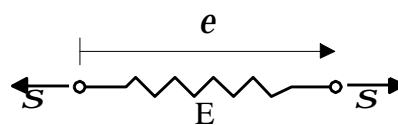
L'allure qualitative de la réponse des matériaux aux essais caractéristiques permet de les classer à l'aide des qualificatifs : rigide, élastique, visqueux, plastique et parfaitement plastique. A chaque schéma type correspond une théorie mathématique qui est présentée d'une façon simple dans ce chapitre.

##### V.1.2. Modèles rhéologiques

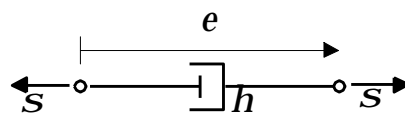
Les résultats d'essais ne présentent un intérêt que si l'on peut modéliser le comportement du matériau. Cette modélisation, nécessaire pour le calcul prévisionnel, peut être multiple. On peut ainsi définir un modèle mathématique sous forme d'équations, mais on peut aussi envisager la recherche d'une modélisation analogique. Cette dernière est souvent utilisée à des fins didacticielles.

#### Déformations :

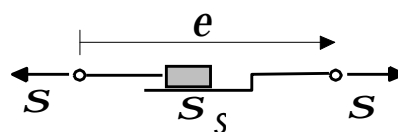
Elastiques (instantanées - réversibles)



Visqueuses ( $f^{ct}$  du temps)



Plastiques (irréversibles - non linéaire)



*Les règles de calcul sont les suivantes :*

*Dans une association en parallèle, la contrainte imposée à l'ensemble est la somme des contraintes imposées à chaque branche et la déformation subie par l'ensemble est égale aux déformations subies*

par chacune des branches, ces dernières déformations étant toutes identiques. Ces différents éléments (indice  $i$ ) peuvent être associés :

- Soit en parallèle :  

$$s = \sum_i s_i \quad \text{et} \quad e = e_i$$
- soit en groupements mixtes.

Dans une association en série, la contrainte imposée à l'ensemble est supportée en totalité par chaque élément et la déformation subie par l'ensemble est la somme des déformations subies par chaque élément.

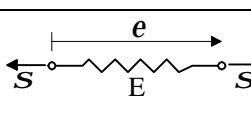
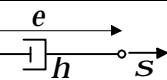

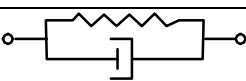
- Soit en séries :  

$$e = \sum_i e_i \quad \text{et} \quad s = s_i$$

La forme de la relation contrainte-déformation nous permettra un tri dans l'une des grandes classes de comportement.

**Modèles rhéologiques usuels**

Modèles « linéaires » ==> solides visco – élastiques

<b>Ressort</b>		$s = Ee$
<b>Amortisseur</b>		$s = h\dot{e}$
<b>Modèle de Maxwell</b>		$\dot{e} = \frac{1}{E}s + \frac{1}{h}s$
<b>Modèle de Kelvin-Voigt</b>		$s = Ee + h\dot{e}$

**Tab. V.1. Schéma des modèles rhéologiques de base.**

Le ressort ou l'amortisseur peuvent être non linéaire

**V.1.3. Solide rigide et fluide parfait**

Ils ne sont cités que pour mémoire puisqu'ils sortent du cadre de la mécanique des solides déformables. Dans la pratique, la distinction entre solide et fluide est subjective et ne peut être liée qu'au choix d'une échelle de temps :

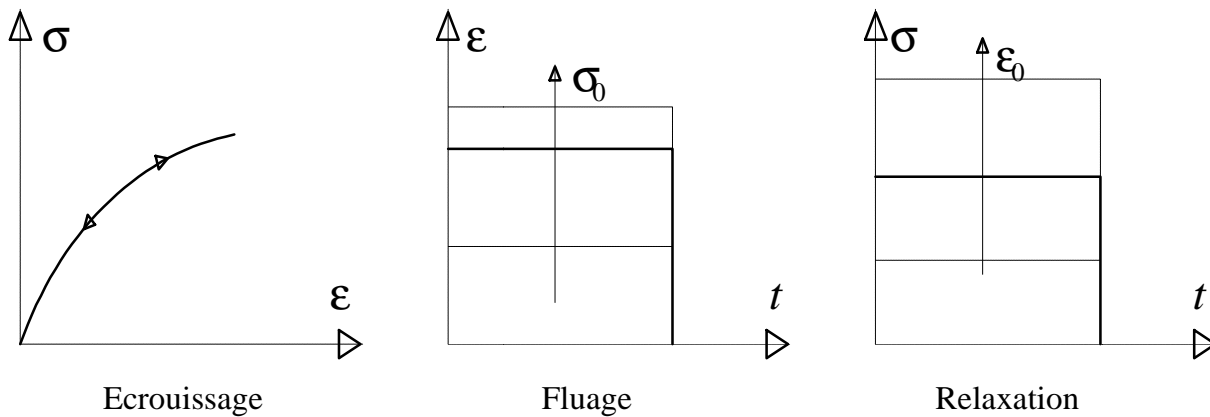
- Un solide admet un état d'équilibre sous sollicitation ;
- Un fluide subit un écoulement pour toute sollicitation aussi faible soit- elle.

Mais il n'est pas aisé de distinguer un écoulement infiniment lent d'un équilibre atteint pour un temps infini ; Une échelle de temps liée au phénomène étudié permet de lever l'ambiguïté mais les notions de fluide et de solide perdent alors leur sens objectif ; tel polymère pourra être considéré

comme un solide pour des problèmes de chocs et comme un fluide pour des problèmes de stabilité de longue durée.

**V.2. Elasticité**

La relation d'élasticité se traduit par une déformation essentiellement réversible. On parle d'élasticité parfaite lorsque la transformation est entièrement réversible et qu'il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge  $Q$  et de déformation  $q$  ( $f(Q, q)=0$ ).



Si de plus la relation est linéaire, on obtient l'élasticité linéaire. Le modèle analogique équivalent est alors le ressort linéaire :

$$\begin{array}{c}
 E \\
 \text{---} \text{ / \ / \ / \ / \ / \ } \text{---} \\
 Q = E q \quad q = J Q \quad \quad \quad (V.1)
 \end{array}$$

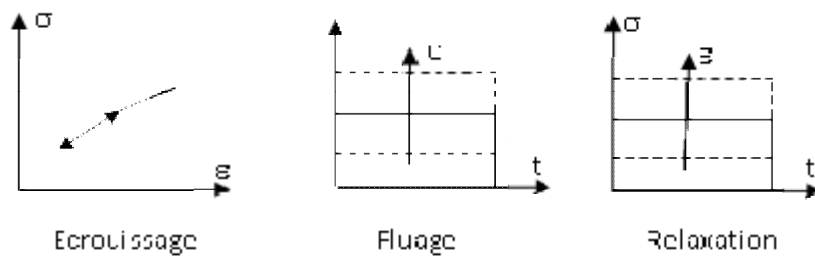
Ce modèle convient bien pour les métaux, les roches et les bétons lorsque les sollicitations sont faibles (ne pas dépasser la limite d'élasticité!)

**V.2.1. Solides élastiques**

La déformation est essentiellement réversible. L'étude détaillée de ces solides dans le chapitre III.

**V.2.1.1. Solide élastique parfait**

Les réponses qualitatives aux trois essais caractéristiques sont les suivantes (figure V.1).



**Fig. V.1. Solide parfaitement élastique.**

La réversibilité est instantanée. La relation contrainte-déformation est :

$$s = F(e) \tag{V.2}$$

Le modèle analogique de l'élasticité linéaire est le ressort :

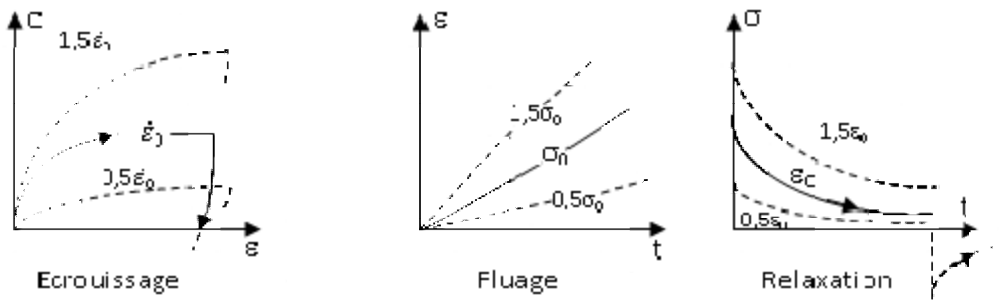
$$s = Ee \tag{V.3}$$

**Applications :**

Les métaux, les bétons, les roches pour des sollicitations inférieures à la limite d'élasticité.

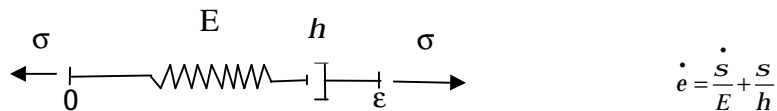
**V.3. Fluide visqueux**

Un corps est appelé « fluide visqueux » si ses réponses aux essais caractéristiques ont les allures suivantes (figure V. 2). Ce corps est aussi quelquefois qualifié de solide viscoplastique:



**Fig. V.2. Fluide visqueux.**

- Il y a écoulement pour toute valeur de contrainte :  $\dot{e} = f(s)$
- Un modèle analogique simple est le modèle de Maxwell constitué d'un ressort et d'un amortisseur linéaires en série. Son équation constitutive est :



Sa réponse au test de relaxation  $e = e_0 H(t)$  où  $H(t)$  est la fonction échelon d'Heaviside  $H = 0$  si  $t < 0, H = 1$  si  $t \geq 0$ , est :

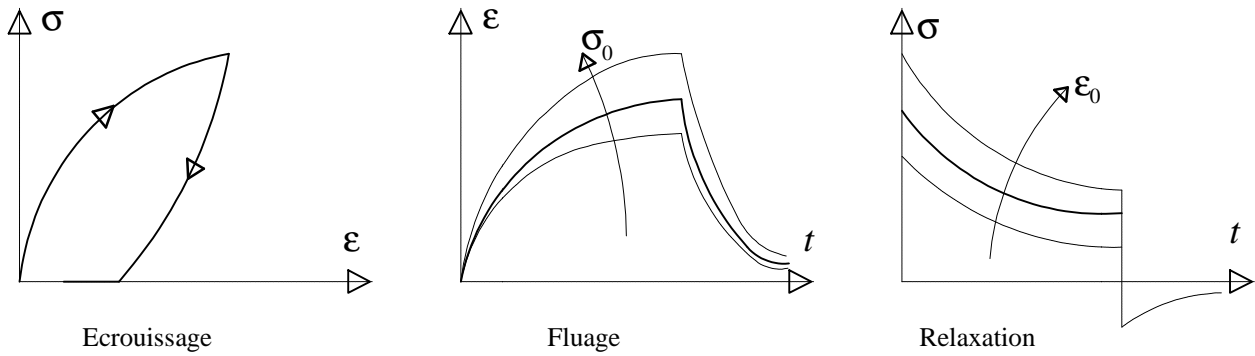
$$s = Ee_0 \exp\left(-\frac{E}{h} \cdot t\right) \tag{V.4}$$

**Applications :** aux solides « mous » :

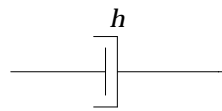
- Polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion.
- Béton frais en négligeant son vieillissement.
- De nombreux métaux aux températures proches de la température de fusion.

**V.4. Viscoélasticité**

La réponse est fonction de la vitesse d'application de la sollicitation. Il existe des résistances visqueuses qui font que pour un paramètre de déformation fixé  $q$ , le paramètre de chargement  $Q$  est une fonction croissante de la vitesse d'application de la déformation  $\dot{\epsilon}$ .



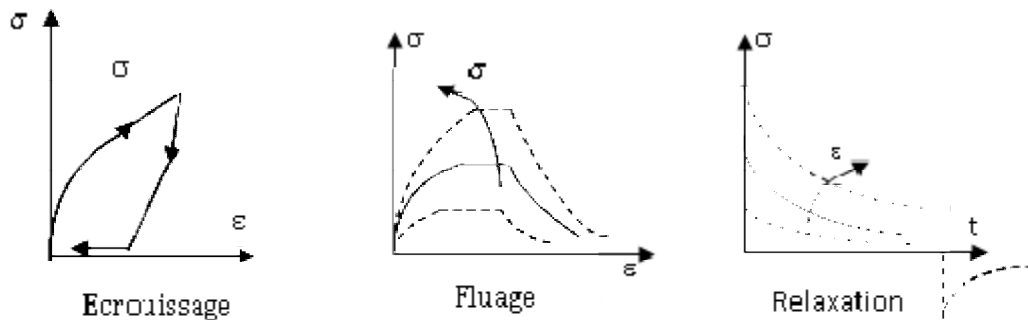
On dit qu'il y a viscosité pure lorsqu'il existe une relation biunivoque entre le paramètre de chargement  $Q$  et le paramètre vitesse d'application de la déformation  $\dot{\epsilon}$  ( $g(Q, \dot{\epsilon})=0$ ). De plus nous pouvons avoir une relation linéaire ce qui nous conduit à la viscosité linéaire avec l'amortisseur linéaire comme modèle analogique :



$$Q = h \dot{q} \tag{V.5}$$

**V.4.1. Solide viscoélastique**

Le schéma est représenté dans la figure V.3.

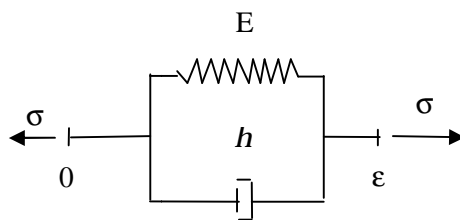


**Fig. V.3. Solide visco-élastique.**

- La réversibilité est « retardée » et n'intervient qu'après un temps infini

$$s = f(e, \dot{e}) \tag{V.6}$$

- Un modèle analogique simple est le modèle de Kelvin-Voigt : un ressort et un amortisseur linéaires en parallèle :



Sa réponse au test de fluage  $s = s_0 H(t)$  est :

$$e = \frac{S_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{h} t\right) \right] \tag{V.7}$$

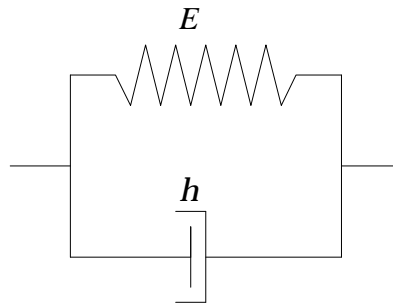
Les modèles analogiques de Kelvin-Voigt généralisé et de Maxwell généralisé pour *les* solides sont décrits au chapitre 4. Le solide viscoélastique présent souvent du vieillissement.

**Applications**

Les polymères organiques, le caoutchouc, le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée. Il est possible d'envisager un modèle plus complet en associant en parallèle un ressort et un amortisseur.

On définit ainsi le modèle de Kelvin-Voigt (figure V.4):

$$\begin{cases} s_1 = E e_1 \\ s_2 = h \frac{de_2}{dt} \end{cases} \quad \begin{cases} s = s_1 + s_2 \\ e = e_1 + e_2 \end{cases} \quad e = \frac{S_0}{E} (1 - e^{-Et/h}) \tag{V.8}$$



**Fig. V.4. Modèle de Kelvin-Voigt**

Les applications sont les polymères, le caoutchouc et le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

**V.5. Plasticité**

Ce phénomène traduit l'apparition de déformations irréversibles lorsque la charge est suffisamment grande. Il faut dépasser le seuil de plasticité. Ainsi, après cessation des sollicitations, on constate des déformations permanentes stables. Le temps n'est pas une variable de l'état de déformation. Ce comportement admet plusieurs formes.

**V.5.1. Solides plastiques**

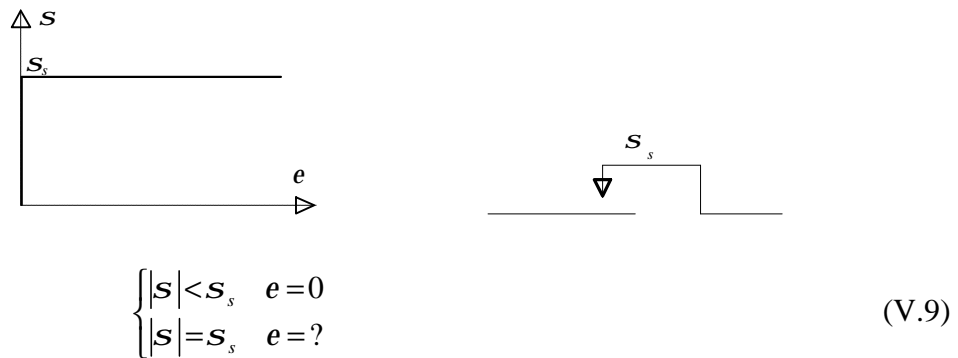
On appelle ainsi des solides qui, après cessation des sollicitations, présentent des déformations permanentes instantanément stables et qui sont en équilibre sous sollicitation. Leur comportement ne dépend pas explicitement du temps.

Par définition, la déformation plastique est celle qui correspond à la configuration relâchée :

$$e_p = e(s = 0).$$

**V.5.2. Solide rigide parfaitement plastique**

En deçà du seuil de plasticité, la déformation est nulle. Dès que l'on a atteint le seuil, appelé contrainte d'écoulement, la valeur de la déformation est arbitraire, quelle que soit la vitesse de déformation.



Le modèle analogique associé est le patin. On trouve les applications en mécanique des sols et en mise en forme des métaux. La déformation est nulle ou négligeable en deçà d'un seuil de contrainte  $\sigma_s$  et arbitraire pour cette valeur, quelle que soit la vitesse de déformation  $\dot{e}$  dans les essais d'écrouissage ou le temps dans les essais de fluage et de relaxation :  $|s| < s_s \rightarrow e = 0$  et

$$s = s_s \text{Sgn}(\dot{e}) \rightarrow e = e_p \text{ (Arbitraire)}$$

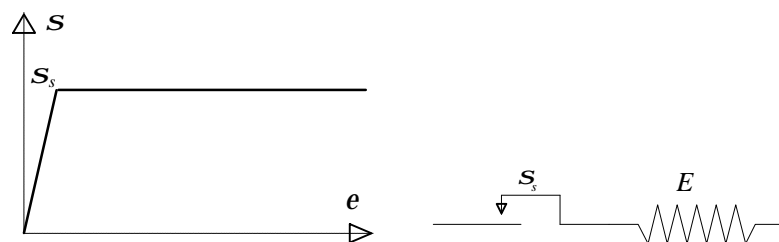
Le modèle analogique est le patin.

**Applications**

- Mécanique des sols.
- Analyse de la mise en forme des métaux.

**V.5.3. Solide élastique linéaire parfaitement plastique**

En delà du seuil de plasticité, le comportement est élastique linéaire. Au delà, on retrouve le comportement précédent.



On associe le modèle rhéologique de Saint-Venant à ce comportement.

$$\left\{ \begin{array}{l} |s| < s_s \quad e = e_e = \frac{S}{E} \\ |s| = s_s \quad e = e_e + e_p \text{ (arbitraire)} \end{array} \right. \quad (V.10)$$

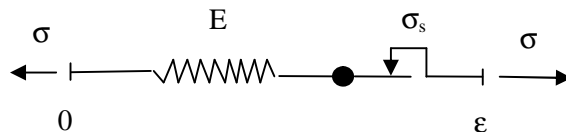
Ce type de comportement permet de traiter des problèmes d'analyse limite (ruine d'une structure par rotule plastique ...) ou pour certain type d'acier à faible teneur en carbone.

- La déformation est élastique linéaire en delà du seuil  $\sigma_s$  et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation, pour cette valeur de contrainte :

$$|s| < s_s \rightarrow e = e_e = \frac{S}{E} \quad (V.11)$$

$$s = s_s \text{sgn}(\dot{e}) \rightarrow e = \frac{S}{E} + e_p \text{ (Arbitraire)} \quad (V.12)$$

- Le modèle analogique du solide parfaitement élasto-plastique est le modèle de Saint-Venant, un ressort linéaire et un patin en série :

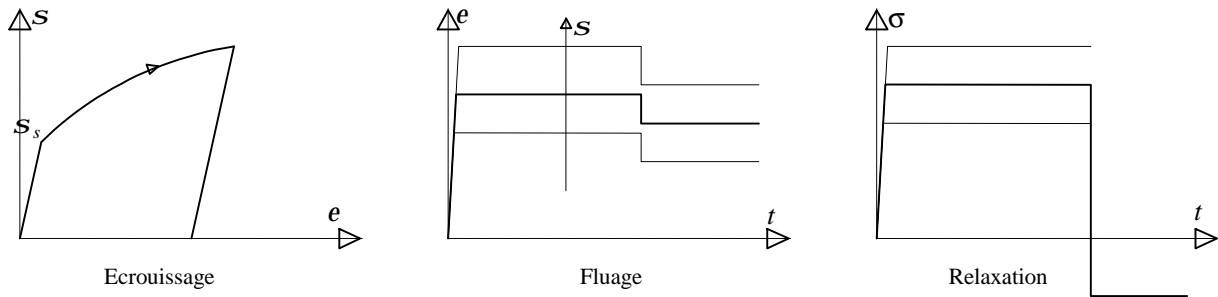


**Applications**

- Aciers à faible teneur en carbone (présentant un «palier») pour  $e < 2.10^{-2}$  et  $T < \frac{1}{4}T_M$ , ( $T_M$  étant la température absolue de fusion en °K).

**V.5.4. Solide élasto-plastique écrouissable**

On voit apparaître une déformation permanente au delà d'un seuil de contrainte  $s_s$ .



Le comportement est donné par les relations suivantes :

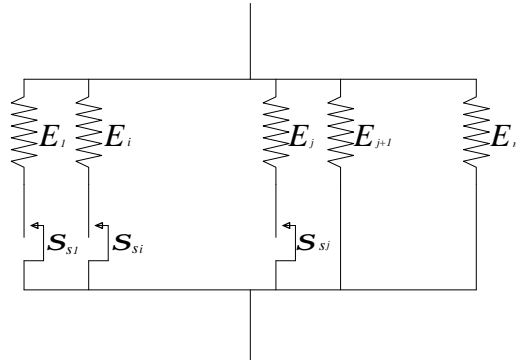
$$\left\{ \begin{array}{l} |s| < s_s \quad e = e_e = \frac{S}{E} \\ |s| \geq s_s \quad e = e_e + e_p = \frac{S}{E} + f(s) \end{array} \right. \quad (V.13)$$

Le modèle analogique associé est le modèle de Saint-Venant généralisé. Il est réalisé par des montages en séries et en parallèles des ressorts et des patins.



$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{s} = \sum_{i=1}^j \mathbf{s}_{s_i} + \sum_{i=j+1}^m E_i \mathbf{e} \\
 \mathbf{e} = \begin{cases} \frac{\mathbf{s}_{s_i}}{E_i} + \mathbf{e}_{pi} & \text{si } \mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{s_i} \\ \frac{\mathbf{s}_i}{E_i} & \text{si } \mathbf{s}_i < \mathbf{s}_{s_i} \end{cases}
 \end{array} \right. \quad (V.14)$$

Modèle de Saint-Venant généralisé : le schéma ci-dessous représente ce modèle (figure V.5).

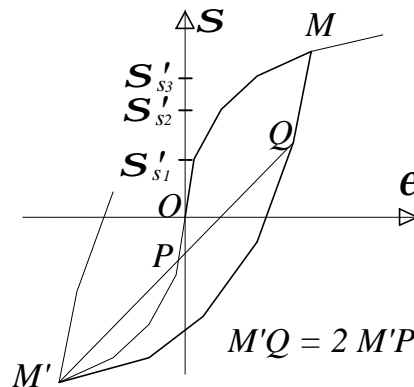


**Fig. V.5. Modèle de Saint-Venant généralisé**

La courbe de traction du modèle est linéaire par morceaux. En supposant les seuils  $s_{s_i}$  rangés dans un ordre croissant, l'équation au seuil d'indice  $j$  est :

$$s'_{s_j} = \sum_{i=1}^{j-1} s_{s_i} + \frac{s_{s_j}}{E_j} \sum_{i=j}^m E_i \quad (V.15)$$

Ce modèle présente la particularité d'avoir une courbe d'écrouissage de décharge après une traction qui se déduit de la courbe d'écrouissage en compression par une homothétie de rapport 2 et de centre  $M'$  symétrique du point de décharge  $M$  par rapport à l'origine  $O$ . Ce comportement se retrouve dans des métaux et alliages à des températures inférieures au quart de leur température absolue de fusion.



**V.6. Viscoplasticité**

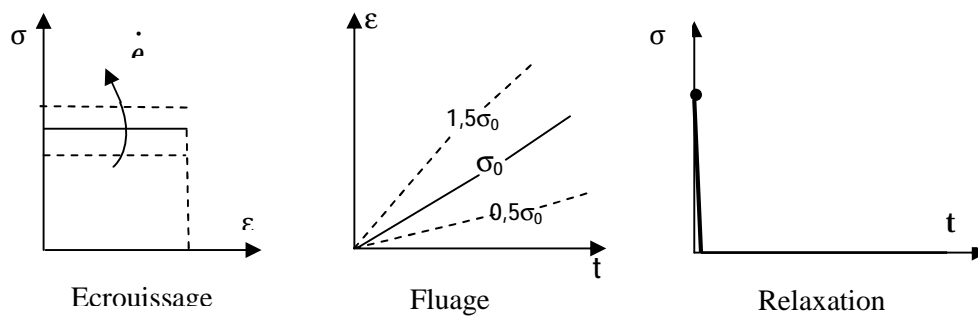
Ce comportement traduit le fait que l'on a des déformations permanentes après suppression des sollicitations (plasticité) et qu'il existe un écoulement de fluage sous sollicitation (viscosité). Il est possible de faire apparaître des phénomènes d'élasticité et éventuellement l'influence de l'écroutissage.

**V.6.1. Solides viscoplastiques**

Les solides appelés viscoplastiques sont ceux qui présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations (comme les solides plastiques) mais qui subissent un écoulement de fluage, fonction du temps, sous sollicitation (équilibre impossible).

**V.6.1.1. Solide parfaitement viscoplastique**

La vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte comme pour les fluides visqueux (Fig. V.6)



**Fig. V.6. Solide parfaitement viscoplastique.**

$$\dot{s} = \dot{e} \tag{V.16}$$

Modèle de Norton

$$\dot{s} = l e^{\frac{1}{N}} \tag{V.17}$$

**Applications :** Schématisation très grossière des métaux et alliages aux températures supérieures au tiers de leur température absolue de fusion (en °K).

**V.6.1.2. Solide élastique parfaitement viscoplastique**

L'élasticité n'est plus considérée comme négligeable mais la vitesse de déformation plastique ne dépend toujours que de la contrainte (figure V.7). Il n'y a pas d'influence de L'écroutissage.

$$|s| < s_s \rightarrow e = e^e = \frac{s}{E} \tag{V.18}$$

$$|s| \geq s_s \rightarrow e = e^e + e_p \quad \dot{e} = \frac{\dot{s}}{E} + f(s) \tag{V.19}$$

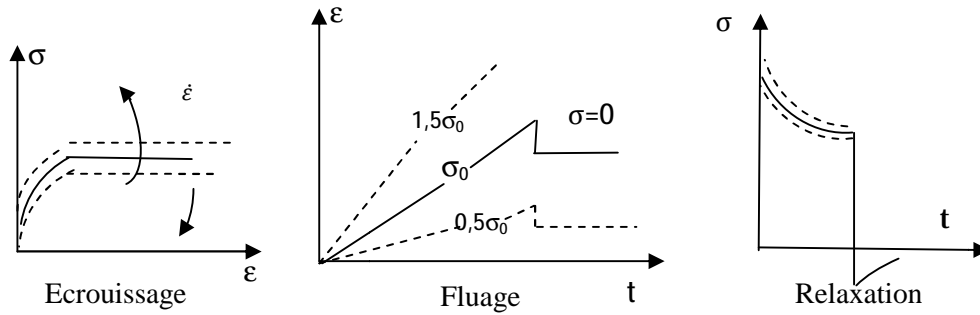


Fig. V.7. Solide élastique parfaitement viscoplastique.

Modèle de Bingham-Norton : Sa représentation rhéologique est la suivante :

$$\begin{aligned}
 s > s_s &\rightarrow s = Ee \\
 s > s_s &\rightarrow \left\{ \begin{aligned} s &= Ee = s_s + I^* e_p^{\frac{1}{N^*}} \\ e &= e_e + e_p \end{aligned} \right. \quad (V.20)
 \end{aligned}$$

Sa réponse à une sollicitation de relaxation est :

$$e = e_0 H(t) \rightarrow s = s_s + \frac{Ee_0 - s_s}{\left[ 1 + \frac{(N-1)E}{I^N} (Ee_0 - s_s)^{N-1} t \right]^{\frac{1}{N-1}}} \quad (V.21)$$

**V.6.1.3. Solide élasto-visco-plastique écrouissable**

C'est le schéma le plus complexe puisque la contrainte dépend de la vitesse de déformation plastique et de la déformation plastique elle-même ou d'une autre variable d'écrouissage (figure V.8) :

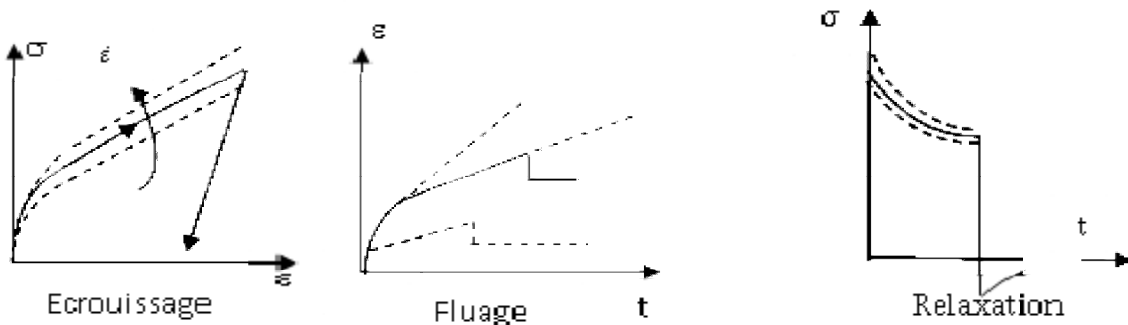


Fig. V.8. Solide élasto-visco-plastique.

$$|\mathbf{s}| < \mathbf{s}_s \rightarrow \mathbf{e} = \mathbf{e}_e = \frac{\mathbf{S}}{E} \quad (\text{V.22})$$

$$|\mathbf{s}| \geq \mathbf{s}_s \rightarrow \mathbf{e} = \mathbf{e}_e + \mathbf{e}_p$$

$$\dot{\mathbf{s}} = E\dot{\mathbf{e}}_e = f(\mathbf{e}_p, \dot{\mathbf{e}}_p) \quad (\text{V.23})$$

**Applications :**

- Métaux et alliages aux températures moyennes et élevées,
- Le bois pour des sollicitations élevées.

## V.7. Formulation thermodynamique de la viscoélasticité

### V.7.1. Domaine de validité et d'emploi

Les polymères et, dans une moindre mesure, le béton et le bois. La vitesse de déformation  $\dot{\varepsilon}$  intervient comme une variable thermodynamique indépendante. La théorie de la viscoélasticité permet de rendre compte des évolutions réversibles mais fonction du temps, des solides viscoélastiques tels que définis précédemment. En dynamique cela se traduit par un amortissement extrêmement faible pour les métaux ( $10^{-4}$ ) à température ambiante mais qui peut atteindre  $10^{-2}$  à 1 pour les polymères.

Les modèles de Kelvin-Voigt et de Maxwell sont décrits ici au titre d'applications directes de la thermodynamique avec variables internes, car dans le cas particulier de la viscoélasticité linéaire, l'approche fonctionnelle est plus simple à formuler et plus simple d'emploi. Notons que ces formulations ne sont valables que pour des matériaux stables. Le vieillissement des bétons ou des polymères exige des traitements spécifiques non décrits ici.

### V.7.2. Solide de Kelvin-Voigt

Il correspond au choix des variables suivantes :

- la variable observable est la déformation totale  $\varepsilon$ , sa variable associée est la contrainte  $\sigma$  :
- pour définir la puissance réversible et la puissance dissipée il y a lieu de faire une partition des contraintes en contrainte « élastique »  $\sigma^e$  et contrainte « anélastique »  $\sigma^{an}$  qui correspond d'ailleurs au modèle analogique de Kelvin-voigt, ressort et amortisseur en parallèle, indiqué précédemment.

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^e + \mathbf{s}^{an} \quad (\text{V.24})$$

$\sigma^e$ :  $\dot{\varepsilon}$  est la puissance volumique réversible,

$\sigma^{an}$ :  $\dot{\varepsilon}$  est la dissipation volumique intrinsèque.

La théorie linéaire isotrope s'obtient en choisissant la même potentielle thermodynamique que pour l'élasticité linéaire :

$$\Psi = \frac{1}{2}(I q_l \mathfrak{E}^2 + 4m q_m \mathfrak{E}_{11}) \quad (\text{V.25})$$

Pour exprimer la contrainte anélastique  $\sigma^{an}$  (et non la vitesse  $\mathfrak{E}$ ) afin de l'ajouter à la contrainte élastique  $\sigma^e$ , il faut utiliser le potentiel de dissipation  $j$  ( $\mathfrak{E}$ ). Pour les mêmes raisons que précédemment on choisit une forme quadratique définie positive des vitesses de déformation :

$$j = \frac{1}{2}(I q_l \mathfrak{E} + 4m q_m \mathfrak{E}_{11}) \quad (\text{V.26})$$

Expression dans laquelle  $\mathfrak{E}$  et  $\mathfrak{E}_{11}$  sont les premier et second invariants du tenseur des vitesses des déformations  $\mathfrak{E}$  et où  $q_l$  et  $q_m$  sont deux coefficients supplémentaires caractéristiques de la viscosité du matériau. Conformément à la méthode de l'état local, la loi d'état s'obtient par :

$$s^e = r \frac{\partial \Psi}{\partial e} = I Tr(e)1 + 2me \quad (\text{V.27})$$

et la loi complémentaire par :

$$s^{an} = \frac{\partial j}{\partial e} = I q_l Tr(\mathfrak{E})1 + 2m q_m \mathfrak{E} \quad (\text{V.28})$$

Le modèle mécanique de Kelvin-Voigt s'obtient par addition de ces deux contraintes :

$$s = I [Tr(e) + q_l Tr(\mathfrak{E})]1 + 2m [e + q_m \mathfrak{E}] \quad (\text{V.29})$$

ou

$$s_{ij} = I (e_{kk} + q_l \mathfrak{E}_{kk}) d_{ij} + 2m [e_{ij} + q_m \mathfrak{E}_{ij}] \quad (\text{V.30})$$

$q_l$  et  $q_m$  sont des temps caractéristiques du retard à la déformation dont l'identification peut se faire d'après des résultats d'essais unidimensionnels de traction et de cisaillement (par torsion de tubes par exemple). L'essai de cisaillement est régi par :

$$s_{12} = 2m (e_{12} + q_m \mathfrak{E}_{12}) \quad (\text{V.31})$$

La réponse  $e_{12}(t)$  à une expérience de fluage en cisaillement  $\sigma_{12} = Cte$  est donnée par la solution de cette équation différentielle. Avec la condition initiale  $t = 0 \rightarrow \varepsilon = \mathbf{0}$  :

$$e_{12} = \frac{s_{12}}{2m} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{q_m}\right) \right] \quad (\text{V.32})$$

ce qui permet d'identifier les deux coefficients  $\mu$  et  $\theta_\mu$ .

$\nu$  étant le coefficient de contraction, l'essai de traction est régi par :

$$s_{11} = [I(1-2\nu) + 2m] e_{11} + [I(1-2\nu)q_l + 2m q_m] \mathfrak{E}_{11} \quad (\text{V.33})$$

En posant  $E = I(1-2\nu) + 2m$  comme en élasticité et

$$h = I(1-2\nu)q_l + 2m q_m \quad (\text{V.34})$$

On trouve :

$$\mathbf{s}_{11} = E\mathbf{e}_{11} + h\dot{\mathbf{e}}_{11} \quad (\text{V.35})$$

La réponse à une expérience de fluage (avec  $t = 0 \rightarrow \varepsilon = \mathbf{0}$ ) est :

$$\mathbf{e}_{11} = \frac{\mathbf{s}_{11}}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{E}{h}t\right) \right] \quad (\text{V.36})$$

ce qui permet d'identifier les coefficients  $E$  et  $\eta$  puis  $\lambda$  et  $\theta_\lambda$  après avoir déterminé  $\mu$  et  $\theta_\mu$ ,  $\nu$  étant mesuré par la déformation transversale :  $\mathbf{e}_{22} = -\nu\mathbf{e}_{11}$

### V.7.3. Solides de Maxwell

Il correspond au choix des variables suivantes :

- La variable observable est toujours la déformation totale  $\mathbf{z}$  à laquelle est associée la contrainte  $\sigma$ .
- Pour définir la puissance réversible et la puissance dissipée, on opère cette fois une partition des déformations en deux déformations :

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^{an} \quad (\text{V.37})$$

$\sigma: \dot{\varepsilon}^e$  définit la puissance réversible,

$\sigma: \dot{\varepsilon}^{an}$  est la dissipation intrinsèque.

Conformément à la méthode de l'état local, la loi d'état dérive de le potentiel thermodynamique

$\Psi(\mathbf{e} - \mathbf{e}^{an})$ :

$$\mathbf{s} = r \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}} = r \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{e}^e} \quad (\text{V.38})$$

et la loi complémentaire, du potentiel de dissipation dual  $\varphi^*(\sigma)$

$$\dot{\varepsilon}^{an} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} \quad (\text{V.39})$$

Afin d'exprimer la vitesse de déformation totale par addition de  $\dot{\varepsilon}^e$  et  $\dot{\varepsilon}^{an}$ , il vaut mieux travailler avec le potentiel thermodynamique dual  $\Psi^*(\mathbf{s})$  et, pour obtenir une théorie linéaire, on choisit le même potentiel que pour l'élasticité :

$$\Psi^* = \frac{1}{2r} \left( \frac{1+\nu}{E} \text{Tr}(\mathbf{s}^2) - \frac{\nu}{E} [\text{Tr}(\mathbf{s})]^2 \right) \quad (\text{V.40})$$

Avec

$$\mathbf{e}^e = r \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{s}} = \frac{1+\nu}{E} \mathbf{s} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\mathbf{s}) \mathbf{1} \quad (\text{V.41})$$

De même, le potentiel de dissipation est défini par une forme quadratique définie positive faisant intervenir deux nouveaux coefficients  $t_1$  et  $t_2$ , caractéristiques de la viscosité et qui peuvent être identifiés d'après des essais unidimensionnels de traction et cisaillement :

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} \left( \frac{1+\nu}{Et_1} \text{Tr}(\mathbf{s}^2) - \frac{\nu}{Et_2} [\text{Tr}(\mathbf{s})]^2 \right) \quad (\text{V.42})$$

En écrivant  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an} = \varepsilon^e + \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma}$  on obtient le modèle mécanique de Maxwell :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \dot{\mathcal{S}} + \frac{S}{t_1} \right] - \frac{\nu}{E} \left[ Tr(\dot{\mathcal{S}}) + \frac{Tr(S)}{t_2} \right] \quad (V.43)$$

Ou

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left[ \dot{\mathcal{S}}_{ij} + \frac{S_{ij}}{t_1} \right] - \frac{\nu}{E} \left[ \dot{\mathcal{S}}_{kk} + \frac{S_{kk}}{t_2} \right] d_{ij} \quad (V.44)$$

Appliqué au cas unidimensionnel, il correspond au modèle analogue du ressort en série avec l'amortisseur, décrit au paragraphe précédent:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\mathcal{S}}}{E} + \left[ \frac{1+\nu}{Et_1} - \frac{\nu}{Et_2} \right] S \quad (V.45)$$

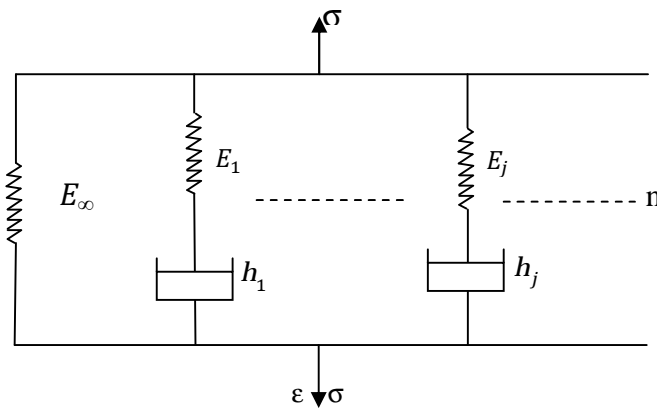
ou en posant  $\frac{1+\nu}{Et_1} - \frac{\nu}{Et_2} = \frac{1}{h}$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\mathcal{S}}}{E} + \frac{S}{h} \quad (V.46)$$

C'est un modèle de fluide puisque la possibilité d'équilibre à contrainte constante non nulle n'existe pas.

**V.7.4. Modèle de Maxwell généralisé pour les solides**

Cette possibilité d'équilibre peut être obtenue par addition d'un ressort en parallèle et l'on peut aussi prendre compte de comportements plus complexes en ajoutant d'autres éléments simples de Maxwell également en parallèle (figure V.9). Ceci constitue aussi une généralisation du modèle de Kelvin-Voigt.



**Fig. V.9. Modèle de Maxwell généralisé.**

La loi de comportement unidimensionnelle d'un tel modèle s'écrit :

$$\begin{aligned}
s &= s_0 + s_1 + \dots + s_j + \dots \\
e &= \frac{s_0}{E_\infty} \\
\dot{\epsilon} &= \frac{\dot{s}_1}{E_1} + \frac{s_1}{h_1} \\
\dot{\epsilon} &= \frac{\dot{s}_j}{E_j} + \frac{s_j}{h_j}.
\end{aligned} \tag{V.47}$$

On peut aussi faire apparaître les déformations internes au modèle

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_j + \dot{\epsilon}_j^n \tag{V.48}$$

En écrivant l'égalité de la contrainte dans le ressort et l'amortisseur d'un modèle élémentaire, on obtient la loi d'évolution des déformations anélastiques internes :

$$\dot{\epsilon}_j^n = \frac{E_j}{h_j} (e - e_j^{an}) \tag{V.49}$$

La loi de comportement du modèle peut alors se mettre sous une autre forme :

$$\begin{aligned}
s &= E_\infty e + \sum_{j=1}^n h_j \dot{\epsilon}_j^n \\
\dot{\epsilon}_1^n &= \frac{E_1}{h_1} (e - e_1^{an}) \\
\dot{\epsilon}_j^n &= \frac{E_j}{h_j} (e - e_j^{an})
\end{aligned} \tag{V.50}$$

Les déformations  $e_j^{an}$  jouent le rôle de variables internes au sens de la thermodynamique ( $\sum_{j=1}^n s_j \dot{\epsilon}_j^n$

est la dissipation intrinsèque). La loi de comportement est formée d'une relation constitutive contenant les variables internes et autant d'équations différentielles d'évolution que de variables internes introduites. Notons que cette formulation peut aussi être considérée comme un cas particulier de la viscoplasticité (viscosité linéaire, sans seuil).

Pour représenter des comportements viscoélastiques complexes, on peut généraliser ainsi l'association de ressorts et d'amortisseurs mais les problèmes d'identification deviennent rapidement insolubles puisqu'il faut déterminer autant de coefficients au moins que d'éléments introduits. Le passage au nombre de modèles infini ou au continu se fait par la notion de spectres de fluage ou de relaxation mais, pour la viscoélasticité linéaire, l'approche fonctionnelle ou héréditaire présente des avantages incontestables sur l'approche par variables d'état discrètes.



**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- [1] Forest S. (2006). Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes. Les Presses de l'Ecole des Mines de Paris, ISBN : 2-911762-67-3, 200 pages.
- [2] Amestoy M. and Damamme G. (2003). Mécanique des Milieux Continus II. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- [3] Amestoy M. and Leblond J.-B. (1992). Crack paths in plane situations–II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 29, pp 465–501.
- [4] Arroyo M. and Belytschko T. (2002). An atomistic-based finite deformation membrane for single layer crystalline films. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50, pp 1941–1977.
- [5] Ashby M.F. (2000). Choix des matériaux en conception mécanique. Dunod, Paris.
- [6] Ashby M.F. and Jones D.R.H. (1980). “Engineering materials”, vol.1 : An Introduction to their Properties and Applications. Pergamon Press.
- [7] Ashby M.F. and Jones D.R.H. (1991). Matériaux, vol. 1 et 2. Dunod.
- [8] Bascoul A. and Maso J.C. (1981). Influence des gradients de contraintes ou déformations sur le seuil d'écoulement plastique d'un acier. *Journal de Mécanique Appliquée*, vol. 5, pp 375–403.
- [9] Béranger G., Duffaut F., Morlet J., and Thiers J.F. (1996). The iron–nickel alloys A hundred years after the discovery of invar. SOS Free Stock.
- [10] Beremin F. M. (1983). A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 14, pp 2277–2287
- [11] Berthelot J.-M. (1999). Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures. Technique et Documentation, Paris.
- [12] Bertram A. (2005). Elasticity and Plasticity of Large Deformations. Springer.
- [13] Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., and Forest S. (2001). Mécanique non linéaire des matériaux. ISBN 2-7462-0268-9, EAN13 9782746202689, 445 p. Hermes, France.
- [14] Brun L. (1991). Introduction `a la thermodynamique des Matériaux. Cours de l'Ecole Polytechnique.
- [15] Bunge H.J. (1982). Texture Analysis in Materials Science. Butterworths.
- [16] Cahn R.W. (2001). The coming of materials science. Pergamon.
- [17] Cailletaud G. (2003). Mécanique des Matériaux Solides, 3122. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- [18] Cailletaud G., Coupez T., Feyel F., and Kern M. (2004). Eléments Finis, S2733. Cours de l'Ecole des Mines de Paris.
- [19] Cardona Jean-Marc (2000). Comportement et durée de vie des pièces multi-perforées application aux aubes de turbine. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- [20] Chan N. and Evans K.E. (1997). Microscopic examination of the microstructure and deformation of conventional and auxetic foams. *Journal of Materials Science*, vol. 32, pp 5725-5736.
- [21] Coleman B.D. and Noll W. (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [23] Groot S.R. and Mazur P. (1962–1984). Non-equilibrium thermodynamics. Arch. Rational Mech. and Anal., vol. 13, pp 167–178. North Holland– Dover
- [24] Dell’Isola F. and Seppecher P. (1995). The relationship between edge contact forces, double forces and interstitial working allowed by the principle of virtual power. C.R. Acad. Sci. Paris II b, vol. 321, pp 303–308.
- [25] Dugas R. (1959-1996). Histoire de la mécanique. Editions Jacques Gabay, Paris.
- [26] Erdogan F. and Sih G.C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. Journal of Basic Engineering, vol. 85, pp 519–527.
- [27] Eringen A.C. and Maugin G.A. (1990). Electrodynamics of continua (2 vol.). Springer, Berlin.
- [28] Fargue D. (2004a). Abrege de thermodynamique. Ecole des Mines de Paris–Les Presses.
- [29] Fargue D. (2004b). Thermodynamique, 2411. Cours de l’Ecole des Mines de Paris.
- [30] Fer F. (1970). Thermodynamique macroscopique, tomes 1 et 2. Gordon & Breach.
- [31] Filippini M. (2000). Stress gradient calculations at notches. International Journal of Fatigue, vol. 22, pp 397–409.
- [32] Fivel M. and Forest S. (2004a). Plasticité cristalline et transition d’échelle : cas du monocristal.
- [33] Techniques de l’Ingénieur, M4016, 23 pages.
- [34] Fivel M. and Forest S. (2004b). Plasticité cristalline et transition d’échelle : cas du polycristal.
- [35] Techniques de l’Ingénieur, M4017, 11 pages.
- [36] Timoshenko S.P. (1953-1983). History of strength of materials. Dover.
- [37] François D., Pineau A., and Zaoui A. (1993). Comportement mécanique des matériaux.
- [38] Volume 2 : viscoplasticité, endommagement, rupture. Hermes.
- [39] Freund L.B. and Suresh S. (2003). Thin Film Materials. Cambridge University Press.
- [40] Friedel J. (1964). Dislocations. Pergamon.
- [41] Germain P. (1973a). Cours de mécanique des milieux continus T.I./Théorie générale. Masson, Paris.
- [42] Germain P. (1973b). La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, première partie : théorie du second gradient. J. de Mécanique, vol. 12, pp 235–274.
- [43] Germain P. (1986). Mécanique, tomes I et II. Ellipses, Paris.
- [44] Haupt P. (2000). Continuum Mechanics and Theory of Materials. Springer Verlag.
- [45] Hill R. (1968). On constitutive inequalities for simple materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 16, pp 229–242.
- [46] Hill R. (1978). Aspects of invariance in solid mechanics. Advances in Applied Mechanics, vol. 18, pp 1–75.
- [47] Hirth J.P. and Lothe J. (1982). Theory of Dislocations. Wiley Inter-sciences.
- [48] Inglis C.E. (1913). Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners.
- [49] Amestoy M. (2004). Mécanique des milieux continus déformables : recueil de problèmes. Cours de l’Ecole des Mines de Paris.
- [50] Jaoul B. (2008). Etude de la plasticité et application aux métaux. Les Presses des Mines, Paris.
- [51] Kachanov M., Shafiro B., and Tsukrov I. (2003). Handbook of Elasticity Solutions. Kluwer Academic Publishers.
- [52] Tijani M. (2004). Calcul des Structures, semaine européenne. Cours de l’Ecole des Mines de Paris.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

---

- [53] Timoshenko S. and Goodier J.N. (1970). Theory of elasticity. McGraw–Hill International Editions.
- [54] Toupin R. (1965). Saint-Venant's principle. Archives of Rational Mechanics and Analysis, vol. 18, pp 83–96.
- [55] Truesdell C. (1974). Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus. Masson, Paris.
- [56] Cornet A. and Hlawka F. Propriétés et comportement des matériaux. Ellipses, 2006.
- [57] Cazaud R., Pomey G., Rabbe P., and Janssen C. La fatigue des métaux. Dunod, 1969.
- [58] du Roure O., Saez A., Buguin A., Austin R. H., Chavrier P., Silberzan P., and Ladoux B. Force mapping in epithelial cell migration. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(7) :2390\_2395, February 2005.
- [59] Dominique Francois et coll. Essais mécaniques et lois de comportement. Hermès science, 2001.
- [60] Fabrègue D. Microstructure et fissuration à chaud lors du soudage laser d'alliages d'aluminium 6000. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [61] Francois D., Pineau A., and Zaoui A. Comportement Mécanique des Matériaux. Hermès, 1995.
- [62] G. Gary. Comportement des métaux à grande vitesse de déformation. Modélisation. In Techniques de l'Ingénieur, traité Génie Mécanique.
- [63] Golovin Y. I., V. Ivolgin I., Khonik V. A., Kitagawa K., and Tyurin A. I. Serrated plastic flow during nanoindentation of a bulk metallic glass. Scripta Materialia, 45 :947-952, 2001.
- [64] ASM Handbook. Mechanical testing and evaluation, volume 8.
- [65] Héripré E. Méthode de couplage multi-échelles entre simulations numériques poly-cristallines et mesures de champs pour l'identification des paramètres de lois de comportement et de fissuration des matériaux métalliques. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- [66] Hill R., Lee E.H., and Tupper S. J. Theory of wedge indentation of ductile metals. Proceedings of the Royal Society, A188(273) :162, 1947.
- [67] Lemaître J. and Chaboche J.L. Mécanique des matériaux solides - 2ème édition. Science Sup. Dunod.
- [68] Lam D.C.C. and Chong A.C.M. Model and experiments on strain gradient hardening. Materials Science and Engineering A, 318:313-319, 2001.
- [69] Lemaignan C. La rupture des matériaux. EDP Science, 2003.
- [70] Montmintonne P. T. Le laminage, aspects mécaniques. ENSMP/CEMEF, 1993-1994.
- [71] Tanguy B. Modélisation de l'essai Charpy par l'approche locale de la rupture – Application au cas de l'acier 16MND5 dans le domaine de transition. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [72] Tanguy B. Quelle(s) modélisation(s) de l'essai Charpy pour une meilleure prédiction de la courbe de résilience. Séminaire, LMT, octobre 2005.
- [73] Charmet J.C. Mécanique du solide et des matériaux Elasticité - Plasticité – Rupture. ESPCI - Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique