République Algérienne démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de La Recherche Scientifique

جامعة مصطفى اسطمبولي

بمعسكر

Faculté des sciences Exactes et Appliquées

Département de Mathématiques

Thèse de doctorat

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Sujet de la thèse :

RICCI SOLITONS GÉNÉRALISÉS ET QUELQUES STRUCTURES

Présenté par

Mekki Mohammed El Amine

Soutenu le 22 Décembre devant le jury composé de :

Président	Pr. Benmeriem	Khaled	Université de Mascara
Encadreur :	Dr. Mohamed-Cherif	Ahmed	Université de Mascara
Examinateurs :			
	Dr.ZEGGA	Kaddour	Université de Mascara
	Pr. OUAKKAS	Seddik	Université de Saida

Année Universitaire 2019 – 2020

A

mes très chers parents,

ma soeur,

ma famille, et mes amis. . .

Remerciements

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur A. Mohammed-Cherif encadreur de cette thèse, pour ses précieux conseils et encouragements tout au long de ce travail.

Je remercie sincèrement Monsieur K. Benmeriem pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury et examinateur de ce travail. Mes remerciements vont vivement à Messieurs S. OUAKKAS et K. ZEGGA d'avoir bien voulu examiner ce travail.

Je remercie également tous les enseignants des départements de mathématiques de l'Université de Mascara et de l'Université d'Oran1 qui ont participé à ma formation pendant tout le cycle universitaire.

Table des matières

Introduction

En mathématique, la conjecture de Poincaré est reconnue comme l'un des problèmes mathématiques les plus difficiles du 20^{eme} siècle, comme son nom l'indique cette conjecture revient à une question posée en 1904 par le célèbre mathématicien francais Henri Poincaré "est-ce-que toutes 3-variétés simplement connexe et compacte est homéomorphe à la sphère S^3.

En 1970, William Thurston a généralisé la conjecture en proposant une classification en huit modèles pour toutes les 3-variétés, qui a porté le nom de "Problème de géomètrisation de Thurston" dont la conjecture de Poincaré était un cas particulier. Quelques années plus tard, Richard Hamilton a donné une approche ingénieuse qui a mené à la résolution du problème de géométrisation. L'idée de Hamilton consistait à homogènéiser la courbure sur une 3-variété initiale pour obtenir une 3-variété finale à courbure homogène constante cela en s'inspirant du phénomène de la propagation de la chaleur. Cette méthode est appelée programme de Hamilton, il consiste à prendre une variété riemannienne (M, g_0) et faire évoluer le tenseur métrique suivant une EDP qui ressemble à l'équation de la chaleur, ce qui donne :

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}_{g_t}, \quad g_0 = g.$$

Cette équation connue sous le nom du Flot de Ricci. Les premières solutions de cette EDP apparues dans l'article de Hamilton étaient les métriques d'Einstein resp (les solitons de Ricci) données par l'équation $Ric = \lambda g$ resp $(\mathcal{L}_X g = Ric + 2\lambda g)$, pour une certaine constante λ. Ces solutions sont des points fixes pour le flot de Ricci car il n'agit sur eux que par homothétie ce qui nous explique d'où vient l'appellation soliton de Ricci, ces solitons peuvent être classifiés en trois types selon le λ défini précédemment, donc on a trois cas si $\lambda < 0$ le soliton est expansif, si $\lambda = 0$ il est dit stable, et si $\lambda > 0$ rétractif.

Après avoir donné des résultats triviaux Hamilton énonce un résultat local, ce qui a rassuré Hamilton que son programme marche bien et que c'est la bonne démarche pour résoudre la conjecture, mais ce n'est pas encore fini car cette joie n'a pas duré longtemps à cause des singularités qui viennent troubler Hamilton. Par singularité on veut dire l'explosion du flot en un temps fini mais ce type de singularité n'est pas le seul, et c'est à ce moment là où intervient le génie de l'école russe Grigori Perelman qui a pu les classifier et même résoudre le problème de géométrisation. Perelman a introduit deux fonctionnelles qui on joué un rôle important dans sa preuve, depuis lors ces deux fonctionnelles sont connues sous le nom de "$\lambda-$*entropie* et $\mu-$*entropie* de Perelman", la chose remarquable c'est que les points critiques de ces fonctionnelles sont les solitons de Ricci qui étaient vus comme points fixes pour le flot de Ricci, ce qui a donné envie aux mathématiciens de connaître la géométrie et la topologie de ces solitons et bien sûr à les classifier. Les nombreux travaux de classification ont mené à une remarque importante est que les solitons qui ne sont pas d'Einstein sont rares et comme les solitons sont une généralisaton des variétés d'Einstein et que ces dernières se trouvent en abondance sur la classe des variétés de Sasaki, une question naturelle s'est poseé par Cao : "existe t-il des solitons de Ricci du type rétractif sur des variétés de Sasaki qui ne sont pas d'Einstein ?" de nombreux résultats sont publiés mais malheureusement ils sont : : : tous négatifs. pendant cela une généralisation des solitons vient de paraître ce sont les solitons de Ricci généralisés donnés par :

$$\mathcal{L}_X g = -2c_1 X^\flat \odot X^\flat + 2c_2 \mathrm{Ric} + 2\lambda g$$

où $X^\flat$ est une 1-forme définie par $X^\flat = g(X,)$ et c_1, c_2, λ sont des réels. Il est clair que cette généralisation est loin d'être naturelle mais son avantage est qu'elle a pu regrouper de nombreuses équations intéressantes en géométrie différentielle, ce qui nous a poussé à investiguer la question de Cao sur cette dernière.

Le but de cette thèse est l'étude les solitons de Ricci généralisés, puis de trouver quelques résultats liés aux variétés de Sasaki et les variétés K-contact.

Ce travail est reparti en quatre chapitres. Le premier chapitre décrit les outils de la géométrie différentielle et la géométrie Riemannienne en introduisant multiples définitions à savoir la métrique Riemannienne, la connexion de Levi-Civita, les tenseurs de courbure et aussi fait rappel aux opérateurs remarquables définissant ainsi le gradient, la divergence, le Hessien et le Laplacien. Le deuxième chapitre traite les variétés de contact et leurs propriétés. Le troisième chapitre met en relief la définition d'un soliton de Ricci, étudie des exemples de Ricci soliton, présente quelques proprietés avec preuves et conclut la démonstration de Théorème suivant "Si la métrique g d'une variété métrique de contact η-Einstein $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ est un soliton de Ricci non-Einstein, alors M est K-contact, et $\lambda > 0$".
Dans le quatrième chapitre on définit les solitons de Ricci généralisés. Ensuite, on construit quelques exemples. En établissant les théorèmes suivants :

Théorème 0.1. *[10] Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Sasaki de dimension $(2n+1)$, qui satisfait l'équation du soliton de Ricci généralisé (4.1) avec $X = \mathrm{grad} f$ pour $f \in C^\infty(M)$. Si $c_1(\lambda + 2c_2 n) \neq -1$, alors f est constante. De plus, si $c_2 \neq 0$, alors (M, g) est une variété d'Einstein.*

Théorème 0.2. *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété K-contact, et satisfait l'équation du soliton de Ricci généralisé. (i) Si $c_1 = 0$ ou V est orthogonal à ξ, alors V est un champ de Jacobi le long de chaque géodésique associé à ξ, i.e.*

$$R(V, \xi)\xi + \nabla_\xi \nabla_\xi V - \nabla_{\nabla_\xi \xi} V = 0.$$

(ii) Si $V = \operatorname{grad} f$*, où* $f \in C^\infty(M)$*, alors* $\operatorname{grad} f$ *est de Jacobi le long de chaque géodésique associé à* ξ *si et seulement si* $c_1(\operatorname{Hess} f)(\xi, \xi) = 0$.

Théorème 0.3. *Si une variété K-contact* (M^{2n+1}, g) *est un soliton de Ricci généralisé de type gradient avec* $c_1(\lambda + 2c_2 n) \neq -1$*, alors* f *est une fonction constante. De plus, si* $c_2 \neq 0$*, alors* (M, g) *est une variété d'Einstein.*

Théorème 0.4. *Si une métrique K-contact* g *est un soliton de Ricci généralisé avec* V *colinéaire avec* ξ *et* $c_2 \neq 0$*. Alors,* V *est un multiple constant de* ξ*, et* g *est* η*-Einstein. De plus, si* $c_1 = 0$*, alors* (M, g) *est une variété d'Einstein.*

Chapitre 1

Généralités et préliminaires

1.1 Rappels de géométrie différentielle

Définition 1.1.

1. ***(Espace topologique séparé)*** *On appelle espace topologique un couple $(X;O)$ où X est un ensemble et O est une famille de parties de X, stable par réunion quelconque, intersection finie et contenant l'ensemble total X et l'ensemble vide. Les $U \in O$ sont appelés les ouverts de la topologie. Le couple $(X;O)$ forme un espace topologique séparé (ou espace de Hausdorff), si pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$ il existe $U, V \in O$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*
2. ***(Carte)*** *Une carte (U, ϕ) sur un espace topologique séparé M est la donnée d'un ouvert U de M et d'un homéomorphisme ϕ de U vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$. n est appelé la dimension de la carte (U, φ).*
4. ***(Atlas de classe C^k)*** *Un atlas sur un espace topologique séparé M est la donnée d'un ensemble de cartes (U_i, ϕ_i) de même dimension n, telles que les U_i recouvrent M. On dit qu'un atlas $\mathcal{A}$ sur un espace topologique séparé est de classe C^k si les applications $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont de classe C^k entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ (n est appelé aussi la dimension de M).*

Définition 1.2 (Variété de classe C^k)**.** *Une variété de classe C^k est un espace topologique séparé, muni d'un atlas $\mathcal{A}$ de classe C^k.*

Notation. "Variété différentiable" signifiera toujours variété de classe C^∞.

Exemple 1. L'espace $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension n avec $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$.

Exemple 2 (L'espace projectif réel). L'ensemble quotient $P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/_\sim$, où :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ x = \lambda y,$$

est une variété différentiable de dimension n. En effet ; Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ alors il existe $i \in \{1, 2, ..., n+1\}$, tel que $x_i \neq 0$. Pour chaque $i = 1, ..., n+1$, on dénote par U_i l'ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ défini par :

$$U_i = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \; / x_i \neq 0\}.$$

La famille $(U_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ constitue un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. On dénote par $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$, $x \longmapsto \bar{x}$ la surjection canonique, où $\bar{x}$ est la classe de x modulo la relation d'équivalence $\sim$, et par $\bar{U_i}$ l'image de U_i par π. L'espace projectif réel $P_n(\mathbb{R})$ muni de la topologie quotient est recouvert par la famille $(\bar{U_i})_{1 \leq i \leq n+1}$. Et pour chaque $i = 1, ..., n+1$, on note par φ_i l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i \; : U_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) & \longmapsto & (\dfrac{x_1}{x_i}, \dfrac{x_2}{x_i}, ..., \dfrac{x_{i-1}}{x_i}, \dfrac{x_{i+1}}{x_i}, \dfrac{x_{n+1}}{x_i}) \end{array}$$

soit $\bar{\varphi_i}$ l'application de $\bar{U_i}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\bar{\varphi_i}(\bar{x}) = \varphi_i(x)$ pour tout $\bar{x} \in \bar{U_i}$. Les $\bar{\varphi_i}$ définissent des applications bijectives et compte tenu de la topologie quotient de $P_n(\mathbb{R})$, la famille confère à l'espace projectif réel une structure de variété différentiable de dimension n et de classe C^∞.

Définition 1.3 (Application différentiable)**.** *Soient $(M, \mathcal{A})$ et $(N, \mathcal{B})$ deux variétés différentiables, et f une application de $(M, \mathcal{A})$ dans $(N, \mathcal{B})$. On dit que f est différentiable (resp. de classe C^r) en un point x de M si pour une carte (U, ϕ) dans $\mathcal{A}$ dans un voisinage du point x, et une carte $(U^{'}, \phi^{'})$ dans $\mathcal{B}$ autour du point $f(x)$, l'application $\phi^{'} \circ f \circ \phi^{-1}$ est différentiable (resp. de classe C^r). L'application f est différentiable dans M si f est différentiable en x, pour tout $x \in M$.*

Notation. Nous utilisons les notations suivantes :

$$C^\infty(M) = \text{l'ensemble des fonctions différentiables de } M \text{ dans } \mathbb{R}.$$

$$C^\infty(M, N) = \text{l'ensemble des applications différentiables de } M \text{ dans } N.$$

1.2 Fibré Tangent

Définition 1.4 (L'espace tangent à une variété différentiable)**.** *Soit M une variété différentiable. Deux courbes différentiables $c_1, c_2 \; :] - \epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$ sont tangentes au point p si $c_1(0) = c_2(0) = p$ et s'il existe une carte locale (U, φ) de M telles que $p \in U$ et*

$$\frac{d(\varphi \circ c_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi \circ c_2)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des courbes passant par p :

$$" c_1 \sim c_2 \text{ si elles sont tangentes en } p "$$

Un vecteur tangent à M en p est une classe d'équivalence de courbes tangentes en p. L'espace tangent à M en p, noté T_pM, est l'ensemble des vecteurs tangents à M en p.

Remarque 1. Soit c une courbe différentiable définie sur un intervalle $]-\epsilon, \epsilon[$ à valeurs dans un sous-ensemble de la variété différentiable M. Notons par $C_p^\infty(M)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ autour du point $p = c(0)$. Un vecteur tangent à la courbe c au point p est un opérateur $\dot{c}(0) : C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\dot{c}(0)(f) = \frac{d(f \circ c)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Définition 1.5 (Le fibré tangent à une variété différentiable)**.** *Le fibré tangent à une variété différentiable est l'ensemble*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM,$$

(muni d'une structure différentiable naturelle, TM devient une variété différentiable de dimension $2\dim M$).

Définition 1.6 (L'application tangente en un point)**.** *Soient M et N deux variétés différentiables et soit f une application différentiable de M dans N. Pour tout point p de M, l'application tangente de f au point p est l'application linéaire*

$$\begin{aligned} d_pf : T_pM &\longrightarrow T_{f(p)}N \\ \dot{c}(0) &\longmapsto d_pf(\dot{c}(0)) : C^\infty_{f(p)}(N) \longrightarrow \mathbb{R}. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad g \longmapsto \frac{d(g \circ f \circ c)}{dt}\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

1.3 Champ de tenseurs

Définition 1.7 (Champ de vecteurs)**.** *Un champ de vecteurs X sur une variété différentiable M est une application qui associe à tout point p de M un vecteur tangent à M en ce point p :*

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \in T_pM. \end{aligned}$$

Un champ de vecteurs est dit différentiable si l'application définie ci-dessus l'est aussi. L'ensemble de tous les champs de vecteurs de M est noté par $\Gamma(TM)$ ou $\mathcal{X}(M)$.

Définition 1.8 (Tenseur)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension n.*

1. *Un k-tenseur sur V est une application multilinéaire réelle définie sur le produit $\underbrace{V \times V \times ... \times V}_{k\text{-fois}}$.*

   L'espace des k-tenseurs est lui-même un espace vectoriel réel noté par $\mathcal{T}^k(V^*)$.

2. *Un (r, s)-tenseur sur V est une application multilinéaire réelle définie sur le produit $\underbrace{V \times V \times ... \times V}_{s\text{-fois}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times ... \times V^*}_{r\text{-fois}}$, où V^* est le dual algébrique de V. L'espace des (r, s)-tenseurs est aussi un espace vectoriel réel noté par $\mathcal{T}^{k,m}(V^*, V)$.*

Définition 1.9 (Champ de tenseurs)**.** *Soit M une variété différentiable. Un (r, s)-champ de tenseurs (ou champ de tenseurs de type (r, s)) sur M est une application qui associe à chaque point $p \in M$ un (k, m)-tenseur $\mathcal{T}_p \in \mathcal{T}^{r,s}(T_p^*M, T_pM)$, où T_p^*M désigne l'espace cotangent dual de T_pM.*

Remarque 2. Soit M une variété différentiable. Une 1-forme différentielle ω sur M est un champ de tenseurs de type $(0, 1)$. L'ensemble des 1-formes différentielles sur M, est noté par $\Gamma(T^*M)$, ou $\Omega^1(M)$.

1.4 Dérivée de Lie

Définition 1.10 (Groupe de transformations à un-paramètre)**.** *Soit M une variété différentiable. Un groupe de transformation à un-paramètre ϕ sur M, est une application différentiable de $M \times \mathbb{R}$ dans M, tel que $\phi(x, 0) = x$, et $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t+s)$ pour tout $x \in M$, t, $s \in \mathbb{R}$.*

On définit $\phi_t(x) \equiv \phi(x, t)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, ϕ_t est une application differentiable de M vers M, et $\phi_{t+s}(x) = \phi(x, t + s) = \phi(\phi(x, t), s) = \phi(\phi_t(x), s) = \phi_s(\phi_t(x)) = (\phi_s \circ \phi_t)(x)$, alors $\phi_{t+s} = \phi_s \circ \phi_t = \phi_t \circ \phi_s$ puisque $t + s = s + t$.
ϕ_0 est l'application identité de M vers M puisque $\phi_0(x) = \phi(x, 0) = x$ pour tout $x \in M$.
On a, $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_0$, cela veut dire que chaque application ϕ_t a une application inverse ϕ_{-t}, qui est aussi différentiable. Donc, ϕ_t est un difféomorphisme de M vers M.
Ainsi, l'ensemble des transformations $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe commutatif, noté *Diff*(M), et l'application $t \longmapsto \phi_t$ est un homomorphisme entre le groupe additif des nombres réels et le groupe des diffeomorphismes $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ sur M.
Chaque groupe de transformations à un-paramètre ϕ sur M détermine une famille de courbes dans M (l'orbite du groupe). L'application $\phi_x : \mathbb{R} \longrightarrow M$ donnée par $\phi_x(t) = \phi(x, t)$ est une

courbe différentiable sur M pour tout $x \in M$. Comme $\phi_x(0) = \phi(x,0) = x$, le vecteur tangent à la courbe ϕ_x au point $t = 0$ appartient à T_xM. Le générateur de ϕ est le champ de vecteurs X, tel que $X_x = \dot{\phi}_x(0)$.

Définition 1.11 (Flot d'un champ de vecteurs)**.** *Soit M une variété différentiable, et soit X un champ de vecteurs sur M. Le flot de X, noté $\phi_X : I \to Diff(M), t \mapsto \phi_{X,t}, (0 \in I \subset \mathbb{R})$, est l'unique solution de l'équation différentielle de condition initiale :*

$$\frac{d\phi_{X,t}(x)}{dt}\Big|_t = X_{\phi_{X,t}(x)}, \qquad \phi_{X,0}(x) = x, \qquad \forall x \in M.$$

Définition 1.12. *Soit M une variété différentiable, et soit X, Y deux champs de vecteurs sur M. La dérivée de Lie de Y par rapport à X est définie par :*

$$(\mathcal{L}_X Y)_x = \frac{d}{dt}(\phi^*_{X,t}Y)(x)\Big|_{t=0}, \quad \forall x \in M,$$

où $\phi_{X,t}$ est le flot de X, et $\phi^*_{X,t}$ est son pull-back :

$$\phi^*_{X,t} : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM), \qquad \phi^*_{X,t}Y = d\phi^{-1}_{X,t} \circ Y \circ \phi_{X,t}.$$

Proposition 1.1. *$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, on a $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$.*

Preuve. Soit U un ouvert de M. Etant donné $f \in C^\infty(U)$, on pose :

$$\widetilde{f}(t,x) = f(\phi_{X,-t}(x)).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(t,x) - \widetilde{f}(0,x) &= \int_0^t \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}(s,x)ds \\
&= t\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}(ts,x)ds.
\end{aligned}$$

Soit $g(t,x) = \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}(ts,x)ds$. Puisque f et ϕ_X sont C^∞, $\widetilde{f}$ et g sont C^∞, on obtient :

$$\begin{aligned}
g(0,x) &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t}(0,x) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(\phi_{X,-t}(x)) \\
&= d_x f(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\phi_X(-t,x)) \\
&= d_x f(-X(x)) \\
&= -X(f)(x).
\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}(\phi^*_{X,-t}Y)_x(f) &= (Y(f\circ\phi_{X,-t}))(\phi_{X,t}(x))\\ &= Y_{\phi_{X,t}(x)}(f\circ\phi_{X,-t}),\end{aligned}$$

or $u\longmapsto f\circ\phi_{X,-t}(u)=\widetilde{f}(t,u)$ s'écrit :

$$u\longmapsto \widetilde{f}(0,u)+tg(t,u)=f(u)+tg(t,u)=(f+tg_t)(u),$$

où $g_t(u):=g(t,u)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(\phi^*_{X,-t}Y)_x(f) &= Y_{\phi_{X,t}(x)}(f+tg_t)\\ &= Y_{\phi_{X,t}(x)}(f)+tY_{\phi_{X,t}(x)}(g_t)).\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(\phi^*_{X,-t}Y-Y)_x(f) &= \frac{1}{t}(Y_{\phi_{X,t}(x)}(f)-Y_x(f))+Y_{\phi_{X,t}(x)}(g_t)\\ &= \frac{1}{t}(Y(f)(\phi_{X,t}(x))-Y(f)(x))+Y_{\phi_{X,t}(x)}(g_t).\end{aligned}$$

Comme $t\longmapsto\phi_{X,t}(x)$ est une courbe dont le vecteur vitesse en $t=0$ est $X(x)$, on obtient :

$$X_x(Y(f))=\lim_{t\to 0}\frac{(Y(f))(\phi_{X,t}(x))-Y(f)(x)}{t}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\phi^*_{X,-t}Y-Y)_x(f) &= X_x(Y(f))+\lim_{t\to 0}Y_{(\phi_{X,t})(x)}g_t\\ &= X_x(Y(f))+Y_x g_0\\ &= X_x(Y(f))-Y_x(X(f))\\ &= [X,Y]_x(f).\end{aligned}$$

■

Proposition 1.2. *Soit M une variété différentiable, alors :*

1. $\mathcal{L}_X f=X(f),\ \forall X\in\Gamma(TM),\ \forall f\in C^\infty(M)$.
2. $\mathcal{L}_X(fY)=f[X,Y]+X(f)Y,\ \forall X,Y\in\Gamma(TM),\ \forall f\in C^\infty(M)$.
3. $(\mathcal{L}_X\omega)(Y)=X(\omega(Y))-\omega([X,Y]),\ \forall X,Y\in\Gamma(TM),\ \forall\omega\in\Gamma(T^*M)$.
4. *Pour les formes différentielles α et β sur M, on a :*

$$\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta)=\mathcal{L}_X\alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\mathcal{L}_X\beta$$

5. *Soient* S, T *deux champs de tenseurs sur* M*, on a :*

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_x T$$

6. $\forall T \in \underbrace{\Gamma(TM) \otimes ... \otimes \Gamma(TM)}_{r-fois} \otimes \underbrace{\Gamma(T^*M) \otimes ... \otimes \Gamma(T^*M)}_{s-fois}$*, on a :*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)(\omega_1, \cdots, \omega_r, Y_1, \cdots, Y_s) &= X(T(\omega_1, \cdots, \omega_r, Y_1, \cdots, Y_s)) \\ &\quad -T(\mathcal{L}_X \omega_1, \cdots, \omega_r, Y_1, \cdots, Y_s) \\ &\quad - \cdots - T(\omega_1, \cdots, \omega_r, Y_1, \cdots, \mathcal{L}_X Y_s).\end{aligned}$$

Preuve.

1. Soit $X \in \Gamma(TM)$ et soit $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$(\mathcal{L}_X f)_x = \frac{d}{dt}(\phi^*_{X,t} f)(x)|_{t=0},$$

d'autre part $\phi^*_{X,t} f$ est donnée par :

$$\phi^*_{X,t} f(x) = f(\phi_{X,t}(x)),$$

on trouve :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X f)_x &= \frac{d}{dt}(f(\phi_{X,t}(x)))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f \circ \gamma|_{t=0} \\ &= \dot{\gamma}(0)(f) \\ &= X(f),\end{aligned}$$

où $\gamma(t) = \phi_{X,t}(x)$.

2. Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$, et soit $f \in C^\infty(M)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(fY) &= [X, fY] \\ &= X(fY) - fY(X) \\ &= X(f)Y + fX(y) - fY(X) \\ &= X(f)Y + f[X, Y].\end{aligned}$$

3. Soit α, β deux formes différentielles, alors en $x \in M$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) &= \frac{d}{dt}((\phi_{X,t})^*(\alpha \wedge \beta))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((\phi_{X,t})^*\alpha \wedge (\phi_{X,t})^*\beta)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}[\frac{1}{2}((\phi_{X,t})^*\alpha \otimes (\phi_{X,t})^*\beta - (\phi_{X,t})^*\beta \otimes (\phi_{X,t})^*\alpha)]|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}[\frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\alpha|_{t=0} \otimes (\phi_{X,0})^*\beta + (\phi_{X,0})^*\alpha \otimes \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\beta|_{t=0} \\
&\quad - \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\beta|_{t=0} \otimes (\phi_{X,0})^*\alpha - (\phi_{X,0})^*\beta \otimes (\frac{d}{dt}\phi_{X,t})^*\alpha|_{t=0}] \\
&= \frac{1}{2}[\frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\alpha|_{t=0} \otimes (\phi_{X,0})^*\beta - (\phi_{X,0})^*\beta \otimes (\frac{d}{dt}\phi_{X,t})^*\alpha|_{t=0}] \\
&\quad + \frac{1}{2}[(\phi_{X,0})^*\alpha \otimes \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\beta|_{t=0} - \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\beta|_{t=0} \otimes (\phi_{X,0})^*\alpha)] \\
&= \frac{1}{2}[\frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\alpha|_{t=0} \otimes \beta - \beta \otimes (\frac{d}{dt}\phi_{X,t})^*\alpha|_{t=0}] \\
&\quad + \frac{1}{2}[(\alpha \otimes \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\beta|_{t=0} - \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\beta|_{t=0} \otimes \alpha)] \\
&= \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\alpha|_{t=0} \wedge \beta + \alpha \wedge \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*\beta|_{t=0} \\
&= (\mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta)_x + (\alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta)_x \\
&= (\mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta)_x.
\end{aligned}$$

4. Soient S ,T deux champs de tenseurs, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(S \otimes T)_x &= \frac{d}{dt}((\phi_{X,t})^*(S \otimes T))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}((\phi_{X,t})^*S \otimes (\phi_{X,t})^*T)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*S|_{t=0} \otimes (\phi_{X,0})^*T + (\phi_{X,0})^*S \otimes \frac{d}{dt}(\phi_{X,t})^*T|_{t=0} \\
&= (\mathcal{L}_X S \otimes T)_x + (S \otimes \mathcal{L}_X T)_x \\
&= (\mathcal{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T)_x.
\end{aligned}$$

■

1.5 Rappels de géométrie Riemannienne

1.6 Variété Riemannienne

Définition 1.13 (Métrique Riemannienne)**.** *Soit M une variété differentiable de dimension n. On appelle métrique Riemannienne sur M, le choix d'un champ de tenseurs g de type $(0, 2)$ partout defini sur M, et tel que pour tout p dans M :*

$$g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

soit une forme bilinéaire symétrique, et définie positive.

Une variété Riemannienne est un couple (M, g), où M est une variété différentiable, et g une métrique Riemannienne.

Exemple 3.

1. (L'espace Euclidien) L'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire standard :

$$g_0(V, W) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

   où $V = (v_0, \ldots, v_n)_x, \quad W = (w_0, \ldots, w_n)_x \in T_x\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, est une variété Riemannienne.

2. (Métrique Hyperbolique g_H) Dans la boule :

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$$

   on considère la métrique Riemannienne :

$$g_H(X, Y) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2}\, g_0(X, Y), \quad X, Y \in T_x\mathbb{R}^n, \quad x \in D^n.$$

1.7 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.14 (Connexion linéaire)**.** *Une connexion linéaire sur une variété differentiable M est une application $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

où $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *et* $f, g \in C^\infty(M)$. *On dit que* $\nabla_X Y$ *est la dérivée covariante de* Y *en direction de* X.

Soit g une métrique Riemannienne sur une variété différentiable M, une connexion linéaire ∇ est dite compatible avec g si :

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{1.1}$$

A toute connexion linéaire ∇ sur une variété différentiable on associe le tenseur de torsion du type (1,2) suivant :

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Théorème 1.5. *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, alors l'application :*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

définie par la formule de Koszul :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]), \end{aligned} \tag{1.2}$$

est une connexion linéaire sur M, *appelée connexion de Levi-Civita. De plus, cette connexion linéaire est l'unique connexion linéaire sans torsion* $(T = 0)$, *et compatible avec la métrique* g.

Preuve. Soit $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) - 2g(\nabla_Y X, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \\ &\quad - Y(g(X,Z)) - X(g(Z,Y)) + Z(g(Y,X)) \\ &\quad - g(Z,[Y,X]) - g(X,[Z,Y]) + g(Y,[X,Z]) \\ &= 2g([X,Y],Z). \end{aligned}$$

D'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion. De même méthode on obtient :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) + 2g(\nabla_X Z, Y) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \\ &\quad + X(g(Z,Y)) + Z(g(Y,X)) - Y(g(X,Z)) \\ &\quad + g(Y,[X,Z]) + g(Z,[Y,X]) - g(X,[Z,Y]) \\ &= 2X(g(Y,Z)), \end{aligned}$$

donc la connexion de Levi-Civita est compatible avec g. Comme g est définie positive, donc non-dégénérée, ainsi la relation (1.2) détermine complètement la connexion ∇, ce qui donne l'unicité. ■

Proposition 1.3. *Soient (M,g) une variété Riemannienne, de dimension n, ∇ la connexion de Levi-Civita, et (U,φ) une carte sur M avec les champs de bases associés $\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}$. Alors :*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{\partial}{\partial x_k},$$

où Γ_{ij}^k sont les coefficients de Christoffel donnés par :

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}g^{kl}\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\}, \tag{1.3}$$

et $g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ sont les coordonneés de g relativement à la carte (U,φ), avec $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$.

Définition 1.15. *Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de (M,g).*

1. *$\nabla_X f=X(f)$, $\forall X\in\Gamma(TM)$, $\forall f\in C^\infty(M)$*
2. *$(\nabla_X\omega)(Y)=X(\omega(Y))-\omega(\nabla_XY)$, $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$, $\forall\omega\in\Gamma(T^*M)$.*
3. *Soit T un tenseur de type (s,r), $\forall X,Y_1,\dots,Y_r\in\Gamma(TM)$, $\forall\omega_1,\dots,\omega_s\in\Gamma(T^*M)$,*

$$\begin{aligned}(\nabla_XT)(\omega_1,\dots,\omega_s,Y_1,\dots,Y_r) &= X(T(\omega_1,\dots,\omega_s,Y_1,\dots,Y_r))\\ &\quad -T(\nabla_X\omega_1,\dots,\omega_s,Y_1,\dots,Y_r)\\ &\quad -\dots-T(\omega_1,\dots,\nabla_X\omega_s,Y_1,\dots,Y_r)\\ &\quad -T(\omega_1,\dots,\omega_s,\nabla_XY_1,\dots,Y_r)\\ &\quad -\dots-T(\omega_1,\dots,\omega_s,Y_1,\dots,\nabla_XY_r).\end{aligned}$$

1.8 Tenseurs de Courbure

Définition 1.16 (Tenseur de courbure). *Soit M une variété différentiable, ∇ une connexion linéaire sur M. On définit le tenseur de courbure associé à la connexion linéaire ∇ :*

$$R\,:\,\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z, \tag{1.4}$$

où X, Y, $Z\in\Gamma(TM)$, et $[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X$ est le crochet de Lie sur $\Gamma(TM)$.

Définition 1.17. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n, le tenseur de courbure associé à la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne, ce tenseur de courbure Riemannienne peut être exprimé en fonction des symboles de Christoffel :*

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^{l}\partial_l,$$

$$R_{ijk}^{l} = \partial_i(\Gamma_{jk}^{l}) - \partial_j(\Gamma_{ik}^{l}) + \sum_{m=1}^{n}\{\Gamma_{im}^{l}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{l}\Gamma_{ik}^{m}\},$$

où $(\partial_i)_{i=1\ldots n}$ est une base locale de champs de vecteurs sur M.

Proposition 1.4. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, et X, Y, Z, W des champs de vecteurs sur M. Alors :*

1. *$R(X, X)Z = 0$;*
2. *$R(X, X, Z, W) = 0$;*
3. *$R(X, Y, Z, Z) = 0$;*
4. *$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (l'identité de Bianchi algébrique),*

où $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ est le tenseur de courbure du type $(0, 4)$ sur (M, g).

Preuve. La première et la deuxième équation sont équivalentes et elles découlent immédiatement de la définition (1.16), et du fait que $[X, X] = 0$. Pour montrer la troisième, on a :

$$\begin{aligned} X\left[Y\left[g(Z, Z)\right]\right] &= X\left[g(\nabla_Y Z, Z) + g(Z, \nabla_Y Z)\right] \\ &= 2X\left[g(\nabla_Y Z, Z)\right] \\ &= 2\left(g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

De même pour :

$$Y\left[X\left[g(Z, Z)\right]\right] = 2\left(g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z)\right). \tag{1.6}$$

et on a :

$$[X, Y]\left(g(Z, Z)\right) = 2g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z). \tag{1.7}$$

De (1.5), (1.6), et (1.7) on obtient :

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,Z) &= g(R(X,Y)Z,Z) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, Z) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) - g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z) \\
&= \frac{1}{2}\left(X\left[Y\left[g(Z,Z)\right]\right] - Y\left[X\left[g(Z,Z)\right]\right] - [X,Y]\left(g(Z,Z)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}(X \circ Y - Y \circ X - [X,Y])(g(Z,Z)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour la quatrième, on utilise :

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

On a :

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{1.8}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
R(Y,Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&= \nabla_Y (\nabla_X Z + [Z,X]) - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \left[Z,X\right] - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[Z,X]} Y + [Y,[Z,X]] \\
&\quad - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X,
\end{aligned} \tag{1.9}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
R(Z,X)Y &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_Z (\nabla_Y X + [X,Y]) - \nabla_X (\nabla_Y Z + [Y,Z]) - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_Z (\nabla_Y X) + \nabla_Z ([X,Y]) - \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_X ([Y,Z]) - \nabla_{[Z,X]} Y \\
&= \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_{[X,Y]} Z + [Z,[X,Y]] \\
&\quad - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,Z]} X - [X,[Z,Y]] - \nabla_{[Z,X]} Y.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

à partir des équations (1.8), (1.9), et (1.10), avec $[X,Y] = -[Y,X]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \quad \text{(L'identité de Jacobi)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1. *Sous les mêmes conditions de la proposition précédente, on a :*

1. $R(Y,X)Z = -R(X,Y)Z$;
2. $R(Y,X,Z,W) = -R(X,Y,Z,W)$;
3. $R(X,Y,W,Z) = -R(X,Y,Z,W)$.

Preuve. 3. On a :

$$\nabla_Y g(Z,W) = g(\nabla_Y Z, W) + g(Z, \nabla_Y W),$$

$$\begin{aligned} \nabla_X(\nabla_Y g(Z,W)) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) \\ &+ g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(Z, \nabla_X\nabla_Y W). \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) &= \nabla_X(\nabla_Y g(Z,W)) - g(Z, \nabla_X\nabla_Y W) \\ &- g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y W), \end{aligned}$$

de même, on a :

$$\begin{aligned} g(\nabla_Y\nabla_X Z, W) &= \nabla_Y(\nabla_X g(Z,W)) - g(Z, \nabla_Y\nabla_X W) \\ &- g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X W). \end{aligned}$$

Comme la connexion linéaire ∇ est compatible avec g, on trouve :

$$g(\nabla_{[X,Y]}Z, W) = -g(Z, \nabla_{[X,Y]}W) + [X,Y]\,(g(Z,W)).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z, W) - g(\nabla_Y\nabla_X Z, W) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, W) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y g(Z,W)) - g(Z, \nabla_X\nabla_Y W) \\ &- g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) - \nabla_Y(\nabla_X g(Z,W)) + g(Z, \nabla_Y\nabla_X W) \\ &+ g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}W) - [X,Y]\,(g(Z,W)) \\ &= -g(Z, \nabla_X\nabla_Y W) + g(Z, \nabla_Y\nabla_X W) + g(Z, \nabla_{[X,Y]}W) \\ &= -R(X,Y,W,Z). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5. *Soient (M,g) une variété Riemannienne, et X, Y, Z, W des champs de vecteurs sur M, alors le tenseur de courbure R satisfait :*

$$R(Z,W,X,Y) = R(X,Y,Z,W).$$

Preuve. En utilisant l'identité algébrique de Bianchi , on peut vérifier que :

$$R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=0.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
R(W,X,Z,Y)+R(X,Z,W,Y)+R(Z,W,X,Y) &= 0;\\
R(Y,W,X,Z)+R(W,X,Y,Z)+R(X,Y,W,Z) &= 0;\\
R(Z,Y,W,X)+R(Y,W,Z,X)+R(W,Z,Y,X) &= 0.
\end{aligned}$$

à partir des quatre équations précédentes, et en utilisant 2) et 3) du Corollaire 1.1, on obtient :

$$2R(Y,Z,X,W)+2R(Z,X,Y,W)+2R(Z,W,X,Y)=0.$$

Comme :

$$R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=-R(X,Y,Z,W),$$

donc :

$$\begin{aligned}
2R(Y,Z,X,W)+2R(Z,X,Y,W)+2R(W,Z,Y,X) &= -2R(X,Y,Z,W)+2R(W,Z,Y,X)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où :

$$R(W,Z,Y,X)=R(X,Y,Z,W).$$

Finalement :

$$R(Z,W,X,Y)=R(X,Y,Z,W).$$

■

Remarque 3. Le tenseur de courbure est $C^\infty(M)$ 3-linéaire.

1.9 Courbure Sectionnelle

Définition 1.18. *Soient (M,g) une variété Riemannienne de dimension n $(n \geq 2)$, $x \in M$, et P un 2-plan de T_xM de base $\{X,Y\}$. On appelle courbure sectionnelle de P :*

$$K(P)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2}.$$

On dit que (M,g) est de courbure constante s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in M$, et pour tout 2-plan P de T_xM, on a $K(P)=k$.

Théorème 1.6. *Une variété Riemannienne (M,g) (de dimension $n \geq 2$) est de courbure sectionnelle constante k si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :*

$$R(X,Y)Z=k\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right], \quad \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM).$$

1.10 Tenseur de Ricci

Définition 1.19. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. La courbure de Ricci de (M, g), est un champ de tenseurs du type $(0, 2)$ défini par :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X, Y) &= trace(Z \longmapsto R(Z, X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i), \end{aligned} \tag{1.11}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, où $(e_i)_{i=1\ldots n}$ est une base locale orthonormée sur (M, g).

Propriété 1.1. *La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M, g) est symétrique.*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Ric}(Y, X), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Définition 1.20. *Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne (M, g) de dimension n, est un champ de tenseurs du type $(1, 1)$ défini par :*

$$\mathrm{Ricci}(X) = \sum_{i=1}^{n} R(X, e_i)e_i, \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Remarque 4. Pour $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = g(\mathrm{Ricci}(X), Y).$$

1.11 Courbure Scalaire

Définition 1.21. *On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne (M, g) de dimension n, la fonction définie sur M par :*

$$S = trace\,\mathrm{Ric} = \sum_{i,j=1}^{n} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i).$$

où $(e_i)_{i=1\ldots n}$ est une base locale orthonormée sur (M, g).

Corollaire 1.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n de courbure constante k, alors :*

1. $\mathrm{Ricci}(X) = (n-1)\,k\,X$;
2. $\mathrm{Ric}(X, Y) = (n-1)\,k\,g(X, Y)$;

3. $S = n(n-1)k$.

Exemple 4.

1. La sphère $\mathbb{S}^n$ est de courbure positive égale 1 ;
2. L'espace $\mathbb{R}^n$ est de courbure nulle ;
3. L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$ muni de la métrique :

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

est de courbure négative égale -1.

1.12 Opérateur Gradient

Définition 1.22. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n, on définit l'opérateur Gradient par :*

$$\mathrm{grad} : C^{\infty}(M) \longrightarrow \Gamma(TM), \quad f \longmapsto \mathrm{grad} f,$$

tel que pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$g(\mathrm{grad} f, X) = X(f).$$

On peut écrire le Gradient localement par :

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée sur (M, g), alors :

$$\mathrm{grad} f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i.$$

Propriété 1.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors :*

1. $\mathrm{grad}\,(f + g) = \mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, g$ *;*

2. $\mathrm{grad}\,(f\, h) = h \,\mathrm{grad}\, f + f \,\mathrm{grad}\, h$ *;*

3. $(\mathrm{grad}\, f)(h) = (\mathrm{grad}\, h)(f)$ *;*

4. $g(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y) = g(\nabla_Y \mathrm{grad}\, f, X)$ *;*

où $f, h \in C^{\infty}(M)$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$.

1.13 Opérateur Divergence

Soit X un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne (M, g), alors :

$$\nabla X : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM), \quad Z \longmapsto \nabla_Z X,$$

est une application $C^\infty(M)$-linéaire.

Définition 1.23. *La Divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $\operatorname{div} X$ est une fonction sur M, définie par :*

$$\operatorname{div} X = trace\, \nabla X.$$

L'expression de la Divergence en coordonnées locales est donnée par :

$$\operatorname{div} X = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Définition 1.24. *La Divergence d'une 1-forme ω sur (M, g), est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \omega &= trace(Z \longmapsto \nabla_Z \omega); \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} \omega)(e_i); \\
&= \sum_{i=1}^{n} g^{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \omega)(\frac{\partial}{\partial x_i}).
\end{aligned}$$

Plus généralement, on peut aussi définir la Divergence d'un $(1, r)$-tenseur, comme suit :

$$(\operatorname{div} T)(X_1, ..., X_r) = trace(Z \longmapsto (\nabla_Z T)(X_1, ..., X_r)).$$

Propriété 1.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, alors :*

1. $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;
2. $\operatorname{div}(f X) = f \operatorname{div} X + X(f)$;
3. $\operatorname{div}(\omega + \eta) = \operatorname{div} \omega + \operatorname{div} \eta$;
4. $\operatorname{div}(f\omega) = f \operatorname{div} \omega + \omega(\operatorname{grad} f)$.

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, $\omega, \eta \in \Gamma(T^*M)$, et $f \in C^\infty(M)$.

Preuve. On applique la définition de la Divergence, soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormée locale sur (M, g), on a :

1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}(X+Y), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X, e_i) + \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}Y, e_i) \\
&= \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}(fX), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(e_i(f)X + f\nabla_{e_i}X, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(f)g(X, e_i) + f\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i}X, e_i) \\
&= X(f) + f\operatorname{div} X.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\omega+\eta) &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}(\omega+\eta))(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) + \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\eta)(e_i) \\
&= \operatorname{div}\omega + \operatorname{div}\eta.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\omega) &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}(f\omega))(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(f\omega(e_i)) - f\sum_{i=1}^{n} \omega(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i(f)\omega(e_i) + f\sum_{i=1}^{n} e_i(\omega(e_i)) - f\sum_{i=1}^{n} \omega(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega(e_i(f)e_i) + f\sum_{i=1}^{n} e_i(\omega(e_i)) - f\sum_{i=1}^{n} \omega(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= \omega(\operatorname{grad} f) + f\operatorname{div}\omega.
\end{aligned}$$

■

1.14 Opérateur Hessien

Définition 1.25. *Soit f une fonction différentiable sur une variété Riemannienne (M,g) de dimension n, la Hessien de f est définie par :*

$$\begin{array}{llcc} \mathrm{Hess}\, f & : \ \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & C^\infty(M). \\ & \qquad (X,Y) & \longmapsto & (\mathrm{Hess}\, f)(X,Y) = g(\nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y) \end{array}$$

Remarque 5.

1. $\mathrm{Hess}\, f$ est un champ de tenseurs de type (0,2),
2. $\mathrm{Hess}\, f$ est symétrique : $(\mathrm{Hess}\, f)(X,Y) = (\mathrm{Hess}\, f)(Y,X)$.
3. Localement, on a :

$$\mathrm{Hess}\, f = \sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{Hess}\, f)_{ij}\, dx_i \otimes dx_j,$$

où $(\mathrm{Hess}\, f)_{ij}$ sont données par :

$$\begin{aligned} (\mathrm{Hess}\, f)_{ij} &= g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \mathrm{grad}\, f, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

1.15 Opérateur Laplacien

Définition 1.26. *Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension n, on définit l'opérateur Laplacien, noté $\triangle$, sur (M,g) par :*

$$\begin{array}{llcc} \triangle & : \ C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ & \qquad f & \longmapsto & \triangle(f) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) \end{array}$$

Propriété 1.4. *Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension n, alors :*

1. $\triangle(f+h) = \triangle(f) + \triangle(h)$;
2. $\triangle(fh) = h\triangle(f) + f\triangle(h) + 2g(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h)$;

pour tout $f,h \in C^\infty(M)$.

Preuve. Soient $f,h \in C^\infty(M)$, en utilisant les propriétés des opérateurs grad et div et le fait que $X(f) = g(\mathrm{grad}\, f, X)$, on obtient :

1.

$$\begin{aligned}
\triangle(f+h) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f+h)) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f + \operatorname{grad} h) \\
&= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) \\
&= \triangle(f) + \triangle(h),
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\triangle(fh) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad}(fh)) \\
&= \operatorname{div}(f\operatorname{grad}(h) + h\operatorname{grad}(f)) \\
&= \operatorname{div}(f\operatorname{grad}h) + \operatorname{div}(h\operatorname{grad}f) \\
&= f\operatorname{div}(\operatorname{grad}h) + (\operatorname{grad} h)(f) + h\operatorname{div}(\operatorname{grad}f) + (\operatorname{grad} f)(h) \\
&= f \triangle (h) + h \triangle (f) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.6 (Expression du Laplacien en coordonnées locales)**.** *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n, alors :*

$$\triangle(f) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right),$$

pour toute $f \in C^\infty(M)$.

Preuve. Pour toute $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned}
\triangle(f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_j}) - g(\operatorname{grad} f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial f}{\partial x_j}) - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k g(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial x_k}) \right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).
\end{aligned}$$

■

1.16 Les fibrés vectoriels

Définition 1.27. *On appelle fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$, le triplet (E, π, M), où E et M sont des variétés différentiables, et $\pi : E \longrightarrow M$ une application surjective de classe C^∞, telles que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Pour tout $x \in M$, $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension k.*
2. *(Condition de trivialisation locale). Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ tels que :*

   i) *$P_1 \circ \varphi = \pi$, i.e. le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "P_1"] \\ & U \end{tikzcd}$$

   où $P_1 : (x, y) \in U \times \mathbb{R}^k \longmapsto x \in U$ désigne la première projection.

   ii) *L'application $\varphi_x = \varphi_{|E_x} : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^k$ est linéaire bijective pour tout $x \in M$.*

La variété M est appelée base du fibré, E l'espace total, et $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ la fibre au-dessus de x.

Exemple 5 (Fibré tangent). Soit M une variété différentiable de dimension n,

$$\begin{array}{rcll} \pi : TM & \longrightarrow & M & \\ v & \longmapsto & x & \qquad (v \in T_xM) \end{array}$$

la projection canonique. Le triplet (TM, π, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^n$. En effet :

1. TM est une variété différentiable de dimension $2n$;
2. Pour tout $x \in M$, $\pi^{-1}(\{x\}) = T_xM \simeq \mathbb{R}^n$;
3. Si (V, ψ) une carte de M en x, alors la carte de trivialisation locale est définie par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \pi^{-1}(V) & \longrightarrow & V \times \mathbb{R}^n. \\ (y, v) & \longmapsto & (y, d_y\psi(v)) \end{array}$$

Exemple 6 (Fibré trivial). Soit M une variété différentiable de dimension n. On pose :

$$E = M \times \mathbb{R}^k,$$

$$\begin{aligned} \pi : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow M. \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Alors, (E, π, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$.

Définition 1.28 (Section sur un fibré vectoriel)**.** *Une section sur un fibré vectoriel (E, π, M) est une application $\sigma : M \longrightarrow E$ de classe C^∞ telle que $\pi \circ \sigma = Id_M$ (i.e. $\sigma(x) \in E_x$, pour tout $x \in M$). Une section locale au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ de E est une application $\sigma : U \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ \sigma = Id_U$. L'ensemble des sections d'un fibré vectoriel (E, π, M), noté $\Gamma(E)$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La multiplication d'une section $\sigma \in \Gamma(E)$ par une fonction $f \in C^\infty(M)$ est donnée par :*

$$(f\sigma)(x) = f(x)\sigma(x), \quad x \in M.$$

Proposition 1.7. *Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de type fibre $\mathbb{R}^k$, si (U, φ) est une carte vérifiant la condition de trivialisation locale, alors :*

1. *pour tout $i = 1, .., k$:*

$$\begin{aligned} \sigma_i^\varphi : U &\longrightarrow E, \\ x &\longmapsto \sigma_i^\varphi(x) = \varphi_x^{-1}(e_i) \end{aligned}$$

   est une section de classe C^∞, où $(e_1, ..., e_k)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^k$.

2. *$(\sigma_1^\varphi, ..., \sigma_k^\varphi)$ est une base locale des sections de E.*

Inversement. Si $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ est une base de sections sur E définie sur un ouvert $U \subset M$, alors :

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : U \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \pi^{-1}(U), \\ (x, y^1, ..., y^k) &\longmapsto \sum_{i=1}^k y^i \sigma_i(x) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme, tel que $(\pi^{-1}(U), \varphi)$ est une carte de trivialisation locale.

Exemple 7. Un champ de vecteurs sur une variété différentiable M, est une section du fibré tangent associé à TM.

Définition 1.29 (Fibré dual d'un fibré vectoriel)**.** *Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$. Nous définissons le fibré dual de E, noté E^* par $E^* = \bigcup_{x \in M} E_x^*$. Soit :*

$$\begin{aligned} \pi^* : E^* &\longrightarrow M, \\ \omega \in E_x^* &\longmapsto x \end{aligned}$$

alors (E^*, π^*, M) est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$. Si (U, φ) est une carte sur E, vérifiant la condition de trivialisation locale, on pose :

$$\begin{aligned} \varphi^* : (\pi^*)^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^k, \\ \omega \in E_x^* &\longmapsto (x, \omega(\varphi_x^{-1}(e_1)), ..., \omega(\varphi_x^{-1}(e_k)) \end{aligned}$$

où $(e_1, ..., e_k)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Alors, (U, φ^*) est une carte sur E^* vérifiant la condition de trivialisation locale.

Définition 1.30 (Section sur un fibré vectoriel dual)**.** *Une section sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) de fibre type $\mathbb{R}^k$ est une application $\omega : M \longrightarrow E^*$ de classe C^∞, telle que $\pi^* \circ \omega = Id_M$ (i.e. $\omega(x) \in E_x^*$ pour tout $x \in M$).*

(Une section ω sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) est de classe C^∞ si et seulement si pour toute carte (U, φ) vérifiant la condition de trivialisation locale sur E,

$$\omega(\sigma_1), ..., \omega(\sigma_k) \in C^\infty(U).$$

On déduit la proposition suivante :

Proposition 1.8. *Toute section $\omega \in \Gamma(E^*)$ sur le fibré vectoriel dual (E^*, π^*, M) définit une application $C^\infty(M)$-linèaire :*

$$\begin{aligned} \omega : \Gamma(E) &\longrightarrow C^\infty(M), \\ \sigma &\longmapsto \omega(\sigma) \end{aligned}$$

tel que, pour tout $x \in M$, on a $\omega(\sigma)(x) = \omega_x(\sigma(x))$.

Exemple 8 (Fibré cotangent). Soient M une variété différentiable C^∞ de dimension n, $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$ (T_x^*M étant le dual de l'espace tangent T_xM), et :

$$\begin{aligned} \pi^* : T^*M &\longrightarrow M \\ \omega \in T_x^*M &\longmapsto x \end{aligned}$$

la projection canonique. Alors, le triplet (T^*M, π, M) est un fibré vectoriel, de fibre type $\mathbb{R}^n$ et de carte de trivialisation locale associée à la carte (U, ψ) de M, définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : (\pi^*)^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n, \\ (y, \omega) &\longmapsto (y, \omega(\partial_1|_y), ..., \omega(\partial_n|_y)) \end{aligned}$$

où $(\partial_1, ..., \partial_n)$ désigne la base des champs de vecteurs relative à la carte (V, ψ). (T^*M, π^*, M) est le fibré dual du fibré tangent (TM, π, M) (appelé fibré cotangent).

Définition 1.31 (Produit tensoriel de fibré)**.** *Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type respectivement $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$. Nous définissons le produit tensoriel de E et F, noté $E \otimes F$, par $E \otimes F = \bigcup_{x\in M} E_x \otimes F_x$, où, E_x (resp. F_x) la fibre au-dessus de x sur E (resp. sur F), et l'application π par :*

$$\begin{aligned} \pi : E \otimes F &\longrightarrow M. \\ v \otimes w &\longmapsto \pi(v \otimes w) = \pi_E(v) = \pi_F(w) \end{aligned}$$

Alors, $(E\otimes F, \pi, M)$ est un fibré vectoriel sur M de fibre type $\mathbb{R}^{k.l}$, appelé fibré produit tensoriel de (E, π_E, M) et (F, π_F, M).

Soient (U, φ) et (V, ψ) deux cartes vérifiant la condition de trivialisation locale respectivement sur E et F , avec $U \cap V \neq \emptyset$. Alors :

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : \pi^{-1}(U \cap V) &\longrightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \\ v \otimes w \in E_x \otimes F_x &\longmapsto (x, \varphi_x(v) \otimes \psi_x(w)) \end{aligned}$$

définie une carte sur $E \otimes F$ vérifiant la condition de trivialisation locale, où :

$$\varphi_x = Pr_2 \circ \varphi \quad , \quad \psi_x = \tilde{P}r_2 \circ \psi,$$

$$\begin{aligned} Pr_2 : M \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^k, \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \tilde{P}r_2 : N \times \mathbb{R}^l &\longrightarrow \mathbb{R}^l. \\ (x, z) &\longmapsto z \end{aligned}$$

Définition 1.32 (Section sur le fibré produit tensoriel)**.** *Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type respectivement $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$. Une section sur le produit tensoriel $E \otimes F$ est une application $T : M \longrightarrow E \otimes F$ de classe C^∞, telle que $\pi \circ T = Id_M$ (i.e. $T(x) \in E_x \otimes F_x$ pour tout $x \in M$).*

Soit (U, φ) (resp. (V, ψ)) une carte vérifiant la condition de trivialisation locale sur E (resp. sur F) de base locale de sections $(\sigma_i^\varphi)_{i=1}^k$ (resp. $(\sigma_j^\psi)_{j=1}^l$). Si $T \in \Gamma(E \otimes F)$ est une section sur le produit tensoriel $E \otimes F$, on a :

$$T|_{U\cap V} = T^{ij} \sigma_i^\varphi \otimes \sigma_j^\psi \, ,$$

où T^{ij} sont des fonctions différentiables de classe C^∞ sur M (pour tout $i = 1..k$ et $j = 1..l$).

Définition 1.33 (Sous-fibré)**.** *Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$. On dit que $E' \subset E$ est un sous-fibré de E de rang k' si au voisinage de tout point il existe une carte de trivialisation de E telle que :*

$$\pi^{-1}(U) \cap E' \simeq U \times (\mathbb{R}^{k'} \times \{0\}) \subset U \times \mathbb{R}^k.$$

(Un sous-fibré vectoriel est un fibré vectoriel).

Exemple 9. Si N est une sous-variété de M, alors TN est un sous-fibré de $i^*(TM)$, où $i : N \hookrightarrow M$ est l'injection canonique.

Définition 1.34 (Fibré quotient)**.** *Soit (E, π, M) un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$. A tout sous-fibré $E' \subset E$ est associé le fibré quotient défini ponctuellement par :*

$$(E/E^{'})_x = E_x/E^{'}_x, \quad \forall x \in M.$$

Définition 1.35 (Somme de Whitney)**.** *Soient (E, π_E, M) et (F, π_F, M) deux fibrés vectoriels de fibre type respectivement $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^l$. Nous définissons la somme de Whitney de E et F, noté $E \oplus F$ par :*

$$E \oplus F = \bigcup_{x \in M} E_x \times F_x,$$

où E_x (resp. F_x) la fibre au-dessus de x sur E (resp. sur F), et l'application π par :

$$\begin{array}{rcl} \pi : E \oplus F & \longrightarrow & M. \\ (v, w) & \longmapsto & \pi_E(v) = \pi_F(w) \end{array}$$

Alors, $(E \oplus F, \pi, M)$ est un fibré vectoriel sur M de fibre type R^{k+l}, appelé somme de Whitney de (E, π_E, M) et (F, π_F, M).

Chapitre 2

Géométrie de contact

2.1 Variétés de contact

Soit M une variété differentiable de dimension $2n+1$, et $\mathcal{D}$ un champ d'hypére-plans sur M, c'est un sous-fibré de rang $2n$. Une façon pratique pour décrire un tel champ d'hypére-plans c'est de le voir comme étant le Ker d'une 1-forme linéaire.

Lemme 2.1. *La distribution $\mathcal{D}$ peut s'écrire localement comme le Ker d'une 1-forme linéaire η. Il est aussi possible d'écrire $\mathcal{D} = Ker\eta$, avec η est une forme globale sur M si et seulement si $\mathcal{D}$ est co-orientable (ce qui veut dire par définition que la droite-fibré quotient $TM/\mathcal{D}$ est triviale).*

Preuve. Choisissons une métrique Riemannienne g sur M et définissons le fibré des droites $\mathcal{D}^{\perp}$ comme étant l'orthogonale de $\mathcal{D}$ sur TM par rapport à la métrique g. Alors $TM = \mathcal{D}^{\perp} \oplus \mathcal{D}$ et $TM/\mathcal{D} = \mathcal{D}^{\perp}$. Autour de chaque point p de M, il existe un voisinage U_p autour duquel la droite-fibré $\mathcal{D}^{\perp}$ est triviale. Soit X une section non nulle de $\mathcal{D}^{\perp}|_U$ et définissons une 1-forme η_U sur U par $\eta_U = g(X, \ )$. Donc il est clair que $\mathcal{D}|_U = Ker\eta_U$. Dire que $\mathcal{D}$ est co-orientable revient à dire que $\mathcal{D}^{\perp}$ est orientable donc triviale. Dans ce cas là, X et η_U existent globalement. Inversement, si $\mathcal{D} = Ker\eta$ avec η une 1-forme globale, on peut définir une section globale de $\mathcal{D}^{\perp}$ par les conditions $g(X, X) = 1$, $\eta(X) > 0$, d'où $\mathcal{D}$ est co-orientable. ■

Définition 2.36. *Soit M une variété différentiable de dimension $2n+1$. Une structure de contact sur M est un champ d'hypére-plans $\mathcal{D} = Ker\eta$ non-intégrable (la 1-forme η doit satisfaire la condition $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$.) Une telle 1-forme η est dite une forme de contact, et $(M, \mathcal{D})$ est dite variété de contact.*

Exemple 10. Soit $\mathbb{R}^{2n+1}$ avec les coordonnées cartésiennes $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$, alors :

$$\eta_1 = dz + \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j$$

est une forme de contact sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. La structure de contact $\mathcal{D}_1 = Ker\eta_1$ est dite la structure de contact standard sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.
Pour la dimension 3, on a $\eta_1 = dz + xdy$, donc :

$$Ker\eta_1 = \langle \{\partial_x, -x\partial_z + \partial_y\} \rangle .$$

Exemple 11. Soit le Tore $T^3 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. On pose $\eta = \cos\, x_3\, dx_1 - \sin\, x_3\, dx_2$. Alors, (T^3, η) est une variété de contact. En effet ; $d\eta = \sin\, x_3\, dx_1 \wedge dx_3 + \cos\, x_3\, dx_2 \wedge dx_3$, alors :

$$\begin{aligned} \eta \wedge d\eta &= (\cos\, x_3\, dx_1 - \sin\, x_3\, dx_2) \wedge (d\eta) \\ &= \cos^2 x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - \sin^2 x_3\, dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &= (\cos^2 x_3 + \sin^2 x_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \neq 0. \end{aligned}$$

Remarque 6. 1) Remarquons que si η est une forme de contact, la forme $\eta \wedge (d\eta)^n$ est une forme volume sur M (i.e. est une $2n+1$-forme sur M qui ne s'annule nulle part), donc M doit être orientable. 2) La condition $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ est indépendante du choix de η. En effet, toute autre forme définissant $\mathcal{D}$ doit être de la forme $\lambda\eta$ avec $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ une fonction différentiable, on a :

$$(\lambda\eta) \wedge (d(\lambda\eta))^n = \lambda\eta \wedge (\lambda d\eta + d\lambda \wedge \eta)^n = \lambda^{n+1}\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0.$$

On voit clairement que si n est impair, le signe de cette forme volume dépend seulement de $\mathcal{D}$, et non pas du choix de η, donc la structure de contact $\mathcal{D}$ induit une orientation naturelle de M. Si M est initialement orientable, on peut parler de structure de contact positive et négative.

Lemme 2.2. *En dimension trois, la condition de contact peut aussi se reformuler par :*

$$[X, Y]_p \notin \mathcal{D}_p,$$

pour chaque point $p \in M$, et pour chaque champ de vecteurs $X, Y \in \mathcal{D}$ linéairement indépendants.

Preuve. L'équation :

$$d\eta(X,Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X,Y]),$$

implique que :

$$d\eta(X,Y) = -\eta([X,Y]), \quad \forall X,Y \in \mathcal{D} = Ker\eta.$$

En dimension trois, la condition de contact $\eta \wedge d\eta \neq 0$ est équivalente à $d\eta|_{\mathcal{D}} \neq 0$.
Ce qui implique $\eta([X,Y]) \neq 0$, donc $[X,Y] \notin Ker\eta = \mathcal{D}$. ■

Exemple 12. Pour la structure de contact $\eta_1 = dz + xdy$ définie dans $\mathbb{R}^3$, on a :

$$[\partial_x, \partial_y - x\partial_z] = -\partial_z \notin \mathcal{D}_1.$$

Voici un autre aspect fondamental de la géométrie de contact :

Lemme 2.3. *Pour toute forme de contact il existe un champ de vecteurs ξ (le champ de Reeb), il est déterminé par les équations :*

1. $d\eta(\xi, X) = 0$, $\forall X \in \Gamma(TM)$ *;*
2. $\eta(\xi) = 1$ *(condition de normalisation).*

Preuve. D'après la condition de contact $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, on en déduit que pour chaque point $p \in M$ la 2-forme $d\eta|_{T_pM}$ est de rang maximal $2n$ (avec M est de dimension $2n+1$) donc le noyau de $d\eta|_{T_pM}$ est de dimension 1 et l'équation 1) définie ξ de manière unique.
Encore une fois la condition de contact, nous donne que la forme η ne s'annule pas sur le noyau de $d\eta$, et la condition de normalisation 2) nous donne une section non nulle de ce fibré de droites. ■

Exemple 13. Le champ de Reeb de la variété de contact $(\mathbb{R}^3, \eta_1)$ c'est $\xi = \partial_z$.

2.2 Variétés presque de contact

Définition 2.37. *Soit M une variété différentiable de dimension impaire $(2n+1)$, on appelle structure presque de contact sur M la donnée d'un triplet (φ, ξ, η), tel que :*

1. *ξ est un champ de vecteurs sur M ;*
2. *η est une 1-forme différentielle sur M avec $\eta(\xi) = 1$;*

3. *φ est un champ de tenseurs de type* $(1,1)$ *verifiant la condition :*

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \ \ \forall X \in \Gamma(TM). \tag{2.1}$$

Exemple 14 (Cylindre d'une variété presque-complexe). Soient J une structure presque-complexe sur une variété M, et t la coordonnée cartésienne sur $\mathbb{R}$. Sur la variété produit $M \times \mathbb{R}$ on considère le champ de vecteur $\xi = (0, \frac{\partial}{\partial t})$, la 1-forme $\eta = (0, dt)$, et l'endomorphisme $\varphi : \mathcal{X}(M \times \mathbb{R}) \to \mathcal{X}(M \times \mathbb{R})$, donné par $\varphi(X, f\frac{\partial}{\partial t}) = (JX, 0)$ pour tout $X \in \mathcal{X}(M)$, et $f \in \mathcal{F}(M \times \mathbb{R})$. Alors, le système (φ, ξ, η) définit une structure presque de contact sur $M \times \mathbb{R}$.

Proposition 2.9. *Soit* (φ, ξ, η) *une structure presque de contact sur* M*, alors :*

1. $\varphi\xi = 0$ *;*
2. $\eta \circ \varphi = 0$ *;*
3. *rang*$(\varphi) = 2n$.

Preuve.

1. On a :

$$\begin{aligned} \varphi^2\xi &= -\xi + \eta(\xi)\xi \\ &= -\xi + \xi \\ &= 0, \end{aligned}$$

on remplace X par $\varphi\xi$ dans l'équation (2.1), on trouve que :

$$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi,$$

comme $\varphi^2\xi = 0$, on obtient :

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi,$$

donc si, $\varphi\xi \neq 0$ on trouve $\eta(\varphi\xi) \neq 0$, d'où :

$$0 = \varphi^2\xi = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi,$$

ce qui implique que :

$$\eta(\varphi\xi)\varphi\xi = 0 \ \ et \ \ \varphi\xi \neq 0,$$

on trouve une contradiction, ainsi $\varphi\xi = 0$.

2. Pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi^2(\varphi X) &= -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi, \\ \varphi(-X + \eta(X)\xi) &= -\varphi X + \eta(X)\varphi\xi \\ &= -\varphi X, \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi = -\varphi X,$
$\Longrightarrow \quad \eta(\varphi X)\xi = 0,$
$\Longrightarrow \quad \eta(\varphi X) = 0,$
$\Longrightarrow \quad \eta \circ \varphi = 0.$

3. Comme $\varphi : T_xM \longrightarrow T_xM$ est une application linéaire, alors :

$$\dim T_xM = \dim \mathrm{Im}(\varphi) + \dim \ker(\varphi),$$

en $x \in M$, et comme $\dim T_xM = \dim M = 2n + 1$, on obtient :

$$\mathrm{rang}(\varphi) = \dim \mathrm{Im}(\varphi) = (2n + 1) - \dim \ker(\varphi).$$

Puisque $\xi \in Ker(\varphi)$, car $\varphi\xi = 0$ alors $\mathrm{rang}(\varphi) \leq 2n$. Soit $\bar{\xi} \in \Gamma(TM)$, tel que $\varphi\bar{\xi} = 0$, alors :

$$0 = \varphi^2\bar{\xi} = -\bar{\xi} + \eta(\bar{\xi})\xi,$$

i.e. $\bar{\xi} = \eta(\bar{\xi})\xi$, d'où $\bar{\xi}$ *et* ξ sont proportionnels, ainsi $\dim \ker(\varphi) = 1$, donc $\mathrm{rang}(\varphi) = 2n$.

■

2.3 Variété métrique presque de contact

Définition 2.38 (Condition de compatibilité)**.** *Soit (φ, ξ, η) une structure presque de contact sur une variété différentiable M. Lorsqu'il existe un tenseur métrique g sur M, tel que :*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

on dit que g est une métrique compatible avec la structure presque de contact, et (g, φ, ξ, η) est une structure métrique presque de contact, et $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ est appelée variété métrique presque de contact.

Remarque 7.

1. Soit (φ, ξ, η) une structure presque de contact sur une variété différentiable M, et soit h' une métrique Riemannienne sur M. On pose :

$$h(X, Y) = h'(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Alors :
$$g(X,Y)=\frac{1}{2}\big(h(X,Y)+h(\varphi X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)\big),$$
est une métrique Riemannienne compatible avec la structure presque de contact. En effet ; Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a $h(X,\xi)=\eta(X)$, et :

$$\begin{aligned}
g(\varphi X,\varphi Y) &= \frac{1}{2}\big(h(\varphi X,\varphi Y)+h(\varphi^2 X,\varphi^2 Y)\big)\\
&= \frac{1}{2}\left(h(\varphi X,\varphi Y)-\eta(Y)h(X,\xi)-\eta(X)h(\xi,Y)+h(X,Y)+\eta(X)\eta(Y)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(h(\varphi X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(Y)+h(X,Y)\right)-\eta(X)\eta(Y)\\
&= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y).
\end{aligned}$$

2. Sur une variété métrique presque de contact (M,g,φ,ξ,η), on a :

$$\textbf{a)}\quad g(X,\xi)=\eta(X),\quad \forall X\in\Gamma(TM),$$

$$\textbf{b)}\quad g(X,\varphi Y)+g(\varphi X,Y)=0,\quad \forall X,Y\in\Gamma(TM).$$

En effet ; **a)** Résulte immédiatement de la condition de compatibilité. Pour **b)**, soit $X, Y \in \Gamma(TM)$, alors :

$$\begin{aligned}
g(\varphi X,\varphi^2 Y) &= g(\varphi X,-Y+\eta(Y)\xi)\\
&= -g(\varphi X,Y)+g(\varphi X,\xi)\eta(Y)\\
&= -g(\varphi X,Y)+\eta(\varphi X)\eta(Y)\\
&= -g(\varphi X,Y),
\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
g(\varphi X,\varphi^2 Y) &= g(X,\varphi Y)-\eta(X)\eta(\varphi Y)\\
&= g(X,\varphi Y).
\end{aligned}$$

Définition 2.39 (La 2-forme fondamentale)**.** *Soit (M,g,φ,ξ,η) une variété métrique presque de contact. On définit la 2-forme fondamentale Φ par $\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$, $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$.*

Propriété 2.5. *Soit (M,g,φ,ξ,η) une variété métrique presque de contact. Alors :*

1. $\Phi(X,Y)=-\Phi(Y,X)$;
2. $\Phi(\varphi X,\varphi Y)=\Phi(X,Y)$.

Preuve. Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$, alors :

1.

$$\begin{aligned}\Phi(X,Y) &= g(X,\varphi Y)\\ &= -g(\varphi X,Y)\\ &= -\Phi(Y,X).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi X,\varphi Y) &= g(\varphi X,\varphi^2 Y)\\ &= g(X,\varphi Y)+\eta(X)\eta(\varphi Y)\\ &= -g(X,\varphi Y)\\ &= \Phi(X,Y).\end{aligned}$$

■

Théorème 2.7. *Soit M une variété de contact munie d'une 1-forme de contact η, alors il existe une structure métrique presque de contact (φ,ξ,η,g) sur M, vérifiant :*

$$g(X,\varphi Y)=d\eta(X,Y)=\frac{1}{2}\{X(\eta(X))-Y(\eta(X))-\eta([X,Y])\}.$$

Une structure métrique presque de contact construite à partir d'une forme de contact η est appelée structure de contact, et M munie par cette structure est dite variété métrique de contact.

2.4 Structure presque de contact normale

Soit (M,φ,ξ,η) une variété presque de contact de dimension $(2n+1)$, on considère la variété produit $M\times\mathbb{R}$, alors $(X,f\frac{d}{dt})$ est un champ de vecteurs sur $M\times\mathbb{R}$, où X est un champ de vecteurs de M, f est une fonction sur $M\times\mathbb{R}$, t système de coordonnée sur $\mathbb{R}$. On définit sur l'espace tangent de $M\times\mathbb{R}$ la structure presque complexe J par :

$$J(X,f\frac{d}{dt})=(\varphi X-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}). \tag{2.2}$$

Vérification que J est une structure presque complexe sur $M \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\frac{d}{dt}) &= J(\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}) \\
&= (\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\frac{d}{dt}) \\
&= (\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -f\frac{d}{dt}) \\
&= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -f\frac{d}{dt}) \\
&= -(X, f\frac{d}{dt}).
\end{aligned}$$

Définition 2.40 (Structure presque de contact normale)**.** *On dit que J est intégrable si son tenseur de Nijenhuis :*

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] = 0, \ \ \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Dans ce cas (φ, ξ, η) est dite normale.

Maintenant on donne une expression qui dépend du tenseur de Nijenhuis, cette expression nous donne une condition pour qu'une structure presque de contact (φ, ξ, η) soit normale. Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$, on pose :

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] = 0, \ \ \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Comme le tenseur de Nijenhuis est antisymétrique, il suffit de calculer $N_J((X,0),(Y,0))$ et $N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ pour X, $Y \in \Gamma(TM)$:

$$\begin{aligned}
N_J((X,0),(Y,0)) &= J^2[(X,0),(Y,0)] + [J(X,0), J(Y,0)] - J[J(X,0),(Y,0)] - J[(X,0),J(Y,0)] \\
&= -[(X,0),(Y,0)] + [(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (\varphi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt})] - J[(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}), (Y,0)] \\
&\quad -J[(X,0),(\varphi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt})] \\
&= -([X,Y],0) + ([\varphi X, \varphi Y], (\varphi X\eta(Y) - \varphi Y\eta(X))\frac{d}{dt}) - J([\varphi X, Y], -Y\eta(X)\frac{d}{dt}) \\
&\quad -J([X,\varphi Y], X\eta(Y)\frac{d}{dt}) \\
&= -([X,Y],0) + ([\varphi X, \varphi Y], (\varphi X\eta(Y) - \varphi Y\eta(X))\frac{d}{dt}) \\
&\quad -(\varphi[\varphi X, Y] + Y\eta(X)\xi, \eta([\varphi X, Y])\frac{d}{dt}) - (\varphi[X,\varphi Y] - X\eta(Y)\xi, \eta([X,\varphi Y])\frac{d}{dt}) \\
&= (-[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X,\varphi Y] + X\eta(Y)\xi - Y\eta(X)\xi, \\
&\quad (\varphi X\eta(Y) - \varphi Y\eta(X) - \eta([\varphi X, Y]) + \eta([X,\varphi Y]))\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

mais $\varphi^2[X,Y] = -[X,Y] + \eta([X,Y])\xi$, donc :

$$N_J((X,0),(Y,0)) \;=\; (N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, ((\pounds_{\varphi X}\eta)Y - (\pounds_{\varphi Y}\eta)X)\frac{d}{dt}).$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
N_J((X,0),(0,\frac{d}{dt})) &= J^2[(X,0),(0,\frac{d}{dt})] + [J(X,0),J(0,\frac{d}{dt})] - J[J(X,0),(0,\frac{d}{dt})] \\
&\quad -J[(X,0),J(0,\frac{d}{dt})] \\
&= [(\varphi X,\eta(X)\frac{d}{dt}),(-\xi,0)] - J[(\varphi X,\eta(X)\frac{d}{dt}),(0,\frac{d}{dt})] - J[(X,0),(-\xi,0)] \\
&= (-[\varphi X,\xi],\xi\eta(X)\frac{d}{dt}) - J(-[X,\xi],0) \\
&= ([\xi,\varphi X] - \varphi[\xi,X],(\xi\eta(X) - \eta([\xi,X]))\frac{d}{dt}) \\
&= ((\pounds_\xi\varphi)X,(\pounds_\xi\eta)X\frac{d}{dt}).
\end{aligned}$$

Définition 2.41. *Sur une variété presque de contact (M,φ,ξ,η), on définit les quatre tenseurs suivants :*

$N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi$ *;*

$N^{(2)}(X,Y) = (\pounds_{\varphi X}\eta)Y - (\pounds_{\varphi Y}\eta)X$ *;*

$N^{(3)}(X) = (\pounds_\xi\varphi)X$ *;*

$N^{(4)}(X) = (\pounds_\xi\eta)X$*.*

Il est clair qu'une structure presque-contact (φ,ξ,η) est normale si et seulement si ces quatre tenseurs s'annulent. On montrera que la nullité de $N^{(1)}$ implique la nullité de $N^{(2)}$ $N^{(3)}$ et $N^{(4)}$, et donc la condition de normalité est :

$$N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0.$$

Proposition 2.10. *Soit (φ,ξ,η) une structure presque-contact. Si le tenseur $N^{(1)}$ s'annule alors les tenseurs $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, et $N^{(4)}$ s'annulent aussi.*

Preuve. Comme $N^{(1)} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= N_\varphi(X,\xi) + 2d\eta(X,\xi)\xi \\
&= -[X,\xi] + \eta([X,\xi])\xi - \varphi[\varphi X,\xi] \\
&+ (X\eta(\xi))\xi - (\xi\eta(X))\xi - \eta([X,\xi])\xi \\
&= [X,\xi] + \varphi[\xi,\varphi X] - (\xi\eta(X))\xi
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Appliquons η à cette équation, on obtient :

$$0 = \eta([\xi, X]) - \xi\eta(X)$$

ce n'est rien que $N^{(4)} = \mathcal{L}_\xi \eta = 0$. Si à ce niveau là on remplace X par φX, on obtient :

$$\eta([\xi, \varphi X]) = 0. \tag{2.4}$$

Maintenant on applique φ à l'équation (4.29), on obtient :

$$0 = \varphi\mathcal{L}_\xi X - \xi\varphi X + \eta([\xi,\varphi X]) = (\mathcal{L}_\xi\varphi)X$$

et donc $N^{(3)} = 0$. Encore une fois on utilise $N^{(1)} = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= N_\varphi(\varphi X, Y) + 2d\eta(\varphi X, Y)\xi \\
&= -[\varphi X, Y] + \eta([\varphi X, Y])\xi + [-X + \eta(X)\xi, \varphi Y] \\
&- \varphi[-X + \eta(X)\xi, Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y] \\
&+ (\varphi X\eta(Y))\xi - (Y\eta(\varphi X))\xi - \eta([\varphi X, Y])\xi \\
&= -[\varphi X, Y] - [X, \varphi Y] - (\varphi Y\eta(X))\xi - (\varphi Y\eta(X))\xi - \eta(X)[\varphi Y, \xi] \\
&- \varphi[-X + \eta(X)\xi, Y] - \varphi[\varphi X, \varphi Y] + (\varphi X\eta(Y))\xi.
\end{aligned}$$

Appliquons η à cette équation et utilisons l'équation (4.31), on a :

$$\varphi X\eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) - \varphi Y\eta(X) + \eta(\varphi Y, X) = 0 \tag{2.5}$$

cela donne $N^{(2)} = 0$. Notons que l'équation (4.32) peut s'écrire :

$$d\eta(\varphi X, Y) + d\eta(X, \varphi Y) = 0. \tag{2.6}$$

De l'équation ci-dessus on peut voir que $N^{(2)} = 0$ implique $d\eta(X,\xi) = 0$ et donc l'équation (4.17), nous donne :

$$d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y). \tag{2.7}$$

Inversement, il est facile de vérifier que l'équation (4.18) implique (4.17). Ainsi, la nullité de $N^{(2)}$ pour une structure presque de contact (φ, ξ, η) veut dire que $d\eta$ est invariante par rapport à φ. ∎

De la Proposition 2.10, on déduit :

Proposition 2.11. *Une structure presque de contact (φ, ξ, η) sur M est normale si et seulement si $N_\varphi + d\eta \otimes \xi = 0$.*

Proposition 2.12. *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique de contact de dimension $(2n+1)$, alors $N^{(2)} = 0$ et $N^{(4)} = 0$. De plus, $N^{(3)} = 0$ si et seulement si ξ de Killing, i.e.*

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) \equiv g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Preuve. Soit $X, Y \in \Gamma(\mathrm{T}M)$. On a :

$$\begin{aligned} d\eta(\varphi X, \varphi Y) &= \Phi(\varphi X, \varphi Y) \\ &= g(\varphi X, \varphi^2 Y) \\ &= g(\varphi X, -Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -g(\varphi X, Y) \\ &= g(X, \varphi Y) \\ &= d\eta(X, Y). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi X, Y) &= d\eta(\varphi^2 X, \varphi Y) \\ &= d\eta(-X + \eta(X)\xi, \varphi Y) \\ &= -d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X) d\eta(\xi, \varphi Y) \\ &= -d\eta(X, \varphi Y) \\ &= -\Phi(X, \varphi Y), \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(\varphi X, Y) + \Phi(X, \varphi Y) \\ &= d\eta(\varphi X, Y) + d\eta(X, \varphi Y) \\ &= \varphi X \eta(Y) - \eta([\varphi X, Y]) - \varphi Y \eta(X) + \eta([\varphi Y, X]) \\ &= (\pounds_{\varphi X}\eta)Y - (\pounds_{\varphi Y}\eta)X, \end{aligned}$$

i.e. $N^{(2)} = 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} 0 &= 2g(X, \varphi\xi) \\ &= 2d\eta(X, \varphi\xi) \\ &= -\xi\eta(X) + \eta([\xi, X]) \\ &= -(\pounds_\xi \eta)X, \end{aligned}$$

donc $N^{(4)} = 0$. De plus :

$$(\pounds_\xi g)(X, \xi) = \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) = 0,$$

$$\begin{aligned} (\pounds_\xi d\eta)(X, Y) &= \xi d\eta(X, Y) - d\eta([\xi, X], Y) - d\eta(X, [\xi, Y]) \\ &= \frac{1}{2}(\xi X\eta(Y) - \xi Y\eta(X) - \xi\eta([X, Y]) - [\xi, X]\eta(Y) + Y\eta([\xi, X]) \\ &\quad + \eta([[\xi, X], Y]) - X\eta([\xi, Y]) + [\xi, Y]\eta(X) + \eta([X, [\xi, Y]])) \\ &= \frac{1}{2}(X(\pounds_\xi\eta)Y - Y(\pounds_\xi\eta)X - (\pounds_\xi\eta)[X, Y]) = 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} 0 &= (\pounds_\xi \Phi)(X, Y) \\ &= \xi\phi(X, Y) - \Phi([\xi, X], Y) - \phi(X, [\xi, Y]) \\ &= \xi g(X, \varphi Y) - g([\xi, X], \varphi Y) - g(X, \varphi[\xi, Y]) + g(X, [\xi, \varphi Y]) - g(X, [\xi, \varphi Y]) \\ &= (\pounds_\xi g)(X, \varphi Y) + g(X, (\pounds_\xi \varphi)Y) \\ &= (\pounds_\xi g)(X, \varphi Y) + g(X, N^{(3)}(Y)), \end{aligned}$$

ainsi $\pounds_\xi g$, ce qui implique que $N^{(3)} = 0$. ■

Exemple 15. Soient $M = \mathbb{R}^{2n+1}$, avec les coordonnées cartésiennes (x^i, y^i, z),

$$g = \eta \otimes \eta + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}((dx^i)^2 + (dy^i)^2), \quad \eta = \frac{1}{2}(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i),$$

$\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$ un champ de vecteurs, et φ le tenseur de type $(1, 1)$ donné par :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^i & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ est une variété métrique presque de contact normale.

Proposition 2.13. *Une structure Riemannienne presque de contact* (φ, ξ, η, g) *sur une variété* M *est normale si et seulement si les conditions suivantes son satisfaites :*

$$\begin{aligned} \varphi(\nabla_X \varphi)Y - \varphi(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y - [(\nabla_X \eta)Y]\xi &= 0; \\ (\nabla_X \varphi)Y - \varphi(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y + \eta(Y)\nabla_{\varphi X}\xi &= 0; \end{aligned}$$

quelque soit $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Proposition 2.14. *Soit* M *une variété Riemannienne de contact, et soit* (φ, ξ, η, g) *sa structure Riemannienne presque de contact associée. Alors :*

$$\mathcal{L}_\xi \eta = 0, \ \ \mathcal{L}_\xi d\eta = 0, \quad (\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)Y = (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)X,$$

quelque soit $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Proposition 2.15. *Sur une variété Riemannienne de contact l'opérateur* $h = \mathcal{L}_\xi \varphi$ *est symétrique, i.e.*

$$g(N^{(3)}X, Y) = g(X, N^{(3)}Y).$$

Preuve. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M, et soit $X, Y \in \{e_i\}$, alors :

$$\begin{aligned} g(hX, Y) &= \tfrac{1}{2} g((\pounds_\xi \varphi)X, Y) \\ &= \frac{1}{2} g(\pounds_\xi \varphi X - \varphi \pounds_\xi X, Y) \\ &= \frac{1}{2} g(\nabla_\xi \varphi X - \nabla_{\varphi X}\xi - \varphi \nabla_\xi X + \varphi \nabla_X \xi, Y) \\ &= \frac{1}{2} g((\nabla_\xi \varphi)X + \varphi \nabla_\xi X - \nabla_{\varphi X}\xi - \varphi \nabla_\xi X + \varphi \nabla_X \xi, Y) \\ &= \frac{1}{2} g(\varphi \nabla_X \xi - \nabla_{\varphi X}\xi, Y) \\ &= \frac{1}{2}\{\varphi X g(\xi, Y) + g(\xi, \nabla_{\varphi X}Y) - g(\nabla_X \xi, \varphi Y)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\eta(\nabla_{\varphi X}Y) + \eta(\nabla_X \varphi Y)\} \end{aligned}$$

De même :

$$g(X, hY) = \frac{1}{2}\{\eta(\nabla_{\varphi Y}X) + \eta(\nabla_Y \varphi X)\}.$$

Et comme $\eta([\varphi X, Y]) + \eta([X, \varphi Y]) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} g(hX, Y) - g(X, hY) &= \frac{1}{2}\{\eta(\nabla_{\varphi X}Y) + \eta(\nabla_X \varphi Y) - \eta(\nabla_{\varphi Y}X) - \eta(\nabla_Y \varphi X)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\eta(\nabla_{\varphi X}Y - \nabla_Y \varphi X) + \eta(\nabla_X \varphi Y - \nabla_{\varphi Y}X)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\eta([\varphi X, Y]) + \eta([X, \varphi Y])\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.8. *Soit η une forme de contact sur une variété de contact de dimension $(2n+1)$. Alors, autour de chaque point de M, il existe une carte locale de coordonnées $x^1, ..., x^n, y^1, ..., y^n, z$, tel que η s'écrit sous la forme $\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$.*

2.5 Variété métrique de contact η-Einstein

Définition 2.42. *Une variété métrique de contact $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est dite η-Einstein si la courbure de Ricci peut être écrite comme :*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \alpha g(X, Y) + \beta\eta(X)\eta(Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

où $\alpha, \beta \in C^\infty(M)$.

Proposition 2.16. *[13] Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique de contact η-Einstein. Si* $\dim M > 3$, *alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Exemple 16. Soit $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété métrique de contact, tels que :

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} y^2+1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = 2\partial z, \quad \eta = \frac{1}{2}(dz - ydx).$$

Alors $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ est η-Einstein, avec $\alpha = -2$ et $\beta = 4$.

2.6 Variétés de K-contact

Définition 2.43. *Une variété métrique de contact $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est appelée variété de K-contact si le champ de Reeb ξ est un champ de Killing, i.e.*

$$g(\nabla_X\xi, Y) + g(\nabla_Y\xi, X) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Proposition 2.17. *Une variété métrique de contact $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ est de K-contact si et seulement si :*

$$\nabla_X\xi = -\varphi X, \tag{2.8}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$.

Preuve. Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :

$$\begin{aligned} g(X, \varphi Y) &= d\eta(X, Y) \\ &= \frac{1}{2}\left((\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)\right) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y). \end{aligned}$$

■

Remarque 8. Sur une variété de K-contact les égalités suivantes sont vraies :

$$(\nabla_X \eta)Y = g(\nabla_X \xi, Y) = \Phi(X, Y), \quad (\nabla_X \varphi)\xi = -X + \eta(X)\xi, \tag{2.9}$$

pour tout X, $Y \in \Gamma(TM)$.

Proposition 2.18. *Soit M^{2n+1} une variété K-contact avec la structure (φ, ξ, η, g). Alors, la courbure sectionnelle égale à 1, pour tout plan contenant ξ.*

Preuve. Soit X un champ de vecteurs orthogonal à ξ avec $g(X, X) = 1$, et soit R le tenseur de courbure. Alors :

$$\begin{aligned} R(\xi, X)\xi &= \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_{[\xi, X]}\xi \\ &= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi[\xi, X] \\ &= -\varphi \nabla_X \xi \\ &= \varphi^2 X \\ &= -X, \end{aligned}$$

et donc $g(R(\xi, X)\xi, X) = 1$. ■

Remarque 9. Soit $(M^{2n+1}, \varphi, \eta, \xi, g)$ une variété métrique de contact, alors $\nabla_\xi \varphi = 0$, et $\operatorname{div} \varphi = -2n\eta$ (voir [2]).

Proposition 2.19. *Soit M^{2n+1} une variété Riemannienne, et ξ un champ de vecteurs unitaire de Killing, tel que $R(\xi, X)\xi = -X$ pour tout champ de vecteurs X orthogonal à ξ. Alors M^{2n+1} est une variété K-contact.*

Preuve. Définissons une 1-forme η et un tenseur φ du type $(1, 1)$ par $\eta(X) = g(X, \xi)$ et $\varphi X = -\nabla_X \xi$. Comme ξ est un champ de vecteurs de Killing, $\nabla_\xi \xi = 0$ alors $\varphi\xi = 0$. Encore une fois, comme ξ est de Killing,

$$\nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi = R(X, \xi)Y,$$

et donc pour chaque champ de vecteurs X orthogonal à ξ :

$$\varphi^2 X = \nabla_{\nabla_X \xi}\xi = R(\xi, X)\xi = -X,$$

et par quonséquent $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$. De plus :

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}(g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)) \\ &= -g(\nabla_Y \xi, X) \\ &= g(X, \varphi Y), \end{aligned}$$

et $g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, \varphi^2 Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$, et donc (φ, η, ξ, g) est une structure de K-contact. ∎

2.7 Variétés de Sasaki

Définition 2.44. *Une variété Riemannienne de contact est dite de Sasaki (ou bien Sasakienne) si sa structure Riemannienne presque de contact (φ, ξ, η, g) associée est normale. Autrement dit, une structure Riemannienne presque de contact (φ, ξ, η, g) est une structure de Sasaki si $d\eta = \Phi$ et $N^{(1)} = 0$.*

Une caractérisation des variétés de Sasaki par la connexion de Levi-Civita de la métrique g est donnée par :

Théorème 2.9. *Une structure Riemannienne presque de contact (φ, ξ, η, g) est Sasakienne si et seulement si :*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \quad \forall X,\, Y \in \Gamma(TM), \tag{2.10}$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g.

Pour la démonstration du Théorème 2.9, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.4. *[2] Soit (φ, ξ, η, g) une structure métrique presque de contact. Alors, la dérivée covariante du tenseur φ est donnée par :*

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) \\ &+ g(N^1(Y,Z), \varphi X) + N^2(Y,Z)\eta(X) \\ &+ 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Preuve du Théorème 2.9. Rappelons que la connexion Riemannienne ∇ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} 2g(\nabla_X Y, Z) & = & X(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) \\ & + & g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X) \end{array}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, et :

$$\begin{array}{rcl} d\Phi(X,Y,Z) & = & \frac{1}{3}\{X\Phi(Y,Z) + Y\Phi(X,Z) + Z\Phi(X,Y) \\ & - & \Phi([X,Y],Z) - \Phi([Z,X],Y) - \Phi([Y,Z],X)\}. \end{array}$$

par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} 2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) & = & 2g(\nabla_X \varphi Y, Z) + 2g(\nabla_X Y, \varphi Z) \\ \\ & = & Xg(\varphi Y, Z) + \varphi Y g(X,Z) - Zg(X, \varphi Y) \\ & + & g([X,\varphi Y],Z) + g([Z,X],\varphi Y) - g([\varphi Y, Z], X) \\ & + & Xg(Y,\varphi Z) + Yg(X,\varphi Z) - \varphi Z g(X,Y) \\ & + & g([X,Y],\varphi Z) + g([\varphi Z, X], Y) - g([Y,\varphi Z], X) \\ \\ & = & -X\Phi(Y,Z) + \varphi Y(\Phi(\varphi Z, X) + \eta(Z)\eta(X)) - Z\Phi(X,Y) \\ & - & \Phi([X,\varphi Y],\varphi Z) + \eta([X,\varphi Y])\eta(Z) \\ & + & \Phi([Z,X],Y) - g(\varphi[\varphi Y, Z], \varphi X) + \eta(X)\eta([Z,\varphi Y]) \\ & + & X\Phi(\varphi Y, \varphi Z) - Y\Phi(Z,X) - \varphi Z(\Phi(\varphi Y, X) + \eta(Y)\eta(X)) \\ & + & \Phi([X,Y],Z) - \Phi([\varphi Z, X], \varphi Y) + \eta([\varphi Z, X])\eta(Y) \\ & - & g(\varphi[Y,\varphi Z],\varphi X) + \eta(X)\eta([\varphi Z, Y]) \\ & + & \Phi([Y,Z],X) + g([\varphi Y, \varphi Z], \varphi X) \\ & + & g(2d\eta(Y,Z)\xi, \varphi X) \\ \\ & = & 3d\Phi(X,\varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z) + g(N^1(Y,Z),\varphi X) \\ & + & N^2(Y,Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y). \end{array}$$

Dans le cas d'une structure métrique de contact $\Phi = d\eta$ et $N^{(2)} = 0$, la formule ci-dessus devient :

$$2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) = g(N^1(Y,Z),\varphi X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y). \tag{2.12}$$

La condition nécessaire découle de l'équation (du lemme) et du fait que la structure (φ, ξ, η, g) est une métrique de contact normale (i.e. $\Phi = d\eta$ et $N^{(1)} = 0,\ N^{(2)} = 0$), et donc :

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= \Phi(\varphi Y, X)\eta(Z) - \Phi(\varphi Z, X)\eta(Y) \\ &= g(X,Y)\eta(Z) - g(X,Z)\eta(Y) \\ &= g(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, Z). \end{aligned}$$

Inversement, si une structure métrique presque-contact (φ, ξ, η, g) satisfait la condition dans l'équation 4.18, posons $Y = \xi$ on obtient $-\varphi\nabla_Y\xi = \eta(X)\xi - X$, et appliquons F,

$$\nabla_X\xi = -\varphi X$$

on peut voir que ξ est Killing et donc

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}((\nabla_X\eta)(Y) - (\nabla_Y\eta)(X)) \\ &= g(\nabla_X\xi, Y) = -g(\varphi X, Y) = \Phi(X,Y). \end{aligned}$$

et par conséquent (φ, ξ, η, g) est une structure métrique de contact, et de la formule

$$N_\varphi(X,Y) = (\varphi\nabla_Y\varphi - \nabla_{\varphi Y}\varphi)X - (\varphi\nabla_X\varphi - \nabla_{\varphi X}\varphi)Y$$

de torsion de Nijenhuis en termes de connexion symétrique, et par une substitution directe de la formule (4.17), on obtient $N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$. ■

Remarque 10. Toute variété de Sasaki est K-contact (voir [2]).

Exemple 17 (Structure de Sasaki sur $\mathbb{R}^{2n+1}$). Soient x^1, ..., , x^n..., y^1, ..., y^n les coordonnées cartésiennes sur $\mathbb{R}^{2n+1}$, et considérons le 1-forme η et le champ de vecteurs ξ définis par :

$$\eta = \frac{1}{2}\left(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i\right);\ \xi = 2\frac{\partial}{\partial z}.$$

On considère aussi la métrique Riemannienne g, et le champ de tenseurs φ :

$$(g) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij} + y^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & y^j & 0 \end{pmatrix},$$

où δ_{ij} sont les symboles de Kronecker. On vérifie que $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ est une structure Riemannienne presque-contact sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ et elle est associée à la structure de contact donnée par η. Et on a, $N^{(1)} = 0$, donc c'est une structure Sasakienne sur $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Chapitre 3

Solitons de Ricci

Ce chapitre est l'essence même de ce projet ; initialisé par la définition d'un soliton de Ricci, puis la définition du gradient soliton de Ricci ; illustré par quelques exemples renommés étudiés d'une manière détaillée. Il s'achève par la démonstration du théorème prouvant que une variété métrique de contact η-Einstein non-Einstein Ricci soliton de dimension > 3 est une variété K-contact.

3.1 Quelques définitions et notations

Définition 3.45.

1. *Un soliton de Ricci, noté (M, g, ξ, λ), est une variété Riemannienne (M, g), tel que :*
$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi g = \lambda g, \tag{3.1}$$
où Ric *est la courbure de Ricci de (M, g), ξ un champ de vecteurs sur M, $\mathcal{L}_\xi g$ est la dérivée de Lie de la métrique g par rapport à ξ, et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *Si ξ est le gradient d'une certaine fonction différentiable f sur M, (M, g, ξ, λ) est dit soliton de Ricci de type gradient, noté $(M, g, \nabla f, \lambda)$, l'équation(3.1) devient :*
$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f = \lambda g. \tag{3.2}$$

Définition 3.46. *Un soliton de Ricci (M, g, ξ, λ) est dit :*
- *stable, si $\lambda = 0$;*
- *expansif, si $\lambda > 0$;*
- *rétractif, si $\lambda < 0$.*

Remarque 11. Soit (M, g, ξ, λ) un soliton de Ricci, si de plus ξ est un champ de Killing ($i.e.$ $\mathcal{L}_\xi g = 0$), alors (M, g) est une variété d'Einstein ($Ric = \lambda g$). Donc, les solitons de Ricci sont des généralisations des variétés d'Einstein.
Rappelons qu'un flot de Ricci sur une variété Riemannienne (M, g) est une solution de l'équation d'évolution introduite par Hamilton [6] :

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}_{g_t}, \quad g_0 = g.$$

Une solution du flot de Ricci $\{g_t\}_{t\in I}$ sur (M, g) est qualifiée de point fixe ou encore de soliton de Ricci s'il existe des réels $\alpha(t)$ et une famille de difféomorphismes $\{\phi_t\}_t$ de M tel que :

$$g_t = \alpha(t)\phi_t^* g.$$

3.2 Exemples de solitons de Ricci

Exemple 18. Un exemple fondamental est l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de la métrique standard g, et $f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{4}\|x\|^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + ... + x_n^2)$, est un soliton de Ricci de type gradient. En effet ; La courbure de Ricci est nulle, et on a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess} f)_{ij} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ij} \\ &= \frac{1}{2} g_{ij}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess} f = \frac{1}{2} g$.
Exemple 19 (Le cigare soliton). En dimension $n = 2$, Hamilton a donné un exemple de soliton stable $\Sigma = (\mathbb{R}^2, g, f, 0)$, avec :

$$g = ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2}, \quad f = -\log(1 + x^2 + y^2).$$

Montrons que Σ est un soliton de Ricci de type gradient :

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+x^2+y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

les symboles de christoffel sont :

$$\Gamma^1_{22} = -\Gamma^1_{11} = -\Gamma^2_{12} = -\Gamma^2_{21} = \frac{x}{1+x^2+y^2};$$
$$\Gamma^2_{11} = -\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{22} = -\Gamma^1_{21} = \frac{y}{1+x^2+y^2},$$

la courbure de Ricci est :

$$\mathrm{Ric}_{1,1} = \mathrm{Ric}_{2,2} = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}, \;\; \mathrm{Ric}_{1,2} = \mathrm{Ric}_{2,1} = 0,$$

la Hessiennne est :

$$(\mathrm{Hess}f)_{ij} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{2}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\mathrm{Ric}_{1,1} + (\mathrm{Hess}f)_{1,1} = 0;$$
$$\mathrm{Ric}_{2,2} + (\mathrm{Hess}f)_{2,2} = 0;$$
$$\mathrm{Ric}_{1,2} + (\mathrm{Hess}f)_{1,2} = 0;$$
$$\mathrm{Ric}_{2,1} + (\mathrm{Hess}f)_{2,1} = 0.$$

Exemple 20. Soit $M = \mathbb{R} \times S^n$, muni de la métrique Riemannienne diagonale $g = dt^2 + h$, où h est la métrique Riemannienne induite sur la sphère S^n, et soit :

$$f(t,x) = at^2 + bt + c, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times S^n,$$

où a, b, $c \in \mathbb{R}$. Alors, $(M, g, \nabla f, \lambda)$ est un soliton de Ricci de type gradient, avec $\lambda = n-1$ et $a = \frac{n-1}{2}$. En effet ; $\forall X,\, Y \in \Gamma(TS^n)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}((\frac{d}{dt}, X)(\frac{d}{dt}, Y)) &= \mathrm{Ric}^{\mathbb{R}}(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}) + \mathrm{Ric}^{S^n}(X,Y) \\ &= 0 + (n-1)h(X,Y). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comme la courbure de S^n est égale à 1, on a $Ric = 1(n-1)h$. On a aussi :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}f((\frac{d}{dt}, X), (\frac{d}{dt}, Y)) &= g(\nabla_{(\frac{d}{dt}, X)} \mathrm{grad}f, (\frac{d}{dt}, Y)) \\ &= g(\nabla_{(\frac{d}{dt}, X)} f^{'}(\frac{d}{dt}, 0), (\frac{d}{dt}, Y)) \\ &= f^{''} g((\frac{d}{dt}, 0)(\frac{d}{dt}, Y)) + f^{'} g(\nabla_{(\frac{d}{dt}, X)}(\frac{d}{dt}, 0), (\frac{d}{dt}, Y)) \\ &= f^{''} = 2a. \end{aligned} \tag{3.4}$$

D'après les équations (3.3), (3.4), on obtient :

$$\mathrm{Ric}((\frac{d}{dt},X)(\frac{d}{dt},Y))+\mathrm{Hess}f((\frac{d}{dt},X),(\frac{d}{dt},Y))=(n-1)h(X,Y)+2a.$$

D'où, M est un soliton de Ricci de type gradient si et seulement si :

$$\lambda g((\frac{d}{dt},X),(\frac{d}{dt},Y))=(n-1)h(X,Y)+2a,$$

c'est-à-dire $\lambda(1+h(X,Y))=(n-1)h(X,Y)+2a$, il suffit de prendre $\lambda=n-1$ et $a=\dfrac{n-1}{2}$.

Exemple 21. Soit $M=\mathbb{R}^m\times N^k$, muni de la métrique Riemannienne $g=g_{\mathbb{R}^m}+g_{N^k}$, avec N^k est une variété d'Einstein de dimension k, c'est-à-dire $\mathrm{Ric}^{N^k}=\lambda g^{N^k}$, et soit :

$$f:\mathbb{R}^m\times N^k\to\mathbb{R},\quad f(x,p)=\frac{\lambda}{2}\mid\mid x\mid\mid^2+g_{\mathbb{R}^m}(x,B)+c,$$

où $c\in\mathbb{R}$, et $B\in\mathbb{R}^m$. Alors, $(M,g,\nabla f,\lambda)$ est un soliton de Ricci de type gradient.
En effet ; soit $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1,\dots,m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, et soit $X,\ Y\in\Gamma(TN^k)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}((\frac{\partial}{\partial x_i},X)(\frac{\partial}{\partial x_j},Y)) &= \mathrm{Ric}^{\mathbb{R}^m}(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})+\mathrm{Ric}^{N^k}(X,Y)\\ &= \mathrm{Ric}^{N^k}(X,Y)=\lambda g_{N^k}(X,Y).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Calculons $\mathrm{Hess}f$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}f((\frac{\partial}{\partial x_i},X),(\frac{\partial}{\partial x_j},Y)) &= g(\nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i},X)}\mathrm{grad}f,(\frac{\partial}{\partial x_j},Y))\\ &= \sum_{k=1}^{m}g(\nabla_{(\frac{\partial}{\partial x_i},X)}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\frac{\partial}{\partial x_k},0),(\frac{\partial}{\partial x_j},Y))\\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}g_{\mathbb{R}^m}(\frac{\partial}{\partial x_k},\frac{\partial}{\partial x_j})\\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}\delta_{kj}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j},\end{aligned}$$

avec $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\lambda x_i+b_i$, où $B=(b_1,\dots,b_m)$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial_{x_j}}=\lambda\delta_{ij}$,

$$\mathrm{Hess}f((\frac{\partial}{\partial x_i},X))(\frac{\partial}{\partial x_j},Y)=\lambda\delta_{ij}.\tag{3.6}$$

D'après (3.5) et (3.6) :

$$\mathrm{Ric}((\frac{\partial}{\partial x_i},X)(\frac{\partial}{\partial x_j},Y))+\mathrm{Hess}f((\frac{\partial}{\partial x_i},X),(\frac{\partial}{\partial x_j},Y))=\lambda g_{N^k}(X,Y)+\lambda\delta_{ij},$$

$$\lambda g((\frac{\partial}{\partial x_i},X),(\frac{\partial}{\partial x_j},Y))=\lambda g_{N^k}(X,Y)+\lambda\delta_{ij}.$$

3.3 Quelques propriétés des Solitons de Ricci

Propriété 3.6. *Soit* $(M, g, \nabla f, \lambda)$ *un soliton de Ricci de type gradient, alors pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, on a :*

1. $\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X) = g(\mathrm{Ricci}(\nabla f), X)$;
2. $(\nabla_X Ric)(Y) - (\nabla_Y Ric)(X) = -R(X, Y)\nabla f$;
3. $\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i} R)(e_i, X, Y) = R(\nabla f, X)Y$.

Ici, $\nabla f = \mathrm{grad} f$*, et* $\{e_i\}$ *est une base orthonormée sur* (M, g).

Preuve.

1. Sur une carte normale en $x \in M$, i.e. $(\nabla_{e_i} e_j)_x = 0$, avec X=e_k, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X) &= \sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}\,\mathrm{Ric})(X, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(\mathrm{Ric}(X, e_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(\lambda g(X, e_i) - \mathrm{Hess}\, f(X, e_i)) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} e_i g(\nabla_X \,\mathrm{grad}\ f, e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i}\nabla_X \,\mathrm{grad}\ f, e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} g(R(e_i, X)\,\mathrm{grad}\ f, e_i) - \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_X\nabla_{e_i}\,\mathrm{grad}\ f, e_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} g(R(\mathrm{grad}\ f, e_i)e_i, X) - \sum_{i=1}^{m} X(g(\nabla_{e_i}\,\mathrm{grad}\ f, e_i)) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), X) - \sum_{i=1}^{m} X(\mathrm{Hess}\ f(e_i, e_i)).
\end{aligned}
$$

Comme la variété Riemannienne (M, g) est un soliton de Ricci de type gradient, on a :

$$
\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Ric}(e_i, e_i) + \sum_{i=1}^{m}\mathrm{Hess}\ f(e_i, e_i) = \lambda\sum_{i=1}^{m} g(e_i, e_i),
$$

ainsi $S + \Delta f = \lambda m$,, avec m est la dimension de M. D'où :

$$\begin{array}{rcl} X(S)+X(\Delta f) & = & 0\,; \\ dS(X)+X(\Delta f) & = & 0\,; \\ 2\,\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X)+X(\Delta f) & = & 0\,; \end{array}$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{m} X(\mathrm{Hess}\ f(e_i,e_i)) = -2\,\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X),$$

et :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X) & = & -g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\, f),X)+2\,\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X)\,; \\ -\,\mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X) & = & -g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\, f),X)\,; \\ \mathrm{div}(\mathrm{Ric})(X) & = & g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\, f),X). \end{array}$$

2. Si $X=e_a$, $Y=e_b$ et $Z=e_c$, où $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur (M,g) tel que $(\nabla_{e_i}e_j)_x=0$, en $x\in M$, on trouve :

$$\begin{array}{rcl} g(R(X,Y)\,\mathrm{grad}\, f,Z) & = & g(\nabla_X\nabla_Y\,\mathrm{grad}\ f-\nabla_Y\nabla_X\,\mathrm{grad}\ f,Z) \\ & = & Xg(\nabla_Y\ \mathrm{grad}_,\ f,Z)-Yg(\nabla_X\,\mathrm{grad}\ f,Z) \\ & = & X(\mathrm{Hess}\ f(Y,Z))-Y(\mathrm{Hess}\ f(X,Z)) \\ & = & X(\lambda g(Y,Z)-\mathrm{Ric}(Y,Z))-Y(\lambda g(X,Z)-\mathrm{Ric}(X,Z)) \\ & = & -(\nabla_X\,\mathrm{Ric})(Y,Z)+(\nabla_Y\,\mathrm{Ric})(X,Z). \end{array}$$

3. En utilisant la même méthode on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^m g((\nabla_{e_i}R)(e_i,X,Y),Z) & = & \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}R(e_i,X)Y,Z) \\ & = & \sum_{i=1}^m e_i g(R(e_i,X)Y,Z) \\ & = & \sum_{i=1}^m g(\nabla_{e_i}R(Y,Z)e_i,X). \end{array}$$

D'après l'identité de Bianchi :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} g((\nabla_{e_i}R)(e_i,X,Y),Z) &= -\sum_{i=1}^{m} g(\nabla_Y R(Z,e_i)e_i,X) - \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_Z R(e_i,Y)e_i,X) \\
&= -\sum_{i=1}^{m} Y g(R(Z,e_i)e_i,X) - \sum_{i=1}^{m} Z g(R(e_i,Y)e_i,X) \\
&= -Y\,\mathrm{Ric}(Z,X) + Z\,\mathrm{Ric}(Y,X) \\
&= -Y(\lambda g(Z,X) - \mathrm{Hess}\ f(Z,X)) + Z(\lambda g(Y,X) - \mathrm{Hess}\ f(Y,X)) \\
&= Y(\mathrm{Hess}\ f(Z,X)) - Z(\mathrm{Hess}\ f(Y,X)) \\
&= Y(g(\nabla_Z \operatorname{grad}\ f,X)) - Z(g(\nabla_Y \operatorname{grad}\ f,X)) \\
&= Y(g(\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z)) - Z(g(\nabla_Y \operatorname{grad}\ f,X)) \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z) - g(\nabla_Z\nabla_Y \operatorname{grad}\ f,X) \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z) - g(R(Z,Y)\operatorname{grad}\ f,X) \\
&\quad -g(\nabla_Y\nabla_Z \operatorname{grad}\ f,X) \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z) - g(R(Z,Y)\operatorname{grad}\ f,X) \\
&\quad -Y(g(\nabla_Z \operatorname{grad}\ f,X)) \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z) - g(R(Z,Y)\operatorname{grad}\ f,X) \\
&\quad -Y(g(\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z)) \\
&= g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z) - g(R(Z,Y)\operatorname{grad}\ f,X) \\
&\quad -g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad}\ f,Z) \\
&= -g(R(\operatorname{grad}\ f,X)Z,Y) \\
&= g(R(\operatorname{grad}\ f,X)Y,Z),
\end{aligned}
$$

donc $\sum_{i=1}^{m}(\nabla_{e_i}R)(e_i,X,Y) = R(\operatorname{grad}\ f,X)Y$, car g est non-dégénérée.

■

Lemme 3.5. *Soit (M^m,g,ξ,λ) un soliton de Ricci, et S la courbure scalaire de M, alors :*

$$S = \lambda m - \operatorname{div}\xi, \quad \operatorname{trace}\nabla\,\mathrm{Ricci} = \frac{1}{2}\operatorname{grad} S.$$

Preuve. Soit $x \in M$, et soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur (M,g). On a :

$$\sum_{i=1}^{m} Ric(e_i,e_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\mathcal{L}_\xi g(e_i,e_i) = \lambda\sum_{i=1}^{m} g(e_i,e_i),$$

comme $S = \sum_{i=1}^{m} Ric(e_i, e_i)$, on obtient :

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}_\xi g(e_i, e_i) + \lambda \sum_{i=1}^{m} g(e_i, e_i) \\ &= -\sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i}\xi, e_i) + \lambda m \\ &= -\operatorname{div}\xi + \lambda m. \end{aligned}$$

On pose $(\nabla_{e_i} e_i)_x = 0$, $\forall i,\ j = 1, ..., m,$, alors :

$$\begin{aligned} \operatorname{trace}\nabla\operatorname{Ricci} &= \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\operatorname{Ricci}) e_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}\operatorname{Ricci}(e_i) - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Ricci}(\nabla_{e_i} e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \nabla_{e_i} R(e_i, e_j) e_j. \end{aligned}$$

D'autre part pour tout $X = e_k$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\operatorname{Ric}(X) &= \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\operatorname{Ric})(e_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \nabla_{e_i}\operatorname{Ric}(e_i, X) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} \nabla_{e_i} g(R(e_i, e_j)e_j, X) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g(\nabla_{e_i} R(e_i, e_j)e_j, X) \end{aligned}$$

donc $\operatorname{div}\operatorname{Ric}(X) = g(\operatorname{trace}\nabla\operatorname{Ricci}, X)$.
Sachant que $dS = 2\operatorname{div}\operatorname{Ric}$, on peut déduire que :

$$\frac{1}{2} dS(X) = g(\operatorname{trace}\nabla\operatorname{Ricci}, X)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} g(\operatorname{grad} S, X) = g(\operatorname{trace}\nabla\operatorname{Ricci}, X)$$

et comme g est non-dégénérée, on trouve :

$$\frac{1}{2}\operatorname{grad} S = \operatorname{trace}\nabla\operatorname{Ricci}.$$

■

Lemme 3.6. *Soit* (M^m, g, ξ, λ) *un soliton de Ricci, alors :*

$$\operatorname{trace} \nabla^2 \xi = -\operatorname{Ricci} \xi. \tag{3.7}$$

Preuve. Sachant que :

$$\nabla^2_{X,Y} Z \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z,$$

on obtient (sur une carte normale en $x \in M$) :

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace} \nabla^2 \xi &= \sum_{i,j=1}^{m} g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \xi, e_j) e_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} e_i(g(\nabla_{e_i} \xi, e_j)) e_j.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$(\mathcal{L}_\xi g)(e_i, e_j) = g(\nabla_{e_i} \xi, e_j) + g(\nabla_{e_j} \xi, e_i)$$

d'où :

$$\operatorname{trace} \nabla^2 \xi = \sum_{i,j=1}^{m} e_i\big((\mathcal{L}_\xi g)(e_i, e_j)\big) e_j - \sum_{i,j=1}^{m} e_i\big(g(\nabla_{e_j} \xi, e_i)\big) e_j$$

de plus M est un soliton de Ricci vérifiant :

$$\operatorname{Ric}(e_i, e_j) + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi g(e_i, e_j) = \lambda g(e_i, e_j).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace} \nabla^2 \xi &= -2 \sum_{i,j=1}^{m} e_i(\operatorname{Ric}(e_i, e_j)) e_j + 2 \sum_{i,j=1}^{m} \underbrace{e_i(\lambda g(e_i, e_j))}_{=0} e_j - \sum_{i,j=1}^{m} e_i(g(\nabla_{e_j} \xi, e_i)) e_j \\
&= -2 \sum_{i,j=1}^{m} e_i(\operatorname{Ric}(e_i, e_j)) e_j - \sum_{i,j=1}^{m} e_i(g(\nabla_{e_j} \xi, e_i)) e_j \\
&= -2 \sum_{i,j=1}^{m} e_i(g(\operatorname{Ricci}(e_i), e_j)) e_j - \sum_{i,j=1}^{m} e_i(g(\nabla_{e_j} \xi, e_i)) e_j \\
&= -2 \sum_{i,j=1}^{m} e_i(g(\operatorname{Ricci}(e_i), e_j)) e_j - \sum_{i,j=1}^{m} g(\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \xi, e_i) e_j,
\end{aligned}$$

or :

$$R(e_i, e_j)\xi \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \xi - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \xi - \underbrace{\nabla_{[e_i, e_j]} \xi}_{=0},$$

$$\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \xi = R(e_i, e_j)\xi + \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \xi,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}\nabla^2\xi &= -2\sum_{i,j=1}^{m} e_i(g(\operatorname{Ricci}(e_i),e_j))e_j - \sum_{i,j=1}^{m} g(R(e_i,e_j)\xi,e_i)e_j - \sum_{i,j=1}^{m} g(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi,e_i)e_j \\ &= -2\operatorname{trace}\nabla\operatorname{Ricci} - \operatorname{Ricci}\xi - \operatorname{grad}\operatorname{div}\xi.\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}\nabla\operatorname{Ricci} &= \frac{1}{2}\operatorname{grad} S \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\lambda m - \operatorname{div}\xi) \\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\xi.\end{aligned}$$

Finalement, $\operatorname{trace}\nabla^2\xi = -\operatorname{Ricci}\xi$. ■

3.4 Cas des variétés métriques de contact

Théorème 3.10 (Amalendu Ghosh (2012), [5])**.** *Soit (M,φ,ξ,η,g) une variété métrique de contact η-Einstein, de dimension $m>3$. Si (M,g,V,λ) est un soliton de Ricci non-Einstein, alors (M,φ,ξ,η,g) est K-contact (i.e. $\mathcal{L}_\xi g=0$), de plus $\lambda<0$.*

Pour la preuve du Théorème 3.10, on a besoin des Lemmes suivants :

Lemme 3.7. *Soit (M,g) une variété Riemannienne. Alors :*

$$(\mathcal{L}_V\nabla)(X,Y) = (\mathcal{L}_V\nabla)(Y,X), \quad \forall X,Y,V\in\Gamma(TM).$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V\nabla)(X,Y) &= \mathcal{L}_V\nabla_XY - \nabla_{\mathcal{L}_VX}Y - \nabla_X\mathcal{L}_VY \\ &= [V,\nabla_XY] - \nabla_{[V,X]}Y - \nabla_X[V,Y] \\ &= \nabla_V\nabla_XY - \nabla_{\nabla_XY}V - \nabla_{\nabla_VX}Y \\ &\quad +\nabla_{\nabla_XV}Y - \nabla_X\nabla_VY + \nabla_X\nabla_YV \\ &= R(V,X)Y - \nabla_{\nabla_XY}V + \nabla_X\nabla_YV \\ &= R(V,X)Y + \nabla^2_{X,Y}V,\end{aligned}$$

où $\nabla^2_{X,Y}V = \nabla_X\nabla_YV - \nabla_{\nabla_XY}V$. Donc :

$$(\mathcal{L}_V\nabla)(X,Y)-(\mathcal{L}_V\nabla)(Y,X)=R(V,X)Y+\nabla^2_{X,Y}V-R(V,Y)X-\nabla^2_{Y,X}V.$$

Comme :

$$\nabla^2_{X,Y}V-\nabla^2_{Y,X}V=R(X,Y)V,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V\nabla)(X,Y)-(\mathcal{L}_V\nabla)(Y,X) &= R(V,X)Y+R(X,Y)V-R(V,Y)X\\ &= R(V,X)Y+R(X,Y)V+R(Y,V)X\\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Lemme 3.8. *Soient* (M,g) *une variété Riemannienne, et* $X,Y,Z,V\in\Gamma(TM)$*, on a :*

$$(1)\quad (\nabla_X\mathcal{L}_Vg)(Y,Z)=g((\mathcal{L}_V\nabla)(X,Y),Z)+g((\mathcal{L}_V\nabla)(X,Z),Y);$$

$$(2)\quad (\nabla_X\mathcal{L}_Vg)(Y,Z)=(\nabla_Y\mathcal{L}_Vg)(X,Z)+(\nabla_Z\mathcal{L}_Vg)(X,Y)-2g((\mathcal{L}_V\nabla)(Y,Z),X).$$

Preuve. Soient $V\in\Gamma(TM)$, et $X,Y,Z\in\{e_i\}_{i=1}^m$, avec $\{e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée normale en $x\in M$, i.e. $(\nabla_{e_i}e_j)_x=0$.

Pour (1), on a :

$$\begin{aligned}(\nabla_X\mathcal{L}_Vg)(Y,Z) &= \nabla_X(\mathcal{L}_Vg)(Y,Z)-(\mathcal{L}_Vg)(\nabla_XY,Z)-(\mathcal{L}_Vg)(Y,\nabla_XZ)\\ &= \nabla_X(\mathcal{L}_Vg)(Y,Z),\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\nabla_X(\mathcal{L}_Vg)(Y,Z) &= \nabla_X\{Vg(Y,Z)-g(\mathcal{L}_VY,Z)-g(Y,\mathcal{L}_VZ)\}\\ &= \nabla_Xg(\nabla_VY,Z)+\nabla_Xg(Y,\nabla_VZ)-\nabla_Xg(\nabla_VY,Z)+\nabla_Xg(\nabla_YV,Z)\\ &\quad -\nabla_Xg(Y,\nabla_VZ)+\nabla_Xg(Y,\nabla_ZV)\\ &= Xg(\nabla_YV,Z)+Xg(Y,\nabla_ZV),\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}g((\mathcal{L}_V\nabla)(X,Y),Z)+g((\mathcal{L}_V\nabla)(X,Z),Y) &= g(R(V,X)Y,Z)+g(\nabla_X\nabla_YV,Z)\\ &\quad +g(R(V,X)Z,Y)+g(\nabla_X\nabla_ZV,Y)\\ &= Xg(\nabla_YV,Z)-g(\nabla_YV,\nabla_XZ)\\ &\quad +Xg(\nabla_ZV,Y)-g(\nabla_ZV,\nabla_XY)\\ &= Xg(\nabla_YV,Z)+Xg(Y,\nabla_ZV).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(\nabla_X \mathcal{L}_V g)(Y,Z) = g((\mathcal{L}_V \nabla)(X,Y),Z) + g((\mathcal{L}_V \nabla)(X,Z),Y).$$

(2) On a :

$$\begin{array}{rcl}(\nabla_X \mathcal{L}_V g)(Y,Z) & = & g((\mathcal{L}_V \nabla)(Y,X),Z) + g((\mathcal{L}_V \nabla)(Z,X),Y) - g((\mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z),X) \\ & & +g((\mathcal{L}_V \nabla)(Z,Y),X) - g((\mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z),X) + g((\mathcal{L}_V \nabla)(Z,Y),X) \\ & = & (\nabla_Y \mathcal{L}_V g)(X,Z) + (\nabla_Z \mathcal{L}_V g)(X,Y) - 2g((\mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z),X).\end{array} \quad \blacksquare$$

Lemme 3.9. *Soient (M,g) une variété Riemannienne, $X,Y,Z,V \in \Gamma(TM)$. Alors :*

$$(\mathcal{L}_V R)(X,Y)Z = (\nabla_X \mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z) - (\nabla_Y \mathcal{L}_V \nabla)(X,Z). \tag{3.8}$$

Preuve. Soit $X,Y,Z,V \in \Gamma(TM)$. On a :

$$\begin{array}{rcl}(\nabla_X \mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z) & = & \nabla_X(\mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z) - (\mathcal{L}_V \nabla)(\nabla_X Y,Z) - (\mathcal{L}_V \nabla)(Y,\nabla_X Z) \\ & = & \nabla_X([V,\nabla_Y Z] - \nabla_{[V,Y]}Z - \nabla_Y[V,Z]) - [V,\nabla_{\nabla_X Y}Z] + \nabla_{[V,\nabla_X Y]}Z \\ & & +\nabla_{\nabla_X Y}[V,Z] - [V,\nabla_Y \nabla_X Z] + \nabla_{[V,Y]}\nabla_X Z + \nabla_Y[V,\nabla_X Z] \\ & = & \nabla_X \nabla_V \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_{\nabla_Y Z}V - \nabla_X \nabla_{[V,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y \nabla_V Z + \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z V \\ & & -\nabla_V \nabla_{\nabla_X Y}Z + \nabla_{\nabla_{\nabla_X Y}Z}V + \nabla_{[V,\nabla_X Y]}Z + \nabla_{\nabla_X Y}\nabla_V Z - \nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z V \\ & & -\nabla_V \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y \nabla_X Z}V + \nabla_{[V,Y]}\nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_V \nabla_X Z - \nabla_Y \nabla_{\nabla_X Z}V,\end{array}$$

de la même méthode, on trouve :

$$\begin{array}{rcl}(\nabla_Y \mathcal{L}_V \nabla)(X,Z) & = & \nabla_Y \nabla_V \nabla_X Z - \nabla_Y \nabla_{\nabla_X Z}V - \nabla_Y \nabla_{[V,X]}Z - \nabla_Y \nabla_X \nabla_V Z + \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z V \\ & & -\nabla_V \nabla_{\nabla_Y X}Z + \nabla_{\nabla_{\nabla_Y X}Z}V + \nabla_{[V,\nabla_Y X]}Z + \nabla_{\nabla_Y X}\nabla_V Z - \nabla_{\nabla_Y X}\nabla_Z V \\ & & -\nabla_V \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{\nabla_X \nabla_Y Z}V + \nabla_{[V,X]}\nabla_Y Z + \nabla_X \nabla_V \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_{\nabla_Y Z}V.\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}(\nabla_X \mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z) - (\nabla_Y \mathcal{L}_V \nabla)(X,Z) & = & \nabla_X \nabla_V \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_{\nabla_Y Z}V - \nabla_X \nabla_{[V,Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y \nabla_V Z \\ & & +\nabla_X \nabla_Y \nabla_Z V - \nabla_V \nabla_{\nabla_X Y}Z + \nabla_{\nabla_{\nabla_X Y}Z}V + \nabla_{[V,\nabla_X Y]}Z \\ & & +\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_V Z - \nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z V - \nabla_V \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y \nabla_X Z}V \\ & & +\nabla_{[V,Y]}\nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_V \nabla_X Z - \nabla_Y \nabla_{\nabla_X Z}V - \nabla_Y \nabla_V \nabla_X Z \\ & & +\nabla_Y \nabla_{\nabla_X Z}V + \nabla_Y \nabla_{[V,X]}Z + \nabla_Y \nabla_X \nabla_V Z - \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z V \\ & & +\nabla_V \nabla_{\nabla_Y X}Z - \nabla_{\nabla_{\nabla_Y X}Z}V - \nabla_{[V,\nabla_Y X]}Z - \nabla_{\nabla_Y X}\nabla_V Z \\ & & +\nabla_{\nabla_Y X}\nabla_Z V + \nabla_V \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X \nabla_Y Z}V - \nabla_{[V,X]}\nabla_Y Z \\ & & -\nabla_X \nabla_V \nabla_Y Z + \nabla_X \nabla_{\nabla_Y Z}V.\end{array}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}(\nabla_X\mathcal{L}_V\nabla)(Y,Z)-(\nabla_Y\mathcal{L}_V\nabla)(X,Z) &= \nabla_V\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_{\nabla_X\nabla_YZ}V-\nabla_V\nabla_Y\nabla_XZ+\nabla_{\nabla_Y\nabla_XZ}V\\ &+\nabla_V\nabla_{\nabla_YX}Z-\nabla_{\nabla_{\nabla_YX}Z}V-\nabla_V\nabla_{\nabla_XY}Z+\nabla_{\nabla_{\nabla_XY}Z}V\\ &-\nabla_{[V,X]}\nabla_YZ+\nabla_Y\nabla_{[V,X]}Z-\nabla_X\nabla_{[V,Y]}Z+\nabla_{[V,Y]}\nabla_XZ\\ &-\nabla_X\nabla_Y\nabla_VZ+\nabla_X\nabla_Y\nabla_ZV+\nabla_Y\nabla_X\nabla_VZ-\nabla_Y\nabla_X\nabla_ZV\\ &-\nabla_{\nabla_YX}\nabla_VZ+\nabla_{\nabla_YX}\nabla_ZV+\nabla_{[V,\nabla_XY]}Z-\nabla_{[V,\nabla_YX]}Z.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}(\nabla_X\mathcal{L}_V\nabla)(Y,Z)-(\nabla_Y\mathcal{L}_V\nabla)(X,Z) &= [V,\nabla_X\nabla_YZ]-[V,\nabla_Y\nabla_XZ]-[V,\nabla_{[X,Y]}Z]-\nabla_{[V,X]}\nabla_YZ\\ &+\nabla_Y\nabla_{[V,X]}Z-\nabla_X\nabla_{[V,Y]}Z+\nabla_{[V,Y]}\nabla_XZ-\nabla_X\nabla_Y[V,Z]\\ &\nabla_Y\nabla_X[V,Z]+\nabla_{[X,Y]}[V,Z]+\nabla_{[V,[X,Y]]}Z\\ &= [V,\nabla_X\nabla_YZ]-[V,\nabla_Y\nabla_XZ]-[V,\nabla_{[X,Y]}Z]-\nabla_{[V,X]}\nabla_YZ\\ &+\nabla_Y\nabla_{[V,X]}Z-\nabla_X\nabla_{[V,Y]}Z+\nabla_{[V,Y]}\nabla_XZ-\nabla_X\nabla_Y[V,Z]\\ &\nabla_Y\nabla_X[V,Z]+\nabla_{[X,Y]}[V,Z]-\nabla_{[X,[Y,V]]}Z-\nabla_{[Y,[V,X]]}Z\\ &= \mathcal{L}_V(\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z)-\nabla_{\mathcal{L}_VX}\nabla_YZ\\ &+\nabla_Y\nabla_{\mathcal{L}_VX}Z-\nabla_X\nabla_{\mathcal{L}_VY}Z+\nabla_{\mathcal{L}_VY}\nabla_XZ-\nabla_X\nabla_Y\mathcal{L}_VZ\\ &+\nabla_Y\nabla_X\mathcal{L}_VZ+\nabla_{[X,Y]}\mathcal{L}_VZ+\nabla_{[\mathcal{L}_VX,Y]}Z+\nabla_{[X,\mathcal{L}_VY]}Z\\ &= \mathcal{L}_VR(X,Y)Z-R(\mathcal{L}_VX,Y)Z-R(X,\mathcal{L}_VY)Z\\ &-R(X,Y)\mathcal{L}_VZ\\ &= (\mathcal{L}_VR)(X,Y)Z.\end{aligned}$$

■

Preuve du Théorème 3.10. Soit $X,Y\in\Gamma(TM)$. Alors :

$$(\mathcal{L}_Vg)(X,Y)+2\,\mathrm{Ric}(X,Y)-2\lambda g(X,Y)=0, \tag{3.9}$$

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\alpha g(X,Y)+\beta\eta(X)\eta(Y), \tag{3.10}$$

où $\lambda,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (comme $\dim M>3$, on trouve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$). De (3.9) et (3.10), on obtient :

$$(\mathcal{L}_Vg)(X,Y)+2\alpha g(X,Y)+2\beta\eta(X)\eta(Y)-2\lambda g(X,Y)=0,$$

c'est-à-dire :

$$(\mathcal{L}_Vg)(X,Y)=-2(\alpha-\lambda)g(X,Y)-2\beta\eta(X)\eta(Y). \tag{3.11}$$

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur la variété Riemannienne (M,g), tel que $(\nabla_{e_i}e_j)_x=0$, avec $x\in M$, on suppose que $X,Y,Z\in\{e_i\}$. De l'équation (3.11), et la propriété $\nabla_X\xi=-\varphi X-\varphi hX$ [13], on a :

$$\begin{aligned}(\nabla_X\mathcal{L}_Vg)(Y,Z) &= \nabla_X(\mathcal{L}_Vg)(Y,Z)-(\mathcal{L}_Vg)(\nabla_XY,Z)-(\mathcal{L}_Vg)(Y,\nabla_XZ)\\ &= -2(\alpha-\lambda)X(g(Y,Z))-2\beta X(g(Y,\xi))\eta(Z)-2\beta\eta(Y)X(g(Z,\xi))\\ &= -2\beta g(Y,\nabla_X\xi)\eta(Z)-2\beta\eta(Y)g(Z,\nabla_X\xi)\\ &= -2\beta g(Y,-\varphi X-\varphi hX)\eta(Z)-2\beta\eta(Y)g(Z,-\varphi X-\varphi hX),\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(\nabla_X \mathcal{L}_V g)(Y,Z) = 2\beta g(Y, \varphi X + \varphi hX)\eta(Z) + 2\beta\eta(Y)g(Z, \varphi X + \varphi hX). \tag{3.12}$$

D'après la deuxième équation du Lemme 3.4., et l'équation (3.12), on trouve :

$$(\mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z) = 2\beta(\eta(Z)\varphi Y + \eta(Y)\varphi Z + g(Y, \varphi hZ)\xi), \tag{3.13}$$

et d'après le Lemme 3.5., et l'équation (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V R)(X,Y)Z &= 2\beta\{2g(\varphi Y, X)\varphi Z - g(Z, \varphi X + \varphi hX)\varphi Y \\ &\quad + g(Z, \varphi Y + \varphi hY)\varphi X + \eta(Y)(\nabla_X \varphi)Z \\ &\quad - \eta(X)(\nabla_Y \varphi)Z + \eta(Z)(\nabla_X \varphi)Y - \eta(Z)(\nabla_Y \varphi)X \\ &\quad - g(Y, \varphi hZ)\varphi X - g(Y, \varphi hZ)\varphi hX + g(X, \varphi hZ)\varphi Y \\ &\quad + g(X, \varphi hZ)\varphi hY + g(Y, (\nabla_X \varphi h)Z)\xi - g(X, (\nabla_Y \varphi h)Z)\xi\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Puisque la dérivée de Lie est commute avec la trace, de l'équation (3.14), on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V \operatorname{Ric})(Y,Z) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g((\mathcal{L}_V R)(e_i, Y)Z, e_i) \\ &= 2\beta \sum_{i=1}^{2n+1} \{2g(\varphi Y, e_i)g(\varphi Z, e_i) - g(Z, \varphi e_i)g(\varphi Y, e_i) \\ &\quad - g(Z, \varphi he_i)g(\varphi Y, e_i) + g(Z, \varphi Y + \varphi hY)g(\varphi e_i, e_i) \\ &\quad + \eta(Y)g((\nabla_{e_i}\varphi)Z, e_i) - \eta(e_i)g((\nabla_Y \varphi)Z, e_i) \\ &\quad + \eta(Z)g((\nabla_{e_i}\varphi)Y, e_i) - \eta(Z)g((\nabla_Y \varphi)e_i, e_i) \\ &\quad - g(Y, \varphi hZ)g(\varphi e_i, e_i) - g(Y, \varphi hZ)g(\varphi he_i, e_i) \\ &\quad + g(e_i, \varphi hZ)g(\varphi Y, e_i) + g(e_i, \varphi hZ)g(\varphi hY, e_i) \\ &\quad + g(Y, (\nabla_{e_i}\varphi h)Z)g(\xi, e_i) - g(e_i, (\nabla_Y \varphi h)Z)g(\xi, e_i)\} \\ &= 2\beta\{2g(\varphi Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, \varphi Z) - g(\varphi Y, \varphi hZ) \\ &\quad + \eta(Y)(\operatorname{div}\varphi)(Z) - g((\nabla_Y \varphi)Z, \xi) \\ &\quad + \eta(Z)(\operatorname{div}\varphi)(Y) + g(\varphi Y, \varphi hZ) \\ &\quad + g(\varphi hY, \varphi hZ) + g(Y, (\nabla_\xi \varphi h)Z) - g(\xi, (\nabla_Y \varphi h)Z)\}. \end{aligned}$$

D'après la formule $(\operatorname{div}\varphi)X = -2n\eta(X)$ [13], on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_V \operatorname{Ric})(Y,Z) &= 2\beta\{3g(Y,Z) - 3\eta(Y)\eta(Z) - 4n\eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad - g((\nabla_Y \varphi)Z, \xi) - 2\eta(Y)\eta(Z) + g(hY, hZ) \\ &\quad - \eta(hY)\eta(hZ) + g(Y, (\nabla_\xi \varphi h)Z) - g(\xi, (\nabla_Y \varphi h)Z)\}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

suivant les formules :

$$\begin{array}{rcl}\eta(hX) &=& \frac{1}{2}g(\xi,(\mathcal{L}_\xi\varphi)X)\\ &=& \frac{1}{2}g(\xi,\mathcal{L}_\xi\varphi X-\varphi\mathcal{L}_\xi X)\\ &=& \frac{1}{2}g(\xi,\nabla_\xi\varphi X-\nabla_{\varphi X}\xi)+\frac{1}{2}g(\varphi\xi,\mathcal{L}_\xi X)\\ &=& \frac{1}{2}\xi g(\xi,\varphi X)-\frac{1}{2}g(\nabla_\xi\xi,\varphi X)-\frac{1}{4}(\varphi X)(g(\xi,\xi))\\ &=& \frac{1}{2}g(\varphi\xi+\varphi h\xi,\varphi X)\\ &=& 0,\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}g((\nabla_Y\varphi)Z,\xi) &=& g(\nabla_Y\varphi Z,\xi)\\ &=& -g(\varphi Z,\nabla_Y\xi)\\ &=& g(\varphi Z,\varphi Y)+g(\varphi Z,\varphi hY)\\ &=& g(Z,Y)-\eta(Z)\eta(Y)+g(Z,hY),\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}g(\xi,(\nabla_Y\varphi h)Z) &=& g(\xi,\nabla_Y\varphi hZ)\\ &=& -g(\nabla_Y\xi,\varphi hZ)\\ &=& g(\varphi Y,\varphi hZ)+g(\varphi hY,\varphi hZ)\\ &=& g(Y,hZ)+g(hY,hZ),\end{array}$$

et l'équation (3.15), on obtient :

$$(\mathcal{L}_V\,\mathrm{Ric})(Y,Z)=2\beta\{2g(Y,Z)-2(1+2n)\eta(Y)\eta(Z)-2g(Z,hY)+g(Y,(\nabla_\xi\varphi h)Z)\}. \quad (3.16)$$

De (3.10) et (3.11), on a :

$$(\mathcal{L}_V\,\mathrm{Ric})(Y,Z)=-2(\alpha^2-\alpha\lambda)g(Y,Z)-2\alpha\beta\eta(Y)\eta(Z)+\beta\{(\mathcal{L}_V\eta)(Y)\eta(Z)+\eta(Y)(\mathcal{L}_V\eta)(Z)\}. \quad (3.17)$$

Par conséquent :

$$(4\beta+2(\alpha^2-\alpha\lambda))g(Y,Z)+(-4\beta(1+2n)+2\alpha\beta)\eta(Y)\eta(Z)-4\beta g(Z,hY)+2\beta g(Y,(\nabla_\xi\varphi h)Z)$$
$$-\beta\{(\mathcal{L}_V\eta)(Y)\eta(Z)+\eta(Y)(\mathcal{L}_V\eta)(Z)\}=0. \quad (3.18)$$

On remplace Y par φY, et Z par φZ dans l'équation (3.18), on trouve que :

$$(4\beta+2(\alpha^2-\alpha\lambda))g(\varphi Y,\varphi Z)-4\beta g(\varphi Z,h\varphi Y)+2\beta g(\varphi Y,(\nabla_\xi\varphi h)\varphi Z)=0,$$

c'est-à-dire :

$$(2\beta+\alpha^2-\alpha\lambda)g(\varphi Y,\varphi Z)+2\beta g(Z,hY)+\beta g(\varphi Y,(\nabla_\xi\varphi h)\varphi Z)=0,$$

ainsi :

$$(2\beta+\alpha^2-\alpha\lambda)\sum_{i=1}^{2n+1}|\varphi e_i|^2+2\beta\sum_{i=1}^{2n+1}g(e_i,he_i)+\beta\sum_{i=1}^{2n+1}g(\varphi e_i,(\nabla_\xi\varphi h)\varphi e_i)=0.$$

On suppose que $e_1=\xi$, on a $\sum_{i=1}^{2n+1}|\varphi e_i|^2=2n$, et comme $\operatorname{trace}\varphi h=0$, on obtient $\operatorname{trace}\nabla_\xi\varphi h=0$ (dans la base $\{\xi,\varphi e_i\}_{i=1}^{2n}$, avec $(\nabla_\xi\varphi h)\xi=0$, et $\operatorname{trace}\nabla_\xi\varphi h=\nabla_\xi\operatorname{trace}\varphi h$, donc

$$\sum_{i=1}^{2n+1}g(\varphi e_i,(\nabla_\xi\varphi h)\varphi e_i)=0,$$

et :

$$\begin{array}{rcl}
g(\varphi e_i,(\nabla_\xi\varphi h)\varphi e_i) & = & \sum_{j,s=1}^{2n+1}g(\varphi e_i,e_j)g(\varphi e_i,e_s)g(e_s,(\nabla_\xi\varphi h)e_j)\\
& = & \sum_{j,s=1}^{2n+1}g(\varphi e_i,e_j)g(\varphi e_i,e_s)g(e_s,\nabla_\xi\varphi he_j)\\
& = & \sum_{j,s=1}^{2n+1}g(\varphi e_i,e_j)g(\varphi e_i,e_s)\xi g(e_s,\varphi he_j).
\end{array}$$

On suppose que $g(e_s,\varphi he_j)=0$ si $s\neq j$ (comme φh est symétrique donc diagonalisable), ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
g(\varphi e_i,(\nabla_\xi\varphi h)\varphi e_i) & = & \sum_{j=1}^{2n+1}g(e_i,\varphi e_j)g(e_i,\varphi e_j)\xi g(e_j,\varphi he_j)\\
& = & \sum_{j=1}^{2n+1}g(\varphi e_j,\varphi e_j)\xi g(e_j,\varphi he_j)\\
& = & \sum_{j=1}^{2n+1}(g(e_j,e_j)-g(e_j,\xi)g(e_j,\xi))\xi g(e_j,\varphi he_j)\\
& = & \sum_{j=1}^{2n+1}\xi g(e_j,\varphi he_j)\\
& = & 0.
\end{array}$$

Et comme $\operatorname{trace}h=0$, on trouve :

$$2\beta+\alpha^2-\alpha\lambda=0. \tag{3.19}$$

Maintenant, on remplace Z par ξ dans l'équation (3.18), on obtient :

$$(4\beta+2(\alpha^2-\alpha\lambda))\eta(Y)+(-4\beta(1+2n)+2\alpha\beta)\eta(Y)-\beta(\mathcal{L}_V\eta)(Y)-\beta\eta(Y)(\mathcal{L}_V\eta)(\xi)=0, \tag{3.20}$$

ici :

$$\begin{aligned} h\xi &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\varphi)\xi \\ &= \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_\xi\varphi\xi - \tfrac{1}{2}\varphi\mathcal{L}_\xi\xi \\ &= 0, \end{aligned}$$

et :

$$(\nabla_\xi\varphi h)\xi = \nabla_\xi\varphi h\xi - \varphi h\nabla_\xi\xi = 0,$$

pour $Y = \xi$, l'équation (3.20) devient :

$$4\beta + 2(\alpha^2 - \alpha\lambda) - 4\beta(1+2n) + 2\alpha\beta - 2\beta(\mathcal{L}_V\eta)(\xi) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\beta(\mathcal{L}_V\eta)(\xi) = 2\beta + \alpha^2 - \alpha\lambda - 2\beta - 4n\beta + \alpha\beta,$$

comme $2\beta + \alpha^2 - \alpha\lambda = 0$, on trouve :

$$\beta(\mathcal{L}_V\eta)(\xi) = -2\beta - 4n\beta + \alpha\beta,$$

et comme $\beta \neq 0$ (la variété (M, g) est non-d'Einstein), on a :

$$(\mathcal{L}_V\eta)(\xi) = \alpha - 2(2n+1).$$

Ainsi, l'équation (3.20) devient :

$$(4\beta + 2(\alpha^2 - \alpha\lambda) - 4\beta - 8\beta n + 2\alpha\beta)\eta(Y) - \beta(\mathcal{L}_V\eta)(Y) - \beta\eta(Y)(\alpha - 2(2n+1)) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\beta(\mathcal{L}_V\eta)(Y) = (-4\beta - 8\beta n + 2\alpha\beta - \alpha\beta + 2\beta + 4\beta n)\eta(Y),$$

d'où :

$$(\mathcal{L}_V\eta)(Y) = (-2 - 4n + \alpha)\eta(Y) = (\alpha - 2(2n+1))\eta(Y). \tag{3.21}$$

On a $(\mathcal{L}_V\eta)(\xi) = V\eta(\xi) - \eta(\mathcal{L}_V\xi)$, de l'équation (3.21), on obtient :

$$\mathcal{L}_V\xi = -(\alpha - 2(2n+1))\xi.$$

Maintenant, on remplace X et Y par ξ dans l'équation (3.11), on a :

$$2\alpha - \lambda + \beta = 2(2n+1). \tag{3.22}$$

Puisque $\mathcal{L}_V \circ d = d \circ \mathcal{L}_V$, et $d\eta = \Phi$, de l'équation (3.21), on conclut que :

$$(\mathcal{L}_V d\eta)(X,Y) = (\alpha - 2(2n+1))g(X,\varphi Y),$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V d\eta)(X,Y) &= V d\eta(X,Y) - d\eta(\mathcal{L}_V X, Y) - d\eta(X, \mathcal{L}_V Y) \\
&= V g(X,\varphi Y) - g(\mathcal{L}_V X, \varphi Y) - g(X, \varphi \mathcal{L}_V Y) \\
&= (\mathcal{L}_V g)(X,\varphi Y) + g(\mathcal{L}_V X, \varphi Y) + g(X, \mathcal{L}_V \varphi Y) \\
&\quad - g(\mathcal{L}_V X, \varphi Y) - g(X, \varphi \mathcal{L}_V Y) \\
&= (\mathcal{L}_V g)(X,\varphi Y) + g(X, (\mathcal{L}_V \varphi) Y).
\end{aligned}$$

Alors :

$$(\mathcal{L}_V g)(X,\varphi Y) + g(X, (\mathcal{L}_V \varphi) Y) = (\alpha - 2(2n+1))g(X,\varphi Y),$$

de l'équation (3.11), on a :

$$(\mathcal{L}_V g)(X,\varphi Y) = -2(\alpha - \lambda)g(X,\varphi Y),$$

ainsi :

$$(\mathcal{L}_V \varphi)Y = (3\alpha - 2\lambda - 2(2n+1))\varphi Y. \tag{3.23}$$

On a :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V \varphi^2)X &= \mathcal{L}_V \varphi^2 X - \varphi^2 \mathcal{L}_V X \\
&= -\mathcal{L}_V X + \mathcal{L}_V \eta(X)\xi + \mathcal{L}_V X - \eta(\mathcal{L}_V X)\xi \\
&= V(\eta(X))\xi + \eta(X)\mathcal{L}_V \xi - \eta(\mathcal{L}_V X)\xi \\
&= (\mathcal{L}_V \eta)(X)\xi - \eta(X)(\alpha - 2(2n+1))\xi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_V \varphi^2)X &= \mathcal{L}_V \varphi^2 X - \varphi^2 \mathcal{L}_V X \\
&= \mathcal{L}_V \varphi(\varphi X) - \varphi(\varphi \mathcal{L}_V X) \\
&\quad - \varphi \mathcal{L}_V \varphi X + \varphi \mathcal{L}_V \varphi X \\
&= (\mathcal{L}_V \varphi)\varphi X + \varphi(\mathcal{L}_V \varphi) X.
\end{aligned}$$

De l'équation (3.23), on a :

$$(3\alpha - 2\lambda - 2(2n+1))\varphi^2 X + (3\alpha - 2\lambda - 2(2n+1))\varphi^2 X = 0,$$

donc $3\alpha - 2\lambda - 2(2n+1) = 0$, et d'après l'équation (3.22), on a :

$$2\alpha - \lambda + \beta = 3\alpha - 2\lambda,$$

c'est-à-dire :

$$\alpha - \lambda = \beta, \tag{3.24}$$

de (3.19) et (3.24), on conclut que $\alpha = -2$ et $\beta = -2 - \lambda$. D'après (3.22), on trouve $\lambda = -2(2+n) < 0$. On pose $L(X) = R(X, \xi)\xi$, alors :

$$\begin{aligned} \text{trace } L &= \text{Ric}(\xi, \xi) \\ &= \alpha + \beta \\ &= -2 - 2 + 2(2+n) \\ &= 2n, \end{aligned}$$

or, trace $L = 2n - \text{trace}(h^2)$ (voir [2, 13]), ainsi $\text{trace}(h^2) = 0$, c'est-à-dire $h = 0$, par conséquent $N^{(3)} = 0$, et ξ de Killing. ■

Dans le cas d'une variété de Sasaki, on a le résultat suivant :

Théorème 3.11. *[7] Soit (M, g) une variété de Sasaki dont la métrique g est un soliton de Ricci du type gradient, alors f est constante et (M, g) est une variété d'Einstein.*

Chapitre 4

Solitons de Ricci généralisés

La notion des solitons de Ricci généralisés sur les variétés Riemanniennes est introduite récemment par Nurowski et Randall [11]. Cette notion est une généralisation naturelle de soliton de Ricci, equation de Killing's, equation des homothéties, equation d'Einstein-Weyl, structures projectives métriques, et les variétés d'Einstein.
Actuellement, plusieurs auteurs travaillent sur cette direction, He et Zhu [7], ont donné dans ce dernier papier le résultat suivant, toute variété de Sasaki qui satisfait l'équation du soliton de Ricci est une variété d'Einstein. Dans ce chapitre on donne quelques résultats sur les solitons de Ricci généralisés et quelques structures.

Les résultats obtenus dans ce chapitre sont publiés dans l'article [10], et d'autres sont soumis pour publication.

4.1 Quelques définitions et notations

Définition 4.47. *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension n. Considérons le système d'équations :*

$$\mathcal{L}_X g = -2c_1 X^\flat \odot X^\flat + 2c_2 \mathrm{Ric} + 2\lambda g, \tag{4.1}$$

où $X^\flat$ est une 1-forme définie par $X^\flat = g(X, \cdot)$, et c_1, c_2, $\lambda \in \mathbb{R}$. On appellera l'équation (4.1) l'équation du soliton de Ricci généralisé. Une pair (g, X) est appelée soliton de Ricci généralisé.

Pour des indices a, b l'équation (4.1) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial X^i}{\partial x_b}g_{ia}+\frac{\partial X^i}{\partial x_a}g_{ib}\right\}+\sum_{i,j=1}^{n}\left\{X^i\Gamma_{ai}^{j}g_{jb}+X^i\Gamma_{bi}^{j}g_{ja}\right\} &= -2c_1\sum_{i,j=1}^{n}X^iX^jg_{ia}g_{jb}\\ &+ 2c_2\mathrm{Ric}_{ab}+2\lambda g_{ab}.\end{aligned}$$

Dans le cas où $c_1=0$ et $c_2=-1$, (4.2) est satisfaite si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial X^i}{\partial x_b}g_{ia}+\frac{\partial X^i}{\partial x_a}g_{ib}\right\}+\sum_{i,j=1}^{n}\left\{X^i\Gamma_{ai}^{j}g_{jb}+X^i\Gamma_{bi}^{j}g_{ja}\right\}=-2\mathrm{Ric}_{ab}+2\lambda g_{ab}.$$

c'est l'équation du soliton de Ricci classique.
Il est clair que la généralisation précédente n'est pas unique, mais son importance repose sur le fait qu'elle regroupe des équations importantes en géométrie différentielle. Voici quelques unes :

1. Si $c_1=0$, $c_2=-1$, alors c'est le soliton de Ricci défini dans le chapitre 3 ;
2. Si $c_1=c_2=0$, alors c'est l'équation d'homothetie ;
3. Si $c_1=c_2=\lambda=0$ l'équation de Killing ;
4. Si $c_1=1$, $c_2=-\dfrac{1}{n-2}$, alors ce sont des cas particuliers des équations d'Einstein-Weyl.

4.2 Exemples de Solitons de Ricci généralisés

Nous donnons maintenant des exemples de soliton de Ricci généralisés en dimension 2. Soit la métrique Riemannienne suivante :

$$g=A(y)dx^2+\frac{1}{A(y)}dy^2. \tag{4.2}$$

où $A(y)>0$ est une fonction différentiable à une variable. La courbure de Gauss de cette métrique Riemannienne est donnée par :

$$K=-\frac{1}{2}A''(y).$$

Premièrement, nous donnons des solutions de (4.2) avec $c_1=0$, et après avec $c_1\neq 0$. Nous donnons des exemples classiques comme le cigare Hamilton seront obtenus comme cas particuliers.
Pour avoir des exemples explicites du soliton de Ricci généralisés (g,X), avec $c_1=0$, on prend la métrique Riemannienne donnée par (4.2), et la 1-forme $X^\flat$ donnée par :

$$X^\flat=A(y)\nu dx+\mu dy, \tag{4.3}$$

avec μ, ν des constantes réelles, tel que $\mu^2+\nu^2\neq 0$. Nous avons :

$$F = dX^\flat = -\nu A^{'}(y)dx\wedge dy,$$

Dans le cas gradient, nous obtenons $F=0$, si $\nu=0$ ou g est plate. Pour un tel X, et pour $c_1=0$ le soliton de Ricci généralisé se réduit à une EDO du second ordre :

$$c_2A^{''}+\mu A^{'}-2\lambda=0. \tag{4.4}$$

C'est la seule équation à résoudre pour obtenir un soliton de Ricci avec $c_1=0$ pour (4.1). La solution générale de (4.4) quand $c_2\neq 0$ et $\mu\neq 0$ est :

$$A(y)=2\frac{\lambda}{\mu}y+\alpha\exp(-\frac{\mu}{c_2}y)+\beta,$$

où α, β sont des constantes.
Si $\mu=0$, la solution générale est :

$$A(y)=\frac{\lambda}{c_2}y^2+\alpha y+\beta, \tag{4.5}$$

mais la solution à une courbure Gaussienne constante $K=-\frac{\lambda}{c_2}$. De même, si $c_2=0$ et $\mu\neq 0$ nous obtenons une métrique plate avec une solution générale donnée par :

$$A(y)=2\frac{\lambda}{\mu}y+\beta.$$

Finalement, le cas le plus dégénéré est : $c_2=0$ et $\mu=0$, cela donne $\lambda=0$, quelle que soit la fonction $A(y)$ solution de l'équation (4.4). Cela veut dire que le champ de vecteurs $X=\partial_x$, qui correspond à la 1-forme $X^\flat=A(y)\nu dx$ est toujours de Killing pour la métrique Riemannienne (4.2) peu importe la fonction $A(y)$.

Dans le cas où la courbure est non-constante et le champ de vecteurs X n'est pas de Killing, nous avons :

Proposition 4.20. *[7] Pour chaque λ et $c_2\neq 0$, il existe une famille de solitons de Ricci Riemannien à 4-paramètres (α, β, $\mu\neq 0$, ν) donnée par :*

$$\begin{aligned} g &= \left(2\frac{\lambda}{\mu}y+\alpha\exp(-\frac{\mu}{c_2})\right)dx^2+\frac{1}{2\frac{\lambda}{\mu}y+\alpha\exp(-\frac{\mu}{c_2})y+\beta}dy^2, \\ X^\flat &= \nu\left(2\frac{\lambda}{\mu}y+\alpha\exp(-\frac{\mu}{c_2})+\beta\right)dx+\mu dy. \end{aligned}$$

La courbure de Gauss de cette métrique Riemannienne est donnée par :

$$K = \frac{\alpha\mu^2}{2c_2^2}\exp(-\frac{\mu}{c_2}y),$$

est la 2-forme F est donnée par :

$$F = \nu\frac{\alpha\mu^2\exp(-\frac{\mu}{c_2}y) - 2c_2\lambda}{\mu c_2}dx \wedge dy.$$

Exemple 22 (Cigar de Hamilton généralisé). Dans certains cas pour simplifier les formules dans la Proposition (4.20) on peut introduire une variable r reliée à y par :

$$y = \frac{c_2}{\mu}\log\frac{\alpha}{\beta(\tanh^2(\frac{\mu\sqrt{\beta}}{2c_2}r) - 1)}.$$

Avec $\lambda = 0$, la métrique Riemannienne g devient :

$$g = dr^2 + \beta\tanh^2(\frac{\mu\sqrt{\beta}}{2c_2}r)dx^2, \tag{4.6}$$

et la 1-forme $X^\flat$ est donnée par :

$$X^\flat = \beta\nu\tanh^2(\frac{\mu\sqrt{\beta}}{2c_2}r)dx + \mu\sqrt{\beta}\tanh(\frac{\mu\sqrt{\beta}}{2c_2}r)dr. \tag{4.7}$$

4.3 Solitons de Ricci généralisés sur les variétés de Sasaki

Dans cette section, nous montrons qu'une variété Sasakienne qui satisfait l'équation du soliton de Ricci généralisé de type gradient, satisfaisant certaines conditions, est nécessairement d'Einstein.

Théorème 4.12. *[10] Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Sasaki de dimension $(2n+1)$, qui satisfait l'équation du soliton de Ricci généralisé (4.1) avec $X = \mathrm{grad}f$ pour $f \in C^\infty(M)$. Si $c_1(\lambda + 2c_2n) \neq -1$, alors f est constante. De plus, si $c_2 \neq 0$, alors (M, g) est une variété d'Einstein.*

Pour la preuve du Théorème 4.12, on a besoin des Lemmes suivants :

Lemme 4.10. *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Sasaki. Alors :*

$$\big(\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_X g)\big)(Y, \xi) \;=\; g(X, Y) + g(\nabla_\xi\nabla_\xi X, Y) + Yg(\nabla_\xi X, \xi),$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, avec Y est orthogonal à ξ.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_X g)\big)(Y,\xi) &= \xi\big((\mathcal{L}_X g)(Y,\xi)\big) - (\mathcal{L}_X g)(\mathcal{L}_\xi Y,\xi)\\ &\quad -(\mathcal{L}_X g)(Y,\mathcal{L}_\xi \xi),\end{aligned}\tag{4.8}$$

comme $\mathcal{L}_\xi Y = [\xi, Y]$, $\mathcal{L}_\xi \xi = [\xi,\xi] = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_X g)\big)(Y,\xi) &= \xi g(\nabla_Y X,\xi) + \xi g(\nabla_\xi X, Y) - g(\nabla_{[\xi,Y]}X,\xi)\\ &\quad -g(\nabla_\xi X,[\xi,Y])\\ &= g(\nabla_\xi\nabla_Y X,\xi) + g(\nabla_Y X,\nabla_\xi\xi) + g(\nabla_\xi\nabla_\xi X, Y)\\ &\quad +g(\nabla_\xi X,\nabla_\xi Y) - g(\nabla_{[\xi,Y]}X,\xi) - g(\nabla_\xi X,\nabla_\xi Y)\\ &\quad +g(\nabla_\xi X,\nabla_Y\xi),\end{aligned}$$

et comme $\nabla_\xi\xi = \varphi\xi = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_X g)\big)(Y,\xi) &= g(\nabla_\xi\nabla_Y X,\xi) + g(\nabla_\xi\nabla_\xi X, Y) - g(\nabla_{[\xi,Y]}X,\xi)\\ &\quad +Yg(\nabla_\xi X,\xi) - g(\nabla_Y\nabla_\xi X,\xi).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Par la définition du tenseur de courbure, on obtient :

$$\big(\mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_X g)\big)(Y,\xi) = g(R(\xi,Y)X,\xi) + g(\nabla_\xi\nabla_\xi X,Y) + Yg(\nabla_\xi X,\xi).\tag{4.10}$$

De l'équation (4.10), avec $g(Y,\xi)=0$, on a :

$$g(R(\xi,Y)X,\xi) = g(R(Y,\xi)\xi,X) = g(X,Y).\tag{4.11}$$

■

Lemme 4.11. *Soient (M,g) une variété Riemannienne, et $f \in C^\infty(M)$. Alors :*

$$\big(\mathcal{L}_\xi(df\odot df)\big)(Y,\xi) = Y(\xi(f))\xi(f) + Y(f)\xi(\xi(f)),$$

où $\xi, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_\xi(df\odot df)\big)(Y,\xi) &= \xi\big(Y(f)\xi(f)\big) - [\xi,Y](f)\xi(f) - Y(f)[\xi,\xi](f)\\ &= \xi(Y(f))\xi(f) + Y(f)\xi(\xi(f)) - [\xi,Y](f)\xi(f),\end{aligned}$$

comme $[\xi,Y](f) = \xi(Y(f)) - Y(\xi(f))$, on obtient :

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_\xi(df\odot df)\big)(Y,\xi) &= [\xi,Y](f)\xi(f) + Y(\xi(f))\xi(f) + Y(f)\xi(\xi(f))\\ &\quad -[\xi,Y](f)\xi(f)\\ &= Y(\xi(f))\xi(f) + Y(f)\xi(\xi(f)).\end{aligned}$$

■

Lemme 4.12. *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété de Sasaki de dimension $(2n+1)$, et qui satisfait l'équation du soliton généralisé, avec $X = \operatorname{grad} f$, pour $f \in C^\infty(M)$. Alors :*

$$\nabla_\xi \operatorname{grad} f = (\lambda + 2c_2 n)\xi - c_1 \xi(f) \operatorname{grad} f.$$

Preuve. Soit $Y \in \Gamma(TM)$, de la définition de la courbure de Ricci, avec la propriété $R(X,Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ric}(\xi, Y) &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(R(\xi, e_i)e_i, Y) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} g(R(e_i, Y)\xi, e_i) \\ &= \eta(Y) \sum_{i=1}^{2n+1} g(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{2n+1} \eta(e_i) g(X, e_i) \\ &= (2n+1)\eta(Y) - \eta(Y) \\ &= 2n\eta(Y) = 2ng(\xi, Y), \end{aligned} \tag{4.12}$$

où $\{e_i\}$ est une base orthonormée locale sur (M, g). Ce qui implique :

$$\begin{aligned} \lambda g(\xi, Y) + c_2 \operatorname{Ric}(\xi, Y) &= \lambda g(\xi, Y) + 2c_2 n g(\xi, Y) \\ &= (\lambda + 2c_2 n) g(\xi, Y). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Les équations (4.12) et (4.13), nous donnent :

$$\begin{aligned} (\operatorname{Hess} f)(\xi, Y) &= -c_1 \xi(f) Y(f) + (\lambda + 2c_2 n) g(\xi, Y) \\ &= -c_1 \xi(f) g(\operatorname{grad} f, Y) + (\lambda + 2c_2 n) g(\xi, Y). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Le résultat du Lemme 4.12 s'obtient de (4.14), et de la définition du Hessien. ■

Lemme 4.13. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, et soit ξ un champ de Killing sur M, alors :*

- **(1)** $R(\xi, X)Y + \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y} \xi = 0$;
- **(2)** $\mathcal{L}_\xi \nabla_X Y = \nabla_X \mathcal{L}_\xi Y + \nabla_{\mathcal{L}_\xi X} Y$;
- **(3)** $(\mathcal{L}_\xi R)(X, Y)Z = 0$;
- **(4)** $\mathcal{L}_\xi Ric = 0$.

Ici, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Preuve.

(1) On a :

$$\begin{aligned} g(R(\xi,X)X,Y) &= g(R(X,Y)\xi,X) \\ &= g(\nabla_X\nabla_Y\xi,X) - g(\nabla_Y\nabla_X\xi,X) - g(\nabla_{[X,Y]}\xi,X), \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} g(R(\xi,X)X,Y) &= Xg(\nabla_Y\xi,X) - g(\nabla_Y\xi,\nabla_X X) \\ &\quad -Yg(\nabla_X\xi,X) + g(\nabla_X\xi,\nabla_Y X) \\ &\quad -g(\nabla_{\nabla_X Y,}\xi,X) + g(\nabla_{\nabla_Y X,}\xi,X) \\ &= -Xg(\nabla_X\xi,Y) + g(\nabla_{\nabla_X X}\xi,Y) \\ &\quad +Xg(\nabla_X\xi,Y) - g(\nabla_X\nabla_X\xi,Y), \end{aligned}$$

comme g est non dégénérée, on obtient :

$$R(\xi,X)X = \nabla_{\nabla_X X}\xi - \nabla_X\nabla_X\xi.$$

Donc :

$$R(\xi,X+Y)(X+Y) + \nabla_{X+Y}\nabla_{X+Y}\xi - \nabla_{\nabla_{X+Y}X+Y}\xi \;=\; 0,$$

i.e.

$$\begin{aligned} &R(\xi,X)X + R(\xi,X)Y + R(\xi,Y)X + R(\xi,Y)Y \\ &+\nabla_X\nabla_X\xi + \nabla_X\nabla_Y\xi + \nabla_Y\nabla_X\xi + \nabla_Y\nabla_Y\xi \\ &-\nabla_{\nabla_X X}\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi - \nabla_{\nabla_Y X}\xi - \nabla_{\nabla_Y Y}\xi \;=\; 0, \end{aligned}$$

d'où :

$$R(\xi,X)Y + \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi + R(\xi,Y)X + \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{\nabla_Y X}\xi \;=\; 0,$$

comme :

$$R(\xi,X)Y + \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi = R(\xi,Y)X + \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{\nabla_Y X}\xi,$$

car :

$$\begin{aligned} R(\xi,X)Y + \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi &- R(\xi,Y)X - \nabla_Y\nabla_X\xi + \nabla_{\nabla_Y X}\xi \\ &= R(\xi,X)Y + R(Y,\xi)X + R(X,Y)\xi = 0, \end{aligned}$$

on obtient :

$$2[R(\xi,X)Y+\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_XY}\xi]=0,$$

i.e.

$$R(\xi,X)Y+\nabla_X\nabla_Y\xi-\nabla_{\nabla_XY}\xi=0.$$

(2)

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}_\xi\nabla_XY &=& [\xi,\nabla_XY]\\ &=& \nabla_\xi\nabla_XY-\nabla_{\nabla_XY}\xi\\ &=& R(\xi,X)Y+\nabla_X\nabla_\xi Y+\nabla_{[\xi,X]}Y-\nabla_{\nabla_XY}\xi\\ &=& -\nabla_X\nabla_Y\xi+\nabla_X\nabla_\xi Y+\nabla_{[\xi,X]}Y\\ &=& \nabla_X[\xi,Y]+\nabla_{[\xi,X]}Y\\ &=& \nabla_{\mathcal{L}_\xi X}Y+\nabla_X\mathcal{L}_\xi Y.\end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{L}_\xi R(X,Y)Z &=& \mathcal{L}_\xi\nabla_X\nabla_YZ-\mathcal{L}_\xi\nabla_Y\nabla_XZ-\mathcal{L}_\xi\nabla_{[X,Y]}Z\\ &=& \nabla_{\mathcal{L}_X}\nabla_YZ+\nabla_X\mathcal{L}_\xi\nabla_YZ-\nabla_{\mathcal{L}_\xi Y}\nabla_XZ\\ && -\nabla_Y\mathcal{L}\xi\nabla_XZ-\nabla_{\mathcal{L}_\xi[X,Y]}Z-\nabla_{[X,Y]}\mathcal{L}_\xi Z\\ &=& \nabla_{\mathcal{L}_X}\nabla_YZ+\nabla_X\nabla_{\mathcal{L}_\xi Y}Z+\nabla_X\nabla_Y\mathcal{L}_\xi Z\\ && -\nabla_{\mathcal{L}_\xi Y}\nabla_XZ-\nabla_Y\nabla_{\mathcal{L}_\xi X}Z-\nabla_Y\nabla_X\mathcal{L}_\xi Z\\ && -\nabla_{\nabla_{\mathcal{L}_\xi X}Y}Z-\nabla_{\nabla_X\mathcal{L}_\xi Y}Z+\nabla_{\nabla_{\mathcal{L}_\xi Y}X}Z\\ && +\nabla_{\nabla_Y\mathcal{L}_\xi X}Z-\nabla_{\nabla_XY}\mathcal{L}_\xi Z-\nabla_{\nabla_YX}\mathcal{L}_\xi Z\\ &=& R(\mathcal{L}_\xi X,Y)Z+R(X,\mathcal{L}_\xi Y)Z+R(X,Y)\mathcal{L}_\xi Z,\end{array}$$

et comme :

$$(\mathcal{L}_\xi R)(X,Y)Z=\mathcal{L}_\xi R(X,Y)Z-R(\mathcal{L}_\xi X,Y)Z-R(X,\mathcal{L}_\xi Y)Z-R(X,Y)\mathcal{L}_\xi Z,$$

on obtient $(\mathcal{L}_\xi R)(X,Y)Z=0$.

(4) Soit $X,Y\in\Gamma(TM)$, et soit $\{e_i\}_{i=1}^n$ une base orthonormée sur (M,g), tel que $\nabla_{e_i}e_j=0$

en $x \in M$. Alors :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi Ric)(X,Y) &= \mathcal{L}_\xi \operatorname{Ric}(X,Y) - \operatorname{Ric}(\mathcal{L}_\xi X, Y) - \operatorname{Ric}(X, \mathcal{L}_\xi Y) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_\xi g(R(X,e_i)e_i, Y) \\
&- \sum_{i=1}^n g(R(\mathcal{L}_\xi X, e_i)e_i, Y) - \sum_{i=1}^n g(R(X,e_i)e_i, \mathcal{L}_\xi Y) \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathcal{L}_\xi g)(R(X,e_i)e_i, Y) \\
&+ \sum_{i=1}^n g(\mathcal{L}_\xi R(X,e_i)e_i, Y) + \sum_{i=1}^n g(R(X,e_i)e_i, \mathcal{L}_\xi Y) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n g(R(\mathcal{L}_\xi X, e_i)e_i, Y) - \sum_{i=1}^n g(R(X,e_i)e_i, \mathcal{L}_\xi Y) \\
&= \sum_{i=1}^n g(R(X, \mathcal{L}_\xi e_i)e_i, Y) + \sum_{i=1}^n g(R(X,e_i)\mathcal{L}_\xi e_i, Y),
\end{aligned}$$

comme :

$$\mathcal{L}_\xi e_i = [\xi, e_i] = \nabla_\xi e_i - \nabla_{e_i}\xi = -\nabla_{e_i}\xi.$$

$$-\nabla_{e_i}\xi^j e_j = -\xi^j \nabla_{e_i} e_j - e_i(\xi^j)e_j = -e_i(\xi^j)e_j,$$

on obtient :

$$(\mathcal{L}_\xi Ric)(X,Y) = -\sum_{i,j=1}^n g(R(X, e_i(\xi^j)e_j)e_i, Y) - \sum_{i,j=1}^n g(R(X,e_j)e_i(\xi^i)e_i, Y),$$

on fait un changement d'indice, on trouve :

$$(\mathcal{L}_\xi Ric)(X,Y) = -\sum_{i,j=1}^n g(R(X,e_i)e_j, Y)(e_i(\xi^j) + e_j(\xi^i)).$$

Or :

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathcal{L}_\xi g)(e_i, e_j) \\
&= g(\nabla_{e_i}\xi, e_j) + g(\nabla_{e_j}\xi, e_i) \\
&= \sum_{a=1}^n e_i(\xi^a) g(e_a, e_j) + \sum_{a=1}^n e_j(\xi^a) g(e_a, e_i) \\
&= e_j(\xi^j) + e_i(\xi^j),
\end{aligned}$$

donc $(\mathcal{L}_\xi Ric)(X,Y) = 0$.

$\blacksquare$

Preuve du Théorème 4.12. Soit $Y \in \Gamma(TM)$, tel que $g(\xi, Y) = 0$, de Lemme 4.10, avec $X = \operatorname{grad} f$, on a :

$$2\big(\mathcal{L}_\xi(\operatorname{Hess} f)\big)(Y,\xi) \;=\; Y(f) + g(\nabla_\xi \nabla_\xi \operatorname{grad} f, Y) + Y g(\nabla_\xi \operatorname{grad} f, \xi), \tag{4.15}$$

de Lemme 4.12, et l'équation (4.31), on trouve :

$$\begin{aligned} 2\big(\mathcal{L}_\xi(\operatorname{Hess} f)\big)(Y,\xi) \;=\;& Y(f) + (\lambda + 2c_2 n) g(\nabla_\xi \xi, Y) - c_1 g(\nabla_\xi(\xi(f) \operatorname{grad} f), Y) \\ &+(\lambda + 2c_2 n) Y g(\xi,\xi) - c_1 Y(\xi(f)^2), \end{aligned} \tag{4.16}$$

comme $\nabla_\xi \xi = 0$ et $g(\xi,\xi) = 1$, de l'équation (4.32), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\big(\mathcal{L}_\xi(\operatorname{Hess} f)\big)(Y,\xi) \;=\;& Y(f) - c_1 \xi(\xi(f)) Y(f) - c_1 \xi(f) g(\nabla_\xi \operatorname{grad} f, Y) \\ &-2c_1 \xi(f) Y(\xi(f)), \end{aligned} \tag{4.17}$$

de Lemme 4.12, équation (4.17), et comme $g(\xi, Y) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} 2\big(\mathcal{L}_\xi(\operatorname{Hess} f)\big)(Y,\xi) \;=\;& Y(f) - c_1 \xi(\xi(f)) Y(f) + c_1^2 \xi(f)^2 Y(f) \\ &-2c_1 \xi(f) Y(\xi(f)). \end{aligned} \tag{4.18}$$

comme $\mathcal{L}_\xi g = 0$ (i.e. ξ est de Killing), implique que $\mathcal{L}_\xi \operatorname{Ric} = 0$ (Lemme 4.13), la dérivée de Lie à l'équation du soliton de Ricci généralisé donne :

$$2\big(\mathcal{L}_\xi(\operatorname{Hess} f)\big)(Y,\xi) = -2c_1\big(\mathcal{L}_\xi(df \odot df)\big)(Y,\xi), \tag{4.19}$$

donc, à partir des équations (4.18), (4.19) et Lemme 4.11, on a :

$$\begin{aligned} & Y(f) - c_1 \xi(\xi(f)) Y(f) + c_1^2 \xi(f)^2 Y(f) - 2c_1 \xi(f) Y(\xi(f)) \\ &= -2c_1 Y(\xi(f)) \xi(f) - 2c_1 Y(f) \xi(\xi(f)), \end{aligned} \tag{4.20}$$

est équivalent à :

$$Y(f)\big[1 + c_1 \xi(\xi(f)) + c_1^2 \xi(f)^2\big] = 0, \tag{4.21}$$

selon le Lemme 4.12, on trouve :

$$\begin{aligned} c_1 \xi(\xi(f)) \;&=\; c_1 \xi g(\xi, \operatorname{grad} f) \\ &=\; c_1 g(\xi, \nabla_\xi \operatorname{grad} f) \\ &=\; c_1(\lambda + 2c_2 n) - c_1^2 \xi(f)^2, \end{aligned} \tag{4.22}$$

par équations (4.21) et (4.22), on obtient :

$$Y(f)\big[1 + c_1(\lambda + 2c_2 n)\big] = 0. \tag{4.23}$$

Puisque $c_1(\lambda + 2c_2 n) \neq -1$, on conclut que $Y(f) = 0$, i.e. $\operatorname{grad} f$ est parallèle à ξ. Par conséquent $\operatorname{grad} f = 0$, comme $D = \ker \eta$ est non-intégrable, d'où f est une fonction constante. ■

Remarque 12. Soit (M, g) une variété de Sasaki qui satisfait l'équation du soliton de Ricci gradient (i.e. $\operatorname{Hess} f = -\operatorname{Ric} + \lambda g$), alors f est une fonction constante, et (M, g) est une variété d'Einstein (ce résultat est obtenu par P. Nurowski and M. Randall [11]).
Sur une variété de Sasaki $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, il n'existe pas de fonction différentiable non-constante f, de sorte que $\operatorname{Hess} f = \lambda g$, pour certains constantes λ.

4.4 Solitons de Ricci généralisés sur les variétés K-contact

Dans le cas d'une variété de K-contact, on a les résultats suivants :

Théorème 4.13. *Soit $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ une variété K-contact, et satisfait l'équation du soliton de Ricci généralisé. (i) Si $c_1 = 0$ ou V est orthogonal à ξ, alors V est un champ de Jacobi le long de chaque géodésique associé à ξ, i.e.*

$$R(V, \xi)\xi + \nabla_\xi \nabla_\xi V - \nabla_{\nabla_\xi \xi} V = 0.$$

(ii) Si $V = \operatorname{grad} f$, où $f \in C^\infty(M)$, alors $\operatorname{grad} f$ est de Jacobi le long de chaque géodésique associé à ξ si et seulement si $c_1(\operatorname{Hess} f)(\xi, \xi) = 0$.

Preuve. Soit $Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, on a :

$$(\nabla_Y \mathcal{L}_V g)(W, Z) = -2c_1\big(\nabla_Y(V^\flat \odot V^\flat)\big)(W, Z) + 2c_2(\nabla_Y \operatorname{Ric})(W, Z), \tag{4.24}$$

ainsi, par l'équation suivante :

$$\big(\nabla_Y(V^\flat \odot V^\flat)\big)(W, Z) = g(\nabla_Y V, W)g(V, Z) + g(V, W)g(\nabla_Y V, Z),$$

et Lemme 3.8, on trouve :

$$\begin{aligned} g\big((\mathcal{L}_V \nabla)(Y, Z), W\big) \;\; = \;\; & -c_1 g(\nabla_Y V, W)g(V, Z) - c_1 g(V, W)g(\nabla_Y V, Z) \\ & -c_1 g(\nabla_Z V, W)g(V, Y) - c_1 g(V, W)g(\nabla_Z V, Y) \\ & +c_1 g(\nabla_W V, Y)g(V, Z) + c_1 g(V, Y)g(\nabla_W V, Z) \\ & +2c_2(\nabla_Y \operatorname{Ric})(W, Z) + 2c_2(\nabla_Z \operatorname{Ric})(W, Y) \\ & +2c_2(\nabla_W \operatorname{Ric})(Y, Z). \end{aligned}$$

En remplaçant $Y = Z = \xi$ dans ci-dessus, et en utilisant les équations :

$$\nabla_X \xi = -\varphi X, \quad \mathrm{Ric}(\xi, X) = 2n\eta(X), \tag{4.25}$$

on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} g\big((\mathcal{L}_V \nabla)(\xi,\xi), W\big) &= -2c_1 g(\nabla_\xi V, W) g(V,\xi) - 2c_1 g(V,W) g(\nabla_\xi V, \xi) \\ &\quad +2c_1 g(\nabla_W V, \xi) g(V,\xi). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Le Théorème 4.13 découle de l'équation (4.26), avec $g(\nabla_\xi V, \xi) = \xi g(V,\xi)$, et l'équation :

$$(\mathcal{L}_V \nabla)(Y,Z) = R(V,Y)Z + \nabla^2_{Y,Z} V$$

où $\nabla^2_{Y,Z} V = \nabla_Y \nabla_Z V - \nabla_{\nabla_Y Z} V$. Si $V = \operatorname{grad} f$, alors $g(\nabla_\xi V, W) = g(\nabla_W V, \xi)$. ■

Théorème 4.14. *Si une variété K-contact (M^{2n+1}, g) est un soliton de Ricci généralisé de type gradient avec $c_1(\lambda + 2c_2 n) \neq -1$, alors f est une fonction constante. De plus, si $c_2 \neq 0$, alors (M, g) est une variété d'Einstein.*

Preuve. Si $V = \operatorname{grad} f$, alors l'équation du soliton de Ricci généralisé devient :

$$\nabla_Y \operatorname{grad} f = -c_1 Y(f) \operatorname{grad} f + c_2 \operatorname{Ricci} Y + \lambda Y, \tag{4.27}$$

où Y est un champ de vecteurs sur M, $\operatorname{Ricci} Y = \sum_{i=1}^{2n+1} R(Y, e_i) e_i$, et $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur (M, g). En utilisant cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned} R(X,Y) \operatorname{grad} f &= -c_1 Y(f) \nabla_X \operatorname{grad} f + c_1 X(f) \nabla_Y \operatorname{grad} f \\ &\quad +c_2 \big[(\nabla_X \operatorname{Ricci}) Y - (\nabla_Y \operatorname{Ricci}) X\big], \end{aligned}$$

en prenant la métrique Riemannienne avec ξ, et en remplaçant X par ξ, on a :

$$\begin{aligned} g(R(\xi,Y) \operatorname{grad} f, \xi) &= -c_1 Y(f) g(\nabla_\xi \operatorname{grad} f, \xi) + c_1 \xi(f) g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, \xi) \\ &\quad +c_2 g((\nabla_\xi \operatorname{Ricci}) Y, \xi) - c_2 g((\nabla_Y \operatorname{Ricci}) \xi, \xi), \end{aligned} \tag{4.28}$$

à partir des équations (4.25), $R(X,\xi)\xi = X - \eta(X)\xi$, (4.27) et (4.28), on obtient :

$$\begin{aligned} g(Y, \operatorname{grad} f) - \eta(Y)\xi(f) &= c_1^2 Y(f) \xi(f)^2 - 2nc_1c_2 Y(f) - c_1 \lambda Y(f) \\ &\quad -c_1^2 Y(f) \xi(f)^2 + 2nc_1c_2 \xi(f) \eta(Y) + c_1 \lambda \xi(f) \eta(Y), \end{aligned}$$

ceci est équivalent à :

$$[1 + c_1(2nc_2 + \lambda)](\xi(f)\xi - \operatorname{grad} f) = 0.$$

Si $c_1(2nc_2+\lambda) \neq -1$, on a $\operatorname{grad} f = \xi(f)\xi$, cela implique que :

$$\begin{aligned} \nabla_Y \operatorname{grad} f &= \nabla_Y \xi(f)\xi \\ &= Y(\xi(f))\xi + \xi(f)\nabla_Y \xi \\ &= Y(\xi(f))\xi - \xi(f)\varphi Y, \end{aligned} \tag{4.29}$$

à partir des équations :

$$\operatorname{Hess} f = -c_1 df \odot df + c_2 \operatorname{Ric} + \lambda g. \tag{4.30}$$

et (4.29), on conclut que :

$$-c_1 X(f)Y(f) + c_2 \operatorname{Ric}(X,Y) + \lambda g(X,Y) = X(\xi(f))\eta(Y) - \xi(f)g(\varphi X, Y), \tag{4.31-1}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, si $Y = \xi$, on trouve :

$$\begin{aligned} X(\xi(f)) &= -c_1 X(f)\xi(f) + 2nc_2\eta(X) + \lambda\eta(X) \\ &= (2nc_2+\lambda)\eta(X) - c_1 X(f)\xi(f), \end{aligned} \tag{4.31}$$

à partir de l'équation (4.31-1), on a :

$$\begin{aligned} Y(\xi(f))\eta(X) + X(\xi(f))\eta(Y) &= -c_1 Y(f)X(f) - c_1 X(f)Y(f) \\ &\quad + 2c_2 \operatorname{Ric}(X,Y) + 2\lambda g(X,Y), \end{aligned}$$

cela implique que :

$$c_2 Ric(X,Y) = (2nc_2+\lambda)\eta(X)\eta(Y) + c_1 X(f)Y(f) - \lambda g(X,Y)$$

par conséquent :

$$\nabla_Y \operatorname{grad} f = (2nc_2+\lambda)\eta(Y)\xi.$$

En utilisant cela, on calcule $R(X,Y)\operatorname{grad} f$, en prenant la métrique Riemannienne avec ξ, avec $\operatorname{grad} f = \xi(f)\xi$, on obtient $2nc_2 + \lambda = 0$. Si $c_1 = 0$, de l'équation (4.31), on trouve $X(\xi(f)) = 0$, i.e. la fonction $\xi(f) = c$ est constante sur M, Ainsi, $df = c\eta$. Sa dérivée extérieure implique $cd\eta = 0$, par conséquent $c = 0$, donc f est constante. Si $c_1 \neq 0$, on calcule :

$$\begin{aligned} X(\xi(f)) &= Xg(\xi, \operatorname{grad} f) \\ &= g(\nabla_X \xi, \operatorname{grad} f) + g(\xi, \nabla_X \operatorname{grad} f) \\ &= -g(\varphi X, \operatorname{grad} f), \end{aligned}$$

ceci est équivalent à :

$$-c_1 X(f)\xi(f) = -g(\varphi X, \operatorname{grad} f).$$

Pour $X = \xi$, on a $\xi(f) = 0$, par conséquent f est une fonction constante sur M. Si, $c_2 \neq 0$, on obtient $\mathrm{Ric} = -\frac{\lambda}{c_2} g$, i.e. g est d'Einstein, de $\mathrm{Ricci}\,\xi = 2n\xi$, on a $\lambda = -2nc_2$. ■

Remarque 13. Comme toute variété de Sasaki est K-contact, alors le Théorème 4.12 résulte immédiatement du Théorème 4.14.

Théorème 4.15. *Si une métrique K-contact g est un soliton de Ricci généralisé avec V colinéaire avec ξ et $c_2 \neq 0$. Alors, V est un multiple constant de ξ, et g est η-Einstein. De plus, si $c_1 = 0$, alors (M, g) est une variété d'Einstein.*

Preuve. Soit $V = a\xi$, où $a \in C^\infty(M)$, on a :

$$(\mathcal{L}_V g)(X, \xi) \;=\; -2c_1 a^2 \eta(X) + 2c_2 \,\mathrm{Ric}(\xi, X) + 2\lambda\eta(X), \tag{4.32}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$, de l'équation :

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(\nabla_Y V, X),$$

et (4.25), avec X est orthogonal à ξ, l'équation (4.32) est équivalente à $X(a) = 0$. Donc, $\operatorname{grad} a$ est parallèle à ξ. Par conséquent, $\operatorname{grad} a = 0$ comme $D = \ker \eta$ n'est pas intégrable, i.e., a est une fonction constante. Ainsi, V est de Killing. ■

Bibliographie

[1] A. L. Besse, Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin (1987).

[2] D. E. Blair, Contact manifolds in Riemannian geometry, Lecture Nots in Mathematics 509, Springer, 1976, pp 17-35.

[3] C. P. Boyer, K. Galicki, Sasakian geometry, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.

[4] H. D. Cao, Recent progress on Ricci solitons, Recent advances in geometric analysis, 11(2010), 1-38.

[5] A. Ghosh, Notes on contact η-Einstein metrics as Ricci solitons, Beitr Algebra Geom, 2012, 1-7.

[6] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature. J. Differential Geom., 17(2), 255-306, 1982.

[7] C. He and M. Zhu , Ricci solitons on Sasakian manifolds, arXiv :1109.4407v2 [math.DG] 26 Sep 2011.

[8] T. Ivey, Ricci solitons on compact three-manifolds, Diff. Geom. Appl, 3 (1993), 301-307.

[9] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry Volume 1 et 2. (Wiley Classics Library) 22 . 1996.

[10] M. E. A. Mekki and A. Mohammed Cherif, Generalised Ricci Solitons on Sasakian Manifolds, J. Kyungpook Math. 57 (2017), 677-682.

[11] P. Nurowski and M. Randall, Generalised Ricci solitons, J Geom Anal, 26(2016), 1280-1345.

[12] O'Neil, Semi-Riemannian geometry, Academic Press, New York, 1983.

[13] K. Yano, M. Kon, Structures on manifolds, Series in Pure Math, Vol 3, World Sci,1984.