Ministère de l'Enseignement supérieur et de la recherche Scientifique
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Mustapha Stambouli Mascara
جامعة مصطفى إسطمبولي معسكر
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion
كلية العلوم الإقتصادية, العلوم التجارية و علوم التسيير

مطبوعة أعمال موجهة في

الاقتصاد الجزئي

من إعداد :

مولاي علي هواري

السنة الجامعية 2019/2018

الفهرس

الفصل الأول: الطلب، العرض و التوازن

الفصل الثاني: سلوك المستهلك

الفصل الثالث: سلوك المنتج

الفصل الرابع: تكاليف الإنتاج

الفصل الخامس: التوازن في سوق المنافسة التامة و الكاملة

المقدمة:

إن للتحليل الاقتصادي الجزئي دورا كبيرا في فهم النظرية الاقتصادية بما في ذلك النظرية الاقتصادية الكلية. كما يساعد مقياس الاقتصاد الجزئي الطالب على تحليل و استيعاب مختلف الظواهر الاقتصادية الجزئية و كيف يأخذ الأفراد قراراتهم و كيف تتفاعل هذه القرارات، بما يسمح للطالب بالتمييز بين وضع التوازن (الحالة المثلى) و ما سواه من وضعيات.

كما ساهم رواد الاقتصاد الجزئي بمساهمات كبيرة في النظرية الاقتصادية عامة و نظرية القيمة بصفة خاصة من خلال تمكين التحليل الحدي (analyse marginaliste) من حل معضلة حقيقة واجهت الفكر الاقتصادي في وقت سابق تمثلت في تحديد قيمة الأشياء، و وجدوا مخرجا للتناقض الموجود في المثال المعروف (الماء و الألماس) و التأكيد على أن قيمة التبادل (valeur d'echange) و قيمة الاستعمال (valeur d'usage) هما مرتبطان، هذه الأخيرة أي قيمة الاستعمال هي مرتبطة بالمنفعة الحدية للسلعة.

ظهور مفهوم المنافع الحدية في منتصف القرن التاسع عشر الذي كان بمثابة نهضة في التحليل الاقتصادي نظرا لمساهماته في تفسير قسطا مهما من الظواهر الاقتصادية، و أطلق عليه مصطلح الثورة في التحليل الاقتصادي (la révolution marginaliste)، كذلك قانون العرض و الطلب و التوازن من بين القوانين المهمة التي نالت مكانة كبيرة جدا من النظرية الاقتصادية. بالتالي من غير الممكن فهم النظرية الاقتصادية من دون فهم للنظرية الاقتصادية الجزئية.

اشتملت المطبوعة على خمسة فصول استمدت من برنامج السنة الأولى LMD، كما أن هذه المطبوعة أحاطت بسباق الأعمال الموجهة (مراجعة للدرس مع سلسلة تمارين) . تناولنا في الفصل الأول نظرية الطلب، العرض و التوازن، أما الفصل الثاني فيخص نظرية سلوك المستهلك، نظرية سلوك المنتج بالنسبة للفصل الثالث، احتوى الفصل الرابع على تكاليف الإنتاج و جاء في الفصل الخامس التوازن في سوق المنافسة التامة و الكاملة.

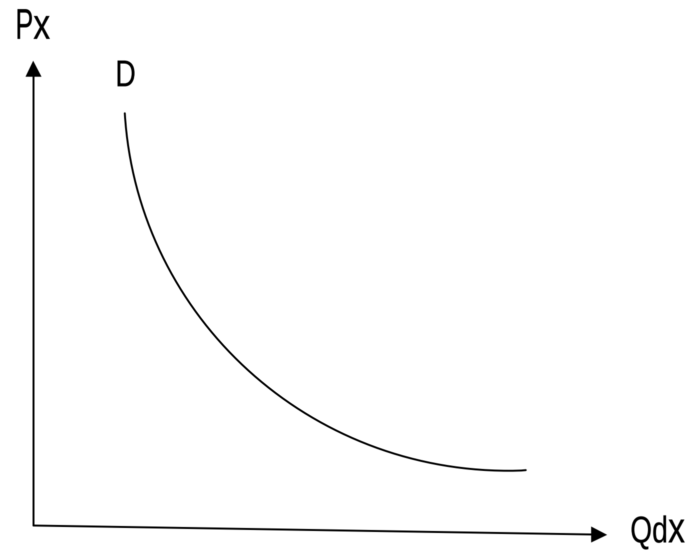
الفصل الأول:

الطلب و العرض و التوازن

1. الطلب:

يشير الطلب إلى الكميات من السلعة أو الخدمة التي يرغب المستهلكون في شراءها عند مستويات مختلفة من الأسعار. هذه العلاقة بين الكمية المطلوبة و السعر يتم تمثيلها و التعبير عنها بيانيا بواسطة ما يسمى **بمنحنى الطلب.** كل نقطة من منحنى الطلب تعبر عن كمية وحيدة من سلعة أو خدمة يرغب المستهلكون بشرائها عند سعر معين، هذه الكمية يطلق عليها **الكمية المطلوبة.**

الكمية المطلوبة: هي الكمية الفعلية من السلعة أو الخدمة التي يرغب المستهلكون بشرائها عند مستوى محدد من السعر.



الشكل 1.1. منحنى الطلب

يوضح الشكل (1.1) أن منحنى الطلب هو مائل نحو الأسفل (سالب الميل) و هو ما يبين العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة من السلعة و سعرها أي: كلما ارتفع سعر السلعة X كلما انخفضت الكمية المطلوبة منها، و كلما انخفض سعرها زادت الكمية المطلوبة منها. هذه العلاقة الأخيرة يمكن تعميمها تقريبا (مع وجود بعض الاستثناءات) ، لذلك يطلق الاقتصاديون على هذه العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة من السلعة أو الخدمة و سعرها **بقانون الطلب**: أي، <u>مع بقاء العوامل الأخرى</u> ثابتة فان الزيادة في سعر السلعة يؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة منها و العكس صحيح.

يطلق أيضا على العوامل الأخرى عبارة <u>المحددات الأخرى للطلب</u>، فعندما يستعمل الاقتصاديون هذه العبارة معناه أن السعر هو مستثنى من هذه المحددات: أي جميع محددات الطلب ما عدا السعر.

تفسير قانون الطلب:

يفسر الانحدار إلى الأسفل لمنحنى الطلب (قانون الطلب) إلى سببين رئيسيين هما: أثر الإحلال و أثر الدخل:

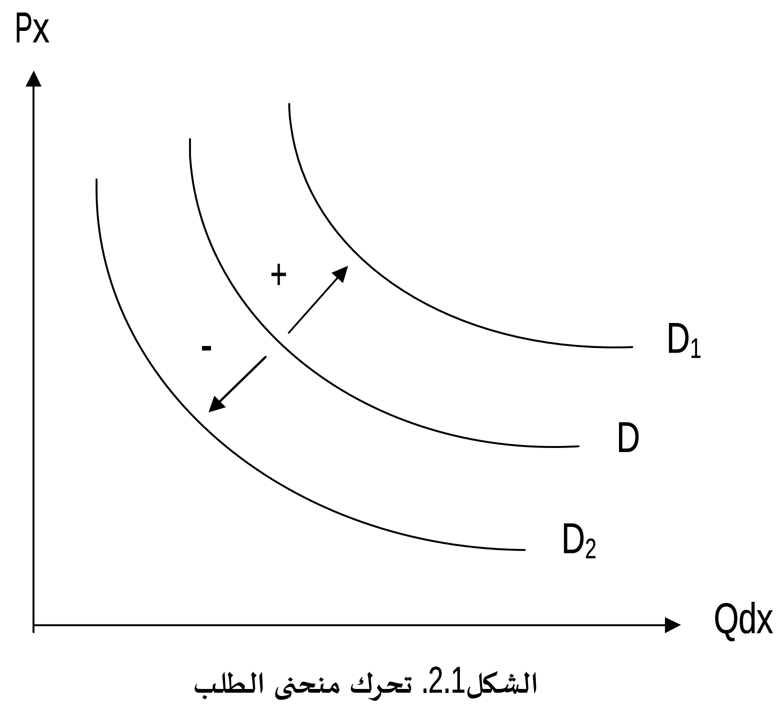
- **أثر الإحلال**: يعني أن الطلب على السلعة أو الخدمة ينخفض لزيادة سعرها، لأن المستهلك سيتجه إلى السلع الأخرى البديلة.
- **أثر الدخل**: أو أثر الثروة معناه أنه عندما يرتفع سعر السلعة، المستهلك يصبح أقل ثراء و بالتالي دخله يصبح مناسب لطلب مستوى أقل من هذه السلعة أو الخدمة.

العلاقة بين الكمية المطلوبة من السلعة أو الخدمة و محدداتها بما في ذلك السعر يتم التعبير عنها بواسطة دالة الطلب التالية :

$$Q_{dX} = f\ (p_x,\ p_y,\ p_z, \ldots\ldots ,\ R,\ G,\ T)$$

أهم محددات الطلب هي: سعر السلعة (p_x)، أسعار السلع الأخرى البديلة و المكملة (p_y , p_z)، الدخل (R)، أذواق المستهلكين (G) و الزمن (T).

يستعمل الاقتصاديون عبارة تغير الكمية المطلوبة إذا كان التغير في الكمية المطلوبة من السلعة ناتج عن التغير في سعر السلعة نفسها مع ثبات محددات الطلب الأخرى، و يتم التحرك في هذه الحالة على نفس منحنى الطلب. أما إذا كان التغير في الكمية المطلوبة ناتجا عن التغير في أحد المحددات الأخرى للطلب فيطلق على هذه الحالة عبارة تغير الطلب، و يتم تحرك منحنى الطلب بأكمله، سواء ناحية اليمين (إذا كان تغير هذا العامل يؤدي إلى زيادة الطلب)، أو ناحية اليسار (إذا كان تغير هذا العامل يؤدي إلى انخفاض الطلب).



الشكل2.1. تحرك منحنى الطلب

1.1. تمارين نظرية الطلب:

التمرين الأول:

إذا كانت دالة الطلب على السلعة (X) لمستهلك ما معطاة بالعلاقة التالية:

$$X = 8/p_X$$

حيث: X: الكمية المطلوبة من السلعة X. P_X: يمثل سعر السلعة X.

المطلوب:

1. كون جدول طلب هذا المستهلك على السلعة X.
2. ارسم منحنى طلب هذا المستهلك على X.

التمرين الثاني:

في سوق سلعة ما 1000 مستهلك، فإذا كانت دالة الطلب الفردي هي : $Q_{Di} = 8 - p$ و أخذ السعر المستويات التالية متبعا العد التنازلي: 7،8، 6، 5 ، 4، 3 ، 2، 1، 0.

المطلوب:

- حدد دالة طلب السوق و الكميات المطلوبة ثم ارسمها.

التمرين الثالث:

يمكن افتراض وجود ثلاث أصناف من المشترين (C،B،A) للسلعة (Q) . كل مستهلك يعبر عن الكمية المطلوبة من طرفه و ذلك كعلاقة مع السعر مثلما هو موضح في الجدول التالي:

السعر p	الطلب على السلعة Q		
	المستهلك A	المستهلك B	المستهلك C
7	0	0	0
6	0	10	0
5	0	20	10
4	10	50	30
3	30	60	50
2	50	80	60
1	80	90	100

المطلوب:

1. أحسب الطلب السوقي على السلعة (Q) بافتراض وجود 10 مستهلكين من كل صنف.
2. ارسم منحنيات الطلب الفردية و منحنى الطلب السوقي.

3. بافتراض أن سعر السلعة ثابت و محدد من طرف الدولة عند P = 5 . هل أن دخول مستهلكون جدد من الصنف (A) سيكون له أثر على الإنفاق الكلي في السوق عند هذا السعر؟

التمرين الرابع:

الأرقام الواردة في الجدول أدناه تبين الاستهلاك المنزلي من القهوة (X) و الشاي (Y) لفرد ما عندما يرتفع سعر القهوة مع بقاء العوامل الأخرى دون تغيير:

	قبل		بعد	
	الكمية	السعر	الكمية	السعر
القهوة (X)	55	25	35	35
الشاي (Y)	45	15	55	15

المطلوب:

- ارسم الشكل الذي يوضح هذه التغيرات و اشرح هذا الشكل.

التمرين الخامس:

يوضح الجدول أدناه جدولي طلب فرد ما على سلعة ما، أولهما Q(1) و ثانيهما Q(2) الذي جاء نتيجة زيادة الدخل النقدي للفرد بينما بقيت كل العوامل الأخرى ثابتة.

P	6	5	4	3	2	1
Q(1)	18	20	24	30	40	60
Q(2)	38	40	46	55	70	100

المطلوب:

1. ارسم المنحنيين على نفس الإحداثيات.
2. ما الذي يحدث لو انخفض السعر من 5 إلى 3 دنانير قبل أن يزيد الدخل الفردي؟
3. ما الذي يحدث إذا ما ارتفع دخل الفرد مع بقاء السعر عند 5 دنانير؟
4. ما الذي يحدث إذا ما ارتفع الدخل النقدي و في نفس الوقت انخفض سعر السلعة من 5 إلى 3 دنانير؟
5. ما نوع السلعة؟ و لماذا؟

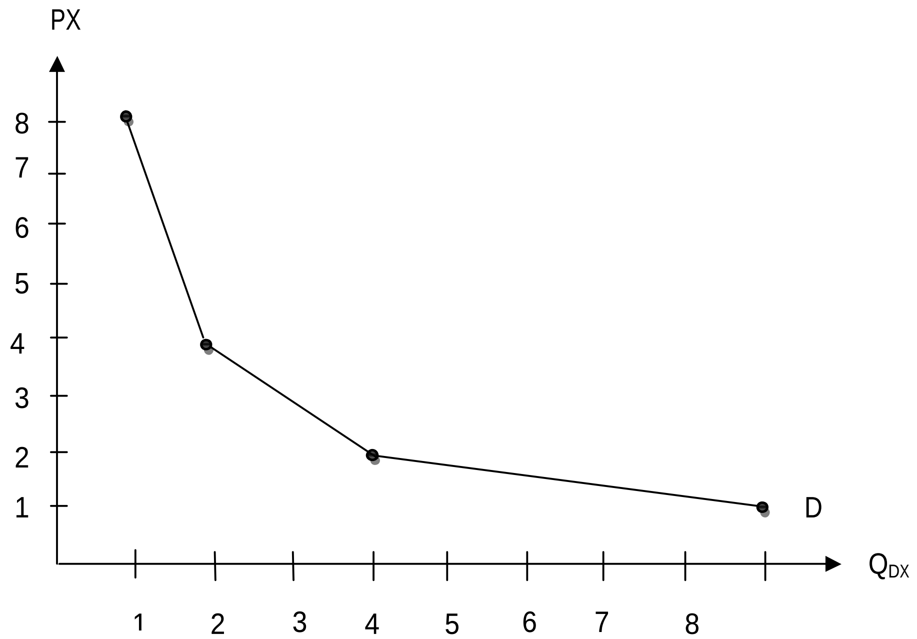
2.1. حل تمارين نظرية الطلب:

حل التمرين الأول:

1. جدول طلب المستهلك على السلعة (X) :

P(X)	1	2	4	8
Q(X)	8	4	2	1

2. رسم منحى طلب المستهلك على السلعة X :



نلاحظ من الجدول أنه كلما انخفض سعر السلعة كلما ارتفعت الكمية المطلوبة منها و العكس صحيح.

كما نلاحظ أن منحنى الطلب هو سالب الميل بسبب العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة و السعر.

حل التمرين الثاني:

- تحديد دالة طلب السوق (Q_D) و الكميات المطلوبة :

$$Q_D = \sum Q_{Di}$$

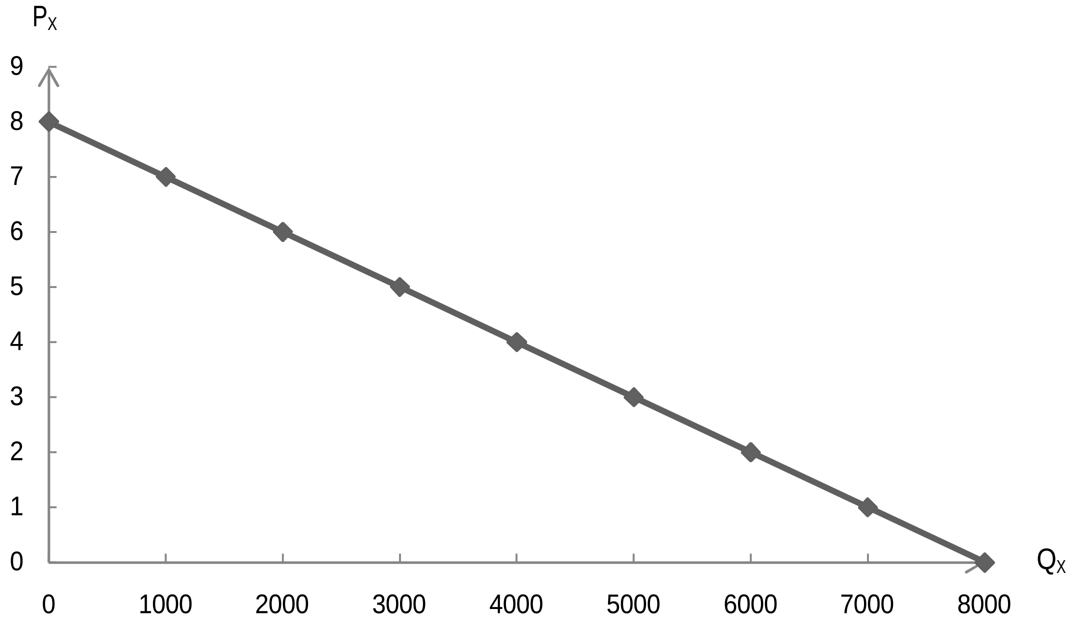
$$Q_D = 1000\, Q_{Di}$$

$$Q_D = 1000\,(8 - P)$$

$$\mathbf{Q_D = 8000 - 1000\,P}$$

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Q_X	8000	7000	6000	5000	4000	3000	2000	1000	0

- رسم منحنى الطلب:



حل التمرين الثالث:

1. الطلب السوقي لسلعة ما يمكن الحصول عليه بالتجميع الأفقي للطلب الفردي. الكمية المطلوبة الإجمالية عند سعر معين تساوي مجموع الكميات المطلوبة من طرف كل مستهلك عند هذا السعر.

لدينا 10 مستهلكين من كل نوع، الطلب الإجمالي يمكن الحصول عليه كما يلي:

من أجل P= 4 يكون لدينا :

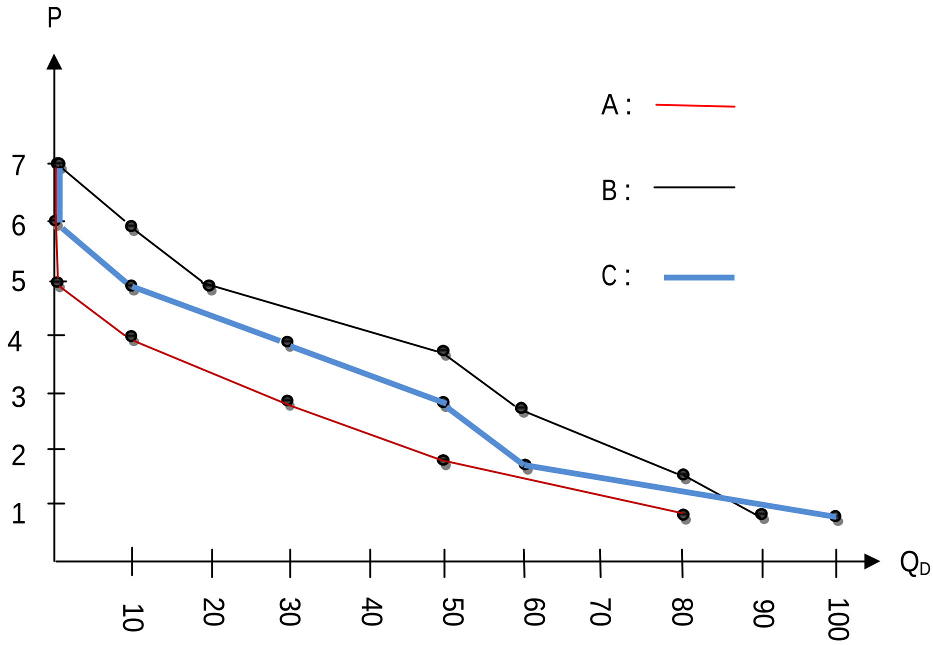
$$Q_D= (10* 10)+(50*10)+(30*10)= 900$$

الطلب السوقي عند جميع الأسعار هو في الجدول التالي:

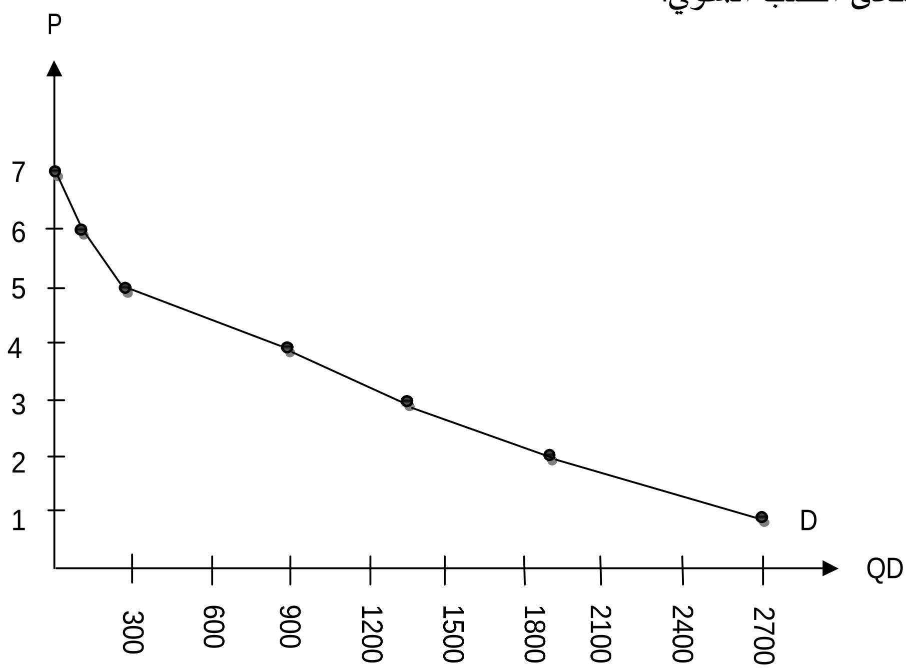
P	1	2	3	4	5	6	7
QD	2700	1900	1400	900	300	100	0

2. التمثيل البياني:

- منحنيات الطلب الفردية:



- منحنى الطلب السوقي:

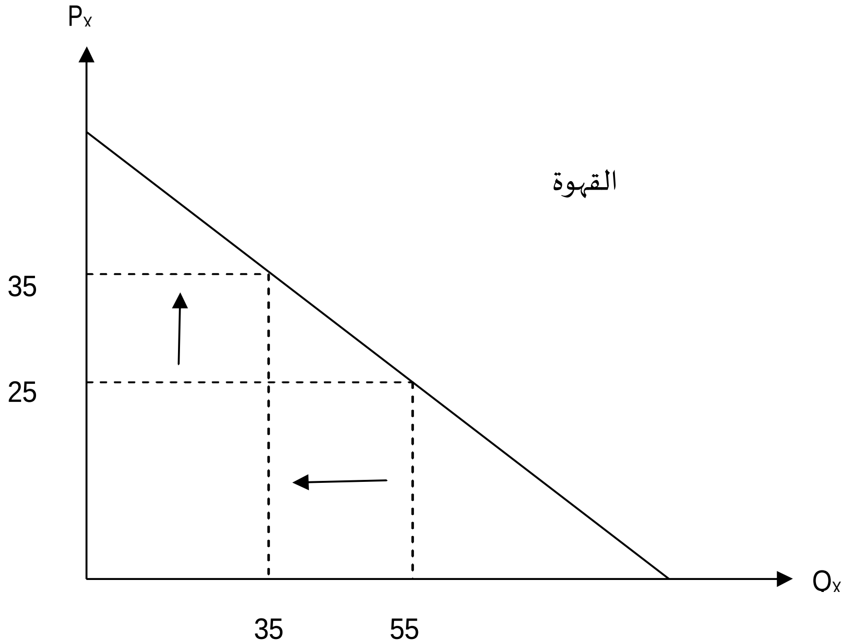


3. إذا كان سعر السلعة هو 5 فإن دخول مستهلكين جدد من الصنف A لن يكون له أي تأثير على الطلب الإجمالي عند هذا السعر، بينما يكون له تأثير عند السعر الأقل. و بالتالي لن يكون هناك أي أثر على الإنفاق الإجمالي المحقق عند هذا السعر.

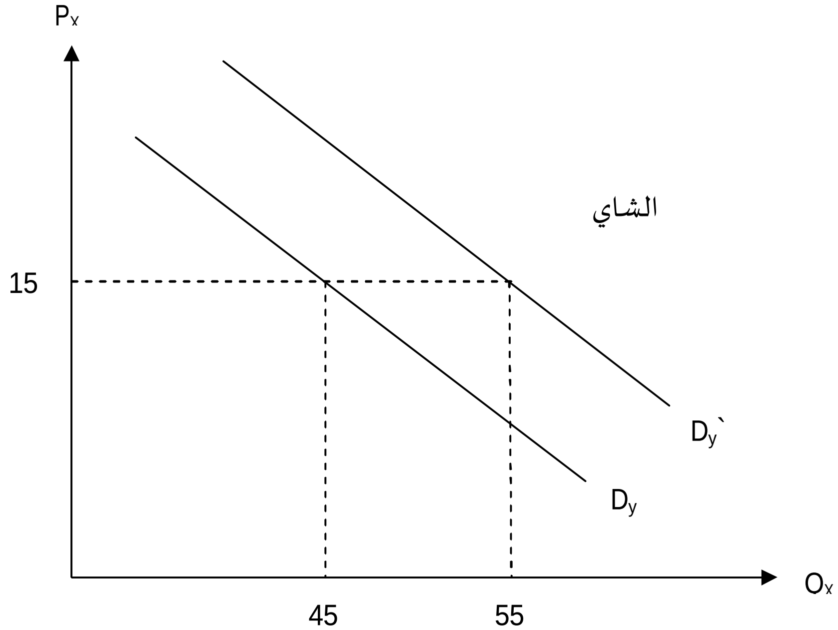
حل التمرين الرابع:

- **رسم الشكل الذي يبين تغيرات استهلاك القهوة و الشاي**

الشكل (1): التحرك من نقطة إلى أخرى على نفس المنحنى.



الشكل (2): انتقال منحنى الشاي إلى الأعلى.

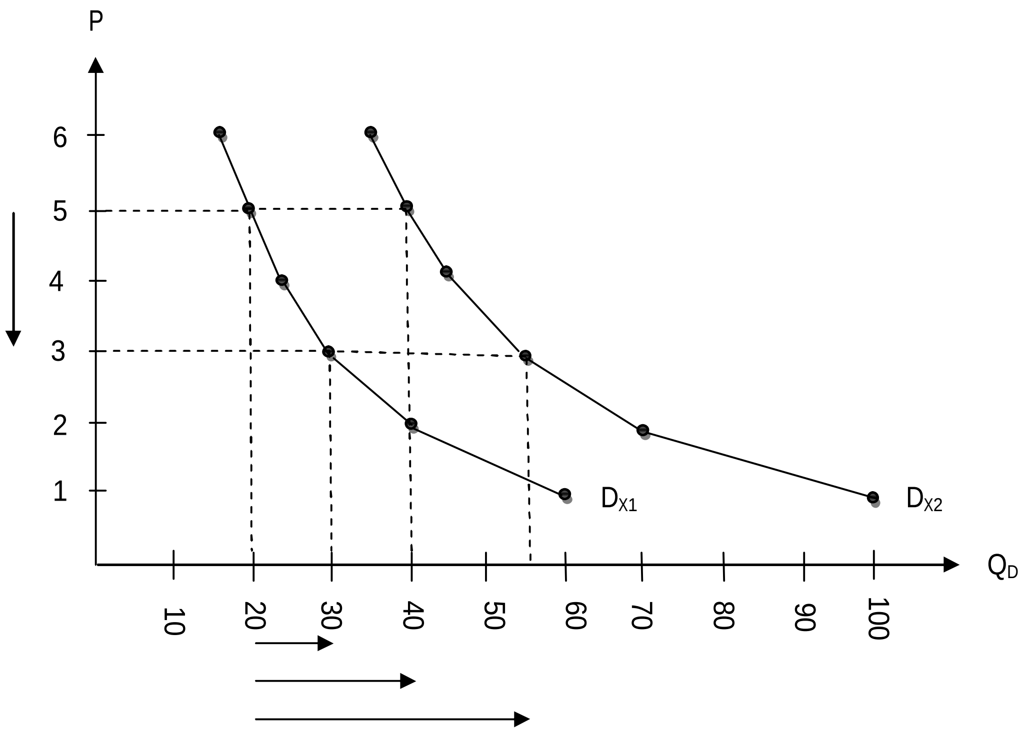


نلاحظ أنه عندما ارتفع سعر القهوة من 25 إلى 35 وحدة نقدية مع بقاء العوامل الأخرى المؤثرة على الطلب ثابتة، فإن الكمية المطلوبة من القهوة انخفضت من 55 إلى 35 وحدة، و يصور هذا على منحنى

الطلب، و يتم التحرك على نفس منحنى الطلب على القهوة. و لما كان الشاي بديل للقهوة فإن ارتفاع سعر القهوة يتسبب في انتقال منحنى الطلب على الشاي إلى الأعلى. و معنى هذا أنه مع ارتفاع سعر القهوة، المستهلك يزيد من طلبه على الشاي من 45 إلى 55 وحدة مع ثبات سعر الشاي عند 15 ون.

حل التمرين الخامس:

1. **التمثيل البياني:**

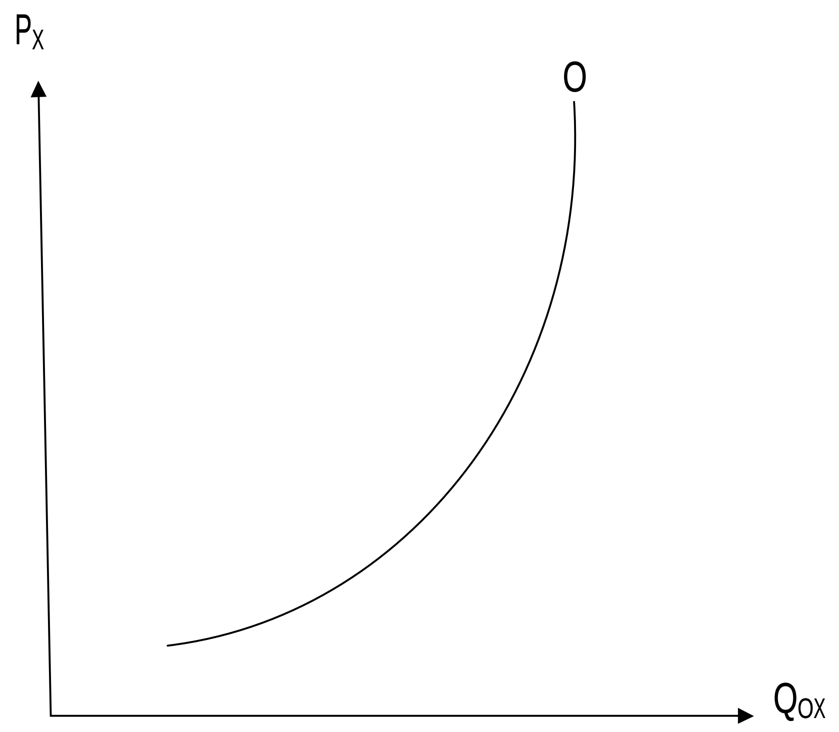


2. إذا انخفض سعر السلعة من 5 إلى 3 قبل ارتفاع الدخل الفردي فإن الكمية المطلوبة تزيد من 20 إلى 30.
3. عندما يزيد دخل الفرد مع بقاء السعر عند 5 و ن فإن منحنى الطلب ينتقل إلى الأعلى ناحية اليمين من D(1) إلى D(2). يشتري الفرد الآن 40 وحدة بدلا من 20 وحدة.
4. عندما يرتفع دخل الفرد مع انخفاض سعر السلعة من 5 إلى 3 فإن المستهلك يزيد استهلاكه من السلعة ب 35 وحدة إضافية.
5. إذا انتقل D(1) إلى D(2)(الانتقال ناحية اليمين) عندما يزيد دخل الفرد فإن السلعة محل الدراسة هي سلعة عادية بالنسبة لهذا الفرد.

2. العرض:

يشير العرض إلى الكميات من السلعة أو الخدمة التي يعرضها المنتجون عند مستويات مختلفة من الأسعار. هذه العلاقة بين الكمية المعروضة و السعر يتم تمثيلها و التعبير عنها بيانيا بواسطة ما يسمى **بمنحنى العرض. كل** نقطة من منحنى العرض تعبر عن كمية وحيدة من السلعة أو الخدمة التي يقبل البائعون ببيعها عند مستوى معين من السعر، هذه الكمية يطلق عليها **الكمية المعروضة**.

الكمية المعروضة: هي الكمية من السلعة أو الخدمة التي يقبل المنتجون ببيعها عند مستوى من السعر.



الشكل3.1. منحنى العرض

منحنى العرض غالبا ما يكون مائل نحو الأعلى (موجب الميل): أي ارتفاع سعر السلعة X يؤدي إلى زيادة الكمية المعروضة منها و العكس صحيح.

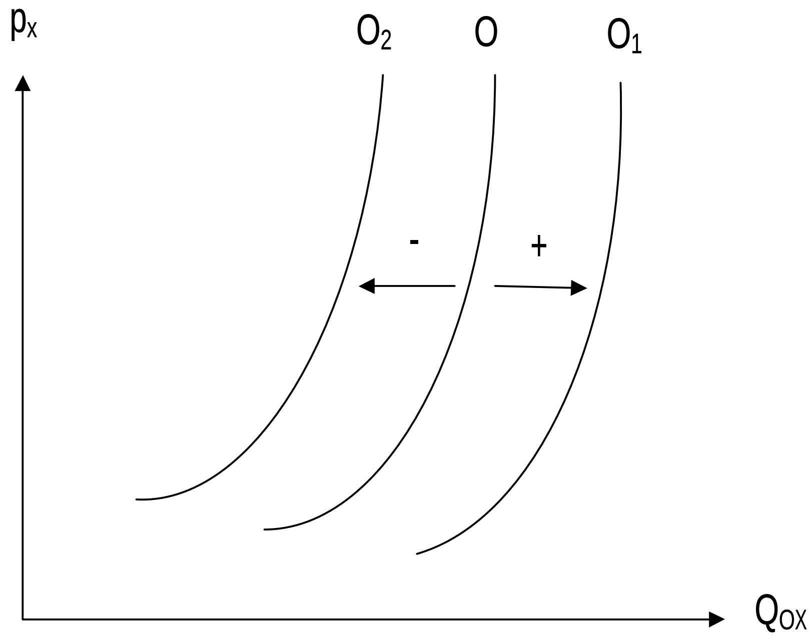
كذلك بالنسبة لحالة العرض استعملنا عبارة مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة، الكمية المعروضة تتأثر بالسعر (P_X) إضافة إلى مجموعة من المحددات الأخرى: هذه المحددات أو العوامل يطلق عليها المحددات الأخرى للعرض. عندما تستعمل عبارة المحددات الأخرى للعرض فإنه يتم استثناء السعر من هذه المحددات.

العلاقة بين الكمية المعروضة و محدداتها بما في ذلك السعر يتم التعبير عنها بواسطة **دالة العرض** و التي تكتب على الشكل التالي :

$$Q_{Ox} = f\,(p_x,\ p_y,\ p_z, \ldots\ldots.,\ A,\ E,\ pk,\ PL,\ t,\ s,\ \ldots\ldots\ldots.\ )$$

بحيث: (p_y , p_z) تمثل أسعار السلع الأخرى، (A) التكنولوجيا،(E) أسعار المواد الأولية، (P_K , P_L)أسعار عوامل الإنتاج، (t)الضرائب و (s) الإعانات.

إذا كان تغير الكمية المعروضة ناتجا عن تغير سعر السلعة (مع ثبات باقي العوامل)، نستعمل في هذه الحالة عبارة تغير الكمية المعروضة، و يتم التحرك على نفس منحنى العرض. أما إذا كان التغير في الكمية المعروضة هو ناتج عن التغير في أحد المحددات الأخرى للعرض (مع ثبات السعر)، فنستعمل في هذه الحالة عبارة تغير العرض، و يتم تحرك منحنى العرض بأكمله سواء ناحية اليمين (في حالة كان تغير هذا العامل في صالح زيادة الكمية المعروضة) أو ناحية اليسار (إذا كان تغير هذا العامل يؤدي إلى انخفاض الكمية المعروضة)



الشكل4.1. تحرك منحنى العرض

1.2. تمارين نظرية العرض:

التمرين الأول:

إذا افترضنا أن دالة عرض المنتج الواحد لسلعة ما هي: $Q_{Si} = -40 + 20P$.

المطلوب:

1. إذا علمت أن السعر P أخذ المستويات التنازلية 6، 5، 4، 3، 2، أرسم منحنى عرض هذه السلعة إذا علمت ثبات جميع المحددات الأخرى.
2. إذا علمت أن في السوق 100 منتج يعرضون نفس السلعة، أوجد دالة العرض الكلي.

التمرين الثاني:

لدينا دالة العرض التالية : $Q_X = 2P_X - 2$.

المطلوب:

1. ضع جدولا للعرض و ارسم شكله البياني.
2. بفرض وجود اختراع تكنولوجي جعل دالة العرض تأخذ الشكل التالي: $Q`_X = 2P_X$ ، أنشأ البيان الجديد على نفس المعلم.

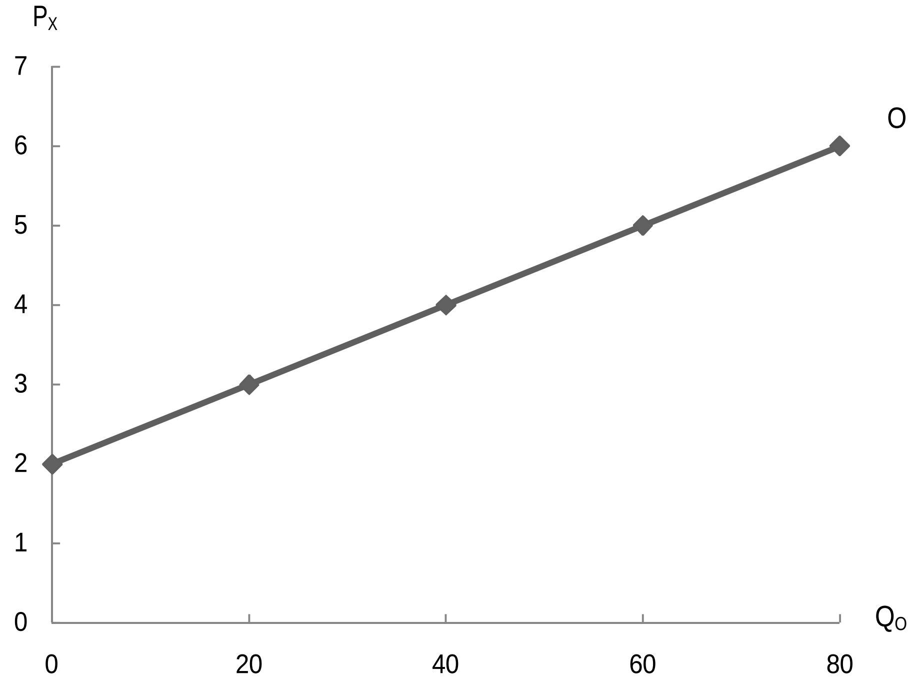
2.2. حل تمارين نظرية العرض:

حل التمرين الأول:

1. رسم منحنى عرض السلعة:

لدينا: $Q_{Si} = -40 + 20P$ ، بتعويض مستويات السعر في دالة العرض الفردية:

P	2	3	4	5	6
Q_{Si}	0	20	40	60	80



نلاحظ من الجدول أنه كلما انخفض سعر السلعة كلما انخفضت الكمية المعروضة و العكس صحيح. كما نلاحظ أن منحنى العرض هو موجب الميل بسبب العلاقة الطردية بين الكمية المعروضة و السعر.

2. دالة العرض الكلي:

دالة عرض السوق تساوي مجموع دوال العرض الفردية، أي:

$$Q_O = \sum Q_{Oi}$$

$$Q_O = 100\, Q_{Oi}$$

$$Q_O = 100\,(-40 + 20P)$$

$$\mathbf{Q_O = -4000 + 2000\,P}$$

حل التمرين الثاني:

1. **جدول العرض:**

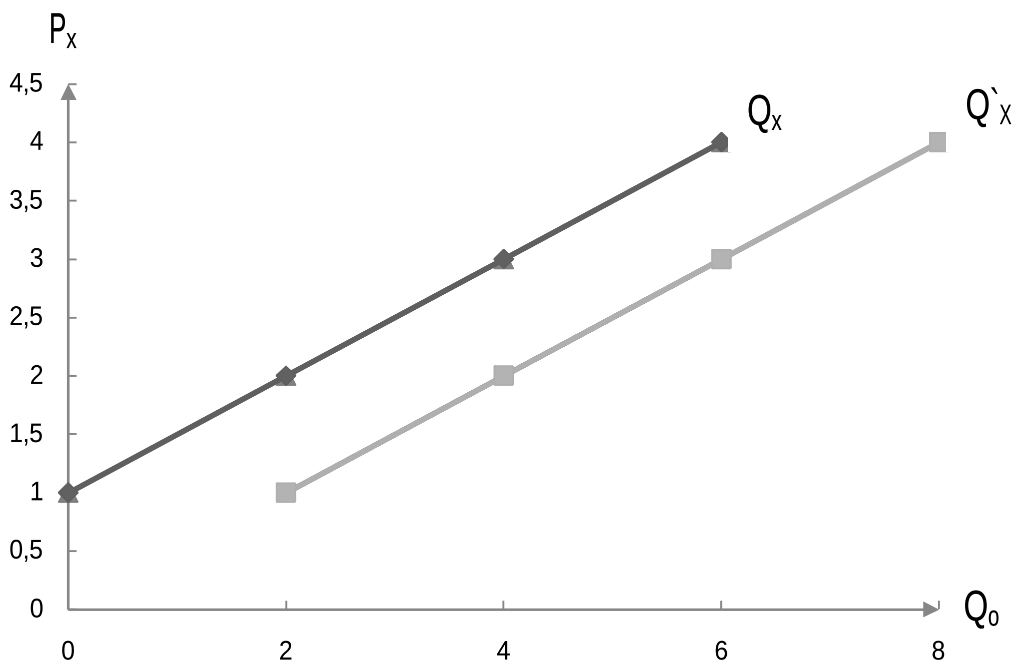
لدينا دالة العرض على الشكل التالي: $Q_X = 2P_X - 2$

P	1	2	3	4
Qx	0	2	4	6

2. **بعد حدوث اختراع تكنولوجي:**

لدينا دالة العرض الجديدة: $Q`_X = 2P_X$

P	1	2	3	4
Qx	2	4	6	8



بعد حدوث تغير تكنولوجي نلاحظ انزياح منحنى العرض نحو اليمين مما يعني أنه عند جميع مستويات السعر السائدة يمكن عرض كميات أكبر من السابق.

3. المرونات:

يقصد بالمرونة في المجال الاقتصادي درجة استجابة ظاهرة اقتصادية معينة للتغير النسبي في عامل معين يؤثر عليها (أحد محدداتها).

من بين الظواهر الاقتصادية التي تحاول النظرية الاقتصادية الجزئية تفسيرها العرض و الطلب. مرونة الطلب على سبيل المثال هي لقياس درجة استجابة الطلب للتغير النسبي في أحد محددات الطلب (السعر، الدخل، أسعار السلع البديلة و المكملة... الخ).

1.3. مرونة الطلب:

أ. مرونة الطلب السعرية المباشرة أو مرونة سعر الطلب (Ep):

تقيس درجة استجابة الطلب على سلعة للتغير النسبي الحاصل في سعر هذه السلعة.

$$E_P = \frac{\frac{\Delta Q_d}{Q_d}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{Q_{d2} - Q_{d1}}{Q_{d1}}}{\frac{P_2 - P_1}{P1}}$$

التغير النسبي في الكمية

التغير النسبي في السعر

$$E_P = \frac{\Delta Q_d}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

عندما يكون ΔP يؤول إلى الصفر (0) ، و باستعمال $\frac{\partial Q}{\partial P}$ كتقريب ل $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ يصبح :

$$E_P = \frac{\partial Q_d}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_d}$$

ملاحظة: إشارة مرونة سعر الطلب هي سالبة ($Ep< 0$) و التي تعكس العلاقة العكسية بين السعر و الكمية المطلوبة (إلا في حالة بعض الاستثناءات).

- إذا كان $|E_P| > 1$: نقول في هذه الحالة أن الطلب مرن (كبير المرونة)، أي نسبة التغير في الكمية المطلوبة **أكبر** من نسبة التغير في السعر.

- إذا كان $|E_P| = 1$: نقول في هذه الحالة أن الطلب تام المرونة: أي نسبة التغير في الكمية **تساوي** نسبة التغير في السعر.
- إذا كان $|E_P| < 1$: نقول في هذه الحالة أن الطلب غير مرن : أي نسبة التغير في الكمية المطلوبة **أقل** من نسبة التغير في السعر.

ب. مرونة الدخل (E_R):

تقيس درجة استجابة الطلب للتغير النسبي في الدخل.

$$E_R = \frac{\frac{\Delta Q_d}{Q_d}}{\frac{\Delta R}{R}} = \frac{\Delta Q_d}{\Delta R} \cdot \frac{R}{Q_d}$$

$$E_R = \frac{\partial Q_d}{\partial R} \cdot \frac{R}{Q_d}$$

إذا كان:

$E_R > 1$: فإن السلعة كمالية.

$0 < E_R \leq 1$: فان السلعة عادية أو ضرورية.

$E_R < 0$: فان السلعة دنيا.

ج. المرونة الجزئية التبادلية (مرونة التقاطع):

هي مرونة الطلب على سلعة معينة بالنسبة لسعر سلعة أخرى.

مرونة السلعة X بالنسبة لسعر السلعة Y (E_{XY}): تقيس التغير النسبي في الطلب على السلعة X الموافق للتغير النسبي في سعر السلعة Y.

$$E_{xy} = \frac{\frac{\Delta Q_{dx}}{Q_{dx}}}{\frac{\Delta P_y}{p_y}} = \frac{\Delta Q_{dx}}{\Delta p_y} \cdot \frac{p_y}{Q_{dx}}$$

$$E_{xy} = \frac{\partial Q_{dx}}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{Q_{dx}}$$

إذا كان:

$E_{xy} > 0$: فإن السلعتان x و y هما بديلتان (substituables).

$E_{xy} < 0$: فإن السلعتان x و y هما متكاملتان (complémentaires).

$E_{xy} = 0$: فإن السلعتان x و y هما مستقلتان.

2.3. مرونة العرض:

هي درجة استجابة العرض للتغير النسبي الحاصل في أحد محددات العرض. **فمرونة سعر العرض** (Ep) تقيس مدى استجابة الكمية المعروضة من السلعة للتغير النسبي في سعر السلعة.

$$E_P = \frac{\frac{\Delta Q_O}{Q_O}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{Q_{O2} - Q_{O1}}{Q_{O1}}}{\frac{P_2 - P_1}{P_1}}$$

$$E_P = \frac{\Delta Q_o}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q_o}$$

$$E_P = \frac{\partial Q_o}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_o}$$

ملاحظة: إشارة مرونة سعر العرض غالبا ما تكون موجبة ($Ep > 0$) و التي تعكس العلاقة الطردية بين السعر و الكمية المعروضة (إلا في حالة بعض الاستثناءات).

- إذا كان $E_P > 1$: نقول في هذه الحالة أن العرض مرن (كبير المرونة)، أي نسبة التغير في الكمية المعروضة **أكبر** من نسبة التغير في السعر.
- إذا كان $E_P = 1$: نقول في هذه الحالة أن العرض تام المرونة: أي نسبة التغير في الكمية **تساوي** نسبة التغير في السعر.
- إذا كان $E_P < 1$: نقول في هذه الحالة أن العرض غير مرن : أي نسبة التغير في الكمية المعروضة **أقل** من نسبة التغير في السعر.

3.3. تمارين عن المرونات:

التمرين الأول:

أحسب مرونة العرض (أو مرونة سعر العرض) إذا علمت أنه عندما تغير السعر من 12 إلى 15 دينار ارتفعت الكمية المعروضة من 30 إلى 35وحدة.

التمرين الثاني:

إذا كانت دالة الطلب $Q = 150 - 12p$. - أحسب مرونة الطلب عندما $P = 5$.

التمرين الثالث:

أحسب مرونة الدخل – الطلب، عندما $R = 1000$ إذا علمت أن $Q_D = 2R + 25$.

التمرين الرابع:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما بدلالة سعرها P_1 و سعر سلعة أخرى P2 هي: $Q = 20 - 2P_1 + P_2$.

المطلوب:

أحسب مرونة سعر الطلب عندما يكون $P_1 = 10$ و $P_2 = 5$.

التمرين الخامس:

ليكن لدينا الجدول التالي يشمل بيانات أثار التغير النسبي لسعري السلعتين x و y على الكميات المطلوبة لكل منهما.

	نسبة التغير في الكمية	
ارتفاع السعر بنسبة 1 %	Q_{Dx}	Q_{Dy}
p_x	-4%	+1.8 %
p_y	+1.7 %	-2 %

المطلوب:

1- بين مرونة الطلب السعرية لكل من السلعتين. 2 – بين المرونة المتقاطعة و حدد طبيعة العلاقة بين السلعتين.

التمرين السادس:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما بدلالة سعرها P_1 و سعر سلعة أخرى P_2 (السلعتان هما X و Y) من الصورة:

$$Qx = 7\,P_1^{-1.3} \,.\, P_2^{-0.4}$$

المطلوب:

أحسب مرونة سعر الطلب تبعا لكل من السعرين و هذا بالنسبة للسلعة X.

التمرين السابع:

إذا كانت دالة الطلب على السلعة X من الصورة:

$$X = 2{,}5\, P_X^{-0.75} \,.\, P_Y^{1.2} \,.\, R^{0{,}5}$$

المطلوب:

أحسب مختلف المرونات و فسرها اقتصاديا.

التمرين الثامن:

مرونة الطلب السعرية : $E_P = -2$ مرونة الدخل : $E_R = 0{,}5$ مرونة الطلب التقاطعية : $E_C = 1$

السلعة محل الدراسة هي السلعة X.

المطلوب:

- حدد التغير النسبي في الطلب على X إذا انخفض P_X ب 10 % مع ثبات العوامل الأخرى.
- حدد التغير النسبي في الطلب على X إذا ارتفع P_X ب 10 % و انخفض R ب 2 % مع ثبات P_Y.
- إذا ارتفع R ب 3 % و انخفض P_Y ب 4%، حدد التغير النسبي في سعر السلعة X حتى يتم تحقيق زيادة في الطلب بنسبة 5% .

التمرين التاسع:

إذا كانت دالة الطلب : $Q_X = -0{,}5\, P_X + 2P_Y + 0{,}75R - 0{,}25\, P_Z$

X، Y و Z سلع.

1. أحسب المرونات و فسرها اقتصاديا عند $P_Z=16$ ، $P_Y=5$ ، $R=100$ ، $P_X=2$.
2. حدد التغير في الكمية إذا ارتفع P_X ب 25 % و 30 % .
3. حدد التغير في الكمية إذا ارتفع P_y ب 10 % و 15 % .
4. حدد التغير في الكمية إذا ارتفع P_Z ب 22 % و 45 % .
5. حدد التغير في الكمية إذا ارتفع R ب 55 % و 100 % .

التمرين العاشر:

إذا علمت أن الكمية المطلوبة من السلعة Q_X هي دالة تابعة لسعرها P_X و سعر سلعة أخرى P_Y و الدخل النقدي R.

بافتراض أن الطلب على السلعة ممثل بالدالة التالية: $Q_X = P^{-0,3} . P_Y^{0,1} . R^{0,4}$

1. حدد مختلف المرونات و فسرها اقتصاديا.
2. أوجد التغير النسبي في الكمية المطلوبة على هذه السلعة وفقا للتغيرات التالية (مع التفسير الاقتصادي):

أ. ارتفاع سعر السلعة ب 10% مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة.

ب. ارتفاع سعر السلعة الأخرى ب 5 % مع ثبات سعر السلعة و الدخل النقدي للمستهلك.

ت. ارتفاع الدخل النقدي ب 10% مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة.

ث. انخفاض سعر السلعة ب 5% مع ارتفاع سعر السلعة الأخرى ب 7% مع بقاء الدخل ثابت.

ج. انخفاض في سعر السلعة ب 7% و انخفاض سعر السلعة الأخرى ب 5% مع ارتفاع الدخل النقدي ب 10%.

4.3. حل تمارين المرونات:

حل التمرين الأول:

- **حساب مرونة العرض:**

$$E_P = \frac{\frac{\Delta Q_O}{Q_O}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{35-30}{30}}{\frac{15-12}{12}} = 0,66$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة ب 1% فإن الكمية المعروضة ترتفع ب 0,66% (العرض غير مرن).

حل التمرين الثاني:

- **حساب مرونة الطلب عندما P = 5:**

$$Q = 150 - 12\,p$$

$$E_P = \frac{\partial Q_d}{\partial P} \cdot \frac{P}{Q_d} = -12 \cdot \frac{5}{150-12(5)} = -0,66$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة ب 1% فإن الكمية المطلوبة تنخفض ب 0,66% (الطلب غير مرن أو قليل المرونة).

حل التمرين الثالث:

- **حساب مرونة الدخل، عندما R= 1000**:

$$Q_D= 2R + 25$$

$$E_R = \frac{\partial Q_d}{\partial R} \cdot \frac{R}{Q_d} = 2 \cdot \frac{1000}{2(1000) + 25} = 0{,}98$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع الدخل ب 1% فإن الكمية المطلوبة ترتفع ب 0,98% (السلعة ضرورية).

حل التمرين الرابع:

- **حساب مرونة السعر الطلب عندما يكون $P_1 = 10$ و $P_2 = 5$** :

$$Q = 20 - 2P_1 + P_2$$

$$E_P = \frac{\partial Q_d}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_d} = -2 \cdot \frac{10}{20 - 2(10) + 5} = -4$$

$$E_{XY} = \frac{\partial Q_d}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{Q_d} = 1 \cdot \frac{5}{20 - 2(10) + 5} = 1$$

التفسير الاقتصادي:

- إذا ارتفع سعر السلعة نفسها (X) ب 1% فإن الكمية المطلوبة منها تنخفض ب 4% (الطلب مرن أو كبير المرونة).
- إذا ارتفع سعر السلعة الأخرى (Y) ب 1% فإن الكمية المطلوبة من السلعة X يرتفع ب 1% (السلعتان X و Y هما سلعتان بديلتان).

حل التمرين الخامس:

1. **تحديد مرونة الطلب السعرية لكل من السلعتين**:

- مرونة الطلب السعرية المباشرة للسلعة X تساوي 4- .
- مرونة الطلب السعرية المباشرة للسلعة Y تساوي 2- .

2. **تحديد المرونة المتقاطعة و طبيعة العلاقة بين السلعتين**:

- مرونة التقاطع E_{XY}(التغير النسبي في الطلب على السلعة X الناتج عن التغير في سعر السلعة Y ب 1%) تساوي1,7+ .

- مرونة التقاطع E_{YX}(التغير النسبي في الطلب على السلعة Y الناتج عن التغير في سعر السلعة X ب 1%) تساوي 1.8+ .
- السلعتان هما بديلتان لأن مرونة التقاطع الخاصة بينها هي أكبر من الصفر.

حل التمرين السادس:

- **حساب مرونة سعر الطلب تبعا لكل من السعرين:**

لدينا: $Qx = 7\,P_1^{-1,3} . P_2^{-0,4}$ ، بحيث P_1 هو سعر السلعة X و P_2 هو سعر السلعة Y (سلعة أخرى):

$$E_P = \frac{\partial Q_X}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{Q_X} = \frac{-1{,}3 \cdot 7P_1^{-2{,}3} \cdot P_2^{-0{,}4} \cdot P_1}{7P_1^{-1{,}3} \cdot P_2^{-0{,}4}} = \frac{-1{,}3 \cdot 7P_1^{-1{,}3} \cdot P_2^{-0{,}4}}{7P_1^{-1{,}3} \cdot P_2^{-0{,}4}} = -1{,}3$$

$$E_{XY} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{Q_X} = \frac{-0{,}4 \cdot 7P_1^{-1{,}3} \cdot P_2^{-1{,}4} \cdot P_2}{7P_1^{-1{,}3} \cdot P_2^{-0{,}4}} = \frac{-0{,}4 \cdot 7P_1^{-1{,}3} \cdot P_2^{-0{,}4}}{7P_1^{-1{,}3} \cdot P_2^{-0{,}4}} = -0{,}4$$

حل التمرين السابع:

- **حساب مختلف المرونات و تفسيرها اقتصاديا :**

لدينا دالة الطلب على السلعة X: $X = 2{,}5\,P_X^{-0.75} . P_Y^{1.2} . R^{0,5}$.

1. **مرونة سعر الطلب:**

$$E_P = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{2{,}5 \cdot (-0{,}75)P_X^{-1{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5} \cdot P_X}{2{,}5 \cdot P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}}$$
$$= \frac{2{,}5 \cdot (-0{,}75)P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}}{2{,}5 \cdot P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}} = -0{,}75$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة X ب 1% فإن الكمية المطلوبة منها تنخفض ب 0,75% (الطلب غير مرن أو قليل المرونة).

2. **مرونة التقاطع:**

$$E_{XY} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X} = \frac{2{,}5 \cdot (1{,}2)P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{0{,}2} \cdot R^{0{,}5} \cdot P_Y}{2{,}5 \cdot P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}}$$
$$= \frac{2{,}5 \cdot (1{,}2)P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}}{2{,}5 \cdot P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}} = 1{,}2$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة Y ب 1% فإن الكمية المطلوبة من السلعة X ترتفع ب 1,2% (السلعتان هما بديلتان).

3. **مرونة الدخل**:

$$E_R = \frac{\partial Q_X}{\partial \mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Q_X}} = \frac{2{,}5 \cdot (0{,}5) P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{-0{,}5} \cdot R}{2{,}5 \cdot P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}}$$
$$= \frac{2{,}5 \cdot (0{,}5) P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}}{2{,}5 \cdot P_X^{-0{,}75} \cdot P_Y^{1{,}2} \cdot R^{0{,}5}} = 0{,}5$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع الدخل ب 1% فإن الكمية المطلوبة من السلعة X ترتفع ب 0,5% (السلعة ضرورية أو عادية).

حل التمرين الثامن:

لدينا: **مرونة الطلب السعرية**: $E_P = -2$ ، **مرونة الدخل**: $E_R = 0{,}5$ ، **مرونة الطلب التقاطعية**: $E_{XY} = 1$

ليكن $\frac{\Delta \mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_1}$ التغير النسبي في الكمية المطلوبة الناتج عن التغير في سعر السلعة نفسها، و $\frac{\Delta \mathrm{Q}_2}{\mathrm{Q}_2}$ التغير النسبي في الكمية المطلوبة الناتج عن التغير في الدخل، و $\frac{\Delta \mathrm{Q}_3}{\mathrm{Q}_3}$ التغير النسبي في الكمية المطلوبة الناتج عن التغير في سعر السلعة الأخرى P_Y ، وليكن $\frac{\Delta Q}{\mathrm{Q}}$ هو إجمالي التغير. بالتالي:

$$E_P = \frac{\frac{\Delta \mathrm{Q}_1}{\mathrm{Q}_1}}{\frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_1}{\mathrm{Q}_1} = E_P \cdot \frac{\Delta \mathrm{P}}{\mathrm{P}}$$

$$E_R = \frac{\frac{\Delta \mathrm{Q}_2}{\mathrm{Q}_2}}{\frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R}}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_2}{\mathrm{Q}_2} = E_R \cdot \frac{\Delta \mathrm{R}}{\mathrm{R}}$$

$$E_{XY} = \frac{\frac{\Delta \mathrm{Q}_3}{\mathrm{Q}_3}}{\frac{\Delta \mathrm{P_Y}}{\mathrm{P_Y}}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_3}{\mathrm{Q}_3} = E_{XY} \cdot \frac{\Delta \mathrm{P_Y}}{\mathrm{P_Y}}$$

1. **تحديد التغير النسبي في الطلب إذا انخفض PX ب 10 % مع ثبات العوامل الأخرى**:

$$\frac{\Delta Q_1}{\mathrm{Q}_1} = -2 \cdot (-0{,}1) = 0{,}2 = 20\%$$

إذا انخفض PX ب % 10 مع ثبات العوامل الأخرى فإن الكمية المطلوبة ترتفع ب % 20.

2. **تحديد التغير النسبي في الطلب على X إذا ارتفع P_X ب % 10 و انخفض R ب % 2 مع ثبات P_Y:**

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta Q_1}{Q_1}+\frac{\Delta Q_2}{Q_2}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q}=-2\cdot(0{,}1)+(0{,}5)\cdot(-0{,}02)=-0{,}21$$

إذا ارتفع PX ب % 10 و انخفض R ب % 2 مع ثبات P_Y فإن الطلب على السلعة X ينخفض ب 21% .

3. **إذا ارتفع R ب 3 % و انخفض P_Y ب 4%، تحديد التغير النسبي في سعر السلعة X حتى يتم تحقيق زيادة في الطلب بنسبة 5% :**

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta Q_1}{Q_1}+\frac{\Delta Q_2}{Q_2}+\frac{\Delta Q_3}{Q_3}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q}=(0{,}03)\cdot(0{,}5)+\frac{\Delta P}{P}\cdot(-2)+1\cdot(-0{,}04)$$

$$\Rightarrow 0{,}05=(0{,}03)\cdot(0{,}5)+\frac{\Delta P}{P}\cdot(-2)+1\cdot(-0{,}04)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{P}=-0{,}0375=-3{,}75\%$$

إذا ارتفع R ب 3 % و انخفض P_Y ب 4%، يجب على سعر السلعة X أن ينخفض ب % 3,75 حتى يتم تحقيق زيادة في الطلب بنسبة 5% .

حل التمرين التاسع:

لدينا دالة الطلب : $Q_X = -0{,}5\,P_X + 2P_Y + 0{,}75R - 0{,}25\,P_Z$

1. **حساب المرونات و تفسيرها اقتصاديا عند $P_Z=16$ ، $P_Y=5$ ، R=100 ، $P_X=2$:**

- **مرونة سعر الطلب:**

$$E_P=\frac{\partial Q_X}{\partial P_X}\cdot\frac{P_X}{Q_X}=-0{,}5\cdot\frac{2}{-0{,}5(2)+2(5)+0{,}75(100)-0{,}25(16)}=-\frac{1}{80}=-0{,}0125$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة X ب 1% فإن الكمية المطلوبة تنخفض ب 0,0125% (الطلب غير مرن أو قليل المرونة).

- **مرونة الدخل**:

$$E_R = \frac{\partial Q_X}{\partial \mathrm{R}} \cdot \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{Q_X}} = -0{,}75 \cdot \frac{100}{80} = 0{,}9375$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع الدخل ب 1% فإن الكمية المطلوبة من السلعة X ترتفع ب 0,9375% (السلعة ضرورية أو عادية).

- **مرونة التقاطع** (E_{XY}):

$$E_{XY} = \frac{\partial Q_X}{\partial \mathrm{P_Y}} \cdot \frac{\mathrm{P}_Y}{\mathrm{Q_X}} = 2 \cdot \frac{5}{80} = 0{,}125$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة Y ب 1% فإن الكمية المطلوبة من السلعة X ترتفع ب 0,125% (السلعتان بديلتان).

- **مرونة التقاطع** (E_{XZ}):

$$E_{XZ} = \frac{\partial Q_X}{\partial \mathrm{P_Z}} \cdot \frac{\mathrm{P}_Z}{\mathrm{Q_X}} = -0{,}25 \cdot \frac{16}{80} = -0{,}05$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة Z ب 1% فإن الكمية المطلوبة من السلعة X تنخفض ب 0,05% (السلعتان متكاملتان).

2. **تحديد تغير الكمية إذا ارتفع P_X ب 25 % و30 %** :

- **إذا ارتفع P_X ب 25 %**:

$$E_P = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta \mathrm{P_X}}{\mathrm{P_X}}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_P \cdot \frac{\Delta \mathrm{P_X}}{\mathrm{P_X}} = -0{,}0125 \times 25 = -0{,}3125\%$$

- **إذا ارتفع P_X ب 30 %**:

$$E_P = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta \mathrm{P_X}}{\mathrm{P_X}}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_P \cdot \frac{\Delta \mathrm{P_X}}{\mathrm{P_X}} = -0{,}0125 \times 30 = -0{,}375\%$$

3. تحديد تغير الكمية إذا ارتفع P_y ب 10 % و15 % :

- إذا ارتفع P_y ب 10 %:

$$E_{XY} = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta P_Y}{P_Y}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_{XY} \cdot \frac{\Delta P_Y}{P_Y} = 0{,}125 \times 10 = 1{,}25\%$$

- إذا ارتفع P_y ب 15 %:

$$E_{XY} = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta P_Y}{P_Y}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_{XY} \cdot \frac{\Delta P_Y}{P_Y} = 0{,}125 \times 15 = 1{,}875\%$$

4. تحديد تغير الكمية إذا ارتفع P_Z ب 22 % و 45 % .

- إذا ارتفع P_Z ب 22 %:

$$E_{XZ} = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta P_Z}{P_Z}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_{XZ} \cdot \frac{\Delta P_Z}{P_Z} = -0{,}05 \times 22 = -1{,}1\%$$

- إذا ارتفع P_Z ب 45 %:

$$E_{XZ} = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta P_Z}{P_Z}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_{XZ} \cdot \frac{\Delta P_Z}{P_Z} = -0{,}05 \times 45 = -2{,}25\%$$

5. تحديد تغير الكمية إذا ارتفع R ب 55 % و 100 % .

- إذا ارتفع R ب 55 %:

$$\frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta R}{R}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_R \cdot \frac{\Delta R}{R} = 0{,}9375 \times 55 = 51{,}56\%$$

- إذا ارتفع R ب 100 %:

$$\frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta R}{R}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_R \cdot \frac{\Delta R}{R} = 0{,}9375 \times 100 = 93{,}75\%$$

حل التمرين العاشر:

لدينا دالة الطلب التالية : $Q_X = P^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}$

1. **تحديد مختلف المرونات:**

- مرونة سعر الطلب:

$$E_P = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} \cdot \frac{P_X}{Q_X} = \frac{(-0,3)P_X^{-1,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4} \cdot P_X}{P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}} = \frac{(-0,3)P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}}{P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}} = -0,3$$

- مرونة التقاطع:

$$E_{XY} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_Y} \cdot \frac{P_Y}{Q_X} = \frac{(0,1)P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{-0,9} \cdot R^{0,4} \cdot P_Y}{P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}} = \frac{(0,1)P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}}{P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}} = 0,1$$

- مرونة الدخل:

$$E_R = \frac{\partial Q_X}{\partial R} \cdot \frac{R}{Q_X} = \frac{(0,4)P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{-0,6} \cdot R}{P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}} = \frac{(0,4)P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}}{P_X^{-0,3} \cdot P_Y^{0,1} \cdot R^{0,4}} = 0,4$$

2. **تحديد التغير النسبي في الكمية المطلوبة من السلعة وفقا للتغيرات التالية (مع التفسير الاقتصادي):**

أ- ارتفاع سعر السلعة ب 10% مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة:

$$E_P = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta P_X}{P_X}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_P \cdot \frac{\Delta P_X}{P_X} = -0,3 \times 10 = -3\%$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة X ب 10% فإن الكمية المطلوبة تنخفض ب 3%.

ب- ارتفاع سعر السلعة الأخرى ب 5 % مع ثبات سعر السلعة و الدخل النقدي للمستهلك:

$$E_{XY} = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta P_Y}{P_Y}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_{XY} \cdot \frac{\Delta P_Y}{P_Y} = 0,1 \times 5 = 0,5\%$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع سعر السلعة Y ب 5% فإن الكمية المطلوبة ترتفع ب 0,5%.

ت- ارتفاع الدخل النقدي ب 10% مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة:

$$E_R = \frac{\frac{\Delta Q_X}{Q_X}}{\frac{\Delta R}{R}} \Rightarrow \frac{\Delta Q_X}{Q_X} = E_R \cdot \frac{\Delta R}{R} = 0,4 \times 10 = 4\%$$

التفسير الاقتصادي: إذا ارتفع الدخل R ب 10% فإن الكمية المطلوبة من X ترتفع ب 4%.

ث- انخفاض سعر السلعة ب 5% مع ارتفاع سعر السلعة الأخرى ب 7% و بقاء الدخل ثابت:

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta Q_1}{Q_1}+\frac{\Delta Q_2}{Q_2}=E_P\cdot\frac{\Delta P_X}{P_X}+E_{XY}\cdot\frac{\Delta P_Y}{P_Y}=(-0{,}3\times-5)+(0{,}1\times 7)=2{,}2\%$$

التفسير الاقتصادي: إذا انخفض سعر السلعة ب 5% مع ارتفاع سعر السلعة الأخرى ب 7% و بقاء الدخل ثابت فإن الكمية المطلوبة ترتفع ب 2,2% .

ج- انخفاض في سعر السلعة ب 7% و انخفاض سعر السلعة الأخرى ب 5% مع ارتفاع الدخل النقدي ب 10%:

$$\frac{\Delta Q}{Q}=\frac{\Delta Q_1}{Q_1}+\frac{\Delta Q_2}{Q_2}+\frac{\Delta Q_3}{Q_3}=E_P\cdot\frac{\Delta P_X}{P_X}+E_{XY}\cdot\frac{\Delta P_Y}{P_Y}+E_R\cdot\frac{\Delta R}{R}$$
$$=(-0{,}3\times-7)+(0{,}1\times-5)+(0{,}4\times 10)=5{,}6\ \%$$

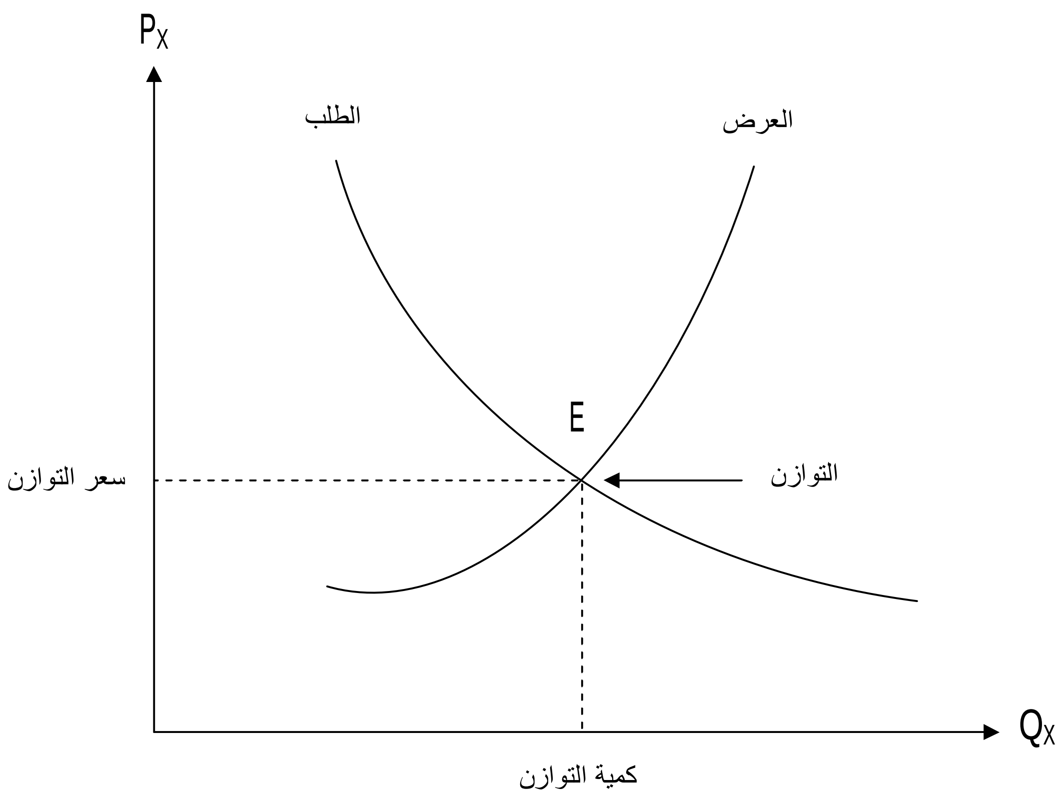
التفسير الاقتصادي: إذا انخفض سعر السلعة ب 7% و انخفاض سعر السلعة الأخرى ب 5% مع ارتفاع الدخل النقدي ب 10% فان الكمية المطلوبة ترتفع ب 5,6% .

4. التوازن:

يتحقق التوازن في سوق المنافسة التامة عندما تتساوى الكمية المطلوبة من السلعة مع الكمية المعروضة منها. تساوي الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة يحدد لنا سعر التوازن أو سعر السوق. الكمية المباعة و الكمية المشتراه عند هذا السعر هي كمية التوازن.

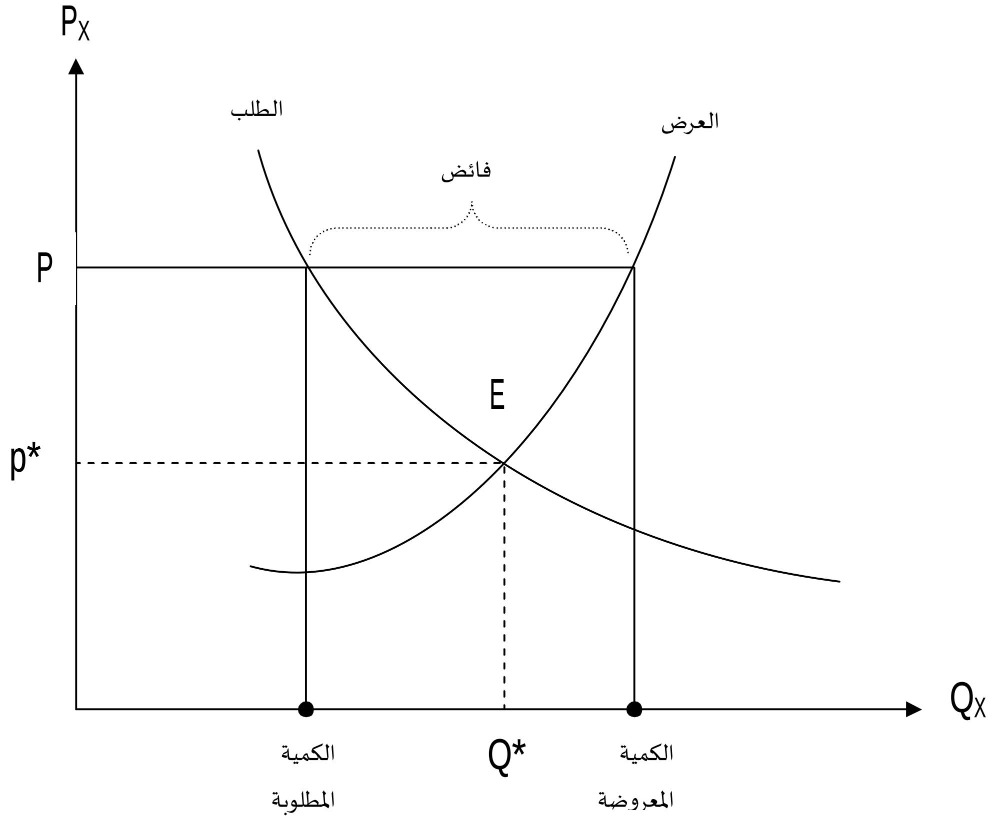
يقصد بسوق المنافسة التامة بأنه سوق يتوفر على مجموعة من البائعين و المشترين لنفس السلعة أو الخدمة، و لا يمكن لأحد من الطرفين أن يؤثر على السعر.

يتحدد بيانيا سعر و كمية التوازن عند التقاء منحنى العرض مع منحنى الطلب.

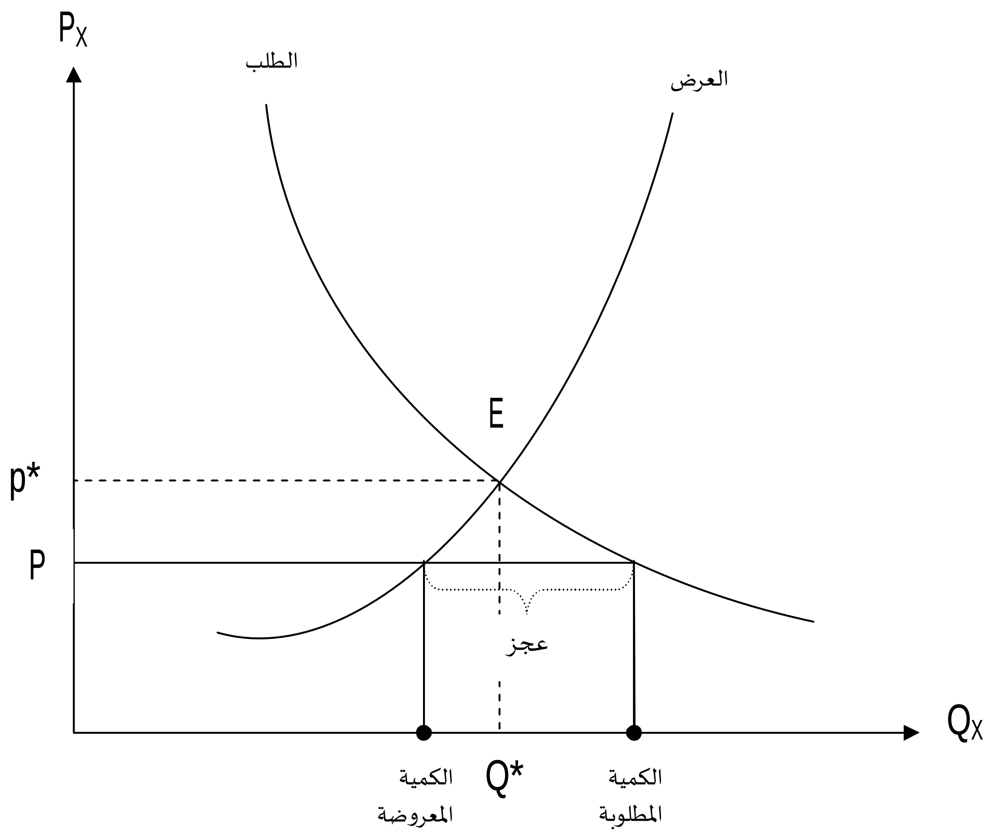


الشكل5.1. توازن السوق (بيانيا)

عند سعر أعلى من سعر التوازن p* فإن الكمية المعروضة تفوق الكمية المطلوبة(فائض) مما يدفع السعر إلى الأسفل بفعل محاولة الباعة زيادة مبيعاتهم. و عند سعر أدنى من سعر التوازن p* فإن الطلب يفوق العرض (عجز)، مما يدفع السعر إلى الأعلى بفعل محاولة المشترين الحصول على كميات أكبر. عند سعر التوازن فقط p* يتحقق التوافق بين العرض و الطلب.



الشكل6.1. حالة فائض



الشكل7.1. حالة عجز

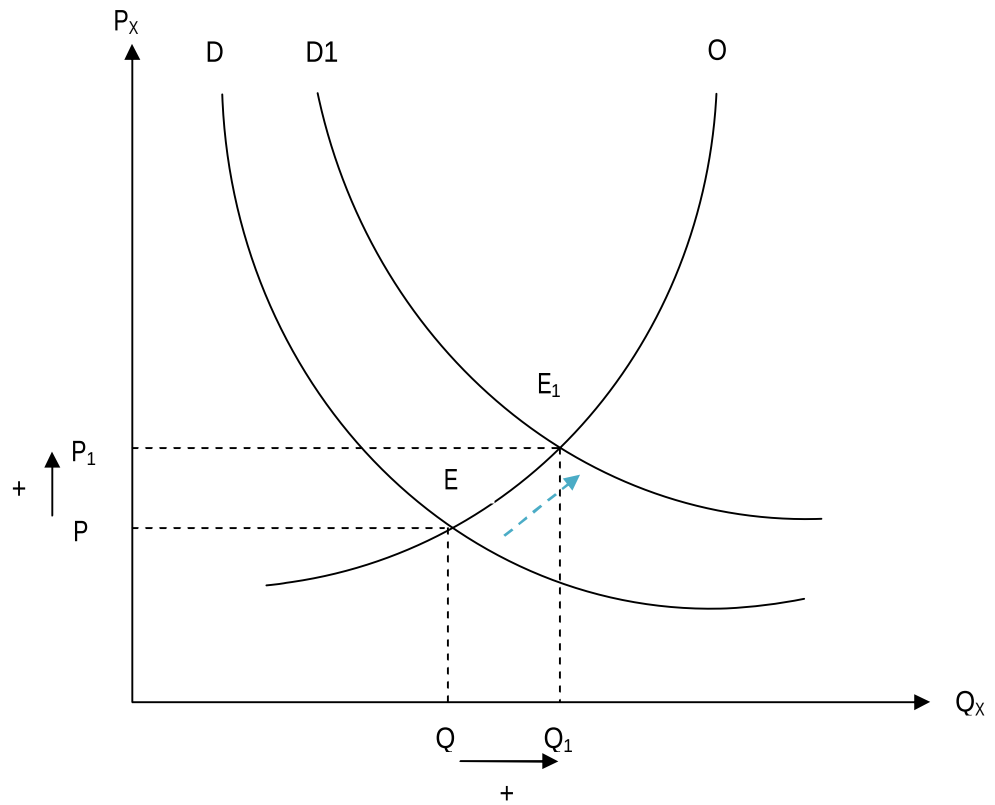
مع ثبات العوامل الأخرى المؤثرة على العرض و الطلب فإن هناك نقطة توازن وحيدة ترضي الطرفين – المنتج و المستهلك-، كلما ابتعدنا عنها يجب العودة إليها.

أما في حال تغير أحد العوامل الأخرى المحددة للعرض و الطلب فإنه سيحدث ما يلي:

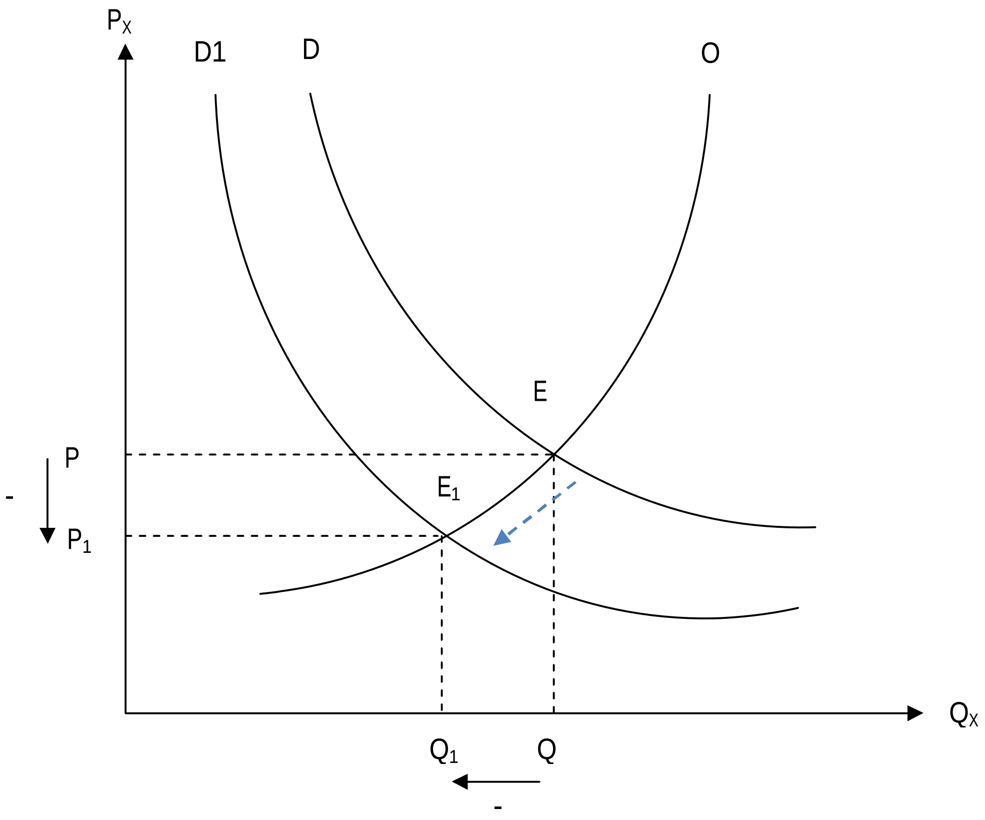
أ. تغير أحد محددات الطلب عند نفس مستويات السعر:

تغير أحد المحددات الأخرى للطلب- ليكن الدخل على سبيل المثال- سيؤدي إلى تحرك منحنى الطلب بأكمله، سواء ناحية اليمين (في حالة زيادة الدخل) أو ناحية اليسار (حالة انخفاض الدخل) ، سينتج عن ذلك تغير سعر التوازن و كمية التوازن بحيث:

تغير أحد محددات الطلب عند نفس السعر (ليكن زيادة الدخل على سبيل المثال) سيؤدي إلى تحرك منحنى الطلب ناحية اليمين ما سيؤدي إلى ارتفاع سعر و كمية التوازن (الشكل8.1). أما في حال انخفاض الطلب (نتيجة انخفاض الدخل) فإن منحنى الطلب سيتحرك ناحية اليسار ما سيؤدي إلى انخفاض سعر و كمية التوازن (الشكل9.1).



الشكل8.1. حالة زيادة الطلب

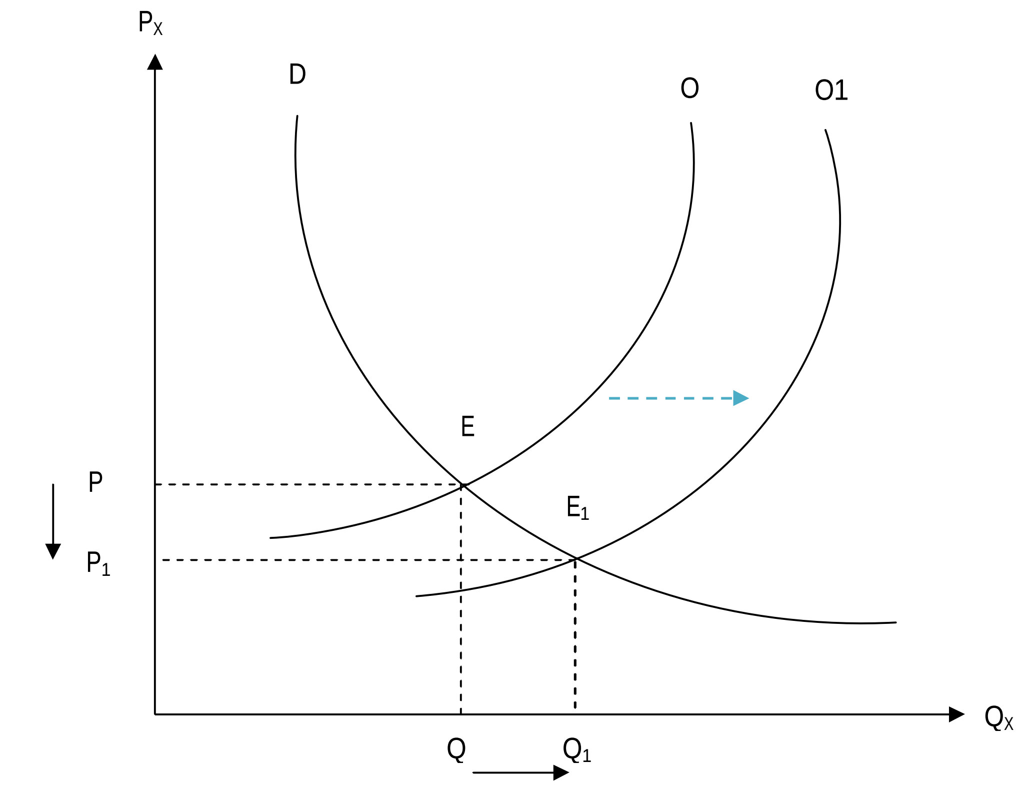


الشكل9.1. حالة نقصان الطلب

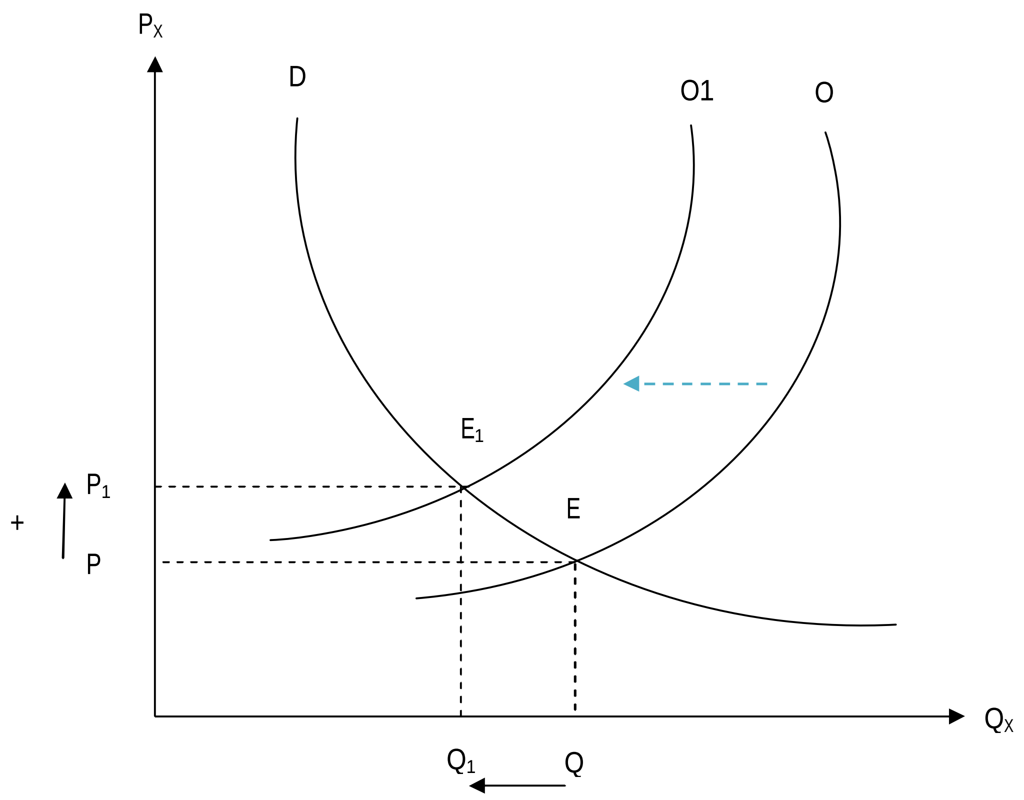
ب. تغير أحد محددات العرض عند نفس مستويات السعر:

تغير أحد محددات العرض (مع ثبات السعر) سيؤدي إلى تحرك منحنى العرض بأكمله سواء ناحية اليمين أو ناحية اليسار، سينتج عن ذلك تغير سعر و كمية التوازن.

إذا كان العامل في صالح زيادة العرض (ليكن التغير التكنولوجي)، هذا سيحرك منحنى العرض ناحية اليمين ما سيؤدي إلى انخفاض سعر التوازن و ارتفاع كمية التوازن (الشكل10.1). أما في حالة انخفاض العرض (ليكن بسبب زيادة الضرائب) فإن ذلك سيحرك منحنى العرض ناحية اليسار ما سيؤدي إلى ارتفاع سعر التوازن و انخفاض كمية التوازن(الشكل11.1).



الشكل10.1. حالة زيادة العرض



الشكل11.1. حالة نقصان العرض

1.4. تمارين عن التوازن:

التمرين الأول:

لدينا الجدول التالي، حيث p يمثل السعر، و يمثل Q_D و Q_O الكمية المطلوبة و المعروضة على التوالي:

p	1	2	3	4	5	6	7
Q_D	88	86	84	82	80	78	76
Q_O	73	76	79	82	85	88	91

المطلوب:

1. أرسم بيانيا جدولي كل من الطلب و العرض.
2. حدد التوازن بيانيا.
3. ماذا يحدث إذا تحدد السعر بمقدار 2 وحدات نقدية؟
4. ماذا يحصل عند الكمية المعروضة تساوي 88 $(Q_O = 88)$؟
5. ماذا تستنتج؟
6. حدد توازن السوق حسابيا.

التمرين الثاني:

لدينا اقتصاد يتكون من 10 مستهلكين و 5 منتجين.

إذا كان الطلب الفردي يخضع للدالة: $P = -0{,}50\,Q + 45$.

و كان العرض الفردي يخضع للدالة التالية: $P = \frac{Q-70}{3}$

المطلوب:

1. حدد الطلب الكلي.
2. حدد العرض الكلي.
3. حدد توازن السوق.

التمرين الثالث:

إذا علمت أن الطلب و العرض في السوق يتغير كما يلي:

$$\begin{cases} Q_D = 15 - 2p \\ Q_O = 3 + p \end{cases}$$

المطلوب:

1. حساب سعر و كمية التوازن.
2. إذا فرضت ضريبة نوعية ب 1 دج لكل وحدة مباعة، أوجد التوازن الجديد.
3. أحسب سعر المشتري (P_D) و سعر البائع (P_O) و في نفس الوقت العبء الذي يتحمله المنتج و المستهلك.

التمرين الرابع:

ليكن لدينا نموذج لسوق سلعة معينة:

$$\begin{cases} Q_D = 15 - 4p \\ Q_o = 6p - 1 \end{cases}$$

المطلوب:

1. حساب سعر التوازن (P^*)و كمية التوازن(Q^*) .
2. إذا فرضت الدولة ضريبة نوعية ب 2 دج . أحسب سعر و كمية التوازن، و سعر البائع و سعر المستهلك، و العبء الذي يتحمله كل من المنتج و المستهلك.
3. نفرض أن الدولة قدمت إعانة للمنتجين بدلا من فرض ضريبة ب 2 دج. أحسب سعر و كمية التوازن، و سعر البائع و سعر المستهلك ، و استفادة كل من المنتج و المستهلك.

التمرين الخامس:

لدينا دالة العرض السوقي: $Q_O = 2p - 5$، و دالة الطلب السوقي : $Q_D = 10 - P$.

المطلوب:

1. أحسب سعر و كمية التوازن.
2. تفرض ضريبة نوعية بمقدار 3 وحدات نقدية على كل وحدة منتجة. أحسب سعر و كمية التوازن الجديدتين؟ و سعر المنتج و المستهلك؟
3. تمنح الدولة إعانة بمقدار 3 وحدات نقدية. ماهو سعر و كمية التوازن الجديدتين؟ و سعر المنتج و المستهلك ؟
4. ماهو معدل الضريبة الأفضل الذي يعظم حصيلة إيرادات الدولة؟ و ماهو مقدار الإيرادات؟
5. أحسب فائض المنتج و المستهلك؟

التمرين السادس:

لدينا دالة الطلب: $P = 20 - 3Q$ ، و دالة العرض $P = 2Q$.

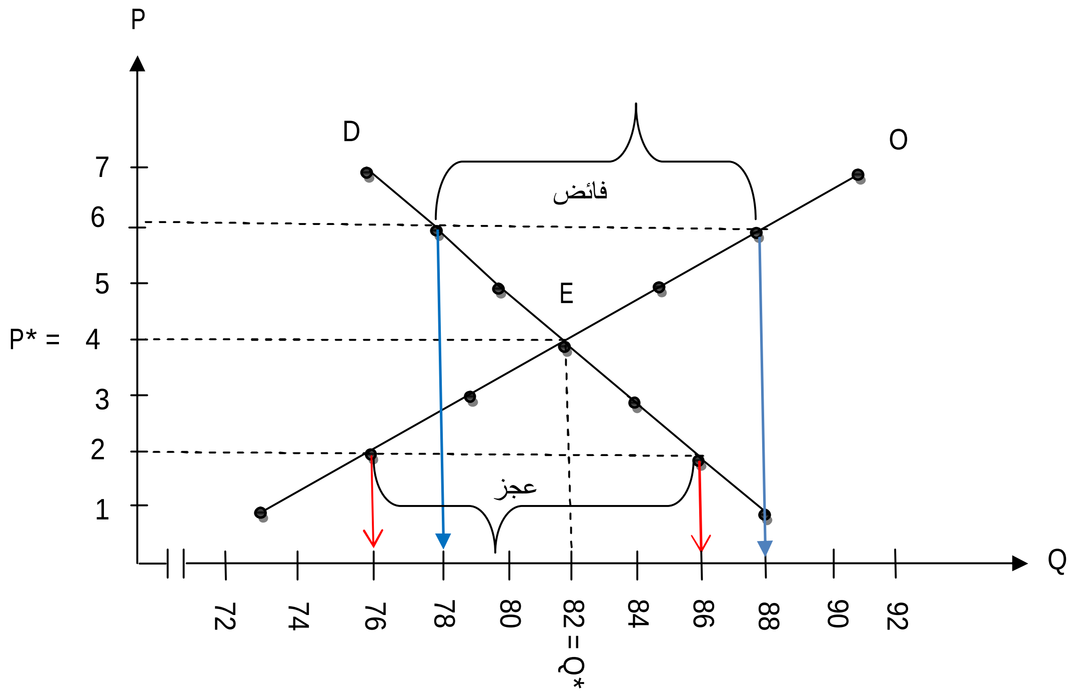
المطلوب:

أحسب سعر وكمية التوازن؟ ثم أحسب فائض المنتج و فائض المستهلك بيانيا و رياضيا ؟

2.4. حل تمارين التوازن:

حل التمرين الأول:

1. **تحديد منحنى الطلب و منحنى العرض ثم التوازن بيانيا:**



2. دالة العرض و دالة الطلب تتقطعان في نقطة E التي تمثل نقطة التوازن و تكون الكمية $Q = 82$ هي كمية التوازن و السعر $P = 4$ هو سعر التوازن، و توجد نقطة وحيدة و لا توجد نقطة أخرى للتوازن.
3. عند السعر $P = 2$ يحصل خلل في التوازن (عجز). فالمستهلكين نظرا لانخفاض السعر يكونون على استعداد لزيادة الطلب و يحدد هذا الطلب على الرسم البياني بمقدار 88 وحدة، لكن من ناحية المنتجين فإن هذا السعر مجحف بالنسبة لهم و لن يقبلوا بزيادة العرض و تقدر الكمية التي يكونوا على استعداد لعرضها ب 76 وحدة فقط. يظهر اختلال في التوازن و لكي نتمكن من

إرضاء المستهلكين و المنتجين في نفس الوقت يجب على السعر أن يرتفع (يرتفع السعر نتيجة لزيادة المستهلكين من طلبهم على السلعة)، فيقل الطلب و يزداد العرض و هكذا نرجع إلى نقطة التوازن.

4. إذا افترضنا أن الكمية المعروضة هي $Q_O = 88$ فإن المنتجين يعرضون هذه الكمية بسعر $P = 6$ لكن المستهلكين أمام هذا السعر المرتفع لن يطلبوا إلا 78 وحدة فيقع اختلال بين الكمية المعروضة و المطلوبة، فيكون العرض أكبر من الطلب(فائض). على عكس الحالة السابقة ينخفض السعر (بفعل زيادة المنتجين من عرضهم للسلعة) فيقل العرض و يزداد الطلب و يتم الرجوع إلى التوازن حتى نرضي المنتجين و المستهلكين في نفس الوقت.
5. ما يمكننا أن نستنتجه هو أن هناك نقطة وحيدة ترضي الطرفين و هي نقطة التوازن، كلما ابتعدنا عنها يختل التوازن و يجب العودة إليها.
6. **التوازن حسابيا:**

لإيجاد التوازن حسابيا لا بد من تحديد كل من دالة العرض و دالة الطلب حسابيا.

أولا: البحث عن دالة الطلب: نفترض أن دالة الطلب دالة خطية و هو ما يوضحه تمثيلها البياني و بالتالي تكتب من الشكل : $Q_D = ap + b$ (مع a أقل من 0).

لمعرفة كل من قيمة الميل a و الثابت b يجب تشكيل مجموعة معادلتين لأنه عندنا مجهولين. لذا نختار نقطتين و نشكل من إحداثيات كل نقطة معادلة. لنأخذ النقطة الأولى $P = 1$ و $Q_D = 88$ ، و النقطة السادسة $P = 6$ و $Q_D = 78$ و يصبح لدينا:

$$\begin{cases} 88 = a + b\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ 78 = 6a + b\ldots\ldots \quad (2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 90 \end{cases}$$

و منه فإن معادلة الطلب تكتب: $Q_D = -2p + 90$

ثانيا: دالة العرض: كذلك تكتب من الشكل : $Q_O = ap + b$ (مع a أكبر من 0). نأخذ النقطة الأولى و النقطة السادسة.

$$\begin{cases} 73 = a + b\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ 88 = 6a + b\ldots\ldots \quad (2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 70 \end{cases}$$

و منه فإن معادلة العرض تكتب: $Q_O = 3p + 70$

ثالثا: التوازن يحدث بتساوي الطلب مع العرض و معناه رياضيا:

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow -2p + 90 = 3p + 70$$

و منه : $P^*= 4$ و $Q^*= 82$

حيث يكون سعر التوازن 4 وحدة نقدية، و كمية التوازن 82 وحدة منتجة.

حل التمرين الثاني:

1. **تحديد دالة الطلب الكلي:**

لدينا دالة الطلب العكسية المعبر عنها ب $P = f(Q)$: $P = -0,50\, Q_D + 45$

نستنتج منها دالة الطلب المباشرة (المعبر عنها $Q = f(P)$) فنكتب دالة الطلب الفردية:

$$Q_{di} = \frac{-P + 45}{0,5}$$

تكون الكمية المطلوبة من طرف المستهلكين البالغ عددهم 10 أفراد على النحو التالي:

$$Q_D = 10\, Q_{di} = -20\, P + 900 \Longrightarrow Q_D = -20\, P + 900$$

2. **تحديد دالة العرض الكلي:**

بنفس الطريقة، الكمية التي يعرضها المنتج الواحد هي: $Q_{0i} = 3P + 70$

الكمية المعروضة من طرف المنتجين الخمسة هي:

$$Q_O = 5Q_{Oi} = 15\, P + 350 \Longrightarrow Q_O = 15\, P + 350$$

3. **تحديد التوازن:**

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow -20\, P + 900 = 15\, P + 350$$

و منه : $P^* = 15,71$ ، $Q^* = 585,65$.

حل التمرين الثالث:

1. **حساب سعر التوازن (P^*) و كمية التوازن (Q^*) :**

$$\begin{cases} Q_D = 15 - 2p \\ Q_O = 3 + P \end{cases} \qquad Q_D = Q_O \Longrightarrow 15 - 2p = 3 + P \Longrightarrow \begin{cases} P^* = 4 \\ Q^* = 7 \end{cases}$$

2. فرض ضريبة بقيمة 1 دج على كل وحدة مباعة:

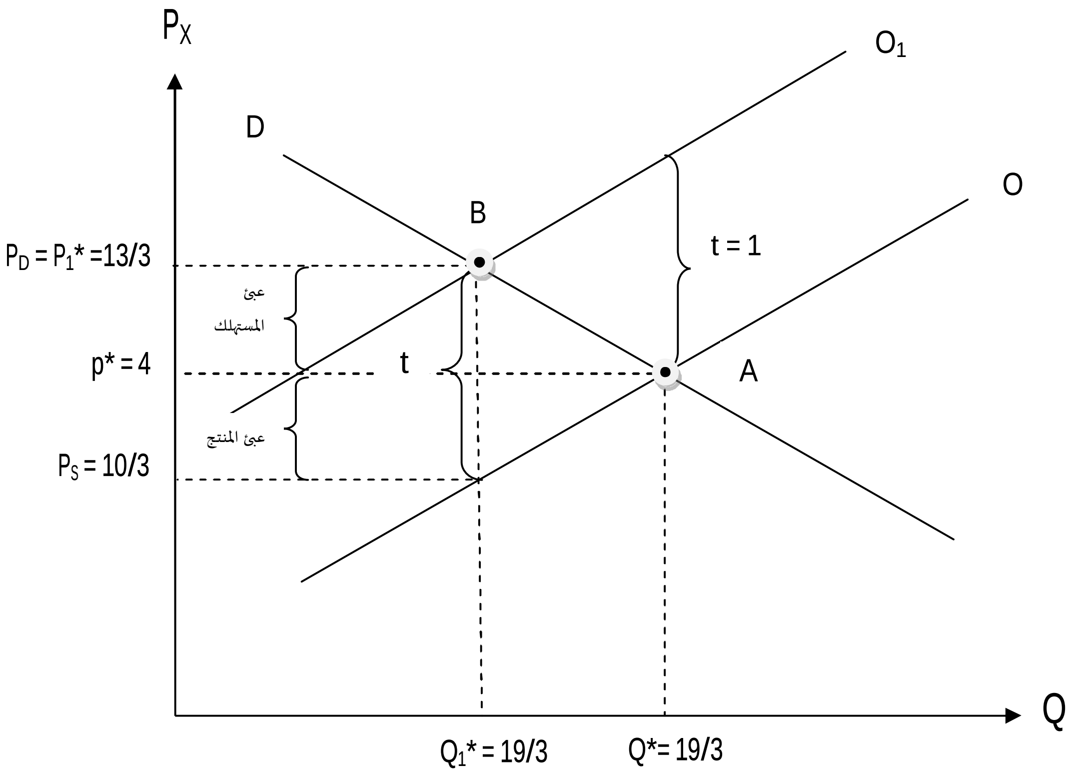
النموذج يصبح على النحو التالي:

$$\begin{cases} Q_D = 15 - 2p \\ Q_O = 3 + (P - 1) \end{cases}$$

نحصل على سعر و كمية توازن جديدتين:

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow \begin{cases} P_1^* = 13/3 \\ Q_1^* = 19/3 \end{cases}$$

3. حساب سعر المشتري (P_D) و سعر البائع (P_S) و العبء الذي يتحمله المنتج و المستهلك:



بعد فرض ضريبة على المنتج، منحنى العرض ينتقل نحو اليسار.

- سعر المشتري (P_D): هو نفسه سعر التوازن بعد فرض الضريبة: $P_D = P_1^* = 13/3$
- سعر البائع (P_S) : يساوي سعر المشتري – مقدار الضريبة: $P_S = P_D - t = 13/3 - 1$

$\Longrightarrow \quad P_S = 10/3$

- عبئ المستهلك(td): هو مقدار ما يتحمله المستهلك من الضريبة.

$td = P_D - P^* \Longrightarrow td = 13/3 - 4$

$\Longrightarrow td = 1/3$

المستهلك يتحمل 1/3 دج ، ما يمثل 33 % من الضريبة.

- عبئ المنتج (ts): هو مقدار ما يتحمله المنتج من الضريبة.

$ts = P^* - P_S \Longrightarrow ts = 4 - 10/3$

$\Longrightarrow ts = 2/3$

أو:

لدينا $td + ts = t$ و بالتالي $ts = t - td$ و منه $ts = 1 - 1/3 = 2/3$

المنتج يتحمل 2/3 دج، ما نسبة 67 % من الضريبة.

حل التمرين الرابع:

1. **حساب سعر التوازن (P^*) و كمية التوازن (Q^*) :**

لدينا النموذج التالي:

$$\begin{cases} Q_D = 15 - 4p \\ Q_o = 6p - 1 \end{cases}$$

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow 15 - 4p = 6P - 1 \Longrightarrow \begin{cases} P^* = 1{,}6 \\ Q^* = 8{,}6 \end{cases}$$

2. **بعد فرض ضريبة بقيمة 2 دج :**

الضريبة تدخل على السعر في دالة العرض بإشارة سالبة فيصبح كل p يساوي (p – t)، النموذج يصبح:

$$\begin{cases} Q_D = 15 - 4\,p \\ Q_O = 6\,(p - 2\,) - 1 \end{cases}$$

سعر و كمية توازن جديدتين:

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow \begin{cases} P_1^* = 2{,}8 \\ Q_1^* = 3{,}8 \end{cases}$$

حساب سعر المشتري (P_D) و سعر البائع (P_S) و العبء الذي يتحمله المنتج (ts) و المستهلك (td):

- **سعر المشتري:** $P_D = P_1^* = 2{,}8$
- **سعر البائع :** $P_S = P_D - t = 2{,}8 - 2 \Longrightarrow P_S = 0{,}8$
- **عبئ المستهلك (td):** $td = P_D - P^* \Longrightarrow td = 2{,}8 - 1{,}6$

$\Longrightarrow td = 1{,}2$

المستهلك يتحمل 1,2 دج ، ما يمثل 60 % من قيمة الضريبة.

- **عبئ المنتج (ts):** $ts = 1,6 - 0,8 \Longrightarrow ts = P^* - P_S$

$\Longrightarrow ts = 0,8$

المستهلك يتحمل 0,8 دج ، ما يمثل 40 % من قيمة الضريبة.

3. بعد منح إعانة بقيمة 2 دج (S = 2):

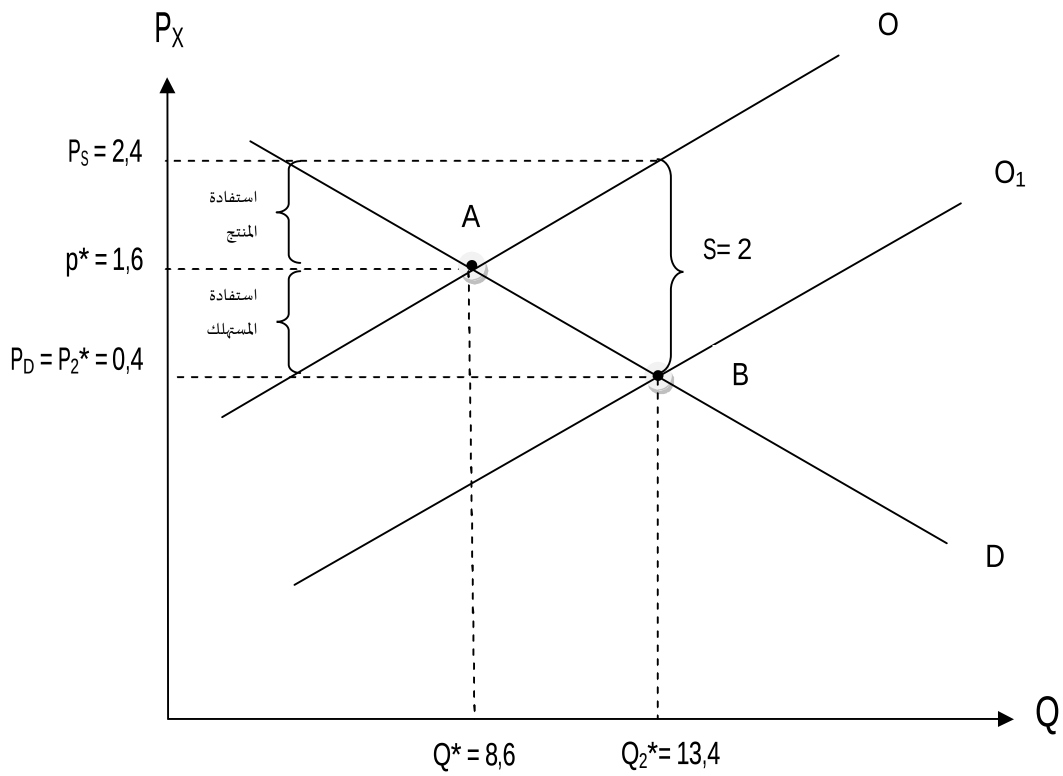
الإعانة تدخل على السعر في دالة العرض بإشارة موجبة فيصبح كل p يساوي (p + s)، النموذج يصبح:

$$\begin{cases} Q_D = 15 - 4p \\ Q_O = 6(p+2) - 1 \end{cases}$$

سعر و كمية توازن الجديدتين:

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow \begin{cases} P_2^* = 0,4 \\ Q_2^* = 13,4 \end{cases}$$

حساب سعر المشتري (P_D) و سعر البائع (P_S) و استفادة المنتج (SS) و المستهلك(Sd):



- **سعر المشتري** :يساوي سعر التوازن الجديد: $P_D = P_2^* = 0,4$
- **سعر البائع** : يساوي سعر المشتري + مقدار الإعانة (S)

$P_S = P_D + S = 0,4 + 2 \Longrightarrow P_S = 2,4$

- **استفادة المستهلك(Sd):** $Sd = 1{,}6 - 0{,}4 \Longrightarrow Sd = P^* - P_D$

$\Longrightarrow Sd = 1{,}2$

المستهلك يستفيد 1,2 دج ، ما يمثل 60 % من قيمة الإعانة.

- **استفادة المنتج (SS):** $SS = 2{,}4 - 1{,}6 \Longrightarrow SS = P_S - P^*$

$\Longrightarrow SS = 0{,}8$

المنتج يستفيد 0,8 دج ، ما يمثل 40 % من قيمة الإعانة.

ملاحظات:

- بعد فرض ضريبة نوعية فإن سعر التوازن يرتفع و كمية التوازن تنخفض.
- بعد منح إعانة فإن سعر التوازن ينخفض و كمية التوازن ترتفع.
- عبئ المنتج + عبئ المستهلك = مقدار الضريبة.
- استفادة المنتج + استفادة المستهلك = مقدار الإعانة.
- نسبة الاستفادة بالنسبة للمنتج و للمستهلك من الإعانة تساوي نسبة العبء الذي يتحمله كلا الطريفين من الضريبة.

حل التمرين الخامس:

1. **حساب سعر و كمية التوازن:**

لدينا النموذج التالي:

$$\begin{cases} Q_D = 10 - P \\ Q_O = 2p - 5 \end{cases}$$

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow 10 - P = 2p - 5 \Longrightarrow \begin{cases} P^* = 5 \\ Q^* = 5 \end{cases}$$

2. **بعد فرض ضريبة بقيمة 3 دج : حساب سعر و كمية التوازن الجديدتين ، سعر المشتري (P_D) و سعر البائع (P_S):**

سوف نستخدم طريقة ثانية غير تلك المستخدمة في حل التمارين السابقة:

لدينا : سعر المشتري (P_D) يمكن استخراجه من دالة الطلب، و سعر البائع (P_S) الذي يمكن استخراجه من دالة العرض بحيث: $P_D = 10 - Q$ و $P_S = \dfrac{Q+5}{2}$ إضافة إلى: $P_D - P_S = t$

لدينا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل:

$$\begin{cases} P_D = 10 - Q & \text{----------} \quad 1 \\ P_S = \dfrac{Q+5}{2} & \text{----------} \quad 2 \\ P_D - P_S = 3 & \text{----------} \quad 3 \end{cases}$$

بحل المعادلات الثلاثة نحصل على

$$\begin{cases} P_D = P_1^* = 7 \\ P_S = 4 \\ Q_1^* = 3 \end{cases}$$

إذن : سعر المشتري (P_D) الذي هو نفسه سعر التوازن بعد فرض الضريبة يساوي 7 و ن، سعر البائع يساوي 4 ون، و كمية التوازن بعد فرض الضريبة تساوي 3 و.

3. **بعد منح إعانة بقيمة 3 دج : حساب سعر و كمية التوازن الجديدتين، سعر المشتري (P_D) و سعر البائع (P_S):**

بنفس الطريقة المستخدمة في السؤال السابق، لدينا ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل، فقط بالنسبة للإعانة : $P_S - P_D = S$ بحيث:

$$\begin{cases} P_D = 10 - Q & \text{----------} \quad 1 \\ P_S = \dfrac{Q+5}{2} & \text{----------} \quad 2 \\ P_S - P_D = 3 & \text{----------} \quad 3 \end{cases}$$

بحل المعادلات الثلاثة

$$\begin{cases} P_D = P_2^* = 3 \\ P_S = 6 \\ Q_2^* = 7 \end{cases}$$

إذن: سعر المشتري (P_D) الذي هو نفسه سعر التوازن بعد منح الإعانة يساوي 3 و ن، سعر البائع يساوي 6 ون، و كمية التوازن بعد منح الإعانة تساوي 7 و.

4. **تحديد معدل الضريبة الأفضل الذي يعظم حصيلة إيرادات الدولة و مقدار الإيرادات:**

دالة العرض الجديدة بعد فرض الضريبة t هي : $Q_O = 2(p - t) - 5$

$$\begin{cases} Q_D = 10 - P \\ Q_O = 2p - 2t - 5 \end{cases}$$

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow 10 - P = 2p - 2t - 5 \Longrightarrow P_0 = 2/3\,t + 5$$

P_0: هو سعر التوازن الجديد بعد الضريبة t.

نعوض سعر التوازن الجديد في دالة الطلب لكي نجد كمية التوازن الجديدة.

$$Q_D = 10 - P \Longrightarrow Q_0 = 10 - (2/3\,t + 5) \Longrightarrow Q_0 = 10 - 2/3\,t - 5$$

كمية التوازن الجديدة (Q_0) بعد فرض الضريبة هي $Q_0 = 5 - 2/3\,t$. لتكن حصيلة إيرادات الدولة TR كما يلي:

$$TR = Q_0 \,.\, t \Longrightarrow TR = (5 - 2/3\,t).\ t = 5t - 2/3\,t^2$$

يصل الإيراد إلى حده الأعظم عندما ينعدم المشتق الأول:

$$TR = 5t - 2/3\,t^2$$

$$\frac{\partial\, TR}{\partial\, t} = \frac{-4}{3}t + 5 = 0 \Rightarrow t^* = \frac{15}{4}$$

معدل الضريبة الأمثل: $t^* = 3,73$

سعر التوازن المقابل لمعدل الضريبة الأمثل هو: $P_0^* = 2/3\,(15/4) + 5 = \mathbf{15/2}$

كمية التوازن المقابلة لمعدل الضريبة الأمثل هي: $Q_0^* = 5 - 2/3\,(15/4) = \mathbf{5/2}$

إيراد الدولة هو: $TR = Q_0^* \,.\, t^* = 5/2 \,.\, 15/4 = \mathbf{75/8}$

5. حساب فائض المنتج و المستهلك:

أ- رياضيا:

- **حساب فائض المنتج (SP):**

$$sp = p^* \cdot Q^* - \int_0^{Q^*} f(Q_O)dQ$$

$$sp = 5 \times 5 - \int_0^{Q^*} (\frac{Q}{2} + \frac{5}{2})dQ$$

$$sp = 25 - \int_0^5 \frac{Q^2}{4} + \frac{5}{2}Q$$

$$sp = 25 - \left(\frac{5^2}{4} + \frac{5}{2} \times 5\right) - (\frac{0^2}{4} + \frac{0}{2} \times 5)$$

SP = 6,25

- **حساب فائض المستهلك (SC):**

$$SC = \int_{0}^{Q^*} f(Q_D)dQ - p^* \cdot Q^*$$

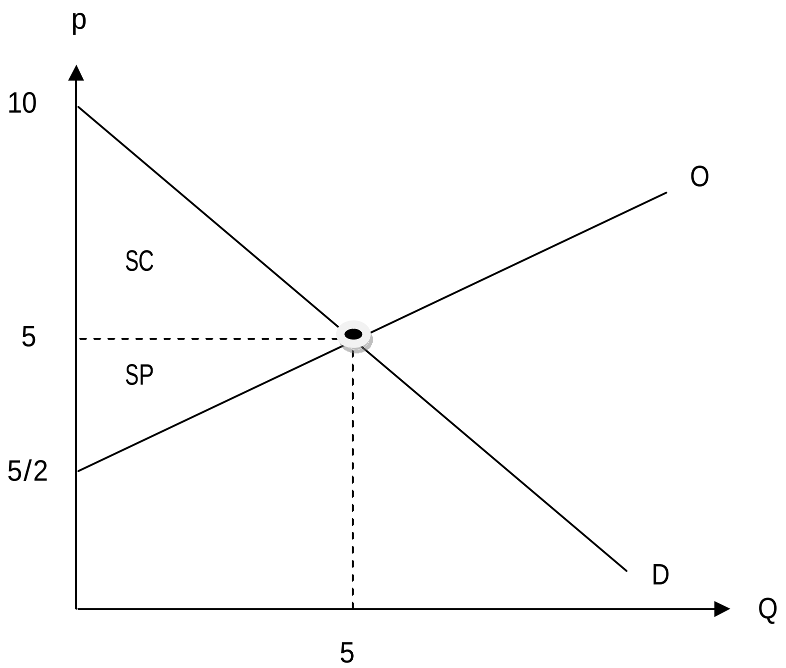
$$SC = \int_{0}^{Q^*} (10 - Q)dQ - 5 \times 5$$

$$SC = \int_{0}^{5} (10Q - \frac{Q^2}{2}) - 25$$

$$SC = \left((10 \times 5) - \frac{5^2}{2} \right) - ((0 \times 5) - \frac{0^2}{2}) - 25$$

SC = 12,5 UM

ب- بيانيا:



- **فائض المنتج:**

نمثل بيانيا المنحنى البياني الخاص بدالة العرض: يكفي نقطتين لتمثيله لأنه عبارة عن مستقيم.

النقطة الأولى (5/2 , 0) و النقطة الثانية هي نقطة التوازن (5 , 5). أما عن فائض المنتج فيساوي مساحة المثلث السفلي.

SP = ½ (5. (5 – 5/2)) = 25/4 = 6,25 UM

- **فائض المستهلك:**

نمثل بيانيا المنحنى البياني الخاص بدالة الطلب: يكفي نقطتين لتمثيله لأنه عبارة عن مستقيم.

النقطة الأولى (10 , 0) و النقطة الثانية هي نقطة التوازن (5 , 5). فائض المستهلك يساوي مساحة المثلث العلوي.

SC = ½ (5. 5) = 25/2 = 12,5 UM

حل التمرين السادس:

لدينا دالة الطلب: $P = 20 - 3Q$ ، و دالة العرض $P = 2Q$.

1. **تحديد سعر التوازن:**

$$Q_D = Q_O \Longrightarrow 20 - 3Q = 2Q \Longrightarrow \begin{cases} Q^* = 4 \\ P^* = 8 \end{cases}$$

2. **تحديد فائض المنتج و المستهلك:**

أ- **رياضيا:**

- **حساب فائض المنتج (SP):**

$$sp = p^* \cdot Q^* - \int_0^{Q^*} f(Q_O)dQ$$

$$sp = 8 \times 4 - \int_0^{Q^*} (2Q)dQ$$

$$sp = 32 - \int_0^{4} Q^2$$

$$sp = 32 - 4^2 - 0^2$$

SP= 16 UM

- **حساب فائض المستهلك (SC):**

$$SC = \int_0^{Q^*} f(Q_D)dQ - p^* \cdot Q^*$$

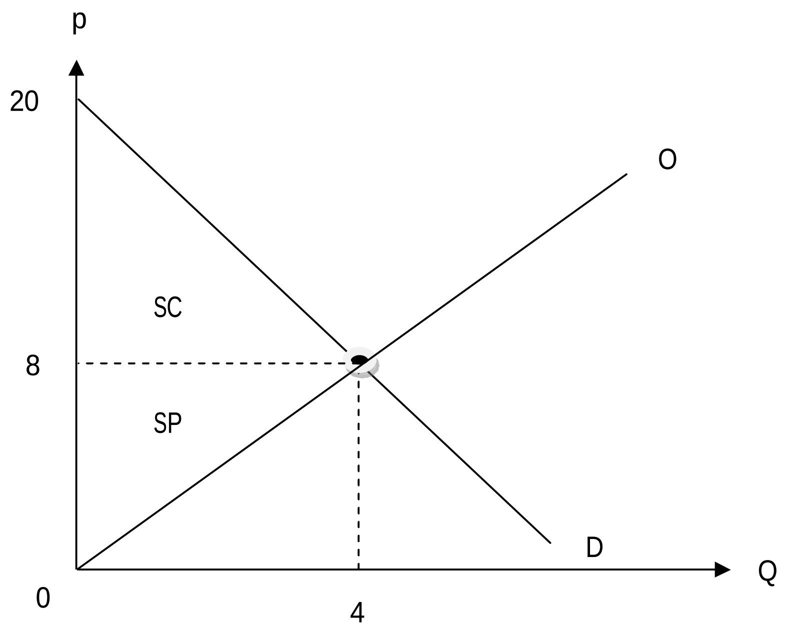
$$SC = \int_0^{Q^*} (20 - 3Q)dQ - 4 \times 8$$

$$SC = \int_0^{4} (20Q - \frac{3Q^2}{2}) - 32$$

$$SC = \left((20 \times 4) - \frac{3}{2} \times 4^2 \right) - \left((20 \times 0) - \frac{3}{2} \times 0^2 \right)$$

SC= 24 UM

ب- بيانيا:



- فائض المنتج: **SP = ½ (8 . 4) = 32/2 = 16 UM**

- فائض المستهلك: **SC = ½ (12 . 4) = 48/2 = 24 UM**

الفصل الثاني:

سلوك المستهلك

1. نظرية المنفعة الحدية (المنفعة القياسية):

1.1. مفهوم المنفعة Utilité: هي القدرة التي تملكها السلعة أو الخدمة لإشباع حاجة معينة.

2.1. المنفعة الكلية Utilité totale :

المنفعة الكلية تكتب U للسلعة X هي المنفعة التي يتحصل عليها الفرد نتيجة لاختياره كمية معينة من هذه السلعة. المنفعة الكلية تتغير وفقا للكمية المختارة من السلعة.

المنفعة الكلية هي معرفة بكمية محدودة من سلعة أو مجموعة من السلع الأخرى التي تدخل في دالة المنفعة.

3.1. دالة المنفعة La fonction d'utilité:

هي مستوى المنفعة U المرتبط بالسلعة X و هي دالة ل X : $U = f(X)$.

بالنسبة لسلعتين X و Y، هي مستوى الإشباع (المنفعة) المرتبط بالكمية المستهلة من السلعة X و الكمية المستهلكة من Y: $U = f(X, Y)$.

U : مستوى المنفعة. X: الكمية المستهلكة من السلعة X. Y: الكمية المستهلكة من السلعة Y.

4.1. المنفعة الحدية Utilité marginale :

المنفعة الحدية للسلعة X تكتب (Umg_X) هي المنفعة المحصل عليها من استهلاك وحدة إضافية من X . فالمنفعة الحدية هي الزيادة في المنفعة الكلية الناتجة عن استهلاك وحدة إضافية من هذه السلعة، إذا بقيت الكمية المستهلكة من السلع الأخرى ثابتة.

المنفعة الحدية Umg تقيس إذن تطور المنفعة الكلية المقابل لتغير صغير جدا في الكمية المستهلكة من السلعة.

تخضع المنفعة الحدية إلى **قانون المنفعة الحدية المتناقصة** (loi de Gossen) و الذي يشير إلى اتجاه المنفعة الحدية نحو الانخفاض مع زيادة الاستهلاك من السلعة.

مثال:

لنفترض أن المنفعة هي قياسية و كمية المنفعة المحققة نظير استهلاك السلعة X هي على النحو التالي:

الوحدات المستهلكة من X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المنفعة الكلية UT	0	4	10	20	28	34	38	40	40	38	33

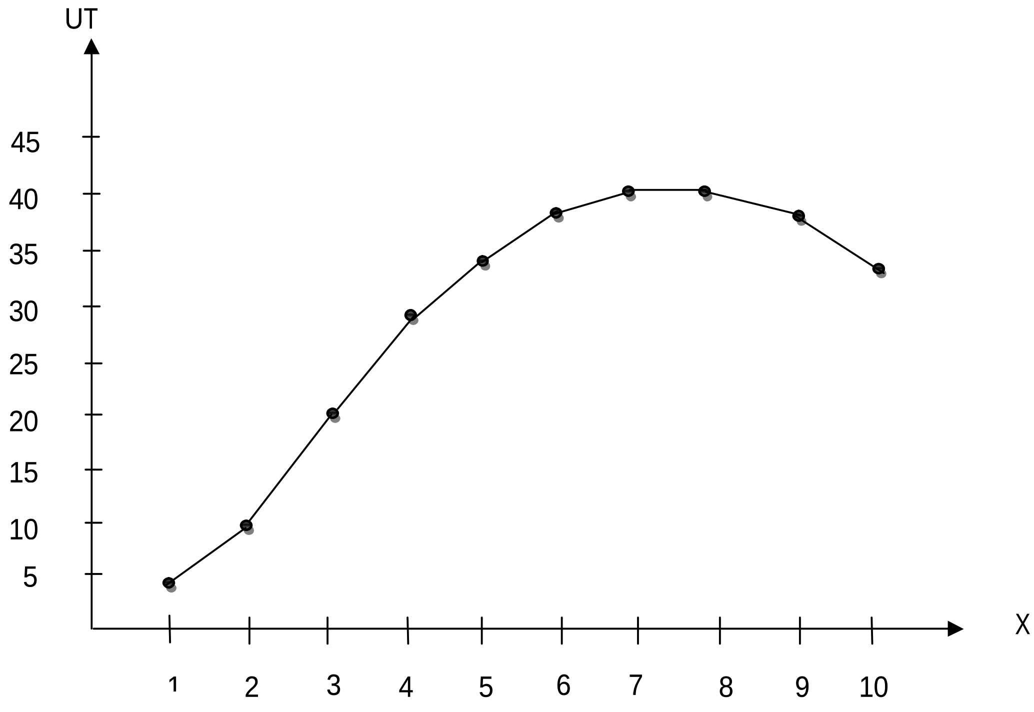
المطلوب:

- حساب المنفعة الحدية (Umg).
- التمثيل البياني للمنفعة الحدية و الكلية.

الحل:

$$Umg_x = \frac{\Delta UT}{\Delta X}$$

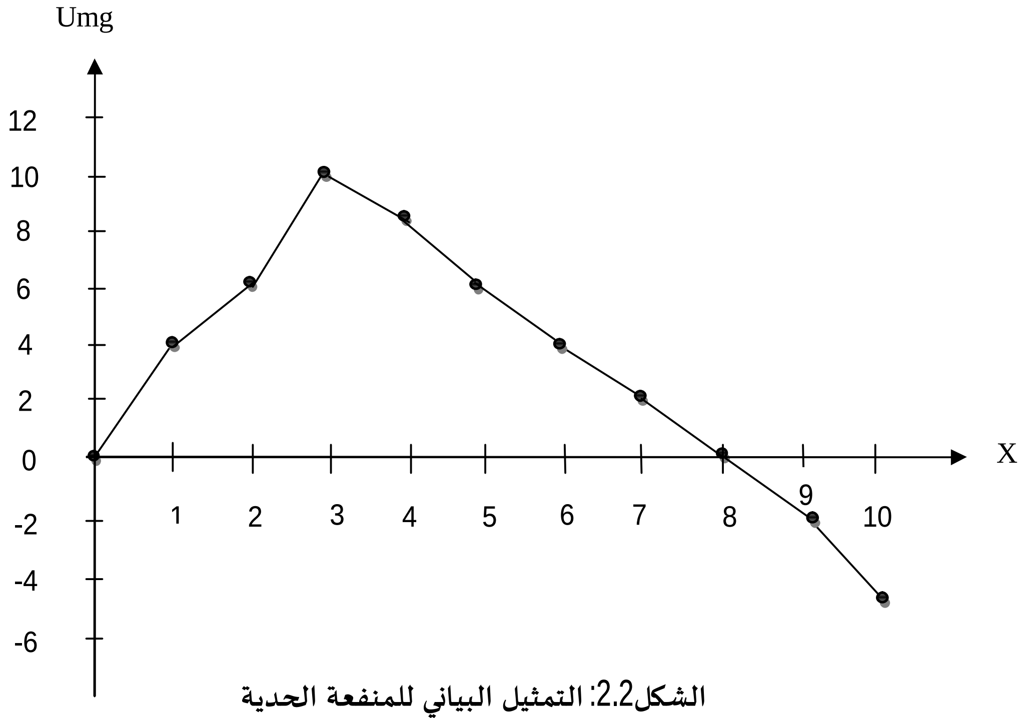
الوحدات المستهلكة من X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
المنفعة الكلية UT	0	4	10	20	28	34	38	40	40	38	33
المنفعة الحدية Umgx	0	4	6	10	8	6	4	2	0	-2	-5



الشكل 1.2: التمثيل البياني للمنفعة الكلية

نلاحظ من الجدول و الشكل أعلاه أن المنفعة الكلية تتزايد بمعدل متناقص مع زيادة الوحدات المستهلكة: تزداد بمعدل متزايد من الوحدة الأولى إلى الوحدة الثالثة، ابتداءا من الوحدة الرابعة بدأت المنفعة الكلية تزداد بمعدل متناقص، لتصبح ثابتة، ثم تتناقص ابتداءا من الوحدة التاسعة.

يمكن التعبير عن معدل التغير في المنفعة الكلية من خلال **المنفعة الحدية**.



الشكل2.2: التمثيل البياني للمنفعة الحدية

نلاحظ في الجدول و الشكل ما يلي:

- عندما تكون المنفعة الكلية متزايدة بمعدل متزايد تكون المنفعة الحدية متزايدة.
- عندما تكون المنفعة الكلية متزايدة بمعدل متناقص تكون المنفعة الحدية متناقصة.
- عندما تصل المنفعة الكلية إلى أعلى مستوى لها تكون المنفعة الحدية تساوي الصفر.
- عندما تكون المنفعة الكلية متناقصة تكون المنفعة الحدية سالبة.

5.1. توازن المستهلك:

- **التوازن في حالة سلعة واحدة:**

توازن المستهلك هو الحالة المثلى أو الاختيار الأمثل من طرف المستهلك. هذا الاختيار مرتبط بتعظيم منفعته الكلية.

يكون المستهلك في حالة توازن إذا كانت المنفعة المحصل عليها من آخر وحدة سلعية مستهلكة تساوي المنفعة مضحى بها لآخر وحدة ، أي الثمن الذي يدفعه المستهلك مقابل كل و حدة من السلعة.

المنفعة الحدية المكتسبة = المنفعة الحدية المضحى بها

أي: المنفعة الحدية المكتسبة = المنفعة الحدية لوحدة النقد * ثمن السلعة

من بين فرضيات نظرية المنفعة القياسية: يمكن للمستهلك قياس المنفعة المقابلة لوحدة النقد.

مثال:

نفرض أن مستهلك يمكنه قياس المنفعة المحققة من سلعة ما يستهلكها، و أن هذه السلعة يشتريها ب 30 دج للوحدة الواحدة، مع العلم أن منفعة وحدة النقد تساوي 2 وحدة منفعة و الجدول التالي يوضح المنافع المكتسبة من استهلاكه لوحدات متتالية من السلعة.

الكمية المشتراة و المستهلكة من السلعة X	1	2	3	4	5
المنفعة الكلية UT	100	180	240	290	320
المنفعة الحدية Umgx	100	80	60	50	30
المنفعة الحدية المضحى بها	60	60	60	60	60

توازن المستهلك

يكون المستهلك في حالة توازن عند الوحدة الثالثة حيث يتحقق شرط التوازن و هو أن المنفعة الحدية المكتسبة تساوي المنفعة الحدية المضحى بها.

لكن في الواقع الفرد لا يستهلك سلعة واحدة فقط، بل يستهلك أكثر من سلعة، فكيف يوزع دخله على هذه السلع حتى يتحصل على أكبر منفعة، أي كيف يكون المستهلك في حالة توازن ؟

- **التوازن في حالة مجموعة من السلع:**

بفرض أن المستهلك يستهلك سلعتين هما X و Y و نرمز لأسعار السلعتين ب P_X و P_Y على الترتيب و دخل المستهلك ب R. يكون المستهلك في حالة توازن بتحقق الشرطين التاليين:

الشرط الأول:

بالنسبة للسلعة X:

المنفعة الحدية المكتسبة (Umgx) = منفعة وحدة النقد * ثمن السلعة (Px)

إذن: منفعة وحدة النقد = $\frac{Umg_x}{P_x}$

نفس الشيء بالنسبة للسلعة Y:

منفعة وحدة النقد = $\frac{Umg_y}{P_y}$

بما أننا نشتري السلعتين بنفس وحدة النقد فإن **الشرط الأول** يمكن كتابته على النحو التالي:

$$\frac{Umg_x}{P_x} = \frac{Umg_y}{P_y}$$

يمكن تعميم هذا الشرط إلى n من السلع.

أما الشرط الثاني:

يجب على المستهلك أن ينفق كل الدخل، أي:

$$R = X\ P_X + Y\ P_Y$$

مثال:

نفرض أن مستهلك يستهلك سلعتين X و Y ، يشتريهما بالأسعار التالية: PX= 2 و PY=1 و الدخل المخصص للإنفاق R = 12 ، إذا كانت المنافع الكلية المكتسبة من السلعتين موضحة في الجدول التالي، ماهي كميات السلع التي تحقق توازن المستهلك.

الوحدات المستهلكة من السلعتين	0	1	2	3	4	5	6	7	8
المنفعة الكلية ل X : UTx	0	20	36	50	62	72	80	86	88
المنفعة الكلية ل Y : UTy	0	24	35	45	54	62	69	75	77
المنفعة الحدية ل X : Umgx	-	20	16	14	12	10	8	6	2
المنفعة الحدية ل Y : Umgy	-	24	11	10	9	8	7	6	2
$\frac{Umg_x}{P_x}$	-	10	8	7	6	5	4	3	1
$\frac{Umg_y}{P_y}$	-	24	11	10	9	8	7	6	2

من الجدول نلاحظ أن الشرط الأول يتحقق في أربع حالات هي (X= 1, Y= 3)، (X= 2, Y= 5)، (X= 3, Y= 6)، (X= 4, Y= 7)، و التوليفة التوازنية هي التوليفة التي ينفق عليها المستهلك دخله بالكامل لا أكثر و لا أقل، و هو الشرط الثاني أي : 2X + 1Y = 12 ، لنطبق الشرط الثاني على الحالات الأربعة:

- لما X= 1, Y= 3، بالتعويض في المعادلة نجد :5=(3)1 + (1)2، و هذا أقل من المبلغ المخصص للإنفاق، إذن هي توليفة غير توازنية.
- لما X= 2, Y= 5، بالتعويض في المعادلة نجد :9=(5)1 + (2)2، و هذا أقل من المبلغ المخصص للإنفاق، إذن هي توليفة غير توازنية.
- لما X= 3, Y= 6، الدخل المخصص لاقتناء هذه التوليفة هو :12=(6)1 + (3)2، هنا يتحقق الشرط الثاني لتوازن المستهلك، و منه التوليفة التوازنية هي (X= 3, Y= 6)، حيث يحقق بها المستهلك أكبر إشباع في حدود الدخل و الأسعار المتاحة. و تكون منفعة وحدة النقد عندها تساوي 7.
- لما X= 4, Y= 7، الدخل المخصص لاقتناء هذه التوليفة هو :15=(7)1 + (4)2، و هو أكبر من الدخل المتاح، إذن هذه التوليفة لا تحقق التوازن.

2. نظرية منحنيات السواء (المنفعة الترتيبية):

حسب هذه النظرية لم نعد بحاجة لقياس الرفاهية، Patito تبنى مقاربة ترتيبية يكون فيها الفرد قادر على ترتيب منفعته و ليس مجبرا على قياس مستوى منفعته.

1.2. خصائص دالة المنفعة:

دالة المنفعة هي العلاقة بين الكمية المستهلكة و الرضا المحقق من هذا الاستهلاك.

لنفترض أن المستهلك يستهلك سلعتين فقط X و Y. دالة المنفعة تكتب $U = f(X, Y)$ مع $X > 0$ و $Y > 0$.

ل n من السلع: $U = f(Q_1, Q_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, Q_n)$

لكي تكون المنفعة ترتيبية يفترض ما يلي:

أ- فرضية عدم التشبع(Hypothèse non-saturation):

حسب هذه الفرضية المستهلك لا يرفض أبدا كمية إضافية من السلعتين. لا يعرف أبدا التشبع على مستوى الاستهلاك.

إذا السلتين A و B تحتويان على نفس الكمية من X، و A تحتوي على كمية أكبر من Y، إذن حسب فرضية عدم التشبع: A مفضلة على B.

ب- دالة المنفعة هي دالة مستمرة:

هذه الخاصية لها أهمية من الناحية الاقتصادية، بحيث مهما تكن العلاقة بين X و Y الدالة هي معرفة.

كما لها أهمية من الناحية الرياضية كونها تسمح باستخدام الأدوات الرياضية: المشتقة.

دالة المنفعة يفترض أنها قابلة للاشتقاق مرتين.

ت- دالة المنفعة هي متزايدة مقارنة بالكمية المستهلكة:

فرضية عدم التشبع تعطي مشتقات جزئية لدالة المنفعة موجبة بالنسبة ل X و Y.

$$\frac{\partial \text{U}}{\partial \text{X}} = \lim_{\Delta \text{X} \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta \text{X}} > 0$$

ث- المشتقة الجزئية $\frac{\partial \text{U}}{\partial \text{X}}$ تساوي المنفعة الحدية ل X:

$\frac{\partial \text{U}}{\partial \text{X}}$ تساوي المنفعة الحدية التي تمثل الزيادة في المنفعة الناتجة عن زيادة الكمية المستهلكة من X بكمية صغيرة جدا $(\Delta X \to 0)$.

ج- دالة المنفعة هي مقعرة أو شبه مقعرة (concave ou au moins quasi-concave) :

قانون المنفعة الحدية المتناقصة (المنفعة الحدية هي موجبة لكن ترتفع بمعدل متناقص): تغير التغير هو سالب.

إذن المشتقة الثانية ل X تكون سالبة.

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial \text{X}}}{\partial \text{X}} = \frac{\partial^2 \text{U}}{\partial \text{X}^2} < 0$$

ملاحظة: دالة مقعرة أو شبه مقعرة هي دالة تقبل قيمة عظمى (أو قيمة دنيا).

أما عن الفرضيات المتعلقة باختيارات المستهلك، فيمكن ذكر فرضيتين:

- ✓ **الفرضية الأولى:** المستهلك قادر على الاختيار و على تصنيف (ترتيب) رغباته.
- ✓ **الفرضية الثانية: خاصية التعدي** Les choix sont transitifs أي:

$$A > B \text{ و } B > C \Rightarrow A > C$$

مثال 01:

نفترض أن مستهلك لا يستهلك إلا سلعتين X و Y ، و يتم التعبير عن اختياراته التي تجمع السلات (paniers) التي تعطي مستوى منفعة يساوي 100 وحدة منفعة و تلك التي تعطيه 150 و م في الجدول التالي:

السلات Paniers	X	Y	المنفعة المقابلة	TMS	السلات Paniers	X	Y	المنفعة المقابلة	TMS
A	3	18	100	-	A'	6	18	150	-
B	5	13	100	5/2	B'	8	13	150	5/2
C	7	10	100	3/2	C'	10,5	10	150	3/2,5
D	11	6	100	1	D'	16	6	150	4/5,5
E	16	3	100	3/5	E'	26	3	150	3/10

تمثل السلة A(3X, 18Y) ، B(5X, 13Y) ، A' (6X, 18Y) ، B'(8X, 13Y) ، ....الخ.

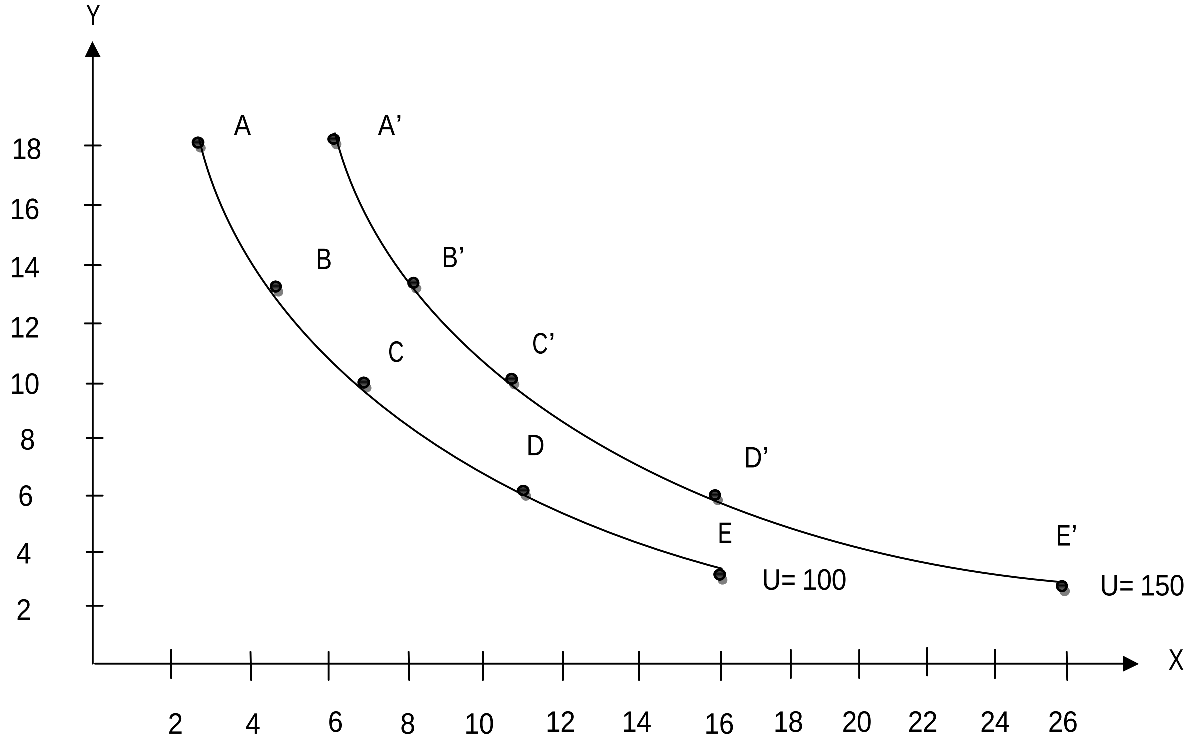
المستهلك يفضل A' على A لأن (حسب فرضية عدم التشبع) A' تحتوي على نفس الكمية من Y مع A، لكن على 3 وحدات إضافية من X.

المستهلك هو سواء (indifférent) بين A و B لأن السلتين يمنحانه نفس الإشباع (100 وحدة منفعة)، نفس الشيء بالنسبة ل A' و B' (تمنحانه نفس الإشباع 150 و م).

نلاحظ أن السلات A(3, 18) ، B(5, 13) ، C(7, 10) ، D و E تعطي للمستهلك نفس المنفعة (100 و م) . هو لا يفرق بين هذه السلات (هو سواء)، يمكننا تمثيل هذا الاختيار المتساوي للسلات في شكل منحنى بياني يسمى **منحنى السواء.**

نمثل بيانيا السلات، ثم نربط بين النقاط نحصل على المنحنى الذي يعطي مختلف العلاقات أو التوليفات X و Y التي تعطي نفس المنفعة للمستهلك (100 و م) .

كذلك يمكننا التمثيل بيانيا للسلات A' ، B'، C'، D' و E' لنحصل على المنحنى الذي يعطي مختلف العلاقات أو التوليفات X و Y التي تعطي نفس المنفعة للمستهلك (150 و م) .



الشكل3.2: التمثيل البياني لمنحنيات السواء

- على طول منحنى السواء، المنفعة لا تتغير، إذن dU=0 .
- معادلة منحنى السواء هي من الشكل: Y= f (X).
- هذا المنحنى له ميل سالب، إذا ارتفعت X فإن Y تنخفض لأن المنفعة تكون ثابتة على طول منحنى السواء. إذا ارتفعت X و Y ارتفعت أو بقيت ثابتة، حسب فرضية عدم التشبع فان المنفعة ترتفع و بالتالي ننتقل إلى منحنى سواء آخر. إذن على نفس منحنى السواء مستوى المنفعة هو ثابت (إذا ارتفعت X فان Y تنخفض و إذا انخفضت X ترتفع Y).
- ميل منحنى السواء يقاس ب $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$.

ميل الظلع AB يساوي:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{(Y_B - Y_A)}{(X_B - X_A)} = \frac{13-18}{5-3} = \frac{-5}{2}$$

هذا الميل لمنحنى السواء يتغير في كل نقطة من المنحنى، و يمثل معدل التبادل (الإحلال) ل Y ب X ، أي: بكم يجب تعويض وحدة من X بوحدات من Y حتى نبقى على نفس المنحنى (نفس الإشباع). هذا المعدل يسمى **المعدل الحدي للإحلال** (TMS).

المعدل الحدي للإحلال هو سالب الإشارة و هو ما يعكس الميل السالب لمنحنى السواء، لكن في غالب الأحيان يتم التعبير عنه بالقيمة المطلقة.

مثال 02:

الجدول التالي يبين التوليفات السلعية لثلاث منحنيات سواء:

i1		i2		i3		i1	i2	i3
X	Y	X	Y	X	Y	TMS_{XY}	TMS_{XY}	TMS_{XY}
2	13	3	12	5	12	-	-	-
3	6	4	8	5,5	9	7	4	6
4	4,5	5	6,3	6	8,3	1,5	1,7	1,4
5	3,5	6	5	7	7	1	1,3	1,3
6	3	7	4,4	8	6	0,5	6,6	1
7	2,7	8	4	9	5,4	0,3	0,4	0,6

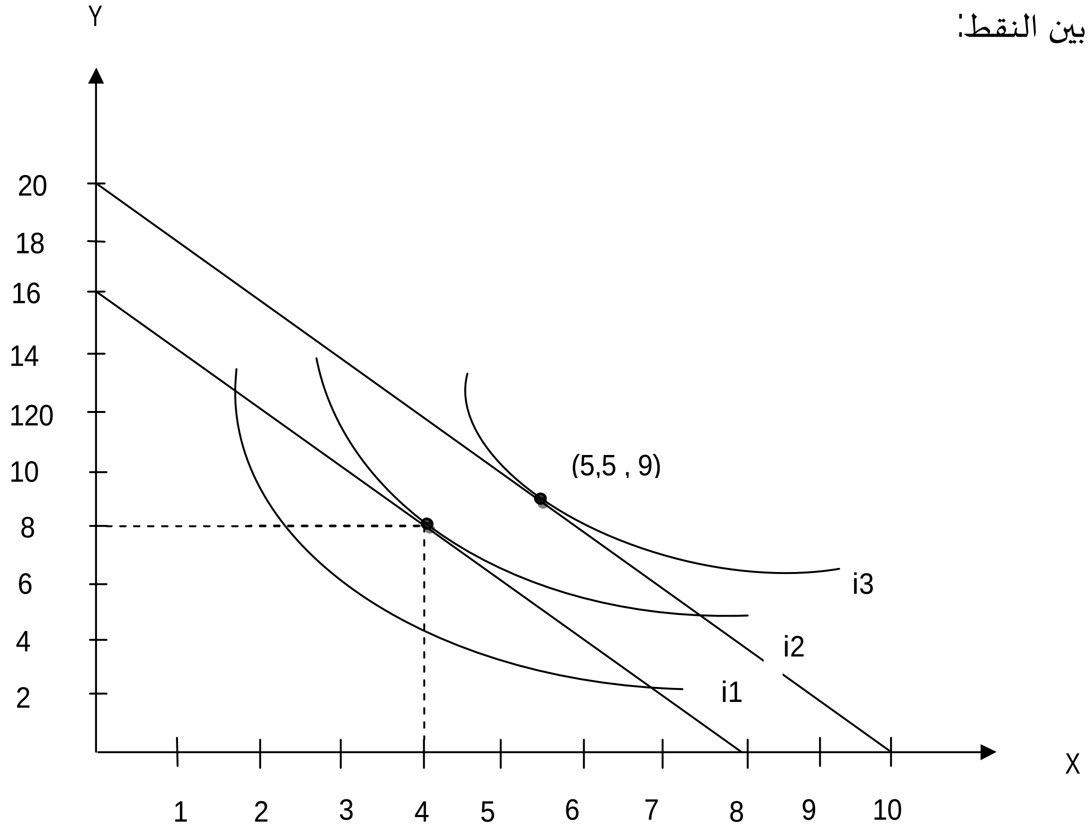
المطلوب:

1. رسم منحنيات السواء هذه في محاور إحداثيات.
2. ما هو الفرق بين منحنيات السواء الثلاثة؟
3. حساب المعدل الحدي للإحلال.
4. إذا كان سعر السلعة X يساوي 2 دج و سعر السلعة Y يساوي 1 دج ، أرسم خط الميزانية إذا علمت أن حجم الدخل المنفق على السلعتين هو 16 دينار، ثم عين التوليفة التي يكون عندها المستهلك في حالة توازن.
5. إذا أصبح الدخل المنفق 20 دج، أرسم خط الميزانية و عين التوليفة الجديدة التي يكون عندها المستهلك في حالة توازن.

الحل:

1. **رسم منحنيات السواء:**

للقيام بذلك نرسم جميع التوليفات X و Y المنتمية إلى نفس المنحنى على محاور إحداثيات ثم نوصل بين النقط:



2. يمثل المنحنى i3 مستوى منفعة كلية أكبر من مستوى المنفعة الذي يمثله كل من المنحنيين i2 و i1 . و يمثل المنحنى i2 مستوى منفعة أكبر من مستوى المنفعة الكلية الذي يمثله منحنى السواء i1 .
3. **حساب المعدل الحدي للإحلال**TMS :

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta \mathrm{X}}$$

مثال: $X_1=1$ ثم أصبح $X_2=3$، $Y_1= 13$ ثم أصبح $Y_2=6$، المعدل الحدي للإحلال بين هاتين النقطتين يحسب كما يلي:

$$TMS = \frac{\Delta Y}{\Delta \mathrm{X}} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{6-3}{3-2} = -7$$

باقي النتائج هي محسوبة في نفس الجدول أعلاه.

تفسر هذه النتيجة $TMS = -7$ ، بأن زيادة الكمية المستهلكة من السلعة X بوحدة واحدة تستوجب تخفيض Y بقيمة 7 وحدات حتى نبقى على نفس منحنى السواء أو عند نفس المنفعة.

في الحالة العامة:

زيادة الكمية المستهلكة من السلعة X بوحدة واحدة تستوجب تخفيض Y بقيمة TMS حتى نبقى على نفس منحنى السواء أو عند نفس المنفعة.

4. رسم خط الميزانية:

لدينا: PX=2، PY=1، R=16

المستهلك ينفق دخله لشراء كميات معينة من السلعتين X و Y (مع اشتراط إنفاق كل الدخل)، و بالتالي دخل المستهلك يصبح يساوي: $R = XP_X + YP_Y$ ، هذه المعادلة الأخيرة يطلق عليها **قيد الميزانية**، هذه المعادلة هي خطية و بالتالي يمكن تمثيلها بخط مستقيم يسمى **خط الميزانية** و التي تستخرج معادلته من قيد الميزانية.

معادلة خط الميزانية الذي هو عبارة عن خط مستقيم سالب الميل هي من الشكل:

$$Y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y} X$$

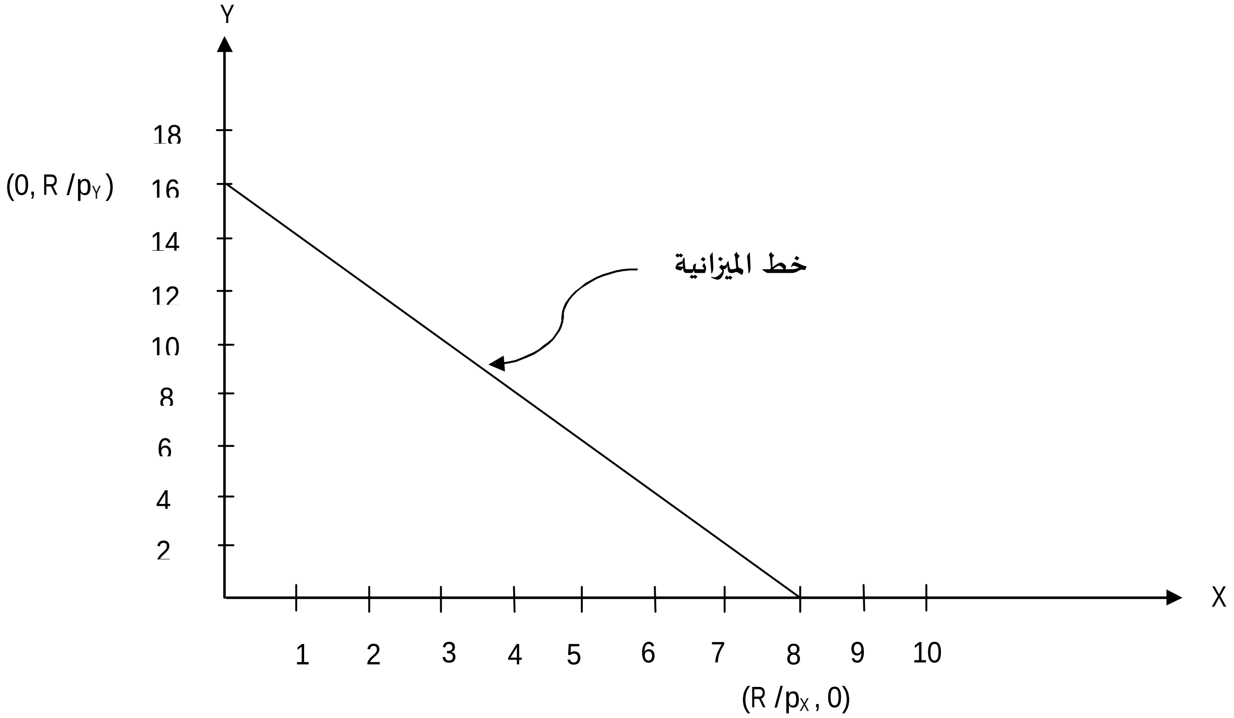
ميل خط الميزانية هو: $-\frac{P_X}{P_Y}$

يكفي نقطتين لتمثيل خط الميزانية: النقطة الأولى $(X=0, Y = R/P_Y)$، و النقطة الثانية $(Y=0, X = R/P_X)$.

بالنسبة لمثالنا معادلة خط الميزانية هي:

$$Y = \frac{16}{1} - \frac{2}{1} X \Rightarrow Y = 16 - 2X$$

النقطتين هما (0, 16) و (8, 0) .

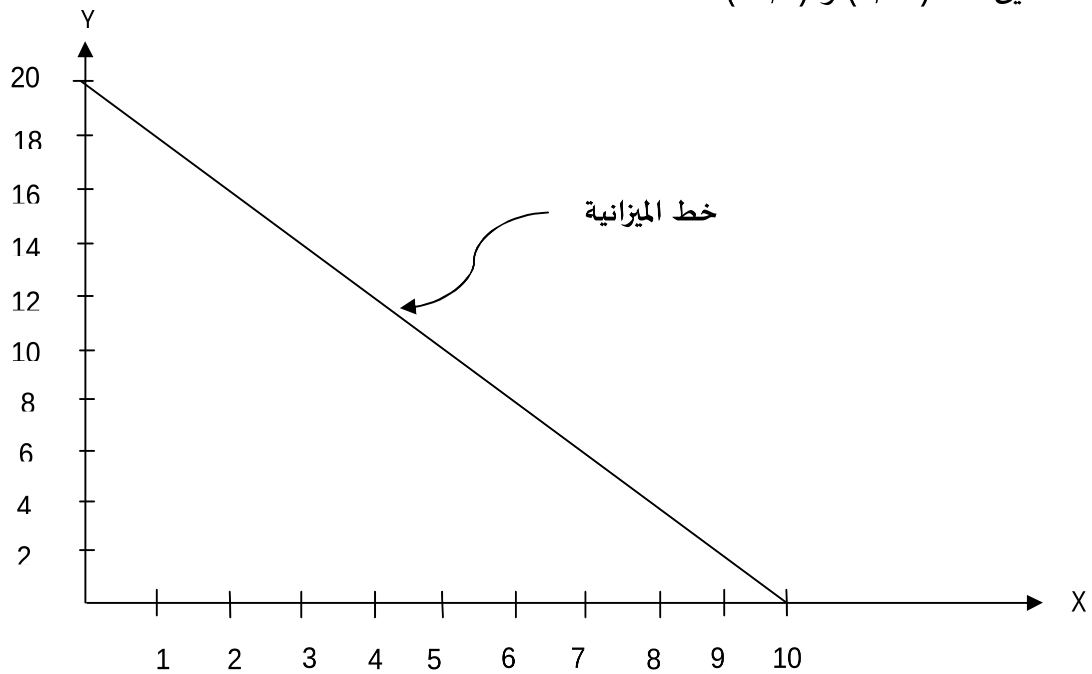


5. رسم خط الميزانية لما أصبح الدخل يساوي 20 (R=20) مع ثبات أسعار السلعتين:

معادلة خط الميزانية تصبح:

$$Y = \frac{20}{1} - \frac{2}{1}X \Longrightarrow Y = 20 - 2X$$

النقطتين هما (0, 20) و (10, 0) .



6. تحديد التوليفة التي تحقق التوازن:

يتحقق التوازن بيانيا لما يكون منحنى السواء مماس لخط الميزانية (في هذه النقطة يكون ميل منحنى السواء TMS مساويا لميل خط الميزانية)، و من التمثيل البياني، التوليفة السلعية التي تحقق التوازن عند الدخل يساوي 16 هي(X , Y)=(4 , 8) و التوليفة السلعية الموافقة للدخل يساوي 20 هي:

(X , Y) = (5,5 , 9) .

3. تمارين عن سلوك المستهلك :

التمرين الأول:

يعتمد مستهلك لإشباع حاجاته على استهلاك السلعتين X و Y ، حيث يقدر سعر السلعة X ب 18 وحدة نقدية بينما يقدر سعر السلعة Y ب 12 وحدة نقدية.

1. إذا علمت أن معادلة مستوى الإشباع الذي يرغب في الحصول عليه (منحنى السواء) تكتب: $Y = \frac{6}{X}$، حدد التوليفة الاستهلاكية التي تحقق له أقصى إشباع .
2. أحسب الدخل الذي يجب تخصيصه للاستهلاك.
3. تحقق من نقطة التوازن بيانيا.

التمرين الثاني:

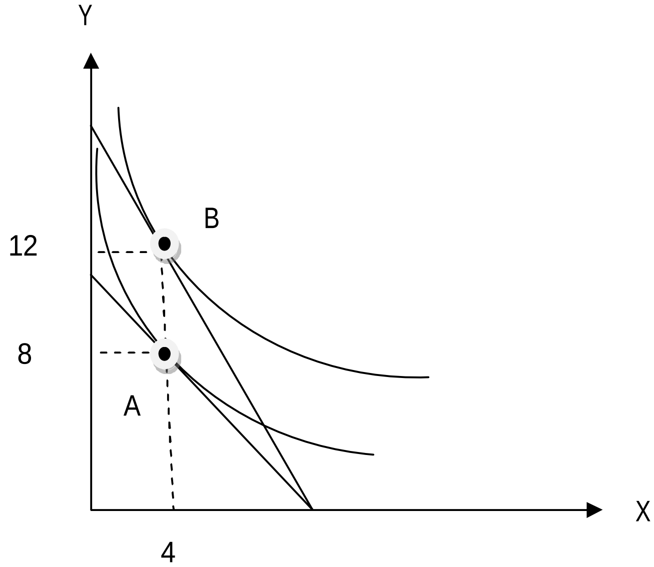
إذا كان لدى مستهلك دالة المنفعة التالية: UT = (Y- 1)X

و كان دخله مقدر ب 101و ن، حيث يوزعه في شراء سلعتين X و Y أسعارهما على التوالي: 2 و 1 ون.

1. أرسم بيانيا منحنى استهلاك الدخل إذا علمت أن دخل هذا المستهلك انخفض إلى 61 ون ثم ارتفع إلى 121 ون حيث أدى ذلك إلى تغير المنفعة على التوالي من 1250 و م إلى 450 و م إلى 1800 و م.
2. ارسم المنحنيات المستنتجة من هذا المنحنى و عرفها.

التمرين الثالث:

إذا كان لدينا المنحنى الموالي:



1. ما هو سبب انحراف خط الميزانية بالشكل الموضح؟
2. إذا ربطنا بين نقاط التوازن المختلفة على أي منحنى نحصل؟ عرفه.
3. مثل بيانيا المنحنيات المستنتجة من هذا المنحنى إذا علمت أن في النقطة A كان سعر السلعة Y يقدر ب 10 ون ثم انخفض في النقطة B إلى 4 ون.
4. أعط تفسيرا لشكل المنحنيين؟

التمرين الرابع:

لتكن لدينا دالة المنفعة التالية: $UT = 2XY$

X، Y هما السلعتان المستهلكتان.

المطلوب:

1. اشرح باختصار ماذا نعني بالسلوك العقلاني للمستهلك؟
2. نفرض أن سعر السلعة X يساوي 2 و سعر السلعة Y يساوي 1 و أن دخل المستهلك المتاح للسلعتين يساوي 10. متى يكون هذا المستهلك في حالة إشباع تام؟
3. نفترض أن أسعار السلعتين هما: $P_X = 2$ و $P_Y = 2$. كم سوف يكون عليه الدخل المنفق على السلعتين من أجل الحصول على نفس الإشباع المحقق في المطلب الثاني؟

التمرين الخامس:

لدينا: $UT = X^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{4}}$

UT : المنفعة الكلية التي يحصل عليها المستهلك من استهلاكه للسلعتين X و Y.

المطلوب:

1. أحسب مقدار المنفعة التي يحصل عليها المستهلك عند النقطة A إحداثياتها X= 4 و Y= 1 .
2. أحسب مقدار الزيادة في المنفعة عندما تزيد الكمية المستهلكة من السلعة X بمقدار وحدة واحدة.
3. حدد المعدل الحدي للإحلال TMS_{XY} و أحسب قيمته عند النقطة A .
4. بافتراض أن سعر السلعتين هو: $P_X = 1$ و $P_Y = 2$ و دخل المستهلك R = 10 . متى يكون هذا المستهلك في حالة توازن؟
5. نفرض أن الدخل النقدي لهذا المستهلك هو R، و أن أسعار السلعتين هما P_X و P_Y . أوجد دالتي الطلب لكل من السلعتين بدلالة الدخل النقدي و أسعارهما؟ اشرح النتيجة؟ ما نوع السلعة؟

التمرين السادس:

إذا أخذت دالة المنفعة الكلية لمستهلك ما الشكل التالي:

$$\mathbf{U_T = 12\,X + 30\,Y - 0,5X^2 - 0,5Y^2}$$

و كانت أسعار السلعتين X و Y على التوالي : 2 و 3 و دخل المستهلك R=50 .

1. حدد نقطة توازن المستهلك.
2. بكم تتغير المنفعة الكلية إذا ارتفع الدخل بوحدة نقدية واحدة؟

التمرين السابع:

لدينا دالة الإشباع من الشكل: S = 2X + XY + Y + 2

بينما معادلة قيد الميزانية هي: $\boldsymbol{Y = \frac{51}{5} - \frac{2}{5}\,X}$

1. أوجد دوال الطلب على السلعتين.
2. ماهي طبيعة العلاقة بين السلعتين؟

3. بين نوع السلعتين؟

التمرين الثامن:

نفترض أن لدى مستهلك إمكانية الاختيار بين سلعتين X و Y، و كانت منحنيات السواء لهذا المستهلك متميزة بميل يساوي $-\frac{Y}{X}$.

1. أثبت أن الطلب على X مستقل تماما عن سعر السلعة Y.
2. حدد المعدل الحدي للإحلال و أحسب قيمته إذا كان $P_X=1$ ، $P_Y=3$.

التمرين التاسع:

لدينا المعطيات التالية:

$$U = X\,Y\;;\; P_X = 2\;;\; P_Y = 3\,; R = 24$$

1. أحسب نقطة توازن المستهلك.
2. إذا تغير سعر السلعة X و أصبح يساوي وحدة نقدية واحدة، أحسب التوازن الجديد للمستهلك. بين كل من الأثر الكلي، أثر الدخل و أثر الإحلال بيانيا و حسابيا.

التمرين العاشر:

لدينا المعطيات التالية:

$$\begin{cases} U = 20XY \\ P_X = 10;\; P_Y = 5\,; R = 100 \\ P_X \longrightarrow {P_X}' = 5 \end{cases}$$

1. حدد الأثر الكلي، أثر الدخل و أثر الإحلال حسابيا.

4. حل تمارين سلوك المستهلك:

حل التمرين الأول:

1. تحديد التوليفة الاستهلاكية التي تحقق التوازن:

يتحقق التوازن لما يكون ميل منحنى السواء (TMS) مساويا لميل خط الميزانية:

ميل منحنى السواء (TMS) يساوي: $\frac{\partial Y}{\partial X}$ من معادلة منحنى السواء (دالة المنفعة)، و بالتالي:

لدينا دالة المنفعة (معادلة منحنى السواء) تساوي: $Y = \frac{6}{X}$ ، و منه:

$$TMS = \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{6}{X^2}$$

ميل خط الميزانية يساوي: $\frac{\partial Y}{\partial X}$ من معادلة خط الميزانية، لدينا :

$$Y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y}X \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial X} = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{18}{12} = -\frac{3}{2}$$

بمساواة ميل منحنى السواء مع ميل خط الميزانية نحصل على:

$$-\frac{6}{X^2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow X^2 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{X = 2}$$

و بتعويض X في دالة منحنى السواء نحصل علىY:

$$Y = \frac{6}{X} \Rightarrow Y = \frac{6}{2} \Rightarrow \boldsymbol{Y = 3}$$

الثنائية التي تحقق التوازن هي : $(X^*, Y^*) = (2, 3)$

2. الدخل الذي يجب تخصيصه للاستهلاك:

يكفي تعويض القيم التوازنية ل X و Y في قيد الميزانية لنحصل على:

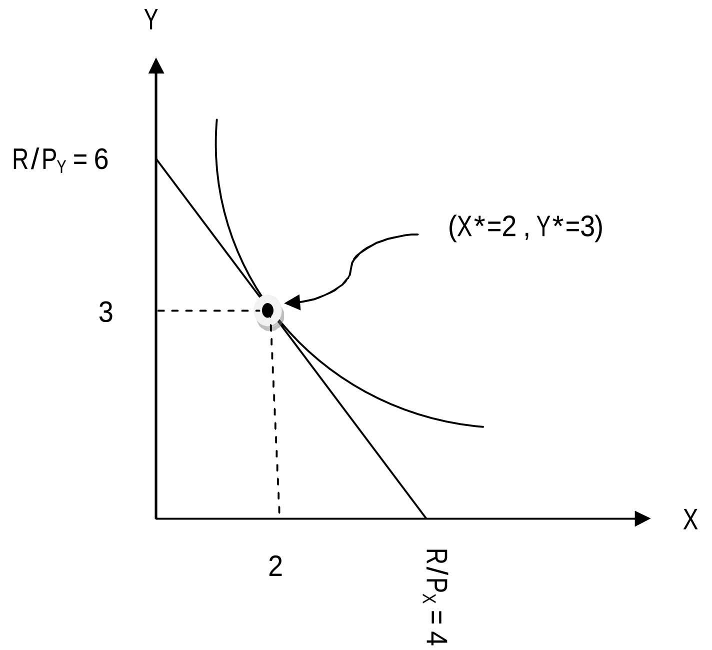
$$R = X\,P_X + Y\,P_Y \Rightarrow R = 2 \cdot 18 + 3 \cdot 12 = 72$$

الدخل الذي يجب تخصيصه أو ينفقه المستهلك لتحقيق التوازن هو 72 وحدة نقدية.

3. التحقق من نقطة التوازن بيانيا:

يتحقق التوازن بيانيا لما يكون منحنى السواء مماس لخط الميزانية (نقطة التماس هي نقطة التوازن)، سنرسم منحنى السواء (دالة المنفعة) و خط الميزانية (ميزانية المستهلك) على معلم متعامد و متجانس:

النقاط المساعدة لرسم خط الميزانية	النقاط المساعدة لرسم منحنى السواء
$X = 0 \Rightarrow Y = \frac{R}{P_Y} \Rightarrow Y = \frac{72}{12} = 6$ $Y = 0 \Rightarrow X = \frac{R}{P_X} \Rightarrow X = \frac{72}{18} = 4$	$X = 1 \Rightarrow Y = 6$ $X = 2 \Rightarrow Y = 3$ $X = 3 \Rightarrow Y = 2$ $X = 6 \Rightarrow Y = 1$



نقطة التماس (نقطة التوازن) هي (X*=2 , Y*=3) و بالتالي هي نفسها المتحصل عليها في المطلوب الأول.

حل التمرين الثاني:

$$UT = (Y-1)X$$

1. **التمثيل البياني لمنحنى استهلاك الدخل:** هو المنحنى الذي يربط بين نقاط التوازن المختلفة إذا تغير الدخل.

أ- النقطة الأولى: تمثل نقطة التوازن الأولى.

- منحنى السواء الأول: المقابل لمنفعة تقدر ب 1250 وحدة منفعة :

$$UT = 1250 \Rightarrow 1250 = (Y-1)X$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1250}{X} + 1$$ ....(1) *معادلة منحنى السواء*

النقاط المساعدة لرسم منحنى السواء.

X	10	20	30	40	50
Y	126	63,5	42,66	32,25	26

- خط الميزانية الأول: المقابل لدخل يقدر ب 101 و ن ($R=101, P_X=2, P_Y=1$):

$$Y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y}X \Rightarrow Y = \frac{101}{1} - \frac{2}{1}X$$

$$\Rightarrow Y = 101 - 2X$$ ....(1)معادلة خط الميزانية

النقاط المساعدة لرسم خط الميزانية:

$Y = 0 \Rightarrow X = \frac{R}{P_X} \Rightarrow X = \frac{101}{2} = 50{,}5$ B (50,5 ; 0)	$X = 0 \Rightarrow Y = \frac{R}{P_Y} \Rightarrow Y = 101$ A (0 ; 101)

ب- النقطة الثانية: تمثل نقطة التوازن الثانية.

- منحنى السواء الثاني: المقابل لمنفعة تقدرب 450 وحدة منفعة:

$$UT = 450 \Rightarrow 450 = (Y-1)X$$

$$\Rightarrow Y = \frac{450}{X} + 1$$ ....(2) *معادلة منحنى السواء*

النقاط المساعدة لرسم منحنى السواء.

X	10	20	30	40	50
Y	46	23,5	16	12,25	10

- خط الميزانية الثاني: المقابل لدخل يقدر ب 61 و ن ($R=61, P_X=2, P_Y=1$):

$$Y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y}X \Rightarrow Y = \frac{61}{1} - \frac{2}{1}X$$

$\Rightarrow Y = 61 - 2X$ ....(2) معادلة خط الميزانية

النقاط المساعدة لرسم خط الميزانية:

$Y = 0 \Rightarrow X = \frac{R}{P_X} \Rightarrow X = \frac{61}{2} = 30{,}5$ B (30,5 ; 0)	$X = 0 \Rightarrow Y = \frac{R}{P_Y} \Rightarrow Y = 61$ A (0 ; 61)

ت- النقطة الثالثة: تمثل نقطة التوازن الثالثة.

- منحنى السواء الثالث: المقابل لمنفعة تقدر ب 1800 وحدة منفعة:

$$UT = 1800 \Rightarrow 1800 = (Y - 1)X$$

$\Rightarrow Y = \frac{1800}{X} + 1$ ....(3) *معادلة منحنى السواء*

النقاط المساعدة لرسم منحنى السواء:

X	10	20	30	40	50
Y	181	91	61	46	37

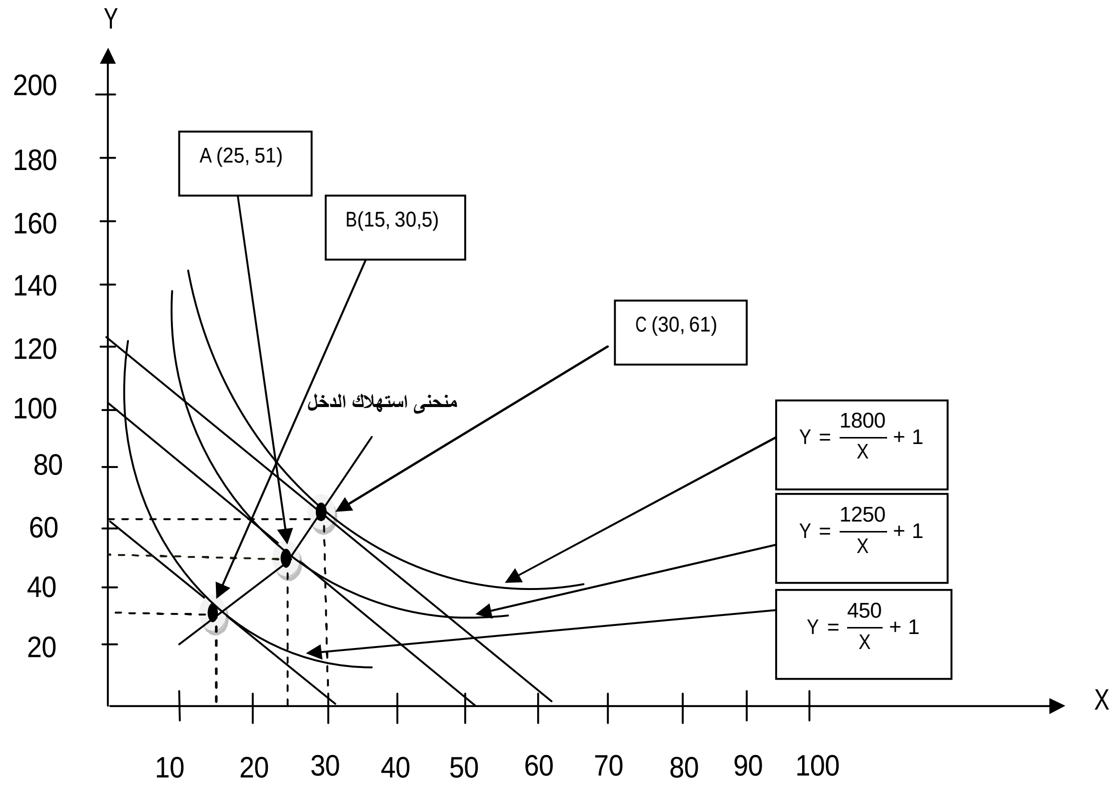
- خط الميزانية الثالث: المقابل لدخل يقدر ب 121 و ن ($R=121$, $P_X=2$, $P_Y=1$):

$$Y = \frac{R}{P_Y} - \frac{P_X}{P_Y}X \Rightarrow Y = \frac{121}{1} - \frac{2}{1}X$$

$\Rightarrow Y = 121 - 2X$ ....(3) معادلة خط الميزانية

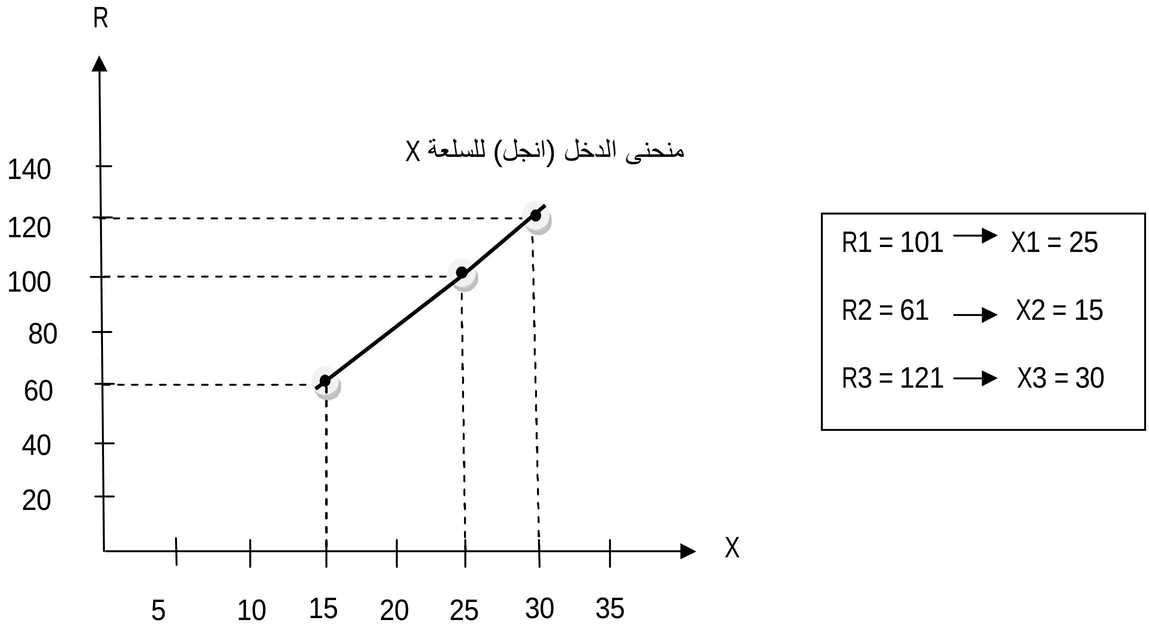
النقاط المساعدة ارسم خط الميزانية:

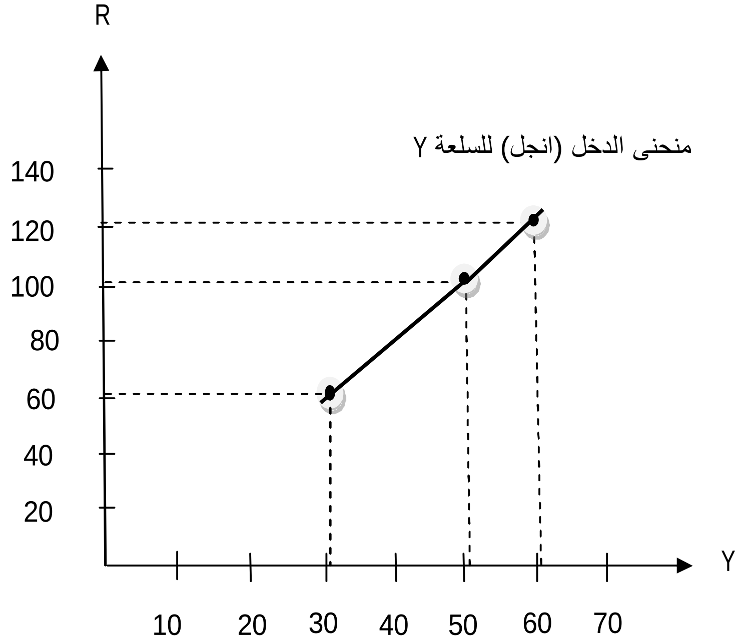
$Y = 0 \Rightarrow X = \frac{R}{P_X} \Rightarrow X = \frac{61}{2} = 60{,}5$ B (60,5, 0)	$X = 0 \Rightarrow Y = \frac{R}{P_Y} \Rightarrow Y = 121$ A (0, 121)



2. **رسم المنحنيات المستنتجة من هذا المنحنى و تعريفها:**

المنحنيات المستنتجة هي منحنيات **انجل** و هو المنحنى الذي يوضح التغير في الكميات المستهلكة من سلعة معينة إذا تغير دخل المستهلك.





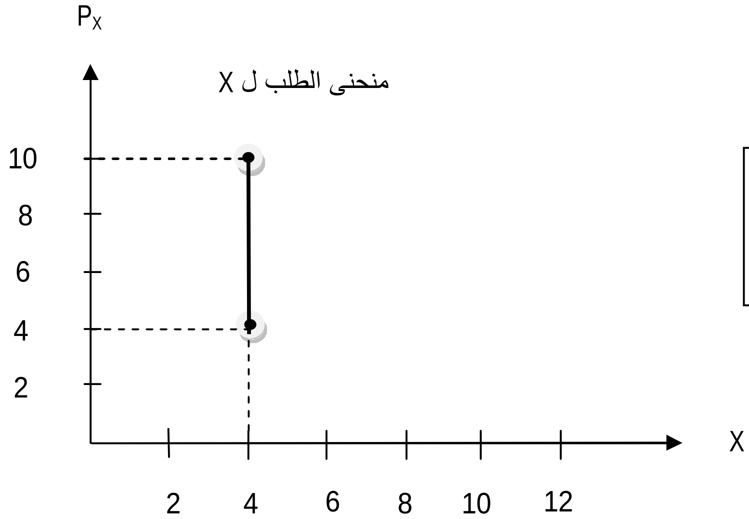
$R1 = 101 \longrightarrow y1 = 51$

$R2 = 61 \longrightarrow y2 = 30,5$

$R3 = 121 \longrightarrow Y3 = 61$

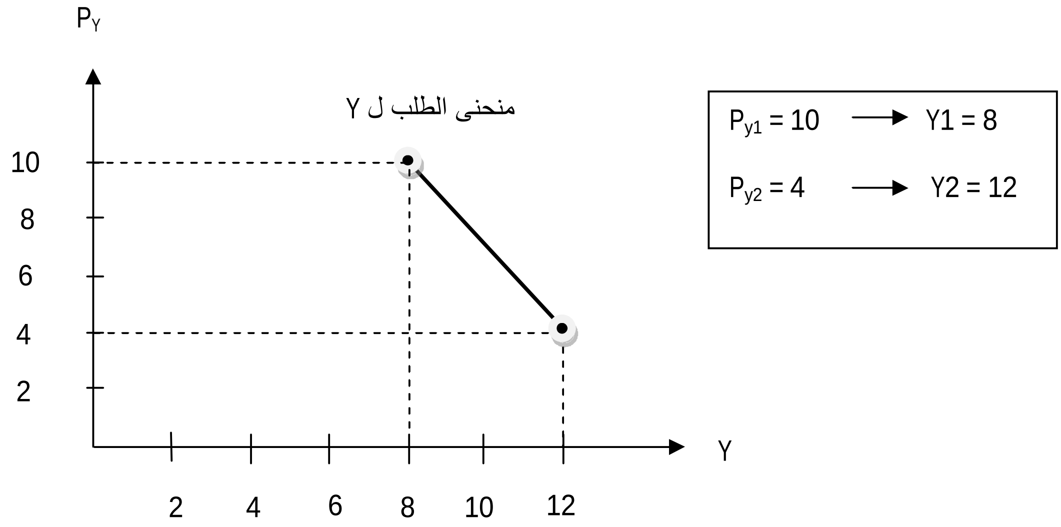
حل التمرين الثالث:

1. سبب انخفاض خط الميزانية هو انخفاض سعر السلعة Y.
2. إذا ربطنا بين نقاط التوازن المختلفة نحصل على **منحنى استهلاك السعر**: هو المنحنى الذي يربط بين نقاط التوازن المختلفة عند تغير سعر سلعة ما.
3. **التمثيل البياني للمنحنيات المستنتجة:**



$P_{y1} = 10 \longrightarrow X1 = 4$

$P_{y2} = 4 \longrightarrow X2 = 4$



4. **تفسير المنحنيين:**

- بتمثيل العلاقة بين السلعة Y مع سعرها نحصل على منحنى متناقص نظرا للعلاقة العكسية بين السلعة Y و سعرها.
- أما بالنسبة للسلعة X مع سعر السلعة الأخرى فالمنحنى ثابت، نظرا لعدم تأثر السلعة X بتغير سعر السلعة Y .

حل التمرين الرابع:

لدينا دالة المنفعة التالية: $U_T = 2XY$

1. **شرح باختصار ماذا نعني بالسلوك العقلاني للمستهلك:**

السلوك العقلاني للمستهلك هو التصرف الذي ينعكس في الإنفاق الرشيد للدخل على مختلف السلع و الخدمات لتحقيق أعظم إشباع ممكن و بالتالي:

- المستهلك يكون عقلاني إذا عمل على تعظيم منفعته الكلية أمام دخل معين.
- المستهلك يكون عقلاني إذا عمل على تخفيض إنفاقه إلى أدنى حد ممكن من أجل تحقيق منفعة معينة.

الوصول إلى ذلك رياضيا، يكون بواسطة دالة لاغرونج، و هي طريقة رياضية تتبع لحل المعادلات بقيد، و يجب أن نميز بالنسبة لدراسة سلوك المستهلك بين تعظيم المنفعة تحت قيد الدخل و بين تدنية الإنفاق تحت قيد المنفعة.

الحالة الأولى: تعظيم المنفعة تحت قيد الدخل:

سوف نقوم بكتابة صيغة دالة لاغرونج (L) مع مساواة المشتقات الجزئية لهذه الدالة بالصفر لأن المطلوب هو إيجاد النقطة العظمى أو الدنيا.

ليكن لدينا : $UT = f(X, Y)\,; \quad R = X P_X + Y P_Y$

$$L = f(X, Y) + \lambda(R - X P_X - Y P_Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = Umg_X - \lambda P_X = 0 \Rightarrow Umg_X = \lambda P_X \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = Umg_Y - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow Umg_Y = \lambda P_Y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R - X P_X - Y P_Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{Umg_X}{P_X} = \frac{Umg_Y}{P_Y} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

هذا القانون الأخير(المعادلة 4)يطلق عليه **شرط التوازن** و هو صالح ل n من السلع: أين ميل خط الميزانية يكون مساويا لميل منحنى السواء (TMS) .

λ : هو مضاعف لاغرونج و يمثل المنفعة الحدية للدخل، أي يمثل الزيادة في المنفعة الكلية الناتجة عن الزيادة في الدخل بوحدة واحدة.

الحالة الثانية: تدنية الإنفاق عند مستوى معين من المنفعة:

فقط صيغة دالة لاغرونج (L) تتغير لتصبح:

$$L = X P_X + Y P_Y + \lambda(\overline{UT} - f(X, Y))$$

$\overline{UT}$: مستوى معطى من المنفعة.

2. **إيجاد حالة الإشباع التام (التوازن): المطلوب هو تعظيم المنفعة تحت قيد الدخل:**

لدينا: $P_X = 2$ و $P_Y = 1$ و دخل المستهلك $R = 10$.

$$L = 2XY + \lambda(10 - 2X - Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2Y - 2\lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 2X - \lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - 2X - Y = 0 \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{2Y}{2X} = \frac{2}{1} \Rightarrow Y = 2X$$

نعوض في المعادلة (3):

$$10 - 2X - 2X = 0 \Rightarrow X^* = \frac{5}{2} \quad ; Y^* = 5$$

3. **حساب الدخل الضروري من أجل الحصول على نفس الإشباع المحقق في المطلب الثاني:**

المطلوب هو تدنية الإنفاق عند مستوى معين من المنفعة.

لدينا: $P_X = 2$ و $P_Y = 2$:

$$UT = 2(2{,}5)(5) = 25$$

باستخدام دالة لاغرونج:

$$L = 2X + 2Y + \lambda(25 - 2XY)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2 - \lambda(2Y) = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 2 - \lambda(2X) = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 25 - 2XY = 0 \dots\dots\dots\dots\dots.. (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{2}{2} = \frac{\lambda 2Y}{\lambda 2X} \Rightarrow Y = X$$

نعوض في المعادلة (3):

$$25 - 2\,Y^2 = 0 \Rightarrow Y^2 = \frac{25}{2}$$

$$\Rightarrow Y^* = \frac{5}{\sqrt{2}}\ ;\ X^* = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$R = 2\,\frac{5}{\sqrt{2}} + 2\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}14$$

الدخل الضروري من أجل الحصول على نفس الإشباع المحقق في المطلب الثاني هو 14,14 وحدة نقدية.

حل التمرين الخامس:

لدينا: $UT = X^{\frac{1}{2}}\,Y^{\frac{1}{4}}$

1. **حساب مقدار المنفعة التي يحصل عليها المستهلك عند النقطة A إحداثياتها X=4 و Y=1 :**

$$\mathrm{UT(A)} = 4^{\frac{1}{2}}\,1^{\frac{1}{4}} = 2\ \mathrm{UU}$$

2. **حساب مقدار الزيادة في المنفعة عندما تزيد الكمية المستهلكة من السلعة X بمقدار وحدة واحدة (لتكن النقطة B إحداثياتها X=5 و Y=1):**

$$UT(B) = 5^{\frac{1}{2}}\,1^{\frac{1}{4}} = 2{,}236\ UU$$
$$\Delta UT = UT(B) - U_T(A) = 2{,}236 - 2 = 0{,}236$$

المقدار الزيادة في المنفعة الناتج عن الزيادة في الكمية المستهلكة من X بوحدة واحدة هو 0,236 وحدة منفعة .

3. **تحديد قيمة المعدل الحدي للإحلال TMS و حساب قيمته عند النقطة A:**

$$TMS = \frac{\partial Y}{\partial \mathrm{X}} = -\frac{\mathrm{umg_x}}{\mathrm{umg_y}} = -\frac{\frac{\partial \mathrm{UT}}{\partial \mathrm{X}}}{\frac{\partial \mathrm{UT}}{\partial \mathrm{Y}}}$$

$$TMS = -\frac{\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}Y}{\frac{1}{4}X} = -2(\frac{Y}{X})$$

قيمة المعدل الحدي للإحلال عند النقطة A هي:

$$TMS = -2\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

4. **إيجاد توازن المستهلك:**

لدينا: $P_X = 1$ و $P_Y = 2$ و دخل المستهلك $R = 10$ ،

$$L = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{4}} + \lambda(10 - X - 2Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{4}} - \lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = \frac{1}{4}X^{\frac{1}{2}}Y^{-\frac{3}{4}} - 2\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 10 - X - 2Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}Y}{\frac{1}{4}X} = \frac{1}{2} \Rightarrow X = 4Y$$

نعوض في المعادلة (3):

$$10 - 4Y - 2Y = 0 \Rightarrow Y^* = \frac{5}{3} \quad ; \; X^* = \frac{20}{3}$$

5. **إيجاد دالتي الطلب لكل من السلعتين بدلالة الدخل النقدي و أسعارهما:**

نستعمل دالة لاغرو نج أو مباشرة من شرط التوازن (مع ترك المعادلات بدلالة P_X ، P_Y و R):

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}Y}{\frac{1}{4}X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$\Rightarrow X = \frac{2\,Y\,P_Y}{P_X} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

نعوض X في قيد الميزانية لنحصل على دوال الطلب الخاصة بالسلعتين:

$$R - X\,P_X - Y\,P_Y = 0 \Rightarrow R = P_X\left(\frac{2\,Y\,P_Y}{P_X}\right) + Y\,P_Y$$

$$\Rightarrow R = 2\,Y\,P_Y + Y\,P_Y$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{3P_Y}} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{Y دالة الطلب على}$$

نعوض Y في المعادلة 4 نحصل على:

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{2R}}{\mathbf{3P_X}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{X دالة الطلب على}$$

- نلاحظ أن دالة الطلب لكلا السلعتين X و Y كتبت بدلالة سعرها فقط و لم تكتب بدلالة سعر السلعة الأخرى، و بالتالي السلعتين منفصلتين عن بعضهما البعض. كما أن الطلب على السلعتين متزايد مع زيادة الدخل أي أن هناك علاقة طردية بين الكمية المطلوبة و الدخل. بينما الكمية المطلوبة تتناقص بزيادة السعر، أي هناك علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة و السعر، و بالتالي السلعتين X و Y هما **عاديتين**.

حل التمرين السادس:

لدينا دالة المنفعة الكلية: $\boldsymbol{UT = 12\,X + 30\,Y - 0,5X^2 - 0,5Y^2}$

1. **تحديد نقطة توازن المستهلك:**

لدينا: $P_X = 2$ و $P_Y = 3$ و دخل المستهلك $R = 50$.

$$L = 12\,X + 30\,Y - 0{,}5X^2 - 0{,}5Y^2 + \lambda(50 - 2X - 3\,Y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 12 - X - 2\,\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 30 - Y - 3\,\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 50 - 2X - 3Y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{12 - X}{30 - Y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 60 - 2Y = 36 - 3X$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow X = -8 + \frac{2}{3}Y$$

نعوض في المعادلة (3):

$$50 - 2\left(-8 + \frac{2}{3}Y\right) - 3Y = 0$$

$$Y^* = 15{,}23 \; ; \; X^* = 2{,}15$$

2. **إيجاد التغير في المنفعة الكلية إذا ارتفع الدخل بوحدة نقدية واحدة:**

نحسب المنفعة الحدية للدخل (λ)، و التي تقيس التغير في المنفعة الكلية الناتج عن التغير في الدخل بوحدة واحدة. يمكن حساب λ بتعويض قيم X و Y التوازنية في إحدى المعادلتين (1) أو (2) أو بالقانون التالي:

$$\lambda = \frac{Umg_X}{P_X} = \frac{12 - X}{2} = \frac{12 - 2{,}15}{2} = 4{,}9$$

أو

$$\lambda = \frac{Umg_Y}{P_Y} = \frac{30 - Y}{3} = \frac{30 - 15{,}23}{3} = 4{,}9$$

أي كل وحدة إضافية من دخل المستهلك تسمح بالحصول على 4,9 وحدات إضافية من المنفعة.

حل التمرين السابع:

لدينا دالة الإشباع: $S = 2X + XY + Y + 2$

1. **إيجاد دوال الطلب على السلعتين:**

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Leftrightarrow \frac{2 + Y}{X + 1} = \frac{P_X}{P_Y}$$

$$X P_X = (2 + Y)P_Y - P_X$$

نعوض في قيد الميزانية:

$$R - X P_X - Y P_Y = 0$$

$$R - (2 + Y)P_Y - Y P_Y + P_X = 0$$

$$R - 2P_Y - Y P_Y - Y P_Y + P_X = 0$$

$$R - 2P_Y - 2 Y P_Y + P_X = 0$$

$$R - 2P_Y + P_X = 2 Y P_Y$$

$\mathbf{Y = \frac{R-2P_Y+P_X}{2 P_Y} \Leftrightarrow Y = \frac{R+P_X}{2 P_Y} + 1}$.............. **دالة الطلب على** Y

-

$$X P_X = 2P_Y + \frac{R P_Y + P_X P_Y}{2 P_Y} - P_Y - P_X$$

$$X P_X = 2P_Y + \frac{R + P_X}{2} - P_Y - P_X$$

$$X P_X = P_Y + \frac{R + P_X}{2} - P_X$$

$\mathbf{X = \frac{R+P_X+2P_Y}{2 P_X} - 1 \Leftrightarrow X = \frac{R+2P_Y-P_X}{2 P_X}}$.............. **دالة الطلب على** X

2. **طبيعة العلاقة بين السلعتين :**

- السلعة X مكتوبة بدلالة سعرها و سعر السلعة Y بالإضافة إلى الدخل النقدي.
- السلعة Y مكتوبة بدلالة سعرها و سعر السلعة X بالإضافة إلى الدخل النقدي.
- السلعتان بديلتان لأن زيادة سعر إحدى السلعتين يؤدي إلى زيادة الطلب على السلعة الأخرى.

3. **نوع السلعتين:**

السلعتان هما عاديتان لأن زيادة الدخل تؤدي إلى زيادة الطلب عليهما، إضافة إلى أن زيادة السعر تؤدي إلى انخفاض الطلب عليهما.

حل التمرين الثامن:

1. **إثبات أن الطلب على X مستقل تماما عن سعر السلعة Y:**

نستخرج دالة الطلب على السلعة X ،

لدينا: $TMS = -\frac{Y}{X}$

و نحن نعلم أنه عند التوازن: $TMS = -\frac{P_X}{P_Y}$

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{P_X}{P_Y}$$

و منه :

$$X\,P_X = Y\,P_Y$$

نعوض في قيد الميزانية:

$$R - 2X\,P_X = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2\,P_X}}$$ ....**دالة الطلب على** X

تبين دالة الطلب على X أن الطلب على X مستقل تماما عن سعر السلعة Y.

2. **تحديد المعدل الحدي للإحلال و حساب قيمته إذا كان** $P_X=1$ ، $P_Y=3$:

$$TMS = -\frac{P_X}{P_Y} = -\frac{1}{3}$$

يتضح أن المستهلك مستعد للتخلي عن وحدة واحدة من X مقابل حصوله على $\frac{1}{3}$ Y للبقاء عند نفس مستوى الإشباع.

حل التمرين التاسع:

1. **توازن المستهلك:**

$$U = X\,Y\ ;\ P_X = 2\ ;\ P_Y = 3\ ;R = 24$$

شرط التوازن:

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y} = \frac{P_X}{P_Y} \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{2}{3}$$

$$Y = \frac{2}{3}X$$

نعوض في قيد الميزانية:

$$R - X\,P_X - Y\,P_Y = 0 \Rightarrow 24 - 2X - 2X = 0$$

$$X = 6$$

$$Y = \frac{2}{3}X \Rightarrow Y = 4$$

$$U_1 = 24$$

2. **حساب نقطة التوازن الجديدة عندما يصبح سعر السلعة X وحدة نقدية واحدة:**

لدينا:

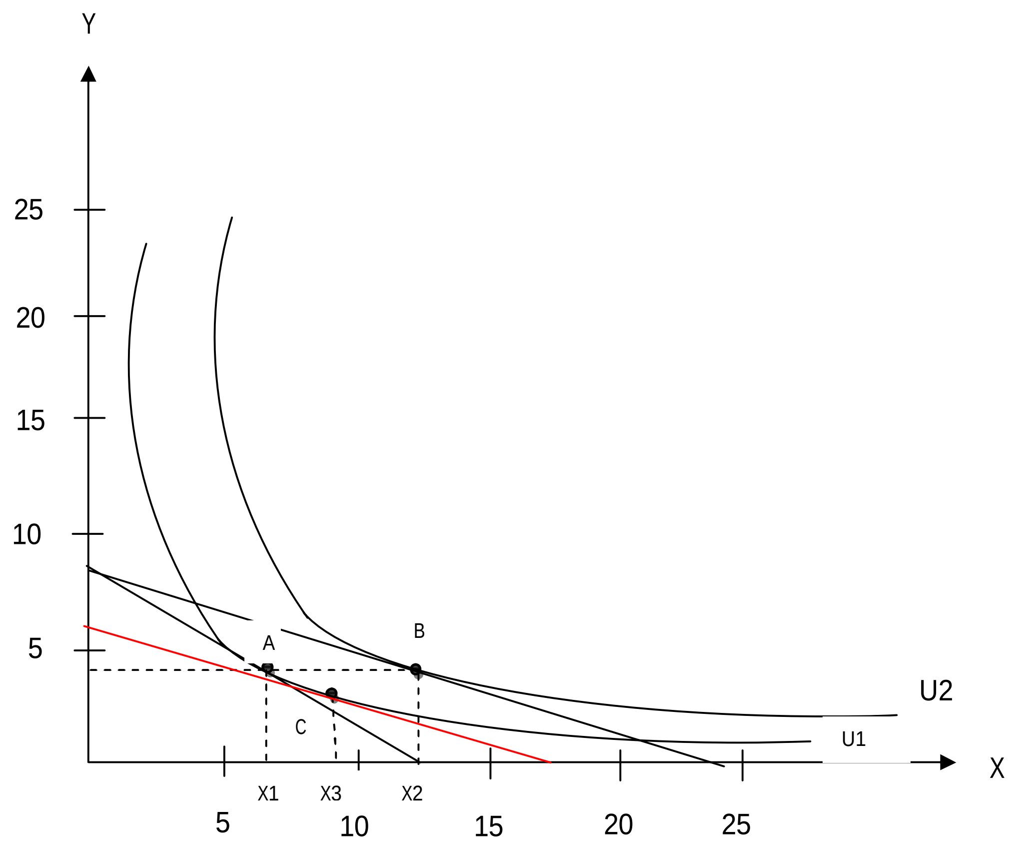
$$U = X\,Y\ ;\ P_X = 1\ ;\ P_Y = 3\ ; R = 24$$

التوازن يصبح:

$$X = 12\ ;\ Y = 4\ ; U_2 = 48$$

- **تحديد الأثر الكلي، أثر الدخل و أثر الإحلال بيانيا و حسابيا (حسب مقاربة Hicks):**

بيانيا:



التوازن يكون عند النقطة A المستهلك يتحصل على منفعة 24، بعد انخفاض سعر X ينتقل المستهلك إلى النقطة B حيث يتحصل على منفعة أكبر 48 . انخفاض السعر يؤدي بالمستهلك إلى شراء كميات إضافية من السلعة. الانتقال من النقطة A إلى B يعبر عن **الأثر الكلي** الذي يساوي ΔX $(X_2\text{-}X_1)$:

$$ET = 12 - 6 = 6$$

الأثر الكلي يقسم إلى أثرين: أثر الإحلال و أثر الدخل.

أثر الإحلال يساوي تغير في الكمية المطلوبة الناتج عن التغير في سعر السلعة عندما ينتقل المستهلك على نفس منحنى السواء : المستهلك عندما ينتقل من نقطة التوازن A إلى C يبقى على نفس منحنى السواء أي أنه لن يحصل على منفعة أكبر و إنما يغير التركيبة الاستهلاكية فقط، و يحصل هذا بعملية الإحلال. يعبر هذا الانتقال عن أثر الإحلال و يساوي الفرق بين X_3 و X_1 ، أي:

$$ES = X_3 - X_1 = 9 - 6 = 3$$

أخذنا القيمة التقريبية فقط ل X_3 تم حسابها بأخذ الوسط الحسابي ل X_1 و X_2 كما يلي: $X_3 = \frac{X_1+X_2}{2} = 9$. لاحقا سنبين الطريقة الحسابية الأكثر دقة لحساب X_3 التي تمثل نقطة التقاطع بين منحنى السواء U_1 و خط الميزانية الوهمي.

أما **أثر الدخل** فيعبر عن تغير الكمية المطلوبة الناتج عن التغير في الدخل الحقيقي فقط، نتيجة لتغير في سعر السلعة. الانتقال من نقطة التوازن C إلى نقطة التوازن B و ارتفاع المنفعة من 24 إلى 48 يستوجب دخل أكبر المتمثل في الدخل الحقيقي في هذه الحالة و ليس الاسمي و يعبر هذا الانتقال عن أثر الدخل و يساوي:

$$ER = X_2 - X_3 = 12 - 9 = 3$$

إذن الأثر الكلي (ET)يقسم إلى قسمين:

أثر الإحلال (ES): $ES = X_3 - X_1$.

أثر الدخل (ER): $ER = X_2 - X_3$.

- **حسابيا:**

لإيجاد X3 حسابيا يجب أن نجد نقطة التقاطع بين منحنى السواء U_1 و خط الميزانية الوهمي. خط الميزانية الوهمي يكون معرفا بميله الذي يساوي نسب الأسعار بعد تغير سعر السلعة X و هذا الميل يساوي:

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y}=\frac{P_X}{P_Y}\Rightarrow\frac{Y}{X}=\frac{1}{3}$$

يتعين تثبيت المنفعة عند مستواها الأولي $U_1=24$ ، يصبح لدينا:

$$\begin{cases} U_1 = XY = 24 \\ \frac{Y}{X}=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow X = 6\sqrt{2}$$

$$X_3 \approx 8,48$$

حل التمرين العاشر:

لدينا:

$$\begin{cases} U = 20XY \\ P_X = 10;\ P_Y = 5\,;R = 100 \\ P_X \longrightarrow P_X{}' = 5 \end{cases}$$

1. **تحديد الأثر الكلي، أثر الدخل و أثر الإحلال حسابيا:**

- **إيجاد نقطة التوازن الأولي:**

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y}=\frac{P_X}{P_Y}\Rightarrow\frac{20Y}{20X}=\frac{10}{5}=2\Rightarrow Y=2X$$

نعوض في قيد الميزانية:

$$100-10X-5(2X)=0$$

$$\Rightarrow X=5\,;\ Y=10\,;U_1=20\cdot 5\cdot 10=1000$$

- **إيجاد نقطة التوازن عند تغير سعر السلعة X:**

$$\frac{Umg_X}{Umg_Y}=\frac{P_X}{P_Y}\Rightarrow\frac{20Y}{20X}=\frac{5}{5}=1\Rightarrow Y=X$$

نعوض في قيد الميزانية:

$$100-5X-5X=0$$

$$\Rightarrow X=10\,;\ Y=10\,;U_2=20\cdot 10\cdot 10=2000$$

- إيجاد مختلف الآثار (أثر الإحلال و الدخل) حسب مقاربة Hicks:

$$\begin{cases} U_1 = 20XY = 1000 \\ \dfrac{20Y}{20X} = \dfrac{5}{5} \end{cases} \Rightarrow 20X^2 = 1000$$

$$\Rightarrow X = \sqrt{50} \approx 7{,}07$$

الأثر الكلي:

$$ET = X_2 - X_1 = 10 - 5 = 5$$

أثر الإحلال:

$$ES = X_3 - X_1 = 7{,}07 - 5 = 2{,}07$$

أثر الدخل:

$$ER = X_2 - X_3 = 10 - 7{,}07 = 2{,}93$$

الفصل الثالث:

سلوك المنتج

دالة الإنتاج:

نفترض أن حجم الإنتاج Q أو Y معطى و لا يمكن الوصول إليه إلا من خلال علاقة معينة للكميات المستخدمة من عاملي الإنتاج: العمل (L) و رأس المال (K). بالتالي دالة الإنتاج هي العلاقة بين الكميات المستخدمة من عاملي الإنتاج و الكمية المنتجة. تأخذ دالة الإنتاج الشكل التالي :

$$Q = f(K, L)$$

1. تحليل دالة الإنتاج في المدى القصير:

Alfred Marshall عرف المدى القصير بالفترة من الزمن يكون فيها على الأقل واحد من عاملي الإنتاج ثابت. النظرية الاقتصادية تشير في هذا الإطار أن اليد العاملة (عنصر العمل) هي مرنة في المدى القصير، في حين مخزون رأس المال هو غير متغير. بالتالي في المدى القصير، الإنتاج يتغير فقط وفقا للتغيرات في عنصر العمل (معبر عنه بعدد ساعات العمل). دالة الإنتاج في المدى القصير تأخذ الشكل التالي:

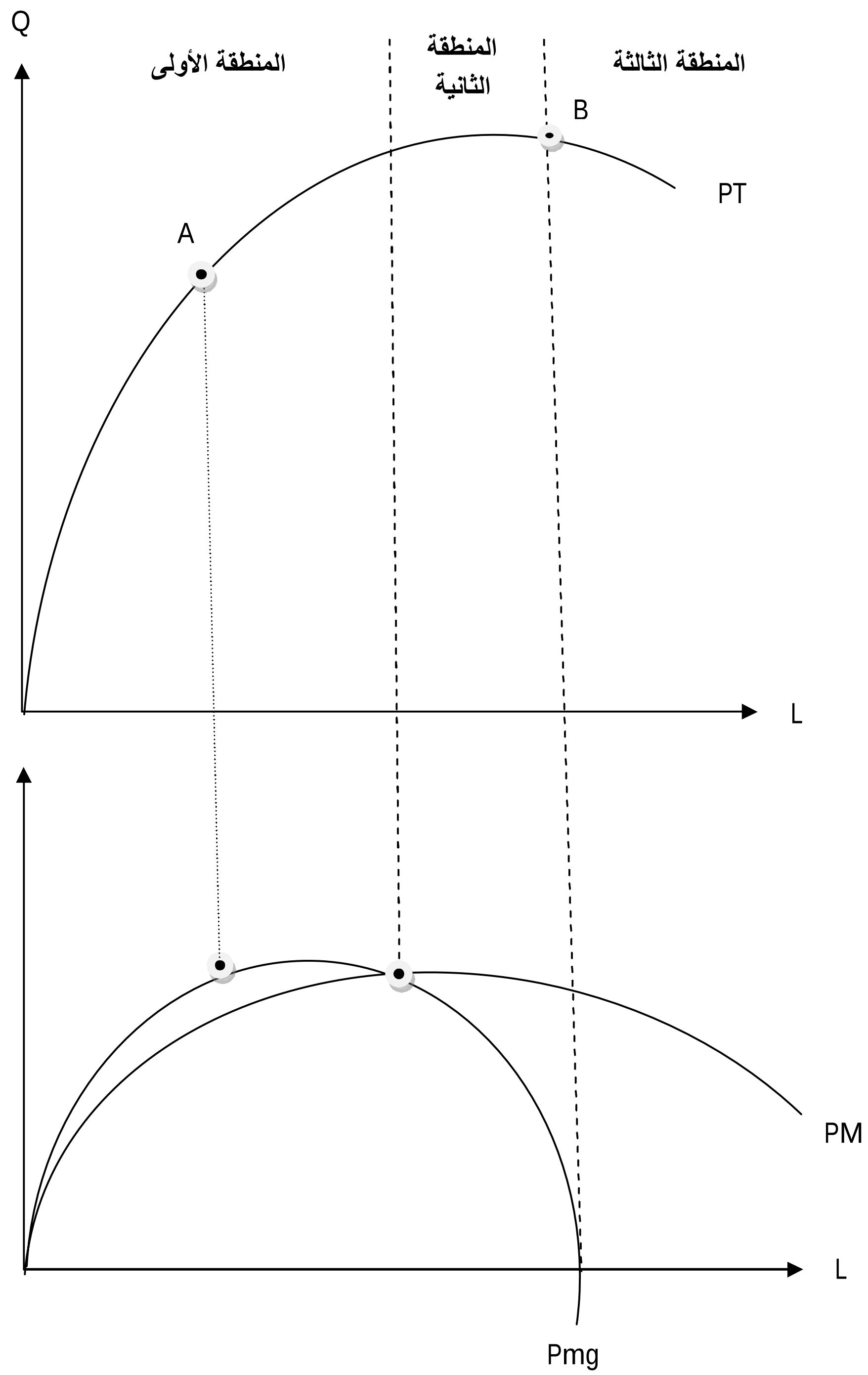
$$Q = f(L, \overline{K}) = f(L)$$

المنتج يبحث للوصول إلى أفضل توليفة (عند مستوى معطى من رأس المال K و مستوى معين من عنصر العمل L). هذا البحث عن الاختيار الأمثل يرتكز على فرضية **عقلانية المنتج**، و الذي يقودنا إلى الإشارة إلى **قانون تناقص الغلة** (La loi des rendements décroissants)، الذي ينص على أن زيادة أحد عوامل الإنتاج ليكن العمل مع ثبات باقي العوامل الأخرى، فإن الناتج الكلي سوف يزداد لكن بعد حين الزيادة في الناتج سوف تتناقص.

الشكل التالي يبين ثلاث منحنيات: منحنى الناتج الكلي (PT) و منحنى الناتج المتوسط للعمل (PM_L) و الناتج الحدي (Pmg_L) .

- **الناتج الكلي** (PT): يعبر عن الكمية الكلية المنتجة من السلعة نتيجة استخدام كميات مختلفة من العنصر المتغير عند مستوى من العنصر الإنتاجي الثابت، $PT = f(K, L)$.
- **الناتج المتوسط للعمل** (PM_L): يعبر عن معدل أو نسبة الناتج الكلي في عملية إنتاجية معينة إلى كمية العامل الإنتاجي المذكور (هنا العمل) و يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$PM_L = \frac{PT}{L}$$



- **الناتج الحدي للعمل (Pmg_L)**: هو مقدار التغير الذي يحدث في الناتج الكلي في عملية إنتاجية معينة عند إضافة وحدة واحدة من عامل الإنتاج المذكور (العمل) و يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$Pmg_L = \frac{\Delta PT}{\Delta L}$$

عندما يكون ΔL يؤول إلى الصفر(0) :

$$Pmg_L = \frac{\partial PT}{\partial L}$$

- **مناطق الإنتاج الثلاثة:**

المنطقة الأولى:

PM = Pmg ⟶ 0 : تكون الإنتاجية الحدية أكبر من الإنتاجية المتوسطة، و لكن على المنتج أن يتجاوز هذه المنطقة (هي مرفوضة).

المنطقة الثانية:

Pmg = 0 ⟶ PM = Pmg : هي المنطقة المثلى للإنتاج.

المنطقة الثالثة:

$\infty \rightarrow 0 = Pmg$: تكون الإنتاجية الحدية سالبة و بالتالي فإن المنتج العقلاني لا يتجاوز المنطقة الثانية(هي مرفوضة).

ملاحظات:

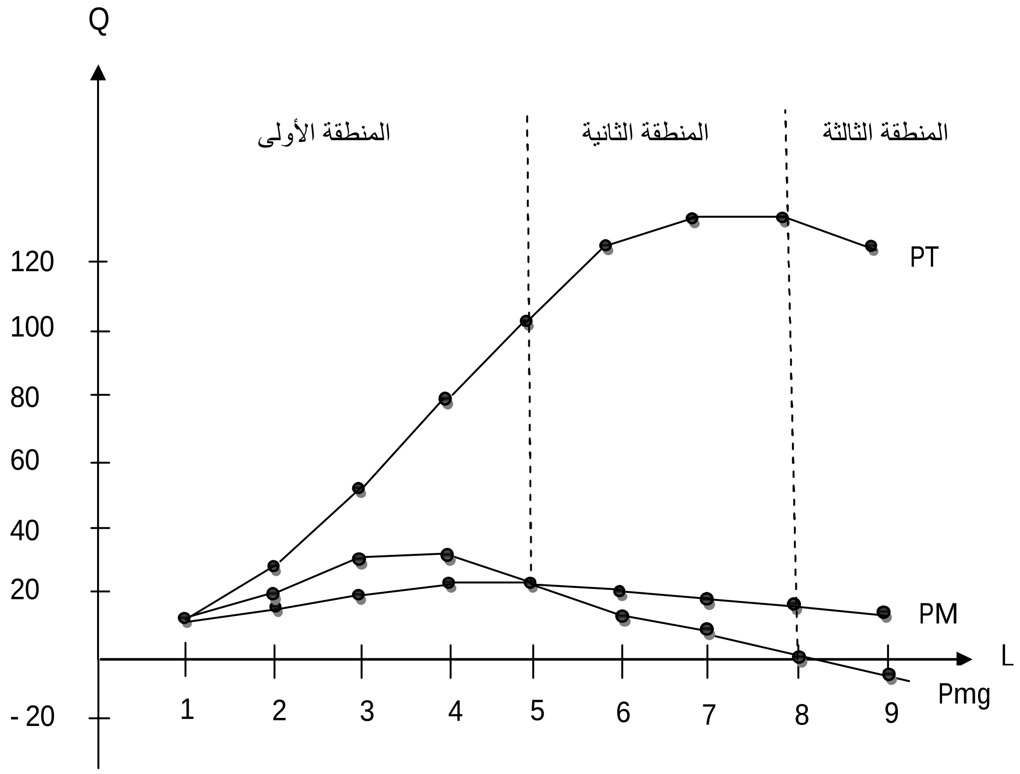
- يقطع منحنى الإنتاجية الحدية Pmg منحنى الإنتاجية المتوسطة PM لما تبلغ هذه الأخيرة حدها الأقصى،
- يبدأ الإنتاج الكلي يزداد بمعدل متناقص (ابتداءا من النقطة A) لما تبلغ الإنتاجية الحدية أقصى قيمة لها.
- من 0 إلى النقطة A تكون الإنتاجية الحدية موجبة و متزايدة.
- من النقطة A إلى النقطة B تكون الإنتاجية الحدية موجبة و متناقصة.
- بعد النقطة B تكون الإنتاجية الحدية سالبة.

مثال:

نفترض تسع تجارب لتسع عمليات إنتاجية لمنتج معين. الجدول التالي يبين كمية العامل المتغير و هو العمل، و الناتج الكلي للعمل و الناتج المتوسط و الناتج الحدي. باقي عوامل الإنتاج هي ثابتة.

رقم التجربة	العمال	الناتج الكلي	الناتج المتوسط	الناتج الحدي
1	1	10	10	10
2	2	28	14	18
3	3	54	18	26
4	4	80	20	26
5	5	100	20	20
6	6	108	18	8
7	7	112	16	4
8	8	112	14	0
9	9	108	12	-4

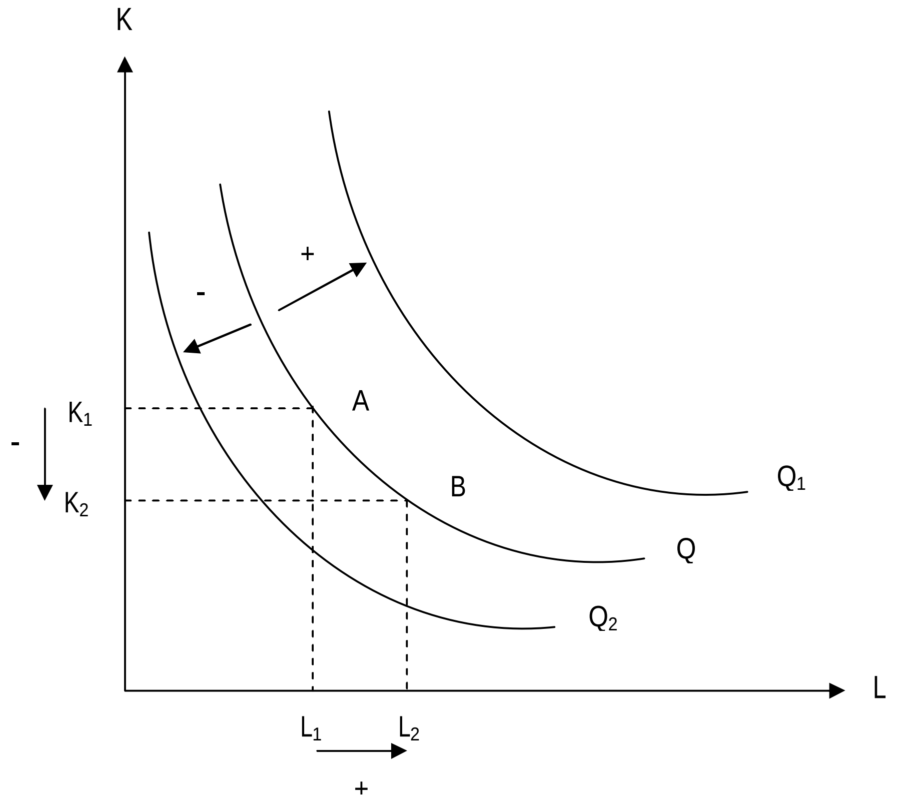
- **التمثيل البياني:**



الشكل 1.3: رسم المنحنيات البيانية للناتج الكلي، المتوسط و الحدي للعمل.

2. تحليل دالة الإنتاج في المدى الطويل:

المدى الطويل يمكن أن يعرف بالفترة من الزمن تكون فيها جميع عوامل الإنتاج متغيرة (قابلة للتغير). في دالة الإنتاج في المدى الطويل (كل عوامل الإنتاج متغيرة) يمكن الحصول على نفس الإنتاج باستخدام توليفات مختلفة من عاملي الإنتاج. في البيان الموالي Q الذي يعبر عن مستوى إنتاج معين (هو متساوي في جميع نقاط المنحنى) و يمكن الحصول عليه باستخدام توليفات مختلفة من K و L. فمستوى الإنتاج Q يمكن الحصول عليه باستخدام الثنائيات من عاملي الإنتاج (K_1, L_1) و (K_2, L_2) ، بنفس الطريقة بالنسبة لتوليفات أخرى غير منتهية. بالربط بين جميع الإحداثيات الممثلة للنقاط التي تعطينا نفس الإنتاج نحصل على منحنى بياني يطلق عليه **منحنى الناتج المتساوي** (isoquant): هو المحل الهندسي لجميع التوليفات K و L التي تعطي للمنتج نفس الإنتاج.



الشكل 2.3: التمثيل البياني لمنحنيات الناتج المتساوي

- على طول منحنى الناتج المتساوي، الإنتاج لا يتغير.
- معادلة منحنى الناتج المتساوي هي من الشكل: $K= f (L)$.

- هذا المنحنى له ميل سالب، إذا ارتفعت L فإن K تنخفض لأن الإنتاج يكون ثابت على طول منحنى الناتج المتساوي. إذا ارتفعت L و K ارتفعت أو بقيت ثابتة، فإن الإنتاج يرتفع و بالتالي ننتقل إلى منحنى ناتج متساوي آخر. إذن على نفس المنحنى مستوى الإنتاج هو ثابت (إذا ارتفعت L فإن K تنخفض و إذا انخفضت L ترتفع K).
- كلما ابتعدنا عن المبدأ زاد الإنتاج (Q_1 يمثل إنتاج أكبر من Q و Q_2 ، و Q يمثل مستوى إنتاج أكبر من Q2).
- ميل الظلع AB (الذي يمثل المعدل الحدي للإحلال التقني بين نقطتين)يقاس ب $\frac{\Delta K}{\Delta L}$:

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{(K_2 - K_1)}{(L_2 - X_1)}$$

- ميل منحنى الناتج المتساوي يتغير في كل نقطة من المنحنى، و يمثل معدل التبادل (الإحلال) ل K ب L ، أي: بكم يجب تعويض وحدة من L بوحدات من K حتى نبقى على نفس المنحنى (نفس الإنتاج). هذا المعدل يسمى **المعدل الحدي للإحلال التقني** (TMST). المعدل الحدي للإحلال عند كل نقطة من المنحنى يقاس بالقانون التالي:

$$TMST = \frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{Pmg_L}{Pmg_K}$$

- المعدل الحدي للإحلال التقني هو سالب الإشارة و هو ما يعكس الميل السالب لمنحنى الناتج المتساوي.

✓ **خط التكاليف:**

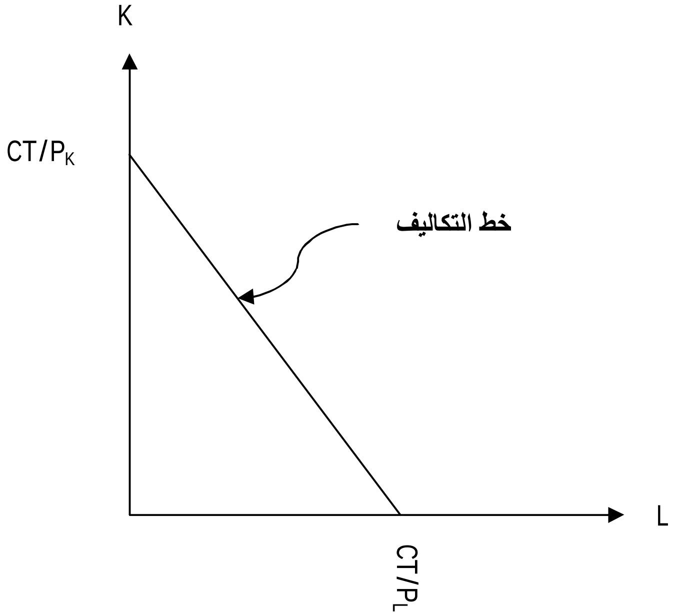
نفترض أن المنتج يخصص مبلغ معين لشراء عوامل الإنتاج حتى يتمكن من الإنتاج و عليه فإن دالة التكلفة الكلية تكتب على الشكل التالي: $CT = K\,P_K + L\,P_L$

و منه معادلة خط التكاليف تكون من الشكل:

$$K = \frac{CT}{P_K} - \frac{P_L}{P_K}L$$

ميل خط التكاليف هو:

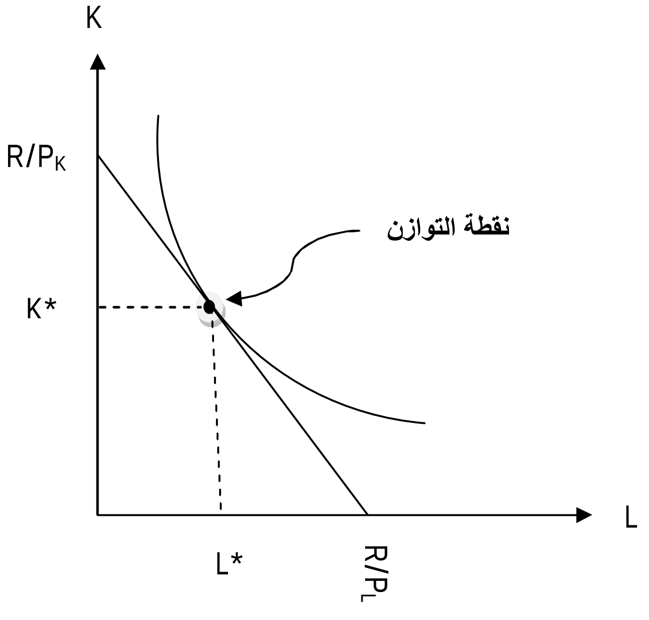
$$\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{P_L}{P_K}$$



الشكل3.3: التمثيل البياني لخط التكاليف

✓ تحديد التوليفة التي تحقق التوازن:

يتحقق توازن المنتج بيانيا لما يكون منحنى الناتج المتساوي مماس لخط التكاليف (في هذه النقطة يكون ميل منحنى الناتج المتساوي TMST مساويا لميل خط التكاليف).



الشكل4.3: توازن المنتج بيانيا

3. تمارين عن سلوك المنتج:

التمرين الأول:

لتكن لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = 10\, K\, L^2 - (KL)^3$

المطلوب:

1. إذا كان $K = 1$ ، ماهي كمية العمل التي تعطينا أقصى إنتاج كلي؟
2. انطلاقا من أي قيمة يبدأ الإنتاج يزداد بمعدل متناقص؟
3. حدد مناطق الإنتاج الثلاثة؟

التمرين الثاني:

إذا أخذت دالة الإنتاج الشكل التالي: $Q = 20L + 16L^2 - L^3$

المطلوب:

1. أحسب الإنتاجية الحدية و المتوسطة ل L و الإنتاجية المتوسطة ل F إذا كانت F تساوي 10 وحدات من العامل الثابت.
2. حدد مناطق الإنتاج الثلاثة.

التمرين الثالث:

إذا كانت دالة الإنتاج لمنتج ما هي: $Q = f(K\,, L) = 50\, L^2 - (LK)^3$

حيث يمثل L ، K العمل و رأس المال على التوالي.

المطلوب:

1. أحسب الإنتاج الحدي للعمل، و ما هو حجم اليد العاملة الذي يعظم دالة الإنتاج؟
2. أحسب الإنتاج المتوسط للعمل، و متى تمر دالة الإنتاج المتوسط للعمل بحدها الأقصى؟
3. إذا كانت $K = 2$ و L يأخذ قيما مختلفة تجعل من الإنتاج الحدي للعمل أكبر من الصفر، فحدد المراحل التي يمر بها الإنتاج.
4. نفرض أن K تأخذ كذلك قيما مختلفة، أحسب الإنتاج الحدي لرأس المال.
5. أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني بين العمل و رأس المال.

6. إذا كانت الموارد المخصصة للإنفاق على المستخدمات من عوامل الإنتاج العمل و رأس المال هي C ، عين الثنائية المثلى من العمل و رأس المال التي تجعل سلوك المنتج رشيدا إذا علمت أن:

$$\bar{C} = \frac{160}{3} = 5L + 2K$$

التمرين الرابع:

لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$

1. حدد الإنتاجية الحدية لعنصري الإنتاج العمل و رأس المال؟
2. إذا كان سعري عنصري الإنتاج: $P_K = 1$ و $P_L = 2$ ، و كان لدى المنتج ميزانية قدرها 200 وحدة نقدية، ماهي الكميات من عناصر الإنتاج التي يستعملها المنتج لضمان الإنتاج الأعظم؟
3. إذا ارتفع سعر رأس المال إلى وحدتين نقديتين، أحسب الإنتاج الأعظم في هذه الحالة؟

التمرين الخامس:

لتكن دالة الإنتاج لمؤسسة ما: $Q = (L-1)^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}$ ، حيث $L \geq 1$.

1. استخرج معادلة الناتج المتساوي إذا كانت $Q = 1$ و أرسم البيان.
2. ماهي أدنى تكلفة لإنتاج $Q = 1$ ، أسعار عوامل الإنتاج K و L هي ($P_K = 1$ و $P_L = 1$) ثم ($P_K = 2$ و $P_L = 3$) .
3. أعط التفسير الاقتصادي للنتائج السابقة.

التمرين السادس:

لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = K\,L$

1. إذا كان سعر رأس المال يساوي 10 و ن، و سعر العمل يساوي 20 وحدة نقدية و كان المنتج يتمتع بميزانية قدرها 200 و ن . أحسب الإنتاج الأعظم الذي سيحققه المنتج في هذه الحالة.
2. إذا ارتفع سعر رأس المال إلى 20 و ن، ما هو مستوى الإنتاج الذي سيحققه المنتج في هذه الحالة ؟
3. إذا لم يرض المنتج بهذا الحل الأخير و أراد أن لا يتراجع عن مستوى إنتاجه الأصلي، ماهي الكلفة اللازم تحملها من أجل تحقيق هذا الهدف؟

4. أحسب المعدل الحدي للإحلال التقني بين نقطتي التوازن التي تمكنان من المستوى الأصلي للإنتاج.

التمرين السابع:

لدينا دالة الإنتاج التالية:
$$Q = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

حيث K يمثل عنصر رأس المال، و L عنصر العمل و حجم التكلفة C= 2000 دينار جزائري و سعر وحدة العمل يساوي 10 دينار و سعر وحدة رأس المال يساوي 20 دينار.

المطلوب:

1. أحسب الإنتاج المتوسط لكل من عنصري الإنتاج العمل و رأس المال.
2. أحسب الإنتاج الحدي لكل من عنصري الإنتاج العمل و رأس المال.
3. أحسب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل عند مستوى ثابت من رأس المال و ماهي مرحلة الغلة التي يمر بها الإنتاج الكلي؟
4. أحسب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال عند مستوى ثابت من العمل و ماهي مرحلة الغلة التي يمر بها الإنتاج الكلي؟
5. إذا فرضنا حدوث التغير في كل من العمل و رأس المال، احسب مرونة الإنتاج الكلي بالنسبة لعنصري الإنتاج العمل و رأس المال و ماهي مرحلة الغلة التي يمر بها الإنتاج الكلي؟
6. أحسب حجم العمل و حجم رأس المال الذي يعظم الإنتاج في ظل قيد التكلفة و أسعار عوامل الإنتاج.

التمرين الثامن:

لدينا دالة الإنتاج التالية:
$$Q = 2K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{2}{3}}$$

حيث يمثل K رأس المال و L العمل. إذا كانت أسعار عوامل الإنتاج تساوي $P_K = 4$ ، $P_L = 10$.

المطلوب:

1. حدد غلة الحجم و فسر معناها.
2. حدد الإنتاج الأعظم إذا كانت ميزانية المنتج تساوي CT = 1485 .

3. إذا كان الإنتاج محدد بالمستوى Q = 150 ، أوجد الكميات من K و L التي تجعل التكاليف عند حدها الأدنى.

التمرين التاسع:

إنتاج منتوج معين يتحقق باستخدام عاملي الإنتاج، العمل (L) و رأس المال (K). الإنتاج المحقق باستخدام مختلف التوليفات (K, L) هو موضح في الجدول التالي:

الكمية المنتجة Q	عدد الوحدات من عوامل الإنتاج		نقاط الإنتاج
	L	K	
200	2	6	A
200	3	4	B
200	5	3	C
175	1,5	5,5	D
175	2,5	3,5	E
175	5	2	F
140	1,5	4	G
140	2,3	2,7	H
140	4	2	I
100	1	3,5	J
100	2	2	K
100	4	1	L
65	0,5	3,5	M
65	1,5	1,5	N
65	3	1	O
35	0,5	2,5	P
35	1	1	Q
35	2,5	0,5	R

معادلة التكاليف (أو خط التكاليف) تعطى بالعلاقة التالية:

$CT = KP_K + LP_L$ **بحث:** $P_L = P_K = 2$.

المطلوب:

1. حدد الوضعية المثلى للمؤسسة إذا كان هدف هذه الأخيرة تحقيق إنتاج $Q = 175$.
2. مثل بيانيا منحنيات الناتج المتساوي و الوضعية المثلى للمطلوب الأول.
3. حدد الإنتاج و التوليفة المثلى لعاملي الإنتاج عندما تكون الميزانية المتوفرة للمؤسسة $CT=8$.
4. حدد بيانيا مسار التوسع للمؤسسة، مع الإبقاء على أسعار عاملي الإنتاج كما هي: $P_L = P_K=2$.

التمرين العاشر:

أحسب درجة تجانس الدوال التالية و حدد طبيعة المردود السلمي:

1. $f(K , L) = KL + K^2 + L^2$
2. $f(K , L) = K^2L + K L^2$
3. $f(K , L) = (K - 8)^{\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{3}}$
4. $f(K , L) = K^2L$
5. $f(K , L) = KL + K + L$
6. $f(K , L) = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$

4. حل تمارين سلوك المنتج:

حل التمرين الأول:

لدينا: $Q = 10\,K\,L^2 - (KL)^3$

1. **إذا كان K=1 ، حساب كمية العمل التي تعطينا أقصى إنتاج كلي:**

يتحقق ذلك لما تصبح الإنتاجية الحدية للعمل تساوي الصفر (المشتقة الأولى لدالة الإنتاج بدلالة العمل تساوي الصفر)

إذا كان K=1، دالة الإنتاج تصبح : $Q = 10\,L^2 - L^3$

$$Pmg_L = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = 0 \Rightarrow 20\,L - 3\,L^2 = 0$$

$$20\,L - 3\,L^2 = 0 \Rightarrow L(20 - 3L) = 0$$

$$\Rightarrow L = 0 \;\bigvee L = \frac{20}{3}$$

$L = 0$ مرفوض ، وبالتالي $L = \frac{20}{3}$ تعطينا أقصى إنتاج كلي.

2. **القيمة التي يبدأ عندها الإنتاج يزداد بمعدل متناقص:**

يبدأ الإنتاج الكلي يزداد بمعدل متناقص لما تصل الإنتاجية الحدية إلى حدها الأقصى: يتحقق ذلك عندما المشتقة الأولى للإنتاجية الحدية تساوي الصفر (أو، المشتقة الثانية لدالة الإنتاج الكلي بدلالة العمل تساوي الصفر).

$$Pmg_L = 20\,L - 3\,L^2$$

$$\frac{\partial Pmg_L}{\partial L} = 0 \Rightarrow 20 - 6\,L = 0$$

$$\Rightarrow L = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

انطلاقا من $L = \frac{10}{3}$ ، يبدأ الإنتاج الكلي يزداد بمعدلات متناقصة.

3. تحديد مناطق الإنتاج الثلاثة:

الإنتاجية المتوسطة (PM_L):

$$PM_L = \frac{Q}{L} \Rightarrow PM_L = \frac{10\,L^2 - L^3}{L} = 10L - L^2$$

- ✓ **المنطقة الأولى:** من L = 0 إلى حجم العمالة التي تتحقق عنده $Pmg_L = PM_L$.

$$Pmg_L = PM_L \Leftrightarrow 20\,L - 3\,L^2 = 10L - L^2$$

$$\Rightarrow 2L^2 = 10L \Rightarrow L = 5$$

المنطقة الأولى: من $L = 0$ إلى $L = 5$

- ✓ **المنطقة الثانية:** من $Pmg_L = PM_L$ إلى حجم العمالة التي تحقق عنده $Pmg_L = 0$.

$$Pmg_L = 0 \Rightarrow L = \frac{20}{3}$$

المنطقة الثانية: من $L = 5$ إلى $L = \frac{20}{3}$.

- ✓ **المنطقة الثالثة:** من $Pmg_L = 0$ إلى ما لانهاية.

المنطقة الثالثة: من $L = \frac{20}{3}$ إلى ما لانهاية.

مناطق الإنتاج هي:

المنطقة الأولى: $0 \longmapsto L = 5$

المنطقة الثانية: $L = 5 \longmapsto L = \frac{20}{3}$

المنطقة الثالثة: $L = \frac{20}{3} \longmapsto \infty$

حل التمرين الثاني:

لدينا : $Q = 20L + 16L^2 - L^3$

1. **حساب الإنتاجية الحدية و المتوسطة ل L و الإنتاجية المتوسطة ل F :**

أ- الإنتاجية الحدية للعامل L:

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 20 + 32L - 3L^2$$

ب- الإنتاجية المتوسطة للعامل L:

$$PM_L = \frac{Q}{L} = 20 + 16L - L^2$$

ت- الإنتاجية المتوسطة للعامل F :

$$PM_F = \frac{Q}{F} = \frac{20L + 16L^2 - L^3}{10}$$

2. **مناطق الإنتاج الثلاثة:**

✓ **المنطقة الأولى:** من L = 0 إلى حجم العمالة التي تتحقق عنده $Pmg_L = PM_L$ (أو عندما تصل PM_L إلى أقصى قيمة لها).

تصل الإنتاجية المتوسطة إلى حدها الأقصى لما تنعدم المشتقة الأولى لدالة الإنتاجية المتوسطة.

$$\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 16 - 2L = 0 \Rightarrow L = 8$$

المنطقة الأولى: من $L = 0$ إلى $L = 8$

✓ **المنطقة الثانية:** من $Pmg_L = PM_L$ إلى غاية حجم العمالة التي تحقق عنده $Pmg_L = 0$.

$$Pmg_L = 20 + 32L - 3L^2 = 0 \Rightarrow L = 11{,}25$$

المنطقة الثانية: من $L = 8$ إلى $L = 11,25$.

✓ **المنطقة الثالثة:** من $Pmg_L = 0$ إلى ما لانهاية.

المنطقة الثالثة: من $L = 11,25$ إلى ما لانهاية.

مناطق الإنتاج هي:

المنطقة الأولى: $0 \sim L = 8$

المنطقة الثانية: $L = 8 \sim L = 11,25$

المنطقة الثالثة: $L = 11,25 \sim \infty$

حل التمرين الثالث:

لدينا: $Q = f(K\,,L) = 50\,L^2 - (LK)^3$

1. **حساب الإنتاج الحدي للعمل، وحجم اليد العاملة الذي يعظم دالة الإنتاج:**

الإنتاج الحدي: $Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 100L - 3L^2K^3$

حجم اليد العاملة الذي يعظم دالة الإنتاج: يتحقق ذلك لما ينعدم الإنتاج الحدي للعمل.

$$Pmg_L = 100L - 3L^2K^3 = 0 \Rightarrow L = \frac{100}{3K^3}$$

حجم اليد العاملة الذي يعظم دالة الإنتاج هو: $L = \frac{100}{3K^3}$.

2. **حساب الإنتاج المتوسط للعمل:**

$$PM_L = \frac{Q}{L} = 50L - L^2K^3$$

حجم اليد العاملة الذي يعظم الإنتاج المتوسط: يتحقق ذلك لما تنعدم المشتقة الأولى لدالة الإنتاج المتوسط.

$$\frac{\partial PM_L}{\partial L} = 50 - 2LK^3 = 0 \Rightarrow L = \frac{50}{2K^3}$$

تصل دالة الإنتاج المتوسط إلى حدها الأقصى لما $L = \frac{50}{2K^3}$.

3. تحديد المراحل التي يمر بها الإنتاج:

إذا كانت K = 2 و L يأخذ قيما مختلفة تجعل من الإنتاج الحدي للعمل أكبر من الصفر فإن:

$$100L - 3L^2K^3 > 0 \Rightarrow L < \frac{100}{3K^3}$$

بما أن K = 2 فإن L يجب أن لا تتجاوز القيمة $\frac{100}{24}$ $(L < \frac{100}{24})$.

لتعيين مراحل الإنتاج في هذه الحالة يجب أن نحسب مرونة الإنتاج مع العلم أن L محصورة بين الصفر و $\frac{100}{24}$.

مرونة الإنتاج للعمل = الإنتاج الحدي للعمل ÷ الإنتاج المتوسط للعمل

$$E_L = \frac{\mathrm{Pmg_L}}{\mathrm{PM_L}} = \frac{100L - 3L^2K^3}{50L - L^2K^3}$$

بما أن K=2 فإن: $$E_L = \frac{100-24L}{50-8L}$$

<u>عندما L=1:</u>

$$E_L = \frac{100 - 24(1)}{50 - 8(1)} = \frac{76}{42} > 1$$

مرحلة تزايد الغلة (نسبة الزيادة في الإنتاج أكبر من نسبة الزيادة في L).

<u>عندما L=2:</u>

$$E_L = \frac{100 - 24(2)}{50 - 8(2)} = \frac{52}{34} > 1$$

مرحلة تزايد الغلة.

<u>عندما L=3:</u>

$$E_L = \frac{100 - 24(3)}{50 - 8(3)} = \frac{28}{26} > 1$$

مرحلة تزايد الغلة.

عندما $L = \frac{50}{16}$ **: وهي النقطة التي تصل عندها الإنتاجية المتوسطة إلى حدها الأقصى.**

$$E_L = \frac{100 - 24(\frac{50}{16})}{50 - 8(\frac{50}{16})} = 1$$

مرحلة ثبات الغلة (نسبة الزيادة في الإنتاج تساوي نسبة الزيادة في L).

عندما L=4 :

$$E_L = \frac{100 - 24(4)}{50 - 8(4)} = \frac{4}{18} < 1$$

مرحلة تناقص الغلة (نسبة الزيادة في الإنتاج أقل من نسبة الزيادة في L). .

عندما $L = \frac{100}{24}$:

$$E_L = \frac{100 - 24(100)}{50 - 8(24)} = 0 < 1$$

مرحلة تناقص الغلة .

4. **نفرض أن K تأخذ كذلك قيما مختلفة:**

الإنتاج الحدي لرأس المال: $Pmg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = -3L^3K^2$

5. **حساب المعدل الحدي للإحلال التقني:**

$$TMST = -\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{100L - 3L^2K^3}{3L^3K^2} = \frac{100 - 3LK^3}{3L^2K^2}$$

6. **تحديد الثنائية المثلى من العمل ورأس المال التي تجعل سلوك المنتج رشيدا:**

لدينا: $\overline{CT} = \frac{160}{3} = 5L + 2K$

يكون سلوك المنتج رشيدا إذا عمل على:

- تعظيم إنتاجه أمام مستوى معين من التكاليف.

- تدنية التكاليف من أجل تحقيق مستوى معين من الإنتاج.

الحالة الأولى: تعظيم الإنتاج تحت قيد التكاليف:

الوصول إلى ذلك رياضيا، يكون بواسطة دالة لاغرونج.

سوف نقوم بكتابة صيغة دالة لاغرونج (V) مع مساواة المشتقات الجزئية لهذه الدالة بالصفر لأن المطلوب هو إيجاد النقطة العظمى أو الدنيا.

ليكن لدينا : $Q = f(K, L)\,; \quad CT = K P_K + L P_L$

$$V = f(K, L) + \lambda(CT - KP_K - LP_L)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = Pmg_L - \lambda P_L = 0 \Rightarrow Pmg_L = \lambda P_L \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = Pmg_K - \lambda P_K = 0 \Rightarrow Pmg_K = \lambda P_K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = CT - K P_K - L P_L = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{Pmg_L}{P_L} = \frac{Pmg_K}{P_K} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

هذا القانون الأخير(المعادلة 4)يطلق عليه **شرط التوازن** و هو صالح ل n من السلع: أين ميل خط التكاليف يكون مساويا لميل منحنى الناتج المتساوي (TMST) .

الحالة الثانية: تدنية التكاليف عند مستوى معين من الإنتاج:

فقط صيغة دالة لاغرونج (V) تتغير لتصبح:

$$V = K P_K + L P_L + \lambda(\overline{Q} - f(K, L))$$

$\overline{Q}$: مستوى معطى من الإنتاج.

في المطلوب الأخير نحن أمام الحالة الأولى، أي تعظيم الكمية المنتجة عند مستوى معين و ثابت من التكاليف، و بالتالي صيغة دالة لاغرو نج تكون على النحو التالي:

$$V = 50\,L^2 - (LK)^3 + \lambda(\frac{160}{3} - 5L - 2K)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = 100L - 3L^2K^3 - 5\,\lambda \;= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = -3L^3K^2 - 2\,\lambda \;= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{160}{3} - 5L - 2K = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .. (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{100L - 3L^2K^3}{-3L^3K^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 200L - 6L^2K^3 = -15L^3K^2$$

$$200L + 15L^3 = 6L^2K \Rightarrow K = \frac{200 + 15L^2}{6L}$$

نعوض في المعادلة (3):

$$\frac{160}{3} - 5L - 2(\frac{200 + 15L^2}{6L}) = 0$$

$$\frac{160 - 15L}{3} = \frac{200 + 15L^2}{3L} \Rightarrow 30L^2 - 160L + 200 = 0$$

حساب المميز Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1600 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 40 > 0$$

للمعادلة حلين هما: $L = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

أو $L = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10}{3}$

بتعويض L في معادلة K نجد:

عندما $L = 2$ فإن $K = \frac{65}{3}$

عندما $L = \frac{10}{3}$ **فإن** $K = \frac{55}{3}$

بما أن لدينا قيمتين لكل من العمل و رأس المال، وجب المرور إلى الشرط الثاني لتعظيم دالة الإنتاج (أو الشرط الكافي): محدد المصفوفة الهيسية H يكون أكبر من الصفر.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \grave{V}_L}{\partial L} & \frac{\partial \grave{V}_L}{\partial K} & \frac{\partial \grave{V}_L}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \grave{V}_K}{\partial L} & \frac{\partial \grave{V}_K}{\partial K} & \frac{\partial \grave{V}_K}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \grave{V}_\lambda}{\partial L} & \frac{\partial \grave{V}_\lambda}{\partial K} & \frac{\partial \grave{V}_\lambda}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 - 6LK^3 & -9L^2K^2 & -5 \\ -9L^2K^2 & -9L^3K & -2 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

لكي تكون الثنائيات من العمل و رأس المال نهاية عظمى، يجب أن يكون محدد المصفوفة أعلاه أكبر من الصفر.

حساب المحدد:

$$|H| = \begin{vmatrix} 100 - 6LK^3 & -9L^2K^2 & -5 \\ -9L^2K^2 & -9L^3K & -2 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= +(100 - 6LK^3)\begin{vmatrix} -9L^3K & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-9L^2K^2)\begin{vmatrix} -9L^2K^2 & -2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} -9L^2K^2 & -9L^3K \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -400 + 24LK^3 - 90L^2K^2 - 90L^2K^2 - 225L^3K$$

عندما $L = 2$ و $K = \frac{65}{3}$:

$$|H| = 279489{,}69 > 0$$

عندما $L = \frac{10}{3}$ و $K = \frac{55}{3}$:

$$|H| = -243001{,}14 < 0$$

بالتالي التوليفة التي تحقق الشرط الثاني لتعظيم دالة الهدف و تجعل المنتج رشيدا(أقصى إنتاج عند مستوى معطى من التكاليف) هي : $L = 2$ و $K = \frac{65}{3}$.

حل التمرين الرابع:

لدينا: $$Q = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

1. **تحديد الإنتاجية الحدية للعمل و رأس المال:**

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Pmg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{1}{4} K^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

2. **الكميات من عناصر الإنتاج التي يستعملها المنتج لضمان الإنتاج الأعظم:**

$P_K = 1$ و $P_L = 2$ ، و $CT = 200$.

$$V = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}} + \lambda(200 - 2L - K)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{4}} - 2\lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = \frac{1}{4} K^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}} - \lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 200 - 2L - K = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\,.\,. (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{4}}}{\frac{1}{4} K^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{1} \Rightarrow L = \frac{3}{2} K$$

نعوض في المعادلة (3)(معادلة التكاليف):

$$200 - 2\left(\frac{3}{2} K\right) - K = 0$$

$$K = 50$$

$$L = \frac{3}{2} K \Rightarrow L = 75$$

التوليفة التي تحقق للمنتج أقصى إنتاج هي: $L^* = 75$; $K^* = 50$

3. ارتفاع سعر رأس المال إلى وحدتين نقديتين:

$P_K = 2$ و $P_L = 2$ ، و $CT = 200$.

يكون الإنتاج أعظمي إذا تحقق الشرط التالي (شرط التوازن):

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{-1}{4}}}{\frac{1}{4}K^{\frac{-3}{4}}L^{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow L = 3K$$

نعوض في معادلة التكاليف:

$$200 - 2L - 2K = 0 \Rightarrow 200 - 2(3K) - 2K = 0$$

$$\Rightarrow K = 25$$

$$L = 75$$

حل التمرين الخامس:

لدينا دالة الإنتاج: $Q = (L-1)^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}$ ، حيث $L > 1$.

1. معادلة الناتج المتساوي إذا كان $Q = 1$:

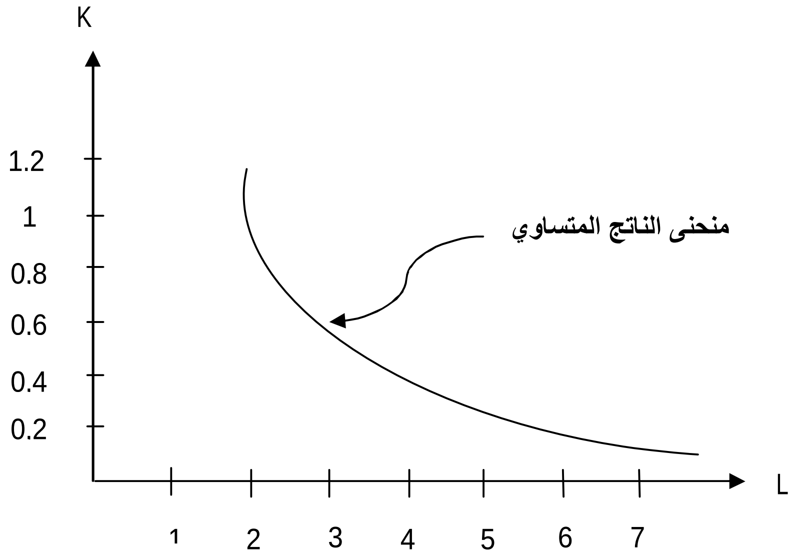
$$1 = (L-1)^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}$$

$$K = \frac{1}{(L-1)}$$

رسم منحنى الناتج المتساوي:

النقاط المساعدة:

L	2	3	4	5	6	7
K	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6



2. **أدنى تكلفة لإنتاج Q = 1:**

المطلوب، تدنية التكاليف عند مستوى معين من الإنتاج:

عندما، $P_K = 1$ و $P_L = 1$.

صيغة دالة لاغرونج (V) تكون على الشكل التالي:

$$V = K\,P_K + L\,P_L + \lambda(\overline{Q} - f(K,L))$$

$$V = K + L + \lambda(1 - ((L-1)^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}))$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = 1 - \lambda\frac{1}{4}K^{\frac{1}{4}}(L-1)^{\frac{-3}{4}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = 1 - \lambda\frac{1}{4}K^{\frac{-3}{4}}(L-1)^{\frac{1}{4}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 1 - ((L-1)^{\frac{1}{4}} K^{\frac{1}{4}}) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\lambda\frac{1}{4}K^{\frac{1}{4}}(L-1)^{\frac{-3}{4}}}{\lambda\frac{1}{4}K^{\frac{-3}{4}}(L-1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4}K}{\frac{1}{4}(L-1)} = \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow K = (L-1)$$

نعوض في المعادلة (3):

$$1-(K^{\frac{1}{4}}\,K^{\frac{1}{4}}) = 0 \Rightarrow K^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$K = 1$$

$$K = (L-1) \Rightarrow L = 2$$

$$CT = K\,P_K + L\,P_L = 1 + 2 = 3$$

أدنى تكلفة هي 3 و ن.

<u>عندما</u>، $P_K = 2$ و $P_L = 3$.

مباشرة من شرط التوازن:

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\lambda\frac{1}{4}K^{\frac{1}{4}}(L-1)^{\frac{-3}{4}}}{\lambda\frac{1}{4}K^{\frac{-3}{4}}(L-1)^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}K = (L-1)$$

نعوض في قيد الإنتاج:

$$1-((L-1)^{\frac{1}{4}}\,K^{\frac{1}{4}}) = 0 \Rightarrow 1-((\frac{2}{3}K)^{\frac{1}{4}}\,K^{\frac{1}{4}}) = 0 \Rightarrow (\frac{2}{3})^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}}$$

$$K = 1{,}23$$

$$L = 1{,}82$$

$$CT = 2K + 3L = 7{,}92$$

أدنى تكلفة هي 7,92 و ن.

3. التفسير الاقتصادي للنتائج السابقة:

عند مقارنة الحالتين السابقتين، يتبين أن السعر النسبي ل L ارتفع مقارنة بK ، و المنتج يعمل على إحلال L ب K ، لأن سعر L أصبح مرتفع نسبيا.

حل التمرين السادس:

لدينا: $Q = K\ L$

1. **الإنتاج الأعظم:**

$P_K = 10$ و $P_L = 20$ ، و $CT = 200$.

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{20}{10} \Rightarrow K = 2L$$

نعوض في قيد التكلفة:

$$200 - 20L - 10K = 0 \Rightarrow 200 - 20L - 10(2L) = 0$$

$$40L = 200 \Rightarrow L = 5$$

$$K = 2L \Rightarrow K = 10$$

$$Q = 10 \cdot 5 = 50$$

2. **الإنتاج الأعظم:**

$P_K = 20$ و $P_L = 20$ ، و $CT = 200$.

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{20}{20} \Rightarrow K = L$$

نعوض في قيد التكلفة:

$$200 - 20L - 20K = 0 \Rightarrow 200 - 20L - 20L = 0$$

$$40L = 200 \Rightarrow L = 5$$

$$K = L \Rightarrow K = 5$$

$$Q = 5 \cdot 5 = 25$$

الإنتاج الذي يحققه المنتج هو 25 وحدة فقط نظرا لارتفاع سعر رأس المال، الأمر الذي يحد من استعمال هذا العامل و يؤثر سلبا على الإنتاج.

3. إذا لم يرض المنتج بهذا الحل(25 وحدة) و أراد أن لا يتراجع عن مستوى إنتاجه الأصلي(50 وحدة):

المطلوب تدنية التكلفة عند مستوى معطى من الإنتاج:

$P_K=20$ و $P_L=20$ ، و $Q=50$.

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{20}{20} \Rightarrow K = L$$

نعوض في قيد الإنتاج:

$$50 - KL = 0 \Rightarrow K^2 = 50$$

$$K = \sqrt{50} \Rightarrow K = 7{,}07$$

$$K = L \Rightarrow L = 7{,}07$$

$$CT = KP_K + LP_L = 7{,}07 \cdot 20 + 7{,}07 \cdot 20 = 282{,}8$$

يجب على المنتج إنفاق ميزانية قدرها 282,8 دج (هي أدنى تكلفة) حتى يغطي تكاليف الإنتاج الأصلي في ظل الأسعار الجديدة لعوامل الإنتاج.

4. المعدل الحدي للإحلال التقني بين نقطتي التوازن التي تمكنان من المستوى الأصلي للإنتاج:

$$TMS = \frac{\Delta K}{\Delta L} = \frac{K_2 - K_1}{L_2 - L_1} = \frac{7 - 10}{7 - 5} = -\frac{3}{2}$$

عندما ارتفع سعر رأس المال من 10 دج إلى 20 دج كان لزاما على المنتج الذي يستعمل 10 وحدات من K أن لا يستعمل إلا 7 وحدات. فإذا أراد تعويض هذه الكمية تحتم عليه التخلي من رأس المال نتيجة لزيادة سعره و يستعمل بدلها وحدتين من العمل، أي أن يعوض 1,5 وحدة من K بوحدة من L و هذا ما يدل عليه المعدل الحدي للإحلال التقني.

حل التمرين السابع:

لدينا:
$$Q = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

1. **حساب الإنتاج المتوسط لكل من عنصري الإنتاج العمل و رأس المال:**

أ. الإنتاج المتوسط للعمل:

$$PM_L = \frac{Q}{L} = \frac{2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{L} \Rightarrow PM_L = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{-1}{2}}$$

ب. الإنتاج المتوسط لرأس المال:

$$PM_K = \frac{Q}{K} = \frac{2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{K} \Rightarrow PM_K = 2K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

2. **حساب الإنتاج الحدي لكل من عنصري الإنتاج العمل و رأس المال:**

أ. الإنتاج الحدي للعمل:

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{-1}{2}}$$

ب. الإنتاج الحدي لرأس المال:

$$Pmg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

3. **حساب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل عند مستوى ثابت من رأس المال :**

$$E_L = \frac{Pmg_L}{PM_L} \Rightarrow E_L = \frac{K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{-1}{2}}}{2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{-1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

تبين المرونة أن الإنتاج يمر بمرحلة تناقص الغلة عندما يتغير العمل مع ثبات رأس المال.

4. **حساب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال عند مستوى ثابت من العمل:**

$$E_K = \frac{Pmg_K}{PM_K} \Rightarrow E_K = \frac{K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{2K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

تبين المرونة أن الإنتاج يمر بمرحلة تناقص الغلة عندما يتغير رأس المال مع ثبات العمل.

5. ، **حساب مرونة الإنتاج الكلي بالنسبة لعنصري العمل و رأس المال، بافتراض حدوث التغير في كل من العمل و رأس المال معا:**

$$E_{LK} = E_L + E_K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

تبين مرونة الإنتاج الكلي بالنسبة لعنصري العمل و رأس المال عند تغير عنصري الإنتاج معا أن الإنتاج يمر بمرحلة ثبات الغلة.

ملاحظة:

- تقسيم مراحل الإنتاج في هذا التمرين تمت وفقا لمرونة الإنتاج للعامل الإنتاجي(العمل)، و تم تحديد غلة الحجم: غلة حجم متزايدة (زيادة المستخدم بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنسبة اكبر)، غلة حجم ثابتة (زيادة المستخدم بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنفس النسبة) أو غلة حجم متناقصة (زيادة المستخدم بنسبة معينة تؤدي إلى زيادة الإنتاج بنسبة أقل).
- بالنسبة لمرونة الإنتاج المرتبطة بتغير عاملي الإنتاج معا (المدى الطويل) تستوجب التطرق إلى مفهوم مهم جدا و المتمثل في درجة تجانس الدالة و الذي من خلاله نحدد مرونة الإنتاج و غلة الحجم في المدى الطويل، سوف نتطرق إلى تجانس الدالة في التمارين اللاحقة.

6. **حجم العمل و حجم رأس المال الذي يعظم الإنتاج :**

$P_K = 20$ و $P_L = 10$ ، و $CT = 2000$.

$$V = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} + \lambda(2000 - 10L - 20K)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{-1}{2}} - 10\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}} - 20\,\lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 2000 - 10L - 20K = 0 \dots\dots\dots\dots\dots .. (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{-1}{2}}}{K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = \frac{10}{20} \Rightarrow L = 2K$$

نعوض في المعادلة (3):

$$2000 - 10(2K) - 20K = 0 \Rightarrow 2000 = 40K$$

$$K = 50$$

$$L = 2K \Rightarrow L = 100$$

التوليفة التي تحقق للمنتج أقصى إنتاج هي: $L^* = 100$; $K^* = 50$

حل التمرين الثامن:

لدينا: $Q = 2K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{2}{3}}$

1. **تحديد غلة الحجم:**

تجانس دالة:

نقول عن الدالة f(K, L) أنها متجاسة من الدرجة λ إذا تحقق عند القيمة t ما يلي:

$$f(tK, tL) = t^{\lambda} f(K, L)$$

يعني ذلك إذا ضاعفنا عوامل الإنتاج بمقدار t، فإن الإنتاج يزيد بمقدار t^{λ}، و بالتالي:

- إذا كان، $\lambda > 1$، تكون غلة الحجم متزايدة أو مردود سلمي متزايد: نسبة الزيادة في الإنتاج تكون أكبر من نسبة الزيادة في عاملي الإنتاج.
- إذا كان، $\lambda = 1$، تكون غلة الحجم ثابتة أو مردود سلمي ثابت: نسبة الزيادة في الإنتاج تكون تساوي نسبة الزيادة في عاملي الإنتاج.

- إذا كان، $\lambda < 1$، تكون غلة الحجم متناقصة أو مردود سلمي متناقص: نسبة الزيادة في الإنتاج تكون أقل من نسبة الزيادة في عاملي الإنتاج.

بالعودة إلى المطلوب، لدينا:

$$Q = f(K,L) = 2K^{\frac{1}{4}}\, L^{\frac{2}{3}}$$

$$f(tK,tL) = 2(tK)^{\frac{1}{4}}\,(tL)^{\frac{2}{3}}$$

$$f(tK,tL) = 2t^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}\, t^{\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$f(tK,tL) = t^{\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}\, 2K^{\frac{1}{4}}\, L^{\frac{2}{3}}$$

$$f(tK,tL) = t^{\frac{11}{12}}\, 2K^{\frac{1}{4}}\, L^{\frac{2}{3}}$$

الدالة متجانسة من الدرجة $\frac{11}{12}$ وهي أقل من 1 و بالتالي غلة الحجم هي متناقصة.

ملاحظة:

الدالة محل الدراسة هي من الشكل كوب دوغلاس :

$$f(K,L) = AK^{\alpha}\, L^{\beta}$$

درجة تجانس هذه الدالة هي :

$$f(tK,tL) = A(tK)^{\alpha}\,(tL)^{\beta}$$

$$f(tK,tL) = At^{\alpha}K^{\alpha}\, t^{\beta}L^{\beta}$$

$$f(tK,tL) = t^{\alpha+\beta}AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$f(tK,tL) = t^{\alpha+\beta}f(K,L)$$

إذن الدالة من الشكل كوب دوغلاس هي متجانسة من الدرجة $\alpha + \beta$:

إذا كان، $\alpha + \beta > 1$، تكون غلة الحجم متزايدة.

إذا كان، $\alpha + \beta = 1$، تكون غلة الحجم ثابتة.

إذا كان، $\alpha + \beta < 1$، تكون غلة الحجم متناقصة.

2. **الإنتاج الأعظم:**

. $CT = 1485$, $P_L = 10$, $P_K = 4$

$$V = 2K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{2}{3}} + \lambda(1485 - 10L - 4K)$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \frac{2}{3}K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{3}} - 10\lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = \frac{1}{4}K^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{2}{3}} - 4\lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 1485 - 10L - 4K = 0 \dots\dots\dots\dots\dots.. (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{3}K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{3}}}{\frac{1}{4}K^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{2}{3}}} = \frac{10}{4} \Rightarrow \frac{\frac{2}{3}K}{\frac{1}{4}L} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}K = \frac{5}{4}L \Rightarrow L = \frac{16}{15}K$$

نعوض في المعادلة (3):

$$1485 - 10(\frac{16}{15}K) - 4K = 0$$

$$\Rightarrow K^* = 101{,}25$$

$$L = \frac{16}{15}K \Rightarrow L^* = 108$$

$$Q^* = 139{,}35$$

3. **إيجاد K و L التي تؤدي إلى تدنية التكاليف عند مستوى إنتاج $Q = 150$:**

دالة لاغرونج تصبح كما يلي:

$$V = 10L + 4K + \lambda(150 - 2K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{2}{3}})$$

$$\frac{\partial V}{\partial L} = 10 - \lambda \frac{2}{3} K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{3}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial K} = 4 - \lambda \frac{1}{4} K^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{2}{3}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 150 - 2K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{2}{3}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3)$$

بعد حل المعادلات الثلاثة نحصل على:

$$K^* = 105{,}9$$

$$L^* = 113$$

$$CT = KP_K + LP_L = 105{,}9 \cdot 4 + 113 \cdot 10 = 1553{,}6$$

أدنى تكلفة للوصول إلى إنتاج يساوي 150 وحدة و في ظل أسعار عوامل الإنتاج هي : 1553,6 و ن .

حل التمرين التاسع:

1. **تحديد الوضعية المثلى للمؤسسة إذا كان الهدف هو تحقيق إنتاج 175 = Q :**

إذا كانت المؤسسة عقلانية ستبحث عن الوصول إلى هذه الكمية من الإنتاج بأقل تكلفة ممكنة، أي سوف تبحث عن تدنية التكلفة لإنتاج معطى.

ثلاث تركيبات لعوامل الإنتاج (D, E, F) يمكن أن تحقق إنتاج 175 وحدة. بما أننا نعلم معادلة التكلفة ($CT= KP_K + LP_L$)، يمكن حساب حجم الإنفاق اللازم للمؤسسة في كل حالة.

$$D(K = 5{,}5\,;L = 1{,}5) \Rightarrow CT = (2 \cdot 5{,}5) + (2 \cdot 1{,}5) = 14$$

$$E(K = 3{,}5\,;L = 2{,}5) \Rightarrow CT = (2 \cdot 3{,}5) + (2 \cdot 2{,}5) = 12$$

$$F(K = 2\,;L = 5) \Rightarrow CT = (2 \cdot 2) + (2 \cdot 5) = 14$$

E هي الحالة الأمثل للمؤسسة لإنتاج كمية 175 وحدة لأنها تمثل أقل تكلفة. هذه النقطة تسمح للمؤسسة بالوصول إلى أقصى ربح، أي الوصول أقصى فرق ممكن بين الإيرادات المحصل عليها من بيع 175 وحدة من Q و التكلفة المتعلقة بإنتاج هذه الكمية.

2. التمثيل البياني لمنحنيات الناتج المتساوي و الوضعية المثلى للمطلوب الأول:

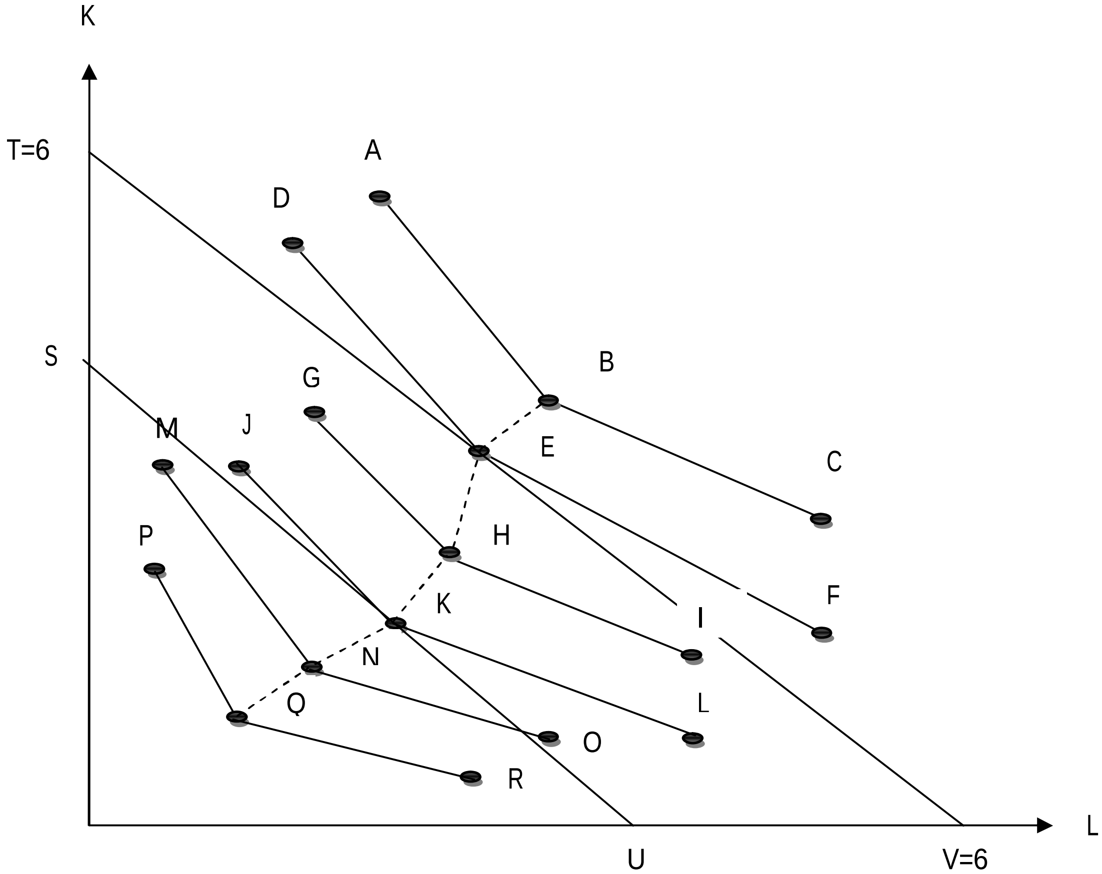
الشكل التالي يعطي منحنيات الناتج المتساوي، و خط التكاليف الذي تكتب معادلته على الشكل التالي:

$$CT = 2L + 2K \Rightarrow K = -L + \frac{CT}{2}$$

أما عن مستوى التكلفة (CT) عند كل مستوى من الإنتاج، فنأخذ أقل قيمة من التكلفة(مثلما هو الحال مع مستوى إنتاج 175 وحدة).

بالنسبة لحجم إنتاج 175 وحدة، دالة التكاليف تكتب:

$$12 = 2L + 2K \Rightarrow K = -L + 6$$



الشكل: خارطة منحنيات الناتج المتساوي

التمثيل البياني لخط التكلفة للكمية Q=175 هو معطى بالمستقيم TV. هذا المستقيم يمس منحنى الناتج المتساوي في نقطة وحيدة هي نقطة التوازن.

3. تحديد الإنتاج و التوليفة المثلى لعاملي الإنتاج عندما تكون الميزانية المتوفرة للمؤسسة : CT=8

المطلوب هو البحث عن الإنتاج الأعظم عند مستوى معطى من التكاليف.

بالنسبة للتكلفة CT=8، معادلة التكلفة سوف تكون:

$$8 = 2L + 2K \Rightarrow K = -L + 4$$

كل التوليفات من عاملي الإنتاج (K,L) المرتبطة بالعلاقة K + L = 4 تتحقق عند التكلفة CT=8 . تلك التي تحقق K + L < 4 سوف تتحقق عند تكلفة أقل من 8، و تلك التي تحقق K + L > 4 سوف تتحقق عند تكلفة أكبر من 8 .

بما أن الإنفاق لا يمكن أن يتجاوز 8 ، كما أن عقلانية المنتج تستوجب على المنتج أن لا ينفق أقل من الميزانية المتوفرة، بالتالي الاختيار الأمثل للمنتج هو مرتبط ب K + L = 4.

التوليفات M, K, O تستجيب للشرط K + L = 4، الاختيار يكون بين هذه الثلاث نقاط.

$$M(K = 3{,}5\,; L = 0{,}5) \Rightarrow Q = 65$$

$$K(K = 2\,; L = 2) \Rightarrow Q = 100$$

$$O(K = 1\,; L = 3) \Rightarrow Q = 65$$

المفاضلة بين النقاط الثلاثة تبين أن النقطة K تمثل الاختيار الأمثل للمؤسسة.

خط التكاليف $K = -L + 4$ الممثل في الشكل SU سيمس منحنى الناتج المتساوي للكمية Q=100 في النقطة K .

4. تحديد بيانيا مسار التوسع للمؤسسة، مع الإبقاء على أسعار عاملي الإنتاج كما هي: $P_L =$ $P_K=2$:

منحنى مسار التوسع للمؤسسة هو المنحنى الذي يربط بين نقاط التوازن المختلفة إذا تغيرت التكلفة الكلية مع ثبات أسعار عاملي الإنتاج. مسار التوسع في نظرية سلوك المنتج يمثل منحنى استهلاك الدخل في سلوك المستهلك.

بالنسبة لحالتنا، النقاط Q , N, K, H, E, B تمثل نقاط منحنى مسار التوسع.

حل التمرين العاشر:

حساب درجة تجانس الدوال و تحديد طبيعة المردود السلمي:

1. $\boldsymbol{f(K\,,L) = KL + K^2 + L^2}$

$$f(tK, tL) = (tK)(tL) + (tK)^2 + (tL)^2$$

$$f(tK, tL) = t^2KL + t^2K^2 + t^2L^2$$

$$f(tK, tL) = t^2(KL + K^2 + L^2)$$

$$f(tK, tL) = t^2 f(K\,,L)$$

الدالة متجانسة من الدرجة 2 (أكبر من الواحد)، بالتالي المردود السلمي متزايد.

2. $\boldsymbol{f(K\,,L) = K^2L + K\,L^2}$

$$f(tK, tL) = (tK)^2(tL) + (tK)(tL)^2$$

$$f(tK, tL) = t^2K^2tL + tKt^2L^2$$

$$f(tK, tL) = t^3K^2L + t^3K\,L^2$$

$$f(tK, tL) = t^3(K^2L + K\,L^2)$$

$$f(tK, tL) = t^3 f(K\,,L)$$

الدالة متجانسة من الدرجة 3 (أكبر من الواحد)، بالتالي: المردود السلمي متزايد.

3. $\boldsymbol{f(K\,,L) = (K-8)^{\frac{1}{3}}\,L^{\frac{1}{3}}}$

$$f(tK, tL) = (tK-8)^{\frac{1}{3}}\,(tL)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(tK, tL) = (t(K-\frac{8}{t}))^{\frac{1}{3}}\,(tL)^{\frac{1}{3}}$$

$$f(tK, tL) = t^{\frac{1}{3}}(K-\frac{8}{t})^{\frac{1}{3}}\,t^{\frac{1}{3}}L^{\frac{1}{3}}$$

$$f(tK, tL) = t^{\frac{2}{3}}(K-\frac{8}{t})^{\frac{1}{3}}\,L^{\frac{1}{3}}$$

$$(K-\frac{8}{t})^{\frac{1}{3}}\,L^{\frac{1}{3}} \neq f(K\,,L)$$

الدالة غير متجانسة.

4. $\boldsymbol{f(K\,,L) = K^2L}$

$$f(tK,tL) = (tK)^2(tL)$$

$$f(tK,tL) = t^2K^2tL$$

$$f(tK,tL) = t^3K^2L$$

$$f(tK,tL) = t^3f(K\,,L)$$

الدالة متجانسة من الدرجة 3 (أكبر من الواحد)، بالتالي: المردود السلمي متزايد.

هذه الدالة هي من الشكل كوب دوغلاس و بالتالي يمكن استنتاج درجة تجانسها مباشرة بجمع المرونات المتعلقة بالعمل و رأس المال $(\alpha + \beta)$.

5. $\boldsymbol{f(K\,,L) = KL + K + L}$

$$f(tK,tL) = (tK\;tL) + tK + tL$$

$$f(tK,tL) = t(tKL + K + L)$$

$$(tKL + K + L) \neq f(K\,,L)$$

الدالة غير متجانسة.

6. $\boldsymbol{f(K\,,L) = K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{4}}}$

الدالة هي من الشكل كوب دوغلاس و بالتالي درجة تجانسها تساوي: $(\alpha + \beta)$.

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

الدالة متجانسة من الدرجة $\frac{2}{4}$ (أقل من الواحد)، بالتالي: المردود السلمي متناقص.

الفصل الرابع:

تكاليف الإنتاج

تكاليف الإنتاج هي مجموع النفقات الضرورية في سبيل الوصول إلى إنتاج معطى. نسمي العلاقة بين مستويات الإنتاج المختلفة و الحد الأدنى من التكاليف المتعلقة به **بدالة التكلفة**، أي العلاقة بين تكاليف الإنتاج و تدفقات الإنتاج.

1. دالة التكلفة في المدى القصير:

دالة التكلفة في المدى القصير يمكن تقسيمها إلى دالة التكاليف الكلية، المتوسطة و الحدية، أو إلى تكاليف كلية و تكاليف وحدوية.

1.1. دالة التكاليف الكلية:

التكاليف الكلية في الفترة القصيرة تقسم إلى تكاليف ثابتة و تكاليف متغيرة.

أ. التكاليف الثابتة الكلية (CF):

تمثل مجموع النفقات الصريحة و الضمنية المتعلقة باستخدام العوامل الثابتة. التكاليف الثابتة هي إذن غير مرتبطة بالكمية المنتجة، هذه التكاليف تبقى ثابتة ما دام لم يتغير حجم المؤسسة، و المؤسسة تتحمل هذه التكاليف حتى و إن كان حجم الإنتاج يساوي صفر.

ب. التكاليف المتغيرة الكلية (CV):

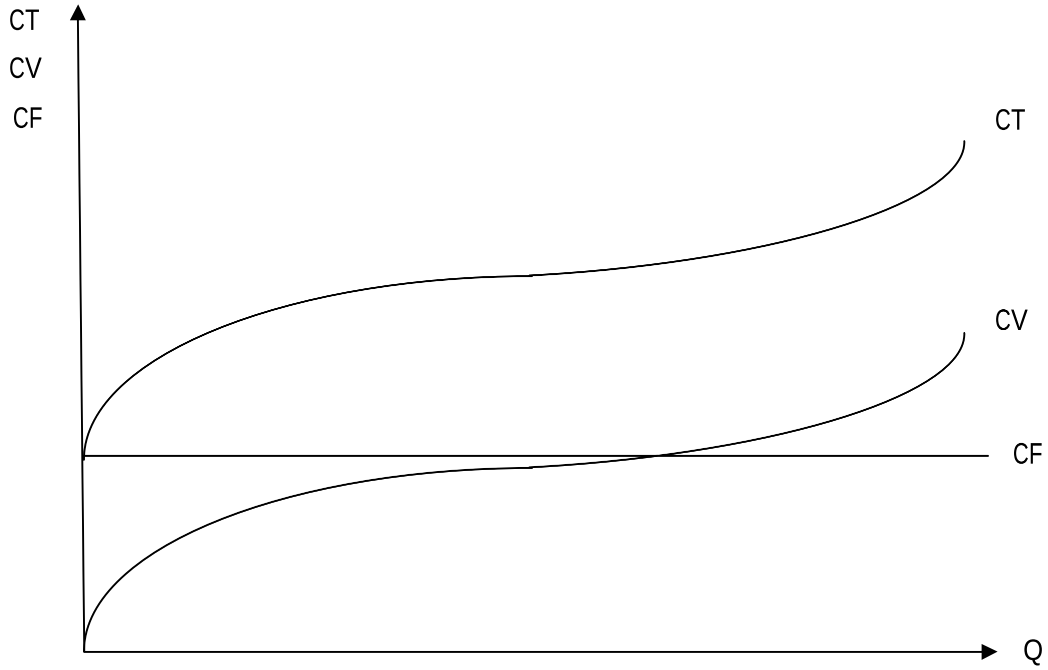
تمثل التكاليف المتعلقة باستخدام العوامل المتغيرة مثل المواد الأولية، الأجور، مصاريف النقل..الخ. التكاليف المتغيرة الكلية تمثل مختلف التكاليف التي تتغير مع الكمية المنتجة.

ج. التكاليف الكلية (CT):

هي مجموع التكاليف الثابتة الكلية و مجوع التكاليف المتغيرة الكلية.، بحيث: CT= CF + CV .

بالتالي: $\boldsymbol{CT = CF + f(Q)}$

$f(Q)$ تمثل التكاليف المتغيرة و التي هي عبارة عن دالة مرتبطة بحجم الإنتاج.



الشكل1.4: تكاليف الإنتاج في المدى القصير

نلاحظ في الشكل (1.4) أن منحنى التكلفة الكلية يأخذ شكل منحنى التكلفة المتغيرة، لأن كل تغير في التكاليف الكلية هو راجع إلى التغير في التكاليف المتغيرة. المسافة بين التكلفة المتغيرة و التكلفة الكلية يساوي مجموع التكلفة الثابتة.

2.1. دالة التكلفة المتوسطة:

أ. **التكاليف الثابتة المتوسطة**(CFM): تشير إلى نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف الثابتة الكلية.

$$CFM = \frac{CF}{Q}$$

ب. **التكاليف المتغيرة المتوسطة**(CVM): تشير إلى نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف المتغيرة الكلية.

$$CVM = \frac{CV}{Q}$$

ج. **التكاليف الكلية المتوسطة**(CTM أو CM): تشير إلى نصيب الوحدة المنتجة من التكاليف الكلية.

$$CM = \frac{CT}{Q}$$

$$CM = CFM + CVM$$

3.1. التكلفة الحدية (Cmg):

هي التغير في التكلفة الكلية الناتج عن زيادة الإنتاج بوحدة واحدة، يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

عندما تكون دالة التكلفة دالة مستمرة، و ΔQ يؤول إلى الصفر:

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial Q}$$

بيانيا التكلفة الحدية تمثل ميل منحنى التكلفة الكلية، و التكاليف الثابتة لا تدخل في حساب التكلفة الحدية لأن التكاليف الثابتة غير مرتبطة بالإنتاج، و منه التكلفة الحدية تساوي التكلفة الحدية المتغيرة.

2. دالة التكلفة في المدى الطويل:

في المدى الطويل كما ذكرنا سابقا تكون كل عوامل الإنتاج متغيرة بما في ذلك التكاليف الثابتة التي كانت ثابتة في المدى القصير. بالتالي في المدى الطويل تصبح كل من التكاليف الثابتة و المتغيرة مرتبطة بحجم الإنتاج. و تصبح دالة التكلفة الكلية دالة صريحة لحجم الإنتاج: $CT = f(Q)$.

3. تمارين عن تكاليف الإنتاج:

التمرين الأول:

الجدول الأتي يبين التكاليف المتغيرة حسب الكمية المنتجة.

Q	0	1	2	3	4	5	6
CV	0	6	8	9	11	14	21

إذا كانت التكاليف الثابتة تقدر ب 6 وحدات نقدية.

1. أحسب التكاليف الكلية.
2. ارسم بيانيا التكاليف المتغيرة، الثابتة و الكلية.

التمرين الثاني:

ارجع إلى جدول التمرين السابق.

1. أحسب كل من التكاليف المتوسطة المتغيرة، التكاليف المتوسطة الثابتة و التكاليف المتوسطة الكلية ثم التكاليف الحدية.
2. أرسم بيانيا كل هذه التكاليف، حلل وضعية المؤسسة استنادا على هذه التكاليف.

التمرين الثالث:

الجدول التالي يبين التكاليف قصيرة المدى لخمسة مستويات من الإنتاج بحيث يعبر كل مستوى عن فترة:

المستوى 1		المستوى 2		المستوى 3		المستوى 4		المستوى 5	
Q	CMTC	Q	CMTC	Q	CMTC	Q	CMTC	Q	CMTC
1	15,50	2	15,50	5	10	8	10	9	12
2	13	3	12	6	8,5	9	9,5	10	11
3	12	4	11	7	8	10	10,5	11	11,50
4	11,75	5	9,5	8	8,5	11	12	12	13
5	14	6	11	9	10	12	15	13	16

1. مثل بيانيا التكاليف المتوسطة الكلية في المدى القصير للمستويات الخمسة.
2. استنتج تكاليف المدى الطويل، الكلية و المتوسطة و الحدية منها.

3. مثل التكاليف المتوسطة الكلية و التكاليف الحدية في المدى الطويل و بين عتبة المردودية في المدى الطويل.

التمرين الرابع:

إذا كانت دالة التكاليف الكلية للإنتاج هي: $CT = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 2$

1. عين التكلفة الكلية الثابتة.
2. عين التكلفة الثابتة المتوسطة.
3. عين التكلفة الكلية المتوسطة.
4. عين التكلفة الكلية المتغيرة.
5. عين التكلفة المتغيرة المتوسطة.
6. عين التكلفة الحدية.

التمرين الخامس:

لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$

1. حدد دالة التكلفة الكلية في المدى القصير.
2. حدد دالة التكلفة المتوسطة في المدى القصير، حيث $P_K=2$ و $P_L = 8$.

التمرين السادس:

لدينا دالة الإنتاج التالية:

$$Q = K L$$

إذا كان سعر العمل هو وحدة نقدية واحدة و سعر رأس المال هو 4 وحدات نقدية.

1. حدد دالة التكاليف الكلية في المدى الطويل.
2. حدد عتبة مردودية المؤسسة.

التمرين السابع:

لدينا دوال الإنتاج الثلاثة التالية:

$$Q_1 = 3K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} \; ; \; Q_2 = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \; ; Q_3 = K L$$

أما المواد المخصصة على المستخدمات من عوامل الإنتاج هي: CT = 10 L + 6 K

المطلوب:

1. عين دالة التكاليف كدالة صريحة في الإنتاج لكل من الدوال الثلاثة.
2. أحسب دوال التكلفة المتوسطة و التكلفة الحدية.
3. ماهي المراحل التي يمر بها الإنتاج حسب كل دالة.
4. نفترض أن حجم الموارد المخصصة للإنفاق على المستخدمات ثابت و هو 250 و ن، أحسب الحجم الأمثل لعوامل الإنتاج الذي يعظم الإنتاج (بالنسبة للدالة الأولى فقط).

التمرين الثامن:

لدينا دالة الإنتاج التالية: $Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$

إذا كان PK=5 و PL= 3

1. حدد التكلفة الكلية، التكلفة المتوسطة الكلية و التكلفة الحدية.
2. حدد دالة عرض المؤسسة .
3. حدد عتبة المردودية و ما تعليقك على النتيجة.

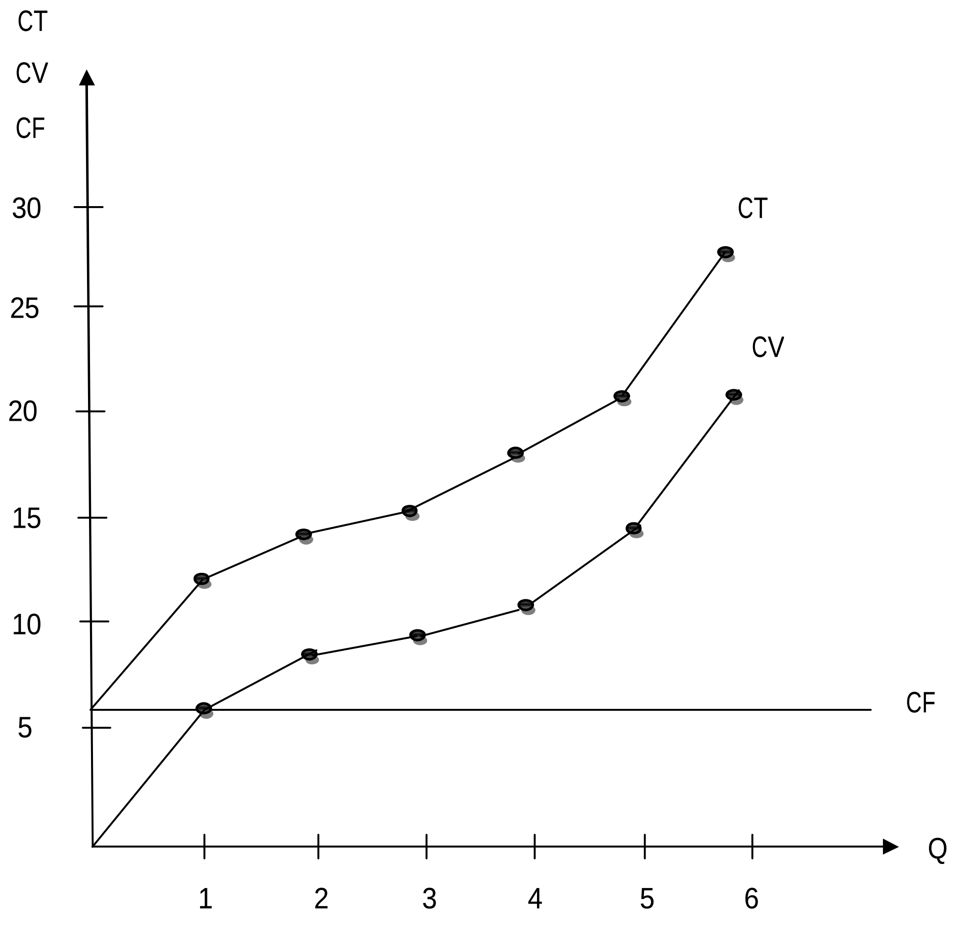
4. حل تمارين تكاليف الإنتاج:

حل التمرين الأول:

1. **حساب التكاليف الكلية:** التكاليف هي موضحة في الجدول التالي.

Q	0	1	2	3	4	5	6
CV	0	6	8	9	11	14	21
CF	6	6	6	6	6	6	6
CT	6	12	14	15	17	20	27

2. **الرسم البياني للتكاليف المتغيرة، الثابتة و الكلية:**

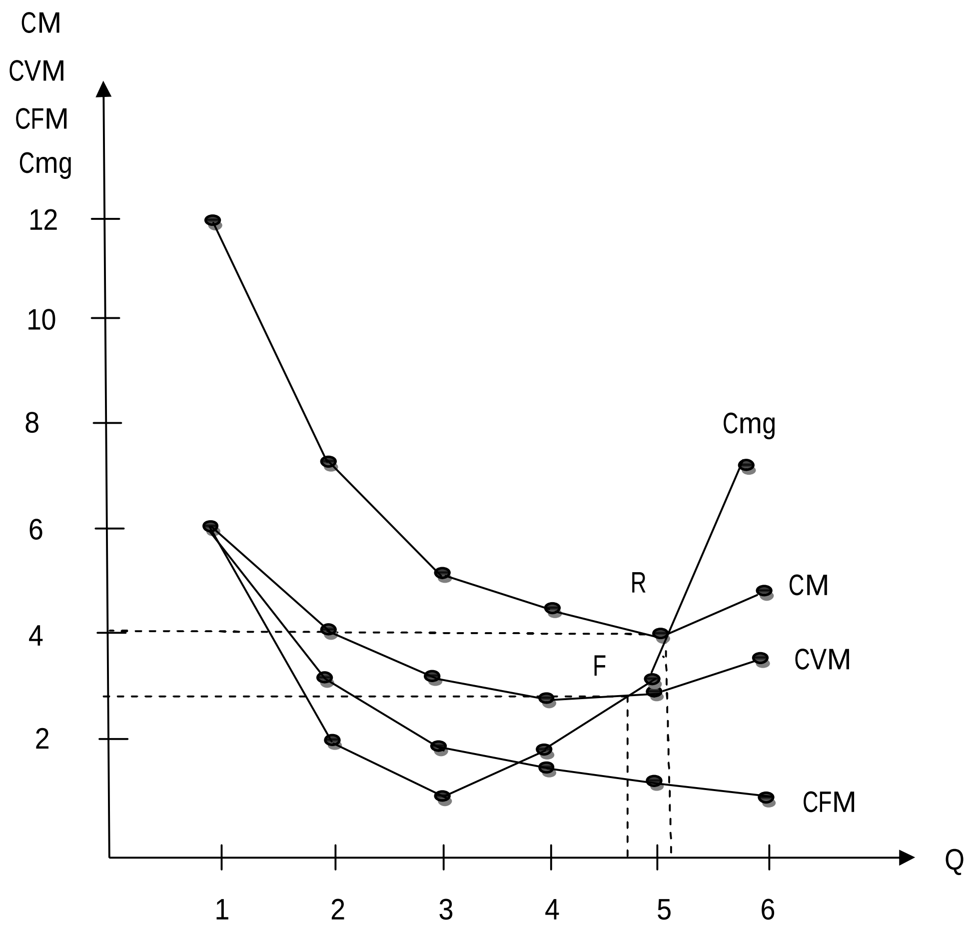


حل التمرين الثاني:

1. **حساب التكاليف المتوسطة المتغيرة، التكاليف المتوسطة الثابتة و التكاليف المتوسطة الكلية ثم التكاليف الحدية: هي موضحة في الجدول أدناه.**

Cmg	CM	CFM	CVM	Q
-	-	-	-	0
6	12	6	6	1
2	7	3	4	2
1	5	2	3	3
2	4,25	1,50	2,75	4
3	4	1,20	2,80	5
7	4,50	1	3,50	6

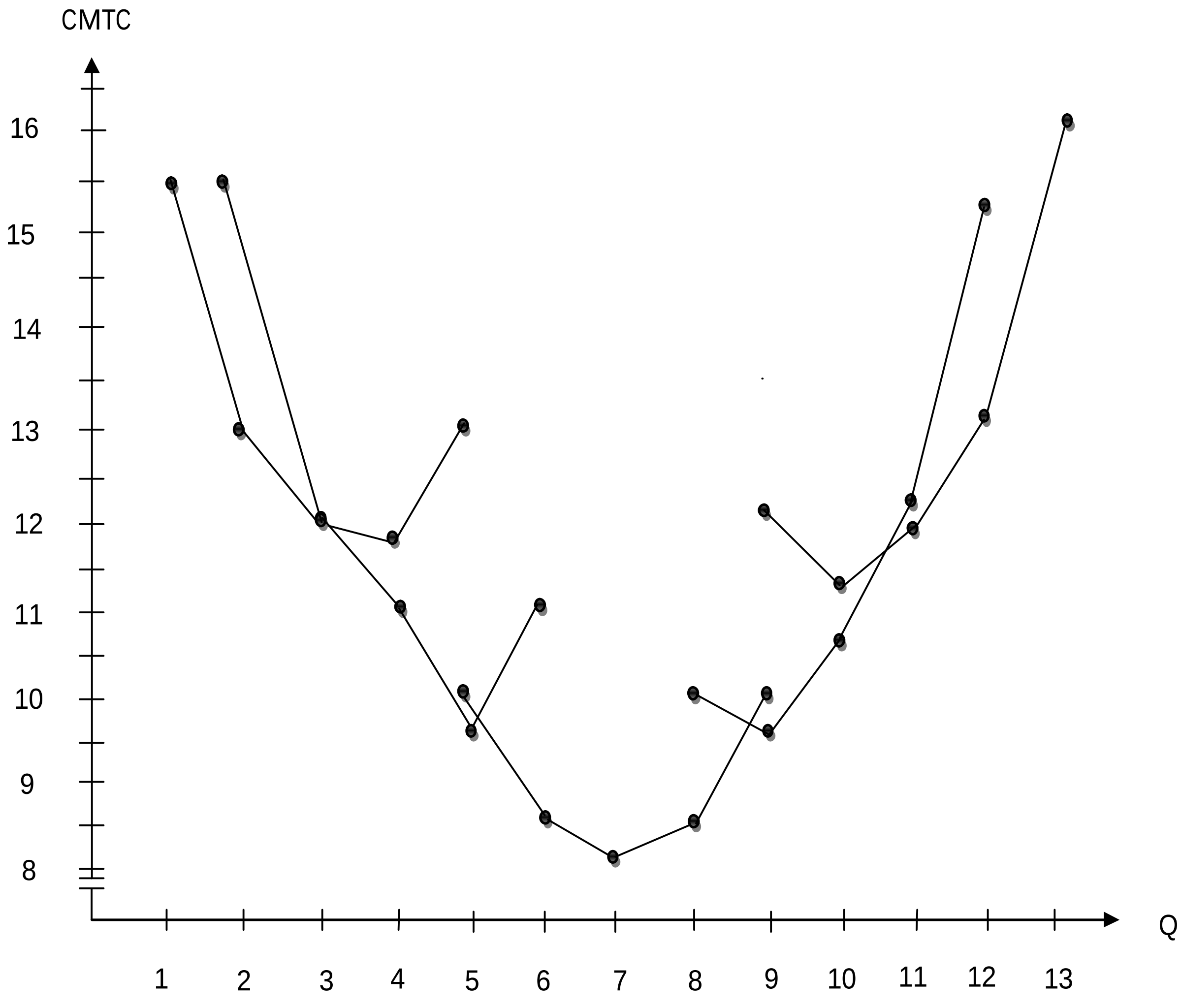
2. **الرسم البياني للتكاليف:**



التكلفة الحدية Cmg تقطع التكلفة المتوسطة الكلية CM في النقطة R و هي عتبة المردودية و تقطع التكلفة المتوسطة المتغيرة CVM في النقطة F و هي عتبة الإغلاق. في النقطة الأولى المؤسسة لن تحقق أي ربح و تكون الإيرادات الكلية تساوي التكاليف الكلية، و تبدأ المؤسسة في تحقيق الربح عندما تتعدى هذه النقطة. أما إذا وقعت المؤسسة تحت عتبة الإغلاق يجب عليها أن تتوقف عن العمل. أما بين العتبتين فالمؤسسة تغطي جزء من التكاليف و يجب عليها تحسين أداءها.

حل التمرين الثالث:

1. **التمثيل البياني للتكاليف المتوسطة الكلية في المدى القصير للمراحل الخمسة:**



2. **استنتاج تكاليف المدى الطويل، الكلية و المتوسطة و الحدية:**

بالنسبة للتكاليف في المدى الطويل، فإن التكاليف الحدية تحافظ على نفس الشكل أما التكاليف المتوسطة في المدى الطويل فإنها تمر بمجموع النقاط الدنيا للتكاليف المتوسطة في المدى القصير.

رياضيا:

$$CMTL = \sum CMTC$$

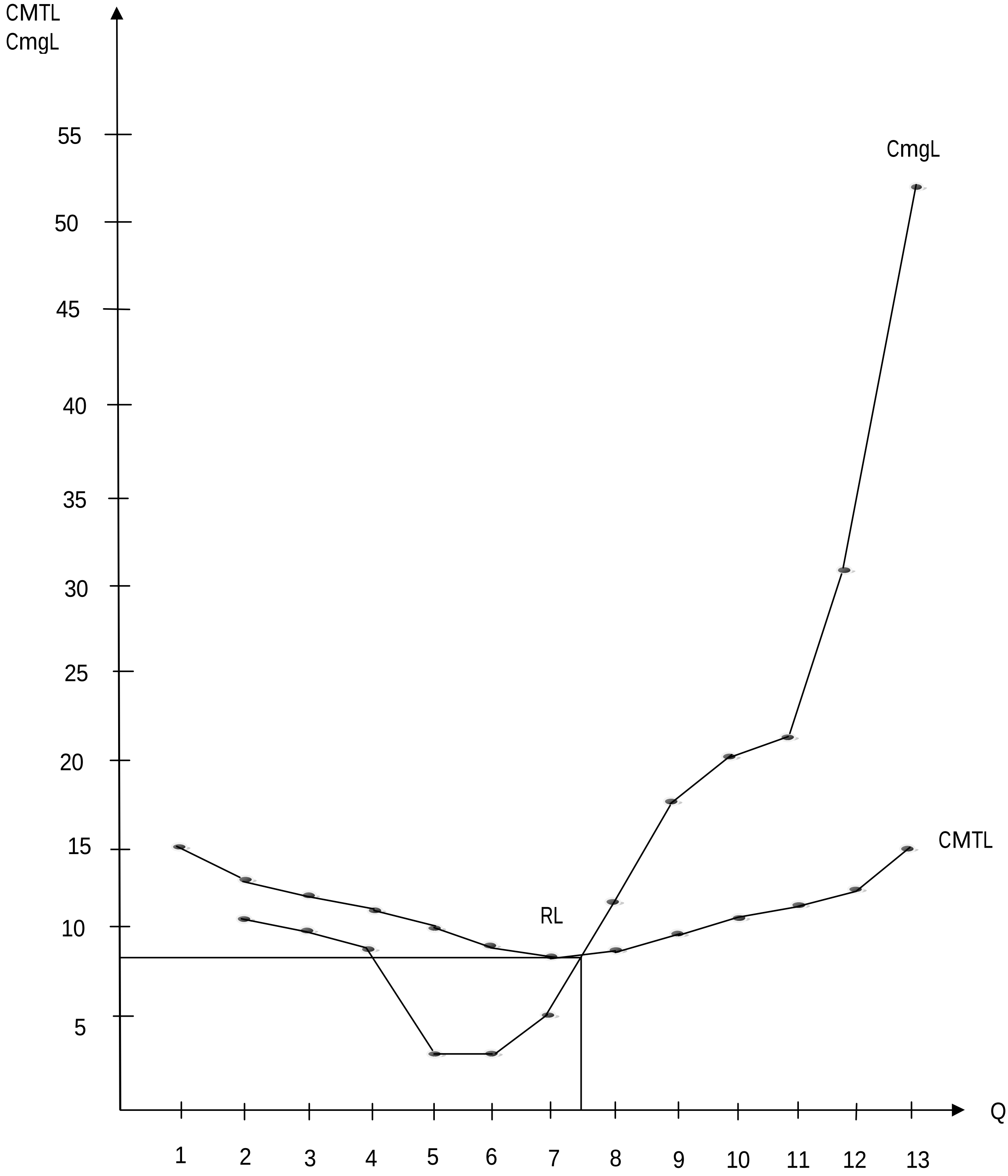
بحيث: CMTL: تمثل التكاليف المتوسطة طويلة المدى.

CMTC : تمثل التكاليف المتوسطة قصيرة المدى.

لاستخراج التكاليف المتوسطة نقارن الكميات المنتجة في المراحل المختلفة ثم نختار أقل تكلفة متوسطة كلية عند كل كمية منتجة و لجميع المراحل. على سبيل المثال عندما يريد المنتج إنتاج كمية تساوي 2 فله أن ينتجها بكلفة متوسطة كلية في المدى القصير تساوي 13 وحدة نقدية في المرحلة الأولى أو إنتاجها ب 15,50 وحدة نقدية في المرحلة الثانية، بالتالي يختار أن ينتجها بأقل كلفة و هي 13 وحدة نقدية في المرحلة الأولى، و هكذا بالنسبة لباقي الكميات التي يريد إنتاجها و مقارنة التكلفة المقابلة لها في جميع المراحل و اختيار أقل تكلفة. سنلخص ذلك في الجدول التالي:

الكمية المنتجة Q	التكلفة المتوسطة في المدى الطويل CMTL	التكلفة الكلية في المدى الطويل CTL	التكلفة الحدية في المدى الطويل CmgL
1	15,50	15,50	-
2	13	26	10,50
3	12	36	10
4	11	44	8
5	9,50	47,50	3,5
6	8,50	51	3,5
7	8	56	5
8	8,50	68	12
9	9,50	85,50	17,50
10	10,50	105	19,50
11	11,50	126,50	21,50
12	13	165	29,50
13	16	208	52

3. التمثيل البياني للتكاليف المتوسطة الكلية و التكاليف الحدية في المدى الطويل و تبيان عتبة المردودية في المدى الطويل:



يتقاطع منحنى التكلفة الحدية مع منحنى التكلفة المتوسطة في المدى الطويل في النقطة RL التي تعبر عن عتبة المردودية في المدى الطويل. عتبة المردودية هي النقطة التي تبدأ عندها المؤسسة في تحقيق الربح.

حل التمرين الرابع:

لدينا : $CT = Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 2$

1. **التكلفة الكلية الثابتة هي:** CF = 2 .
2. **التكلفة الثابتة المتوسطة:**

$$CFM = \frac{CF}{Q} = \frac{2}{Q}$$

3. **التكلفة الكلية المتوسطة:**

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{Q^3 - 6Q^2 + 15Q + 2}{Q} = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{2}{Q}$$

4. **التكلفة الكلية المتغيرة:**

$$CV = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$$

5. **التكلفة المتغيرة المتوسطة:**

$$CVM = \frac{CV}{Q} = Q^2 - 6Q + 15$$

6. **التكلفة الحدية:**

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 3Q^2 - 12Q + 15$$

حل التمرين الخامس:

لدينا: $Q = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$

1. **دالة التكلفة الكلية في المدى القصير:**

في المدى القصير رأس المال يكون ثابت ($K = K_0$)، دالة الإنتاج تصبح:

$$Q = 2K_0^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

$$L^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{2K_0^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{Q^2}}{\boldsymbol{4K_0}}$$

نعوض قيمة L في معادلة التكلفة:

$$CT = K_0P_K + LP_L$$

$$CT = K_0P_K + P_L(\frac{Q^2}{4K_0})$$

$$CT = K_0P_K + \frac{P_L}{4K_0}Q^2$$

CT: دالة التكلفة في المدى القصير.

K_0P_K : تمثل التكاليف الثابتة (CF).

$\frac{P_L}{4K_0}Q^2$: تمثل التكاليف المتغيرة (CV).

2. **دالة التكلفة المتوسطة في المدى القصير:**

$P_K=2$ و $P_L = 8$.

$$CTM = \frac{CT}{Q}$$

$$CTM = \frac{2K_0}{Q} + \frac{2}{K_0}Q$$

CTM: دالة التكلفة المتوسطة في المدى القصير.

$\frac{2K_0}{Q}$: تمثل التكاليف الثابتة المتوسطة (CFM).

$\frac{2}{K_0}Q$: تمثل التكاليف المتغيرة المتوسطة (CVM).

حل التمرين السادس:

$$Q = K\,L$$

1. **دالة التكاليف الكلية في المدى الطويل:**

لتحديد دالة التكاليف كدالة صريحة في مستوى الإنتاج (دالة التكلفة في المدى الطويل)، نستخدم ثلاث معادلات: دالة الإنتاج، معادلة التكاليف و دالة مسار التوسع للمؤسسة.

لدينا : $CT = L + 4K$

دالة مسار التوسع يمكن استخراجها من شرط التوازن:

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = K$$

$$Pmg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = L$$

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow K = \frac{1}{4}L$$

نعوض K في دالة التكلفة CT نحصل على:

$$CT = L + 4\left(\frac{1}{4}L\right) \Rightarrow CT = 2L$$

نعوض K في دالة الإنتاج:

$$Q = \left(\frac{1}{4}L\right)L$$

$$Q = \frac{1}{4}L^2$$

$$L = 2\sqrt{Q}$$

نعوض L في دالة التكلفة نحصل على:

$$CT = 2L \Rightarrow CT = 2(2\sqrt{Q})$$
$$CT = 4\sqrt{Q}$$

2. **عتبة مردودية المؤسسة:**

عتبة المردودية هي النقطة التي تبدأ عندها المؤسسة في تحقيق الربح.

عند عتبة المردودية تتقاطع التكلفة الحدية مع المتوسطة (يتقاطعان عند أقل قيمة للتكلفة المتوسطة).

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 2Q^{\frac{-1}{2}}$$

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{4\sqrt{Q}}{Q} = 4Q^{\frac{-1}{2}}$$

$$Cmg = CM \Leftrightarrow 2Q^{\frac{-1}{2}} = 4Q^{\frac{-1}{2}} \Rightarrow Q = 0$$

هذه المؤسسة بمجرد أنها تنتج تدخل في مرحلة الربح (لأن الكمية لا بد أن تكون أكبر من 0).

حل التمرين السابع:

$$Q_1 = 3K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} \;;\; Q_2 = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} \;; Q_3 = K\, L$$

1. **تحديد دالة التكاليف كدالة صريحة في الإنتاج لكل من الدوال الثلاثة:**

لتحديد دالة التكاليف كدالة صريحة في مستوى الإنتاج (دالة التكلفة في المدى الطويل)، نستخدم ثلاث معادلات: دالة الإنتاج، معادلة التكاليف و دالة مسار التوسع للمؤسسة.

لدينا: CT = 10 L + 6 K

بالنسبة للدالة: $\boldsymbol{Q_1 = 3K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}}$

دالة مسار التوسع:

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{3}{4} L^{\frac{-3}{4}} K^{\frac{1}{4}}$$

$$Pmg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{3}{4} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{-3}{4}}$$

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4} L^{\frac{-3}{4}} K^{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{4} L^{\frac{1}{4}} K^{\frac{-3}{4}}} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow K = \frac{5}{3} L$$

$K = \frac{5}{3} L$ هي دالة مسار التوسع.

نعوض K في دالة التكلفة CT نحصل على:

$$CT = 10L + 6\left(\frac{5}{3} L\right) \Rightarrow CT = 10L + 10L = 20L$$

نعوض K في دالة الإنتاج:

$$Q = 3(\frac{5}{3} L)^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$$

$$Q = 3(\frac{5}{3})^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{2}}$$

$$L^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{3(\frac{5}{3})^{\frac{1}{4}}}$$

$$L = \frac{Q^2}{9(\frac{5}{3})^{\frac{1}{2}}}$$

نعوض L في دالة التكلفة نحصل على:

$$CT = 20L \Rightarrow CT = 20(\frac{Q^2}{9(\frac{5}{3})^{\frac{1}{2}}})$$

$$CT = \frac{20\sqrt{3}}{9\sqrt{5}} Q^2$$

بالنسبة للدالة: $\boldsymbol{Q_2 = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}$

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = L^{\frac{-1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$Pmg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{L^{\frac{-1}{2}} K^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{-1}{2}} L^{\frac{1}{2}}} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow K = \frac{5}{3} L$$

نعوض K في دالة التكلفة CT نحصل على:

$$CT = 10L + 6\left(\frac{5}{3}L\right) \Rightarrow CT = 10L + 10L = 20L$$

نعوض K في دالة الإنتاج:

$$Q = 2\left(\frac{5}{3}L\right)^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$$

$$Q = 2\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}} L$$

$$L = \frac{Q}{2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} Q$$

نعوض L في دالة التكلفة نحصل على:

$$CT = 20L \Rightarrow CT = 20(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}Q)$$

$$CT = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}Q$$

بالنسبة للدالة: $\boldsymbol{Q_3 = K\,L}$

$$Pmg_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = K$$

$$Pmg_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = L$$

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow K = \frac{5}{3}L$$

نعوض K في دالة التكلفة CT نحصل على:

$$CT = 10L + 6\left(\frac{5}{3}L\right) \Rightarrow CT = 10L + 10L = 20L$$

نعوض K في دالة الإنتاج:

$$Q = \left(\frac{5}{3}L\right)L$$

$$Q = \frac{5}{3}L^2$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sqrt{Q}$$

نعوض L في دالة التكلفة نحصل على:

$$CT = 20L \Rightarrow CT = 20(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sqrt{Q})$$

$$CT = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sqrt{Q}$$

2. **حساب دوال التكلفة المتوسطة و التكلفة الحدية:**

عندما $Q_1 = 3K^{\frac{1}{4}}\,L^{\frac{1}{4}}$:

دالة التكلفة المتوسطة:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{9\sqrt{5}}Q^2}{Q} = \frac{20\sqrt{3}}{9\sqrt{5}}Q$$

دالة التكلفة الحدية:

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{40\sqrt{3}}{9\sqrt{5}}Q$$

عندما $Q_2 = 2K^{\frac{1}{2}}\,L^{\frac{1}{2}}$:

دالة التكلفة المتوسطة:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}Q}{Q} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

دالة التكلفة الحدية:

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

عندما $Q_3 = K\,L$:

دالة التكلفة المتوسطة:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\sqrt{Q}}{Q} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{Q}}$$

دالة التكلفة الحدية:

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{Q}}$$

3. المراحل التي يمر بها الإنتاج حسب كل دالة:

للقيام بذلك نحسب مرونة الإنتاج بالنسبة لعاملي الإنتاج معا بالنسبة لكل دالة أو من خلال حساب درجة تجانس الدالة و استخراج طبيعة المردود السلمي.

بما أن الدوال الثلاثة هي من الشكل كوب دوغلاس، يمكن استخراج درجة تجانسها مباشرة بجمع المرونات بالنسبة للعمل و بالنسبة لرأس المال (جمع الأسس) .

سنستخدم الطريقة الأولى المتمثلة في حساب مرونة الإنتاج لعاملي الإنتاج معا:

$$\boldsymbol{E} = \frac{CM}{Cmg}$$

<u>عندما</u> $\boldsymbol{Q = Q_1 = 3K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}}$:

$$E = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{9\sqrt{5}}Q}{\frac{40\sqrt{3}}{9\sqrt{5}}Q} = \frac{1}{2}$$

نحصل على نفس النتيجة بجمع المرونات بالنسبة لكل عامل إنتاجي ($¼ + ¼ = ½$).

يمر الإنتاج بمرحلة تناقص الغلة.

<u>عندما</u> $\boldsymbol{Q = Q_2 = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}$:

$$E = \frac{\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}} = 1$$

نفس النتيجة بجمع المرونات بالنسبة لكل عامل إنتاجي ($½ + ½ = 1$).

يمر الإنتاج بمرحلة ثبات الغلة لأن المرونة تساوي الواحد، أو لأن الدالة متجانسة من الدرجة الأولى.

<u>عندما</u> $\boldsymbol{Q = Q_3 = K\,L}$:

$$E = \frac{\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{Q}}}{\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{Q}}} = 2$$

نحصل على نفس النتيجة بجمع المرونات بالنسبة لكل عامل إنتاجي ($1 + 1 = 2$).

يمر الإنتاج بمرحلة تزايد الغلة.

4. الحجم الأمثل لعوامل الإنتاج الذي يعظم الإنتاج بالنسبة للدالة الأولى:

$$CT = 250 = 10L + 6K$$

شرط التوازن:

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}L^{\frac{-3}{4}}\,K^{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{4}L^{\frac{1}{4}}\,K^{\frac{-3}{4}}} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{L}} = \frac{10}{6} \Leftrightarrow K = \frac{5}{3}L$$

نعوض K في قيد التكلفة:

$$250 = 10L + 6K$$

$$250 = 10L + 6(\frac{5}{3}L) \Rightarrow 250 = 20L$$

$$L = 12{,}5$$

$$K = \frac{5}{3}L \Rightarrow K = \frac{5}{3}(12{,}5) = 20{,}83$$

حل التمرين الثامن:

لدينا: $\boldsymbol{Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}}$

1. تحديد التكلفة الكلية، التكلفة المتوسطة الكلية و التكلفة الحدية:

PL= 3 و PK=5

نقوم بتحديد دالة التكاليف كدالة صريحة في مستوى الإنتاج.

ننطلق من شرط التوازن أو دالة مسار التوسع.

$$\frac{Pmg_L}{Pmg_K} = \frac{P_L}{P_K} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}L^{\frac{-1}{2}}}{\frac{1}{2}K^{\frac{-1}{2}}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{5} \Rightarrow K = \frac{9}{25}L$$

$K = \frac{9}{25}L$ هي دالة مسار التوسع.

نعوض K في دالة التكلفة CT نحصل على:

$$CT = 3L + 5K \Rightarrow CT = 3L + 5\left(\frac{9}{25}L\right)$$

$$CT = \frac{24}{5}L$$

نعوض K في دالة الإنتاج:

$$Q = (\frac{9}{25}L)^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}} \Rightarrow Q = \frac{8}{5}L^{\frac{1}{2}}$$

$$Q^2 = \frac{64}{25}L \Rightarrow L = \frac{25}{64}Q^2$$

نعوض L في دالة التكلفة نحصل على:

$$CT = \frac{24}{5}L \Rightarrow CT = \frac{24}{5}(\frac{25}{64}Q^2)$$

$$\boldsymbol{CT = \frac{15}{8}Q^2}$$

دالة التكلفة المتوسطة:

$$CM = \frac{CT}{Q} = \frac{\frac{15}{8}Q^2}{Q} = \frac{15}{8}Q$$

دالة التكلفة الحدية:

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial Q} = \frac{15}{4}Q$$

2. تحديد دالة عرض المؤسسة :

دالة عرض المؤسسة هي الجزء المتصاعد من منحنى التكلفة الحدية، هذه الأخيرة كلها متصاعدة لأن دالة التكلفة الحدية تنعدم عندما يكون الإنتاج معدوم $Q = 0$ (هذا الفرض الأخير هو مرفوض في نظرية الإنتاج، يجب على الإنتاج أن يكون أكبر من الصفر).

$$P = Cmg \Rightarrow P = \frac{15}{4}Q$$

هذه الدالة الأخيرة هي دالة عرض المؤسسة، و هي علاقة طردية بين السعر و الكمية.

3. تحديد عتبة المردودية:

$$Cmg = CM \Leftrightarrow \frac{15}{4}Q = \frac{15}{8}Q \Leftrightarrow Q = 0$$

هذه المؤسسة بمجرد أنها تنتج تدخل في مرحلة الربح (قد يستحيل ذلك في الواقع).

الفصل الخامس: التوازن في سوق المنافسة التامة و الكاملة.

المنافسة التامة و الكاملة هي نموذج اقتصادي لسوق يخضع لخمس شروط.

1. شروط المنافسة الكاملة:

أ- **وجود عدد غير محدود من البائعين و المشترين** (Atomocité): بحيث لا يمكن لأي طرف من الطرفين التأثير في سعر السوق.

ب- **تجانس السلع** (Homogénéité des biens): أي كل السلع المعروضة هي متطابقة و ليس للمشتري أي سبب لتفضيل سلعة على أخرى، أي المشترين هم سواء مقابل جميع السلع المعروضة.

ت- **الشفافية** (Transparence): توفر المعلومات التامة للبائعين و المشترين حول ظروف السوق و خاصة السعر.

ث- **حرية حركة عوامل الإنتاج**: لا يوجد احتكار لعوامل الإنتاج و يمكن تنقلها من نشاط إلى آخر بكل حرية.

ج- **حرية الدخول و الخروج من السوق**: لا يوجد أي قيود لدخول السوق و بالتالي أرباح ايجابية تجذب مؤسسات جديدة.

طلب المشترين لمنتجات البائعين يمثل إيرادات للمنتجين البائعين. يمكن أن نقسم الإيرادات إلى ثلاث أقسام: الإيراد الكلي، المتوسط و الحدي.

2. أنواع الإيرادات:

أ- **الإيراد الكلي**(RT): هو مجموع ما يقبضه المنتج نتيجة بيع منتجاته في السوق، و في ظروف المنافسة الكاملة يكون الإيراد الكلي يساوي: $\boldsymbol{RT = P \cdot Q}$.

ب- **الإيراد المتوسط** (RM): هو نصيب الوحدة المباعة من الإيراد الكلي، الإيراد المتوسط يساوي:

$$\boldsymbol{RM = \frac{RT}{Q} = \frac{P \cdot Q}{P} = P}$$

أي في ظل المنافسة الكاملة السعر يساوي الإيراد المتوسط.

ت- **الإيراد الحدي**(Rmg): هو مقدار التغير في الإيراد الكلي نتيجة للتغير في الكمية المباعة بوحدة واحدة.

$$\boldsymbol{Rmg = \frac{\Delta RT}{\Delta Q}}$$

إذا كانت دالة الإيراد الكلي عبارة عن دالة مستمرة و قابلة للاشتقاق:

$$\lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta RT}{\Delta Q} = \frac{\partial RT}{\partial Q}$$

الجدير بالذكر أنه إذا ساد السوق منافسة تامة الإيراد الحدي يساوي الإيراد المتوسط و يساوي السعر.

Rmg = RM = P

في سوق المنافسة الكاملة الإيراد الحدي يساوي السعر لأن المنتج لا يتحكم في السعر و هو ثابت و يفرضه السوق (بيع الوحدة الأولى هو نفسه بيع الوحدة الأخيرة).

الجدول التالي يوضح الأنواع الثلاثة من الإيرادات: الإيراد الكلي (RT)و الإيراد المتوسط (RM) و الإيراد الحدي (Rmg).

السعر p	الكمية المنتجة و المباعة Q	الإيراد الكلي RT	الإيراد المتوسط RM	الإيراد الحدي Rmg
05	1	5	05	05
05	2	10	05	05
05	3	15	05	05
05	4	20	05	05
05	5	25	05	05
05	6	30	05	05
05	7	35	05	05
05	8	40	05	05
05	9	45	05	05
05	10	50	05	05

3. التوازن في سوق المنافسة التامة و الكاملة:

أ. توازن المنتج في الفترة القصيرة:

يهدف المنتج دائما إلى إنتاج الكمية التي تعظم له الربح(π)، هذا الأخير يساوي:

$$\pi = RT - CT$$

الشرط اللازم لتعظيم الربح هو البحث عن نقطة استقرار (انعدام المشتقة الأولى).

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \frac{\partial RT}{\partial Q} - \frac{\partial CT}{\partial Q} = 0$$

أي:

$$Rmg = Cmg$$

بما أن السوق تسوده المنافسة الكاملة فإن الإيراد الحدي يساوي السعر ، شرط التوازن يصبح:

$$Rmg = Cmg = P$$

أي عند التوازن تكون التكلفة الحدية تساوي الإيراد الحدي و تساوي السعر.

أما عن الشرط الكافي: يجب أن يكون المشتق الثاني لدالة الربح سالب.

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q^2} = \frac{\partial Rmg}{\partial Q} - \frac{\partial Cmg}{\partial Q} < 0$$

أي:

$$\frac{\partial Rmg}{\partial Q} < \frac{\partial Cmg}{\partial Q}$$

ب. توازن المنتج في الفترة الطويلة:

يتحقق التوازن في المدى الطويل عندما تكون التكلفة المتوسطة الكلية عند أدنى قيمة لها أي:

$$\frac{\partial CM}{\partial Q} = 0$$

يكون السعر في المدى الطويل مساويا للتكلفة المتوسطة الكلية الدنيا، أي:

$$Min\ CM = P$$

عند الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة الكلية تكون التكلفة الحدية تساوي التكلفة المتوسطة الكلية و تساوي السعر:

$$\boldsymbol{CM = Cmg = P}$$

بالتالي شرط توازن المنتج في الفترة الطويلة هو:

$$\boldsymbol{CM_L = CM = Cmg_L = Cmg = P}$$

CM_L : تمثل التكلفة المتوسطة في المدى الطويل.

Cmg_L: تمثل التكلفة الحدية في المدى الطويل.

4. تمارين عن التوازن في سوق المنافسة التامة و الكاملة:

التمرين الأول:

مؤسسة تنتج و تعرض المنتوج Q في سوق تسوده المنافسة الكاملة. سعر السوق لهذا المنتوج هو P = 27.

المؤسسة تتحمل تكلفة إنتاج كلية تتغير حسب الكمية المنتجة و هي موضحة في الجدول التالي:

الكمية Q	التكلفة الكلية CT	الكمية Q	التكلفة الكلية CT
0	0	5	105
1	50	6	132
2	60	7	175
3	66	8	224
4	84	9	315

1. أحسب الكمية Q التي يجب أن تعرضها المؤسسة للحصول على الربح الأعظم.
2. ماهي العلاقة الموجودة في التوازن بين الإيراد الحدي و التكلفة الحدية للمؤسسة؟ بيّن لماذا يكون ذلك؟
3. مثّل بيانيا كل من: منحنى الإيراد الكلي(RT)، الإيراد المتوسط (RM)، الإيراد الحدي(Rmg)، الربح(π)، التكلفة الكلية (CT)، التكلفة المتوسطة (CM) و التكلفة الحدية (Cmg) . حدد على هذه الأشكال الوضعية المثلى للمؤسسة عندما P = 27 .

بمساعدة التمثيلات البيانية، حدد المناطق التي تحقق فيها المؤسسة ربح، و تلك التي تتحمل فيها الخسارة.

4. ماهو سعر السوق الذي ابتداءا منه تتساوى الإيرادات الكلية و التكاليف الكلية للمؤسسة عند التوازن؟
5. حدد منحنى عرض المؤسسة للمنتوج Q .

التمرين الثاني:

في سوق للسلعة X، دالتي الطلب و العرض الكلي هي موضحة أدناه:

$P = -X + 84,5$: بالنسبة لمعادلة الطلب،

$P = 0,65X - 31$: بالنسبة لمعادلة العرض.

1. أحسب سعر توازن السوق.
2. التكاليف المتوسطة بالنسبة لحجم الإنتاج لمؤسسة واحدة هي موضحة في الجدول التالي:

التكلفة المتوسطة	الكمية Q	التكلفة المتوسطة	الكمية Q
5,5	5	0	0
7	6	10	1
9	7	7	2
11,75	8	5,5	3
-	-	5	4

أحسب الكمية Q التي تجعل من ربح المؤسسة أعظميا و أحسب قيمته.

3. لسبب أو لآخر، الطلب الكلي تغير و أصبح يأخذ الشكل التالي:

$$P = -X + 101$$

أحسب سعر التوازن في الفترة القصيرة جدا (infra-courte) و الربح المحصل عليه في الحالة المثلى للمؤسسة المذكورة في المطلوب الثاني.

4. أحسب توازن السوق في الفترة القصيرة (بعد التعديل)، الكمية المتداولة في السوق و عرض المؤسسة.

5. أعط التمثيل البياني لمختلف وضعيات التوازن (السوق و المؤسسة) المذكورة في الأسئلة السابقة.

التمرين الثالث:

إذا كانت دالة التكلفة لمؤسسة تنتج السلعة X بالشكل التالي:

$$CT = \frac{2}{3}X^3 - 5X^2 + 18X$$

1. حدد منحنى عرض المؤسسة.
2. إذا كان سعر البيع $P_0 = 18$ ، حدد كمية التوازن و أحسب قيمة الربح.

التمرين الرابع:

تقوم 100 مؤسسة بإنتاج سلعة في سوق تسودها المنافسة التامة و الكاملة، التكلفة الكلية لكل مؤسسة هي على النحو التالي:

$$CT = \frac{500}{6}Q^2$$

إذا كان الطلب الكلي على هذه السلعة في السوق هو:

$$Q_D = 1200 - \frac{3}{5}P$$

1. حدد منحنى عرض المؤسسة الواحدة.
2. حدد دالة عرض السوق.
3. أوجد سعر و كمية التوازن في السوق.
4. عين دالة الإيراد الكلي للمؤسسة.
5. عين دالة الربح للمؤسسة و أحسبه عندما تكون المؤسسة في حالة توازن.

التمرين الخامس:

تعمل 100 مؤسسة في سوق تسوده المنافسة التامة و الكاملة و قد قدرت دالة التكلفة الكلية لمؤسسة ب:

$$CT = 5X_i^2 + 15X_i + 125 \qquad (i = 1 \ldots \ldots \ldots 100)$$

بينما تأخذ دالة طلب السوق الشكل التالي: $P = -\frac{X}{2} + 525$

1. حدد حدي الإغلاق و المردودية للمؤسسة.
2. أوجد سعر و كمية التوازن في المدى القصير و ربح كل من المؤسسات.

التمرين السادس:

اعتبر اقتصاد ما مكون من:

1000 مستهلك يتميزون بدالة طلب متماثلة:

$$P = -2X + 200$$

1000 مؤسسة تكلفتها الكلية :

$$CT = X^3 - 10X^2 + 200X$$

1. حدد دالة الطلب الكلي للسلعة المعروضة.
2. حدد العرض الكلي للسلعة.
3. حدد الزوج السعر- الكمية المطابق للتوازن في المدى القصير.
4. حدد الزوج السعر- الكمية المطابق للتوازن في المدى الطويل، بفرض أن التعديل لا يتم إلا بدخول مؤسسات جديدة للفرع لها دوال تكلفة كلية مماثلة لتكلفة المؤسسات القديمة.

5. حل تمارين التوازن في سوق المنافسة التامة و الكاملة:

حل التمرين الأول:

1. حساب الكمية Q التي يجب أن تعرضها المؤسسة للحصول على الربح الأعظم:

ربح المؤسسة يتحدد بالفرق بين الإيراد الكلي (RT) و التكاليف الكلية (CT). المنتج العقلاني ينتج الكمية Q التي تسمح له بتعظيم الربح.

الإيرادات الكلية للمؤسسة يتم التحصل عليها في حالة المنافسة التامة بضرب الكمية (Q) في سعر السوق (P)، السعر يبقى ثابت مهما تكن الكمية المعروضة من قبل المؤسسة. في المنافسة التامة المنتج لا يمكنه التحكم في سعر السوق.

حساب الإيراد الكلي لكل كمية معروضة و الفرق بين الإيراد الكلي و التكاليف الكلية للحصول على قيمة الربح π هي موضحة في الجدول التالي:

الكمية Q	الإيراد الكلي RT	التكلفة الكلية CT	الربح π	الكمية Q	الإيراد الكلي RT	التكلفة الكلية CT	الربح π
0	0	0	0	5	135	105	30
1	27	50	-23	6	162	132	30
2	54	60	-6	7	189	175	14
3	81	66	15	8	216	224	-8
4	108	84	24	9	243	315	-72

نتائج الجدول تبين أن Q = 5 و Q = 6 تعطي الربح الأكبر، سنبيّن لاحقا أن القيمة Q = 6 فقط هي التي سنختارها.

2. العلاقة الموجودة في التوازن بين الإيراد الحدي و التكلفة الحدية للمؤسسة:

الإيراد الحدي للمؤسسة هو الزيادة في الإيراد الكلي الناتج عن زيادة وحدة مباعة من Q. في المنافسة التامة و الكاملة الإيراد الحدي يساوي سعر السوق.

$$RT = P.Q$$

$$Rmg = \frac{\Delta RT}{\Delta Q} = P$$

التكلفة الحدية هي الزيادة في التكلفة الكلية الناتجة عن زيادة الإنتاج بوحدة واحدة:

$$Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$$

في المنافسة التامة و الكاملة، الربح الأعظم يتحقق لما الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية:

$$\pi = RT - CT$$

مع: $RT = g(Q) = P.Q$

و $CT = h(Q)$

نصل إلى الربح π الأعظم لما:

$$\frac{\Delta\pi}{\Delta Q} = \frac{\Delta RT}{\Delta Q} - \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = Rmg - Cmg = 0$$

إذن: $Rmg = Cmg = P$

الربح الأعظم يتحقق لما التكلفة الحدية تساوي سعر الوحدة المباعة P . هذا الشرط هو محقق في حالة المنافسة التامة، أما القانون الأول (التكلفة الحدية تساوي الإيراد الحدي) يكون بصفة عامة.

بالنتيجة، مادام تكلفة الوحدة الإضافية هي أقل من إيراد الوحدة الإضافية، من مصلحة المنتج مواصلة عرض المنتوج. إذا أصبحت تكلفة الوحدة الإضافية أكبر من الإيراد الإضافي، تختفي مصلحة المنتج العقلاني. ما دام تكلفة الوحدة الإضافية (التكلفة الحدية) أقل من إيراد الوحدة الإضافية أي السعر (الإيراد الحدي)، العرض هو غير كافي لتعظيم الربح: هذا الأخير يتحقق لما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي (السعر).

بالنسبة للمطلوب السابق:

$P = Rmg = 27$: لما التكلفة الحدية تساوي 27 ، يكون الربح أعظميا، هذا يتعلق بالكمية Q = 6 (كما يوضح الجدول التالي):

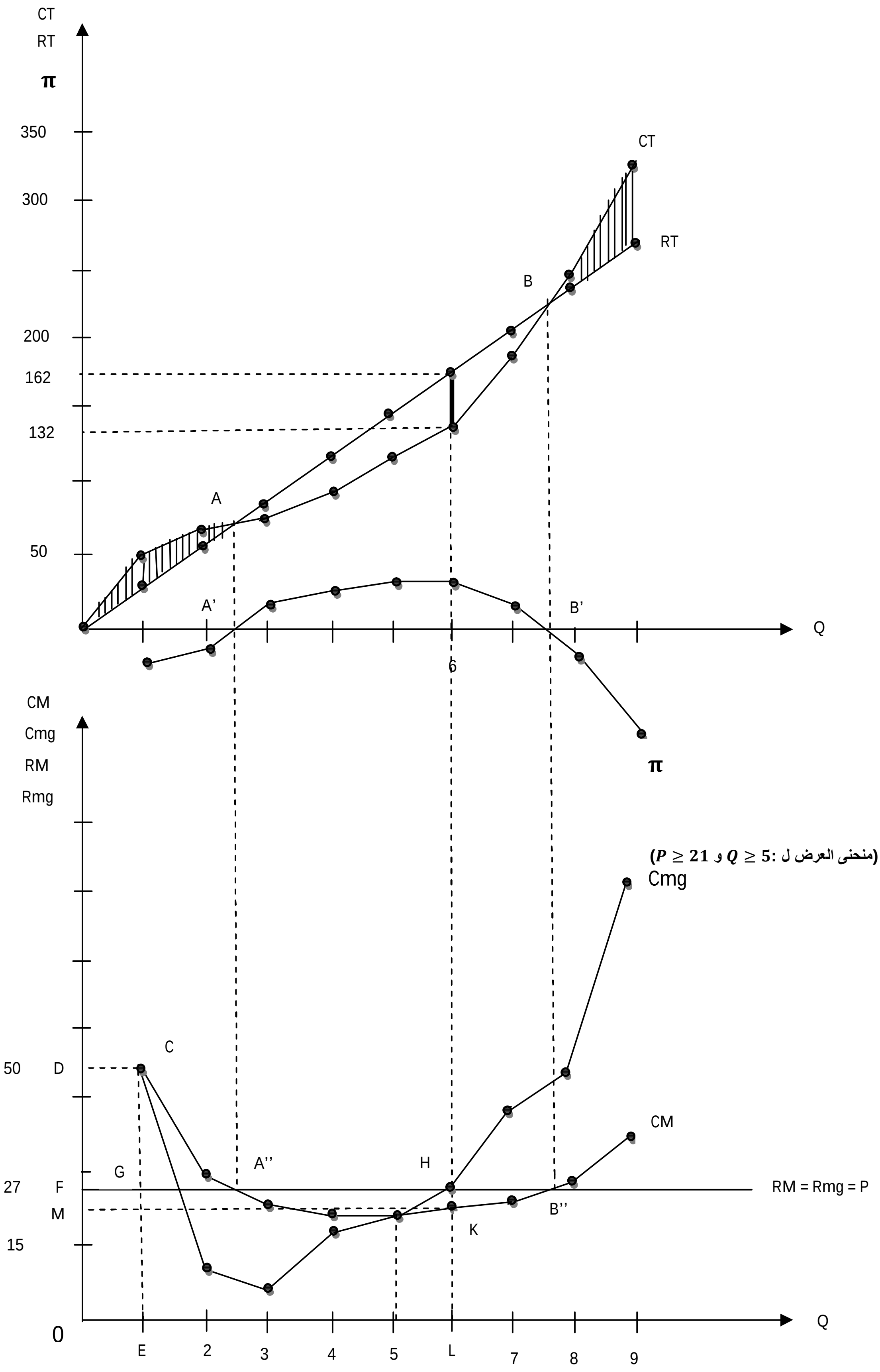
الكمية Q	التكلفة الكلية CT	التكلفة المتوسطة CM	التكلفة الحدية Cmg
0	0	0	0
1	50	50	50
2	60	30	10
3	66	22	6
4	84	21	18
5	105	21	21
6	132	22	27
7	175	25	43
8	224	28	49
9	315	35	91

3. الشكل التالي يوضح منحنيات الربح، التكلفة الكلية و الإيراد الكلي عند P = 27 ، الجزء السفلي من الشكل هو خاص بالإيراد المتوسط، الإيراد الحدي و التكلفة الحدية.

الجزء العلوي من الشكل خاص بمنحنى التكلفة الكلية و الإيراد الكلي اللذان يتقطعان في النقطتين A و B. عندما التكلفة الكلية تقع أعلى الإيراد الكلي، المؤسسة تتحمل خسارة (ربح سلبي). هذه المنطقة من الخسارة هي مرتبطة بالجزء من منحنى الربح الذي يقع تحت المحور OQ . تساوي الإيراد الكلي RT مع التكلفة الكلية CT يعطي ربح معدوم، عندئذ منحنى الربح يقطع المحور OQ في النقطة 'A ، و هي النقطة المرتبطة بالنقطة A . المنطقة التي يقع فيها منحنى الإيراد الكلي فوق منحنى التكلفة الكلية هي مرتبطة بالفائدة أو ربح موجب بالنسبة للمؤسسة. منحنى الربح يرتفع ليصل إلى حده الأقصى، ثم ينخفض و يقطع من جديد المحور OQ عندما RT = CT (النقطة 'B)، منطقة أخرى من الخسارة تظهر أيضا و منحنى الربح يقع من جديد تحت المحور OQ.

في الجزء السفلي من الشكل، منحنيات الإيراد المتوسط و الإيراد الحدي هي متطابقة، و هي حالة المنافسة التامة و الكاملة.

منحنى الإيراد المتوسط (RM) يقطع منحنى التكلفة المتوسطة (CM) في النقطتين "A و "B . القيم Q المرتبطة بالنقطتين تتعلق بتساوي التكلفة الكلية (CT) مع الإيراد الكلي (CT) و الربح يساوي الصفر($\pi = 0$). "A و "B مرتبطة بالنقاط A و 'A ، B و 'B للشكل العلوي. التكلفة الكلية و الإيراد الكلي هي معطاة في الشكل السفلي بالمساحة المعرفة بنقاط المنحنيين RM و CM، عن طريق إسقاط الخطوط المتعامدة على المحاور.



الشكل: توازن المؤسسة.

مثال:

بالنسبة للنقطة C الواقعة على منحنى CM، لدينا CM = 50 ، Q = 1 و CT = CM . Q = 50 .

بالنسبة ل Q = 1 ، RM = 27 ، لدينا أيضا RT = RM. Q = 27 .

التكلفة الكلية هي ممثلة بمساحة 0DCE أين المساحة تساوي 50 ، الإيراد الكلي بالمساحة 0FGE أين المساحة تساوي 27 ، و الربح هنا سالب ممثل بالمساحة FDCG .

عندما تكون المساحة الخاصة بالتكلفة الكلية و المساحة الخاصة بالإيراد الكلي متطابقتان، و هي حالة A" و B" ، و يكون الربح معدوم.

التساوي بين Cmg و Rmg (النقطة H) يعطي الربح العظمي (Q = 6) . عندئذ الفرق بين مساحة الإيراد الكلي 0FHL و مساحة التكلفة الكلية 0MKL تكون عند حدها الأقصى، و هي معطاة بالمساحة MFHL = 30 . النقطة H هي مرتبطة بالنقطة العظمى لمنحنى الربح في الشكل العلوي، و أيضا أقصى فرق بين منحنى RT و CT.

4. **لكي تتساوى الإيرادات الكلية مع التكاليف الكلية للمؤسسة أي الربح يكون معدوم عند التوازن يجب:**

أولا: Cmg = Rmg : شرط التوازن.

ثانيا: RM = CM : شرط انعدام الربح.

بما في المنافسة التامة لدينا دائما : RM = Rmg = P .

يمكن أن نكتب أن السعر الذي يسمح بتساوي الإيراد الكلي مع التكلفة الكلية هو السعر الذي تكون عنده:

P = Cmg = CM ، هذه المساواة التي تتحقق عند الحد الأدنى للتكلفة متوسطة.

P = 21 هو السعر الذي يعطي الربح يساوي الصفر. بالنسبة ل P <21 ، المؤسسة تتحمل خسارة و من مصلحتها عدم عرض المنتوج في السوق.

5. المؤسسة تعرض منتوجها إذا كان بيع هذا الأخير يحقق ربح أكبر أو يساوي الصفر $(\pi \geq 0)$. الكمية المعروضة عند سعر معطى هي الكمية التي تعظم الربح. في السؤال السابق بيّنا أن عند P = 21 ، الكمية المعروضة تكون Q = 5 و لا يوجد أي عرض مربح عندما يكون P < 21 . إذا ارتفع السعر ، منحنى الإيراد الحدي يرتفع نحو الأعلى.

التساوي بين Rmg و Cmg (شرط تعظيم الربح) يتحقق للسعر P = 27 عند الكمية المعروضة Q = 6، ثم عند P = 43 هي Q = 7 ، ثم عند P = 49 هي Q = 8 و في الأخير عند P = 91 هي Q = 9 .

منحنى عرض المؤسسة في المنافسة التامة يعطى بالشكل المرتفع من منحنى التكلفة الحدية الواقع فوق الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة (أنظر لمنحنى Cmg في الشكل السفلي أعلاه).

حل التمرين الثاني:

1. **حساب سعر توازن السوق:**

التوازن في سوق المنافسة التامة يتحقق عند تقاطع منحنى العرض مع منحنى الطلب الكلي:

لدينا:

الطلب = العرض:

$$0,65X - 31 = -X + 84,5 \Rightarrow X_1^* = 70$$

نعوض كمية التوازن (X*) في دالة العرض أو الطلب نحصل على سعر التوازن:

$$P_1^* = 14,5$$

2. **الكمية Q التي تجعل من ربح المؤسسة أعظميا :**

السعر P* = 14,5 سوف يفرض على جميع المؤسسات في السوق و هو يمثل إيرادها المتوسط و إيرادها الحدي.

نحن نعلم التكاليف المتوسطة لإحدى المؤسستين. يمكننا حساب التكاليف الكلية و التكاليف الحدية (الجدول التالي):

التكلفة الحدية $Cmg = \frac{\Delta CT}{\Delta X}$	التكلفة الكلية CT = CM .X	التكلفة المتوسطة CM	الكمية
0	0	0	0
10	10	10	1
4	14	7	2
2,5	16,5	5,5	3
3,5	20	5	4
7,5	27,5	5,5	5
14,5	42	7	6
21	63	9	7
31	94	11,75	8

ربح المؤسسة يصبح أعظميا عندما تتساوى التكلفة الحدية مع سعر السوق ، الكمية المعروضة من قبل المؤسسة سوف تكون Q = 6 .

الربح سوف يكون:

$$\pi = (6 \cdot 14{,}5) - 42 = 45$$

3. بعد تغير الطلب الكلي :

إذا تغير منحنى الطلب سوف يكون هنالك سعر توازن جديد في الفترة القصيرة جدا (infra-courte)، و يمكن تعريف الفترة القصيرة جدا حسب D Flouzat [1]« بالفترة من الزمن التي تكون فيها الكميات المعروضة من السلعة X قد أنتجت و لا يمكن الرفع من الإنتاج » ، سعر التوازن يتحقق بتقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض، هذا الأخير يكون عديم المرونة (X = 70).

سعر التوازن الناتج عن تغير منحنى الطلب سيكون:

الطلب يساوي العرض:

$$P_2^* = -70 + 101 = 31$$

بالنسبة للمؤسسة، الكمية المعروضة المثلى ستكون X* = 8 و الربح $\pi = 157$.

[1] Serge Percheron. *Exercices de microéconomie*. ARMOND COLIN. Sixième édition. 1999. P, 166.

4. حساب توازن السوق في الفترة القصيرة (بعد التعديل)، الكمية المتداولة في السوق و عرض المؤسسة:

الفترة القصيرة هي الفترة التي تكون فيها المؤسسات قادرة على تغيير العرض مع ثبات مستوى رأس المال(ما يعني أيضا المحافظة على نفس دالة التكلفة). التوازن في الفترة القصيرة بعد تغييرات على مستوى الطلب تتحقق بتقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض:

الطلب يساوي العرض:

$$0,65X - 31 = -X + 101 \Rightarrow X_3^* = 80$$

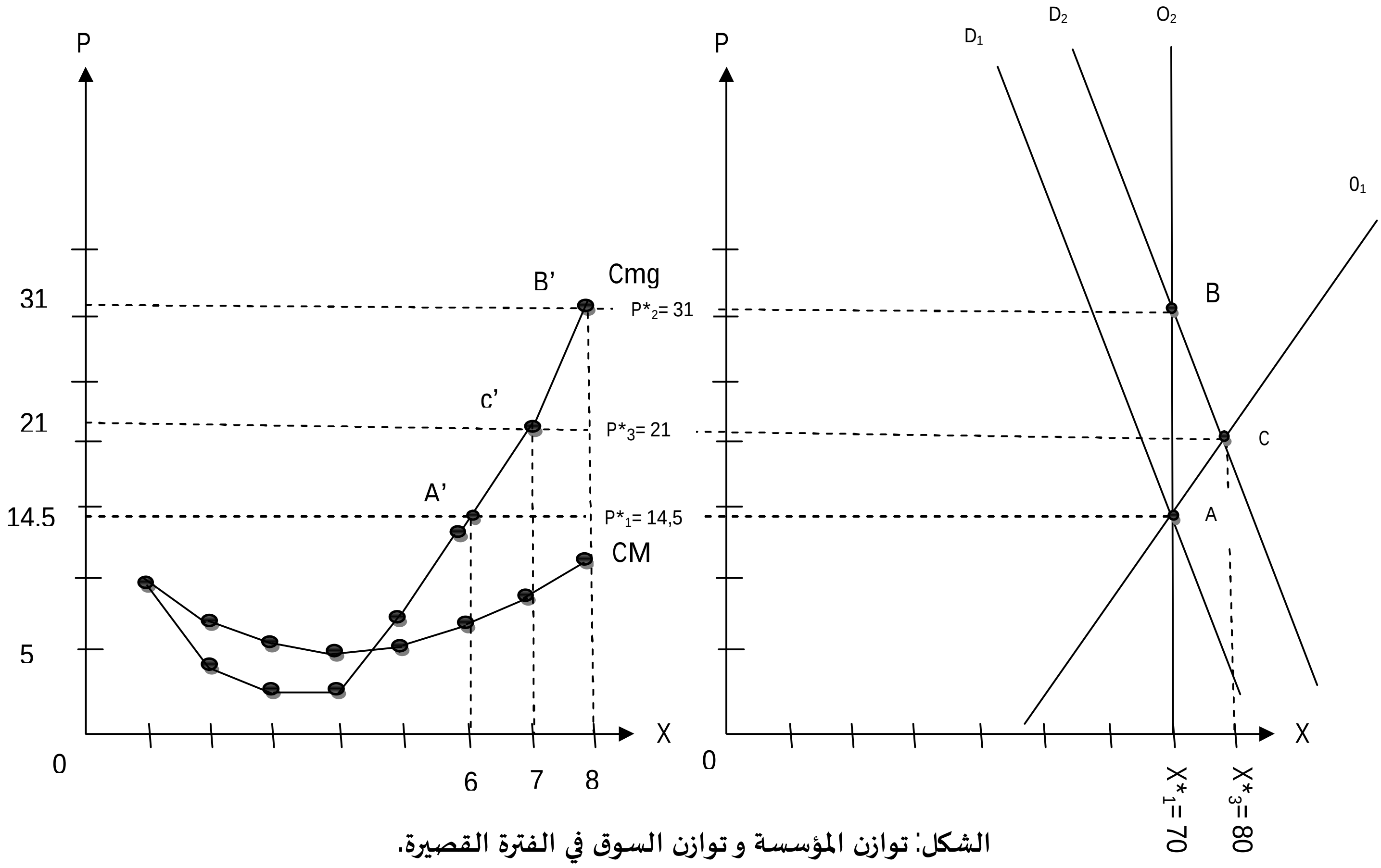
سعر التوازن سيكون $P_3^* = 21$. المؤسسة بعد تغير العرض مع الشروط الجديدة للسعر سوف تعرض X = 7 و الربح المحقق يكون: $\pi = 84$.

5. التمثيل البياني لمختلف وضعيات التوازن (السوق و المؤسسة) المذكورة في الأسئلة السابقة:

الشكل الموالي على اليسار يعطي توازن المؤسسة و على اليمين توازن سوق السلعة X. في هذا البيان A هي نقطة التوازن الأولية (P_1^*, X_1^*) ، B (P_2^*, X_2^*) هي نقطة التوازن في الفترة القصيرة جدا، و C (P_3^*, X_3^*) هي نقطة التوازن في الفترة القصيرة. هذه النقاط الثلاثة لتوازن السوق هي مرتبطة بنقاط توازن المؤسسة 'A ، 'B و 'C .

منحنى الطلب P = - X + 84,5 سمي في الشكل (D_1) ، منحنى العرض P = 0,65 X – 31 سمي (O_1)، العرض في الفترة القصيرة جدا X = 70 سمي O_2 .

الطلب P = - X + 101 هو D_2 .



الشكل: توازن المؤسسة و توازن السوق في الفترة القصيرة.

حل التمرين الثالث:

لدينا: $CT = \frac{2}{3}X^3 - 5X^2 + 18X$

1. **تحديد منحنى عرض المؤسسة:**

يتحدد منحنى عرض المؤسسة في الجزء المرتفع لمنحنى التكلفة الحدية (فوق الحد أدنى لمنحنى التكلفة المتوسطة):

لدينا: $Cmg = 2X^2 - 10X + 18$

و : $CM = \frac{2}{3}X^2 - 5X + 18$

نحسب قيمة X التي تبلغ عندها دالة التكلفة المتوسطة حدها الأدنى، يتحقق ذلك لما تنعدم المشتقة الأولى للتكلفة المتوسطة:

$$\frac{\partial CM}{\partial X} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}X - 5 = 0 \Rightarrow X = \frac{15}{4}$$

عندما $X = \frac{15}{4} = 3{,}75$ تبلغ التكلفة المتوسطة المتوسطة حدها الأدنى و تساوي: $MIN\ CM = 8{,}625$.

و منه منحنى عرض المؤسسة هو:

$$\begin{cases} P = 2X^2 - 10X + 18 \\ \vee \\ X \geq 3{,}75 \end{cases}$$

2. **إذا كان سعر البيع $P_0 = 18$ ، تحديد كمية التوازن وحساب قيمة الربح:**

يتحدد التوازن لما تتساوى التكلفة الحدية مع سعر السوق:

$$Cmg = P_0 = 18$$

$$2X^2 - 10X + 18 = 18 \Rightarrow X_0 = 5$$

نعوض كمية التوازن في معادلة الربح (π) نحصل على:

$$\pi = RT - CT \Rightarrow \pi = P_0 \cdot X_0 - CT$$

$$\pi = 18 \cdot 5 - \left[\frac{2}{3}(5)^3 - 5(5)^2 + 18(5)\right] = 41{,}67$$

إذن: $X_0 = 5$ ، $\pi = 41{,}67$

حل التمرين الرابع:

لدينا: $CT = \frac{500}{6}Q^2$

1. **تحديد منحنى عرض المؤسسة الواحدة:**

منحنى عرض المؤسسة يتحدد عند:

$$P = Cmg \Rightarrow P = \frac{500}{3}Q$$

و منه : $Q = \frac{3}{500}P$ هي دالة عرض المؤسسة.

2. **تحديد دالة عرض السوق:**

لدينا 100 مؤسسة، و نحن نعلم أن دالة عرض السوق تساوي مجموع دوال العرض الفردية.

$$Q_O = \sum Q_{Oi} \Rightarrow Q_O = 100(\frac{3}{500}P)$$

$$Q_O = \frac{3}{5}P$$

3. إيجاد سعر وكمية التوازن في السوق:

يتحقق التوازن لما الطلب الكلي يساوي العرض الكلي، أي:

$$Q_D = Q_O \Rightarrow \frac{3}{5}P = 1200 - \frac{3}{5}P$$

$$P^* = 1000$$

نعوض سعر التوازن في إحدى المعادلتين (الطلب الكلي أو العرض الكلي) نحصل على كمية التوازن:

$$Q^* = 600$$

4. دالة الإيراد الكلي للمؤسسة RT:

$$RT = P \cdot Q \Rightarrow RT = 1000 \cdot Q$$

5. تحديد دالة الربح للمؤسسة و حساب قيمته لما تكون المؤسسة في حالة توازن:

تحديد ربح المؤسسة:

$$\pi = RT - CT$$
$$\pi = 1000Q - \frac{500}{6}Q^2$$

تكون المؤسسة في حالة توازن (في حالة المنافسة التامة) لما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي، هذا الأخير يساوي السعر في حالة المنافسة التامة:

$$Cmg = P \Rightarrow \frac{500}{3}Q = 1000 \Rightarrow Q^* = 6$$

الكمية التي تحقق التوازن للمؤسسة (أقصى ربح)هي: Q = 6 .

قيمة الربح هي:

$$\pi = 1000Q - \frac{500}{6}Q^2 \Rightarrow \pi = 1000(6) - \frac{500}{6}(6)^2$$
$$\pi = 3000$$

حل التمرين الخامس:

1. **تحديد حدي الإغلاق و المردودية للمؤسسة:**

يتحدد حد الإغلاق عند الحد الأدنى لمنحنى التكلفة المتغيرة المتوسطة (CVM):

$$CV = 5X_i^2 + 15X_i$$

$$CVM = \frac{CV}{X} = 5X_i + 15$$

حسب هذه العلاقة الأخيرة حد الإغلاق يساوي 15 لما $X = 0$ ، أما حد المردودية يتحدد عند الحد الأدنى للتكلفة الكلية المتوسطة(CM).

$$CM = 5X_i + 15 + \frac{125}{X}$$

الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة:

$$\frac{\partial CM}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow 5 - \frac{125}{X_i^2} = 0 \Rightarrow \mathrm{X_i} = 5$$

$$Min(CM) = 65$$

2. **سعر و كمية التوازن في المدى القصير و ربح كل من المؤسسات:**

دالة العرض الفردية، هي الجزء المرتفع من منحنى التكلفة الحدية فوق الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة:

$$Cmg = 10X_i + 15$$

دالة العرض الفردية تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} P = 10X_i + 15 \\ \quad \mathrm{V} \\ \mathrm{X} \geq 5 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} X_i = \dfrac{P - 15}{10} \\ \quad \mathrm{V} \\ \mathrm{P} \geq 65 \end{cases}$$

دالة عرض الفرع سوف تكون:

$$\begin{cases} X_O = 100\left(\frac{P-15}{10}\right) \\ \quad\quad V \\ \quad\quad P \geq 65 \end{cases}$$

التوازن يتحقق بتقاطع منحنى العرض الكلي مع منحنى الطلب الكلي:

$$100\left(\frac{P-15}{10}\right) = -2P + 1050 \Rightarrow P^* = 100$$

$$X^* = 850$$

ربح كل مؤسسة:

شرط تعظيم الربح:

$$Cmg = P \Rightarrow 10X_i + 15 = 100 \Rightarrow X_i^* = 8{,}5$$

الربح:

$$\pi = RT - CT \Rightarrow \pi = (100 \cdot 8{,}5) - [5(8{,}5^2) + 15(8{,}5) + 125] = 237$$

إذن:

$$P^* = 100; X^* = 850; X_i^* = 8{,}5; \pi = 237$$

حل التمرين السادس:

1. **تحديد دالة الطلب الكلي للسلعة المعروضة:**

يمكن إعادة كتابة دالة الطلب الفردية على الشكل التالي:

$$X_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{p}}{2} + 100$$

دالة الطلب الكلي هي:

$$X = 1000(-\frac{\mathrm{p}}{2} + 100)$$

أو:

$$P = \frac{-2X}{1000} + 200$$

2. تحديد العرض الكلي للسلعة:

تحديد العرض الفردي: منحنى العرض الفردي هو الجزء الصاعد من منحنى التكلفة الحدية أعلى من الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة الكلية.

$$Cmg = 3{X_i}^2 - 20X_i + 200$$

الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة:

$$CM = {X_i}^2 - 10X_i + 200$$

$$\frac{\partial CM}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow 2X_i - 10 = 0 \Rightarrow \mathrm{X_i} = 5$$

دالة العرض الفردي هي:

$$\begin{cases} P = 3{X_i}^2 - 20X_i + 200 \\ \qquad\qquad \vee \\ \qquad X_i \geq 5 \end{cases}$$

دالة العرض الكلي للسلعة هي:

يمكن الحصول على دالة العرض الكلي بإجراء تغيير $X_i = \frac{X}{1000}$ ، لأن دالة العرض الكلي X تساوي: $X = 1000X_i$.

و منه:

$$P = 3(\frac{X}{1000})^2 - 20(\frac{X}{1000}) + 200$$

من أجل: $X \geq 5000$.

3. الزوج السعر- الكمية المطابق للتوازن في المدى القصير:

يتحدد التوازن في المدى القصير بتقاطع منحني العرض و الطلب الكلي:

$$3(\frac{X}{1000})^2 - 20(\frac{X}{1000}) + 200 = \frac{-2X}{1000} + 200$$

بحل المعادلة نجد:

$$X^* = 6000 \,;\; P^* = 188$$

4. تحديد الزوج السعر- الكمية المطابق للتوازن في المدى الطويل:

يتحدد التوازن في المدى الطويل عندما يكون الربح الصافي معدوم، بمعنى السعر التوازني يساوي الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة.

الحد الأدنى للتكلفة المتوسطة:

$$\frac{\partial CM}{\partial X} = 2X + 10 = 0$$

و منه :

$$X = 5 \ ; \quad Min(CM) = 175$$

يكون السعر في المدى الطويل يساوي 175 كما أن الكمية المطلوبة عند هذا السعر تكون:

$$175 = -2\left(\frac{X}{1000}\right) + 200$$

$$X_d = 12500$$

في المدى الطويل تنتج كل مؤسسة الحد الأدنى من تكلفتها المتوسطة أي $X^* = 5$ ، بالتالي يتحدد عدد المؤسسات(n) ب:

$$n = \frac{12500}{5} = 2500$$

قائمة المراجع

المراجع:

- Jalel BERREBEH , cours de microéconomie, université de Carthage, année universitaire 2012/2013 .
- Murat Yildizoglu. "Introduction à la microéconomie." *Université Paul Cézanne. Marseille: Edition libre* (2009).
- Paul Kraugman et Robin Wells. Macroéconomie. Traduction de la 3e édition américaine par : Laurent Beachler . 2e édition. De boeck . 2013.
- Said Azamoum. Comprendre la micro-économie- cours et exercices . Office des publications universitaires . Alger . 1996.
- Serge Percheron. *Exercices de microéconomie*. ARMOND COLIN. Sixième édition. 1999.

- صونيا عابد، محاضرات في: التحليل الاقتصادي الجزئي- متبوعة بتمارين تطبيقية- ، جامعة الأمير عبد القادر للعلوم الإسلامية، كلية الشريعة، السنة الجامعية 2010-2011.
- عبد الناصر رويسات، مبادئ الاقتصاد الجزئي، ديوان المطبوعات الجامعية ، الجزائر، الطبعة الثانية، 2008 .
- رشيد بن الذيب ، نادية شطاب عباس، اقتصاد جزئي – نظرية و تمارين- ، ديوان المطبوعات الجامعية ، الجزائر ، الطبعة الخامسة، 2007.
- زغيب شهرزاد، بن ديب رشيد، الاقتصاد الجزئي – أسلوب رياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2010.
- كساب علي، النظرية الاقتصادية – التحليل الجزئي- ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثالثة، 2009.
- عمار عماري، تطبيقات محلولة في الاقتصاد الجزئي، دار المناهج للنشر و التوزيع -، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2002.
- عمر صخري، مبادئ الاقتصاد الجزئي الوحدوي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2001 .
- طويطي مصطفى، محاضرات في الاقتصاد الجزئي- محاضرات و تمارين محلولة، جامعة البويرة – كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير، السنة الجامعية 2013 – 2014.