Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli, Mascara

Faculté des Sciences Économiques, Sciences Commerciales et Sciences de Gestion

Cours de
Recherche Opérationnelle

Présentés par : Dr. HAMADOUCHE Mohammed Amine

Année Universitaire 2015-2016

Introduction

C'est avec plaisir que je partage mon expérience de presque dix ans d'enseignement du module "recherche opérationnelle". Ainsi ce livre est composé d'un ensemble de chapitres fondamentaux qui ont été présentés sous forme de cours pour plusieurs spécialités dans le domaine des sciences économiques. Je me suis basé sur la simplicité et la présentation méthodologique du contenu tout en restant, dans la mesure de possible, loin de la présentation mathématique pure puisque ce produit est destiné principalement aux étudiants des parcours des sciences économiques, sciences commerciales et sciences de gestion.

Les exemples et les exercices utilisés dans tous les chapitres sont des problèmes directs d'application économiques, cela pour mieux comprendre l'utilisation des modèles de la recherche opérationnelle au sien de l'entreprise économique.

Cette première édition sera suivie par d'autres améliorations notamment l'introduction de nouveaux chapitres concernant la théorie de décision à savoir : l'arbre de décision, problème d'ordonnancement, gestion des projets...etc.

En outre, l'utilisation des outils informatiques pour la résolution des problèmes de la recherche opérationnelle est quasiment indispensable à la résolution des problèmes de grande taille, la raison pour laquelle un nouvel ouvrage sera préparé dans cette optique.

Adressons ce travail aux enseignants collègues et aux étudiants, il me reste que de demander aux lecteurs de me parvenir leurs commentaires ou remarques concernant le contenu et les méthodes utilisées et cela pour le rendre un référentiel certifié.

Dr. HAMADOUCHE M.A.

Sommaire

Chapitre 1

1 Introduction à la recherche opérationnelle

1.1 Définition

Il n'existe plus une définition exacte de la recherche opérationnelle, la raison pour laquelle les chercheurs ont la défini différemment, selon leur contexte de recherche et d'application. G.KIMBALL et P.MORSE la défini comme *une méthode scientifique fournit à l'administration exécutive un outil quantitatif pour la prise de décision*. R.ACKOFF et G.CHORCHMAN ont défini la recherche opérationnelle par *l'utilisation des méthodes scientifiques et modèles de résolution aux problèmes liés aux systèmes d'opération pour fournir aux décideurs les solutions optimales*, ou c'est *la théorie des décisions pratiques l'utilisation des méthodes scientifiques et mathématiques qui permet aux exécuteurs la résolution des problèmes* selon M.STARR et M.MILLER. Aussi, H.WANGER a défini la recherche opérationnelle par *l'utilisation du principe scientifique pour résoudre les problèmes des directeurs exécutifs*.

Ces définitions sont communes dans plusieurs mots clés, à savoir : méthode scientifique, modèles et outils qui constituent en fait les modèles mathématiques et statistiques, les problèmes des directeurs, les décisions, les solutions optimales. Ces derniers résultent essentiellement de la compréhension et l'utilisation de cette discipline par les chercheurs dans des domaines différents.

Globalement on peut définir la recherche opérationnelle comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes d'organisation utilisables pour élaborer de meilleures décisions.

1.2 Historique

Dès le XVIIe siècle, des mathématiciens comme Blaise Pascal tentent de résoudre des problèmes de décision dans l'incertain avec l'espérance mathématique. D'autres, au XVIIIe siècle et XIXe siècle, résolvent des problèmes combinatoires.

Mais ce n'est qu'avec la seconde guerre mondiale que la pratique va s'organiser pour la première fois et acquérir son nom. En 1940, Patrick Blackett est appelé par l'état Major anglais à diriger la première équipe de recherche opérationnelle, pour résoudre certains problèmes tels que l'implantation optimale de radars de surveillance. La réussite de ces recherches a encouragé les américains par la nécessité de l'utilisation des différents outils de la recherche opérationnelle.

Le mot "Opérationnelle" vient donc du fait que la première application d'un groupe de travail organisé dans cette discipline avait trait aux opérations militaires. Le nom est resté par la suite, même si le domaine militaire n'est plus le principal champ d'application de cette pratique.
Après la guerre, les techniques se sont considérablement développées, grâce, notamment, à l'explosion des capacités de calcul des ordinateurs. Les domaines d'applications se sont également multipliés.

1.3 Champs d'application

La recherche opérationnelle peut aider le décideur lorsque celui-ci est confronté à un problème appartenant à un des types suivants :

1.3.1 Problèmes combinatoires

Un problème est dit combinatoire lorsqu'il comprend un grand nombre de solutions admissibles parmi lesquels on cherche une solution optimale ou proche de l'optimum.
Exemple typique : déterminer où installer 5 centres de distribution parmi 30 sites d'implantation possibles, de manière à ce que les coûts de transport entre ces centres et les clients soient minimums. Ce problème ne peut être résolu par une simple énumération des solutions possibles par l'esprit humain, puisqu'il en existe 30 * 29 * 28 * 27 * 26 = 17.100.720 (!). Et même si un problème de cette taille pourrait être résolu par énumération par un ordinateur, les décideurs sont régulièrement confrontés à des problèmes infiniment plus complexes, où le nombre de solutions acceptables se compte en milliards de milliards.

1.3.2 Problème aléatoires

Un problème est dit aléatoire s'il consiste à trouver une solution optimale face à un problème qui se pose en termes incertains.
Exemple typique : connaissant la distribution aléatoire du nombre de personnes entrant dans une administration communale en une minute et la distribution aléatoire de la durée de traitement du cas d'une personne, déterminer le nombre minimum de guichets à ouvrir pour qu'une personne ait moins de 5% de chances de devoir attendre plus de 15 minutes.

1.3.3 Problèmes concurrentiels

Un problème est dit concurrentiel s'il consiste à trouver une solution optimale face à un problème dont les termes dépendent de l'interrelation entre ses propres agissements et ceux d'autres décideurs.
Exemple typique : fixer une politique de prix de vente, sachant que les résultats d'une telle politique dépendent de la politique que les concurrents adopteront.

1.4 Relations avec d'autres disciplines

La recherche opérationnelle se situe au carrefour de différentes sciences.

1.4.1 Economie

Outre le fait que les principales applications pratiques se situent dans ce domaine, l'analyse économique est souvent nécessaire pour définir l'objectif à atteindre ou pour identifier les contraintes d'un problème.

1.4.2 Informatique

Les progrès de l'informatique sont intimement liés à l'accroissement des applications de la recherche opérationnelle. Une puissance de calcul importante est nécessaire à la résolution de problèmes de grande taille. Cette puissance est cependant loin de constituer une panacée : il a en effet été prouvé que certains problèmes, parmi lesquels certains liés à la recherche opérationnelle, ne peuvent être résolus de manière optimale par un ordinateur dans un temps raisonnable et cela, même si l'on considère des ordinateurs un milliard de fois plus puissants que ceux d'aujourd'hui. Pour ces problèmes, le chercheur opérationnel fera le plus souvent appel à des techniques empruntées à l'intelligence artificielle, permettant de trouver en un temps acceptable des solutions proches de l'optimum.
L'informatique peut également constituer un domaine d'application, en matière de localisation de serveurs, de nombre de serveurs à mettre en place pour obtenir un temps de réponse raisonnable...

1.4.3 Mathématiques

Beaucoup de méthodes utilisées par la recherche opérationnelle sont issues de théories mathématiques diverses. En ce sens, la recherche opérationnelle est une branche des mathématiques appliquées.

1.5 Principe de la recherche opérationnelle

La recherche opérationnelle s'articule sur un principe scientifique qui commence par la création du modèle approprié jusqu'à sa résolution et l'application de la décision optimale.
L'utilisation de la recherche opérationnelle comme outil d'aide à la décision dans l'entreprise doit obligatoirement suivre certain cheminement d'opération :

- Déterminer toutes les composantes du problème étudié ainsi que les relations d'influence entre elles.
- Construire le modèle mathématique approprié.
- Examiner le modèle introduit pour qu'il tienne en compte tous les facteurs qui influencent sur l'objectif principal.
- Déterminer la solution optimale du modèle et vérifier par la suite sa réalisabilité.

Chapitre 2

2 Programmation linéaire

Il existe des méthodes mathématiques qui permet la résolution des problèmes à objectifs définies le cas de maximisation du bénéfice ou de minimisation du coût sous un ensemble de contraints. Cette technique est utilisée pour la résolution des problèmes d'optimisation.

La programmation linéaire (PL) est l'un des outils les plus puissants et les plus utilisés en application "industrielle" parmi les technologies d'aide à la décision. Elle est utilisée dans plusieurs domaines à savoir :

Planification de la production ; répartition des ressources ; choix de produits à fabriquer ; choix et planification d'investissements ; problèmes de distribution ; affection et gestion du personnel ; gestion des projets, et bien autres ...

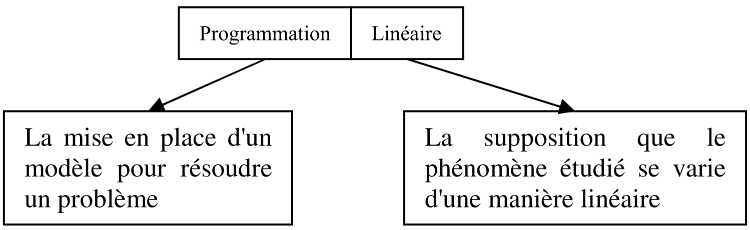


Figure 2-1 Programmation linéaire

2.1 Définition

C'est une technique mathématique permet de traiter d'une façon systématique des problèmes complexes où plusieurs activités sont en compétition pour des ressources limitées et objectif global (maximisation des profits, minimisation des coûts, ...) est recherché.

2.2 Création du modèle de la PL

La mise en place du modèle de la PL représente l'étape clé du processus global. En faite c'est la représentation des relations réelles par des fonctions mathématiques hypothétiques, fondées sur l'examen et l'analyse de l'existant (le problème réel). Un tel modèle est ainsi créé en quelques étapes :

2.2.1 Définir les variables de décision

Elles présentent les quantités que le décideur doit les connaitre (inconnus) et en plus ces valeurs ont une influence directe sur la valeur de la fonction économique. Par exemple le nombre des unités produites, le nombre des heures de fonctionnement, ...

2.2.2 La fonction économique (ou fonction objectif)

C'est une fonction qui présente mathématiquement l'objectif principal du problème, elle est caractérisée par un sens de préférence qui peut être la maximisation (bénéfice, production,...) ou la minimisation (coût, nombre d'employés,...).

Exemple : $Max: Z = 2X_1 + 4X_2 + 7X_3$
avec : X_1, X_2, X_3 *variables de décision*
2, 4, 7 *les coefficients associés aux trois variables qui représentent par exemple le prix de vente, le bénéfice d'une unité de chaque produit.*

2.2.3 Les contraintes

Un ensemble de contraintes qui traduit mathématiquement sous forme d'équation et d'inéquation tous les facteurs ayant impact sur les composantes du problème étudié. Ces derniers sont généralement associés à la consommation des ressources limitées (matière première, heures de travail, nombre des employés, ...).

Exemple : $2X_1 - 10X_2 \leq 150$ une contrainte sous forme d'inéquation "inférieure ou égale" à une quantité limitée de ressources "150". Evidemment, une contrainte peut être une équation ou une inéquation ($\leq, \geq, <, >$).
Un programme linéaire s'exprime de façon générique sous la forme :

$$\begin{array}{l} Max: Z = c_1X_1 + \cdots + c_jX_j + \cdots + c_nX_n \\ \quad a_{11}X_1 + \cdots + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \quad a_{i1}X_1 + \cdots + a_{ij}X_j + \cdots + a_{in}X_n \leq b_i \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \quad a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mj}X_j + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m \\ \quad \forall\, j\, ;\ X_j \geq 0 \ \textit{selon le cas de la non} - \textit{négativité} \end{array}$$

Ou, sous une forme plus compacte :

$$Max: Z = \sum_{j=1}^{n} c_jX_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \leq b_i \qquad i = 1 \ldots m$$

$$\forall\, j\, ;\ X_j \geq 0 \ \textit{selon le cas de la non} - \textit{négativité}$$

Prenant l'exemple suivant pour mieux comprendre les étapes à suivre afin d'établir un programme linéaire à un problème donné :

Enoncé : Une société produit plusieurs types de poudre à laver. Cette société a reçu une commande de 12000 kg d'un type de poudre qui se construit par la compilation de trois produits (A, B, C) et les caractéristiques de la poudre demandée sont :

1. La quantité livrée contient au minimum 3000 kg du produit B.
2. La quantité livrée ne contient pas plus de 4000 kg du produit A.
3. La quantité livrée contient au maximum 2000 kg du produit C.

Si le coût d'un kilogramme du produit B est de 2 dinars, 3 dinars pour le kg du produit C et 4 dinars au troisième produit.

Ecrire le programme linéaire qui minimise le coût total.

Solution :

La société a reçu une commande de 12000 kg sur un seul type de poudre, alors le problème dans sa globalité vise à minimiser les coûts d'achat des trois matières premières (MP) tout en respectant les conditions exigées par cette commande et sans oublier la quantité demandée puisque une quantité en plus de la MP engendre des frais supplémentaires.

Variable de décision :

Il s'agit de calculer les quantités des trois MP, qui influencent directement sur la valeur totale des coûts, donc : on note par X_1, X_2, X_3 respectivement les quantités des trois matières premières A, B et C.

Fonction économique :

Il s'agit de minimiser les coûts d'achats de la matière première ➔le sens de préférence est la **minimisation**.

le coût d'un kg du produit A est de 4 dinars

alors le coût de la quantité X_1 kg du produit A est de $4X_1$ dinars

le coût d'un kg du produit B est de 2 dinars,

alors le coût de la quantité X_2 kg du produit B est de $2X_2$ dinars

le coût d'un kg du produit C est de 3 dinars

alors le coût de la quantité X_3 kg du produit C est de $3X_3$ dinars

Ce qui donne le coût total : $\boldsymbol{W} = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3$

La fonction économique est de la forme suivante : $MIN: \boldsymbol{W} = 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \dots \dots \dots (1)$

Les contraintes :

1- contrainte du produit A

La condition de "la quantité livrée ne contient pas plus de 4000 kg du produit A" se traduit mathématiquement par : $X_1 \leq 4000 \ldots\ldots\ldots (2)$

2- contrainte du produit B

La condition de "la quantité livrée contient au minimum 3000 kg du produit B" se traduit mathématiquement par : $X_2 \geq 3000 \ldots\ldots\ldots (3)$

3- contrainte du produit C

La condition de "la quantité livrée contient au maximum 2000 kg du produit C" se traduit mathématiquement par : $X_3 \leq 2000 \ldots\ldots\ldots (4)$

4- contrainte de quantité demandée

La quantité demandée est de 12000 kg, ce qui traduit mathématiquement par la somme des trois quantités : $X_1 + X_2 + X_3 = 12000$ mais si on exprimant cette contrainte sous forme d'égalité, nous n'avons pas assez de garantie pour assurer la production de 12000 kg, à cet effet cette contrainte prendra la forme d'une inéquation : $X_1 + X_2 + X_3 \geq 12000 \ldots\ldots\ldots (5)$

Ajoutant la contrainte de la non-négativité (quantités positives).

Le modèle de la PL associé est :

$$
\begin{aligned}
MIN: \boldsymbol{W} &= 4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \\
& X_1 \leq 4000 \\
& X_2 \geq 3000 \\
& X_3 \leq 2000 \\
& X_1 + X_2 + X_3 \geq 12000 \\
& X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Remarque :

Du faite que la création du modèle de la PL représente une étape très importante, sur laquelle s'articule l'action de la prise de décision vis-à-vis un problème donné, il s'avère nécessaire de présenter la résolution d'une série d'exercices afin de présenter un maximum de cas.

2.3 Exercices

Exercice 2.1 :

Une société nationale produit deux types de matelas (A et B) qui nécessite chacun trois phases : phase de coupure, phase de pliage sous forme de rouleaux et la phase d'emballage.

Le tableau ci-contre précise la durée en minute consacrée pour les deux types sur les trois phases de production.

	Types de matelas		Temps disponible (min)
	A	B	
Phase 01	9	5	2100
Phase 02	5	7	1900
Phase 03	2	3	2500

Il est donné que le bénéfice d'une unité de type A est 1200 dinars et 800 dinars pour celle de B. **Ecrire le programme linéaire dont le but est de maximiser la marge bénéficiaire.**

Exercice 2.2 Un artisan fabrique deux articles A et B nécessitant chacun deux opérations : un usinage et un traitement thermique. Le produit A subit un usinage d'1 heure et un traitement thermique de 3h. B subit un usinage de 2h et un traitement thermique de 3h. De plus, 2kg de matière première entrent dans la composition de A et 1kg dans celle de B. La fabrication de B se termine par un travail de finition qui dure 1h.

Toutes les 3 semaines, l'artisan dispose de l'atelier d'usinage pendant 80h et du four pendant 150h. De plus, pendant cette période, il ne peut pas consacrer plus de 35h au travail de finition ni stocker plus de 80kg de matière première.

Quelles quantités de A et B l'artisan doit-il fabriquer pendant cette période si la marge bénéficiaire est de 30 euros pour l'article A et de 20 euros pour l'article B.

Exercice 2.3 La société des carrières de VALAY fournit aux Ponts et Chaussées des graviers de différents calibres ; le marché, adjugé pour un prix global, porte sur les quantités suivantes : 13 500 tonnes de gravier de calibre 1, 11 200 tonnes de calibre 2 et 5 000 tonnes de calibre 3. La société VALAY loue deux carrières : P1 au prix de 19,40 euros la tonnes et P2 `a 20 euros la tonne. Après extraction, la pierre est pesée puis concassée : chaque carrière fournit, par tonne de pierre pesée, les quantités définies par le tableau suivant (le sable résiduel est sans valeur marchande) :

	calibre 1	calibre 2	calibre 3
pierres de P1	0, 36t	0, 4t	0, 16t
pierres de P2	0, 45t	0, 2t	0, 10t

La direction souhaite définir son programme d'extraction de pierres de P1 et P2 de façon à minimiser le coût de la location. Donner une solution à ce problème.

Exercice 2.4 Dans une cafétéria, on sert 2 sortes de desserts glacées, à base de cocktails exotiques, de glace et de fruits confits : la créole et la tropicale. La créole nécessite 8cl de cocktail exotique, 2dl de glace et 15g de fruits confits.
La tropicale nécessite 5cl de cocktail exotique, 2dl de glace et 25g de fruits confits. Chaque jour, l'atelier de pâtisserie peut préparer 1600 cl de cocktail exotique, 520 dl de glace et 5 kg de fruits confits. Une créole est vendue 1,2 euros et une tropicale 1 euro. Maximiser le profit.

Exercice 2.5 Un commerçant s'est spécialisé dans la fabrication de chaussures en cuir. Il en fabrique deux types : des chaussures A cousues main et des chaussures B collées. Son approvisionnement en cuir ne lui permet pas de fabriquer plus de 120 chaussures par semaine. De plus, il ne peut vendre pendant cette période plus de 100 chaussures B et 70 chaussures A. Une paire de chaussures A lui demande 4 heures de travail, et une paire de chaussures B lui demande 1h. Avec ses ouvriers, il dispose de 240h de travail par semaine.
Il peut vendre les chaussures A 150 euros et les chaussures B 50 euros. Quelle quantité de chaussures A et B doit-il fabriquer par semaine pour maximiser sa recette ?

Exercice 2.6 Une entreprise disposant de 10 000 m² de carton en réserve, fabrique et commercialise 2 types de boites en carton. La fabrication d'une boite en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m² de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boites sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boite du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15000 boites du premier type. Les boites sont vendues, respectivement, 3 et 5 UM.
a) Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire. Préciser clairement les variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.
b) Déterminer un plan de production optimal en résolvant graphiquement le programme linéaire trouvé en a (voir la section des solutions dans le chapitre3).

Solutions des exercices

Solution 2.1

(a) *Variables de décision*

Soit X_1 : le nombre de matelas de type A ;

X_2 : le nombre de matelas de type B.

(b) *La fonction économique*

Le but est de maximiser la marge bénéficiaire.

Le bénéfice d'une unité de matelas de type A est de 1200 Dinars.

Le bénéfice de la quantité X_1 unités de matelas A est de $1200X_1$ Dinars

Le bénéfice d'une unité de matelas de type B est de 800 Dinars

Le bénéfice de la quantité X_2 unités de matelas B est de $800X_2$ Dinars

Le bénéfice global est : $Z = 1200X_1 + 800X_2$

Ainsi la fonction économique est : $Max: Z = 1200X_1 + 800X_2$

(b) *Les contraintes*

- *La contrainte de la phase 01*

Une unité du matelas A nécessite 9 min, donc $9X_1$ min sont nécessaire pour X_1 unités.

Une unité du matelas B nécessite 5 min, donc $5X_2$ min sont nécessaire pour X_2 unités.

La durée de la phase 01 est limitée par 2100 minutes, ce qui donne la forme suivante de la contrainte : $9X_1 + 5X_2 \leq 2100$

- *La contrainte de la phase 02*

$9X_1$ min sont nécessaire pour produire X_1 unités de A et $5X_2$ min sont nécessaire pour X_2 unités de B.

Avec une durée maximale 1900 minutes, la contrainte s'écrit :

$$5X_1 + 7X_2 \leq 1900$$

- *La contrainte de la phase 03*

Le temps consacré pour produire X_1, X_2 unités du matelas A et B est : $2X_1 + 3X_2$ qui ne doit pas dépasser les 2500 minutes, donc : $2X_1 + 3X_2 \leq 2500$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} Max: Z = 1200X_1 + 800X_2 \\ 9X_1 + 5X_2 \leq 2100 \\ 5X_1 + 7X_2 \leq 1900 \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 2500 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour la résolution de ce modèle veuillez consulter le chapitre 3

Solution 2.2

(a) *Variables de décision*

Soit X_1 : la quantité des articles A ;

X_2 : la quantité des articles B.

(b) *La fonction économique*

L'objectif est de maximiser la marge bénéficiaire.

La marge bénéficiaire d'une unité de l'article A est de 30 euros.

Le bénéfice de la quantité X_1 unités de l'article A est de $30X_1$€

La marge bénéficiaire d'une unité de l'article B est de 20 euros

Le bénéfice de la quantité X_2 unités de l'article B est de $20X_2$€

Le bénéfice global est : $Z = 30X_1 + 20X_2$

Ainsi la fonction économique est : $Max: Z = 30X_1 + 20X_2$

(b) *Les contraintes*

- *La contrainte d'usinage*

Une unité du produit A subit un usinage d'une heure

Alors X_1unités du produit A subissent un usinage de X_1 h

Une unité du produit B subit un usinage de 2h

Alors X_2unités du produit B subissent un usinage de $2X_2$ h

l'artisan dispose de l'atelier d'usinage pendant 80h, donc : $X_1 + 2X_2 \leq 80$

- *La contrainte du traitement thermique*

Une unité du produit A nécessite 3h, donc $3X_1$ h sont nécessaire pour X_1unités.

Une unité du produit B nécessite 3h, donc $3X_2$ h sont nécessaire pour X_2 unités.

Pendant cette phase, l'artisan ne dispose pas le four plus que 150h ce qui donne la forme suivante de la contrainte : $3X_1 + 3X_2 \leq 150$

- *La contrainte de finition*

La fabrication de B se termine par un travail de finition qui dure 1h pour chaque unité.

La durée de cette phase est limitée à 35h, ainsi la contrainte : $X_2 \leq 35$

- *La contrainte de la matière première*

2kg de matière première entrent dans la composition de A et 1kg dans celle de B.

Alors la quantité de la MP consommée est : $2X_1 + X_2$

Le seuil maximal de stockage est de 80kg : $2X_1 + X_2 \leq 80$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} Max: Z = 30X_1 + 20X_2 \\ X_1 + 2X_2 \leq 80 \\ 3X_1 + 3X_2 \leq 150 \\ X_2 \leq 35 \\ 2X_1 + X_2 \leq 80 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour la résolution de ce modèle veuillez consulter le chapitre 3

Solution 2.3

Il s'agit de déterminer les quantités de pierres en tonnes des deux carrières P1 et P2 nécessaires pour répondre aux besoins de la société VALAY (qui sont 13500 T, 11200 T et 5000 T des calibres 1,2 et 3 respectivement).

(a) *Variables de décision*

Soit X_1 : la quantité de pierres extraite du carrière P1 ;

X_2 : la quantité de pierres extraite du carrière P2.

(b) *La fonction économique*

L'objectif est de minimiser les coûts de location des carrières dons le sens de préférence est la minimisation.

Le prix de location d'une tonne de P1 est de 19.40 €

ainsi le prix de location de X_1 tonnes de P1 est de $19.40X_1$ €

Le prix de location d'une tonne de P2 est de 20 €

ainsi le prix de location de X_2 tonnes de P2 est de $20X_2$ €

Le coût global de location est : $W = 19.40X_1 + 20X_2$

La fonction économique est : $\text{Min: } W = 19.40X_1 + 20X_2$

(c) *Les contraintes*

Les quantités demandées des trois calibres sont définies, utilisant les informations du tableau on retient :

- *La contrainte du calibre1*

Une tonne de pierres de P1 fournit 0.36 t de gravier **calibre1**

La quantité X_1 tonnes de pierres de P1 fournit $0.36X_1$ tonnes de gravier calibre1

Une tonne de pierres de P2 fournit 0.45 t de gravier **calibre1**

La quantité X_2 tonnes de pierres de P2 fournit $0.45X_2$ tonnes de gravier calibre1

En conséquence, la quantité extraite du **calibre1** est : $0.36X_1 + 0.45X_2$ qui doit être au minimum 13500 tonnes (pour satisfaire le besoin).

Alors, la contrainte s'écrit sous la forme suivante : $0.36X_1 + 0.45X_2 \geq 13500$

Avec les mêmes étapes d'explication on retient :

- *La contrainte du calibre1*

$$0.41X_1 + 0.2X_2 \geq 11200$$

- *La contrainte du calibre3*

$$0.16X_1 + 0.11X_2 \geq 5000$$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min: } W = 19.40X_1 + 20X_2 & \\ 0.36X_1 + 0.45X_2 &\geq 13500 \\ 0.41X_1 + 0.2X_2 &\geq 11200 \\ 0.16X_1 + 0.11X_2 &\geq 5000 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour la résolution de ce modèle veuillez consulter le chapitre 3

Solution 2.4

(a) *Variables de décision*

Soit X_1 : le nombre des unités de créole vendues ;

X_2 : le nombre des unités de tropical vendues.

(b) *La fonction économique*

L'objectif est de maximiser le profit de cette cafétéria.

Le prix de vente d'une unité de créole est de 1.2 €

Le prix de vente de X_1 unités de créole est de $1.2X_1$€

Le prix de vente d'une unité de tropical est de 1 €

Le prix de vente de X_2 unités de la tropical est de X_2 €

Le total du profit est : $Z = 1.2X_1 + X_2$

Ainsi la fonction économique est : $Max: Z = 1.2X_1 + X_2$

(b) *Les contraintes*

- *La contrainte du cocktail exotique*

Une unité de créole nécessite 8 cl, alors $8X_1$cl sont nécessaire pour préparer X_1 unités.

Une unité du tropical nécessite 5 cl, alors $5X_1$cl sont nécessaire pour préparer X_2 unités.

L'atelier de pâtisserie peut préparer 1600 cl de cocktail exotique quotidiennement, ce qui donne la contrainte : $8X_1 + 5X_2 \leq 1600$

- *La contrainte de glace*

Une unité de créole nécessite 2 dl, alors $2X_1d$l sont nécessaire pour préparer X_1 unités.

Une unité du tropical nécessite 2 dl, alors $2X_1$dl sont nécessaire pour préparer X_2 unités.

L'atelier de pâtisserie peut préparer 520 dl de glace par jour, ce qui donne la contrainte :

$$2X_1 + 2X_2 \leq 520$$

- *La contrainte des fruits confits*

Une unité de créole nécessite 15 g, alors $15X_1$ g sont nécessaire pour préparer X_1 unités.

Une unité du tropical nécessite 25 g, alors $25X_1$g sont nécessaire pour préparer X_2 unités.

L'atelier de pâtisserie peut préparer 5 kg (5000 g) de fruits confits par jour, ce qui donne la contrainte : $15X_1 + 25X_2 \leq 5000$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} Max: Z = 1.2X_1 + X_2 \\ 8X_1 + 5X_2 \leq 1600 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 520 \\ 15X_1 + 25X_2 \leq 5000 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour la résolution de ce modèle veuillez consulter le chapitre 3

Solution 2.5

Soient les variables de décision suivantes :

X_1 : la quantité de chaussures A fabriquées ;

X_2 : la quantité de chaussures B fabriquées.

La fonction objectif à maximiser correspond à la recette obtenue lors d'une semaine de travail :

Le prix de vente d'une paire de chaussures A est 150 euros et celle de B est de 50 euros, alors la recette globale est : $Z = 150X_1 + 50X_2$

Donc la F.E est donnée par : $Max: Z = 150X_1 + 50X_2$

On a les contraintes suivantes :

- *La contrainte de la matière "cuir"*

Le nombre de chaussures fabriqué par semaine ne doit pas dépasser 120 chaussures alors :

$X_1 + X_2 \leq 120$

- *Les contraintes des quantités vendues*

Chaussures de type A : $X_1 \leq 70$ c-à-d on ne produit pas plus que la quantité

Chaussures de type B : $X_2 \leq 100$ qu'on peut la vendre

- *La contrainte des heures de travail*

240 h de travail est possible pendant la semaine et puisque une paire de chaussures A et B nécessite respectivement 4 et 1 h de travail, ce qui va donner : $4X_1 + X_2 \leq 240$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned} Max: Z = 150X_1 + 50X_2 \\ X_1 + X_2 \leq 120 \\ X_1 \leq 70 \\ X_2 \leq 100 \\ 4X_1 + X_2 \leq 240 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Pour la résolution de ce modèle veuillez consulter le chapitre 3

Solution 2.6

Soient les variables de décision suivantes :

X_1 : le nombre de boites fabriquées de type 1 ;

X_2 : le nombre de boites fabriquées de type 2.

On a les contraintes suivantes :

– sur les m² de carton : $X_1 + 2X_2 \leq 10000$

– sur le temps d'assemblage en minutes : $2X_1 + 3X_2 \leq 200 * 60$

– sur le nombre d'agrafes : $X_1 + 4X_2 \leq 15000$

La fonction objectif à maximiser correspond au chiffre d'affaires obtenu lors de la vente des cartons :

$Max: Z = 3X_1 + 5X_2$

On a donc le programme linéaire suivant :

$$Max: Z = 3X_1 + 5X_2$$

$$\text{S.c :} \quad \begin{aligned} X_1 + 2X_2 &\leq 10000 \\ 2X_1 + 3X_2 &\leq 12000 \\ X_1 + 4X_2 &\leq 15000 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour la résolution de ce modèle veuillez consulter le chapitre 3

Chapitre 3

3 La méthode graphique et la résolution d'un PL

3.1 Introduction

La méthode graphique est une méthode simple qui est basée sur la représentation graphique des droites. Cependant, son utilisation est limitée dans certains cas :

- Si le nombre de variables dépasse deux variables[1],
- Si le nombre de contraintes augmente d'une manière importante.

3.2 Traitements

Quand on veut représenter dans le plan les solutions de l'inéquation $3x + 3y \leq 150$, il y a deux astuces :

(1) on transforme l'inégalité pour qu'elle soit de l'une des 4 formes possibles : $y < ax + b$; $y > ax + b$; $y \leq ax + b$; $y \geq ax + b$.

Ici $3y \leq -3X + 150$ d'où $y \leq -x + 50$. On trace la droite d'équation $y = -x + 50$. L'ensemble des points M(x ; y) dont les coordonnées vérifient l'inéquation est le demi-plan fermé situé au dessous de la droite d'équation $y = -x + 50$, droite comprise.

(2) On trace la droite d'équation $3x + 3y = 150$. L'ensemble des points M(x ; y) dont les coordonnées vérifient l'inéquation est le demi-plan fermé situé au dessous de la droite d'équation $3x+3y = 150$, droite comprise. Pour la forme général ' $ax+by < c$; $ax+by > c$; $ax+by \leq c$; $ax+by \geq c$', la figure ci-dessous montre les cas possibles pour déterminer l'ensemble des solutions :

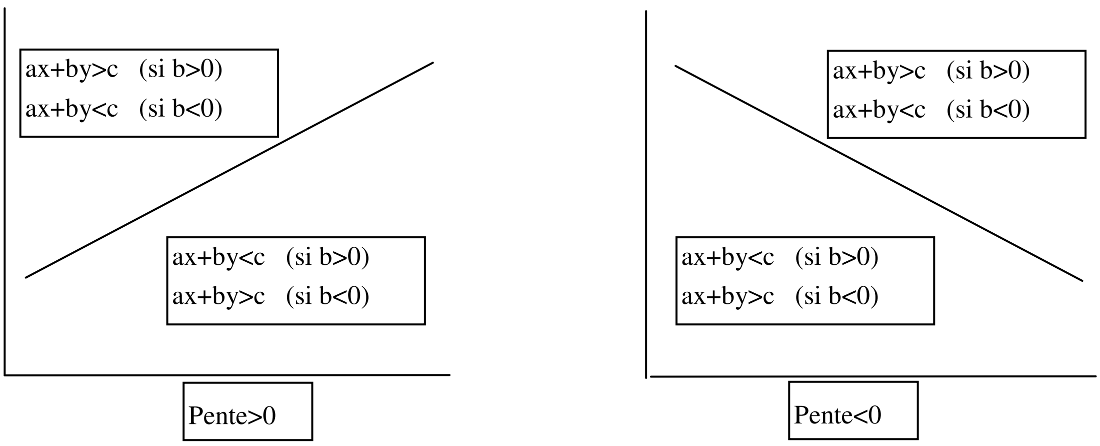


Figure 3-1 Solutions réalisables d'une inéquation selon la pente

[1] L'utilisation de la méthode graphique est possible dans le cas de trois variables (chaque contrainte est représenté graphiquement par un plan) et par la suite la solution réalisable si elle existe, elle est présentée par un volume.

En conséquence, pour déterminer les solutions d'un système d'inéquation à deux inconnues, il suffit de construire les droites correspondantes et les demi-plans qui désignent l'espace vérifiant chaque inéquation, l'intersection de tous les demi-plans est la représentation des solutions réalisables.

Ajoutant que pour la résolution d'un programme linéaire, il reste la recherche d'une solution optimale (qui est décrit par la fonction économique) parmi l'ensemble des solutions réalisables.

Prenons, par les deux astuces, l'exemple 2.5 du cours précédant :

Soit le modèle de PL suivant :

$$\begin{aligned} Max: Z &= 150X_1 + 50X_2 \\ X_1 + X_2 &\leq 120 \\ X_1 &\leq 70 \\ X_2 &\leq 100 \\ 4X_1 + X_2 &\leq 240 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Astuce 1 :

On fait isoler la variable X_2 du deux inéquations (1 et 4) :

$$\begin{cases} X_2 \leq -X_1 + 120 \\ X_1 \leq 70 \\ X_2 \leq 100 \\ X_2 \leq -4X_1 + 240 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il faut d'abord déterminer les couples (x, y) vérifiant le système.

– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \leq -X_1 + 120$ sont les points appartenant l'un des demi-plans délimités par la droite d'équation $X_2 = -X_1 + 120$. Le demi-plan convenable celui qui est au dessous de la droite (puisque il y a " $\leq$ ").

– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \leq 100$ sont les points appartenant au demi-plan qui est au dessous de la droite d'équation $X_2 = 100$ qui est parallèle à l'axe des abscisses.

– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_1 \leq 70$ sont les points appartenant au demi-plan qui est au dessous de la droite d'équation $X_1 = 70$ qui est parallèle à l'axe des ordonnées.

– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \leq -4X_1 + 240$ sont les points appartenant au demi-plan qui est au dessous de la droite d'équation $X_2 = -4X_1 + 240$

– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_1 \geq 0$ sont les points appartenant au demi-plan des abscisses positives,

– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \geq 0$ sont les points appartenant au demi-plan des ordonnées positives, On choisit de colorier en gris la partie qui ne convient pas.

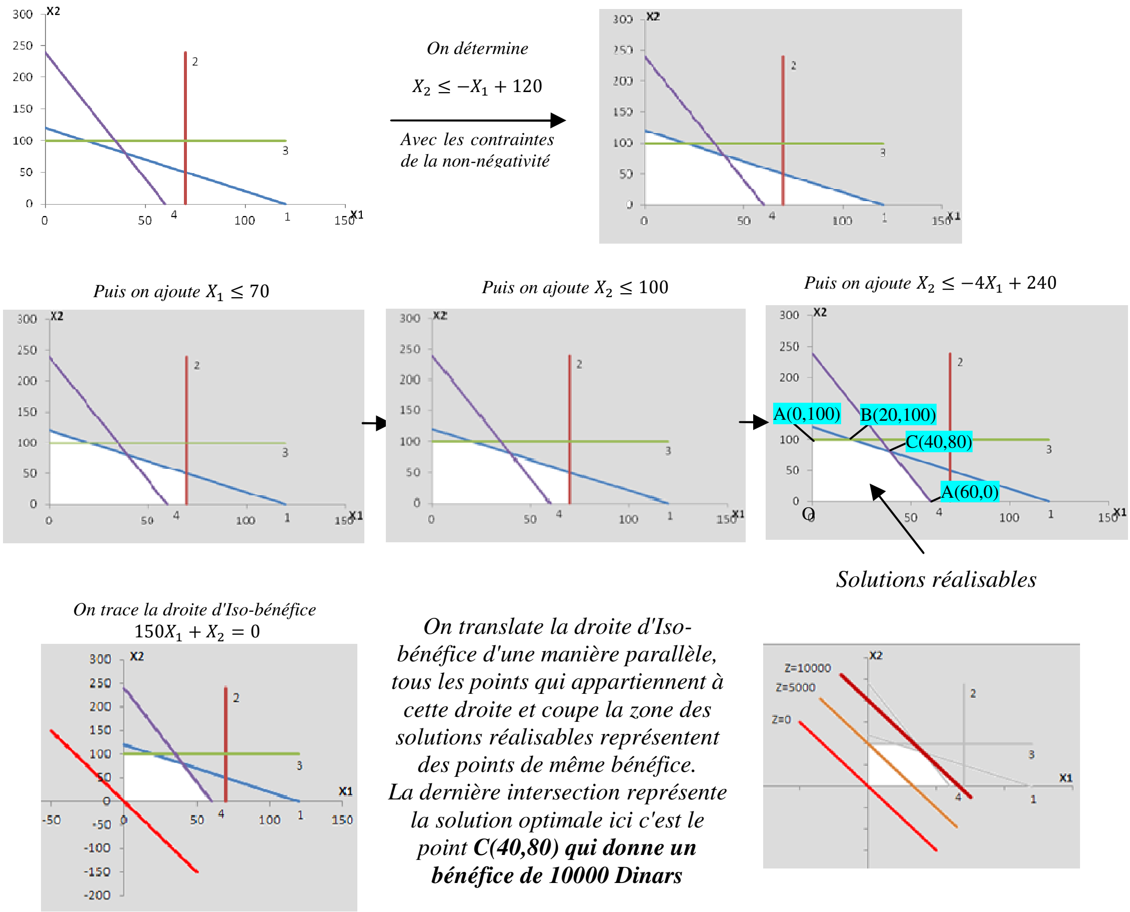


Figure 3-2 Etapes de la solution

Sur la figure ci-dessus, sont représentées les étapes de la résolution graphique du PL donné. La recherche de l'optimum a été basée sur la translation de la droite iso-bénéfice (purement graphique) quoi qu'il est possible avec les calculs ; alors si la solution optimale d'un PL existe, elle est aux bords de la zone des solutions réalisables. Pour la déterminer, il suffit de calculer la valeur de la fonction économique dans tous les coins d'espace des solutions réalisables et on retient la plus grande valeur dans le cas de maximisation et la plus petite pour la minimisation.

Astuce 2 : on trace les droites des quatre contraintes

$$X_1 + X_2 = 120$$
$$X_1 = 70$$
$$X_2 = 100$$
$$4X_1 + X_2 = 240$$

On se basant sur les informations présentées dans la figure 3.1 pour déterminer l'espace des solutions réalisables pour chaque contraintes et enfin la détermination des la solution optimale.

3.3 Cas particuliers

1. Si les contraintes du programme linéaire sont incompatibles, le polygone des solutions réalisables est vide : le programme linéaire n'a alors aucune solution
2. Si le polygone est ouvert vers le haut, un problème de maximisation n'a aucune solution car la droite de référence peut se déplacer indéfiniment vers le haut
3. La solution optimale, si elle existe, se trouve toujours sur un sommet du polygone
4. Si les coordonnées du point S trouvé comme solution ne sont pas entières, il faut alors chercher un point du polygone à coordonnées entières qui soit proche du point S
5. Si la droite de référence est parallèle à l'un des côtés du polygone, le problème a une infinité de solutions alternatives.

Les droites définissant le sommet correspondent à des ressources complètement utilisées, on les appelle ressources rares. Les autres ressources non utilisées complètement sont dites en surabondance.

3.4 Solution des exercices du chapitre précédant

Solution 2.1

Prenons, par les deux astuces, l'exemple 2.1 du cours précédant :

Soit le modèle de PL suivant : $Max: Z = 1200X_1 + 800X_2$

$$\begin{gathered} 9X_1 + 5X_2 \leq 2100 \\ 5X_1 + 7X_2 \leq 1900 \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 2500 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Utilisons l'astuce 1 :

On fait isoler la variable X_2 du trois inéquations :

$$\begin{cases} X_2 \leq -\frac{9}{5}X_1 + 420 \\ X_2 \leq -\frac{5}{7}X_1 + \frac{1900}{7} \\ X_2 \leq -\frac{2}{3}X_1 + \frac{2500}{3} \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il faut d'abord déterminer les couples (x, y) vérifiant le système.

– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \leq -\frac{9}{5}X_1 + 420$ sont les points appartenant l'un des demi-plans délimités par la droite d'équation $X_2 = -\frac{9}{5}X_1 + 420$. Le demi-plan convenable celui qui est au dessous de la droite (puisque il y a " $\leq$ ").
– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \leq -\frac{5}{7}X_1 + \frac{1900}{7}$ sont les points appartenant au demi-plan qui est au dessous de la droite d'équation $X_2 = -\frac{5}{7}X_1 + \frac{1900}{7}$
– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \leq -\frac{2}{3}X_1 + \frac{2500}{3}$ sont les points appartenant au demi-plan qui est au dessous de la droite d'équation $X_2 = -\frac{2}{3}X_1 + \frac{2500}{3}$
– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_1 \geq 0$ sont les points appartenant au demi-plan des abscisses positives,
– Les points de coordonnées (x, y) vérifiant l'inégalité $X_2 \geq 0$ sont les points appartenant au demi-plan des ordonnées positives,

On choisit de colorier en gris la partie qui ne convient pas.

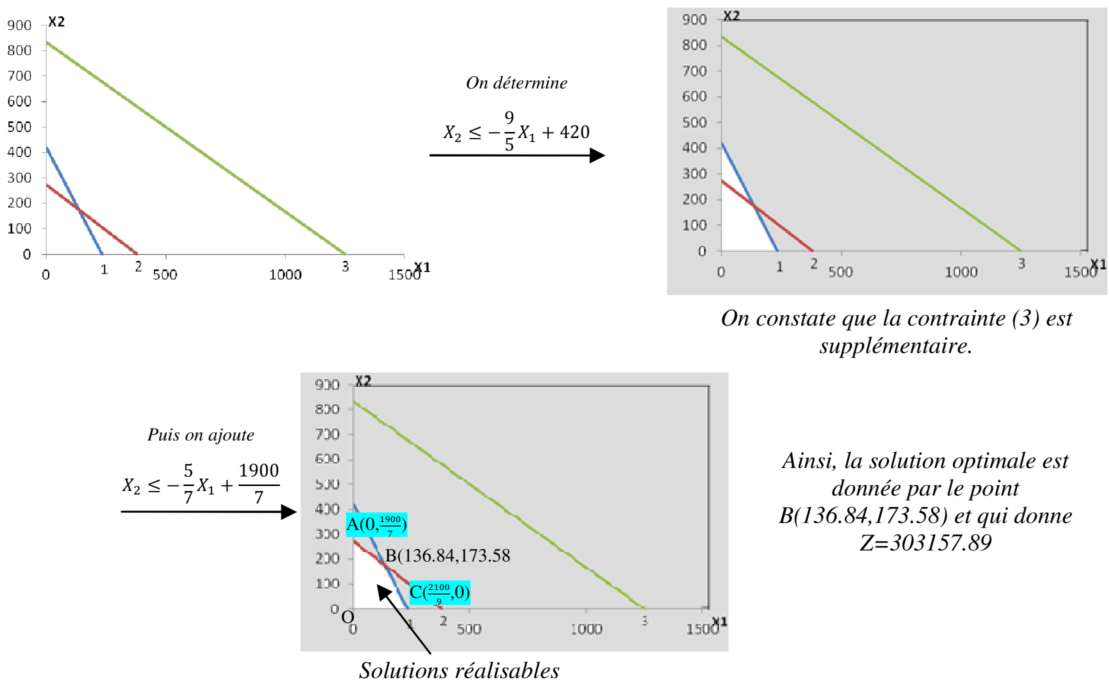


Figure 3-3 Etapes de la solution 2.1

On remarque que les valeurs de la solution optimale ne sont pas en nombres entiers.

Solution 2.2

L'objectif est de maximiser la valeur $Z = 30X_1 + 20X_2$ sous l'ensemble des contraintes :

$$X_1 + 2X_2 \leq 80$$
$$3X_1 + 3X_2 \leq 150$$
$$X_2 \leq 35$$
$$2X_1 + X_2 \leq 80$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

On trace les droites correspondantes aux quatre contraintes puis on détermine l'espace des points qui réalisent l'ensemble des contraintes. Les étapes de résolution sont décrites dans la figure ci-dessous :

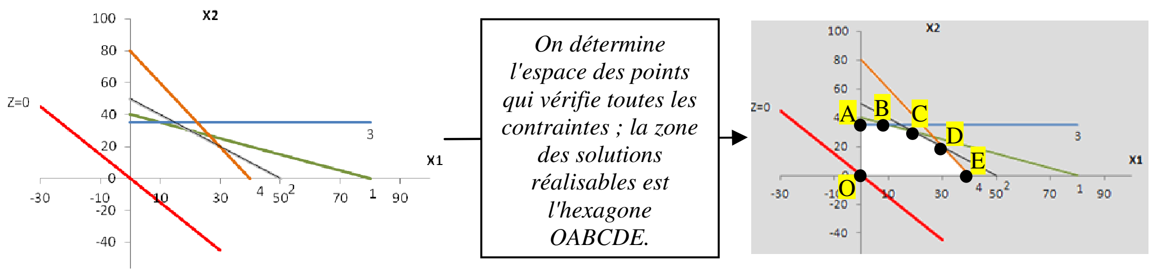


Figure 3-4 Résolution graphique du programme (2.2)

On détermine les coordonnées des coints du polygone : ABCDE.

<table>
<tr><th></th><th>X1</th><th>X2</th><th>Z</th><th></th></tr>
<tr><td>A</td><td>0</td><td>35</td><td>700</td><td rowspan="5">La plus grande valeur de la fonction économique est 1300 qui corresponds à la solution suivante : X_1=30, X_2=20.</td></tr>
<tr><td>B</td><td>10</td><td>35</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>C</td><td>20</td><td>30</td><td>1200</td></tr>
<tr><td>D</td><td>30</td><td>20</td><td>1300</td></tr>
<tr><td>E</td><td>40</td><td>0</td><td>1200</td></tr>
</table>

Solution 2.3

$$\begin{aligned} \text{Min: } W &= 19.40X_1 + 20X_2 \\ 0.36X_1 + 0.45X_2 &\geq 13500 \\ 0.41X_1 + 0.2X_2 &\geq 11200 \\ 0.16X_1 + 0.11X_2 &\geq 5000 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La résolution est présentée dans la figure suivante :

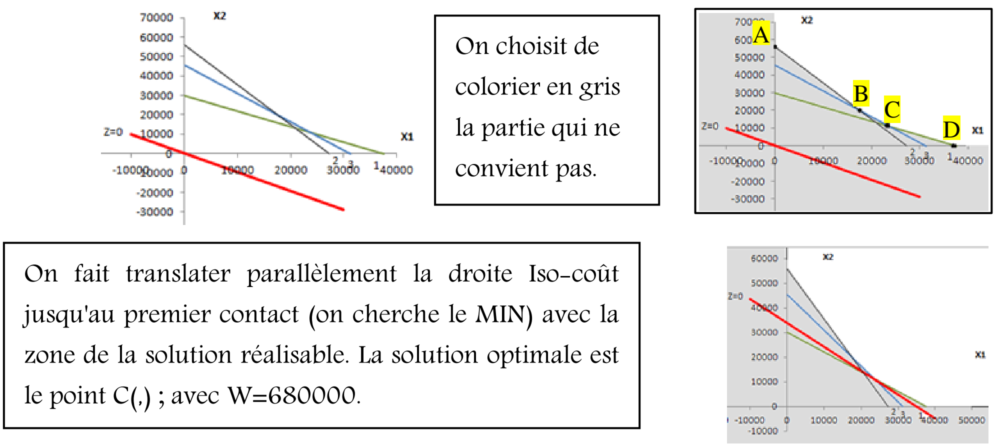
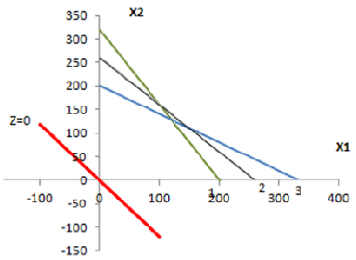


Figure 3-5 Solution graphique du problème (2.3)

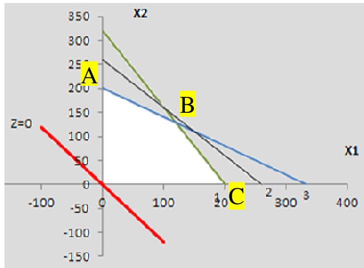
Solution 2.4

$Max: Z = 1.2X_1 + X_2$

$$\begin{gathered} 8X_1 + 5X_2 \leq 1600 \\ 2X_1 + 2X_2 \leq 520 \\ 15X_1 + 25X_2 \leq 5000 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{gathered}$$



On choisit de colorier en gris la partie qui ne convient pas.



On fait translater parallèlement la droite Iso-coût jusqu'au dernier contact (on cherche le MAX) avec la zone de la solution réalisable. La solution optimale est exprimée par le point B(120,128) ; avec Z=272.

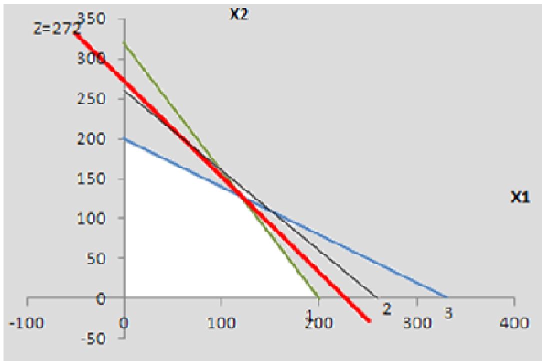


Figure 3-6 Solution graphique du problème (2.4)

Solution 2.6

Il suffit de représenter le domaine admissible D du programme linéaire et de trouver sur le bord de D le point qui maximise la fonction $3X_1 + 5X_2$, Ceci est fait sur la figure ci-contre, et l'on voit que le plan optimal consiste donc à produire 600 boites de type 1 ($x_1 = 600$) et 3600 boites de type 2 ($x_2 = 3600$), pour un chiffre d'affaires d'une valeur de 19 800 UM ($z = 19\ 800$).

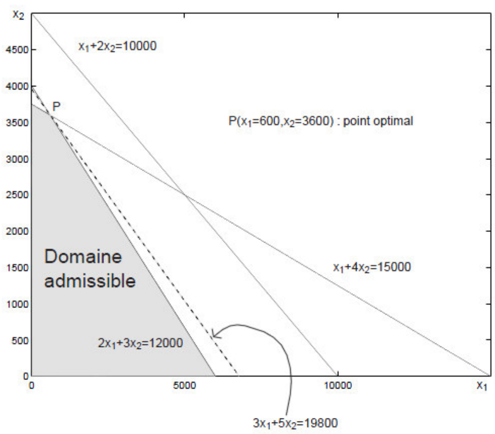


Figure 3-7 Résolution graphique (2.6)

Chapitre 4

4 La méthode du Simplexe

4.1 Introduction

Elle est développée par George Bernard Dantzig en 1947, c'est une procédure itérative qui permet d'améliorer la résolution de la fonction objectif à chaque étape. Le processus se termine lorsqu'on n'a pas de possibilité pour améliorer la valeur de la FE.

Il sera nécessaire de tenir compte que la méthode du Simplexe fonctionne uniquement avec les contraintes du problème dont les contraintes sont du type "<=" (inférieur ou égal) et ses coefficients indépendants sont supérieurs ou égaux à 0. Ainsi, les restrictions devraient être normalisées pour répondre à ces exigences avant de commencer l'algorithme du Simplexe. Dans le cas où les contraintes de type "≥" (supérieur ou égal) ou "=" (égal) apparaissent après ce processus, ou on ne peut pas les modifier, il sera nécessaire d'utiliser d'autres méthodes de résolution, étant la méthode de Deux Phases ou la méthode de pénalité (dite Big-M).

4.2 Principe de la méthode

L'algorithme du simplexe est basé sur la détermination d'une solution de base réalisable, ainsi plusieurs itérations sont déclenchées jusqu'au l'obtention de la solution optimale si elle existe. La première étape (solution de base) consiste à choisir un certain nombre de variables (qui est égale au nombre de contraintes) dites variables de base (VB).
Une variable de base doit vérifier deux conditions :

- Son coefficient dans la contrainte associée égale à "1",
- Son coefficient est nul dans les autres contraintes.

A chaque itération, on fait varier une seule VB par le choix d'une variable entrante (parmi les variables hors base) et une variable sortante (parmi les variables de base). Il est évident que le choix de ses deux types de variable n'est plus au hasard. Une variable entrante est une variable qui améliore le plus la valeur de FE (augmentation pour la maximisation et la diminution pour le cas de la minimisation). La variable sortante est la variable qui influence le moins.

4.3 Adaptation du modèle

L'utilisation de méthode du simplexe exige l'adaptation du modèle linéaire en un modèle d'équation mathématique dite *modèle standard* avec une fonction objectif à optimiser.

Le modèle standard doit accomplir les conditions suivantes :

1. L'objectif sera de maximiser ou minimiser la valeur de la fonction objectif (par exemple, augmenter les bénéfices ou réduire les pertes, respectivement).
2. Toutes les contraintes doivent être des équations d'égalité (identités mathématiques).
3. Toutes les variables (Xj) doivent être une valeur positive ou nulle (condition de non-négativité).
4. Les termes indépendants (bi) de chaque équation doivent être non négatifs.

Le modèle standard est donné sous sa forme générale par :

Fonction objectif : $Max: Z = c_1X_1 + \cdots + c_jX_j + \cdots + c_nX_n$

Ensemble de contraintes :

$$\begin{aligned}
&a_{11}X_1 + \cdots + a_{1j}X_j + \cdots + a_{1n}X_n + X^e_{n+1} = b_1 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{i1}X_1 + \cdots + a_{ij}X_j + \cdots + a_{in}X_n + X^e_{n+i} = b_i \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}X_1 + \cdots + a_{mj}X_j + \cdots + a_{mn}X_n + X^e_{n+m} = b_m \\
&\forall\, i,j\ ;\ X_j, X_{n+i} \geq 0 \ \ selon\ le\ cas\ de\ la\ non-négativité
\end{aligned}$$

Avec : X^e_{n+i} : variable d'écart associe à la contrainte i.
on suppose les contraintes du modèle linéaire sont des inéquation de type ≤,

Ainsi, le tableau du simplexe est présenté sous la forme suivante :

Variables →		X_1	–	X_j	–	X_n	X^e_{n+1}	–	X^e_{n+m}		↓ Coefficients des VB
Coefficients de la FE	Cj	C_1		C_j		C_n	0		0	Bi	Cbi
	X^e_{n+1}	a_{11}		a_{1j}		a_{1n}	1	–	0	b_1	Cj (X^e_{n+1})
		---		---		---	---		---	–	---
Variables de base	X^e_{n+i}	a_{i1}		a_{ij}		a_{in}	0	–	0	b_i	Cj (X^e_{n+i})
		---		---		---	---		---	–	---
	X^e_{n+m}	a_{m1}		a_{mj}		a_{mn}	0	–	1	b_m	Cj (X^e_{n+m})
Valeur de FE →	Z_j	Z_1		Z_j		Z_n	0		0	Z	
Coûts marginaux→	ΔZ	ΔZ_1		ΔZ_j		ΔZ_n	0		0	↑ Ressources disponibles	

Tableau 4-1 Présentation générale de tableau du simplexe

Depuis le tableau du simplexe, on peut retirer un certain nombre d'information :

- Les variables de base et ses valeurs : chaque VB est associe à une contrainte, ils sont inscris dans la première colonne du tableau (X_{n+1}^e, ..., X_{n+m}^e). La colonne Bi regroupe les valeurs des VB (b_1, ..., b_m).
- Les variables hors base : représentent le reste des variables qui ne se figurent pas sur la colonne des VB. Leurs valeurs est automatiquement remisent à zéro (0).
- La valeur de la fonction objectif : est inscris sur l'avant dernière ligne dans la case qui correspond à la colonne bi (Z).
- Les coûts marginaux : le coût marginal d'une variable hors base (VHB) représente l'effet sur la valeur optimale de la FE d'une augmentation unitaire de cette VHB. Il est donné que le coût marginal d'une VB est nul dans tous les cas. Ces valeurs sont inscrites sur la dernière ligne du tableau.
- La vérification du critère d'arrêt : c'est la condition d'optimalité qui est basée sur le signe des différentes valeurs des coûts marginaux selon le sens de la fonction objectif :
  1. Pour la maximisation : les coûts marginaux sont négatifs ou nuls.
  2. Pour la minimisation : les coûts marginaux sont positifs ou nuls.
- Les prix marginaux des contraintes[2] : représentent l'effet sur la valeur optimale de la FE d'une augmentation unitaire de la ressource disponible (bi) de cette contrainte.

4.4 Algorithme du simplexe

Prenant l'exemple suivant :

Max $z = 2X_1 + 3X_2$

s.c. $X_1 + 2X_2 \leq 20$

$X_1 + X_2 \leq 12$

$X_1, X_2 \geq 0$

sa forme standard est donnée par :

Max $z = 2X_1 + 3X_2$

s.c. $X_1 + 2X_2 + S_1 = 20$

$X_1 + X_2 + S_2 = 12$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

On à quatre variables et deux contraintes, selon l'algorithme du simplexe il faut choisir deux variables comme variables de base (qui vérifient les deux conditions de la section 4.2). Pour le présent cas les variables S_1 et S_2 sont les Variables de base.

Le tableau initial du simplexe :

	MAX	X_1	X_2	S_1	S_2		
Cj		2	3	0	0	Bi	Cbi
20/2=**10**	S_1	1	$\boxed{2}$	1	0	20	**0**
12/1=12	S_2	1	1	0	1	12	**0**
Zj		0	0	0	0	**0**	
		2	**3**	0	0		

[2] Plus de détails sur les prix marginaux seront développés dans le chapitre de l'analyse de sensibilité.

Les coûts marginaux des VHB sont positifs et du faite qu'on traite un problème de maximisation, Cela signifie qu'on a la possibilité d'améliorer la solution actuelle. Alors on applique les critères de Dantzig qui concerne le choix d'une variable entrante et autre sortante.

La variable entrante est la variable qui y a le plus grand coût marginal (ΔZ) parmi les valeurs positives, c'est la variable X_2 (désormais, la colonne de X_2 est dite **colonne pivot**).

La variable sortante est la variable qui minimise le quotient bi/a_{i2} (on divise seulement sur les valeurs positives) ; avec a_{i2} le coefficient de la variable entrante dans la contrainte i. ce qui résulte que la variable sortante est S_1 (la ligne de la variable S_1 est dite **ligne pivot**).

Le passage au tableau suivant se fait sur la base des règles suivantes :

- Les éléments de ligne pivot sont divisés par la valeur du pivot.
- Les éléments des autres lignes sont obtenus par :

  La nouvelle ligne = l'ancienne ligne – a_{i2}* la nouvelle ligne pivot (ici a_{22}=1 pour la ligne 2)

  c-à-d : [1 1 0 1 12]
  -(1)*[1/2 1 1/2 0 10]

  [1/2 0 -1/2 1 2]

MAX		X_1	X_2	S_1	S_2		
Cj		2	3	0	0	Bi	Cbi
20/2=**10**	X_2	1/2	1	1/2	0	10	**3**
12/1=12	S_2	1/2	0	-1/2	1	2	**0**
Zj		3/2	3	3/2	0	**30**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		1/2	**0**	-3/2	0		

Le coût marginal de la VHB X_1 est positif, cela signifie que la solution actuelle n'est plus optimale alors on passe par les mêmes règle à la $2^{ième}$ itération :

MAX		X_1↓	X_2	S_1	S_2		
Cj		2	3	0	0	Bi	Cbi
10/0.5=20	X_2	1/2	1	1/2	0	10	**3**
2/0.5=4	←S_2	1/2	0	-1/2	1	2	**0**
Zj		3/2	3	3/2	0	**30**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		1/2	**0**	-3/2	0		

Variable entrante (VE) : X_1

Variable sortante (VS) : S_1

	MAX	$X_1\downarrow$	X_2	S_1	S_2		
Cj		2	3	0	0	Bi	Cbi
	X_2	0	1	1	-1	8	**3**
	X_1	1	0	-1	2	4	**2**
Zj		2	3	1	1	**32**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	-1	-1		

Le critère d'arrêt est vérifie dans le tableau ci-dessus (les coûts marginaux sont négatifs ou nuls), ajoutant que X_1 et X_2 ont des valeurs positives (pas de contradiction avec la condition de la non-négativité) alors on dit que la solution actuelle est optimale avec : $X_1 = 4$, $X_2 = 8$, $Z = 32$. ($S_1 = 0$, $S_2 = 0$ signifie que les quantités disponibles des deux contraint ont été totalement consommées).

4.5 Cas particuliers

- Après le choix d'une variable entrante, s'il n'existe pas de variable sortante (les coefficients de toutes les VB dans la colonne pivot sont négatifs ou nuls) alors la solution est **non bornée**.
- Solution de base **dégénérée** si une ou plusieurs variables de base sont nulles (plus de bijection entre les solutions de base admissibles et les points extrêmes).
- La présence d'une variable entrante avec un coût marginal nul provoque une infinité de **solutions alternatives** (cela se justifié du faite que le changement des variables de base n'a pas modifié la valeur de la fonction objectif).

4.6 Exercices

Exercice 4.1 :

Soit le programme linéaire : **Max** $z = 2X_1 + 3X_2$

$$\begin{aligned} \textbf{s.c.} \quad & 2X_1 + 3X_2 \geq 10 \\ & X_1 \leq 30 \\ & X_2 \leq 20 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Résoudre le PL jusqu'au deuxième tableau du simplexe.
- La solution actuelle est-elle réalisable ? justifiez ?
- Est que la solution présentée dans le 2ième tableau est optimale ? pourquoi ?
- Déduire les valeurs des variables.
- Quelle est la valeur de la fonction objectif ?

Exercice 4.2 :

Résoudre avec la méthode du simplexe le PL suivant :

Max $z = 2X_1 + X_2$

s.c. $X_1 - 2X_2 \leq 2$

$-2X_1 + X_2 \leq 2$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Exercice 4.3 : résoudre le PL suivant avec la méthode du simplexe

Max $z = 2X_1 - X_2 + 3X_3$

s.c. $X_1 - X_2 + 5X_3 \leq 10$

$-4X_1 + 2X_2 - 6X_3 \geq -80$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Exercice 4.4 : résoudre le PL suivant avec la méthode du simplexe

Max $z = 3X_1 + 7X_2$

s.c. $2X_1 + 8X_2 \leq 16$

$2X_1 + 4X_2 \leq 8$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Solutions des exercices

Solution 4.1 :

La forme standard du programme linéaire est : **Max** $z = 2X_1 + 3X_2$

s.c. $-2X_1 - 3X_2 + S_1 = -10$

$X_1 + S_2 = 30$

$X_2 + S_3 = 20$

$X_1 , X_2 , S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Les deux premiers tableaux :

MAX		X_1	$X_2\downarrow$	S_1	S_2	S_3		
Cj		2	3	0	0	0	Bi	Cbi
/	S_1	-2	-3	1	0	0	-10	**0**
/	S_2	1	0	0	1	0	30	**0**
20/1=20	$\leftarrow S_3$	0	**1**	0	0	1	20	**0**
Zj		0	0	0	0	**0**	**0**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		2	3	0	0	0		

VE: X_2 (le plus grand coût marginal)
VS: S_3 (on ne tient pas en compte les coefficients négatifs ou nuls).
➔ le pivot = 1

		X_1	$X_2\downarrow$	S_1	S_2	S_3		
Cj		2	3	0	0	0	Bi	Cbi
/	S_1	-2	0	1	0	3	50	**0**
/	S_2	1	0	0	1	0	30	**0**
	X_2	0	1	0	0	1	20	**3**
Zj		0	3	0	0	3	**60**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		2	0	0	0	-3		

Appliquant les règles de transformation, on obtient le tableau ci-contre.
A ce moment, le critère d'arrêt n'est pas vérifie et puisque il est demandé uniquement les deux premiers tableaux, on s'arrête là.

- La solution actuelle est-elle réalisable ? justifiez ?

Oui, elle est réalisable puisque il n'y a aucune contradiction avec la condition de la négativité (**X_1=0, X_2=20**, S_1=50, S_2=30, S_3=0)

- Est que la solution présentée dans le 2ième tableau est optimale ? pourquoi ?

Elle n'est pas optimale parce qu'il reste un coût marginal positif (celui de X_1).

- Déduire les valeurs des variables.

Les valeurs des VB sont les valeurs correspondantes dans la colonne bi:

X_2=20, S_1=50, S_2=30,

Les VHB sont nulles :

X_1=0, S_3=0.

- Quelle est la valeur de la fonction objectif ?

la valeur de la fonction objectif est 60.

Solution 4.2 :

La forme standard est la suivante :

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Max } z = 2X_1 + X_2 \\
&\textbf{s.c.} \quad X_1 - 2X_2 + S_1 = 2 \\
&\qquad -2X_1 + X_2 + S_2 = 2 \\
&\qquad X_1,\ X_2,\ S_1,\ S_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

	MAX	**X_1↓**	**X_2**	**S_1**	**S_2**		
Cj		2	1	0	0	Bi	Cbi
2/1=2	**←S_1**	**1**	-2	1	0	2	**0**
/	**S_2**	-2	1	0	1	2	**0**
Zj		0	0	0	0	**0**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		2	1	0	0		

VE: X_1 (le plus grand coût marginal)
VS: S_1 (on ne tient pas en compte les coefficients négatifs).
➔ le pivot = 1

		X_1	**X_2↓**	**S_1**	**S_2**		
Cj		2	1	0	0	Bi	Cbi
/	**X_1**	**1**	-2	1	0	2	**2**
/	**S_2**	0	-3	2	1	6	**0**
Zj		2	-4	2	0	**4**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	5	-2	0		

Appliquant les règles de transformation, on obtient le tableau ci-contre.
A ce moment, le critère d'arrêt n'est pas vérifie alors on choisi la VE qui est X_2 MAIS le choix de la VS est impossible à cause des coefficients négatifs (-2 et -3) ;
➔ la solution est **non bornée**.

Solution 4.3 :

La forme standard est : **Max** $z = 2X_1 - X_2 + 3X_3$

s.c. $X_1 - X_2 + 5X_3 + S_1 = 10$

$4X_1 - 2X_2 + 6X_3 + S_2 = 80$

$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$

	MAX	X_1	X_2	X_3↓	S_1	S_2		
Cj		2	-1	3	0	0	Bi	Cbi
10/5=**2**	←S_1	1	-1	**5**	1	0	10	**0**
80/6=13.33	S_2	4	-2	6	0	1	80	**0**
Zj		0	0	0	0	0	**0**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		2	-1	3	0	0		

VE: X_3 (le plus grand coût marginal)
VS: S_1 (le plus petit quotient).
➔ le pivot = 5

		X_1↓	X_2	X_3	S_1	S_2		
Cj		2	-1	3	0	0	Bi	Cbi
2/1/5=**10**	←X_3	**1/5**	-1/5	1	1	0	2	**3**
68/14/5=24.2	S_2	14/5	-4/5	0	0	1	68	**0**
Zj		3/5	-3/5	3	3	0	**6**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		7/5	-2/5	0	-3	0		

Appliquant les règles de transformation, on obtient le tableau ci-contre.
A ce moment, le critère d'arrêt n'est pas vérifie alors on choisi la VE qui est X_1 ainsi, le choix de la VS qui est X_3 ;
➔ le pivot = 1/5.

		X_1	X_2↓	X_3	S_1	S_2		
Cj		2	-1	3	0	0	Bi	Cbi
10/5=**2**	X_1	1	-1	5	5	0	10	**2**
80/6=13.33	←S_2	0	**2**	-14	-14	1	40	**0**
Zj		2	-2	10	10	0	**0**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	1	-7	-10	0	20	

On continuant par le choix de la VE (X_2) et la VS (S_2), le pivot = 2 ;

		X_1↓	X_2	X_3	S_1	S_2		
Cj		2	-1	3	0	0	Bi	Cbi
2/1/5=**10**	X_1	**1**	0	-2	-2	1/2	30	**2**
68/14/5=24.2	X_2	0	1	-7	-7	1/2	20	**-1**
Zj		2	-1	3	3	1/2	**6**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	-3	-1/2		

On remarque qu'il y a une VHB (X_3) avec un coût marginal nul, cela signifie qu'il y a une infinité de **solutions alternatives**

Solution 4.4 : la forme standard est la suivante :

Max $z = 3X_1 + 7X_2$

s.c. $2X_1 + 8X_2 + S_1 = 16$

$2X_1 + 4X_2 + S_2 = 8$

$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

	MAX	X_1	X_2↓	S_1	S_2		
Cj		3	7	0	0	Bi	Cbi
16/8=**2**	←S_1	2	**8**	1	0	16	**0**
8/4=2	S_2	2	4	0	1	8	**0**
Zj		0	0	0	0	**0**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		3	7	0	0		

VE: X_2 (le plus grand coût marginal)
VS: ici, on a deux possibilité puisque les quotients sont les mêmes, notre choix c'est porté sur S_1.
➔ le pivot = 8

		X_1↓	**X_2**	**S_1**	**S_2**		
Cj		3	7	0	0	Bi	Cbi
2/1/4=8	**X_2**	1/4	1	1/8	0	2	**7**
0/1=**0**	**←S_2**	**1**	0	-1/2	1	0	**0**
Zj		7/4	7	7/8	0	**14**	
$\Delta Z_= C_j - Z_j$		5/4	0	-7/8	0		

		X_1	**X_2↓**	**S_1**	**S_2**		
Cj		3	7	0	0	Bi	Cbi
	X_2	0	1	1/4	-1/4	2	**7**
	X_1	1	0	-1/2	1	0	**3**
Zj		3	7	1/4	5/4	**14**	
$\Delta Z_= C_j - Z_j$		0	0	-1/4	-5/4		

Appliquant les règles de transformation, on obtient le tableau ci-contre.
A ce moment, le critère d'arrêt n'est pas vérifie alors on choisi la VE qui est X_1 ainsi, le choix de la VS qui est S_2 ;
➔ le pivot = 1.

Par la suite le critère d'arrét est vérifié, mais on remarque la valeur de la solution ($X_1=0$, $X_2=2$, $Z=14$) n'ont pas changé entre les deux derniers tableaux ➔ on dit que la solution est **dégénérée.** Cette situation résulte du faite qu'une contrainte est en suppliant.

Chapitre 5

5 La méthode du Pénalité et du deux Phases

5.1 Inconvénients de la méthode du simplexe

Les termes indépendants (bi) de chaque contrainte doivent être non négatifs afin d'utiliser la méthode du Simplexe. A cette fin, si certaines des contraintes présentent un terme indépendant négatif il faudra la multiplier par "-1" (en tenant compte du fait que cette opération affecte également au type de contrainte)

On peut trouver que dans les contraintes où on doit modifier les signes des constantes, les types d'inégalités sont "≤" (après l'opération, ils resteront du type "≥"), donc il sera nécessaire de développer d'autres méthodes. Cet inconvénient n'est pas maîtrisable, mais autrement il pourrait se produire dans le cas contraire et d'être bénéfique si les termes indépendants sont négatives dans toutes les contraintes d'inégalité de type "≥". S'il y a des contraintes du type "=" ils n'entraînent pas des avantages ou désavantages car il serait toujours nécessaire d'appliquer l'une des deux méthodes : la méthode des Deux Phases ou la méthode du pénalité (dite Big-M).

En résumé, il existe des cas où l'application du simplexe devient impossible à cause de deux points essentiels :

- S'il est impossible de déterminer les variables de base (pas de variables vérifient les conditions des VB),
- Si la solution n'est pas réalisable (il y a contradiction avec la condition de la non négativité).

5.2 Normalisation des contraintes

- **Contrainte de type (≤)** : Pour normaliser une contrainte d'inégalité du type " ≤", on ajoute une nouvelle variable positive, appelée variable d'écart X^e ou S_i. Cette nouvelle variable n'apparaît pas dans la fonction objectif du fait que c'est une variable qui exprime l'écart entre les deux cotés de l'inéquation (variable implicite).

$$a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1 \;\; \Rightarrow \;\; a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n + X^e = b_1$$

- **Contrainte de type (≥)** : Dans ce cas, on doit retrancher une quantité positive qui est représentée par une nouvelle variable appelée variable d'excès (ou d'écart tout simplement). Cette nouvelle variable n'apparaît pas dans la fonction objectif, Les inéquations contenant le type d'inégalité "≥" seraient :

$$a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \geq b_1 \;\; \Rightarrow \;\; a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n - X^e = b_1$$

Lors de la première itération de la méthode du Simplexe, il sera impossible de choisir les variables de base (la condition de non-négativité n'est plus vérifiée). On doit ajouter un autre variable X^R, appelée variable artificielle, qui apparaîtra dans la fonction objectif selon la méthode utilisée et en ajoutant dans la contrainte correspondante. Comme suit :

➔ $a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n - X^e + X^R = b_1$

- **Contrainte de type (=)** : Pour les contraintes de type "=" (malgré d'être des identités) on a également besoin d'ajouter des variables artificielles X^R afin de permettre le choix des VB. Logiquement cette opération est fausse (ajouter un plus dans une égalité !!), quoi qu'elle est obligatoire pour démarrer l'algorithme du simplexe mais il sera nécessaire d'assurer que ces variables artificielles ont une valeur nulle dans la solution finale. La contrainte se présente comme suit :

$a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1$ ➔ $a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n + X^R = b_1$

Lorsque les variables artificielles apparaissent sous forme standard ou canonique du problème, il sera évident qu'on fait appel à l'une des méthodes suivantes :

5.3 Méthode des deux phases

Elle est composée de deux phases ; la première phase vise à résoudre le problème auxiliaire W' qui est basé sur les variables artificielles afin de rendre la somme des variables artificielles nulle (dans le but d'éviter les incohérences[3] mathématiques). Après avoir résolu le premier problème, et tant qu'il est comme prévu le résultat, le tableau qui en résulte est réorganisé pour une utilisation dans la deuxième phase sur le problème d'origine. Sinon, le problème n'est pas faisable[4], c'est-à-dire, il n'y a pas de solution et il ne faudra pas continuer avec la deuxième phase.

Pour mieux comprendre les étapes de cette méthode, voici le PL suivant :

Min $W = 2X_1 + X_2$

s.c. $X_1 + 3X_2 \geq 30$

$4X_1 + 2X_2 \geq 40$

$X_1 , X_2 \geq 0$

ainsi, la forme standard est :

[***une nouvelle FE***]

s.c. $X_1 + 3X_2 - \mathbf{S_1} + \mathbf{R_1} = 30$

$4X_1 + 2X_2 - \mathbf{S_2} + \mathbf{R_2} = 40$

$X_1, X_2, R_1, R_2 \geq 0$

La première phase consiste à résoudre le PL tout en modifiant sa fonction objectif par une nouvelle fonction de minimisation qui est exprimé par la somme des variables artificielles ; c-à-d : Min[5] $W'=R_1+R_2$; les règles de calculs sont les mêmes que la méthode du simplexe sauf que pour cette phase, l'objectif de rendre nulle la valeur de W'.

[3] L'incohérence résulte du faite qu'on a ajouté des variables en plus aux contraintes de type égalité.

4 Si le critère d'arrêt est vérifié et l'une des variables artificielles à une valeur positive, alors le PL n'est plus réalisable

[5] Dans tous les cas, la nouvelle FE prend le sens de minimisation même si la FE origine a le sens de maximisation.

Phase 1

MIN		$X_1\downarrow$	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
Cj		0	0	0	0	1	1	**Bi**	**Cbi**
30/1=30	**R_1**	1	3	-1	0	1	0	30	**1**
40/4=**10**	**$\leftarrow R_2$**	**4**	2	0	-1	0	1	40	**1**
W'j		5	5	-1	-1	1	1	**70**	
$\Delta W' = C_j - W'_j$		-5	-5	1	1	0	0		

VE[6]: X_1
X_1: la FE sera réduite par (-5)*10=-50
X_2: la FE sera réduite par (-5)*10=-50
Avec: la valeur 10 présente le plus petit quotient résultant du choix de la VS.
VS: R_2. ➔ le pivot = 4

MIN		X_1	$X_2\downarrow$	S_1	S_2	R_1	R_2	Bi	Cbi
20/(5/2)=**8**	**$\leftarrow R_1$**	0	**5/2**	-1	1/4	1	-1/4	20	**1**
10/(1/2)=20	**X_1**	1	1/2	0	-1/4	0	1/4	10	**0**
W'j		0	5/2	-1	1/4	**1**	**-1/4**	**20**	
$\Delta W' = C_j - W'_j$		0	-5/2	1	-1/4	0	1/4		

VE : X_2 la valeur négative la plus petite du coût marginal.
VS : R_1 le plus petit quotient.
➔ le pivot = 5/2.

MIN		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Bi	Cbi
	X_2	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10	8	**0**
	X_1	1	0	1/5	-5/10	-1/5	3/10	6	**0**
W'j		0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	
$\Delta W' = C_j - W'_j$		0	0	0	0	-1	-1		

➔ Alors la valeur de la FE W' est nulle ce qui confirme que le PL à une solution et que le tableau ci-contre représente le tableau initial de la 2ième phase.

Phase 2

MIN		X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2		
Cj		2	1	0	0			**Bi**	**Cbi**
	X_2	0	1	-2/5	1/10			8	**1**
	X_1	1	0	1/5	-5/10			6	**2**
Wj		2	1	0	-1/2			**20**	
$\Delta W = C_j - W_j$		0	0	0	1/2				

➔ les valeurs du tableau ci-contre sont les mêmes que le tableau précédant sauf qu'on élimine les colonnes associée aux variables artificielles et on reprend les coefficients de la FE d'origine (W).

Le critère d'arrêt est vérifié (le cas de Min, tous les coûts marginaux sont positifs ou nuls), mais on remarque qu'une variable hors base (S1) avec un coût marginal nul ; cela signifie qu'il y a un ensemble de solutions optimales alternatives[7].

---

[6] Les deux variables X_1, X_2 ont le même coût marginal, par conséquence on peut déterminer la VE d'une manière facultative où bien on détermine la variable qui minimise le plus la FE.

7 Graphiquement, cet ensemble de points est situé sur la droite délimitée par les deux points : A(8,6) et B(0,20) et la valeur de la FE reste stable (W=20).

5.4 Méthode du pénalité (Big-M)

Le principe de calcul reste le même qu'avec la méthode du simplexe. Sauf qu'il faut s'assurer d'éliminer l'effet des variables artificielles (VA) sur la recherche de l'optimum de la FE. Pour cela, les VA sont ajoutées à la FE d'origine de la manière suivante :

(1) La FE est à maximiser : les variables artificielles reçoivent le même coefficient (-M).

(2) La FE est à minimiser : les variables artificielles reçoivent le même coefficient (+M).

Avec : M représente une très grande valeur (d'où vient les deux mots *Big-M* et *pénalité*).

Exemple : le cas de deux variables artificielles

Min $W = 2X_1 + X_2$ => **Min** $W = 2X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$

Max $Z = 2X_1 + X_2$ => **Max** $Z = 2X_1 + X_2 - MR_1 - MR_2$

Prenant le PL précédant :

Min $W = 2X_1 + X_2$
s.c. $X_1 + 3X_2 \geq 30$
$4X_1 + 2X_2 \geq 40$
$X_1 , X_2 \geq 0$

ainsi, sa forme standard est :

Min $W = 2X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$
s.c. $X_1 + 3X_2 - \mathbf{S_1} + \mathbf{R_1} = 30$
$4X_1 + 2X_2 - \mathbf{S_2} + \mathbf{R_2} = 40$
$X_1, X_2, R_1, R_2 \geq 0$

1	MIN	X_1	$X_2\downarrow$	S_1	S_2	R_1	R_2		
Cj		2	1	0	0	+M	+M	**Bi**	**Cbi**
30/3=**10**	$\leftarrow R_1$	1	**3**	-1	0	1	0	30	**+M**
40/2=20	R_2	4	2	0	-1	0	1	40	**+M**
W'j		5M	5M	-M	-M	M	M	**70M**	
$\Delta W'=C_j-W'_j$		2-5M	1-5M	M	M	0	0		
2	MIN	$X_1\downarrow$	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Bi**	**Cbi**
10/(1/3)=30	X_2	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10	**1**
20/(10/3)=**6**	$\leftarrow R_2$	**10/3**	0	2/3	-1	-2/3	1	20	**+M**
W'j		1/3+10/3M	1	-1/3+2/3M	-M	**1/3-2/3M**	**M**	**10+20M**	
$\Delta W'=C_j-W'_j$			0		M		0		
3	MIN	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Bi	Cbi
	X_2	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10	8	**1**
	X_1	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6	**2**
W'j		2	1	0	-1/2	**0**	**1/5**	**20**	
$\Delta W'=C_j-W'_j$		0	0	0	1/2	M	M-1/5		

Tous les coûts marginaux sont positifs ou nuls (critère d'arrêt vérifié) mais le coût marginal de la variable hors base S_1 est nul, c'est le cas de **solutions optimales alternatives**.

5.5 Exercices corrigés

Exercice 5.1

Il est donné le PL suivant :

- Vérifie si le PL a une solution ?
- Si oui, détermine-la sans résoudre le PL.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min} & W = 3X_1 + 2X_2 \\ \textbf{s.c.} & X_1 + X_2 \geq 2 \\ & 2X_1 + 3X_2 \leq 4 \\ & X_1 , X_2 \geq 0 \qquad [A] \end{array}$$

Exercice 5.2

Un problème de maximisation est présenté sous forme du PL suivant :

- Résoudre avec la méthode du pénalité ce PL.
- Expliquer économiquement la solution obtenue.

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & z = 4X_1 + 5X_2 \\ \textbf{s.c.} & -X_1 + 3X_2 \leq 2 \\ & X_1 + X_2 \geq 2 \\ & X_2 = 3 \\ & X_1 , X_2 \geq 0 \qquad [B] \end{array}$$

Exercice 5.3

On veut résoudre le PL ci-contre avec la méthode du deux phases :

- Déterminer la condition de choix de la variable entrante concernant la première phase. Justifier votre choix ?
- Résoudre le PL.
- La valeur de la FE, comment est elle variée (elle augmente ou elle diminue) ? pourquoi ?

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & z = 2X_1 + 3X_2 \\ \textbf{s.c.} & 5/2X_1 + 2X_2 \leq 5 \\ & 5X_1 + 4X_2 \geq 20 \\ & X_1 , X_2 \geq 0 \qquad [C] \end{array}$$

5.6 Exercices non corrigés

Exercice 5.4

- Déduire que le PL [D] n'a pas de solution ?
- Vérifier graphiquement la réponse ?
- Résoudre par la méthode du pénalité ou du deux phases les PL : [D] et [E]

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & z = 2X_1 + X_2 \\ \textbf{s.c.} & 3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ & 2X_1 + 3X_2 \geq 12 \\ & X_1 , X_2 \geq 0 \qquad [D] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min} & z = 2X_1 + 2X_2 + 6X_3 \\ \textbf{s.c.} & 2X_1 - 2X_2 - X_3 \leq 1 \\ & X_1 + 2X_2 \geq 1 \\ & X_1 , X_2 , X_3 \geq 0 \qquad [E] \end{array}$$

Exercice 5.5

Résoudre avec la méthode du deux phases puis de la méthode du pénalité les PL suivants :

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & z = 4X_1 + 14X_2 \\ \textbf{s.c.} & 2X_1 + 7X_2 \leq 21 \\ & 7X_1 + 2X_2 \geq 21 \\ & X_1 , X_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{Max} & z = X_1 - X_2 + X_3 \\ \textbf{s.c.} & 2X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 4 \\ & 2X_1 - 3X_2 + X_3 \leq -5 \\ & -X_1 + X_2 - 2X_3 \leq -1 \\ & X_1 , X_2 , X_3 \geq 0 \end{array}$$

Solutions des exercices

Solution 5.1 :

Il est donné le PL suivant :

$$\begin{aligned} \textbf{Min}\quad & W = 3X_1 + 2X_2 \\ \textbf{s.c.}\quad & X_1 + X_2 \geq 2 \\ & 2X_1 + 3X_2 \leq 4 \\ & X_1 , X_2 \geq 0 \qquad [A] \end{aligned}$$

- Si la solution du PL ci-contre existe, elle se trouve dans le premier quart de l'espace de représentation. Cela est justifier par le fait qu'on a deux variables X_1, X_2 et qui ont des valeurs positives (la condition de la non-négativité). De ce fait, il suffit de vérifier si les contraintes sont intersectées dans le premier quart :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 2 \\ 2X_1 + 3X_2 = 4 \end{cases} \quad \text{cela donne : } X_1 = 2 \text{ , } X_2 = 0$$

- Puisque il est demande de déterminer la solution optimale sans résoudre le PL, on va vous présenter cette astuce : les pentes des droites représentent les deux contraintes sont respectivement $P_1=-1$, $P_2=-2/3$ et puisque (1) les deux contraintes sont opposées, (2) la contrainte ayant la plus grande valeur de pente est exprimée en inégalité de type (≤), (3) l'intersection est située sur l'axe des abscisses ; on déduit que la solution optimale est bien le point d'intersection ($X_1 = 2$, $X_2 = 0$).

Solution 5.2 :

- La forme standard du PL est donnée par :

$$\begin{aligned} \textbf{Max}\ & z = 4X_1 + 5X_2 - MR_1 - MR_2 \\ \textbf{s.c.}\ & -X_1 + 3X_2 + S_1 = 2 \\ & X_1 + X_2 - S_2 + R_1 = 2 \\ & X_2 + R_2 = 3 \\ & X_1, X_2, S_1, S_2, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1	MAX	X_1	$X_2\downarrow$	S_1	S_2	R_1	R_2		
Cj		4	5	0	0	-M	-M	**Bi**	**Cbi**
2/3	$\leftarrow$**S_1**	-1	**3**	1	0	0	0	2	**0**
2/1=2	**R_1**	1	1	0	-1	1	0	2	**-M**
3/1=3	**R_2**	0	1	0	0	0	1	3	**-M**
Zj		**-M**	**-2M**	**0**	**M**	**-M**	**-M**	**-5M**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		4+M	5+2M	0	-M	0	0		

2	MAX	$X_1\downarrow$	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	**Bi**	**Cbi**
/	**X_2**	-1/3	1	1/3	0	0	0	2/3	**5**
(4/3)/(4/3)=**1**	$\leftarrow$**R_1**	**4/3**	0	-1/3	-1	1	0	4/3	**-M**
(7/3)/(1/3)=7	**R_2**	1/3	0	-1/3	0	0	1	7/3	**-M**
Zj		**-5/3+5/3M**	**5**	**5/3+2/3M**	**M**	**-M**	**-M**	**1**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$			0	-	-M	0	0		

3	MAX	X_1	X_2	S_1	$S_2\downarrow$	R_1	R_2	Bi	Cbi
/	X_2	0	1	1/4	-1/4	2/5	0	1	**5**
/	X_1	1	0	-1/4	-3/4	-1/5	0	1	**4**
2/(1/4)=**8**	$\leftarrow R_2$	0	0	-1/4	**1/4**	-1/4	1	2	**-M**
Zj		4	5				**-M**	**9-2M**	
$\Delta Z=C_j-Z_j$		0	0				0		

4	MAX	X_1	X_2	$S_1\downarrow$	S_2	R_1	R_2	Bi	Cbi
/	X_2	0	1	0	0	0	0	3	**5**
/	X_1	1	0	-1	0	0	0	7	**4**
/	S_2	0	0	-1	1	-1	4	8	**0**
Zj		4	5	-4	0	**0**	**0**	**43**	
$\Delta Z=C_j-Z_j$		0	0	4	0	-M	-M		

Dans le tableau n°4, la variable S_1 est choisie comme variable entrante mais il est impossible de choisir la variable sortante donc c'est le cas de **solution non bornée**.

- La solution obtenue est exprimée en sept unités de X_1 et trois unités de X_2 qui donne un gain de 43. Mais réellement cette solution représente la plus petite valeur de la FE c-à-d puisque l'espace des solutions réalisables n'est pas borné du coté haut on peut avoir d'autres solutions qui donnent une valeur plus grande de la FE. Par conséquence, le décideur seul a les capacités (pouvoir, expérience...) de déterminer le niveau maximal qui pourra atteindre selon l'existant.

Solution 5.3 :

- Pour l'utilisation de la méthode du deux phase, on définit une fonction économique exprimée par la somme des variables artificielles. Pour déterminer la condition de choix de la variable entrante concernant la première phase, il est à noter que le sens de préférence de la nouvelle fonction sera la minimisation dans tous les cas, même si la FE d'origine est à maximiser (comme dans ce cas). Par conséquence, la variable entrante est celle qui a la plus petite valeur négative parmi les valeurs négatives des coûts marginaux.

Cette condition est justifiée par le fait que l'objectif de la première phase est de faire sortir les variables artificielles de la base c-à-d la valeur de la nouvelle FE sera nulle, la raison pour laquelle on déduit que le PL reçoit une solution.

- La forme standard est :.

On définit une nouvelle FE qui représente la somme des variables artificielles.

$$\begin{aligned}
&\textbf{Min } W' = R_1\\
&\textbf{s.c.}\quad 5/2X_1 + 2X_2 + S_1 = 5\\
&\qquad 5X_1 + 4X_2 - S_2 + R_1 = 20\\
&\qquad X_1\,,\, X_2\,,\,,\, S_1,\, S_2\,,\, R_1 \geq 0 \qquad [C]
\end{aligned}$$

1	MIN	**X_1**	**X_2↓**	**S_1**	**S_2**	**R_1**		
Cj		0	0	0	0	1	**Bi**	**Cbi**
5/(5/2)=**2**	**←S_1**	**5/2**	**2**	1	0	0	5	**0**
20/5=4	**R_1**	5	4	0	-1	1	20	**1**
W'j		**5**	**4**	**0**	**-1**	**1**	**20**	
$\Delta W'$=C_j-W'_j		-5	-4	0	1	0		
2	MIN	**X_1↓**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**R_1**	**Bi**	**Cbi**
/	**X_2**	1	4/5	2/5	0	0	2	**0**
/	**R_1**	**0**	-1	-2/5	-1	1	10	**1**
Wj		**0**	**-1**	**-2/5**	**-1**	**1**	**10**	
$\Delta W'$=C_j-W'_j		0	1	2/5	1	0		

Tous les coûts marginaux sont positifs ou nuls donc il n'y a pas de variables qui minimisent la FE ; c'est la fin de la première phase. Mais on remarque qu'il y a une variable artificielle qui n'est pas nulle (R_1=10) cela implique que le PL n'a pas de solution.

- Pour la première phase la valeur de la FE est en diminution (20 puis 10), parce que l'algorithme de cette méthode vise à rendre nulles toutes les variables artificielles dans la première phase afin de corriger les suppliant qui a été ajouté au départ.

Chapitre 6

6 Programme Dual.

6.1 Illustration économique [8]

(a) Une famille utilise 6 produits alimentaires comme source de vitamine A et C

	Produits (unité/kg)						Demande (unité)
	1	2	3	4	5	6	
Vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
Vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
Prix par Kg	35	30	60	50	27	22	

Le but est de : satisfaire les besoins en vitamines avec un coût total minimum.

(b) Un vendeur de produit veut convaincre la famille d'acheter ses produits.

Quel prix de vente W_A et W_C ?

- pour être compétitif (aux produits alimentaires)
- et maximiser le profit.

On peut généraliser la situation des deux cas 'a' et 'b' comme suit :

Problème primal (demandeur de produit) : quelle quantité Xi de ressource i acheter pour satisfaire la demande à coût minimum ?

$$\min(b_i * X_i) \qquad \text{S.C} : a_{ij}X_i \geq C_j \quad \forall j$$

Problème dual (vendeur de produit) : à quel prix proposer les produits pour maximiser le profit tout en restant compétitif ?

$$\max(C_j * Y_j) \qquad \text{S.C} : a_{ji}Y_j \geq b_i \quad \forall i$$

6.2 Étapes de transformation

1. Le sens de préférence de la FE sera inversé (Max→Min et vice-versa).
2. Les coefficients de la FE du primal représentent les termes indépendants des contraintes (bi).
3. Les valeurs des termes indépendants du primal représentent les coefficients de la FE du dual.
4. Le transposé de la matrice des coefficients associés aux contraintes du primal représente les coefficients des variables du dual.

[8] Exemple tiré de "Cours de recherche opérationnelle" Nadia Brauner.

5. Les contraintes du dual seront représentées par des inéquations ($\leq$, $\geq$) ou égalités (=) selon la condition de la non-négativité du primal.

6. La condition de la non-négativité du dual est basée sur le type ($\leq$, $\geq$, =) des contraintes du primal.

Alors les liens entre le programme primal et son dual sont les suivants :

Programme primal	Programme dual
Maximisation	Minimisation
n variables	*n* contraintes
m contraintes	*m* variables
Aij	A^T =Aji
Cj	Bi
Bi	Cj
Contraintes $\leq$	variables $\geq$
variables $\geq$	contraintes $\geq$
contraintes =	variables libres
variables libres	contraintes =

Exemple 1 : soit le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned} &\textbf{Min } W = 4X_1 + X_2 \\ &\textbf{s.c. } 30X_1 + 10X_2 \geq 100 \\ &\quad 125X_1 + 12X_2 \geq 200 \\ &\quad 120X_1 + 15X_2 \geq 150 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

L'écriture de son dual passe par les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} &\textbf{Min } W = 4X_1 + X_2 && \textbf{PRIMAL} \\ &\textbf{s.c. } 30X_1 + 10X_2 \geq 100 && \ldots Y_1 \\ &\quad 125X_1 + 12X_2 \geq 200 && \ldots Y_2 \\ &\quad 120X_1 + 15X_2 \geq 150 && \ldots Y_3 \\ &\quad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Le nombre de variables du dual est trois (Y_1, Y_2, Y_3) → c'est le nombre des contraintes du primal.
- X_1 et X_2 sont positives → toutes les contraintes du dual sont des inéquations de type ($\leq$ puisque les contraintes du primal sont de type $\geq$)
- Le sens de préférence de la FE est Max.
- Les coefficients de FE sont les valeurs des termes indépendants du primal (100, 200, 150).
- Les termes indépendants du dual sont les coefficients de la FE du primal (4, 1).

$$\begin{aligned} &\textbf{Max } Z = 100Y_1 + 200Y_2 + 150Y_3 && \textbf{DUAL} \\ &\textbf{s.c. } 30X_1 + 125Y_2 + 120Y_3 \leq 4 && \ldots X_1 \\ &\quad 10X_1 + 12Y_2 + 15Y_3 \leq 1 && \ldots X_2 \\ &\quad Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- Les coefficients des contraintes du dual sont obtenus à partir du transposé de la matrice des coefficients des contraintes du primal.
- Toutes les contraintes du primal sont des inéquations → la condition de non-négativité est imposée pour toutes les variables du dual.

Exemple 2 : soit le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4 \quad \textbf{PRIMAL}\\
&\textbf{s.c.} \quad 3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18\\
&\qquad 5X_1 + 6X_3 = 20\\
&\qquad X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9\\
&\qquad X_1, X_2, X_4 \geq 0\\
&\qquad X_3 <> 0 \text{ (signe libre)}
\end{aligned}$$

Avant de commencer, il tenir en compte de ces remarques :

- Il faut d'abord uniformiser les contraintes de type inéquation en ≤ puisque la FE est Max.
- La deuxième contrainte est une équation
- La variable X_3 est en signe libre.

Ainsi, voici les étapes de la transformation :

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4 \quad \textbf{PRIMAL}\\
&\textbf{s.c.} \quad 3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18 \quad \ldots Y_1\\
&\qquad 5X_1 + 6X_3 = 20 \quad \ldots Y_2\\
&\qquad - X_1 + X_2 - 4X_3 - X_4 \leq -9 \quad \ldots Y_3\\
&\qquad X_1, X_2, X_4 \geq 0\\
&\qquad X_3 <> 0 \text{ (en signe libre)}
\end{aligned}$$

- Le nombre de variables du dual est trois (Y_1, Y_2, Y_3) → c'est le nombre des contraintes du primal.
- Le nombre de contraintes du dual est quatre→ c'est le nombre de variables du primal.
- X_1, X_2 et X_4 sont positives → les contraintes correspondantes dans le dual sont des inéquations de type (≥ puisque les contraintes du primal sont de type ≤)
- Le sens de préférence de la FE est Min.
- Les coefficients de FE sont les valeurs des termes indépendants du primal (18, 20, -9).

- Les termes indépendants du dual sont les coefficients de la FE du primal (1, 1, -1, -1).
- Les coefficients des contraintes du dual sont obtenus à partir du transposé de la matrice des coefficients des contraintes du primal.
- La troisième contrainte du dual est une équation parce que la variable X_3 du primal est en signe libre.

$$\begin{aligned}
&\textbf{Min } W = 18Y_1 + 20Y_2 - 9Y_3 \quad \textbf{DUAL}\\
&\textbf{s.c.} \quad 3Y_1 + 5Y_2 - Y_3 \geq 1 \quad \ldots X_1\\
&\qquad -2Y_1 + Y_3 \geq 1 \quad \ldots X_2\\
&\qquad Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 = -1 \quad \ldots X_3\\
&\qquad 5Y_1 - Y_3 \geq -1 \quad \ldots X_4\\
&\qquad Y_1, Y_3 \geq 0\\
&\qquad Y_2 <> 0 \text{ (en signe libre)}
\end{aligned}$$

- La variable Y_2 est en signe libre puisque la contrainte correspondantes dans le primal est une équation.
- Les variables Y_1, Y_2 sont non-négatives puisque leurs contraintes correspondantes dans le primal sont des inéquations.

6.3 Conditions de dualité

Selon la forme générale des PL, on peut les classer en trois ensembles :

Ensemble 1 :

Soit les PL ci-contre :

Max Z = $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
s.c. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \; ; i = 1, \ldots, m$
$X_j \geq 0 \; ; j = 1, \ldots, n$

PRIMAL (I)

Min W = $\sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$
s.c. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} Y_i \geq C_j \; ; j = 1, \ldots, n$
$Y_i \leq\geq 0 \; ; i = 1, \ldots, m$

DUAL (II)

Ces deux PL sont duaux et en conséquence, d'une part, s'il existe une solution au programme I, on trouve une solution au programme II par l'écriture de ses m inéquations (qui correspondent aux VB) sous forme des équations, et d'autre part, s'il existe une solution au programme II, on trouve une solution au programme I par la détermination d'une base regroupant m variables correspondent aux m inéquations exprimées sous forme des équations.

La conversion des inéquations en équations en utilisant les variables d'écart donne :

Max Z = $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
s.c. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \; ; i = 1, \ldots, m$
$X_i \geq 0 \; ; j = 1, \ldots, n$

PRIMAL (I)

Min W = $\sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$
s.c. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} Y_i - Y_{m+j} = C_j \; ; j = 1, \ldots, n$
$Y_i \leq\geq 0 \, , Y_{m+j} \geq 0 \; ; i = 1, \ldots, m$

DUAL (II) sous sa forme standard

Ainsi les conditions de dualité sont les suivantes :

$\sum_{j=1}^{n} X_j Y_{m+j} = 0$ (1)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i$ (2)
$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} Y_i - Y_{m+j} = C_j$ (3)
$X_j \geq 0$ (4)
$Y_{m+j} \geq 0$ (5)

La première condition résulte du faite que si la variable d'écart $\boldsymbol{Y_{m+j}}$ est nulle (probablement variable hors base), la variable $\boldsymbol{X_j}$ne sera pas nulle (probablement variable de base) et vice versa. Les autres conditions résultent du deux PL (le primal et son dual).

Les mêmes conditions s'appliquent au cas suivant :

Min W = $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
s.c. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \; ; i = 1, \ldots, m$
$X_j \geq 0 \; ; j = 1, \ldots, n$

PRIMAL (I)

Max Z = $\sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$
s.c. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} Y_i \leq C_j \; ; j = 1, \ldots, n$
$Y_i \leq\geq 0 \; ; i = 1, \ldots, m$

DUAL (II)

Exercice 6.1 :

Le programme primal et son dual sont donnés comme suit :

Max Z = $5X_1 + 3X_2 - 4X_3$
s.c. $2X_1 + X_2 - X_3 = 2 \quad Y_1$
$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 7 \quad Y_2$
$X_j \geq 0 \quad ; \forall j$

PRIMAL (I)

Min W = $2Y_1 + 7Y_2$
s.c. $2Y_1 + Y_2 \geq 5 \quad X_1$
$Y_1 + 2Y_2 \geq 3 \quad X_2$
$-Y_1 + 3Y_2 \geq -4 \quad X_3$
$Y_i \leq\geq 0 \quad ; \forall i$

DUAL (II)

Si la solution optimal du primal est donnée par :

$\boldsymbol{Z^* = 5}$; $\boldsymbol{X_1 = 0\ (VHB)}$; $\boldsymbol{X_2 = 3\ (VB)}$; $\boldsymbol{X_3 = 1\ (VB)}$

- Déduire la solution optimale de son dual.

Solution 6.1 :

La forme standard du dual est :

Min W = $2Y_1 + 7Y_2$
s.c. $2Y_1 + Y_2 - \boldsymbol{Y_3} = 5 \quad X_1$
$Y_1 + 2Y_2 - \boldsymbol{Y_4} = 3 \quad X_2$
$-Y_1 + 3Y_2 - \boldsymbol{Y_5} = -4 \quad X_3$
$Y_i \geq 0 \quad ; \forall i$
$Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$ Variables d'écart

Selon la solution optimale du primal, les variables $\boldsymbol{X_2\ et\ X_3}$ sont des variables de base, alors selon la première condition de dualité les variables d'écart du dual associées aux contraintes correspondantes aux variables $\boldsymbol{X_2\ et\ X_3}$ reçoivent des valeurs nulles (VHB) donc : $\boldsymbol{Y_4 = Y_5 = 0}$ $(\boldsymbol{1})$. D'où : $\begin{cases} \boldsymbol{Y_1 + 2Y_2 = 3} \\ -Y_1 + 3Y_2 = -4 \end{cases}$ alors : $\boldsymbol{Y_1 = \frac{11}{3}}$; $\boldsymbol{Y_2 = -\frac{1}{3}}$

En remplaçant les deux valeurs dans la première contrainte :

$$2\left(\frac{11}{3}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right) - \boldsymbol{Y_3} = 5 \Rightarrow \boldsymbol{Y_3} = 2 \quad ; \quad W^* = 2\left(\frac{11}{3}\right) + 7\left(\frac{-1}{3}\right) = 5.$$

La solution optimale du dual est : $W^* = 5$; $Y_1 = \frac{11}{3}$; $Y_2 = -\frac{1}{3}$; $Y_3 = 2$; $Y_4 = Y_5 = 0$

Les valeurs des variables d'écart signifient que les quantités disponibles dans les contraintes 2 et 3 sont totalement exploitées, par contre il reste deux (02) unités non consommées de la première contrainte.

Exercice 6.2 :

Le programme primal et son dual sont donnés comme suit :

Min W = $3X_1 + 8X_2 + 5X_3$
s.c. $3X_1 + X_2 - 5X_3 = 1$ $\quad Y_1$
$X_1 + 2X_2 + X_3 = 1$ $\quad Y_2$
$X_j \geq 0 \quad ; \forall j$

PRIMAL (I)

Max Z = $Y_1 + Y_2$
s.c. $3Y_1 + Y_2 \leq 3$ $\quad X_1$
$Y_1 + 2Y_2 \leq 8$ $\quad X_2$
$-5Y_1 + Y_2 \leq 5$ $\quad X_3$
$Y_i \lesseqgtr 0 \quad ; \forall i$

DUAL (II)

La solution optimal du dual est donnée par :

$\boldsymbol{Y_1 = -\frac{1}{4}\ (VB);\ Y_2 = \frac{15}{4}\ (VB);\ Y_3 = Y_5 = 0\ (VHB)}$

- Donnez la valeur $\boldsymbol{Z^*}$ **et** $\boldsymbol{Y_4}$.
- Déduire la solution optimale du primal.

Solution 6.2 :

Par application numérique on trouve : $\boldsymbol{Z^* = -\frac{1}{4} + \frac{15}{4} = \frac{7}{2}}$

Pour la contrainte 2 on a : $\boldsymbol{Y_1 + 2Y_2 + Y_4 = 8 \iff Y_4 = 8 - Y_1 - 2Y_2 \iff Y_4 = \frac{3}{4}}$

Pour déduire la solution du primal, on a :

Puisque $Y_3\ et\ Y_5$ sont des variables hors base alors $X_1\ et\ X_3$ sont des variables de base. Ainsi, puisque le nombre de variable de base est le même que le nombre des contraintes ; le cas du primal est deux (02) variables ; alors la variable X_2 sera une variable hors base.

On remplace $X_2 = 0$ dans les deux contraintes du primal :

$$\begin{cases} 3X_1 - 5X_3 = 1 \\ X_1 + X_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow X_1 = \frac{3}{4}\ ;\ X_3 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad W^* = 3\left(\frac{3}{4}\right) + 8(0) + 5\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7}{2}$$

Ensemble 2 :

Soit les PL suivants :

Max Z = $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
s.c. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \quad ; i = 1, \dots, m$
$X_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, n$

PRIMAL (I)

Min W = $\sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$
s.c. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} Y_i \geq C_j \quad ; j = 1, \dots, n$
$Y_i \geq 0 \quad ; i = 1, \dots, m$

DUAL (II)

La transformation des inéquations en équations en utilisant les variables d'écart donne :

Max Z = $\sum_{j=1}^{n} C_j X_j$
s.c. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + X_{n+i} = b_i \quad ; i = 1, \dots, m$
$X_i \geq 0, X_{n+i} \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, n$

PRIMAL (I)

Min W = $\sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$
s.c. $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} Y_i - Y_{m+j} = C_j \quad ; j = 1, \dots, n$
$Y_i \geq 0, Y_{m+j} \geq 0 \quad ; i = 1, \dots, m$

DUAL (II) sous sa forme standard

Ainsi les conditions de dualité sont les suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} X_j Y_{m+j} = 0 \quad (1)$$
$$\sum_{i=1}^{m} Y_i X_{n+i} = 0 \quad (2)$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + X_{n+i} = b_i \quad (3)$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} Y_i - Y_{m+j} = C_j \quad (4)$$
$$X_j \geq 0 , Y_i \geq 0$$
$$Y_{m+j} \geq 0, X_{n+i} \geq 0 \quad (5)$$

Les deux premières conditions impliquent que si la variable d'écart $\boldsymbol{Y_{m+j}}$ est hors base, la variable $\boldsymbol{X_j}$ sera une variable de base et vice versa. Aussi on déduit que si la variable d'écart $\boldsymbol{X_{n+i}}$ est hors base, la variable $\boldsymbol{Y_i}$ sera une variable de base et réciproquement.

Exercice 6.3 :

Soit le programme linéaire suivant :

PRIMAL (I)

$$\begin{array}{llr} \textbf{Max } Z = & 2X_2 + X_3 & \\ \textbf{s.c.} & X_1 + X_2 + X_3 \leq 48 & Y_1 \\ & -7X_1 + 6X_2 - X_3 \leq 0 & Y_2 \\ & X_j \geq 0 \quad ; \forall j & \end{array}$$

- Ecrire son programme dual.

La solution optimal du primal est donnée par :

$$\boldsymbol{Z^* = \frac{384}{7}} \; ; \; \boldsymbol{X_1 = 0 \; (VHB)}; \; \boldsymbol{X_2 = \frac{48}{7} \; (VB)}; \; \boldsymbol{X_3 = \frac{288}{7} \; (VB)}$$

- Déduire la solution optimale de son dual.

Solution 6.3 :

Appliquant les règles de passage du primal au dual, voici le dual du programme donné :

$$\begin{array}{llr} \textbf{Min } W = & 48Y_1 & \\ \textbf{s.c.} & Y_1 - 7Y_2 \geq 0 & X_1 \\ & Y_1 + 6Y_2 \geq 2 & X_2 \\ & Y_1 - Y_2 \geq 1 & X_3 \\ & Y_i \geq 0 \quad ; \forall i & \end{array}$$

L'écriture du dual sous sa forme standard donne :

$$\begin{array}{llr} \textbf{Min } W = & 48Y_1 & \\ \textbf{s.c.} & Y_1 - 7Y_2 - \boldsymbol{Y_3} = 0 & X_1 \\ & Y_1 + 6Y_2 - \boldsymbol{Y_4} = 2 & X_2 \\ & Y_1 - Y_2 - \boldsymbol{Y_5} = 1 & X_3 \\ & Y_i \geq 0 \quad ; \forall i & \\ & Y_3 \geq 0, Y_4 \geq 0, Y_5 \geq 0 & \end{array}$$

Selon les deux premières conditions de dualité :

Il est donné que X_2, X_3 sont des variables de base cela signifie que les variables d'écart Y_4, Y_5 seront hors base à la solution optimale c-à-d $Y_4 = Y_5 = 0$, alors il suffit de résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} Y_1 - 7Y_2 - \boldsymbol{Y_3} = 0 \\ Y_1 + 6Y_2 = 2 \\ Y_1 - Y_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Y_3} = 1/7 \\ \boldsymbol{Y_1} = 8/7 \\ \boldsymbol{Y_2} = 1/7 \end{cases} \Rightarrow W^* = 48\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{384}{7}$$

et les conditions de dualité sont toutes vérifies.

Ensemble 3 :

Soit le PL ci-contre : Les contraintes sont sous forme des équations et des inéquations.

PRIMAL (I)

$$\begin{aligned}
\textbf{Max } Z = & \sum_{j=1}^{k} C_j X_j + \sum_{j=k+1}^{n} C_j X_j \\
\textbf{s.c. } & \sum_{j=1}^{k} a_{ij} X_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \ ; i = 1, \dots, L \\
& \sum_{j=1}^{k} a_{ij} X_j + \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \ ; i = L+1, \dots, m \\
& X_j \geq 0 \quad ; j = 1, \dots, k \\
& X_j \leq\geq 0 \quad ; j = k+1, \dots, n
\end{aligned}$$

Son dual est : Les contraintes sont aussi exprimées sous forme des équations et des inéquations <u>**MAIS**</u> sur la base de condition de la non négativité du primal.

DUAL (II)

$$\begin{aligned}
\textbf{Min } W = & \sum_{i=1}^{L} b_i Y_i + \sum_{i=L+1}^{m} b_i Y_i \\
\textbf{s.c. } & \sum_{i=1}^{L} a_{ji} Y_i + \sum_{i=L+1}^{m} a_{ji} Y_i \geq C_j \ ; j = 1, \dots, k \\
& \sum_{i=1}^{L} a_{ji} Y_i + \sum_{i=L+1}^{m} a_{ji} Y_i = C_j \ ; j = k+1, \dots, n \\
& Y_i \geq 0 \quad ; i = 1, \dots, L \\
& Y_i \leq\geq 0 \quad ; i = L+1, \dots, m
\end{aligned}$$

Les programmes I, II sont duaux et la résolution de l'un du deux conduit à déduire la solution de l'autre. On remarque que lors de l'écriture des contraintes du dual, la contrainte j s'écrit sous forme d'équation si la variable correspondant est en signe libre dans le primal (pas de condition de la non-négativité), dans le cas contraire la contrainte j s'écrit sous forme d'inéquation.

On constate aussi qu'une variable du dual n'est plus conditionnée par la contrainte de la non-négativité si elle correspond à une contrainte sous forme d'équation dans le primal. Tandis que la variable est soumise à la non-négativité si elle correspond à une contrainte sous forme d'inéquation.

Exercice 6.4 :

Soit le programme linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
\textbf{Min } W = & \ 2X_1 - 4X_2 + 11X_3 \\
\textbf{s.c. } & \ 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 1 \qquad Y_1 \\
& \ X_1 - X_2 + X_3 \geq 7 \qquad Y_2 \\
& -X_1 - X_2 + 2X_3 = 1 \qquad Y_3 \\
& \ X_j \geq 0 \quad ; \forall j = 1,3
\end{aligned}$$

Ecrire son programme dual.

La solution optimal du dual est donnée par :

$\boldsymbol{Y_2 = 3\ (VB);\ Y_3 = 1\ (VB);\ Y_5 = 6\ (VB)}$

- Déduire la solution optimale de du programme donné.

Solution 6.4 :

Le programme dual est le suivant :

$$\begin{aligned}
\textbf{Max } Z = & \ Y_1 + 7Y_2 + Y_3 \\
\textbf{s.c. } & \ 2Y_1 + Y_2 - Y_3 \leq 2 \qquad X_1 \\
& \ Y_1 - Y_2 - Y_3 = -4 \qquad X_2 \\
& \ Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \leq 11 \qquad X_3 \\
& \ Y_j \geq 0 \quad ; \forall i = 1,2
\end{aligned}$$

D'après la solution donnée, on déduit que les variables $\boldsymbol{Y_1}, \boldsymbol{Y_4}$ (variable d'écart de la première contrainte) sont des variables hors base.

La forme standard du programme primal donné est la suivante :

$$\begin{array}{lll}
\textbf{Min } W = 2X_1 - 4X_2 + 11X_3 & & \\
\textbf{s.c.} \quad 2X_1 + X_2 + X_3 - \boldsymbol{X_4} = 1 & & Y_1 \\
\quad X_1 - X_2 + X_3 - \boldsymbol{X_5} = 7 & & Y_2 \\
\quad -X_1 - X_2 + 2X_3 = 1 & & Y_3 \\
\quad X_j \geq 0 \quad ; \forall j = 1,3 & & \\
\quad \boldsymbol{X_4}, \boldsymbol{X_5} \geq 0 & &
\end{array}$$

$\boldsymbol{Y_2}$ est une variable de base $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{X_5} = \mathbf{0}$ (variable hors base)

$\boldsymbol{Y_5}$ est une variable de base $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{X_3} = \mathbf{0}$ (variable de base),

(A.N) :

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - \boldsymbol{X_4} = 1 \\ X_1 - X_2 = 7 \\ -X_1 - X_2 = 1 \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} \boldsymbol{X_4} = 1 \\ X_2 = -4 \\ X_1 = 3 \end{cases}$$

et $W^* = 2(3) - 4(-4) + 11(0) = 22$

Chapitre 7

7 La méthode Dual Simplexe.

La détermination de la solution finale d'un programme linéaire se réalise si deux conditions sont vérifiées à savoir :

- La solution doit être réalisable c.-à-d. elle doit vérifiée la contrainte de la non-négativité.
- La solution doit être optimale c.-à-d. le critère d'arrêt est vérifié (pas de variable entrante).

Alors que dans certains cas, la condition d'arrêt soit vérifiée (l'optimalité) mais la solution n'est plus réalisable à causse d'au moins une valeur négative de l'une des variable si cette dernière n'accepte pas les valeurs négative. Dans ce cas précis, l'algorithme du simplexe est limité puisque parmi les conditions de son application est que les coefficients indépendants associées aux contraintes doivent être positives. L'implication à d'autres principes vis-à-vis la faiblesse de l'algorithme du simplexe a donné naissance à une nouvelle méthode appelée **Dual Simplexe**.

Par la méthode dual simplexe, on traite le PL des deux cotés ; le coté du primal (pour atteindre le critère d'arrêt basé sur les coûts marginaux) et le coté du dual (pour que les variables de base ne reçoivent pas des valeurs en contradiction avec la contrainte de la non-négativité). Par conséquence, l'utilisateur de cette méthode doit choisir au départ le sens de traitement à savoir : **Primal puis dual** ou **dual puis primal** selon le cas.

(a) Primal puis dual : on traite le programme sur les deux cotés jusqu'à atteindre en premier le critère d'arrêt basé sur les coûts marginaux et en deuxième le critère de la réalisabilité de la solution (qui concerne les valeurs de bi).

(b) Dual puis primal : c'est le cas contraire du précédant ç.-à-d. on traite le programme sur les deux cotés jusqu'à atteindre en premier le critère de la réalisabilité et en deuxième le critère d'arrêt basé sur les coûts marginaux.

Prenant l'exemple du programme linéaire suivant pour exposé les différentes étapes de cette méthode :

Min W = $X_1 + 3X_2$
s.c. $X_1 - 2X_2 \leq 1$
$2X_1 + 3X_2 \geq 3$
$X_1, X_2 \geq 0$

La forme standard est :

Le but est d'ajouter les variables d'écart sans s'inquiéter aux valeurs négatives des Bi

Min W = $X_1 + 3X_2$
s.c. $X_1 - 2X_2 + \boldsymbol{X_3} = 1$
$-2X_1 - 3X_2 + \boldsymbol{X_4} = -3$
$X_1, X_2 \geq 0$

Le premier tableau du simplexe est donné comme suit :

	MIN	$X_1\downarrow$	X_2	S_1	S_2		
Cj		1	3	0	0	Bi	Cbi
	S_1	1	-2	1	0	1	**0**
	$\leftarrow S_2$	**<u>-2</u>**	-3	0	1	-3	**0**
Wj		0	0	0	0	**0**	
$\Delta W = C_j - W_j$		1	3	0	0		

Rappelons qu'on traite ici un problème de minimisation et on constate que le critère d'arrêt est déjà vérifié (les coûts marginaux ΔW sont tous positifs ou nuls (pas de question de traiter le coté Primal du programme). On remarque aussi que la valeur du variable d'écart S_2 est négative (doit obligatoirement être positive), donc il est claire qu'on doit régler d'abord le coté dual du problème (éliminer les valeurs négatives du Bi qui ont une contradiction avec la contrainte de la non-négativité).

Dans le cas du **dual-primal** –particulièrement pour la partie du dual- on doit déterminer la variable sortante (VS) en premier puis la variable entrante à la base. Pour se faire on suivre certaine logique :

La variable sortante est déterminée par : $Max\ \{b_i;\ \forall b_i \leq 0\}$; on doit choisir la variable correspond à la plus grande valeur de bi parmi les valeurs négatives seulement. Ce critère reste valable pour les cas de maximisation et de minimisation.

La variable entrante est déterminée par : $Min\ \left\{\left|\frac{\Delta w}{a_{kj}}\right|;\ \forall a_{kj} < 0\right\}$; on doit choisir la variable correspond à la plus petit quotient en valeur absolue des coûts marginaux sur les valeurs négatives de la ligne correspondante à la variable sortante. Ce critère est valable pour les cas de maximisation et de minimisation.

Pour le cas de cet exercice, la VS est X_1 (une seul valeur négative dans bi) et la VE est S_2 ($Min\ \left\{\left|\frac{1}{-2}\right|, \left|\frac{3}{-3}\right|\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$) donc le pivot reçoit la valeur (-2).

Appliquant les mêmes règles de passage d'une solution (tableau) à une autre présentées dans le chapitre 4 (la méthode du simplexe), voici le tableau suivant du simplexe :

MIN		X_1	$X_2\downarrow$	S_1	S_2		
Cj		1	3	0	0	Bi	Cbi
	$\leftarrow S_1$	0	**-7/2**	1	1/2	-1/2	**0**
	X_1	1	3/2	0	-1/2	3/2	**1**
Wj		1	3/2	0	-1/2	**3/2**	
ΔW=Cj-Wj		0	3/2	0	1/2		

On remarque qu'il y a aussi une valeur négative dans bi donc on continu le dual :
VS : S_1 (la seule valeur négative)
VE : X_2 (la seule valeur négative dans la ligne de pivot) ➔ pivot=-7/2

MIN		X_1	X_2	S_1	S_2		
Cj		1	3	0	0	Bi	Cbi
	X_2	0	1	-2/7	-1/7	1/7	**3**
	X_1	1	0	3/7	-2/7	9/7	**1**
Wj		1	3	-3/7	-5/7	**12/7**	
ΔW=Cj-Wj		0	0	3/7	5/7		

On remarque que toutes les valeurs de bi sont positives donc l'amélioration du dual est achevée. Passant maintenant au primal ; on constate que tous les coûts marginaux sont positifs ou nuls donc le critère d'arrêt du primal est vérifié. ➔ la solution est optimale

Remarque :

Dans le cas du traitement du dual, on constate que la variation de la fonction économique se fait d'une manière inverse ; pour la minimisation la valeur de la FE augmente et elle diminue pour la maximisation. Cela est justifié du fait que le traitement du dual ce n'est qu'une correction (ou amélioration) appliquée au programme linéaire pour rendre la solution réalisable (qu'elle n'a pas de contradiction avec la contrainte de la non-négativité).

Exercice 7.1

Résoudre avec la méthode dual simplexe (Primal-Dual et Dual-Primal) le PL suivant:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } Z = -6X_1 - 5X_2 + 2X_3 \\
&\textbf{s.c.} \quad -X_1 - X_2 + X_3 \le -2 \\
&\qquad -X_1 - 2X_2 - 3X_3 \ge -3 \\
&\qquad X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Solution 7.1

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } Z = -6X_1 - 5X_2 + 2X_3 \\
&\textbf{s.c.} \quad -X_1 - X_2 + X_3 \le -2 \\
&\qquad -X_1 - 2X_2 - 3X_3 \ge -3 \\
&\qquad X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

La forme standard est :

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } Z = -6X_1 - 5X_2 + 2X_3 \\
&\textbf{s.c.} \quad -X_1 - X_2 + X_3 + \boldsymbol{X_4} = -2 \\
&\qquad -X_1 - 2X_2 - 3X_3 + \boldsymbol{X_5} = -3 \\
&\qquad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0
\end{aligned}$$

Il est demandé de résoudre le PL par les des sens de la méthode dual simplexe :

(1). Primal-Dual :

Le premier tableau du simplexe est donné comme suit :

	MAX	X_1	X_2	$X_3\downarrow$	X_4	X_5		
Cj		-6	-5	2	0	0	Bi	Cbi
-2/1=**-2**	**←X_4**	-1	-1	**<u>1</u>**	1	0	-2	**0**
-	**X_5**	-1	-2	-3	0	1	-3	**0**
Zj		0	0	0	0	0	**0**	
$\Delta Z=C_j-Z_j$		-6	-5	2	0	0		

	MAX	X_1	$X_2\downarrow$	X_3	X_4	X_5		
Cj		-6	-5	2	0	0	Bi	Cbi
-2/1=**-2**	**←X_3**	-1	**<u>-1</u>**	1	1	0	-2	**2**
-	**X_5**	-4	-5	3	0	1	-9	**0**
Zj		-2	-2	2	2	0	**-4**	
$\Delta Z=C_j-Z_j$		-4	-3	0	-2	0		

	MAX	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
Cj		-6	-5	2	0	0	Bi	Cbi
	X_2	1	1	-1	-1	0	**2**	**-5**
	X_5	1	0	-5	-2	1	**1**	**0**
Zj		-5	-5	5	5	0	**-10**	
$\Delta Z=C_j-Z_j$		-1	0	-3	-5	0		

<u>Primal</u>
VE: X_2 (la plus grande valeur positive de ΔZ).
VS: pas de variable sortante (les valeurs de la colonne X_2 sont négatives).
VE[9]: X_3 (le plus grand après X_2)
VS: S_1 (la seule valeur positive)

<u>Primal</u>
Alors que les valeurs de ΔZ sont tous négatives ou nulles, le critère d'arrêt du primal est achevé.
On passe au **<u>Dual</u> :**
VS: X_3 (la plus grande valeur négative de bi).
VE: X_2 (Min $\left\{\left|\frac{-4}{-1}\right|,\left|\frac{-3}{-1}\right|\right\}$)

<u>Dual</u>
Toutes les valeurs de bi sont positives. En plus tous les coûts marginaux sont négatifs ou nuls donc c'est la solution optimale.

La solution est ainsi : $X_1=X_3=0$, $X_2=2$, $Z^*=-10$. ($X_5=1$ – ç.-à-d. qu'il une unité qui n'est consommée de la deuxième contrainte-, $X_4=0$ –la valeur disponible pour la première contrainte a été totalement consommée-).

(2). Dual-Primal :

	MAX	X_1	$X_2\downarrow$	X_3	X_4	X_5		
Cj		-6	-5	2	0	0	Bi	Cbi
-2/1=**-2**	**←X_4**	-1	**<u>-1</u>**	1	1	0	-2	**0**
-	**X_5**	-1	-2	-3	0	1	-3	**0**
Zj		0	0	0	0	0	**0**	
$\Delta Z=C_j-Z_j$		-6	-5	2	0	0		

	MAX	X_1	$X_2\downarrow$	X_3	X_4	X_5		
Cj		-6	-5	2	0	0	Bi	Cbi
	←X_2	1	1	-1	-1	0	**2**	**-5**
	X_5	1	0	-5	-2	1	**1**	**0**
Zj		-5	-5	5	5	0	**-10**	
$\Delta Z=C_j-Z_j$		-1	0	-3	-5	0		

<u>Dual</u>
VS: X_3 (la plus grande valeur négative de bi).
VE: X_2 (Min $\left\{\left|\frac{-6}{-1}\right|,\left|\frac{-5}{-1}\right|\right\}$)
➔Pivot=-1

<u>Dual</u>
Toutes les valeurs de bi sont positives. En plus tous les coûts marginaux sont négatifs ou nuls donc c'est la solution optimale.

[9] Dans le cas où le choix de la VS est impossible, on vérifie s'il y a une autre variable entrante et en détermine sa variable sortante sinon la solution sera non bornée si elle est réalisable.

Exercice 7.2

- Résoudre avec la méthode graphique le PL ci-dessous.
- Résoudre le avec la méthode dual simplexe (Primal-Dual ou Dual-Primal).
- Faite une comparaison entre la résolution avec les deux méthodes.

$$
\begin{aligned}
\textbf{Max}\ Z = {}& 2X_1 + X_2 \\
\textbf{s.c.}\quad & X_1 - 2X_2 \leq -1 \\
& X_2 \leq 2 \\
& -X_1 + X_2 \leq 1 \\
& -2X_1 + 6X_2 \leq 9 \\
& X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Ecrire son programme dual.
- Déduire sa solution optimale en se basant sur les conditions de dualité.

Solution 7.1

Résolution graphique : on représente graphiquement les droites correspondent aux contraintes puis on détermine l'ensemble de la solution réalisable du problème pour enfin définir la solution optimale si elle existe.

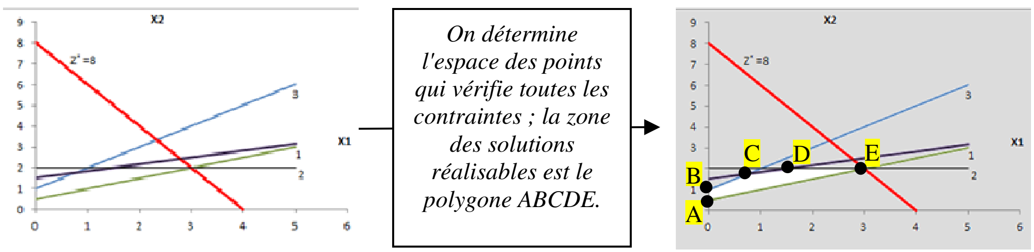


Figure 7.-71-Etapes de solution 7.1

D'après le tableau suivant, la solution optimale est représentée par le point E ; X1=3, X2=2, Z*=8.

Points	X_1	X_2	Valeur de FE
A	0	1/2	0.5
B	0	1	1
C	3/4	7/4	13/4
D	3/2	2	5
E	3	2	**8**

Résolution avec la méthode dual simplexe : la forme standard est comme suit :

$$\begin{aligned}
&\textbf{Max } Z = 2X_1 + X_2 \\
&\textbf{s.c.} \quad X_1 - 2X_2 + \boldsymbol{X_3} = -1 \\
&\qquad X_2 + \boldsymbol{X_4} = 2 \\
&\qquad -X_1 + X_2 + \boldsymbol{X_5} = 1 \\
&\qquad -2X_1 + 6X_2 + \boldsymbol{X_6} = 9 \\
&\qquad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0
\end{aligned}$$

Les étapes de résolution sont présentées sur les tableaux ci-dessous, on note ici qu'on va commencer par le dual :

	MAX	**X_1**	**X_2↓**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**		
Cj		2	1	0	0	0	0	Bi	Cbi
-	←**X_3**	1	**-2**	1	0	0	0	-1	**0**
-	**X_4**	0	1	0	1	0	0	2	**0**
-	**X_5**	-1	1	0	0	1	0	1	**0**
-	**X_6**	-2	6	0	0	0	1	9	**0**
Zj		0	0	0	0	0	**0**	**0**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		2	1	0	0	0			

Dual
VS: X_3 (la plus grande valeur négative de bi).
VE: X_2 (Min $\left\{\left|\frac{-5}{-2}\right|\right\}$)
➔Pivot=-2

	MAX	**X_1↓**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**		
Cj		2	1	0	0	0	0	Bi	Cbi
-	**X_2**	-1/2	1	-1/2	0	0	**0**	**1/2**	**1**
(3/2)/(1/2)=3	←**X_4**	**1/2**	0	1/2	1	0	**0**	**3/2**	**0**
-	**X_5**	-1/2	0	1/2	0	1	**0**	**1/2**	**0**
6/1=6	**X_6**	1	0	3	0	0	**1**	**6**	**0**
Zj		-1/2	1	-1/2	0	0	**0**	**1/2**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		5/2	0	1/2	0	0	0		

Dual
Toutes les valeurs de bi sont positives. En passe au **Primal**
VE: X_1
VS: X_4
➔Pivot=1/2

	MAX	**X_1↓**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**		
Cj		2	1	0	0	0	0	Bi	Cbi
-	**X_2**	0	1	0	1	0	**0**	**2**	**1**
(3/2)/(1/2)=3	←**X_1**	1	0	1	2	0	**0**	**3**	**2**
-	**X_5**	0	0	1	1	1	**0**	**2**	**0**
6/1=6	**X_6**	0	0	2	-2	0	**1**	**3**	**0**
Zj		2	1	2	5	0	**0**	**8**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	-2	-5	0	0		

Primal
Touts les coûts marginaux sont négatifs ou nuls. Donc la solution est optimale
$X_1=3$, $X_2=2$, $Z^*=8$

Comparaison : on remarque que chaque tableau du simplexe est représenté par un point sur graphe ; le tableau 1 représente l'origine O(0,0) du graphe puis l'algorithme du simplexe parcourt le périmètre de la zone des solutions réalisables du fait que le tableau 2 représente le point A(0,1/2). Ajoutant que les règles de passage d'un tableau à l'autre assurent le choix du bon sens (le plus court) vers la convergence de la solution.

Le programme dual :

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min } W = -Y_1 + 2Y_2 + Y_3 + 9Y_4 & \\ \textbf{s.c.} \quad Y_1 - Y_3 - 2Y_4 \geq 2 & X_1 \\ \quad -2Y_1 + Y_2 + Y_3 + 6Y_4 \geq 1 & X_2 \\ \quad Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{Min } W = -Y_1 + 2Y_2 + Y_3 + 9Y_4 & \\ \textbf{s.c.} \quad Y_1 - Y_3 - 2Y_4 - Y_5 = 2 & X_1 \\ \quad -2Y_1 + Y_2 + Y_3 + 6Y_4 - Y_6 = 1 & X_2 \\ \quad Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0 & \end{array}$$

Forme standard

La solution optimale du primal était : **X_1=3, X_2=2, X_5=2, X_6=3, Z^*=8, X_3=X_4=0 (VHB).**

X_1, X_2 sont des VB ➔ Y_5,Y_6 sont des VHB donc : $Y_5=Y_6=0$

X_5, X_6 sont des VB ➔ Y_3,Y_4 sont des VHB donc : $Y_3=Y_4=0$ remplaçant ces valeurs dans les contraintes, in nous reste :

$$\begin{array}{l} Y_1 = 2 \\ -2Y_1 + Y_2 = 1 \end{array} \quad \text{Donc:} \quad \begin{array}{l} Y_1 = 2 \\ Y_2 = 5 \end{array} \quad \text{et } W^*=8$$

Chapitre 8

8 Programmation en nombre entier

8.1 Introduction

Lorsque les variables d'un programme mathématique représentent des décisions stratégiques, ou simplement lorsque certaines variables ne peuvent prendre des valeurs fractionnaires, il faut intégrer dans le modèle des contraintes d'intégralité.

En effet, Un problème de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) est un problème de programmation linéaire (PL) avec tout ou partie des variables qui doivent être entières, voire restreintes à 0 et 1 comme valeur (le cas des PL booliens). On dit que les variables sont soumises à des contraintes d'intégrité.

La recherche de la solution optimale d'un PLNE nécessite deux étapes essentielles :

(1) la résolution du PL original avec la méthode qui convient et si la solution optimale n'est pas en nombre entier on passe à la deuxième étape.

(2) c'est l'étape de séparation de solution trouvée dans l'étape précédente avec le but est de chercher la solution en nombre entier la plus proche à la solution d'origine. Dans ce contexte, il existe des méthodes telles que :

- La Procédure de Séparation et d'Evaluation Séquentielle –PSES- (ou la méthode Branch-and-Bound)
- La méthode de coupe de Gomory.

8.2 Remarques sur la PLNE

On note que dans tous les cas de la PLNE, la solution en nombre entier est toujours moins bonne en matière de valeur de la FE par rapport à la solution d'origine (en nombre non entier). En maximisation, la solution en nombre entier représente la solution de la limite inférieure. Tandis que pour la minimisation, elle représente la solution de la limite supérieure.

Comme on l'a vu, on dispose de bons algorithmes pour résoudre les problèmes de programmation linéaire classiques, on peut se demander s'il ne serait pas possible de résoudre, sans tenir compte des contraintes d'intégrité, puis **arrondir** la solution trouvée à l'entier le plus proche, ceci n'ayant évidemment pas de sens pour une variable booléenne.

Considérons l'exemple suivant : Max $Z=11X_1+22X_2$

S.C : $4X_1+7X_2 \leq 13$

$X_1,X_2 \geq 0$ est sont entier

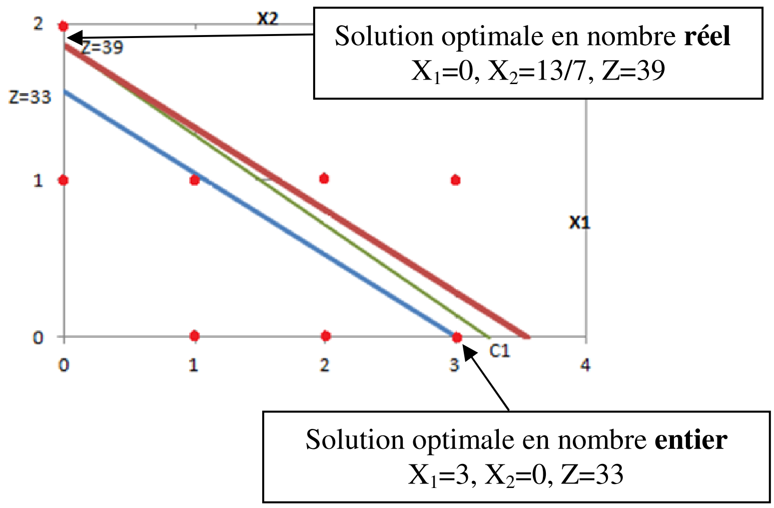


Figure 8-1 Explication graphique

Sans la contrainte d'intégrité, la solution optimale est au point x1= 0 et x2 = 13/7. Si on ne considère que les points à coordonnées entières, l'optimum est atteint au point $X_1 = 3$ et $X_2=0$, qui ne peut évidemment pas être obtenu par arrondi de la solution réelle. De plus la valeur optimale de l'objectif n'est que de 33 alors qu'elle est égale à 39 dans le cas des variables réelles.

8.3 La méthode Branch-and-Bound (PSES)

On fait résoudre le PL sans la condition d'intégrité et si la solution optimale n'est pas en nombre entier, on construit de nouveaux modèles par l'ajout de nouvelles contraintes selon la logique suivante :

Soit une variable (X_j) en valeur réelle représentée par d_i , logiquement, la valeur de X_j est inscrit dans l'intervalle [d_{i1}, d_{i2}] avec d_{i1}, d_{i2} représentent deux valeurs consécutives de type entier ($d_{i1} \leq X_j \leq d_{i2}$).

Par exemple la valeur 4.63 est comprise entre les deux valeurs entières 4 et 5.

Et pour exclure que la valeur de X_j soit réelle, on ajoute deux nouvelles contraintes :

(a) $X_j \leq d_{i1}$ (b) $X_j \geq d_{i2}$ ce qui résulte deux nouveaux PL. on continuant la procédure de séparation jusqu'à atteindre une solution (qui est logiquement optimale) en nombre entier.

Exercice 8.1: Considérons le programme linéaire suivant:

Max $Z=20X_1+2X_2$

S.C : $4X_1+10X_2 \leq 22$

$X_1, X_2 \geq 0$ est sont entiers.

Utilisant la méthode du simplexe la solution est : **$X_1=11/2$; $X_2=0$; $Z^*=110$.**

	MAX	X_1	X_2	S_1		
Cj		20	2	0	Bi	Cbi
	X_1	1	5/2	1/4	11/2	**20**
Zj		20	50	5	**110**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	-48	-5		

$X_1=11/2$ c'est-à-dire $5 \leq X_1 \leq 6$ et pour exclure X_1 de cette intervalle, deux contraintes sont nécessaires : $X_1 \leq 5$ et $X_1 \geq 6$ ce qui résulte deux nouveaux programmes linéaires à résoudre.

PL 1.2	PL 1.3
Max Z = $20X_1 + 2X_2$ **s.c.** $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \leq 5$ $X_1, X_2 \geq 0$	**Max** Z = $20X_1 + 2X_2$ **s.c.** $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \geq 6$ $X_1, X_2 \geq 0$

On résoudre les deux PL :

PL 1.2 :

	MAX	X_1	X_2	S_1	S_2		
Cj		20	2	0	0	Bi	Cbi
	X_2	0	1	1/10	-4/10	1/5	**2**
	X_1	1	0	0	1	5	**20**
Zj		20	2	1/5	**96/5**	**502/5**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	-1/5	-96/5		

La solution optimale est : $X_1=5$; $X_2=1/5$; $Z^*= 502/5$.

PL 1.3 : ce programme présente n'a pas de solution puisque la valeur minimale de X_1 est 6 selon la contrainte 2, on remplaçant cette valeur dans la première contrainte, alors la contrainte n'est plus vérifie.

Donc on continue avec la résolution du PL 1.2 : la valeur de X_2 est comprise entre 0 et 1 d'où l'ajout des contraintes ; $X_2 \leq 0$ et $X_2 \geq 1$ et on retient deux nouveaux programmes.

PL 1.2.1	PL 1.2.2
Max Z = $20X_1 + 2X_2$ **s.c.** $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \leq 5$ $X_2 \leq 0$ $X_1, X_2 \geq 0$	**Max** Z = $20X_1 + 2X_2$ **s.c.** $4X_1 + 10X_2 \leq 22$ $X_1 \leq 5$ $X_2 \geq 1$ $X_1, X_2 \geq 0$

Le PL 1.2.1 présente une contradiction avec la contrainte de la non-négativité.

La résolution du PL 1.2.2 donne la solution suivante :

MAX		**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**		
Cj		20	2	0	0	0	Bi	Cbi
	X_1	1	0	1/4	0	10/4	3	**20**
	S_2	0	0	-1/4	1	-10/4	2	**0**
	X_2	0	1	0	0	-1	1	**2**
Zj		20	2	5	0	48	**62**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	-5	0	-48		

Donc : $X_1=3$; $X_2=1$; $Z^*= 62$. C'est une solution avec des valeurs entières.

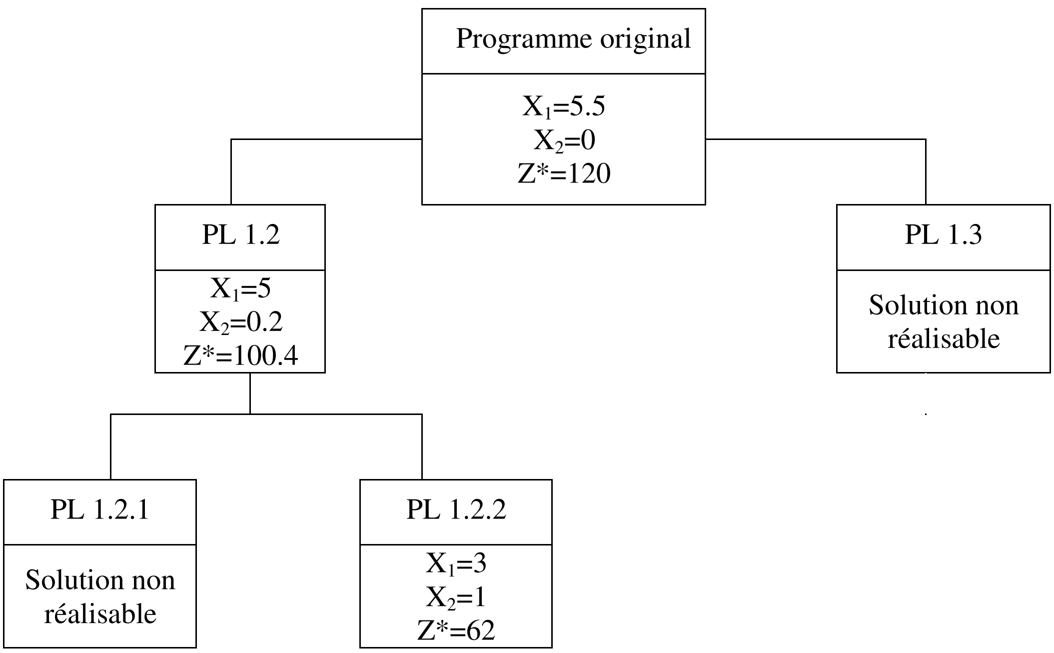


Figure 8-2 : Procédure de séparation séquentielle.

Chapitre 9

9 Analyse de sensibilité

9.1 Définition

Une solution optimale est dite stable si l'ensemble des variables de base à l'optimum ne changent[10] pas, même si les valeurs de ces variables de base sont modifiées.

Par l'analyse de sensibilité, on examine la stabilité de la solution optimale du programme linéaire suite à la variation de l'un de ses paramètres à savoir :

(a) la variation des coefficients de la fonction objectif (cj).

(b) la variation des ressources disponibles dans les contraintes (bi).

(c) la variation des coefficients de variable dans les contraintes (aij).

(d) l'ajout d'une nouvelle activité (nouvelle variable).

(e) l'ajout d'une nouvelle contrainte.

On utilisera pour présenter l'analyse de sensibilité sur les différents paramètres du programme linéaire l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \textbf{Max } Z &= 3X_1 + 2X_2 + X_3 \\ \textbf{s.c. } & 2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 6 \\ & X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 4 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

La solution optimale est présentée dans le tableau suivant :

	MAX	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
Cj		3	2	1	0	0	Bi	Cbi
Heures de travail	X_1	1	0	10/7	4/7	-1/7	20/7	**3**
Plaques en aluminium	X_2	0	1	1/7	-1/7	2/7	2/7	**2**
Zj		3	2	32/7	10/7	**1/7**	**64/7**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	-25/7	-10/7	-1/7	← Coûts marginaux	

On note par P'_j le vecteur associé à la variable X_j dans le tableau de la solution optimale :

$$P'_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; P'_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; P'_3 = \begin{pmatrix}10/7\\1/7\end{pmatrix}; P'_4 = \begin{pmatrix}4/7\\-1/7\end{pmatrix}; P'_5 = \begin{pmatrix}-1/7\\2/7\end{pmatrix} \text{ et } b'_i = \begin{pmatrix}20/7\\2/7\end{pmatrix}$$

[10] Ici le changement de la solution concerne le changement des variables de base et non plus ses valeurs.

Et on note par P_j le vecteur associé à la variable X_j dans la forme standard du PL :

$$P_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} ; P_2 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} ; P_3 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} ; P_4 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} ; P_5 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \; et \; b_i = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

9.2 Variation des coefficients de la FE

Selon la solution du PL donné, il deux variables de base (X_1 et X_2) ainsi la variable X_3 qui est hors base. Alors la détermination de l'intervalle de variation des valeurs se fait de deux manières distinctes pour le cas d'une variable de base ou hors base :

(a) Coefficients des variables de base

- Variable X_1 :

Le coefficient de la variable X_1 représente le bénéfice d'une unité du produit 1, ainsi l'augmentation ou la diminution de cette valeur implique une variation proportionnelle de la valeur de la FE (le bénéfice global). Mais réellement, il existe des seuils de variation pour que la solution reste optimale c'est-à-dire tous les coûts marginaux restent nuls ou négatifs (le cas de maximisation). Pour déterminer les seuils de cette variation il suffit d'exprimer les coûts marginaux (C_j') des VHB en fonction de C_1 (coefficient de X_1 dans la FE).

Le coût marginal est donné par : $C_j' = C_j - Z_j \Longrightarrow \; C_j' = C_j - (C_{bi} * P_j')$

1- coût marginal de X_3 :

$$C_3' = C_3 - (C_{bi} * P_3') \iff C_3' = C_3 - (C_1 \quad 2) * \begin{pmatrix}10/7\\1/7\end{pmatrix} \Rightarrow C_3' = \frac{-10}{7}C_1 + \frac{5}{7} \quad\text{................(1)}$$

2- coût marginal de X_4 :

$$C_4' = C_4 - (C_{bi} * P_4') \iff C_4' = C_4 - (C_1 \quad 2) * \begin{pmatrix}4/7\\-1/7\end{pmatrix} \Rightarrow C_4' = \frac{-4}{7}C_1 + \frac{2}{7} \quad\text{................(2)}$$

3- coût marginal de X_5 :

$$C_5' = C_5 - (C_{bi} * P_5') \iff C_5' = C_5 - (C_1 \quad 2) * \begin{pmatrix}-1/7\\2/7\end{pmatrix} \Rightarrow C_5' = \frac{1}{7}C_1 - \frac{4}{7} \quad\text{................(3)}$$

La solution reste optimale si seulement si :

$$\forall j \,;\; C_j' \leq 0 \iff \begin{cases} -\frac{10}{7}C_1 + \frac{5}{7} \leq 0 \\ -\frac{4}{7}C_1 + \frac{2}{7} \leq 0 \\ \frac{1}{7}C_1 - \frac{4}{7} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 \geq \frac{1}{2} \\ C_1 \geq \frac{1}{2} \\ C_1 \leq 4 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq C_1 \leq 4$$

Donc on peut varier le bénéfice du produit 1 dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 4]$ et la solution reste optimale quoi que le bénéfice global sera changé (les valeurs des variables seront aussi changées).

- **Variable X_2 :**

De la même manière on déterminera l'intervalle de variation pour le bénéfice du produit 2 :

1- coût marginal de X_3 :

$$C_3' = C_3 - (C_{bi} * P_3') \Leftrightarrow C_3' = C_3 - (3 \quad C_2) * \begin{pmatrix} 10/_7 \\ 1/_7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3' = \frac{-1}{7}C_2 - \frac{23}{7} \text{................}(1)$$

2- coût marginal de X_4 :

$$C_4' = C_4 - (C_{bi} * P_4') \Leftrightarrow C_4' = C_4 - (3 \quad C_2) * \begin{pmatrix} 4/_7 \\ -1/_7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_4' = \frac{1}{7}C_2 - \frac{12}{7} \text{................}(2)$$

3- coût marginal de X_5 :

$$C_5' = C_5 - (C_{bi} * P_5') \Leftrightarrow C_5' = C_5 - (3 \quad C_2) * \begin{pmatrix} -1/_7 \\ 2/_7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_5' = \frac{-2}{7}C_2 + \frac{3}{7} \text{................}(3)$$

La solution reste optimale si seulement si :

$$\forall j\ ;\ C_j' \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{7}C_2 - \dfrac{23}{7} \leq 0 \\ \dfrac{1}{7}C_2 - \dfrac{12}{7} \leq 0 \\ \dfrac{-2}{7}C_2 + \dfrac{3}{7} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 \geq -23 \\ C_2 \leq 12 \\ C_2 \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq C_2 \leq 12$$

Donc on peut varier le bénéfice du produit 2 dans l'intervalle $[\frac{3}{2}, 12]$ et la solution reste optimale avec évidemment la variation des valeurs des variables de base.

(b) Coefficients des variables hors base

Cette section concerne uniquement les variables principales hors base c'est-à-dire X_3, en revanche, les variables d'écart X_4 et X_5 ne sont pas concernées (coefficients nuls dans la FE). Si le coefficient de X_3 change, cela provoque uniquement le changement de C_3' dans le tableau du simplexe alors :

$$C_3' = C_3 - (C_{bi} * P_3') \Leftrightarrow C_3' = C_3 - (3 \quad 2) * \begin{pmatrix} 10/_7 \\ 1/_7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3' = C_3 - \frac{32}{7}$$

La solution reste optimale si seulement si : $C_3' \leq 0 \Leftrightarrow C_3 - \frac{32}{7} \leq 0$ donc $C_3 \leq \frac{32}{7}$

Tendis que le bénéfice du produit 3 est inférieur à $\frac{32}{7}$, sa production n'est plus économique pour l'entreprise.

Supposons que le bénéfice du produit 3 égale à 5, dans ce cas son coût marginal est positif. A cet effet, il aura un changement aux variables de base puisque la solution n'est pas optimale.

(c) Coefficients des variables de base et hors base à la fois

Supposons que la FE est la suivante : **Max** Z = $X_1 + 3X_2 + 2X_3$. Bien que le changement des trois coefficients est dans les intervalles déterminés dans les sections a et b, on ne peut pas dire que la solution reste optimale. En conséquence, le recalcule de tous les coûts marginaux est fortement conseillé.

1- coût marginal de X_1 :

$$C_1' = C_1 - (C_{bi} * P_1') \iff C_1' = 1 - (1 \quad 3) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1' = 0 \text{.............................}(1)$$

2- coût marginal de X_2 :

$$C_2' = C_2 - (C_{bi} * P_2') \iff C_2' = 3 - (1 \quad 3) * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C_2' = 0 \text{.............................}(2)$$

3- coût marginal de X_3 :

$$C_3' = C_3 - (C_{bi} * P_3') \iff C_3' = 2 - (1 \quad 3) * \begin{pmatrix} 10/7 \\ 1/7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3' = \frac{1}{7} \text{.....................}(3)$$

4- coût marginal de X_4 :

$$C_4' = C_4 - (C_{bi} * P_4') \iff C_4' = 0 - (1 \quad 3) * \begin{pmatrix} 4/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_4' = -\frac{1}{7} \text{................}(4)$$

5- coût marginal de X_5 :

$$C_5' = C_5 - (C_{bi} * P_5') \iff C_5' = 0 - (1 \quad 3) * \begin{pmatrix} -1/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_5' = -\frac{5}{7} \text{................}(5)$$

La solution n'est pas optimale à cause de la valeur positive du coût marginal de X_3.

9.3 Variation des ressources disponibles des contraintes (bi)

Le changement de l'une des valeurs de bi implique la variation de la valeur des variables de base (b_i') et par la suite la valeur de la FE. Alors, tant que les valeurs de b_i' ne présentent pas une contradiction avec la contrainte de la non négativité, la solution reste réalisable.

Il existe une relation matricielle qui relie chaque colonne du tableau initial du simplexe d'un PL avec la colonne correspondante dans le tableau de la solution optimale, elle est exprimée par : $P_j' = B^{-1} * P_j$;

Avec : P_j, P_j' les colonnes associes à la variable X_j dans le tableau initial et le tableau de la solution optimale.

B^{-1} : la matrice inverse de la matrice de passage.

Pour les valeurs de b_i' , la relation matricielle devient : $b_i' = B^{-1} * b_i$

Comment déterminer la matrice B ?

		On lit les valeurs de B à partir du tableau initial du simplexe	VB du tableau optimal ↓	
			X_1	X_2
VB du → tableau initial	B=	X_4	**2**	**1**
		X_5	**1**	**4**

		On lit les valeurs de B^{-1} à partir du tableau optimal du simplexe	VB du tableau initial ↓	
			X_4	X_5
VB du → tableau optimal	B^{-1}=	X_1		
		X_2		

9.3.1 Variation des heures de travail *(première contrainte)*

On suppose que la valeur disponible pour la première contrainte est inconnue (b_1) ;

$$b_i' = B^{-1} * b_i \iff b_i' = \begin{vmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7}b_1 - \frac{4}{7} \\ \frac{-1}{7}b_1 + \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

La solution est réalisable si : $\forall i \, , b_i' \geq 0 \iff \begin{cases} \frac{4}{7}b_1 - \frac{4}{7} \geq 0 \\ \frac{-1}{7}b_1 + \frac{8}{7} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 \geq 1 \\ b_1 \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{1 \leq b_1 \leq 8}$

9.3.2 Variation de nombre des plaques d'aluminium *(deuxième contrainte)*

On suppose que la valeur disponible pour la deuxième contrainte est inconnue (b_2) ;

$$b_i' = B^{-1} * b_i \iff b_i' = \begin{vmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} x \begin{pmatrix} 6 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7}b_2 + \frac{24}{7} \\ \frac{2}{7}b_2 - \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

La solution est réalisable si : $\forall i \, , b_i' \geq 0 \iff \begin{cases} \frac{-1}{7}b_2 + \frac{24}{7} \geq 0 \\ \frac{2}{7}b_2 - \frac{6}{7} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_2 \leq 24 \\ b_2 \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{3 \leq b_2 \leq 24}$

Cas n°1 : on suppose que le nombre de plaques égale à 5, cette valeur appartient à l'intervalle [3, 24] c'est-à-dire que la solution reste optimale mais elle change en valeur.

$$b_i' = B^{-1} * b_i \iff b_i' = \begin{vmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} x \begin{pmatrix} 6 \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

La solution optimale est : $X_1 = \frac{19}{7}$, $X_2 = \frac{4}{7}$, , $X_3 = 0$, $Z^* = \frac{65}{7}$.

Bien que la valeur de FE a augmenté par $\frac{1}{7}$, il est nécessaire de vérifier si cette augmentation est bénéfique ou non ?

Le coût[11] d'augmentation d'une unité de bi de la deuxième contrainte est : $\frac{2}{7}$.

Alors le bénéfice enregistré est : $\frac{65}{7} - \frac{64}{7} = \frac{1}{7}$ mais le coût est : $\frac{2}{7}$ donc cette augmentation n'est pas bénéfique pour l'entreprise.

Cas n°1 : on suppose que le nombre de plaques égale à 25, cette valeur est en dors de l'intervalle [3, 24] c'est-à-dire que la solution ne sera pas réalisable (donc pas d'optimalité). Dans ce cas on fait appel à la méthode dual simplexe.

9.4 Variation dans la matrice des contraintes

(a) la variation des coefficients de variable dans les contraintes (a_{ij})

Les caractéristiques d'un produit peuvent être changées de manière que la solution reste optimale. Particulièrement, on parle aux besoins d'une unité en nombre des heures ou en nombre de plaque d'aluminium. Souvent, on se confronte à deux cas :

- la variation des informations d'une variable hors base :

On suppose que les besoins du produit 3 (X_3) en plaques d'aluminium est réduit en une seule plaque, c'est-à-dire $P_3\binom{3}{1}$, on vise à mesurer l'impact de ce changement sur l'optimalité du programme.

$$P'_3 = B^{-1} * P_3 \iff P'_3 = \begin{vmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coût marginal sera :

$$C'_3 = C_3 - (C_{bi} * P'_3) \iff C'_3 = 1 - (1 \quad 3) * \begin{pmatrix} 11/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} \Rightarrow C'_3 = \frac{-24}{7}$$

Le solution reste optimale, on conclus que la production du produit 3 n'est pas encore bénéfique.

- la variation des informations d'une variable de base :

Dans ce cas, il est préférable de résoudre à nouveau le PL parce que le changement des coefficients de VB (le cas de X_1 et X_2) dans les contraintes influence sur toutes les valeurs du tableau optimal (en cas échéant le changement des variables de base).

(b) l'ajout de nouvelles activités (nouvelles variables)

On suppose que l'entreprise vise la production d'un nouveau produit, la raison pour laquelle le décideur cherche si le nouveau produit –selon leurs caractéristiques- sera économique pour l'entreprise.

[11] Il est inscrit dans la case d'intersection de la ligne de contrainte avec la colonne de la variable d'écart utilisée pour cette contrainte.

On propose par exemple les caractéristiques suivantes :

Le nouveau produit (X_6) nécessite deux (02) unités des heures de travail et unités des plaques d'aluminium, le bénéfice unitaire est 2 unités monétaires. Donc, $C_6 = 2$ et $P_6 \binom{2}{2}$,

$$P'_6 = B^{-1} * P_6 \iff P'_6 = \begin{vmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} x \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$C'_6 = C_6 - (C_{bi} * P'_6) \iff C'_6 = 2 - (1 \quad 3) * \begin{pmatrix} 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} \Rightarrow C'_6 = \frac{-8}{7}$$

Le coût marginal de la VHB X_6 est négatif, c'est-à-dire la production du nouveau produit n'est pas économique. On peut déduire que sa production va diminuer le bénéfice global par la valeur[12] ($\frac{-8}{7}$).

(c) l'ajout d'une nouvelle contrainte

Avant l'ajout d'une contrainte, il faut d'abord s'assurer si cette contrainte est vérifiée par la solution optimale du PL. Deux cas peuvent se présentée :

(a) la contrainte est vérifiée ; donc elle est considérée comme suppliante au PL et par conséquence on peut la négliger.

(b) la solution optimale ne vérifie par la contrainte ; donc il faut l'impliquer dans le programme et par conséquence la solution sera modifiée.

Exemple 1 : soit à ajouter la contrainte $2X_1+X_2+2X_3 \leq 8$.

(A.N): $2(\frac{20}{7})+\frac{2}{7}+2(0) = \frac{42}{7}=6$ qui est inférieure à 8. Alors la contrainte est vérifiée et elle peut être négligée.

Exemple 2 : soit à ajouter la contrainte $2X_1+X_2+2X_3 \leq 5$. D'après l'exemple précédant, cette contrainte n'est plus vérifiée par la solution optimale. A cet effet, voici les étapes nécessaires :

On transforme la contrainte en équation : $2X_1+X_2+2X_3 +X_6 = 5$ (avec X_6 variable d'écart).

On ajoute la contrainte au tableau optimal du simplexe mais on remarque qu'il y a des anomalies à régler ; on doit vérifier les caractéristiques des variables de base c'est-à-dire une variable de base doit obligatoirement un coefficient égal à un (1) dans la contrainte associée et nul pour le reste des contraintes. En effet, cette démarche concerne les variables $\mathbf{X_1, X_2, X_6}$.

[12] L'impact d'une VHB sur la valeur de FE est le produit de son coût marginal avec le plus petit ratio de la variable sortante, pour notre cas $\frac{-8}{7} x1 = \frac{-8}{7}$

	MAX	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
Cj		3	2	1	0	0	0	Bi	Cbi
Heures de travail	X_1	1	0	10/7	4/7	-1/7	0	20/7	**3**
Plaques en aluminium	X_2	0	1	1/7	-1/7	2/7	0	2/7	**2**
Nouvelle contrainte	X_6	**2**	**1**	**2**	**0**	**0**	**1**	**5**	**0**
Zj		3	2	32/7	10/7	**1/7**		**64/7**	
$\Delta Z_{=}C_j\text{-}Z_j$		0	0	-25/7	-10/7	-1/7		← Coûts marginaux	

Donc on multiplie la première contrainte par (-2) et la deuxième par (-1) et on fait l'addition des trois contraintes selon le tableau suivant :

Contrainte1x(-2)	-2	0	-20/7	-8/7	2/7	0	-40/7
Contrainte1x(-1)	0	-1	-1/7	1/7	-2/7	0	-2/7
Nouv contrainte	2	1	2	0	0	1	5
Par addition:	0	0	-1	-1	0	1	-1

Ainsi le tableau du simplexe sera comme suit :

	MAX	X_1	X_2	X_3	X_4↓	X_5	X_6			
Cj		3	2	1	0	0	0	Bi	Cbi	Cette solution n'est pas réalisable (valeur négative de X_6). **Dual Simplexe** VS: X_6 VE:X_4 Pivot = -1
Heures de travail	X_1	1	0	10/7	4/7	-1/7	0	20/7	**3**	
Plaques en aluminium	X_2	0	1	1/7	-1/7	2/7	0	2/7	**2**	
Nouvelle contrainte	←X_6	0	0	-1	**-1**	0	1	-1	**0**	
Zj		3	2	32/7	10/7	**1/7**	0	**64/7**		
$\Delta Z_{=}C_j\text{-}Z_j$		0	0	-25/7	-10/7	-1/7	0	← Coûts marginaux		

	MAX	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6			
Cj		3	2	1	0	0	0	Bi	Cbi	La solution est réalisable et elle est **optimale**
Heures de travail	X_1	1	0	6/7	0	-1/7	4/7	16/7	**3**	
Plaques en aluminium	X_2	0	1	2/7	0	2/7	-1/7	3/7	**2**	
Nouvelle contrainte	X_4	0	0	1	1	0	-1	1	**0**	
Zj		3	2	22/7	0	**1/7**	10/7	**54/7**		
$\Delta Z_{=}C_j\text{-}Z_j$		0	0	-15/7	0	-1/7	-10/7	← Coûts marginaux		

A travers cet exemple, nous avons abordé pratiquement tous les cas de figures qui peuvent être présentés dans le cas de l'analyse de sensibilité des résultats d'un PL donné. En effet, l'analyse de sensibilité est une étape primordiale, nécessaire aux décideurs puisque elle offre des informations clés pour l'analyse de la solution optimale et évidemment pour de futures prévisions.

Exercice résolu :

Une entreprise produit deux types de produits cosmétiques par l'utilisation de deux machines. Les informations nécessaires sont présentées dans le tableau suivant :

	Produit1	Produit2	Heures disponibles
Machine 1	4	2	60
Machine 1	2	4	48
Bénéfice	8	6	

- Déterminer la quantité à produire pour maximiser le bénéfice.
- Déterminer l'intervalle de variation du bénéfice associe au produit1.
- Déterminer les seuils de variation des heures disponibles pour la machine1.
- Etudier la possibilité d'ajouter un nouveau produit qui est caractérisé par : le bénéfice unitaire est de 7 u.m, il nécessite respectivement 3h, 2h sur la machine1 et la machine2.

Solution :

Le PL de ce problème est exprimé par :

$$\begin{aligned} &\textbf{Max } Z = 8X_1 + 6X_2 \\ &\textbf{s.c.} \quad 4X_1 + 2X_2 \leq 60 \\ &\qquad 2X_1 + 4X_2 \leq 48 \\ &\qquad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

:

La solution optimale est la suivante :

MAX		$X_1\downarrow$	X_2	X_3	X_4		
Cj		8	6	0	0	Bi	Cbi
Machine1	$\leftarrow X_3$	**4**	2	1	0	60	**0**
Machine2	X_4	2	4	0	1	48	**0**
Zj		0	0	0	0	**0**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		8	6	0	0		
MAX		X_1	$X_2\downarrow$	X_3	X_4		
Machine1	X_1	1	1/2	1/4	0	15	**8**
Machine2	$\leftarrow X_4$	0	**3**	-1/2	1	18	**0**
Zj		8	4	2	0	**120**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	6	-2	0		
MAX		X_1	X_2	X_3	X_4		
Machine1	X_1	1	0	1/3	-1/6	12	**8**
Machine2	X_2	0	1	-1/6	1/3	6	**6**
Zj		8	6	5/3	2/3	**132**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	6	-2	-2/3		

Les quantités sont 12 unités du produit1 et 6 unités du produit2 pour un gain de 132 u.m.

▪ Déterminer l'intervalle de variation du bénéfice associe au produit1.

Pour déterminer les seuils de cette variation on exprimer les coûts marginaux (C_j') des VHB en fonction de C_1 (coefficient de X_1 dans la FE).

Le coût marginal est donné par : $C_j' = C_j - Z_j \Longrightarrow \; C_j' = C_j - (C_{bi} * P_j')$

1- coût marginal de X_3 :

$$C_3' = C_3 - (C_{bi} * P_3') \iff C_3' = 0 - (C_1 \quad 6) * \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3' = \frac{-1}{3} C_1 + 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

2- coût marginal de X_4 :

$$C_4' = C_4 - (C_{bi} * P_4') \iff C_4' = 0 - (C_1 \quad 6) * \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_4' = \frac{1}{6} C_1 - 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La solution reste optimale si seulement si :

$$\forall j \,;\, C_j' \leq 0 \iff \begin{cases} \dfrac{-1}{3} C_1 + 1 \; \leq 0 \\ \dfrac{1}{6} C_1 - 2 \; \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 \geq 3 \\ C_1 \leq 12 \end{cases} \Longrightarrow 3 \leq C_1 \leq 12$$

Donc on peut varier le bénéfice du produit 1 dans l'intervalle [3,12] et la solution reste optimale.

▪ Déterminer les seuils de variation des heures disponibles pour la machine1.

On suppose que la valeur disponible pour la première contrainte est inconnue (b_1) ;

$$b_i' = B^{-1} * b_i \iff b_i' = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} x \begin{pmatrix} b_1 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} b_1 - 8 \\ \frac{-1}{6} b_1 + 16 \end{pmatrix}$$

La solution est réalisable si : $\forall i \,, b_i' \geq 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{3} b_1 - 8 \geq 0 \\ \frac{-1}{6} b_1 + 16 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_1 \geq 24 \\ b_1 \leq 96 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{24 \leq b_1 \leq 96}$

▪ Etudier la possibilité d'ajouter un nouveau produit qui est caractérisé par : le bénéfice unitaire est de 7 u.m, il nécessite respectivement 3h, 2h sur la machine1 et la machine2.
On a :

$$P_3' = B^{-1} * P_3 \iff P_3' = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$C_5' = C_5 - (C_{bi} * P_5') \iff C_5' = 7 - (8 \quad 6) * \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow C_5' = \frac{2}{3}$. La production du nouveau produit est économique (coût marginal positif).

Exercice non résolu :

Soit le PL suivant :

$$\begin{aligned} \textbf{Max } Z = \; & 5X_1 + 3X_2 \\ \textbf{s.c. } \; & X_1 - X_2 \leq 2 \\ & 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ & -3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La solution optimale est la suivante :

MAX		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
Cj		5	3	0	0	0	Bi	Cbi
	X_3	0	0	1	1/7	3/7	36/7	**0**
Heures de travail	X_1	1	0	0	2/7	-1/7	2/7	**5**
Plaques en aluminium	X_2	0	1	0	3/7	2/7	24/7	**3**
Zj		5	3	0	19/7	**1/7**	**82/7**	
$\Delta Z = C_j - Z_j$		0	0	0	-19/7	-1/7	← Coûts marginaux	

- Déterminer les seuils de variation des coefficients de toutes les variables dans la FE.
- Déterminer les seuils de variation des ressources disponibles pour toutes les contraintes.

Chapitre 10

10 Problème de transport –le cas de minimisation-

10.1 Définition

Certains problèmes en programmation linéaire ont une structure particulière que l'on peut exploiter ; l'exemple d'un problème de transport qu'on peut le résoudre comme d'habitude par un simplexe, mais on peut aussi le résoudre plus simplement et plus efficacement par d'autre méthode.

Un problème de transport peut être présenté sous l'image suivante :

- Un produit doit être transporté de sources (usines) vers des destinations (dépôts, clients).
- *Objectif :* déterminer la quantité envoyée de chaque source à chaque destination en minimisant les coûts de transport. Les coûts sont proportionnels aux quantités transportées.
- *Contraintes* d'offre limitée aux sources et de demande à satisfaire aux destinations.

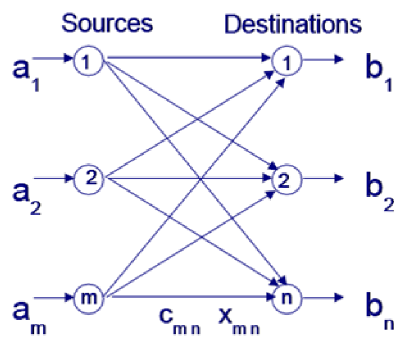


Figure 10-1 : Modélisation graphique d'un problème de transport

10.2 Présentation du problème

Soit une série de villes alimentées en eau potable par des stations de pompage. Chaque station est caractérisée par la quantité pompée d'eau en m^3/jour :

- La station1 offre la quantité S_1.
- La station2 offre la quantité S_2. Les stations représentent les sources.
- La station3 offre la quantité S_3.

Les besoins quotidiens en eau potable des villes représentent les quantités journalières demandées :

- La ville1 consomme la quantité D_1.
- La ville2 consomme la quantité D_2.
- La ville3 consomme la quantité D_3. Les villes représentent les destinations.
- La ville4 consomme la quantité D_4.

Les coûts de pompage sont comptabilisés et présenter sous la forme suivante :

		Destinations			
		Ville1	Ville2	Ville3	Ville4
Sources	Station1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
	Station2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}
	Station3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}

Avec : C_{ij} présente le coût de 1 m^3 pompé à partir de la station 'i' vers la ville 'j'.
L'objectif est de satisfaire les besoins quotidiens des villes en eau potable tout en respectant la capacité de chaque station, et tout cela avec un minimum de coût global.
D'une manière plus simple, il faut déterminer la quantité d'eau en m^3 distribuée à partir de chaque station vers les quatre villes. On désigne par X_{ij} la quantité d'eau en m^3 distribuée à partir de la station 'i' vers la ville 'j', voici le tableau suivant :

	Ville1	Ville2	Ville3	Ville4
Station1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
Station2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}
Station3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}

10.3 Modélisation du problème de transport

Par la suite, on peut regrouper toutes les informations en un seul tableau :

	Ville1	Ville2	Ville3	Ville4	
Station1	$\boxed{C_{11}}$ X_{11}	$\boxed{C_{12}}$ X_{12}	$\boxed{C_{13}}$ X_{13}	$\boxed{C_{14}}$ X_{14}	S_1
Station3	$\boxed{C_{21}}$ X_{21}	$\boxed{C_{22}}$ X_{22}	$\boxed{C_{23}}$ X_{23}	$\boxed{C_{24}}$ X_{24}	S_2
Station2	$\boxed{C_{31}}$ X_{m1}	$\boxed{C_{32}}$ X_{m2}	$\boxed{C_{33}}$ X_{33}	$\boxed{C_{34}}$ X_{34}	S_3
	D_1	D_2	D_3	D_4	

Dans le général, le tableau du transport est exprimé sous la forme suivante :

s_i : les sources

S_i : la quantité offerte par la source s_i.

d_j : les destinations

D_j: la quantité demandée par la destination d_j.

C_{ij}: le coût de transport d'une unité de s_i vers d_j

X_{ij}: la quantité transportée du s_i vers d_j.

	d_1	d_2	……	d_n	
s_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	……	C_{1n} X_{1n}	S_1
s_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	……	C_{2n} X_{2n}	S_2
……	………	…………	……	………	……
s_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	……	C_{mn} X_{mn}	S_m
	D_1	D_2	……	D_n	

Un problème de transport est décrit mathématiquement par :

(1) un coût global est :

W= $\mathbf{C_{11}X_{11}+ C_{12}X_{12}+ C_{13}X_{13}+ C_{14}X_{14}+ C_{21}X_{21}+ C_{22}X_{22}+ C_{23}X_{23}+ C_{24}X_{24}+ C_{31}X_{31}+ C_{32}X_{32}+ C_{33}X_{33}+ C_{34}X_{34}}$

En général, $w = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} C_{ij}X_{ij}$

(2) des quantités transportées à partir des sources :

Source1 : $\mathbf{X_{11}+ X_{12}+ X_{13}+ X_{14}=S_1}$

Source2 : $\mathbf{X_{21}+ X_{22}+ X_{23}+ X_{24}=S_2}$

Source3 : $\mathbf{X_{31}+ X_{32}+ X_{33}+ X_{34}=S_3}$

En général, $\sum_{j=1}^{4} X_{ij} = S_i \, ; pour\ i = 1,2,3$

(3) des quantités transportées vers les destinations :

Ville1 : $\mathbf{X_{11}+ X_{21}+ X_{31} =D_1}$

Ville2 : $\mathbf{X_{12}+ X_{22}+ X_{32} =D_2}$

Ville3 : $\mathbf{X_{13}+ X_{23}+ X_{33} =D_3}$

Ville3 : $\mathbf{X_{14}+ X_{24}+ X_{34} =D_3}$

En général, $\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = D_j \, ; pour\ j = 1,2,3,4$

En effet, le modèle de transport est exprimé mathématiquement par la forme générale suivante :

$$Min\ w = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} C_{ij}X_{ij}$$

$$\text{S.C :} \begin{cases} \sum_{j=1}^{4} X_{ij} = S_i \, ; pour\ i = 1,2,3 \\ \sum_{i=1}^{3} X_{ij} = D_j \, ; pour\ j = 1,2,3,4 \\ \sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{4} D_j \\ X_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

10.4 Etapes de résolution d'un problème de transport

Avant d'entamer la solution d'un problème de transport, il quasiment nécessaire de vérifier la contrainte d'égalité des quantités d'offre et de demande. Si ce n'est pas le cas, plus de détails et astuces sont présentés dans la section 10.5.

10.4.1 La recherche d'une solution de base réalisable

a- Méthode du coin Nord-Ouest (supérieur gauche) : choisir à chaque étape la variable située à l'intersection de la première ligne et la première colonne du tableau réduit. Donc on partant du coin supérieur gauche du tableau, voici les étapes :

1. allouer le plus possible à la cellule courante et ajuster l'offre et la demande ;
2. se déplacer d'une cellule vers la droite (demande nulle) ou le bas (offre nulle) ;
3. répéter jusqu'au moment où toute l'offre est allouée.

b- Méthode du coût minimum (Moindres coûts) : choisir à chaque étape la variable C_{pq} correspondant au plus petit coût du tableau réduit. $C_{pq} = \min_{ij}(C_{ij})$
En détails, voici les étapes :
Sélectionner la cellule de coût minimum.

1. allouer le plus possible à la cellule courante et ajuster l'offre et la demande ;
2. sélectionner la cellule de coût minimum ayant une demande et une offre non nulles ;
3. répéter jusqu'au moment où toute l'offre est allouée.

c- Méthode approximative de Vogel (VAM): elle basée sur le calcul des pénalités, généralement la solution est très proche à la solution optimale :

1. pour chaque ligne (colonne) avec une offre (demande) non-nulle, calculer une pénalité égale à la différence entre les deux coûts les plus petits dans la ligne (colonne) ;
2. sélectionner la ligne ou colonne avec la pénalité maximale et sélectionner la cellule de coût minimum dans la ligne ou colonne ;
3. allouer le plus possible à la cellule courante ;
4. lorsqu'il ne reste qu'une ligne ou colonne : choisir la cellule du moindre coût.

10.4.2 La recherche de la solution optimale

Après avoir déterminé une solution de base réalisable par l'une des trois méthodes précédentes, on tente ainsi à la recherche d'une solution optimale par l'une du deux méthodes :

a- Méthode de distribution modifie

Le programme dual d'un programme de transport est donné par :

$$Max\colon Z = \sum_{i=1}^{m} a_i\, u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\, v_j$$
$$avec :\; u_i + v_j > C_{ij}\,;\, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

On note ici que u_i, v_j sont des valeurs libres calculées pour toutes les variables de base par la formule : $C_{ij} = u_i + v_j;\ \forall X_{ij} > 0$

Remarque : dans le tableau du transport, les cellules qui reçoivent des valeurs positives non-nulles représentent les cellules des variables de base, tandis que les cellules vides représentent les variables hors base.

De se fait, il résulte (m + n -1) équations à (m + n) inconnues. On fixe $u_1 = 0$ et on résoudre récursivement le système suivant :

$$C_{ij} = u_i + v_j;\ pour\ tout\ X_{ij} > 0$$ c'est-à-dire pour les cellule remplies.

Les valeurs de u_i, v_j sont inscris dans le tableau du transport au début des lignes et colonnes correspondantes.

Après avoir calculé la valeur des variables duales, il devient facile de calculer la valeur des composantes du vecteur de coût relatif pour chaque variable hors base :

$$C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0;\ pour\ toute\ VHB.$$

Ainsi, la solution de base considérée est optimale si et seulement si :

$$C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0;\ pour\ tout\ X_{ij} > 0$$

Si l'une de ces composantes est négative, alors nous ne sommes pas à l'optimum et doit déterminé la variable sortante et entrante pour préserver l'admissibilité :

Deux objectifs a vérifié : 1. l'offre et la demande doivent continuer à être satisfaites ;
2. les quantités transportées doivent rester positives.

Pour se faire on doit :

- Déterminer la *variable entrante* qui est caractérisée par la plus petite valeur des coûts relatifs négatifs.
- Construire un cycle parcourant les variables de base en partant de et revenant à la *variable entrante* (le cycle doit contenir uniquement des droites horizontale et verticales et on ne compte pas les VB qui ne sont pas au coin du cycle);
- Marquer alternativement par + et – sur les variables qui construisent le cycle retenu en commençant par la *variable entrante*.
- Déplacer le long de lignes et colonnes en alternant ajout et retrait de la plus petite quantité parmi les quantités précédées par un signe moins (-), elle corresponde à la variable sortante.
- Recalculé les nouvelles valeurs des variables duales, puis les valeurs des coûts relatifs. Si ces derniers ne sont pas négatifs alors la solution est optimale sinon on refait les étapes précédentes jusqu'à l'optimum.

Exemple 1 : soit le cycle fermé $X_{12} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12}$, ici la variable entrante est X_{12} , et X_{13}, X_{23}, X_{22} sont des variables de base avec respectivement les valeurs suivantes: $50, 20, 65$. Appliquant les règles décrites au dessus on a :

Cycle	$X_{12} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12}$
Marquage	+ − + −
Valeurs des VB	50 20 65
La plus petit valeur précédée par le signe (-) est 50 ➔ **VS:** X_{13}	
Traitement	+50 -50 +50 -50
Nouvelles valeurs des VB	50 70 15

b- Méthode de pierre mobile (stepping stone)

L'algorithme de cette méthode ressemble le plus à la méthode précédente quoiqu'on commence d'abord par la détermination des cycles pour toutes les variables hors base puis on calcule le coût relatif de chaque cycle comme suit :

Prenant le cycle de l'exemple1 et supposant que les coûts unitaires sont respectivement $9, 10.5, 12$ et 8 pour la variable entrante, alors le coût relatif du cycle est :

$$\begin{array}{c} X_{12} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12} \\ 8 \ - \ 9 \ + \ 10.5 \ - \ 12 \ = -2.5 \end{array}$$

- La variable entrante corresponde au cycle ayant le plus petit coût négatif.
- Marquer alternativement par + et – sur les variables qui construisent le cycle retenu en commençant par la *variable entrante*.
- Déplacer le long de lignes et colonnes en alternant ajout et retrait de la plus petite quantité parmi les quantités précédées par un signe moins (-), elle corresponde à la variable sortante.
- Ajuster le tableau du transport par les nouvelles valeurs.
- Reconstruire à nouveau tous les cycles associés aux variables hors base, puis leurs valeurs des coûts relatifs. Si ces derniers ne sont pas négatifs alors la solution est optimale sinon on refait les étapes précédentes jusqu'à l'optimum.

Exercice 10.1 (résolu) :

Trois usines (A1, A2, A3) fournissent le même type de matière première à quatre micro-entreprises (S1, S2, S3, S4). Les informations concernant l'offre et la demande ainsi que le coût unitaire de transport sont présentées dans le tableau ci-contre :

Détermine la stratégie de transport avec un coût minimal.

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**Offre**
A1	3	2	5	2	**30**
A2	6	5	8	7	**40**
A3	2	8	4	6	**150**
Demande	**30**	**90**	**80**	**20**	

Solution 10.1 :

On va résoudre cet exemple par toutes les méthodes étudiées :

1- vérifiant la condition d'égalité de l'offre et la demande :

$\forall i,j; \sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{4} D_j$ la quantité demandé=30+90+80+20=220

La quantité offerte=30+40+150=220 donc *la condition est vérifiée*

Le tableau du transport est présenté comme suit :

	B1	B2	B3	B4	
A1	3	2	5	2	30
A2	6	5	8	7	40
A3	2	8	4	6	150
	30	90	80	20	220 / 220

2- déterminant alors une solution de base réalisable (SBR) :

(a) Méthode du coin Nord-Ouest:

- La cellule du coin Nord-Ouest est C_{11}, l'offre de la source A_1 égale à la demande du client B_1, alors la cellule C_{11} reçoit la quantité 30 c'est-à-dire X_{11}=30. On ajuste les valeurs du tableau.

- La cellule du coin Nord-Ouest est C_{22}, Min {90,40}={40} donc X_{22}=40.

- La cellule du coin Nord-Ouest est C_{32}, Min {50,150}={50} donc X_{32}=50

- La cellule du coin Nord-Ouest est C_{33}, Min {80,100}={80} donc X_{33}=80.

- il reste que la quantité demandée du client B_4 qui corresponde, selon le tableau, la quantité d'offre restante de la source A_3, donc X_{34}=20.

	B1	B2	B3	B4	
A1	3 / 30	2	5	2	~~30~~ 0
A2	6	5 / 40	8	7	~~40~~ 0
A3	2	8 / 50	4 / 80	6 / 20	~~150~~ ~~100~~ ~~20~~ 0
	~~30~~ 0	~~90~~ ~~50~~ 0	~~80~~ 0	~~20~~ 0	220 / 220

Important : le nombre des cellules remplies (correspond au nombre de VB) est 5, alors qu'il faut être (m+n-1=6 ; avec 'm' le nombre de sources et 'n' nombre de clients). Dans ce cas on ajoute la quantité ε ($\varepsilon \to 0$) dans l'une des cellules vides (prenant dans notre cas la cellule C_{12}).

Le coût global est : $W = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{23}X_{23} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34}$

$W = 3*30 + 2*\varepsilon + 5*40 + 8*50 + 4*80 + 6*20 = 1130 + 2\varepsilon$

(b) Méthode des moindres coûts :

On fait choisir à chaque itération la cellule contenant la petite valeur de coût avec ajustement de l'offre et la demande à chaque fois.

- la plus petite valeur de coût (=2) corresponde aux trois cellules [C_{12}, C_{14}, C_{31}], commençant par X_{12} qui va reçoit la quantité 30.
- La cellule C_{31}, Min {30,150}={30} donc X_{31}=30.
- on cherche ainsi à la cellule de coût le plus minimal sans tenir en comte la première ligne (offre consommée) et la première colonne (commande vérifiée). Il s'agit de la cellule C_{33} ; Min {80,120}={80} donc X_{33}=80
- La cellule C_{22} contient le coût minimal parmi les cellules restantes donc, Min{60,40}={40} donc X_{22}=40
- il reste deux cellules qu'on doit les remplir pour satisfaire les demandes des clients B_2 et B_4. Donc, X_{34}=20 et X_{32}=20.

	B1	B2	B3	B4	
A1	3	2 / 30	5	2	~~30~~ 0
A2	6	5 / 40	8	7	~~40~~ 0
A3	2 / 30	8 / 20	4 / 80	6 / 20	~~150~~ ~~120~~ ~~40~~ 0
	~~30~~ 0	~~90~~ ~~60~~ ~~20~~ 0	~~80~~ 0	~~20~~ 0	220 / 220

Important : le nombre des cellules remplies (correspond au nombre de VB) est 6, alors qu'il faut être (m+n-1=**6** ; avec 'm' le nombre de sources et 'n' nombre de clients). Dans ce cas la condition est vérifiée.

Le coût global est : $W= C_{12}X_{12}+ C_{22}X_{22}+ C_{31}X_{31}+C_{32}X_{32}+ C_{33}X_{33}+ C_{34}X_{34}$

$$W= 2*30 +5*40+2*30+8*20+4*80+6*20=920$$

(c) Méthode approximative de Vogel (VAM) : A chaque, on calcul les pénalités des lignes et colonnes qui ont une quantité d'offre ou demande non nulle. Par exemple pour la première ligne le plus petit coût égale à 2, la valeur suivante égale à 3 donc la pénalité est P_1=3-2=1. Il résulte que la colonne de B_4 a reçu la plus grande pénalité (=4), dans cette colonne le petit coût correspond à la cellule C_{14} alors X_{14}=20.

Après l'ajustement de l'offre et la demande on recalculant à nouveau les pénalités pour les lignes et colonnes ayant des quantités d'offre ou demande non nulles.

La plus grande pénalité corresponds à la $2^{ième}$ colonne dont laquelle le petit coût égale à 2. Alors X_{12}=10.

On recalculant les pénalité, on remarque que la 1ière et la 3ième colonnes ont la même pénalité (=4), on a choisi la première colonne du faite qu'elle contient le petit coût (=2), alors X_{31}=30.

Puis X_{33}=80 , X_{22}=40 et X_{32}=40.

	B1	B2	B3	B4	Offre	Pénalités
A1	3	2 10	5	2 20	~~30~~ ~~10~~ 0	1 1 - -
A2	6	5 40	8	7	~~40~~ 0	1 1 1 3
A3	2 30	8 40	4 80	6	~~150~~ ~~120~~ ~~40~~ 0	2 2 2 4
Demande	~~30~~ 0	~~90~~ ~~80~~ ~~40~~ 0	~~80~~ 0	~~20~~ 0		
Pénalités	1	3	1	4		
	1	3	1	-		
	4	3	4	-		
	-	3	4	-		

Le nombre des VB égale (6) qui est le même chiffre donné par la formule (m+n-1), la condition est vérifiée.

Le coût global est : $W= C_{12}X_{12}+ C_{14}X_{14}+ C_{22}X_{22}+ C_{31}X_{31}+C_{32}X_{32}+ C_{33}X_{33}$

$$W= 2*10 +2*20+5*40+2*30+8*40+4*80=960$$

Remarque : on a retenu trois solutions de base réalisables différentes et celle des moindres coûts est la plus proche à la solution optimale.

2- déterminant ainsi la solution optimale : Pour la solution de départ, logiquement il faut utiliser la solution la plus proche à la solution optimale (le plus petit coût global), mais puisque on vise à expliquer en max les algorithmes des méthodes à travers ce cours, la solution de départ est celle obtenue par la méthode du coin nord-ouest.

(a) Méthode de distribution modifie :

On calcul u_i, v_j selon la formule : $C_{ij} = u_i + v_j;\ \forall X_{ij} > 0$

De se fait, il résulte (m + n -1) équations à (m + n) inconnues. On fixe u_1 = 0 et on résoudre récursivement le système suivant :

VB		$u_1 = 0$ alors,
X_{11}	$C_{11} = u_1 + v_1$	$v_1 = 3$
X_{12}	$C_{12} = u_1 + v_2$	$v_2 = 2$
X_{22}	$C_{22} = u_2 + v_2$	$u_2 = 3$
X_{32}	$C_{32} = u_3 + v_2$	$u_3 = 6$
X_{33}	$C_{33} = u_3 + v_3$	v_3=-2
X_{34}	$C_{34} = u_3 + v_4$	$v_4 = 0$

Les valeurs de u_i, v_j sont inscris dans le tableau du transport au début des lignes et colonnes correspondantes. Puis on calcule la valeur des composantes du vecteur de coût relatif pour chaque variable hors base : $C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0;\ pour\ toute\ VHB.$

On constate que le coût relatif à la VHB X_{31} est négatif[13] donc c'est la variable entrante (VE). Ainsi, on construit un cycle débutant de cette cellule et fermant sur elle.

		B1	B2	B3	B4
	V_j / U_i	3	2	-2	0
A1	0	3 30	2	5 7	2 2
A2	3	6 0	5 40	8 7	7 4
A3	6	2 -7	8 50	4 80	6 20

Le cycle fermé sera : $X_{31} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{31}$

Appliquant le principe de cette méthode pour déterminer la variable sortante :

Cycle	$X_{31} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{31}$
Marquage	+ − + −
Valeurs des VB	50 ε 30
La plus petit valeur précédée par le signe (-) est 30 ➔ VS: X_{11}	
Traitement	+30 -30 +30 -30
Nouvelles valeurs des VB	30 20 30

Ainsi la deuxième itération est présentée dans le tableau suivant :

		B1	B2	B3	B4
	V_j / U_i	-4	2	-2	0
A1	0	3 7	2 30	5 7	2 2
A2	3	6 7	5 40	8 7	7 4
A3	6	2 30	8 20	4 80	6 20

On remarque que tous les coûts relatifs sont positifs c'est-à-dire la solution est optimale.

Le coût global est : $W= C_{12}X_{12}+ C_{22}X_{22}+ C_{31}X_{31}+C_{32}X_{32}+ C_{33}X_{33}+ C_{34}X_{34}$

$$W= 2*30 +5*40+2*30+8*20+4*80+6*20=920$$

(b) Méthode de pierre mobile (Stepping Stone) : on prend, cette fois, comme solution de départ celle obtenue par la méthode approximative de Vogel.

[13] Le choix de la VE correspond au coût négatif le plus petit (le plus grand en valeur absolue).

	B1	B2	B3	B4
A1	**3**	**2** / **10**	**5**	**2** / **20**
A2	**6**	**5** / **40**	**8**	**7**
A3	**2** / **30**	**8** / **40**	**4** / **80**	**6**

On détermine les cycles fermés correspondent aux VHB puis on calcule les coûts relatifs pour chaque cycle :

VHB	Cycle	Coût
X_{11}	$X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11}$	3-2+8-2=7
X_{13}	$X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13}$	5-4+8-2=7
X_{21}	$X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21}$	6-5+8-2=7
X_{23}	$X_{32} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32}$	8-4+8-5=7
X_{24}	$X_{24} \rightarrow X_{14} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{24}$	7-2+2-5=2
X_{34}	$X_{34} \rightarrow X_{14} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{34}$	6-2+2-8=-2

La variable entrante est X_{34} :

Cycle	$X_{34} \rightarrow$	$X_{14} \rightarrow$	$X_{12} \rightarrow$	$X_{32} \rightarrow X_{34}$
Marquage	+	–	+	–
Valeurs des VB		$\underline{20}$	10	40
La plus petit valeur précédée par le signe (-) est 20 ➔ **VS:** X_{14}				
Traitement	+20	-20	+20	-20
Nouvelles valeurs des VB	20		30	20

Les résultats sont les suivantes :

	B1	B2	B3	B4
A1	**3**	**2** / **30**	**5**	**2**
A2	**6**	**5** / **40**	**8**	**7**
A3	**2** / **30**	**8** / **20**	**4** / **80**	**6** / **20**

On détermine à nouveau les cycles fermés correspondent aux VHB puis on calcule les coûts relatifs pour chaque cycle :

VHB	Cycle	Coût relatif
X_{11}	$X_{11} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11}$	3-2+8-2=7
X_{13}	$X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13}$	5-4+8-2=7
X_{14}	$X_{14} \rightarrow X_{34} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{14}$	2-6+8-2=2
X_{21}	$X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21}$	6-5+8-2=7
X_{23}	$X_{32} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32}$	8-4+8-5=7
X_{24}	$X_{24} \rightarrow X_{14} \rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{24}$	7-2+2-5=2

Tous les coûts relatifs sont positifs, cela signifie qu'il n'y a pas de variable HB qui diminue le coût global donc cette solution est optimale.

Le coût global est : $W = C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} + C_{33}X_{33} + C_{34}X_{34}$

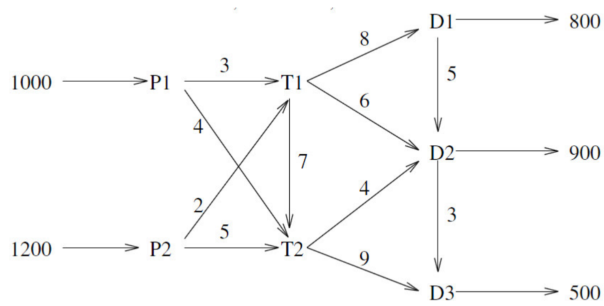
$$W = 2*30 + 5*40 + 2*30 + 8*20 + 4*80 + 6*20 = 920$$

10.5 Problèmes non balancés

On dit que le modèle est non balancé si l'offre n'est pas égale à la demande. A cet effet, on introduit une source artificielle (si la demande dépasse l'offre) ou destination artificielle (si l'offre dépasse la demande). La source et destination artificielles sont caractérisées par les coûts nuls.

10.6 Problème de transbordement

Il se peut que les quantités disponibles aux sources doivent être acheminées à des centres de distribution avant d'arriver aux destinations. Prenant par exemple deux usines P1 et P2 servent 3 vendeurs D1, D2 et D3, via deux centres de transit T1 et T2 (voir schéma suivant).



Transformation en problème de transport :

– 3 types de nœuds :

Nœuds d'offre purs : arcs sortants uniquement. offre = offre originale

Nœuds de demande purs : arcs entrants uniquement. demande = demande originale

Nœuds de transbordement : arcs entrants et sortants. offre/demande = offre/demande originale + buffer

– Les nœuds de transbordement sont à la fois sources et destinations pour le problème de transport.

– Buffer : quantité nécessaire pour transporter toute la demande à travers le nœud de transbordement. Dans notre exemple : B = 1000+1200=2200.

	T1	T2	D1	D2	D3	Offre
P1	3	4	M	M	M	1000
P2	2	5	M	M	M	1200
T1	0	7	8	6	M	2200
T2	M	0	M	4	9	2200
D1	M	M	0	5	M	2200
D2	M	M	M	0	3	2200
Demande	2200	2200	3000	3100	500	

Pour T1 et T2, la quantité demandée est la même puisque les deux points de transbordement reçoivent les produits des deux sources P1 et P2 (la somme des quantités).
Le client D1 demande une quantité de 800, quoique ce dernier a la possibilité de livrer le produit au client D2, donc on doit ajouter le buffer c'est-à-dire 800+2200=3000. Idem pour le client D2 ; 900+2200=3100 la quantité demandée. En effet les clients D1 et D2 représentent des points de transbordement. Le client D3 représente un point de demande c'est-à-dire la quantité demandée est 500.
La valeur M représente une très grande valeur de coût de transport, réellement signifie qu'il n'y a pas de relation entre la source et la destination. Utilisant les méthodes décrites, on peut facilement atteindre la solution optimale.

10.7 Autres utilisations du problème de transport

Le modèle de transport n'est pas limité au transport de produits entre des sources et destinations géographiques. En effet, il peut être adapté à d'autres problèmes économiques de minimisation tels que le financement des projets, la réalisation des projets avec un coût minimal, choix d'investissement, planification des opérations d'achat ou de vente, les problèmes d'approvisionnement et évidement il existe une multitude de cas facilement adaptables au modèle de transport. A titre d'exemple, nous citons ces deux cas :

Exemple 1 (Modèle de production).

Une société fabrique des sacs à dos, pour lesquels la demande arrive de mars à juin et est de 100, 200, 180 et 300 unités, respectivement. La production pour ces mois est de 50, 180, 280 et 270, respectivement.
La demande peut être satisfaite

1. par la production du mois courant (\$40 / sac) ;
2. par la production d'un mois précédent (+ \$0.5 / sac / mois pour le stockage) ;
3. par la production d'un mois suivant (+ \$2 / sac / mois de pénalité de retard).

Correspondances avec le modèle de transport :

Transport	Production – stocks	
Source i	Période de production i	mars, avril, mai et juin
Destination j	Période de demande j	mars, avril, mai et juin
Offre à la source i	Capacité de production à la période i	50, 180, 280, 270.
Demande à la destination j	Demande pour la période j	100, 200, 180, 300.
Coût de transport de i à j	Coût unitaire (production + stock + pénalité) pour une production en période i pour la période j	Voir le tableau suivant.

Tableau des coûts :

	Mars	Avril	Mai	Juin	Offre
Mars	40	42.5	45	47.5	50
Avril	42.5	40	42.5	45	180
Mai	45	42.5	40	42.5	280
Juin	47.5	45	42.5	40	270
Demande	100	200	180	300	

Exercice 10.2 (résolu) :

La ligue des activités sportives de l'université de mascara a organisé une compétition sportive de foot. Trois terrains de foot ont été retenus (omnisports de l'unité africaine, stade de la daira d'El Bordj et le stade de Tighennif) pour programmer un match par jour. L'office des ouvres sociales de l'université de mascara a été chargé pour transporter les participants et les spectateurs depuis trois points de départ (la cité universitaire 2000 lits, pôle de Mamounia et le pôle de Sid Said) par des mini bus de 30 places de capacité. Le tableau suivant décrit les différents coûts de transport.

	Stades			Nombre d'étudiants
	Unité Africaine	**El Bordj**	**Tighennif**	
Cité universitaire	5	7.5	6.5	**90**
Pôle de Sidi Said	5	7.5	6.5	**90**
Pôle de Mamounia	5.5	8	9	**95**
	120	**70**	**85**	

- Déterminer une solution de base réalisable au problème.
- Déterminer ainsi la solution optimale et calculer le coût global de transport.

On suppose que la solution retenue corresponde à un seul voyage (allée ou retour), et la compétition a été programmée sur trois jours :

- Quel sera le coût global ?
- Déterminer le nombre de bus nécessaires au transport selon la solution obtenue.

Solution 10.2

On remarque que le problème est balancé c'est-à-dire que le nombre des étudiants égale aux nombres de place disponibles : 90+90+95 = 120+70+85 = 275.

- *Déterminant une solution de base réalisable :* on utilise la méthode des moindres coûts.

D'après la solution de base obtenue, on remarque que le nombre de VB égal à (m+n-1) soit 5 variables de base.

	St. Mascara	St. El Bordj	St. Tighennif	Nb étudiants
2000 lits	5 / 90	7.5	6.5	~~90~~ 0
Sidi Said	5 / 30	7.5	6.5 / 60	~~90~~ ~~60~~ 0
Mamounia	5.5	8 / 70	9 / 25	~~95~~ ~~25~~ 0
Capacité	~~120~~ ~~30~~ 0	~~70~~ 0	~~85~~ ~~25~~ 0	**275** / **275**

Le cout global est : W= 5*90+5*30+6.5*60+8*70+9*25=1775 um.

- *Vérifiant ensuite l'optimalité de la solution :* on utilise la méthode de distribution modifiée.

On calcul les valeurs des variables duales qui vérifient la relation : $C_{ij}=u_i+v_j$ pour toutes les variables de base. On suppose que $u_1=0$; alors on obtient récursivement : $u_2=0$, $u_3=2.5$, $v_1=5$, $v_2=5.5$, $v_3=6.5$.

Calculant maintenant les coûts relatives aux VHB, on remarque qu'il y a des valeurs négatives c'est-à-dire la solution n'est pas optimale.

ui \ vj	**5**	**5.5**	**6.5**
0	5 / 90	7.5 / **2.5**	6.5 / **0**
0	5 / 30	7.5 / **2.5**	6.5 / 60
2.5	5.5 / **-1.5**	8 / 70	9 / 25

Construisant le cycle fermé correspond à la VHB X_{31} :

X_{31} ➔	X_{33} ➔	X_{23} ➔	X_{21} ➔	X_{31}
+	−	+	−	
	25	60	30	
+25	-25	+25	-25	
25		85	5	

Ainsi, le tableau est le suivant :

On calcul à nouveau les valeurs des variables duales qui vérifient la relation : $C_{ij}=u_i+v_j$ pour toutes les variables de base. On suppose que $u_1=0$; alors on obtient récursivement : $u_2=0$, $u_3=0.5$, $v_1=5$, $v_2=7.5$, $v_3=6.5$.

Les coûts relatives aux VHB sont tous positifs alors la solution est optimale.

ui \ vj	**5**	**7.5**	**6.5**
0	5 / 90	7.5 / **0**	6.5 / **0**
0	5 / 5	7.5 / **0**	6.5 / 85
0.5	5.5 / 25	8 / 70	9 / **2**

Le coût global est : W= 5*90+5*5+6.5*85+5.5*25+8*70=1725 um.

Remarque :

Il y a des VHB avec un coût relatif nul, cela signifie que la solution actuelle peut être changée tout en gardant la même valeur de la fonction économique (1725 um), du fait que le coût relatif d'une VHB représente son influence sur la valeur de la FE si cette variable est retenue comme variable entrante à la base.

Si on considère que la variable X_{12} est un VE, la solution sera la suivante :

$X_{11}=20$, $X_{12}=70$, $X_{21}=5$, $X_{23}=85$, $X_{31}=95$. Ce qui donne W=1725 um.

Il sera le même cas si on choisi X_{13} ou X_{22} comme variable entrante à la base. On dit qu'il y a des solutions alternatives.

On suppose que la solution retenue corresponde à un seul voyage (allée ou retour), cela donne six (6) voyages pour une durée de trois jours :

- Le coût global = 1725*6=10350 um
- Le nombre de bus nécessaires au transport selon la solution obtenue sera :
  1. Pour transporter 90 étudiants depuis la cité universitaire vers l'omnisports de l'unité africaine, il nécessite **trois (3) bus** (90/30=3).
  2. Pour transporter 5 étudiants depuis le pole de Mamounia avec 25 étudiants depuis le pole de Sidi Said le tous vers l'omnisports de l'unité africaine, il nécessite **un (1) bus.**
  3. Pour transporter 70 étudiants depuis le pole de Mamounia vers le stade d'El Bordj, il nécessite **trois (3) bus** (70/30=2.33).
  4. Pour transporter 85 étudiants depuis le pole de Sidi Said vers le stade de Tighennif, il nécessite **trois (3) bus** (85/30=2.83).

  Donc dix (10) bus sont nécessaires pour assurer le transport des étudiants sur une durée de trois jours.

Exercice 10.3 (non résolu) :

Une usine de fabrication des produits en plastique dispose trois dépôts situés géographiquement à Mascara, Oran et Alger. Suite à une rupture de stock d'un type de matière première essentielle à la fabrication d'un produit qui a été fortement demandée par ses quatre grands clients, les décideurs cherchent une meilleure stratégie de livraison en matière de coût et de temps. Les informations concernant l'offre et la demande ainsi que le coût unitaire de transport sont présentées dans le tableau ci-dessous :

- Détermine la stratégie optimale de transport.
- Comment justifier que cette stratégie est optimale en matière de temps ?

	Client1	Client2	Client3	Client4	Offre
Mascara	2	3	7	11	200
Oran	5	8	5	12	125
Alger	14	13	3	4	75
Demande	100	20	80	200	

Chapitre 11

11 Problème de transport –le cas de maximisation-

11.1 Introduction

L'utilisation des problèmes de transport ne se limite pas aux problèmes de minimisation car ils peuvent être appliqués aux problèmes de maximisation de bénéfices, de production, ...etc. Globalement, ils sont applicables à tout problème de maximisation qui peut être adapté à une structure cohérente aux modèles de transport. A la différence des problèmes de minimisation, la fonction économique prends le sens de maximisation et les coûts unitaires sont remplacés par les bénéfices unitaires selon le cas.

11.2 Forme mathématique

En effet, le modèle de transport est exprimé mathématiquement par la forme générale :

$$Max\ z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$\text{S.C :}\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i\ ; pour\ i = 1,2,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j\ ; pour\ j = 1,2,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \\ X_{ij} \geq 0, C_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Avec : "m" nombre de sources, "n" nombre de destinations, "D_j" quantités demandées, "S_i" quantités offertes.

11.3 Résolution d'un problème de transport

Il n'y a pas une grande différence entre la résolution des problèmes de maximisation et de minimisation sauf quelques ajustements des méthodes présentées dans le chapitre précédant. D'abord, il faut toujours vérifier la contrainte d'égalité des quantités d'offre et de demande. Si ce n'est pas le cas, on fait appel à l'ajout des sources (ou destinations) artificielles.

11.3.1 La recherche d'une solution de base réalisable

a- Méthode du coin Nord-Ouest (supérieur gauche) : choisir à chaque étape la variable située à l'intersection de la première ligne et la première colonne du tableau réduit. Donc on partant du coin supérieur gauche du tableau, voici les étapes :

1. allouer le plus possible à la cellule courante et ajuster l'offre et la demande ;
2. se déplacer d'une cellule vers la droite (demande nulle) ou le bas (offre nulle) ;
3. répéter jusqu'au moment où toute l'offre est allouée.

b- Méthode du bénéfice maximal : choisir à chaque étape la variable C_{pq} correspondant au plus grand bénéfice du tableau réduit. $C_{pq} = \max_{ij}(C_{ij})$

En détails, voici les étapes :

Sélectionner la cellule de bénéfice maximal.

1. allouer le plus possible à la cellule courante et ajuster l'offre et la demande ;
2. sélectionner la cellule de bénéfice maximal ayant une demande et une offre non nulles;
3. répéter jusqu'au moment où toute l'offre est allouée.

c- Méthode approximative de Vogel modifie : elle est basée sur le calcul des valeurs correspondantes à la différence entre les deux bénéfices successives les plus grands pour chaque ligne (colonne) avec une offre (demande) non-nulle, puis on sélectionne la ligne ou colonne de la valeur maximale et on sélectionne la cellule de bénéfice maximal dans la ligne ou colonne ; et ainsi de suite jusqu'à ce que toute l'offre est allouée.

11.3.2 La recherche de la solution optimale

On utilise les deux méthodes décrites dans le chapitre précédant à savoir :

a- Méthode de distribution modifie

Le programme dual d'un programme de transport est donné par :

$$Min: W = \sum_{i=1}^{m} a_i\, u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j\, v_j$$

$$avec: \; u_i + v_j > C_{ij} \,; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$

Après avoir calculé la valeur des variables duales, il devient facile de calculer la valeur des composantes du vecteur de bénéfice relatif pour chaque variable hors base :

$$C_{ij} - (u_i + v_j) \leq 0; \; pour\ toute\ VHB.$$

Ainsi, la solution de base considérée est optimale si et seulement si :

$$C_{ij} - (u_i + v_j) \leq 0; \; pour\ tout\ X_{ij} > 0$$

Si l'une de ces composantes est négative, alors nous ne sommes pas à l'optimum et doit déterminé la variable sortante et entrante pour préserver l'admissibilité :

Pour se faire on doit :

- Déterminer la *variable entrante* qui est caractérisée par la plus grande valeur des bénéfices relatifs positifs.
- Construire un cycle parcourant les variables de base en partant de et revenant à la *variable entrante* ;
- Marquer alternativement par + et – sur les variables qui construisent le cycle retenu en commençant par la *variable entrante*.
- Déplacer le long de lignes et colonnes en alternant ajout et retrait de la plus petite quantité parmi les quantités précédées par un signe moins (-), elle corresponde à la variable sortante.

- Recalculé les nouvelles valeurs des variables duales, puis les valeurs des bénéfices relatifs. Si ces derniers ne sont pas positifs alors la solution est optimale sinon on refait les étapes précédentes jusqu'à l'optimum.

b- Méthode de pierre mobile (stepping stone)

On détermine les cycles fermés pour toutes les variables hors base puis on calcule le bénéfice relatif de chaque cycle comme si on est dans le cas de minimisation.

- La variable entrante corresponde au cycle ayant le plus grand bénéfice positif.
- Le reste des étapes est identique à la méthode de distribution modifie.

Exercice résolu :

Une entreprise de transport a reçu une commande d'un mandateur pour transporter la pomme de terre depuis trois ports vers trois stocks. Pour l'entreprise le bénéfice change selon le kilométrage parcouru, les informations sur les quantités en tonnes d'offre et de demande ainsi que les bénéfices (x1000) en dinars sont présentées dans le tableau suivant :

	Stock 1	Stock 2	Stock 3	Offre (tonnes)
Port 1	9	3	1	200
Port 2	6	3	0.5	150
Port 3	4	0.5	8	250
Demande (tonnes)	280	220	100	

- Détermine la meilleure stratégie de transport afin de garantir le maximum de bénéfice.

Solution :

On remarque que la somme des quantités demandées égale à la somme des quantités offertes, de se fait on détermine une solution de base réalisable par la méthode du bénéfice maximal :

1. Le plus grand bénéfice est inscris dans la cellule (1,1), pour laquelle 200 T sont offertes et 280 T sont demandées alors la variable X_{11} reçoit 200.
2. Le bénéfice suivant le plus grand est celui de la cellule (3,3) donc X_{33} reçoit 100 donc la demande du stock 3 est totalement réglée.
3. A cette étape, le bénéfice le plus grand est celui de la cellule (2,1) et puisque la demande qui reste du stock 1 est 80, l'offre du port 2 est 150 alors la variable X_{21} reçoit 80.
4. Ensuite la cellule (3,1) est concernée par le plus grand bénéfice mais le fait que la quantité demandée est totalement réglée, on passe à la cellule (1,2) de bénéfice 3 milles dinars mais on remarque que la quantité d'offre est totalement consommée. On passe à la cellule (2,1) de bénéfice 3 milles dinars pour la quelle, la quantité d'offre est 70 et la quantité demandée est 220. Donc la variable X_{21} reçoit 70 c'est-à-dire l'offre du port 2 est consommé.

5. Il reste que la cellule (3,2) avec des quantités disponibles d'offre et de demande. Alors X_{32} reçoit 150. Ainsi, la solution de base est présentée dans le tableau suivant :

	Stock 1	Stock 2	Stock 3	Offre (tonnes)
Port 1	9 200	3	1	~~200~~ 0
Port 2	6 80	3 70	0.5	~~150~~ ~~70~~ 0
Port 3	4	0.5 150	8 100	~~250~~ ~~150~~ 0
Demande	~~280~~ ~~80~~ 0	~~220~~ ~~150~~ 0	~~100~~ 0	**600** / **600**

Le bénéfice global est : Z= $(9*200+6*80+3*70+0.5*150+8*100)*10^3 = 3365*10^3$ um.
On examine l'optimalité de cette solution par la méthode de pierre mobile (stepping stone). On commence par le calcul des bénéfices relatifs des cellules vides (VHB) :

VHB	Cycle	Bénéfice relatif
X_{12}	$X_{12} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{12}$	3-3+6-9=-3
X_{13}	$X_{13} \to X_{33} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{13}$	1-8+0.5-3+6-9=-12.5
X_{23}	$X_{23} \to X_{33} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{23}$	0.5-8+0.5-3=-10
X_{31}	$X_{31} \to X_{21} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{31}$	4-6+3-0.5=0.5

La solution n'est pas optimale car il existe des VHB avec un bénéfice relatif positif donc la VE est X_{31} :

X_{31}	X_{21}	X_{22}	X_{32}
+	-	+	-
	<u>80</u>	70	150
+80	-80	+80	-80
80		150	70

La solution devient :

	Stock 1	Stock 2	Stock 3	Offre (tonnes)
Port 1	9 200	3	1	200
Port 2	6	3 150	0.5	150
Port 3	4 80	0.5 70	8 100	250
Demande	280	220	100	**600** / **600**

Calculant les bénéfices relatifs des cellules vides (VHB) :

VHB	Cycle	Bénéfice relatif
X_{12}	$X_{12} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \to X_{12}$	3-0.5+4-9=-2.5
X_{13}	$X_{13} \to X_{33} \to X_{31} \to X_{11} \to X_{13}$	1-8+4-9=-12
X_{21}	$X_{21} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{21}$	6-3+0.5-4=-0.5
X_{23}	$X_{23} \to X_{33} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{23}$	0.5-8+0.5-3=-10

Tous les bénéfices relatifs sont négatifs donc il n'y pas de variable hors base qui peut augmenter le bénéfice global alors la solution est optimale.

Le bénéfice global est : Z= $(9*200+3*150+4*80+0.5*70+8*100)*10^3 = 3405*10^3$ um.

Cette solution est exprimée comme suit :

L'entreprise doit transporter une quantité de 200 tonnes depuis le port1 vers le stock1, 150 tonnes depuis le port2 vers le stock2 et 250 tonnes depuis le port3 distribuées respectivement sur les trois stocks selon les quantités 80, 70, 100.

L'entreprise va gagner la somme de : 3 405 000 um.

Exercice non résolu :

Un livreur de poissons vise à satisfaire les besoins de ses clients à l'ouest tout en respectant la quantité demandée et le temps de livraison. A cet effet, il a implanté quatre dépôts bien répartis géographiquement vis-à-vis ses clients. D'habitude, il ramène les poissons depuis trois pêcheries (Oran, Mostaganem et Ain Témouchent), les gains par fardeau de poisons ainsi que les quantités d'offre et les capacités d'accueil (par unité) des dépôts sont représentées dans le tableau suivant :

		Dépôt1	**Dépôt2**	**Dépôt3**	**Dépôt4**	**Offre**
Pêcheries	Oran	10	30	20	11	200
	Mostaganem	12	7	9	20	350
	Ain Témouchent	30	14	16	18	180
	Capacité d'accueil	260	300	120	50	

- En utilisant toutes les méthodes étudiées, il est demandé d'aider ce livreur dans sa mission.
- Expliquez la solution retenue.
- Quel est le gain total.
- Commentez sur le problème du temps de livraison.

Références bibliographiques.

Hamdy A. Taha, Operations Research, an introduction, 8 edition. Prentice-Hall, 2007.

Markov D. P., Predrag S., and Nebojsa V. A modification of revised simplex method. 2002 [163-169].

Ratoul M. Recherche Opérationnelle. 2006, 2ième édition.

Robert F., Bernard L., et Christophe P. Précis de recherche opérationnelle, Méthodes et exercices d'application. Collection : Sciences Sup, Dunod. 2014 - 7ème édition.

Sakarovitch, M. Linear programming. Springer-Verlag, New York-Berlin. 1983.

Werra, D., Liebling, T.-M., et Héche, J.-F. Recherche Opérationnelle pour Ingénieurs, Tome 1. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2003.

Wolsey, L. A. Integer Programming. Wiley-Interscience, 1998.

Support de cours

Brauner, N. Cours de recherche opérationnelle I, , Grenoble 2015

Bernard F. Recherche opérationnelle et applications. 2012

Poly de cours http://www.g-scop.grenoble-inp.fr/~braunern

Sites internet

http://www.phpsimplex.com/fr/theorie_methode_simplexe.htm#deux_phases

http://www2.informs.org/Resources/

http://www.ensta.fr/~diam/ro/

Logiciels pour la RO

http://www.coin-or.org/resources.html

http://www.wior.uni-karlsruhe.de/bibliothek/