الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

و البـحـث الـعلـمــي وزارة الـتعلــيــم الـعـالي

Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MUSTAPHA Stambouli

Mascara

جامعة مصطفى اسطمبولي

معسكر

Faculté des sciences exactes

Département de Mathématiques

THESE de DOCTORAT

Spécialité Mathématiques

Intitulée

Géométrie des applications harmoniques

Présentée par : **Benkartab Aicha**

Le…24…/….09…./2020……

Devant le jury :

Président	BELDJILALI Gherici	MCA	Université de Mascara
Examinateur	KACIMI Bouazza	MCA	Université de Mascara
Examinateur	DJAA Mustapha	Professeur	Centre Univ. de Relizane
Examinateur	OUAKKAS Seddik	Professeur	Université de Saida
Examinateur	EL HENDI Hichem	MCA	Université de Bechar
Encadreur	MOHAMMED CHERIF Ahmed	MCA	Université de Mascara

Année Universitaire : 2019-2020

Remerciements

* Je tiens remercier chaleuresement en tout premier lieu Dr MOHAMMED CHERIF Ahmed mon encadreur ,de m'avoir proposé un sujet passionnant et surtout de m'avoir toujours donné d'excellent conseils. Je suis heureux qu'il ait dirigé cette thèse. Cette direction s'est caractérisée par un grande patience, une disponibilité permanante , des conseils abondants, un support et un suivi continus dans le but de mettre ce travail sous sa forme finale.

* Je remercie vivement Dr BELDJILALI Gherici, pour ces conseils qui sont toujours judicieux. Je lui exprime toute ma gratitude, surtout pour l'honneur qu'il m'a fait, en président le jury.

* Mes remerciements vont aussi aux Professeurs DJAA Mustapha, OUAKKAS Seddik et aux Docteurs KACIMI Bouazza et EL HENDI Hichem, pour avoir accepté d'examiner ma thèse et de participer au jury.

* Je remercie aussi mes collègues madame REMLI Embarka et Dr HELAL Mohamed pour leurs dispnobilités, pour avoir pris le temps de répondre à mes nombreuses questions.

* Enfin j'adresse mes sincères remerciement à toute personne qui m'a aidée de prés ou loin pour élaborer ce travail.

Dédicaces

A Mes chers parents
A Mon marie et mes chers enfants nada, fatima, mohamed
A Toute ma famille.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Les applications harmoniques entre les variétés Riemanniennes sont des points critiques de la fonctionnelle énergie :

$$E(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2 \, v_g,$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$ et v_g l'élément de volume Riemannien de (M, g) et D est un domain compact de M. Cette application est en faite une solution de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\tau(\varphi) = \operatorname{trace}_g \nabla d\varphi = 0,$$

où $\nabla d\varphi$ est la seconde forme fondamentale de φ. Localement :

$$\tau(\varphi) \;=\; \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\ {}^N\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\varphi - \sum_{k=1}^{m}\ {}^M\Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi.$$

L'étude des applications harmoniques a débuté vers les années 1964 par J. Eells, J. H. Sampson, L. Lemaire ([11]). Ensuite, en 1986 G.Y Jiang ([14]) a introduit le concept des applications bi-harmoniques comme point critique de la fonctionnelle bi-énergie :

$$E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g,$$

et démontre que toute application bi-harmonique est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\tau_2(\varphi) = -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) = 0,$$

$\tau_2(\varphi)$ est dit champ de bi-tension de l'application φ.

Le but de cette thèse est de définir des nouvelles classes de déformation des métriques Riemanniennes (sont les métriques Mus-gradient :

$$\widetilde{g} = g + df \otimes df, \quad \widehat{g} = \alpha g + (1-\alpha) df \otimes df,$$

où $f \in C^\infty(M)$, et $\alpha \in (0,1)$, voir les Définitions 2.1.1. et 2.2.1.) puis de trouver quelques résultats liés aux applications harmoniques et bi-harmoniques.

Ce travail est reparti en quatre chapitres :

- ◇ Le premier chapitre décrit les outils de la géométrie différentielle et la géométrie Riemannienne en introduisant multiples définitions à savoir la métrique Riemannienne, la connexion de Levi-Civita, la seconde forme fondamentale, les tenseurs de courbure et aussi fait rappel aux opérateurs remarquables définissant ainsi le gradient, la divergence, le Hessien et le Laplacien.

- ◇ Dans le deuxième chapitre on définit une nouvelle déformation d'une métrique appellée métrique Mus-gradient et ensuite nous calculons la connexion de Levi-Civita, tenseur de courbure et la courbure de Ricci associée de cette déformation.

- ◇ Le troisième chapitre fait apparaître le sens d'une application harmonique et bi-harmonique où surgit la démonstration d'un théorème important liant l'application harmonique (resp.bi-harmonique) au champ de tension (resp. champ bi-tension) nul, avec multiples exemples.

- ◇ Dans le quatrième chapitre on donne les conditions nécéssaires et suffisantes de la bi-harmonicité pour quelques application différentiable entre deux variétés Riemanniennes (relativement à les déformations des métriques Riemanniennes $\widetilde{g}$ et $\widehat{g}$). Ensuite, on construire quelques exemples concernants les applications bi-harmoniques non-harmoniques suivants ses déformations.

CHAPITRE 1

LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

Dons ce chapitre, on représente quelques notions de bases concernant la géométrie Riemannienne. Les références principales utilisées sont [6, 7, 9, 10, 16, 17, 20, 21].

1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1.1. *Soit M un espace topologique séparé. Une carte de M est un couple (U, ϕ) où U est un ouvert de M et $\phi(U)$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ tels que $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ est un homéomorphisme. m est dite la dimension de la carte (U, ϕ).*

- *Un atlas différentiable $\mathcal{A}$, de dimension m sur M est une famille des cartes $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de même dimension m, avec $M = \bigcup_{i\in I} U_i$, et si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ alors l'application de changement de cartes :*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j),$$

  est de classe C^∞.

- *Une variété différentiable de dimension m est un espace topologique séparé, muni d'un atlas différentiable de dimension m.*

Exemple 1.1.1 (L'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$). L'espace Euclidien muni d'un atlas $\mathcal{A}$ qui contient la seule carte $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$, où $Id_{\mathbb{R}^n}(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, est une variété différentiable de dimension n.

Exemple 1.1.2 (La sphère standard). La sphère standard $\mathbb{S}^n$ est l'ensemble :

$$\mathbb{S}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} / \|u\| = 1\}.$$

En tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$, elle est munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$ (c'est la topologie dont les ouverts sont de la forme $U = \Omega \cap \mathbb{S}^n$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$). Afin d'obtenir un atlas différentiable, nous considérons les projections stéréographiques :

$$\phi_N : U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_S : U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

de centres de projection $N = (0, \ldots, 0, 1)$ et $S = (0, \ldots, 0, -1)$ respectivement. Ces projections sont illustrées dans la Figure 1.1, où l'espace $\mathbb{R}^n$ est identifié avec l'ensemble :

$$\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}.$$

Les équations pour $x = \phi_N(U)$ et $y = \phi_S(U)$ sont :

$$x_i = \frac{u_i}{1 - u_{n+1}}, \quad y_i = \frac{u_i}{1 + u_{n+1}}, \quad (i = \overline{1, n})$$

FIGURE 1.1 – La projection stéréographique.

Les applications $\phi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des homéomorphismes. Pour $x = \phi_N^{-1}(x)$ et $y = \phi_S^{-1}(y)$ on a :

$$u_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} = -\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$$
$$u_i = \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1} = \frac{2y_i}{\|y\|^2 + 1}, \quad (i = \overline{1, n})$$

Les applications de changement de cartes sont données par :

$$\phi_S \circ {\phi_N}^{-1} = \frac{x}{\|x\|^2}, \quad \phi_N \circ {\phi_S}^{-1} = \frac{y}{\|y\|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

L'atlas $\mathcal{A}_{S^n}$ formé par les deux cartes (ϕ_N, U_N) et (ϕ_S, U_S) est donc différentiable.

Exemple 1.1.3 (L'espace projectif réel). L'ensemble quotient $P_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/_\sim$, où $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ x = \lambda y$, est une variété différentiable de dimension n.

En effet; 1. *Soit* $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ *alors* $\exists i \in \{1, 2, ..., n+1\},\ x_i \neq 0$. *Pour chaque* $i = 1, ..., n+1$, *on dénote par* U_i *l'ouvert de* $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ *défini par :*

$$U_i = \{(x_1, x_2, ..., x_{n+1}) \ / x_i \neq 0\}.$$

La famille $(U_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ *constitue un recouvrement ouvert de* $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. *On dénote par* $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow P_n(\mathbb{R}),\ x \longmapsto \bar{x}$ *la surjection canonique, où* $\bar{x}$ *est la classe de* x *modulo la relation d'équivalence* $\sim$, *et par* $\bar{U}_i$ *l'image de* U_i *par* π. *L'espace projectif* *réel $P_n(\mathbb{R})$ muni de la topologie quotient est recouvert par la famille $(\bar{U}_i)_{1\leq i\leq n+1}$. Et pour chaque $i = 1, ..., n+1$, on note par φ_i l'application définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i \ : U_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ (x_1, x_2, ..., x_{n+1}) & \longmapsto & (\frac{x_1}{x_i}, \frac{x_2}{x_i}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \frac{x_{n+1}}{x_i}) \end{array}$$

soit $\bar{\varphi}_i$ l'application de $\bar{U}_i$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $\bar{\varphi}_i(\bar{x}) = \varphi_i(x)$ pour tout $\bar{x} \in \bar{U}_i$. Les $\bar{\varphi}_i$ définissent des applications bijectives et compte tenu de la topologie quotient de $P_n(\mathbb{R})$, la famille confère à l'espace projectif réel une structure de variété différentiable de dimension n et de classe C^∞.

1.1.1 Les applications différentiables

Définition 1.1.2.

- *Soit M une variété différentiable. Une fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en un point $p \in M$, s'il existe une carte (U, ϕ) de M avec $p \in U$ tel que :*

  $$f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \mathbb{R},$$

  est différentiable. La fonction f est différentiable dans M si f est différentiable en chaque $p \in M$.
- *Une application $f : M \longrightarrow N$ entre deux variétés différentiables est différentiable en $p \in M$ s'il existe une carte (U, ϕ) de M avec $p \in U$ et une carte (V, ψ) de N avec $f(U) \subset V$ telles que :*

  $$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V),$$

  est différentiable. L'application f est différentiable dans M si f est différentiable en p pour tout $p \in M$.

Nous utilisons les notations suivantes :

1) $C^\infty(M) :=$ L'ensemble des fonctions différentiables dans M.

2) $C^\infty(M, N) :=$ L'ensemble des applications différentiables de M dans N.

1.1.2 Espace tangent

Définition 1.1.3 (Vecteur tangent)**.** *Soit M une variété différentiable. Un vecteur tangent en $p \in M$ est une application :*

$$\begin{array}{rcl} A : C^\infty(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ f & \longmapsto & A(f). \end{array}$$

verifie les règles suivantes, pour toutes $f, g \in C^\infty(M)$:

1) $A(f+g) = A(f) + A(g)$.

2) $A(fg) = A(f)g(p) + A(g)f(p)$.

3) Si f est constante au voisinage de p alors $A(f) = 0$.

L'ensemble des vecteurs tangents en p, noté T_pM, c'est un espace vectoriel muni des opérations suivantes :

$$
\begin{aligned}
(A+B)(f) &= A(f) + B(f), \\
(\lambda A)(f) &= \lambda A(f),
\end{aligned}
$$

Pour $A, B \in T_pM$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle T_pM l'espace tangent de M en p.

Remarque 1.1.1. Une application $A : C^{\infty}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisante $1), 2)$ et 3), est aussi appelée une dérivation en p.

1.1.3 Fibré Tangent

Définition 1.1.4. *On note TM l'ensemble des vecteurs tangents de M. Donc, $A \in TM$ si et seulement s'il existe un point $p \in M$ tel que $A \in T_pM$. Ce point est uniquement déterminé par A est noté $\pi(A)$. L'ensemble TM s'appelle le fibré tangent de M, l'application :*

$$\pi : TM \longrightarrow M,$$

est la projection canonique.

1.1.4 Champs de vecteurs

Définition 1.1.5. *Soit M une variété différentiable de diemnsion m, $D \subset M$ un ouvert. Un champ de vecteurs sur D est une application :*

$$\begin{array}{rcccc} Y & : & D & \longrightarrow & TM \\ & & p & \longmapsto & Y_p \end{array}$$

telle que $\pi(Y_p) = p$, pour tout $p \in D$. Autrement dit, Y associe à tout $p \in D$ un vecteur $Y_p \in T_pM$. L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté par $\Gamma(TM)$.

Définition 1.1.6. *Les opérations définies pour les vecteurs en un point se prolongent aux champs de vecteurs de manière évidente ; Soit $D \subset M$ un ouvert $X, Y : D \longrightarrow TM$ des champs de vecteurs et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. La somme $X + Y$ et le produit fX sont des champs de vecteurs définis par :*

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p,$$
$$(fX)_p = f(p)X_p, \quad p \in D.$$

La dérivée de f suivant Y notée $Y(f)$ définie par :

$$Y(f)(p) = Y_p(f), \quad p \in D.$$

Remarque 1.1.2. On peut voir $X \in \Gamma(TM)$ comme une application de $C^\infty(M)$ vers $C^\infty(M)$ avec $X(f)(p) = X_p(f)$ pour tous $f \in C^\infty(M)$ et $p \in M$.

Définition 1.1.7 (Dérivation associée à une carte)**.** *Soient M une variété différentiable de dimension m, (U, ϕ) une carte de M et $p \in U$. Pour $i = 1, ..., m$, nous définissons l'application :*

$$\begin{array}{rcl} \left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : C^\infty(U) & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ f & \longmapsto & \left.\dfrac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}\right|_{\phi(p)} \end{array}$$

Remarque 1.1.3. :

- Il est facile de voir que ces applications satisfont les règles $1), 2)$ et $3)$, et que :

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_pM, \quad \forall i = 1, ..., m.$$

- $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}|_p\}$ est une base de T_pM, s'appelle la base associée à (U, ϕ),

– Soit $X \in \Gamma(TM)$, alors $\exists X_1, .., X_m \in C^\infty(U)$ tel que (voir [6, 15]) :

$$X_p = X_1(p)\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_p + ... + X_m(p)\frac{\partial}{\partial x_m}\bigg|_p, \quad \forall p \in U.$$

Notation 1.1.1. Etant donné une carte (U, ϕ) avec la base associée $\{\frac{\partial}{\partial x_1}|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}|_p\}$ où $p \in U$, notons par $\{dx_1|_p, ..., dx_m|_p\}$ la base duale de T_p^*M (dual algébrique de l'espace vectoriel T_pM).

Définition 1.1.8 (L'application tangente)**.** *Soit $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable entre deux variétés différentiables. Pour tout $p \in M$ nous définissons l'application tangente :*

$$d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N, \quad [d_pf(v)](g) = v(g \circ f), \quad \forall g \in C^\infty(N).$$

Proposition 1.1.1. *L'application $d_pf : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ est $\mathbb{R}$-linéaire.*

Définition 1.1.9. *Soit M une variété différentiable de dimension m. Le crochet de Lie, noté $[,]$, est défini par :*

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X,$$

Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Propriétés 1.1.1. *Le crochet de Lie vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$[.,.]$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique,*
2. *$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,*
3. *$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.*

Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f, g \in C^\infty(M)$.

Définition 1.1.1 (Tenseur sur une variété différentiable)**.** *Soit M une variété différentiable.*

– *Pour tout $x \in M$, nous définissons l'éspace vectoriel :*

$$T_x^{(p,q)}M = \underbrace{T_xM \otimes \ldots \otimes T_xM}_{p\text{-fois}} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes \ldots \otimes T_x^*M}_{q\text{-fois}}.$$

– *Un élément $T \in T_x^{(p,q)}M$ est un tenseur de type (p, q) au dessus de x. On note :*

$$T^{(p,q)}M = \bigcup_{x \in M} T_x^{(p,q)}M.$$

– *Un champ de tenseurs de type (p, q) (ou un tenseur sur M) est une section de $T^{(p,q)}M$, (i.e. un tenseur est une application $T : M \longrightarrow T^{(p,q)}M$, t.q. $\forall x \in M$, $T(x) \in T_x^{(p,q)}M$).*

Exemple 1.1.1. Soit M une variété différentiable.
- Une fonction différentiable f sur M est un tenseur de type $(0, 0)$.
- Un champs de vecteurs X sur M est un tenseur de type $(1, 0)$.

Remarque 1.1.1. Une 1-forme différentielle ω sur une variété différentiable M est un tenseur de type $(0, 1)$. L'ensemble des 1-formes différentielles sur M est noté par $\Gamma(T^*M)$.

1.2 Variété orientable

Définition 1.2.1. *On appelle atlas d'orientation d'une variéré différentiable M tout atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ tels que les changements de cartes $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ aient un Jacobien positif, i.e.*

$$Jac(\psi_{ij})_x = det(d_{\varphi_j(x)}\psi_{ij}) > 0, \quad \forall x \in U_j.$$

Une variété orientable est une variété différentiable pour laquelle il existe des atlas d'orientations.

Exemple 1.2.1.
- $\mathbb{R}^n$ est une variété orientable.
- La sphère $\mathbb{S}^2$ et le tore $\mathbb{T}^2$ sont des variétés orientables.

1.3 Variété à bord

Soit V un espace topologique séparé. On dit que V est une variété à bord de dimension k et de classe C^∞, s'il existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ telle que φ_i est un homéomorphisme d'un ouvert U_i de V sur un ouvert W_i du demi-espace :

$$\mathbb{H}^k := \{(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, x_1 \leq 0\},$$

(i.e. $W_i = \omega_i \cap \mathbb{H}^k$, où ω_i est un ouvert de $\mathbb{R}^k$), et l'application de changement de cartes $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est de classe C^∞. On appelle bord de V, et note ∂V, l'ensemble des x tels que :

$$\varphi_i(x) \in \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k, x_1 = 0\}.$$

Pour un certain $i \in I$. ∂V est une variété sans-bord (i.e. $\partial(\partial V) = \emptyset$) de dimension $(k-1)$, de classe C^∞. Si V est une variété à bord orientable, alors ∂V est une variété orientable.

Proposition 1.3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une submersion sur $f^{-1}(\{0\})$, alors :*

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq 0\},$$

est une variété à bord, de dimension n, de classe C^∞, de plus :

$$\partial V = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\} = f^{-1}(0).$$

Exemple 1.3.1. Soit $B^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, alors B^3 est une variété à bord, de dimension 3, et de classe C^∞. En effet ; L'application :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y^2+z^2-1 \end{array}$$

est une submersion sur $f^{-1}(\{0\})$, car $\mathrm{Jac}(f) = (2x \quad 2y \quad 2z)$ est de rang 1 sur $f^{-1}(\{0\})$. De plus,

$$\partial B^3 = \mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 = 1\}.$$

1.4 Métriques Riemanniennes

Définition 1.4.1. *Soit M une variété différentiable de dimension m. Un tenseur métrique (ou une métrique Riemannienne) est une application qui à chaque couple de vecteurs $X_x, Y_x \in T_xM$ (où $x \in M$) fait correspondre un nombre $g_x(X_x, Y_x) \in \mathbb{R}$ tel que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(R_1) *Pour tout $x \in M$ l'application :*

$$(X_x, Y_x) \longmapsto g_x(X_x, Y_x), \quad X_x, Y_x \in T_xM,$$

est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

(R_2) *Si $X, Y \in \Gamma(TM)$, alors la fonction :*

$$x \longmapsto g(X,Y)(x) \stackrel{def}{=} g_x(X_x, Y_x), \quad x \in M$$

est différentiable sur M.

Une variété Riemannienne est un couple (M,g), où M est une variété différentiable et g est une métrique Riemannienne.

Exemple 1.4.1.

– (L'espace Euclidien) L'espace $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire standard :

$$g_0(V,W) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

où $V = (v_0, \cdots, v_n)$, $W = (w_0, \cdots, w_n) \in T_x\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, est une variété Riemannienne.

– (Métrique Hyperbolique) Dans la boule :

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\},$$

on considère le tenseur :

$$g_H(X,Y) = \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2} g_0(X,Y), \quad X, Y \in T_xD^n \quad x \in D^n.$$

Cette métrique Riemannienne est appelée la métrique hyperbolique sur D^n.

Définition 1.4.2. *Étant donné un carte (U, ϕ) de (M^m, g), avec les champs de bases $\{\partial_1, \cdots, \partial_m\}$ associés, on appelle composantes du métrique Riemannienne les fonctions g_{ij} par $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ pour tous $i, j = 1, \cdots, m$.*

Localement : Si M est munie d'un système de coordonnées locales (x_i), alors :

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j.$$

Exemple 1.4.2. Dans la carte standard (D^n, Id_{D^n}), la métrique hyperbolique g_H sur D^n possède les composantes :

$$g_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - \|x\|^2)^2}.$$

Définition 1.4.3. *On définit la longueur d'un champ de vecteurs X de (M^m, g), par :*

$$\|X\| = \sqrt{g(X, X)}.$$

Localement :

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i \partial_i, \qquad \|X\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} X_i X_j.$$

1.4.1 Image inverse d'un tenseur métrique

Définition 1.4.4. *Soit (N^n, h) une variété Riemannienne, M une variété différentiable et $f : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞. Si f est une immersion en tout point de M, alors f^*h est un tenseur métrique sur M, appelé image inverse de h par f, où :*

$$(f^*h)(X, Y) = h(df(X), df(Y)), \qquad X, Y \in \Gamma(TM).$$

Localement : Soit (U, ϕ) une carte sur M de base associée $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ et soit (V, ψ) une carte sur N de base associée $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n})$, alors :

$$\begin{aligned}
(f^*h)_{ij} &= (f^*h)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= h(df(\frac{\partial}{\partial x_i}), df(\frac{\partial}{\partial x_j})) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} h(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}) \circ f \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} (h_{\alpha\beta} \circ f),
\end{aligned}$$

où $f_\alpha = y_\alpha \circ f$ pour tout $\alpha = 1, \cdots, n$.

1.5 Connexion de Levi Civita

1.5.1 Connexion Linéaire

Définition 1.5.1. *Une connexion linéaire sur une variété M de classe C^∞ est une application :*

$$\begin{array}{rccc} \nabla & : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$
3. $\nabla_{X+fY} Z = \nabla_X Z + f\nabla_Y Z.$

pour $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$. On dit que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante de Y en direction de X.

Définition 1.5.2. *Soit g une métrique Riemannienne sur une variété différentiable M, une connexion linéaire ∇ est dite compatible avec g si :*

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

pour tous X, Y et $Z \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.5.3. *Soient M une variété différentiable, ∇ une connexion linéaire sur M, la torsion de ∇ est un champ de tenseurs de type $(1,2)$ défini par :*

$$\begin{array}{rccc} T & : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{array}$$

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T(X,Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Théorème 1.5.1. *Soit (M,g) une variété Riemannienne, l'application :*

$$\nabla : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

définie par la formule de Koszul :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ &\quad + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \end{aligned} \tag{1.1}$$

est une connexion linéaire sur M, appelée connexion de Levi-Civita.

Théorème 1.5.2. *Si (M,g) une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec g.*

Proposition 1.5.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, de dimension m, ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g), et (U, φ) une carte sur M avec les champs de bases associés $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$, alors :*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^{k} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

où Γ_{ij}^k sont les coefficients de Christoffel donnés par :

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} g^{kl} \{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \}, \tag{1.2}$$

et g_{ij} sont les coordonnées de g relativement à la carte (U, φ) avec $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Définition 1.5.4. *Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de (M, g).*

1. $\nabla_X f = X(f)$, $\forall X \in \Gamma(TM)$, $\forall f \in C^\infty(M)$.
2. $(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\omega \in \Gamma(T^*M)$.
3. *Soit T un tenseur de type (s, r),* $\forall X, Y_1, \cdots, Y_r \in \Gamma(TM)$, $\forall \omega_1, \cdots, \omega_s \in \Gamma(T^*M)$,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X T)(\omega_1, \cdots, \omega_s, Y_1, \cdots, Y_r) \;&=\; X(T(\omega_1, \cdots, \omega_s, Y_1, \cdots, Y_r)) \\
&\quad - T(\nabla_X \omega_1, \cdots, \omega_s, Y_1, \cdots, Y_r) \\
&\quad - \cdots - T(\omega_1, \cdots, \nabla_X \omega_s, Y_1, \cdots, Y_r) \\
&\quad - T(\omega_1, \cdots, \omega_s, \nabla_X Y_1, \cdots, Y_r) \\
&\quad - \cdots - T(\omega_1, \cdots, \omega_s, Y_1, \cdots, \nabla_X Y_r).
\end{aligned}$$

1.6 Les courbures

1.6.1 Tenseur de courbure

Définition 1.6.1. *Le tenseur de courbure de Riemann R d'une variété Riemannienne (M, g) est le tenseur de type $(1, 3)$, défini par :*

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z \;&:=\; [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&=\; \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \qquad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).
\end{aligned}$$

Le tenseur de courbure de Riemann de type $(0, 4)$ est donné par :

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Corollaire 1.6.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, on a :*

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ *(antisymétrie) ;*
2. $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$ *;*
3. $g(R(X,Y)Z,Z) = 0$ *;*
4. R *vérifié l'identité de Bianchi algébrique :*

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0;$$

5. R *vérifié l'identité de Bianchi différentielle :*

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0.$$

1.6.2 Courbure sectionnelle

Définition 1.6.2. *Soit* (M,g) *une variété Riemannienne de dimension* $m \geq 2$, *pour tout point* $p \in M$ *et pour tout couple de vecteurs lineairement indépendante* X, $Y \in T_pM$ *nous définissons la courbure sectionnelle par :*

$$Sect(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}.$$

On dit que M *est de courbure constante s'il existe* $k \in \mathbb{R}$ *t.q.* $Sect(X,Y) = k$.

Théorème 1.6.1. *Une variété Riemannienne* (M^m,g) $(m \geq 2)$ *est de courbure sectionnelle constante* k *si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation :*

$$R(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y],$$

pour tout X, Y, $Z \in \Gamma(TM)$.

1.6.3 Courbure de Ricci

Définition 1.6.3. *La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne* (M^m,g) *est un tenseur de type* $(0,2)$ *défini par :*

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \mathrm{trace}_g(Z \longmapsto R(Z,X)Y) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i), \end{aligned}$$

pour tout X, $Y \in \Gamma(TM)$, *où* $\{e_i\}$ *est une base orthonormée locale sur* (M^m,g).

Remarque 1.6.1. La courbure de Ricci est symétrique.

En effet ;

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,Y)X,e_i) \\ &= Ric(X,Y). \end{aligned}$$

Définition 1.6.4. *On définit le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne* (M,g)*, par :*

$$Ricci(X) = \sum_{i=1}^{m} R(X,e_i)e_i \qquad \forall X \in \Gamma(TM).$$

Remarque 1.6.2. Pour tout $X,\ Y \in \Gamma(TM)$, on a $Ric(X,Y) = g(Ricci(X),Y)$.

1.6.4 Courbure scalaire

Définition 1.6.5. *On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne* (M^m,g) *la fonction définie sur* M*, par :*

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{trace}_g Ric \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g(R(e_i,e_j)e_j,e_i) \end{aligned}$$

où $\{e_i\}$ *est une base orthonormée locale sur* (M^m,g).

Corollaire 1.6.2. *Soit* (M^m,g) *une variété Riemannienne de courbure constante* k*, alors :*

1. $Ricci(X) = k(m-1)X$;
2. $Ric(X,Y) = k(m-1)g(X,Y)$;
3. $S = m(m-1)k$.

Exemple 1.6.1.

1. L'espace $\mathbb{R}^n$ est de courbure nulle.
2. La sphère $\mathbb{S}^n$ est de courbure positive égale 1.
3. L'espace hyperbolique $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ muni de la métrique :

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{y},$$

est de courbure négative égale -1.

1.7 Les opérateurs sur les variétés Riemanniennes

1.7.1 L'opérateur gradient

Soient (M^m, g) une variété Riemannienne, et $X \in \Gamma(TM)$. On pose :

$$X^\flat(Y) = g(X, Y),$$

pour tout $Y \in \Gamma(TM)$. Alors, l'application :

$$\Gamma(TM) \ni X \longmapsto X^\flat \in \Gamma(T^*M),$$

est $C^\infty(M)$-isomorphisme. De plus, $\flat^{-1} = \sharp$, avec :

$$g(\omega^\sharp, X) = \omega(X), \quad \forall X \in \Gamma(TM), \quad \forall \omega \in \Gamma(T^*M).$$

Définition 1.7.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, de dimension m, on définit l'opérateur gradient par :*

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} : C^\infty(M) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ f &\longmapsto \mathrm{grad}\ f = (df)^\sharp \end{aligned}$$

tel que pour tout $X \in \Gamma(TM)$, on a :

$$g(\mathrm{grad}\ f, X) = X(f) = df(X).$$

Localement : Soit $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ une base locale des champs de vecteurs sur M, alors pour toute $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Et sur une base orthonormée $\{e_i\}$ sur (M^m, g), on a :

$$\mathrm{grad}\ f = \sum_{i=1}^{m} e_i(f) e_i.$$

Propriétés 1.7.1. *Soient $(M{\cdot}g)$ une variété Riemannienne, $f, h \in C^\infty(M)$ et $X, Y \in \Gamma(TM)$. Alors :*

1. $\mathrm{grad}\ (f + h) = \mathrm{grad}\ f + \mathrm{grad}\ h$;
2. $\mathrm{grad}\ (fh) = h\,\mathrm{grad}\ f + f\,\mathrm{grad}\ h$;
3. $(\mathrm{grad}\ f)(h) = (\mathrm{grad}\ h)(f)$;
4. $g(\nabla_X \mathrm{grad}\ f, Y) = g(\nabla_Y \mathrm{grad}\ f, X)$.

1.7.2 L'opérateur Hessienne

Définition 1.7.2. *Soit f une fonction différentiable sur (M^m, g).*

$$\begin{array}{rcccc} \text{Hess } f & : & \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & C^\infty(M). \\ & & (X,Y) & \longmapsto & (\text{Hess } f)(X,Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) \end{array}$$

Localement :

$$\text{Hess } f = \sum_{i,j=1}^{m} (\text{Hess } f)_{ij}\, dx_i \otimes dx_j,$$

où, pour tout $i, j \in \{1, ..., m\}$, on a :

$$\begin{aligned} (\text{Hess } f)_{ij} &= g(\nabla_{\partial_i} \operatorname{grad} f, \partial_j) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

1.7.3 L'opérateur divergence

Soit X un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne (M^m, g), alors :

$$\begin{array}{rcccc} \nabla X & : & \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM), \\ & & Z & \longmapsto & \nabla_Z X \end{array}$$

est une application $C^\infty(M)$-linéaire.

Définition 1.7.3. *La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée* div X, *est une fonction sur M définie par :*

$$\text{div } X = \operatorname{trace}_g \nabla X.$$

Localement :

– Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, alors :

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} X_j \Gamma_{ij}^i\right),$$

avec $X = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(TM)$.

– Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée locale sur (M^m, g), alors :

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$

Propriétés 1.7.2. *Soit* (M^m, g) *une variété Riemannienne, alors :*

1. $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;
2. $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + X(f)$,

pour tous $X,\ Y \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.

Définition 1.7.4. *La divergence d'une* 1*-forme* ω *sur* (M^m, g) *est définie par :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\ \omega &= \operatorname{trace}_g(Z \longmapsto \nabla_Z \omega) \\ &= \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \{e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i} e_i)\}. \end{aligned}$$

où $\{e_i\}$ *est une base orthonormée locale sur* (M^m, g).

Propriétés 1.7.3. *Soient* $\omega,\ \eta \in \Gamma(T^*M)$ *et* $f \in C^\infty(M)$. *Alors :*

1. $\operatorname{div}(\omega+\eta) = \operatorname{div}\ \omega + \operatorname{div}\ \eta$;
2. $\operatorname{div}(f\omega) = f \operatorname{div}\ \omega + \omega(\operatorname{grad}\ f)$.

1.7.4 Théorème de divergence

Définition 1.7.5. *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* n. *On appelle mesure de volume Riemannienne, notée* v^M *où* v^g, *la mesure définie localement dans un repère par :*

$$v^g = \sqrt{det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Exemple 1.7.1.

1. On considère la variété $\mathbb{R}^2$ munie des coordonnées cartésiennes (x, y), on a :
$$g_0 = dx^2 + dy^2, \quad v^{g_0} = dx \wedge dy.$$
2. On considère la sphère $\mathbb{S}^2$ munie de la métrique $g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Alors :
$$v^g = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi.$$

Proposition 1.7.1. *Soit* D *un domaine compact à bord dans une variété Riemannienne* (M, g). *Soient* ω *1-forme et* X *un champ de vecteurs définies sur un voisinage inclue dans* D. *Alors :*

$$\int_D (\operatorname{div}\omega) v^D = \int_D \omega(\mathfrak{n}) v^{\partial D} \qquad et \qquad \int_D (\operatorname{div}\omega) v^D = \int_{\partial D} g(X, \mathfrak{n}) v^{\partial D},$$

où ∂D *est le bord de* D *et* $\mathfrak{n}$ *est le vecteur unitaire normal à* ∂D.

Corollaire 1.7.1. *Pour tous ω une 1-forme et X un champ de vecteurs à supports compact dans un domaine D, on a :*

$$\int_D (\operatorname{div}\omega)v^D = 0 \qquad et \qquad \int_D (\operatorname{div}\ X)v^D = 0.$$

1.7.5 L'opérateur Laplacien

Définition 1.7.6. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien, noté $\triangle$, sur (M, g) par :*

$$\begin{array}{rccc} \triangle & : & C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M). \\ & & f & \longmapsto & \triangle(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\ f) \end{array}$$

Propriétés 1.7.4. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, alors :*

1. $\triangle(f + h) = \triangle(f) + \triangle(h)$;
2. $\triangle(fh) = h\triangle(f) + f\triangle(h) + 2g(\operatorname{grad}\ f, \operatorname{grad}\ h)$.

Pour tous $f,\ h \in C^\infty(M)$.

1.8 Variété Riemannienne produit

1.8.1 Variété Produit

Soient M, M' des variétés différentiables de dimensions n, n' respectivement. Le produit cartisien $M \times M'$ porte une structure de variété différentiable, dite la variété produit, définie de manière suivante ; La topologie de $M \times M'$ est la topologie produit. Un atlas $\mathcal{A}$ est formé en prenant tous les couples $(U \times U', \varphi \times \varphi)$, où (U, φ) est une carte de la variété différentiable M et (U', φ') est une carte de M'. Avec :

$$(\varphi \times \varphi')(x, x') = (\varphi(x), \varphi'(x')), \text{ pour tout } (x, x') \in U \times U'.$$

Pour la vérification que $\mathcal{A}$ est un atlas différentiable, il suffit de constater que si $(U_1 \times U_1', \varphi_1 \times \varphi_1')$ et $(U_2 \times U_2', \varphi_2 \times \varphi_2')$ sont deux cartes avec $(U_1 \times U_1') \cap (U_2 \times U_2') \neq \emptyset$, alors :

$$(\varphi_2 \times \varphi_2') \circ (\varphi_1 \times \varphi_1')^{-1}(x, x') = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x), \varphi_2' \circ (\varphi_1')^{-1}(x')),$$

est différentiable.

Propriétés 1.8.1.

1. *Si M et N sont deux variétés de classe C^∞, alors les projections $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ sont de classe C^∞.*
2. *Pour tout $(x, y) \in M \times N$, on a :*

$$T_{(x,y)}M \times N \cong T_xM \times T_yN.$$

3. *Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M et N respectivement, le couple (X, Y) défini par :*
$$(X, Y) : M \times N \longrightarrow TM \times TN,$$
$$(x, y) \longmapsto (X_x, Y_y)$$

est un champ de vecteurs sur la variété produit $M \times N$.

Proposition 1.8.1 (Formule de Leibniz)**.** *Soit $\phi : M \times N \longrightarrow S$ une application de classe C^∞ entre des variétés différentiables. La différentielle de ϕ au point (x, y) est donnée pour tout $X_x \in T_xM$ et $Y_y \in T_yN$ par :*

$$(d_{(x,y)}\phi)(X_x, Y_y) = (d_x\phi_y)(X_x) + (d_y\phi_x)(Y_y),$$

où :

$$\begin{array}{rcl} \phi_x : N & \longrightarrow & S, \\ y' & \longmapsto & \phi(x, y') \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} \phi_y : M & \longrightarrow & S. \\ x' & \longmapsto & \phi(x', y) \end{array}$$

Démonstration. Soit $i_y : M \ni x \longmapsto (x, y) \in M \times N$ et $i_x : N \ni y \longmapsto (x, y) \in M \times N$:

$$\begin{array}{rcl} (d_{(x,y)}\phi)(X_x, 0) & = & d_{(x,y)}\phi \circ d_x i_y(X_x) \\ & = & d_x(\phi \circ i_y)(X_x) \\ & = & d_x\phi_y(X_x), \end{array}$$

car $\phi \circ i_y = \phi_y$, et de même méthode on obtient :

$$\begin{array}{rcl} (d_{(x,y)}\phi)(0, Y_y) & = & d_{(x,y)}\phi \circ d_y i_x(Y_y) \\ & = & d_y(\phi \circ i_x)(Y_y) \\ & = & d_y\phi_x(Y_y), \end{array}$$

avec $\phi \circ i_x = \phi_x$. Alors, pour tout $X_x \in T_xM$ *et* $Y_y \in T_yN$, on a :

$$\begin{array}{rcl} (d_{(x,y)}\phi)(X_x, Y_y) & = & (d_{(x,y)}\phi)(X_y, 0) + (d_{(x,y)}\phi)(0, Y_y) \\ & = & d_x\phi_y(X_x) + d_y\phi_x(Y_y). \end{array}$$

$\square$

Remarque 1.8.1. Les applications :

$$\begin{aligned}\Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(T(M\times N)),\\ X &\longmapsto \widetilde{X}=(X,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(TN) &\longrightarrow \Gamma(T(M\times N)),\\ Y &\longmapsto \widehat{Y}=(0,Y)\end{aligned}$$

définissent des relèvements de champ de vecteurs à $\Gamma(T(M\times N))$, tel que :

$$\begin{aligned} d_{(x,y)}\pi(\widetilde{X}) = X\circ\pi\ , &\quad d_{(x,y)}\eta(\widetilde{X}) &= 0;\\ d_{(x,y)}\eta(\widehat{Y}) = Y\circ\eta\ , &\quad d_{(x,y)}\pi(\widehat{Y}) &= 0.\end{aligned}$$

Proposition 1.8.2. *Soient $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ (resp. $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$). Si $f \in C^\infty(M)$ (resp. $g \in C^\infty(N)$), alors :*

1. $\widetilde{X_1}(f\circ\pi) = X_1(f)\circ\pi$ *et* $\widetilde{X_1}(g\circ\eta) = 0$ *;*
2. $\widehat{Y_1}(g\circ\eta) = Y_1(g)\circ\eta$ *et* $\widehat{Y_1}(f\circ\pi) = 0$ *;*
3. $\begin{cases}[\widetilde{X_1},\widetilde{X_2}] &= ([X_1,X_2],0);\\ [\widehat{Y_1},\widehat{Y_2}] &= (0,[Y_1,Y_2]);\\ [\widetilde{X_1},\widehat{Y_1}] &= 0;\end{cases}$
4. $[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)] = ([X_1,Y_1],[X_2,Y_2])$ *;*
5. $\widetilde{fX_1} = (f\circ\pi)\widetilde{X_1}$ *et* $\widehat{gY_1} = (g\circ\eta)\widehat{Y_1}$.

Remarque 1.8.2. Soient (U,φ) une carte de M, et (V,ψ) une carte de N. Si $(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_m})$ et (resp. $(\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_n})$ désigne la base locale de champ de vecteurs relativement à la carte (U,φ) (resp. (V,ψ)), alors :

$$(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_1}},...,\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_m}},\widehat{\frac{\partial}{\partial y_1}},...,\widehat{\frac{\partial}{\partial y_n}})$$

est une base locale de champ de vecteurs sur $M\times N$ relativement à la carte $(U\times V,\varphi\times\psi)$.

Proposition 1.8.3. *Soient M et N deux variétés différentiables. Si S_1 et S_2 sont deux tenseurs sur la variété produit $M\times N$ de type $(0,r)$ ou $(1,r)$, alors $S_1 = S_2$ si et seulement si pour tout champs de vecteurs $X_1,..,X_r \in \Gamma(TM)$ et $Y_1,..,Y_r \in \Gamma(TN)$, on a :*

$$S_1(\widetilde{X_1},...,\widetilde{X_r}) = S_2(\widetilde{X_1},...,\widetilde{X_r}) \qquad et \quad S_1(\widehat{Y_1},...,\widehat{Y_r}) = S_2(\widehat{Y_1},...,\widehat{Y_r}).$$

1.8.2 Connexion linéaire produit

Proposition 1.8.4. *Soient M et N deux variétés différentiables. Si ∇^M et ∇^N sont deux connexions linéaires sur M et N respectivement, alors il existe une unique connexion linéaire ∇ sur $M \times N$ telle que pour tous $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ et $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$, on a :*

$$\begin{aligned}
\nabla_{(X_1,Y_2)}(X_1, Y_2) &= (\nabla^M_{X_1} X_2, 0) + (0, \nabla^N_{Y_1} Y_2);\\
\nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} &= (\nabla^M_{X_1} X_2, 0);\\
\nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} &= (0, \nabla^N_{Y_1} Y_2);\\
\nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{Y_2} &= \nabla_{\widehat{Y_1}} \widetilde{X_2} = 0.
\end{aligned}$$

∇ est appelé connexion linéaire produit.

1.8.3 Tenseur de torsion produit

Proposition 1.8.5. *Soient ∇^M une connexion linéaire sur M et ∇^N une connexion linéaire sur N. Si T_M et T_N désignent les tenseurs de torsions sur M et N respectivement, alors le tenseur de torsion produit sur $M \times N$ est donné par :*

$$T = \big(T_M, 0\big) + \big(0, T_N\big) \quad = \big(T_M, T_N\big).$$

Démonstration. De la Proposition 1.8.3, on a :

$$\begin{aligned}
T(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) &= \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{X_2} - \nabla_{\widetilde{X_2}} \widetilde{X_1} - [\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}]\\
&= (\nabla^M_{X_1} X_2, 0) - (\nabla^M_{X_2} X_1, 0) - ([X_1, X_2], 0)\\
&= (\nabla^M_{X_1} X_2 - \nabla^M_{X_2} X_1 - [X_1, X_2], 0)\\
&= (T_M(X_1, X_2), 0)\\
&= (T_M, T_N)(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}),
\end{aligned}$$

pour tout $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, et :

$$\begin{aligned}
T(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) &= \nabla_{\widehat{Y_1}} \widehat{Y_2} - \nabla \widehat{Y_2} \widehat{Y_1} - [\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}]\\
&= (0, T_N(Y_1, Y_2))\\
&= (T_M, T_N)(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}),
\end{aligned}$$

pour tout $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$. □

1.8.4 Tenseur de courbure produit

Proposition 1.8.6. *Soient M une variété différentiable munie d'une connexion linéaire ∇^M et N une variété différentiable munie d'une connexion linéaire ∇^N. Si R_M et R_N*

désignent les tenseurs de courbures sur M et N respectivement, alors le tenseur de courbure produit sur la variété produit $M \times N$ est donné par :

$$R = (R_M, R_N).$$

Démonstration. Même démonstration que la Proposition 1.8.5. □

Remarque 1.8.3. Des Propositions 1.8.5 et 1.8.6, on déduit :

1. La variété produit $M \times N$ est sans torsion si et seulement si les variétés M et N sont sans torsion.

2. La variété produit $M \times N$ est localement plate si et seulement si les variétés M et N sont localement plates.

1.8.5 Métrique produit (diagonale)

Définition 1.8.1. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement. On définit la métrique Riemannienne produit sur $M \times N$ par :*

$$G = \pi^* g + \eta^* h,$$

où $\pi : M \times N \longrightarrow M$ et $\eta : M \times N \longrightarrow N$ désignent la première et la deuxième projection canonique.

De la Définition 1.8.1, on déduit la proposition suivante :

Proposition 1.8.7. *Pour tout $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ et $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$, on a :*

$$\begin{aligned} G(X, Y) &= g(X_1, Y_1) + h(X_2, Y_2); \\ G(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}) &= g(X_1, X_2); \\ G(\widehat{Y_1}, \widehat{Y_2}) &= h(Y_1, Y_2); \\ G(\widetilde{X_1}, \widehat{Y_2}) &= 0. \end{aligned}$$

où $X = (X_1, Y_1)$ et $Y = (X_2, Y_2)$.

Proposition 1.8.8. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. Si ∇^M (resp. ∇^N) désigne la connexion de Levi-Civita sur (M, g)(resp. (N, h)), alors la connexion de Levi-Civita sur la variété $M \times N$ associée à la métrique produit $G = \pi^* g + \eta^* h$ conicide avec la connexion linéaire produit définie dans la Proposition 1.8.4, i.e :*

$$\begin{cases} \nabla_{\widetilde{X_1}} \widetilde{Y_1} &= (\nabla^M_{X_1} Y_1, 0); \\ \nabla_{\widehat{X_2}} \widehat{Y_2} &= (0, \nabla^N_{X_2} Y_2); \\ \nabla_{\widetilde{X_1}} \widehat{X_2} &= \nabla_{\widehat{X_2}} \widetilde{X_1} = 0, \end{cases}$$

pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$.

Démonstration. Utilisant la formule de Koszul :

- $$\begin{aligned} G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}) &= \frac{1}{2}\big\{\widetilde{X_1}\big(G(\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1})\big)+\widetilde{Y_1}\big(G(\widetilde{X_1},\widetilde{Z_1})-\widetilde{Z_1}\big(G(\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1})\big) \\ &\quad + G\big(\widetilde{Z_1},[\widetilde{X_1},\widetilde{Y_1}]\big)+G\big(\widetilde{Y_1},[\widetilde{Z_1},\widetilde{X_1}]\big)-G\big(\widetilde{X_1},[\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}]\big)\big\} \\ &= \frac{1}{2}\big\{X_1(g(Y_1,Z_1))+Y_1(g(X_1,Z_1))-Z_1(g(X_1,Y_1)) \\ &\quad + g(Z_1,[X_1,Y_1])+g(Y_1,[Z_1,X_1])-g(X_1,[Y_1,Z_1])\big\} \\ &= g\big(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1\big) \\ &= G\big((\nabla^M_{X_1}Y_1,0),\widetilde{Z_1}\big); \end{aligned}$$
- $G(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widetilde{Y_1},\widehat{Z_2})=0;$
- $G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2},\widetilde{Z_1})=0;$
- $$\begin{aligned} G(\nabla_{\widehat{X_2}}\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}) &= \frac{1}{2}\big\{\widehat{X_2}\big(G(\widehat{Y_2},\widehat{Z_2})\big) \\ &\quad + \widehat{Y_2}\big(G(\widehat{X_2},\widehat{Z_2})\big)-\widehat{Z_2}\big(G(\widehat{X_2},\widehat{Y_2})\big) \\ &\quad + G\big(\widehat{Z_2},[\widehat{X_2},\widehat{Y_2}]\big)+G\big(\widehat{Y_2},[\widehat{Z_2},\widehat{X_2}]\big)-G\big(\widehat{X_2},[\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}]\big)\big\} \\ &= \frac{1}{2}\big\{X_2\big(h(Y_2,Z_2)\big)+Y_2\big(h(X_2,Z_2)\big)-Z_2\big(h(X_2,Y_2)\big) \\ &\quad + h\big(Z_2,[X_2,Y_2]\big)+h\big(Y_2,[Z_2,X_2]\big)-h\big(X_2,[Z_2,Y_2]\big)\big\} \\ &= h\big(\nabla^N_{X_2}Y_2,Z_2\big) \\ &= G\big((0,\nabla^N_{X_2}Y_2),\widehat{Z_2}\big); \end{aligned}$$
- $G\big(\nabla_{\widetilde{X_1}}\hat{Y_2},\widetilde{Z_1}\big)=G\big(\nabla_{\widetilde{X_1}}\widehat{Y_2},\widehat{Z_2}\big)=G\big(\nabla_{\widehat{X_2}}\widetilde{Y_1},\widetilde{Z_1}\big)+G\big(\nabla_{\widehat{X_2}}\widetilde{Y_1},\widehat{Z_2}\big).$

□

Proposition 1.8.9. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes. Alors, le tenseur et la courbure de Ricci ainsi que la courbure scalaire sur la variété Riemannienne produit $(M\times N, G=\pi^*g+\eta^*h)$ sont donnés par :*

$$\begin{aligned} Ricci(X) &= (Ricci_M(X_1),Ricci_M(X_2)); \\ Ric(X,Y) &= Ric_M(X_1,Y_1)+Ric_N(X_2,Y_2); \\ S &= S_M+S_N. \end{aligned}$$

Pour tout $X=(X_1,X_2)$ et $Y=(Y_1,Y_2)$.

CHAPITRE 2
LA MÉTRIQUE RIEMANNIENNE MUS-GRADIENT

Dans ce chapitre on construire des nouvelles classes de déformations d'une métrique Riemannienne g, sont notées par $\widetilde{g}$ et $\widehat{g}$, ensuite on calcule la connexion de Levi-Civita, le tenseur de courbure relativement à ses déformation de la métrique Riemannienne g [4, 5].

2.1 La variété Riemannienne $(M, \widetilde{g})$

Définition 2.1.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, et $f \in C^\infty(M)$, on définit sur M une nouvelle métrique Riemannienne, dite métrique Mus-gradient, notée $\widetilde{g}$, par $\widetilde{g} = g + df \otimes df$. Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$\widetilde{g}(X, Y)_x = g(X, Y)_x + X(f)_x Y(f)_x, \quad \forall x \in M.$$

2.1.1 Connexion de Levi-Civita de $(M, \widetilde{g})$

Théorème 2.1.1. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, si $\widetilde{\nabla}$ désigne la connexion de Levi-Civita associée à la variété $(M, \widetilde{g})$, alors :*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{\operatorname{Hess}_f(X, Y)}{1 + \|\operatorname{grad} f\|^2} \operatorname{grad} f, \tag{2.1}$$

telle que ∇ est la connexion de Levi-Civita de (M, g), Hess_f (resp. $\operatorname{grad} f$) est le Hessien (resp. le vecteur gradient) de f relativement à la métrique Riemannienne g, et $\|\operatorname{grad} f\|^2 = g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)$.

Démonstration. Soint $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, en utilisant la formule de Koszul (voir [17]), on obtient :

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) \;=\; 2g(\nabla_X Y, Z) + X(Y(f)Z(f)) + Y(Z(f)X(f))$$

$$
\begin{aligned}
&-Z(X(f)Y(f))+Z(f)[X,Y](f)+Y(f)[Z,X](f)\\
&-X(f)[Y,Z](f). \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Soit $\{E_i\}$ une base géodésique (i.e. est une base orthonormée sur (M,g) avec $(\nabla_{E_j}E_i)_x = 0, \forall i,j=\overline{1,m}$ en point $x\in M$), de l'équation (2.2) on obtient :

$$
\begin{aligned}
2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, E_i) &= 2g(\nabla_X Y, E_i) + X(Y(f)g(E_i, \operatorname{grad} f))\\
&\quad + Y(X(f)g(E_i,\operatorname{grad} f)) - E_i(g(X,\operatorname{grad} f)g(Y,\operatorname{grad} f))\\
&\quad + E_i(f)[X,Y](f) + Y(f)(\nabla_{E_i}X)(f) + X(f)(\nabla_{E_i}Y)(f), \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

d'après l'équation (2.3), et la definition de Hessien, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, E_i) &= g(\nabla_X Y, E_i) + g(\nabla_X Y, \operatorname{grad} f)g(E_i,\operatorname{grad} f)\\
&\quad + \operatorname{Hess}_f(X,Y)g(E_i,\operatorname{grad} f), \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

comme $Z = g(Z,E_i)E_i$, et d'après l'équation (2.4), on obtient :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Y, \operatorname{grad} f)g(Z,\operatorname{grad} f)\\
&\quad + \operatorname{Hess}_f(X,Y)g(Z,\operatorname{grad} f), \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

et de la définition de la métrique Riemannienne $\widetilde{g}$, on a :

$$
\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) = \widetilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \operatorname{Hess}_f(X,Y)Z(f). \qquad (2.6)
$$

de l'équation (2.6), et avec :

$$
Z(f) = \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\widetilde{g}(Z,\operatorname{grad} f). \qquad (2.7)
$$

on déduit le Théorème 2.1.1. □

2.1.2 Tenseur de courbure de $(M,\widetilde{g})$

Théorème 2.1.2. *Soit (M^m,g) une variété Riemannienne, si R (resp. $\widetilde{R}$) dénote le tenseur de courbure associé à g (resp. $\widetilde{g}$). Alors, pour tout $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \frac{g(R(X,Y)\operatorname{grad} f, Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\\
&\quad - \frac{\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f\\
&\quad + \frac{\operatorname{Hess}_f(Y,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f\\
&\quad + \frac{\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f - \frac{\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_Y \operatorname{grad} f. \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Démonstration. D'après la définition du tenseur de courbure $\widetilde{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&= \widetilde{\nabla}_X\Big(\nabla_Y Z + \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&\quad -\widetilde{\nabla}_Y\Big(\nabla_X Z + \frac{\mathrm{Hess}_f(X,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&\quad -\Big(\nabla_{[X,Y]}Z + \frac{\mathrm{Hess}_f([X,Y],Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Le premier terme de (2.9) est donné par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\Big(\nabla_Y Z &+ \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&= \nabla_X\Big(\nabla_Y Z + \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&\quad + \frac{\mathrm{Hess}_f\Big(X, \nabla_Y Z + \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

d'après l'équation (2.10), et la définition de Hessien, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\Big(\nabla_Y Z &+ \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + \frac{g(\nabla_X\nabla_Y \operatorname{grad} f, Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,\nabla_X Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f - \frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f + \frac{\mathrm{Hess}_f(X,\nabla_Y Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

On utilise la même méthode pour la seconde terme de (2.9), on trouve :

$$\begin{aligned}
-\widetilde{\nabla}_Y\Big(\nabla_X Z &+ \frac{\mathrm{Hess}_f(X,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&= -\nabla_Y\nabla_X Z - \frac{g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad} f, Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f(X,\nabla_Y Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f + \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(X,Z)}{(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f(X,Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_Y \operatorname{grad} f - \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,\nabla_X Z)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

De les équations (2.9), (2.11) et (2.12), on déduit le résultat du Théorème 2.1.2. $\square$

2.1.3 La courbure sectionnelle de $(M, \widetilde{g})$

Proposition 2.1.1. *Soient (M^m, g) une variété Riemannienne, et $\widetilde{g}$ une métrique Mus-gradient définie par $\widetilde{g} = g + df \otimes df$, où $f \in C^\infty(M)$, si Sect (resp. $\widetilde{Sect}$) désigne la courbure sectinnelle associée à g (resp. $\widetilde{g}$) du plan engendré par $\{X, Y\}$, où $X, Y \in \Gamma(TM)$ deux champs de vecteurs orthonormés par rapport à g, alors :*

$$\begin{aligned}\widetilde{Sect}(X,Y) &= \frac{1}{1+X(f)^2+Y(f)^2}\Big[Sect(X,Y) \\ &+\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\big[g(\nabla_X \operatorname{grad} f, X)g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Y) \\ &-g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)^2\big]\Big].\end{aligned} \tag{2.13}$$

Démonstration. La courbure sectionnelle de $\widetilde{g}$ est donnée par :

$$\widetilde{Sect}(X,Y) = \frac{\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y,X)}{\widetilde{g}(X,X)\widetilde{g}(Y,Y) - \widetilde{g}(X,Y)^2}.$$

On calcule le terme $\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y,X)$:

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y,X) &= g(\widetilde{R}(X,Y)Y,X) + g(\widetilde{R}(X,Y)Y, \operatorname{grad} f)X(f) \\ &= g(R(X,Y)Y,X) - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(R(X,Y)Y,\operatorname{grad} f)X(f) \\ &+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\Big[Y(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) \\ &-X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Y)\Big]X(f) \\ &+\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Y)g(\nabla_X \operatorname{grad} f, X) \\ &-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, X) \\ &+g(R(X,Y)Y,\operatorname{grad} f)X(f) \\ &-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(R(X,Y)Y,\operatorname{grad} f)g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)X(f) \\ &+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\Big[Y(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) \\ &-X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Y)\Big]g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)X(f) \\ &+\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Y)g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)X(f) \\ &-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)X(f)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g(R(X,Y)Y,X) \\
&\quad + \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\Big[g(\nabla_X \operatorname{grad} f, X)g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Y) \\
&\quad - g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)^2\Big], \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

et comme :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(X,X)\widetilde{g}(Y,Y) - \widetilde{g}(X,Y)^2 &= \Big[[g(X,X)+X(f)^2][g(Y,Y)+Y(f)^2]\Big] - \Big[g(X,Y)+X(f)Y(f)\Big]^2 \\
&= 1 + X(f)^2 + Y(f)^2. \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

Alors par la division de $\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Y,X)$ sur $\widetilde{g}(X,X)\widetilde{g}(Y,Y) - \widetilde{g}(X,Y)^2$ on obtient le résultat de la Proposition 2.1.1. □

2.1.4 Le tenseur de Ricci de $(M, \widetilde{g})$

Proposition 2.1.2. *Soient (M^m, g) une variété Riemannienne, et $\widetilde{g}$ une déformation de Mus-gradient de la métrique g définie sur M, avec $(\operatorname{grad} f)_x \neq 0, \quad \forall x \in M$. Si Ricci (resp. $\widetilde{Ricci}$) dénote le tenseur de Ricci associé à g (resp. $\widetilde{g}$). Alors, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ nous avons :*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{Ricci}(X) &= Ricci(X) - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} R(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g\Big(Ricci(X), \operatorname{grad} f\Big)\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\Big[g\Big(\nabla_X \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\Big) \\
&\quad - X\Big(1+\|\operatorname{grad} f\|^2\Big)\triangle(f)\Big]\operatorname{grad} f + \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\Big[\triangle(f) \\
&\quad - \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)} g\Big(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\Big)\Big]\nabla_X \operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2} X\Big(1+\|\operatorname{grad} f\|^2\Big)\operatorname{grad}\Big(1+\|\operatorname{grad} f\|^2\Big) \\
&\quad - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{(\nabla_X \operatorname{grad} f)}\operatorname{grad} f. \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

Démonstration. Soit $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ tel que $E_1 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|}\operatorname{grad} f$ une base orthonormée de champs vecteurs assosciée à g, alors $\{\widetilde{E}_i\}_{i=\overline{1,m}}$ est une base orthonormée de champs de vecteurs associée à $\widetilde{g}$ où $\widetilde{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}}E_1, \widetilde{E}_i = E_i \; i = \overline{2,m}$. De la définition du tenseur de Ricci, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ricci}(X) &= \widetilde{R}(X, \widetilde{E}_1)\widetilde{E}_1 + \sum_{i=2}^{m} \widetilde{R}(X, E_i)E_i \\
&= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)}\big[R(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g(R(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}[(\operatorname{grad} f)(1+\|\operatorname{grad} f\|^2) g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \\
&\quad - X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2) g(\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)]\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g(\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\nabla_X \operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f\big] \\
&\quad + \sum_{i=2}^{m}[R(X, E_i)E_i - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g(R(X, E_i)E_i, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}[E_i(1+\|\operatorname{grad} f\|^2) g(\nabla_X \operatorname{grad} f, E_i) \\
&\quad - X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2) g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i)]\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g(\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f, E_i)\nabla_X \operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g(\nabla_X \operatorname{grad} f, E_i)\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f] \\
&= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)} R(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2(\|\operatorname{grad} f\|^2)} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\nabla_X \operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2(\|\operatorname{grad} f\|^2)} X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2) \\
&\quad + Ricci(X) - \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2} R(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} g(Ricci(X), \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2} g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2} X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\triangle(f) + \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\triangle(f)\nabla_X \operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)(\|\operatorname{grad} f\|^2)} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\nabla_X \operatorname{grad} f
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad}\|^2}\nabla_{(\nabla_X \operatorname{grad} f)}\operatorname{grad} f$$
$$+\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)(\|\operatorname{grad} f\|^2)}X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2). \tag{2.17}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ricci}(X) &= Ricci(X) - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}R(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad -\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(Ricci(X), \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&\quad +\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\big[g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)) \\
&\quad -X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\triangle(f)\big]\operatorname{grad} f + \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}[\triangle(f) \\
&\quad -\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2})g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad}\|^2))]\nabla_X \operatorname{grad} f \\
&\quad +\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}X(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2) \\
&\quad -\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{(\nabla_X \operatorname{grad} f)}\operatorname{grad} f.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

□

2.1.5 La courbure scalaire de $(M, \widetilde{g})$

Proposition 2.1.3. *Soient (M^m, g) une variété Riemannienne et $\widetilde{g}$ une déformation de Mus-gradient de la métrique g définie sur M, avec $(\operatorname{grad} f)_x \neq 0$, $\forall x \in M$. Si S (resp. $\widetilde{S}$) désigne la courbure scalaire associée à g (resp. $\widetilde{g}$), alors :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= S - \frac{2}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(Ricci(\operatorname{grad} f), \operatorname{grad} f) \\
&\quad +\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\triangle(f)^2 - \frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\|\nabla \operatorname{grad} f\|^2 \\
&\quad +\frac{1}{(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\triangle(f).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Démonstration. Soit $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ tel que $E_1 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|}\operatorname{grad} f$ une base orthonormée de champs vecteurs associée à g, alors $\{\widetilde{E}_i\}_{i=\overline{1,m}}$ est une base orthonormée de champs de vecteurs associée à $\widetilde{g}$, où $\widetilde{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}}E_1, \widetilde{E}_i = E_i$ $i = \overline{2,m}$. Par définition de la courbure scalaire, nous avons :

$$\widetilde{S} = \widetilde{g}(\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1), \widetilde{E}_1) + \sum_{i=2}^{m}\widetilde{g}(\widetilde{Ricci}(E_i), E_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= g(\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1),\widetilde{E}_1)+\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1)(f)\widetilde{E}_1(f)\\
&\quad+\sum_{i=2}^{m} g(\widetilde{Ricci}(E_i),E_i)+\widetilde{Ricci}(E_i)(f)E_i(f),\\
g(\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1),\widetilde{E}_1) &= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)}g\Big(Ricci(\operatorname{grad} f)\\
&\quad-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}R(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\\
&\quad-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(Ricci(\operatorname{grad} f),\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\\
&\quad+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}[g(\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\\
&\quad-(\operatorname{grad} f)(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\triangle(f)]\operatorname{grad} f+\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}[\triangle(f)\\
&\quad-\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)}g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))]\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f\\
&\quad+\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}(\operatorname{grad} f)(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\\
&\quad-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{(\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f)}\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f\Big)\\
&= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)}[\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(Ricci(\operatorname{grad} f),\operatorname{grad} f)\\
&\quad-\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\|\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\|^2\\
&\quad+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\triangle(f)]\\
&= \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}g(Ricci(\operatorname{grad} f),\operatorname{grad} f)\\
&\quad-\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^3\|\operatorname{grad} f\|^2}\|\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\|^2\\
&\quad+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^3\|\operatorname{grad} f\|^2}g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\triangle(f),\\
\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1)(f)\widetilde{E}_1(f) &= g(\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1),\operatorname{grad} f)\sqrt{\frac{\|\operatorname{grad} f\|^2}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\|\operatorname{grad} f\|^2}}\sqrt{\frac{\|\operatorname{grad} f\|^2}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}}\\
&\quad\Big[\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(Ricci(\operatorname{grad} f),\operatorname{grad} f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\|\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\|^2\\
&+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\triangle(f)\Big]\\
= \quad & \frac{1}{(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}g(Ricci(\operatorname{grad} f),\operatorname{grad} f)\\
&-\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^3}\|\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\|^2\\
&+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^3}g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\triangle(f),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{m} g(\widetilde{Ricci}(E_i),E_i) \quad = \quad & \sum_{i=2}^{m} g\Big(Ricci(E_i)-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}R(E_i,\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\\
&-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}g(Ricci(E_i),\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\\
&+\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}[g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\\
&-E_i(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\triangle(f)]\operatorname{grad} f+\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}[\triangle(f)\\
&-\frac{1}{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)}g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))]\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f\\
&+\frac{1}{4(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}E_i(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\\
&-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f)}\operatorname{grad} f,E_i\Big)\\
= \quad & S-\frac{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)-1}{\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)}g(Ricci(\operatorname{grad} f),\operatorname{grad} f)\\
&+\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\triangle(f)^2-\frac{1}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2}\|\nabla\operatorname{grad} f\|^2\\
&-\frac{2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)-1}{2\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2))\triangle(f)\\
&+\frac{1}{4\|\operatorname{grad} f\|^2(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\|\operatorname{grad}(1+\|\operatorname{grad} f\|^2)\|^2, \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

et :

$$
\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_i)(f)\widetilde{E}_i(f) \quad = \quad 0. \qquad (2.21)
$$

La somme de $g(\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1),\widetilde{E}_1)$,$\widetilde{Ricci}(\widetilde{E}_1)(f)\widetilde{E}_1(f)$ et $\sum_{i=2}^{m} g(\widetilde{Ricci}(E_i),E_i)$ donne le résultat. $\square$

2.2 La variété Riemannienne $(M, \widehat{g})$

Définition 2.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$, on définit sur M la métrique Riemannienne, notée $\widehat{g}$, par $\widehat{g} = \alpha g + (1-\alpha) df \otimes df$ avec $\alpha \in (0,1)$. Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$\widehat{g}(X,Y)_x = \alpha g(X,Y)_x + (1-\alpha) X(f)_x Y(f)_x, \quad \forall x \in M.$$

Remarque 2.2.1. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve $\widehat{g} = \frac{1}{2}\widetilde{g}$, où $\widetilde{g} = g + df \otimes df$ est la métrique Mus-gradient sur M.

2.2.1 Connexion de Levi-Civita de $(M, \widehat{g})$

Théorème 2.2.1. *Soient (M^m, g) une variété Riemannienne, et $\widehat{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita associée à $\widehat{g}$, alors :*

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{(1-\alpha) \operatorname{Hess}_f(X,Y)}{\alpha + (1-\alpha) \| \operatorname{grad} f \|^2} \operatorname{grad} f. \tag{2.22}$$

Démonstration. Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, d'après la formule de Koszul, et la définition de $\widehat{g}$, on a :

$$\begin{aligned} 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_X Y, Z) &= 2\alpha g(\nabla_X Y, Z) + (1-\alpha)\{X(Y(f)Z(f)) + Y(Z(f)X(f)) \\ &\quad - Z(X(f)Y(f)) + Z(f)[X,Y](f) + Y(f)[Z,X](f) \\ &\quad - X(f)[Y,Z](f)\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base géodésique dans (M, g) en point $x \in M$ (voir [2]), d'après (2.23), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\widehat{g}(\widehat{\nabla}_X Y, e_i) &= 2\alpha g(\nabla_X Y, e_i) + (1-\alpha)\{X(Y(f) g(e_i, \operatorname{grad} f)) \\ &\quad + Y(X(f) g(e_i, \operatorname{grad} f)) - e_i(g(X, \operatorname{grad} f) g(Y, \operatorname{grad} f)) \\ &\quad + e_i(f)[X,Y](f) + Y(f)(\nabla_{e_i} X)(f) + X(f)(\nabla_{e_i} Y)(f)\}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

de l'équation (2.24), et la définition de Hessien de la fonction f, on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\widehat{\nabla}_X Y, e_i) &= \alpha g(\nabla_X Y, e_i) + (1-\alpha) g(\nabla_X Y, \operatorname{grad} f) g(e_i, \operatorname{grad} f) \\ &\quad + (1-\alpha) \operatorname{Hess}_f(X,Y) g(e_i, \operatorname{grad} f), \end{aligned} \tag{2.25}$$

d'après l'équation (2.25), on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\widehat{\nabla}_X Y, Z) &= \alpha g(\nabla_X Y, Z) + (1-\alpha) g(\nabla_X Y, \operatorname{grad} f) g(Z, \operatorname{grad} f) \\ &\quad + (1-\alpha) \operatorname{Hess}_f(X,Y) g(Z, \operatorname{grad} f), \end{aligned} \tag{2.26}$$

et avec la définition de la métrique Riemannienne $\widehat{g}$, on a :

$$\widehat{g}(\widehat{\nabla}_X Y, Z) = \widehat{g}(\nabla_X Y, Z) + (1-\alpha) \operatorname{Hess}_f(X,Y) Z(f). \tag{2.27}$$

De l'équation (2.27), et comme :

$$Z(f) = \frac{1}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\widehat{g}(Z, \operatorname{grad} f). \tag{2.28}$$

on déduit le résultat du Théorème 2.2.1. □

2.2.2 Tenseur de courbure de $(M, \widehat{g})$

On considère le tenseur de courbure $\widehat{R}$ de la variété Riemannienne $(M, \widehat{g})$, alors :

Théorème 2.2.2. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, *on a :*

$$\begin{aligned} \widehat{R}(X,Y)Z \quad = \quad & R(X,Y)Z + \frac{(1-\alpha)g(R(X,Y)\operatorname{grad} f, Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\ & -\frac{(1-\alpha)^2 \operatorname{Hess}_f(X, \operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{(\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\ & +\frac{(1-\alpha)^2 \operatorname{Hess}_f(Y, \operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{(\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\ & +\frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f - \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_Y \operatorname{grad} f. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Démonstration. D'après la définition du tenseur de courbure $\widehat{R}$,

$$\widehat{R}(X,Y)Z = \widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z - \widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_{[X,Y]}Z, \tag{2.30}$$

et le Théorème 2.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{R}(X,Y)Z \quad = \quad & \widehat{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f) \\ & -\widehat{\nabla}_Y(\nabla_X Z + \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f) \\ & -(\nabla_{[X,Y]}Z + \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f([X,Y],Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Le premier terme de (2.31) est donné par :

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_X(\nabla_Y Z \quad + \quad & \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f) \\ = \quad & \nabla_X(\nabla_Y Z + \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f) \\ & +\frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(X, \nabla_Y Z + \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f, \end{aligned} \tag{2.32}$$

de l'équation (2.32), et la définition de Hessien, on obtient :

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_X(\nabla_Y Z &+ \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z + \frac{(1-\alpha)g(\nabla_X\nabla_Y \operatorname{grad} f, Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&+ \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,\nabla_X Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&- \frac{(1-\alpha)^2\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{(\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \qquad (2.33) \\
&+ \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f + \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(X,\nabla_Y Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f.
\end{aligned}$$

On utilise la même méthode pour le deuxième terme de l'équation (2.31), on trouve :

$$\begin{aligned}
-\widehat{\nabla}_Y(\nabla_X Z &+ \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f) \\
&= -\nabla_Y\nabla_X Z - \frac{(1-\alpha)g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad} f, Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&- \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(X,\nabla_Y Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&+ \frac{(1-\alpha)^2\operatorname{Hess}_f(Y,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{(\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \qquad (2.34) \\
&- \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_Y \operatorname{grad} f - \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,\nabla_X Z)}{\alpha+(1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f.
\end{aligned}$$

De les équations (2.31), (2.33) et (2.34) on obtient le résultat du Théorème 2.2.2. □

CHAPITRE 3

APPLICATIONS HARMONIQUES ET BI-HARMONIQUES

Dans ce chapitre, on donne la définition et les propriétés des applications harmoniques (resp. les applications bi-harmoniques), nous considérons comme un point critique de la fonctionnelle énergie (resp. de la fonctionnelle bi-énergie) ainsi que en faisant appel au champ de tension, et l'opérateur de Jacobi, et nous citons aussi des exemples d'applications harmoniques bi-harmoniques. Les références utilisées dans ce chapitre sont [2, 9, 11, 15, 14, 22].

3.1 Métrique induite sur le fibré tangent inverse

Définition 3.1.1. *Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ entre deux variétés différentiables. Le fibré tangent inverse est défini par :*

$$\varphi^{-1}TN = \{(x, v)|x \in M,\ v \in T_{\varphi(x)}N\}.$$

Une section sur $\varphi^{-1}TN$ est une application de classe C^∞, $V : M \longrightarrow TN$ tel que :

$$V(x) \in T_{\varphi(x)}N, \ \ \forall x \in M.$$

Notons par $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ l'ensemble des sections sur $\varphi^{-1}TN$.

Définition 3.1.2. *Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ entre deux variétés différentiables et h une métrique Riemannienne sur N. Alors h induit une métrique Riemannienne sur $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$:*

$$h(V, W)(x) = h_{\varphi(x)}(V_x, W_x),$$

pour tous $x \in M$ et $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$.

3.2 Connexion induite sur le fibré tangent inverse

Définition 3.2.1. *Soient M et N deux variétés différentiables, $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ et ∇^N une connexion linéaire sur N. On définit la connexion de Pull-back sur le fibré tangent inverse $\varphi^{-1}TN$ par :*

$$\begin{array}{cccc} \nabla^\varphi & : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}TN) & \longrightarrow & \Gamma(\varphi^{-1}TN) \\ & (X, V) & \longmapsto & \nabla^\varphi_X V = \nabla^N_{d\varphi(X)} \widetilde{V} \end{array} \tag{3.1}$$

où $\widetilde{V} \in \Gamma(TN)$, tel que $\widetilde{V} \circ \varphi = V$.

Localement :

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi_X V &= \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n \nabla^\varphi_{X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} V^\alpha (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n X^i \Big\{ \frac{\partial V^\alpha}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) + V^\alpha \nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) \Big\}. \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) &= \nabla^N_{d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i})} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\ &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \left(\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right) \circ \varphi \\ &= \sum_{\beta,\gamma=1}^n \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} \left(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \right) \circ \varphi, \end{aligned}$$

où $\varphi^\beta = y_\beta \circ \varphi$. Ainsi :

$$\nabla^\varphi_X V = \sum_{i=1}^m \sum_{\gamma=1}^n X^i \Big\{ \frac{\partial V^\gamma}{\partial x_i} + \sum_{\alpha,\beta=1}^n V^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_i} (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi) \Big\} \Big(\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ \varphi \Big).$$

Donc la relation (3.1) est indépendante du choix de $\widetilde{V}$, d'où cette connexion est bien définie.

Remarque 3.2.1. Soient M, N deux variétés différentiables, X, $Y \in \Gamma(TM)$, V, $W \in \Gamma(TN)$ et $\varphi \in C^\infty(M, N)$. Si X et V (resp. Y et W) sont φ-conjugués, i.e. $d\varphi(X) = V \circ \varphi$ (resp. $d\varphi(Y) = W \circ \varphi$), alors :

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) = (\nabla^N_V W) \circ \varphi.$$

Proposition 3.2.1. *Soient* $\varphi : M \longrightarrow N$ *une application différentiable,* ∇^N *une connexion linéaire compatible avec une métrique* h *sur* N*, alors la connexion linéaire* ∇^φ *est compatible avec la métrique induite sur* $\varphi^{-1}TN$*, c'est à dire :*

$$X(h(V,W)) = h(\nabla^\varphi_X V, W) + h(V, \nabla^\varphi_X W)$$

pour tous $X \in \Gamma(TM)$ *et* $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$.

Proposition 3.2.2. *Soit* ∇^N *une connexion sans torsion sur* N*, alors :*

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) = \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]),$$

pour tous $X,\ Y \in \Gamma(TM)$.

Démonstration. Soient $V,\ W \in \Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs φ-conjugués avec X et Y respectivement, alors :

$$\begin{aligned} [V,W] \circ \varphi &= d\varphi \circ [X,Y] \\ \nabla^N_V W &= \nabla^N_W V + [V,W], \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) &= \nabla^\varphi_X (W \circ \varphi) \\ &= \nabla^N_{d\varphi(X)} W \\ &= (\nabla^N_V W) \circ \varphi \\ &= (\nabla^N_W V + [V,W]) \circ \varphi \\ &= \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]). \end{aligned}$$

□

3.3 Seconde forme fondamentale

Définition 3.3.1. *Soient* (M,g), (N,h) *deux variétés Riemanniennes,* $\varphi \in C^\infty(M,N)$. *La seconde forme fondamentale de l'application* φ *est la dérivée covariante de la 1-forme vectoriel* $d\varphi$, *définie par :*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y)$$

pour tous $X,\ Y \in \Gamma(TM)$.

Proposition 3.3.1. *Soit* $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ *une application différentiable, la seconde forme fondamentale de l'application* φ *est symétrique. C'est a dire :*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla d\varphi(Y,X),$$

pour tous $X,\ Y \in \Gamma(TM)$.

Démonstration. En utilisant la proposition (3.2.2), on a :

$$\begin{aligned}\nabla d\varphi(X,Y) &= \nabla^{\varphi}_{X} d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y)\\ &= \nabla^{\varphi}_{Y} d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]) - d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y)\\ &= \nabla^{\varphi}_{Y} d\varphi(X) - d\varphi(\nabla^{M}_{Y}X)\\ &= \nabla d\varphi(Y,X),\end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$. □

Proposition 3.3.2. *Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors :*

$$\nabla d(\psi\circ\varphi) = d\psi(\nabla d\varphi) + \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi).$$

Démonstration. Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$, alors :

$$\begin{aligned}\nabla d(\psi\circ\varphi)(X,Y) &= \nabla^{\psi\circ\varphi}_{X} d(\psi\circ\varphi)(Y) - d(\psi\circ\varphi)(\nabla^{M}_{X}Y)\\ &= \nabla^{\psi\circ\varphi}_{X} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y))\\ &= \nabla^{P}_{d\psi(d\varphi(X))} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y))\\ &= \nabla^{\psi}_{d\varphi(X)} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y))\\ &= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla^{N}_{d\varphi(X)} d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y))\\ &= d\psi(\nabla d\varphi(X,Y)) + \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)).\end{aligned}$$

□

Définition 3.3.2. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes. Une application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ est dite totalement géodésique si $\nabla d\varphi = 0$.*

Définition 3.3.3. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞. La trace de la seconde forme fondamentale de l'application φ est appelée champ de tension de l'application φ, noté par :*

$$\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g \nabla d\varphi.$$

Localement :

– Si $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ (resp. $(\frac{\partial}{\partial y_\alpha})$) est une base locale de champs de vecteurs sur M (resp. sur N), alors :

$$\tau(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\gamma=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{m}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\,{}^{N}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\varphi - \sum_{k=1}^{m}{}^{M}\Gamma^{k}_{ij}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi. \quad (3.2)$$

– Relativement à une base orthonormée $\{e_i\}$ sur (M,g) on a :

$$\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^{m}\left\{\nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^{M}_{e_i} e_i)\right\}.$$

Proposition 3.3.3. *[20] Soient $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ et $\psi : (N, h) \longrightarrow (P, k)$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors :*

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + \mathrm{trace}_g \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi).$$

Exemple 3.3.1. Soient M et N deux variétés différentiables t.q. $M \subset N$. M est dite sous-variété de N si l'inclusion $i : M \hookrightarrow N$, $x \longmapsto x$ est un plongement (i.e. i est une immersion et i réalise un homéomorphisme de M sur $i(M)$ pour la topologie induite. Dans ce cas $\dim M \leq \dim N$. Si (N, h) est une variété Riemannienne et M est une sous-variété de N, alors le champ de tenseur $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$ défini pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $p \in M$ par :

$$g(X, Y)_p = h_p(X_p, Y_p),$$

est une métrique Riemannienne sur M, appelé la métrique induite sur M par h.

Pour tout $p \in M$ on a $T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp$, où :

$$T_pM^\perp = \{v \in T_pN | h_p(v, w) = 0 \ , \forall w \in T_pM\}.$$

D'où pour tout $v \in T_pN$:

$$\exists! v^\top \in T_pM, \ \ \exists! v^\perp \in T_pM^\perp \quad | \quad v = v^\top + v^\perp.$$

Si ∇^N (resp. ∇^M) désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique h sur N (resp. g sur M), alors :

$$\nabla^M_X Y = (\nabla^N_X Y)^\top, \qquad X, Y \in \Gamma(TM).$$

La deuxième forme fondamentale de M sur N est donnée par :

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= (\nabla^N_X Y)^\perp \\ &= \nabla^N_X Y - (\nabla^N_X Y)^\top \\ &= \nabla^N_{di(X)} di(Y) - di(\nabla^M_X Y) \\ &= (\nabla di)(X, Y), \end{aligned}$$

et la courbure moyenne est donnée par :

$$H = \frac{1}{m} \mathrm{trace}_g B = \frac{1}{m} \tau(i),$$

où $m = \dim M$. M est dite minimale si sa courbure moyenne est nulle.

Application. Soit $M = \mathbb{S}^n$ désigne la sphère unité et $N = \mathbb{R}^{n+1}$, alors :

1. Le champ de vecteur normal à la sphère est $\mathcal{N} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$;

2. $B(X,Y) = -g(X,Y)\mathcal{N}$, $\forall X, Y \in \Gamma(T\mathbb{S}^n)$;
3. Le champ tension de l'inclusion $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est donné par $\tau(i) = -n\mathcal{N}$.

Exemple 3.3.2. Soit (M^m, g) une variété Riemannienne, et soit $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors :

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \operatorname{trace}_g \nabla df \\
&= \sum_{i=1}^{m} \nabla df(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^f_{e_i} df(e_i) - df(\nabla^M_{e_i} e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \{e_i(e_i(f)) - (\nabla^M_{e_i} e_i)(f)\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla^M_{e_i} \operatorname{grad} f, e_i) \\
&= \operatorname{div} \ \operatorname{grad} \ f \\
&= \triangle(f),
\end{aligned}$$

où $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur (M^m, g).

3.4 Applications harmoniques

Définition 3.4.1. *Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés Riemanniennes, D un domaine compact de M et $\varphi \in C^\infty(M, N)$. On définit l'énergie de φ sur D par :*

$$E(\varphi, D) = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 \, v^g,$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$ définie par :

$$|d\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)),$$

$\{e_i\}$ étant une base orthonormée sur (M, g) et v^g est la mesure de volume Riemannienne de (M^m, g).

Localement : Si $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ (resp. $(\frac{\partial}{\partial y_\alpha})$) est une base locale de champs de vecteurs sur M (resp. sur N), on a :

$$d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN),$$

où $\varphi_\alpha = y_\alpha \circ \varphi$, $\forall \alpha = \overline{1,n}$. D'où :

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) \otimes dx_i.$$

Soit $<,>$ la métrique Riemannienne induite sur le fibré $\varphi^{-1}TN \otimes T^*M$ (voir [2]), alors :

$$\begin{aligned}
|d\varphi|^2 &= \langle d\varphi, d\varphi \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \left\langle \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) \otimes dx_i, \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} (\frac{\partial}{\partial y_\beta} \circ \varphi) \otimes dx_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} \left\langle (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) \otimes dx_i, (\frac{\partial}{\partial y_\beta} \circ \varphi) \otimes dx_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} (h_{\alpha\beta} \circ \varphi).
\end{aligned}$$

Définition 3.4.2. *Une variation de φ à support dans un domaine compact $D \subset M$ est une famille d'applications $\{\varphi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)} \subset C^\infty(M, N)$, telles que $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_t = \varphi$ sur $M \setminus \mathrm{Int}(D)$.*

Définition 3.4.3. *Une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes est dite harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle d'énergie E, i.e :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D) \Big|_{t=0} = 0.$$

3.5 Première variation de l'énergie

Théorème 3.5.1. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, alors :*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D) \Big|_{t=0} = - \int_D h(v, \tau(\varphi)) \, v^g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}\big|_{t=0}$ dénote le champ de vecteurs de variation de $\{\varphi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$, et $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de φ.

Démonstration. Soient D un domaine compact de M, $\{\varphi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ une variation de φ à support dans D, et $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$ l'application définie par $\phi(x, t) = \varphi_t(x)$. D'après la formule de Leibniz on a :

$$d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,t)} = d_t \phi_x (\frac{d}{dt}) + d_x \phi_t(0)$$

$$= \quad d_t\phi_x(\frac{d}{dt}),$$

où $\phi_x : (-\epsilon, \epsilon) \to N$, $\phi_x(t) = \phi(x,t) = \varphi_t(x)$, d'où :

$$\begin{aligned} d\phi(0, \frac{d}{dt})_{(x,t)} &= d_t\varphi_t(x)(\frac{d}{dt}) \\ &= \frac{d\varphi_t(x)}{dt}, \end{aligned}$$

on suppose que $(0, \frac{d}{dt}) = \frac{\partial}{\partial t}$, donc :

$$d\varphi(\frac{\partial}{\partial t})\Big|_{t=0} = v.$$

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur (M,g). Comme le crochet de Lie $[(e_i,0),(0,\frac{d}{dt})] = 0$ et $d\varphi_t(e_i) = d\phi(e_i,0)$ pour tout $i = 1, \cdots, m$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D |d\varphi_t|^2 \, v^g\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D \sum_{i=1}^m h(d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_i)) \, v^g\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D \sum_{i=1}^m h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0)) \, v^g\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^m h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0)) \, v^g\Big|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0)) \, v^g\Big|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0)) \, v^g\Big|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^N_{d\varphi(e_i)} v, d\varphi(e_i)) \, v^g \\ &= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) \, v^g. \qquad (3.3) \end{aligned}$$

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X) = h(v, d\varphi(X)), X \in \Gamma(TM),$$

on a la divergence de ω est donnée par :

$$\operatorname{div}^M \omega \quad = \quad \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i}\omega)(e_i)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{m} \{e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla^M_{e_i} e_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \{h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i))\} - h(v, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \tau(\varphi)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

d'après les formules (3.3), (3.4), le théorème de divergence, on obtient :

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = - \int_D h(v, \tau(\varphi))\ v^g.$$

□

Théorème 3.5.2. *Une application $\varphi \in C^\infty(M, N)$ entre deux variétés Riemanniennes est harmonique si et seulement si $\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g \nabla d\varphi = 0$.*

Exemple 3.5.1. Toute application constante $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ est harmonique (car $d\varphi = 0$).

Remarque 3.5.1. Toute application totalement géodésique entre deux variétés Riemanniennes est une application harmonique.

Exemple 3.5.2. La seconde forme fondamentale de l'application identité $Id_M : (M, g) \longrightarrow (M, g)$ est nulle, c'est à dire Id_M est totalement géodésique, donc Id_M est harmonique.

Exemple 3.5.3. Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique g_0, et soit :

$$\varphi : (M, g) \to (\mathbb{R}^n, g_0), \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)),$$

une application différentiable. D'après la formule (3.2) avec ${}^{\mathbb{R}^n}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$, on a :

$$\tau(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{\gamma=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{m} {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ \varphi. \tag{3.5}$$

Ainsi, le champ tension de l'application φ, est donné par :

$$\tau(\varphi) = (\triangle(\varphi_1), \cdots, \triangle(\varphi_n)).$$

D'où l'application φ est harmonique si et seulement si $\triangle(\varphi_\alpha) = 0$, $\forall \alpha = 1, \cdots, n$, i.e. φ_α sont des fonctions harmoniques.

Exemple 3.5.4. Soient (N, h) une variété Riemannienne, M une sous-variété de (N, h), et $i : M \hookrightarrow N$ l'injection canonique. Alors, la sous-variété M est minimale si et seulement si i est harmonique (car $\tau(i) = mH$, où $m = \dim M$, voir l'exemple 3.3.1).

Exemple 3.5.5. Soient (M^m, g) une variété Riemannienne, S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'injection canonique, et $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow S^n$ une application de classe C^∞. On pose $\psi = i \circ \varphi : (M^m, g) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Alors, φ est harmonique si et seulement si :

$$\tau(\psi) = -|d\psi|^2\psi.$$

En effet ; d'après la Proposition 3.3.3, on trouve :

$$\tau(\psi) = \tau(i \circ \varphi) = di(\tau(\varphi)) + \operatorname{trace} \nabla di(d\varphi, d\varphi).$$

Donc, φ et harmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \operatorname{trace}_g \nabla di(d\varphi, d\varphi) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \nabla di(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)), \end{aligned}$$

où $\{e_i\}$ est une base orthonormée sur (M^m, g). On a :

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= -\sum_{i=1}^{m} < d\varphi(e_i), d\varphi(e_i) > \mathcal{N}_{\psi(x)}, \qquad \text{où } \mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= -\sum_{i=1}^{m} |d\varphi|^2\psi(x), \qquad (\mathcal{N}_{\psi(x)} = \psi(x)) \\ &= -|d\varphi|^2\psi(x). \end{aligned}$$

Remarque 3.5.2. La composée de deux applications harmoniques n'est pas en général une application harmonique. En particulier, si ψ est totalement géodésique c'est-a-dire $\nabla d\psi = 0$, et ϕ harmonique, alors $\psi \circ \phi$ est harmonique.

Exemple 3.5.6. Soit la application :

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

soit $\varphi^1(x) = x$ et $\varphi^2(x) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= (\frac{d^2\varphi^1}{dx^2}, \frac{d^2\varphi^2}{dx^2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et soit l'application :

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2) \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2 \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= \triangle(\psi)\\ &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\\ &= 2-2\\ &= 0,\end{aligned}$$

alors les deux applications φ et ψ sont harmoniques, mais la composée :

$$\begin{aligned}\psi\circ\varphi:(\mathbb{R},dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R},dz^2)\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$$

est non harmonique, car $\tau(\psi\circ\varphi)=2$.

3.6 Deuxième variation de l'énergie

Théorème 3.6.1. *Soit* $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ *une application harmonique entre deux variétés Riemanniennes et* D *un domaine compact de* M*. Si* $\{\varphi_{t,s}\}_{t,s\in(-\epsilon,\epsilon)}$ *est une variation de* φ *à deux paramètres à support compact dans* D*, alors :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}E(\varphi_{t,s};D)\Big|_{(t,s)=(0,0)}=\int_D h(-\operatorname{trace}_g\ R^N(V,d\varphi)d\varphi-\operatorname{trace}_g(\nabla^\varphi)^2V,W)v^g,$$

où $V=\frac{\partial\varphi_{t,s}}{\partial t}\big|_{(t,s)=(0,0)}$ *et* $W=\frac{\partial\varphi_{t,s}}{\partial s}\big|_{(t,s)=(0,0)}$ *dénote les champs de vecteurs de variation.*

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur (M^m,g), et soit :

$$\begin{aligned}\phi:M\times(-\epsilon,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon) &\longrightarrow N\\ (x,t,s) &\longmapsto \varphi_{t,s}(x)\end{aligned}$$

$$E_i=(e_i,0,0),\quad \frac{\partial}{\partial t}=(0,\frac{d}{dt},0),\quad \frac{\partial}{\partial s}=(0,0,\frac{d}{ds}).$$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}E(\varphi_{t,s},D) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\int_D\sum_{i=1}^m h(d\varphi_{t,s}(e_i),d\varphi_{t,s}(e_i))\ v^g\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\int_D\sum_{i=1}^m h(d\phi(E_i),d\phi(E_i))\ v^g\\ &= \frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial s}h(d\phi(E_i),d\phi(E_i))\ v^g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i))\ v^g \\
&= \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}) + d\varphi([\frac{\partial}{\partial s}, E_i]), d\phi(E_i))\ v^g. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

D'après la formule (3.6) avec $[\frac{\partial}{\partial s}, E_i] = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial s} E(\varphi_{t,s}, D) = \int_D h(\nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})), d\phi(E_i))v^g,$$

ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}, D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_D \sum_{i=1}^m h(\nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})), d\phi(E_i))v^g\Big|_{(t,s)=(0,0)} \\
&= \int_D \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t} h(\nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i))v^g\Big|_{(t,s)=(0,0)} \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

$\forall i = 1, ..., m$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h(\nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) &= h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\
&\quad + h(\nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)), \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^\phi_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) &= h(R^N(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(E_i))d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\
&\quad + h(\nabla^\phi_{E_i} \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\
&\quad + h(\nabla^\phi_{[\frac{\partial}{\partial t}, E_i]} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)). \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega(X) = h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(X)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

En tenant compte que φ est harmonique, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^m \{e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla^M_{e_i} e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^m \{e_i(h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i))) - h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m}\{h(\nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i))\\
&\quad +h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(e_i)) - h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(\nabla^{M}_{e_i}e_i))\}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\{h(\nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i)) + h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, \tau(\varphi))\}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\{h(\nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{(t,s)=(0,0)}, d\varphi(e_i))\}. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

D'après les formules (3.9) et (3.10), avec $[\frac{\partial}{\partial t}, E_i] = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), d\phi(E_i))\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \sum_{i=1}^{m} h(R^N(V, d\varphi(e_i))W, d\varphi(e_i))\\
&\quad + \operatorname{div}^M \omega. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

En développant le deuxième terme à droite de l'égalité (3.8), on trouve :

$$\begin{aligned}
h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(E_i)) &= h(\nabla^{\phi}_{E_i}d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^{\phi}_{E_i}d\phi(\frac{\partial}{\partial t}))\\
&= E_i\Big(h(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^{\phi}_{E_i}d\phi(\frac{\partial}{\partial t}))\Big)\\
&\quad -h(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^{\phi}_{E_i}\nabla^{\phi}_{E_i}d\phi(\frac{\partial}{\partial t})). \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Si η désigne la 1-forme différentielle à support D, définie sur M par :

$$\eta(X) = h(W, \nabla^{\varphi}_{X}V), \quad X \in \Gamma(TM),$$

alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \eta &= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(\eta(e_i)) - \eta(\nabla^{M}_{e_i}e_i)\}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\{e_i(h(W, \nabla^{\varphi}_{e_i}V)) - h(W, \nabla^{\varphi}_{\nabla^{M}_{e_i}e_i}V)\}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

D'après les formules (3.12) et (3.13), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(E_i))\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \operatorname{div}^M \eta + \sum_{i=1}^{m} h(W, \nabla^{\varphi}_{\nabla^{M}_{e_i}e_i}V)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{m} h(W, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}V). \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

En utilisant les formules (3.7), (3.8), (3.9), (3.11) et le théorème de divergence, on déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}E(\varphi_{t,s};D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} &= \int_D\sum_{i=1}^m\big\{-h(R^N(V,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),W)\\ &\quad +h(W,\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}V)-h(W,\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}V)\big\}\,v^g.\end{aligned}$$

□

Définition 3.6.1 (L'opérateur de Jacobi)**.** *Soit* $\varphi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ *une application différentiable entre deux variétés Riemanniennes, on définit l'opérateur de Jacobi de* φ*, noté* J_φ*, par :*

$$\begin{aligned}J_\varphi:\Gamma(\varphi^{-1}TN) &\longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN),\\ v &\longmapsto J_\varphi(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_\varphi(v) &= -\operatorname{trace}_g R^N(v,d\varphi)d\varphi-\operatorname{trace}_g(\nabla^\varphi)^2v\\ &= -\sum_{i=1}^m R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)-\sum_{i=1}^m[\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}v-\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}v].\end{aligned}$$

Proposition 3.6.1. *On a :*

1. J_φ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire ;*
2. $J_\varphi(fv)=fJ_\varphi(v)-[\triangle(f)v+2\nabla^\varphi_{\operatorname{grad} f}v]$.

Ici, $v\in\Gamma(\varphi^{-1}TN)$*, et* $f\in C^\infty(M)$*.*

Démonstration. 1. Soit $v,w\in\Gamma(\varphi^{-1}TN)$, alors :

$$\begin{aligned}J_\varphi(v+w) &= -\sum_{i=1}^m\Big\{R^N(v+w,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)+[\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}(v+w)-\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}(v+w)]\Big\}\\ &= -\sum_{i=1}^m\Big\{R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)+R^N(w,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)\\ &\quad +[\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}v+\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}w-\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}v-\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}w]\Big\}\\ &= -\sum_{i=1}^m\Big\{R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)+[\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}v-\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}v]\Big\}\\ &\quad -\sum_{i=1}^m\Big\{R^N(w,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)+[\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}w-\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}w]\Big\}\\ &= J_\varphi(v)+J_\varphi(w),\end{aligned}$$

de même pour : $J_\varphi(\lambda v)=\lambda J_\varphi(v),\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

2. Soit $f \in C^\infty(M)$ et $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$, on a :

$$\begin{aligned}
J_\varphi(fv) &= -\sum_{i=1}^m \Big\{R^N(fv, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) + [\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i} fv - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i} fv]\Big\} \\
&= -f\sum_{i=1}^m R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^m [\nabla^\varphi_{e_i} e_i(f)v + \nabla^\varphi_{e_i} f \nabla^\varphi_{e_i} v - (\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i} f)v - f\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i} v] \\
&= -f\sum_{i=1}^m R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^m [e_i(e_i(f))v + e_i(f)\nabla^\varphi_{e_i} v + e_i(f)\nabla^\varphi_{e_i} v \\
&\quad + f\nabla^\varphi_{e_i}(\nabla^\varphi_{e_i} v) - (\nabla^M_{e_i} e_i)(f)v - f\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i} v] \\
&= fJ_\varphi(v) - [\triangle(f)v + 2\nabla^\varphi_{\text{grad } f} v].
\end{aligned}$$

□

3.7 Applications bi-harmoniques

Définition 3.7.1. *Soit (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés Riemanniennes et D un domaine compact de M. La fonctionnelle bi-énergie d'une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞, est définie par :*

$$\begin{array}{rcccc} E_2 & : & C^\infty(M,N) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & \varphi & \longmapsto & E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 v^g. \end{array} \tag{3.15}$$

où $|\tau(\varphi)|^2 = h(\tau(\varphi), \tau(\varphi))$, et $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de φ.

Définition 3.7.2. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, est dite bi-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-énergie E_2 pour tout domaine compact $D \subset M$, c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{3.16}$$

$\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ étant une variation de φ à support dans D.

3.8 Première variation de bi-énergie

Théorème 3.8.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_2(\varphi))v^g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ *désigne le champ de variation associé à* $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$, *et* $\tau_2(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ *le champ défini relativement à une base orthonormée sur* (M^m, g), *par :*

$$\begin{aligned}\tau_2(\varphi) &= -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi)\\ &= -\sum_{i=1}^m R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^m \Big\{\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)\Big\}.\end{aligned}$$

Démonstration. On pose $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$, l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Alors :

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = \int_D \sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))\Big)v^g\Big|_{t=0}. \quad (3.17)$$

On a :

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i, 0) = \nabla^\phi_{(e_i,0)} d\phi(0, \frac{d}{dt}), \quad (3.18)$$

car

$$[(0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0)] = 0.$$

Et

$$\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(\nabla^M_{e_i} e_i, 0) = \nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)} d\phi(0, \frac{d}{dt}). \quad (3.19)$$

D'où :

$$\begin{aligned}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\Big\{\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0) - d\phi\Big(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\Big)\Big\}\\ &= \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(e_i,0) - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi\Big(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\Big)\\ &= R^N(d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(e_i,0)\\ &\quad +\nabla^\phi_{[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]} - \nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}d\phi(\nabla^M_{e_i}e_i,0)\\ &= R^N(d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0) + \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt})\\ &\quad -\nabla^\phi_{(\nabla^M_{e_i}e_i,0)}d\phi(0,\frac{d}{dt}). \quad (3.20)\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}h\Big(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))\Big)\Big|_{t=0} &= h(R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau(\varphi))\\ &\quad + h(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}v, \tau(\varphi)) - h(\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}v, \tau(\varphi)). \quad (3.21)\end{aligned}$$

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$, la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X) = h(\nabla^{\varphi}_X v, \tau(\varphi)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^m \{e_i(\omega(e_i) - \omega(\nabla^M_{e_i} e_i))\} \\
&= \sum_{i=1}^m \{e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi))) - h(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v, \tau(\varphi))\} \\
&= \sum_{i=1}^m \{h(\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi)) + h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi)) - h(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v, \tau(\varphi))\}. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

De formules (3.21) et (3.22), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))\Big)\Big|_{t=0} =$$
$$\sum_{i=1}^m h(R^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) + \operatorname{div}^M \omega - \sum_{i=1}^m h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi)). \quad (3.23)$$

Soit $\eta \in \Gamma(T^*M)$, la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\eta(X) = h(v, \nabla^{\varphi}_X \tau(\varphi)), \qquad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \eta &= \sum_{i=1}^m \{e_i(\eta(e_i)) - \eta(\nabla^M_{e_i} e_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^m \{e_i(h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi))) - h(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} \tau(\varphi))\} \\
&= \sum_{i=1}^m \{h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi)) + h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi)) - h(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} \tau(\varphi))\}. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Substituant (3.24) dans (3.23), on obtient :

$$\sum_{i=1}^m h\Big(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))\Big)\Big|_{t=0} =$$
$$\sum_{i=1}^m h(R^n(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), v) + \operatorname{div}^M \omega - \operatorname{div}^M \eta$$

$$+\sum_{i=1}^{m} h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) - \sum_{i=1}^{m} h(v, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)). \tag{3.25}$$

D'après les formule (3.17), (3.25), et le théorème de la divergence, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^{m} h\Big(- R^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) + \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi), v\Big)v^g.$$

□

Théorème 3.8.2. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞, entre deux variétés Riemanniennes est bi-harmonique si est seulement si :*

$$\tau_2(\varphi) = -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^{\varphi})^2\tau(\varphi) = 0. \tag{3.26}$$

Remarque 3.8.1.

1. L'équation (3.26) est dite équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle bi-énergie.
2. Si les variétés (M^m, g) et (N^n, h) sont munies respectivement par des coordonnées (x^i) et (y^α), au voisinage des point $x \in M$ et $\varphi(x) \in N$, alors :

$$\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) = & \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n} g^{ij}\Big\{\frac{\partial^2\tau^\sigma}{\partial x^i\partial x^j} + 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x^j}{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\tau^\alpha\frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \\
& + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x^j} + \sum_{\alpha,\beta,v,\rho=1}^{n}\tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^v}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\,{}^N\Gamma^\sigma_{v\rho} \\
& - \sum_{k=1}^{m}{}^M\Gamma^k_{ij}\Big(\frac{\partial\tau^\sigma}{\partial x^k} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^k}\,{}^N\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\Big) - \sum_{\alpha,\beta,v=1}^{n}\tau^v\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N R^\sigma_{\beta\alpha v}\Big\}\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\circ\varphi,
\end{aligned}$$

   où $\tau^\gamma = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}\Big(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi - \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\Big)$ et ${}^N R^\sigma_{\beta\alpha v}$ désignent les composantes du tenseur de courbure de (N^n, h).

Exemple 3.8.1. Toute application harmonique et bi-harmonique.

Exemple 3.8.2. Les polynômes de degré inférieure ou égale 3 sont des applications bi-harmoniques.

Exemple 3.8.3. Considérons une application différentiable :

$$\begin{array}{rcccl}
\varphi & : & (M, g) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\
 & & p & \longmapsto & \varphi(p) = (\varphi^1(p), \cdots, \varphi^n(p))
\end{array}$$

Alors, $\tau_2(\varphi) = \big(\Delta(\Delta(\varphi^1)), \cdots, \Delta(\Delta(\varphi^n))\big)$, donc φ est bi-harmonique si et seulement si les fonctions φ^α, $(\alpha = 1, \cdots, n)$ sont bi-harmoniques.

Exemple 3.8.4. Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow \mathbb{S}^n$, une application différentiable. Alors, φ est bi-harmonique si et seulement si :

$$\mathrm{trace}_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) + |d\varphi|^2\tau(\varphi) - \mathrm{trace}_g\, h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \;=\; 0.$$

En effet ; Comme la sphère unité $\mathbb{S}^n$ est de courbure constante égale à 1, d'après la formule :

$$R^{\mathbb{S}^n}(X,Y)Z \;=\; <Y,Z>X - <X,Z>Y,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{trace}_g\, R^{\mathbb{S}^n}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi &= \mathrm{trace}_g(h(d\varphi, d\varphi)\tau(\varphi) - h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi) \\
&= |d\varphi|^2\tau(\varphi) - \mathrm{trace}_g\, h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi.
\end{aligned}$$

Remarque 3.8.2. Les applications bi-haromniques ne sont pas généralement harmoniques.

Exemple 3.8.5. Les polynômes de degrés 3 sur $\mathbb{R}$ sont des application bi-harmoniques non-harmoniques.

Exemple 3.8.6. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique i.e.

$$\triangle(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Alors, la fonction $\varphi(x) = r^2(x)f(x)$ est une fonction bi-harmonique non-harmonique, où :

$$r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

En effet ; On a :

$$\begin{aligned}
r^2(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j^2,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r^2}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i} \\
&= 2x_i,
\end{aligned}$$

et :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \;=\; \frac{\partial r^2}{\partial x_i} f + r^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \quad 2x_i f + r^2 \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 2f + 2x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} 2f + \sum_{i=1}^{n} 4x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\
&i.e : \Delta\varphi = 2nf + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \underbrace{\Delta f}_{=0} \neq 0,
\end{aligned}$$

pour j fixé :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x_j} &= 2n\frac{\partial f}{\partial x_j} + 4\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial x_i} + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= 2n\frac{\partial f}{\partial x_j} + 4\frac{\partial f}{\partial x_j} + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x_j^2} = 2n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + 4\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2},$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x_j^2} = (2n+4)\Delta f + 4\Delta f + 4\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta f),$$

donc $\tau_2(f) = 0$.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS BI-HARMONIQUES ET LA MÉTRIQUE MUS-GRADIENT

Dans ce chapitre on donne les conditions nécéssaires et suffisantes pour lequel l'application l'identité et une courbe définie sur une variété Riemannienne (M, g) soit bi-harmonique non-harmonique relativement à les déformations des métriques $\widetilde{g}$ et $\widehat{g}$. Ensuite, on construire quelques exemples concernants les applications bi-harmoniques non-harmoniques suivants ses déformations [4, 5].

4.1 La bi-harmonicité de l'application identité par rapport à $\widetilde{g}$

Soient (M, g) une variété Riemannienne, $f \in C^\infty(M)$, $\widetilde{g} = g + df \otimes df$ la métrique Mus-gradient, et $\widetilde{I}$ l'application identité définie par :

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{I} : (M, g) & \longrightarrow & (M, \widetilde{g}). \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Théorème 4.1.1. *Si $\|\operatorname{grad} f\| = 1$, alors l'application identité $\widetilde{I}$ est bi-harmonique non-harmonique si et seulement si la fonction f est non-harmonique dans (M, g) et vérifie l'équation suivante :*

$$\begin{aligned} (\Delta f)\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) &= -(\Delta^2 f)\operatorname{grad} f - \nabla_{\operatorname{grad}(\Delta f)}\operatorname{grad} f \\ &\quad - \frac{\Delta f}{2}\operatorname{grad}(\Delta f), \end{aligned}$$

avec Δf est Laplacien de f par rapport à g, et $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$.

Démonstration. Soit $\{E_i\}$ une base géodésique dans (M, g) au point x, on a :

$$\begin{aligned}
\tau(\widetilde{I}) &= \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^{\widetilde{I}}_{E_i} d\widetilde{I}(E_i) - d\widetilde{I}(\nabla_{E_i} E_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\nabla}_{E_i} E_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{Hess}_f(E_i, E_i)}{1 + \|\operatorname{grad} f\|^2} \operatorname{grad} f \\
&= \frac{\Delta f}{2} \operatorname{grad} f, \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

avec $m = \dim M$. Donc, $\widetilde{I}$ est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$, i.e. la fonction f est harmonique dans (M, g).

On calcule le champ de bitension de l'application identité $\widetilde{I}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(\tau(\widetilde{I}), d\widetilde{I}(E_i))d\widetilde{I}(E_i) &= \frac{\Delta f}{2} \widetilde{R}(\operatorname{grad} f, E_i)E_i \\
&= \frac{\Delta f}{2} \Big(R(\operatorname{grad} f, E_i)E_i \\
&\quad + \frac{1}{2} g(R(\operatorname{grad} f, E_i) \operatorname{grad} f, E_i) \operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{4} \mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \mathrm{Hess}_f(E_i, E_i) \operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{4} \mathrm{Hess}_f(E_i, \operatorname{grad} f) \mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, E_i) \operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathrm{Hess}_f(E_i, E_i) \nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, E_i) \nabla_{E_i} \operatorname{grad} f \Big), \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

puisque $\|\operatorname{grad} f\|$ est constant dans M, on obtient,

$$\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, X) = 0, \quad \nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM).$$

D'après (4.2) et la définition de la courbure de Ricci, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \widetilde{R}(\tau(\widetilde{I}), d\widetilde{I}(E_i))d\widetilde{I}(E_i) &= \frac{\Delta f}{2} \Big(\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) \\
&\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \operatorname{grad} f \Big). \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

On calcule :

$$\nabla^{\widetilde{I}}_{E_i} \nabla^{\widetilde{I}}_{E_i} \tau(\widetilde{I}) - \nabla^{\widetilde{I}}_{\nabla_{E_i} E_i} \tau(\widetilde{I}) = \frac{1}{2} \widetilde{\nabla}_{E_i} \widetilde{\nabla}_{E_i} \Delta f \operatorname{grad} f$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\widetilde{\nabla}_{E_i}\nabla_{E_i}\Delta f \operatorname{grad} f \\
&= \frac{1}{2}\Big(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\Delta f \operatorname{grad} f \\
&\quad +\frac{1}{2}\operatorname{Hess}_f(E_i, \nabla_{E_i}\Delta f \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\Big), \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

d'après les définitions de Laplacien, le gradient et Hessien, on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\Delta f \operatorname{grad} f &= (\Delta^2 f)\operatorname{grad} f + 2\nabla_{\operatorname{grad}(\Delta f)}\operatorname{grad} f \\
&\quad +(\Delta f)\operatorname{trace}(\nabla)^2\operatorname{grad} f, \qquad (4.5)\\
\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Hess}_f(E_i, \nabla_{E_i}\Delta f \operatorname{grad} f) &= \frac{\Delta f}{2} g(\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f) \\
&= -\frac{\Delta f}{2} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{trace}(\nabla)^2\operatorname{grad} f), \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

d'après les équations (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) et l'équation suivante :

$$
\operatorname{trace}(\nabla)^2\operatorname{grad} f = \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{grad}(\Delta f),
$$

l'application identité $\widetilde{I}$ est bi-harmonique non harmonique si et seulement si

$$
\begin{aligned}
&2(\Delta f)\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) - (\Delta f)\operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&+(\Delta^2 f)\operatorname{grad} f + 2\nabla_{\operatorname{grad}(\Delta f)}\operatorname{grad} f + (\Delta f)\operatorname{grad}(\Delta f) \\
&-\frac{\Delta f}{2} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f))\operatorname{grad} f = 0, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

avec $\Delta f \neq 0$. De (4.7), on a :

$$
(\Delta f)\operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + \Delta^2 f + \frac{\Delta f}{2} g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)) = 0. \qquad (4.8)
$$

d'après les formules (4.7) et (4.8), on déduit le Théorème 4.1.1. □

Exemple 4.1.1. Soit α une fonction différentielle non-constante dans $(0, \infty)$, telle que sa dérivée $\alpha^{(1)} > 0$, et soit $\mathbb{H}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \backslash x_4 > 0\}$ l'espace hyperbolique de dimension 4. Soit $M = (0, \infty) \times \mathbb{H}^4$ muni de métrique Riemannienne :

$$
g = 2[\alpha^{(1)}(t + x_4)]^2(dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2),
$$

et soit $f(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(t + x_4)$, $\forall (t, x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$. Nous calculons :

$$
\operatorname{grad} f = \frac{1}{2\alpha^{(1)}(t + x_4)}(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_4}),
$$

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{grad} f\| &= 1,\\
\Delta f &= \frac{4\alpha^{(2)}(t+x_4)}{\alpha^{(1)}(t+x_4)^2},\\
\Delta^2 f &= \frac{-12\alpha^{(2)}(t+x_4)\alpha^{(3)}(t+x_4)+4\alpha^{(4)}(t+x_4)\alpha^{(1)}(t+x_4)}{[\alpha^{(1)}(t+x_4)]^5},\\
\operatorname{grad}(\Delta f) &= \frac{-4[\alpha^{(2)}(t+x_4)]^2+2\alpha^{(3)}(t+x_4)\alpha^{(1)}(t+x_4)}{[\alpha^{(1)}(t+x_4)]^5}(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_4}),\\
\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) &= \frac{-2\alpha^{(3)}(t+x_4)\alpha^{(1)}(t+x_4)+2[\alpha^{(2)}(t+x_4)]^2}{[\alpha^{(1)}(t+x_4)]^5}(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_4}),\\
\nabla_{\operatorname{grad}(\Delta f)}\operatorname{grad} f &= 0.
\end{aligned}$$

Selon le Théorème 4.1.1 l'application identité $\widetilde{I}:(M,g)\longrightarrow(M,\widetilde{g})$, où :

$$\widetilde{g}=3[\alpha^{(1)}(t+x_4)]^2(dt^2+dx_4^2)+2[\alpha^{(1)}(t+x_4)]^2(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)+2[\alpha^{(1)}(t+x_4)]^2dtdx_4,$$

est une application bi-harmonique non-harmonique si et seulement si :

$$5\alpha^{(2)}(t+x_4)\alpha^{(3)}(t+x_4)-\alpha^{(4)}(t+x_4)\alpha^{(1)}(t+x_4)=0, \tag{4.9}$$

et $\alpha^{(2)}(t+x_4)\neq 0$. Notons que l'équation différentielle (4.9) admet des solutions par exemple, nous fixons $\alpha(s)=s^2$, ou $\alpha(s)=\sqrt{s}$, $\forall s\in(0,\infty)$.

Exemple 4.1.2. Soit $M=\mathbb{R}^3$ muni de la métrique Riemannienne :

$$g=e^{x+y}(dx^2+dy^2)+e^{\frac{x+y}{2}}dz^2,$$

et soit $f(x,y,z)=\sqrt{2}e^{\frac{x+y}{2}}$, $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On utilise la même téchnique de l'exemple 4.1.1. on trouve que, la fonction f satisfait les conditions du Théorème 4.1.1. et l'application identité $\widetilde{I}:(\mathbb{R}^3,g)\longrightarrow(\mathbb{R}^3,\widetilde{g})$ est bi-harmonique non-harmonique.

Ici, $\Delta f=\frac{3\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{x+y}{2}}$, et la métrique Riemannienne $\widetilde{g}$ est donnée par :

$$\widetilde{g}=\frac{3}{2}e^{x+y}(dx^2+dy^2)+e^{\frac{x+y}{2}}dz^2+e^{x+y}dxdy.$$

Remarque 4.1.1. Soient (M,g), (N,h) deux variétées Riemannienne et f une fonction différentielle dans M telle que $\|\operatorname{grad} f\|=1$ et $\Delta f=k$, où $k\in\mathbb{R}$. Donc l'application identité $\widetilde{I}:(M,g)\longrightarrow(M,\widetilde{g})$ est bi-harmonique si et seulement si elle est harmonique.

En effet ; d'après le Théorème 4.1.1. l'application identité $\widetilde{I}$ est bi-harmonique si et seulement si $\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f)=0$, et on applique la formule de Bochner-Weitzenböck pour la fonction f (voir [26]) ;

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\operatorname{grad} f\|^2) = \|\operatorname{Hess}_f\|^2+g(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad}(\Delta f))+\operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f),$$

on obtient $\|\operatorname{Hess}_f\|=0$, comme $\Delta f=0$, alors l'application $\widetilde{I}$ est harmonique.

4.2 Cas des variétés Riemanniennes produits

Définition 4.2.1. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes et $f \in C^\infty(M)$. Considérons le produit des variétés $M \times N$, et noté par $\pi : M \times N \longrightarrow M$ $\eta : M \times N \longrightarrow N$ ses projections. On définit dans $M \times N$ la métrique Riemannienne G_f donnée par :*

$$G_f = \pi^* g + \eta^* h + \pi^*(df \otimes df). \tag{4.10}$$

Remarque 4.2.1. □

- La Définition 4.2.1. est une généralisation naturelle de la métrique Riemannienne diagonale dans le produit des variétés Riemanniennes (voir [22]).
- $(M \times N, G_f)$ est le produit des variétés Riemanniennes de $(M, \widetilde{g})$ et (N,h) telle que $\widetilde{g} = g + df \otimes df$. Donc la Connexion de Levi-Civita de $(M \times N, G_f)$ est liée par celle de $(M, \widetilde{g})$ et (N,h), comme suit :

  $$\nabla^{G_f}_X Y = \big(\widetilde{\nabla}_{X_1} Y_1, \nabla^N_{X_2} Y_2\big), \tag{4.11}$$

  telle que $\widetilde{\nabla}$ (resp. ∇^N) est la connexion Levi-Civita de $(M, \widetilde{g})$ (resp. (N,h)).
  De la même manière pour le tenseur de courbure Riemannienne R^{G_f} de $(M \times N, G_f)$, on a :

  $$R^{G_f}(X,Y)Z = (\widetilde{R}(X_1,Y_1)Z_1, R^N(X_2,Y_2)Z_2), \tag{4.12}$$

  avec $\widetilde{R}$ (resp. R^N) est le tenseur de courbure Riemannienne de $(M,\widetilde{g})$ (resp. (N,h)), et que $X = (X_1,X_2), Y = (Y_1,Y_2), Z = (Z_1,Z_2) \in \Gamma(TM) \times \Gamma(TN)$.

Ensuite, soit y_0 un point arbitraire de la variété Riemannienne (N,h), et on note par :

$$\begin{aligned} i_{y_0} : (M,g) &\longrightarrow (M \times N, G_f), \\ x &\longmapsto (x, y_0). \end{aligned}$$

l'application inclusion, et pour $x_0 \in M$ on note aussi l'inclusion :

$$\begin{aligned} i_{x_0} : (N,h) &\longrightarrow (M \times N, G_f), \\ y &\longmapsto (x_0, y). \end{aligned}$$

On a i_{x_0} est une application totalement géodésique c'est-à-dire $\nabla di_{x_0} = 0$, ainsi, harmonique pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

Du Théorème 4.1.1, on déduit :

Théorème 4.2.1. *Si $\|\operatorname{grad} f\| = 1$, l'application inclusion i_{y_0} est bi-harmonique non-harmonique si et seulement si l'application identité $\widetilde{I} : (M,g) \longrightarrow (M,\widetilde{g})$ est bi-harmonique non-harmonique.*

Théorème 4.2.2. *Soient $\psi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application différentielle et f une fonction harmonique dans (M,g). Donc le graphe $\varphi : (M,g) \longrightarrow (M \times N, G_f)$ avec $\varphi(x) = (x, \psi(x))$ est bi-harmonique si et seulement si $\psi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ est bi-harmonique. De plus, si ψ est bi-harmonique non-harmonique, alors le graphe l'est aussi.*

Démonstration. Soit $\{E_i\}$ une base géodésique dans (M,g) au point x, d'après la définition de champ de tension, le Théorème 2.1.1., et (4.11), nous avons :

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi) &= \sum_{i=1}^{m} \{\nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) - d\varphi(\nabla^{M}_{E_i} E_i)\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \nabla^{G_f}_{(E_i, d\psi(E_i))}(E_i, d\psi(E_i))\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big(\frac{\mathrm{Hess}_f(E_i,E_i)}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} \operatorname{grad} f, \nabla^{N}_{d\psi(E_i)} d\psi(E_i)\big) \\
&= \big(\frac{\Delta f}{1+\|\operatorname{grad} f\|^2} \operatorname{grad} f, \tau(\psi)\big), \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

pour que φ soit harmonique il suffit $\Delta f = 0$ et $\tau(\psi) = 0$, i.e, la fonction f est harmonique dans (M,g) et ψ est une application harmonique. A l'aide de (4.13), le champ de tension de φ est donné par $\tau(\varphi) = (0, \tau(\psi))$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
R^{G_f}(\tau(\varphi), d\varphi(E_i))d\varphi(E_i) &= R^{G_f}((0,\tau(\psi)), (E_i, d\psi(E_i)))(E_i, d\psi(E_i)) \\
&= (0, R^N(\tau(\psi), d\psi(E_i))d\psi(E_i)), \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

D'après l'équation (4.14), et l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} \nabla^{\varphi}_{E_i}\nabla^{\varphi}_{E_i}\tau(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\nabla}_{(E_i, d\psi(E_i))}(0, \nabla^{N}_{d\psi(E_i)}\tau(\psi)) = \sum_{i=1}^{m}(0, \nabla^{\psi}_{E_i}\nabla^{\psi}_{E_i}\tau(\psi)). \qquad (4.15)$$

nous obtenons $\tau_2(\varphi) = (0, \tau_2(\psi))$. Donc, le graphe φ est bi-harmonique si et seulement si $\tau_2(\psi) = 0$. □

Remarque 4.2.2. On utilise le Théorème 4.2.1, pour construire beaucoup exemples des applications bi-harmoniques non-harmoniques.

Exemple 4.2.1. L'application $\varphi : \mathbb{R}^4 \backslash \{0\} \longrightarrow (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, G_f)$ définie par :

$$\varphi(x) = (x, \frac{x}{\|x\|^2})$$

est bi-harmonique non-harmonique, où f est une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^4\backslash\{0\}$. D'après le Théorème 4.2.2. et le fait que φ est le graphe de l'inverion $\psi : \mathbb{R}^4\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^4\backslash\{0\}$ définie par $\psi(x) = x/\|x\|^2$ ce qui est bi-harmonique non-harmonique (voir [1]).

4.3 Les courbes bi-harmoniques dans $(M, \widetilde{g})$

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (M, \widetilde{g})$, $t \longmapsto \gamma(t)$ une courbe différentiable dans une variété Riemannienne (M, g), avec $\widetilde{g} = g + df \otimes df$ où $f \in C^\infty(M)$. Supposons que :

$$\|\operatorname{grad} f\| = 1, \quad \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \lambda(\operatorname{grad} f) \circ \gamma,$$

où $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable.

Théorème 4.3.1. *La courbe γ est bi-harmonique si et seulement si la fonction f est vérifie l'équation suivante :*

$$\rho R((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot\gamma)\dot\gamma + 2\rho''(\operatorname{grad} f) \circ \gamma + 2\rho'\nabla_{\dot\gamma} \operatorname{grad} f + \rho\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} \operatorname{grad} f = 0,$$

où $\rho(t) = \lambda(t) + \frac{1}{2}\operatorname{Hess}_f(\dot\gamma, \dot\gamma)$, $\forall t \in I$. D'autre part, si la fonction ρ est constante non nulle dans I, alors la courbe γ est bi-harmonique non-harmonique si et seulement si le vecteur gradient de f est de type Jacobi le long γ dans (M, g), i.e.

$$R((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot\gamma)\dot\gamma + \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} \operatorname{grad} f - \nabla_{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma} \operatorname{grad} f = 0.$$

Démonstration. Le champ de tension de la courbe γ est donné par :

$$\tau(\gamma) = \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} d\gamma(\frac{d}{dt}) = \widetilde{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma, \tag{4.16}$$

de l'équation (4.16), et le Théorème 2.1.1, on trouve :

$$\tau(\gamma) = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + \frac{1}{2}\operatorname{Hess}_f(\dot\gamma, \dot\gamma)(\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \tag{4.17}$$

soit $\rho(t) = \lambda(t) + \frac{1}{2}\operatorname{Hess}_f(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$, avec $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \lambda(\operatorname{grad} f) \circ \gamma$, on trouve :

$$\tau(\gamma) = \rho(\operatorname{grad} f) \circ \gamma. \tag{4.18}$$

La courbe γ est bi-harmonique si et seulement si :

$$\widetilde{R}(\tau(\gamma), d\gamma(\frac{d}{dt}))d\gamma(\frac{d}{dt}) + \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\tau(\gamma) = 0, \tag{4.19}$$

de l'équation (4.18), et le Théorème 2.1.2, avec

$$\operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, X) = 0, \quad \nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM),$$

le premier terme du deuxième coté de (4.19) est donné par :

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(\tau(\gamma), d\gamma(\frac{d}{dt}))d\gamma(\frac{d}{dt}) &= \rho R((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot\gamma)\dot\gamma \\ &+\frac{\rho}{2} g(R((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot\gamma)(\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot\gamma)(\operatorname{grad} f) \circ \gamma.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pour le deuxième terme du deuxième coté de (4.19), on calcule :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \tau(\gamma) &= \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \rho(\operatorname{grad} f) \circ \gamma \\
&= \rho'(\operatorname{grad} f) \circ \gamma + \rho \widetilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f, \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

de l'équation (4.21), et le Théorème 2.1.1, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \tau(\gamma) &= \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \left[\rho'(\operatorname{grad} f) \circ \gamma + \rho \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f\right] \\
&= \rho''(\operatorname{grad} f) \circ \gamma + \rho' \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} (\operatorname{grad} f) \circ \gamma \\
&\quad + \rho' \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f + \rho \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f \\
&= \rho''(\operatorname{grad} f) \circ \gamma + 2\rho' \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f \\
&\quad + \rho \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f + \frac{\rho}{2} \operatorname{Hess}_f \left(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f\right)(\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

d'après la définition de Hessien, et $\| \operatorname{grad} f \| = 1$, on a :

$$\operatorname{Hess}_f \left(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f\right) = -g((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f), \qquad (4.23)$$

d'après les équations (4.20), (4.22) et (4.23), la courbe γ est bi-harmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\rho R((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot{\gamma})\dot{\gamma} + \frac{\rho}{2} g(R((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot{\gamma})(\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot{\gamma})(\operatorname{grad} f) \circ \gamma \\
&+ \rho''(\operatorname{grad} f) \circ \gamma + 2\rho' \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f + \rho \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f \\
&- \frac{\rho}{2} g((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f)(\operatorname{grad} f) \circ \gamma = 0.
\end{aligned} \qquad (4.24)$$

De l'équation (4.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
&- \frac{\rho}{2} g(R((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot{\gamma})(\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \dot{\gamma}) + \rho'' \qquad (4.25) \\
&+ \frac{\rho}{2} g((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} \operatorname{grad} f) = 0.
\end{aligned}$$

Finalement, d'après les équations (4.23), (4.24) et (4.25) on a le Théorème 4.3.1. $\square$

Remarque 4.3.1. De l'équation (4.18), la courbe γ est harmonique si et seulement si, $\rho = 0$.

Exemple 4.3.1. Soit $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x^2 + y^2 < 1\}$, et soit $M = \mathbb{D} \times \mathbb{R}$ muni de la métrique Riemannienne :

$$g = dx^2 + dy^2 + \frac{1}{1 - x^2 - y^2} dz^2.$$

On considère la courbe dans (M,g),

$$\gamma(t) = (t, t, -t^2 + 2t - \ln(t+1)), \quad \frac{1}{\sqrt{2}} > t > -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le champ de tension de la courbe γ (relativement à g) est donné par :

$$\Big(-\frac{t}{(t+1)^2}, -\frac{t}{(t+1)^2}, \frac{-1+2\,t^2}{(t+1)^2} \Big).$$

Soit $f(x,y,z) = xy + z, \quad \forall (x,y,z) \in M$, on a :

$$\|\operatorname{grad} f\| = 1, \quad (\operatorname{grad} f) \circ \gamma = (t, t, 1-2t^2),$$

donc $\lambda(t) = -\frac{1}{(t+1)^2}$. De plus,

$$\frac{1}{2}\operatorname{Hess}_f(\dot\gamma, \dot\gamma) = \frac{1}{(t+1)^2},$$

donc la courbe γ est harmonique dans $(M,\tilde g)$, car $\rho(t) = 0$, avec :

$$\tilde g = (1+y^2)dx^2 + (1+x^2)dy^2 + \frac{x^2+y^2-2}{x^2+y^2-1}dz^2 + 2xydxdy + 2ydxdz + 2xdydz.$$

Exemple 4.3.2. Soient $M = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ muni de la métrique Riemannienne $g = 4\|x\|^2 dx_i^2$, et $f(x) = \|x\|^2$, $\forall x \in M$. On considère la courbe bi-harmonique non-harmonique dans (M,g),

$$\gamma(t) = (\sqrt{\frac{t^2+1}{2}}, 0, ..., 0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors, $\|\operatorname{grad} f\| = 1$, le vecteur gradient de f est de type Jacobi le long γ, et on a :

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = (\operatorname{grad} f) \circ \gamma = \frac{1}{\sqrt{2t^2+2}}\frac{\partial}{\partial x_1},$$

et $\operatorname{Hess}_f(\dot\gamma,\dot\gamma) = 0$, ainsi $\rho(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Du Théorème 4.3.1, la courbe $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow (M,\widetilde g)$ est aussi bi-harmonique non-harmonique, avec

$$\widetilde g = 4\|x\|^2 dx_i^2 + 4x_i x_j dx_i \otimes dx_j.$$

4.4 La bi-harmonicité de $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,\widehat{h})$

Dans le Théorème suivant on donne les conditions nécéssaires et suffisantes pour lequel une application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,\widehat{h})$ soit bi-harmonique non-harmonique relativement à $\widehat{h}$.

Théorème 4.4.1. *Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application harmonique entre deux variétés Riemanniennes, et soit la métrique Riemannienne $\widehat{h} = \alpha h + (1-\alpha) df \otimes df$, où $\alpha \in (0,1)$ et $f \in C^\infty(N)$. On suppose que $\|\operatorname{grad} f\| = 1$. Si, la fonction $\Delta(f \circ \varphi)$ est constante non nulle dans M, alors l'application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,\widehat{h})$ est bi-harmonique non-harmonique si et seulement si le vecteur gradient de f est de type Jacobi le long φ, i.e.* $(\operatorname{grad} f) \circ \varphi \in \ker J_\varphi$.

$\big(J_\varphi$ est l'operateur de Jacobi correspondant à $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)\big)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base géodésique sur (M,g) en x, où $m = \dim M$, donc l'application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,\widehat{h})$ est bi-harmonique si et seulement si :

$$\widehat{\tau}_2(\varphi) = -\sum_{i=1}^m \widehat{R}^N(\widehat{\tau}(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i}\widehat{\nabla}^\varphi_{e_i}\widehat{\tau}(\varphi) = 0, \tag{4.26}$$

où $\widehat{R}^N$ est la courbure Riemannienne de $(N,\widehat{h})$, $\widehat{\tau}(\varphi)$ le champ de tension de l'application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,\widehat{h})$, et $\widehat{\nabla}^\varphi$ la connexion de Pull-back relativement à la métrique Riemannienne $\widehat{h}$.

Premièrement, on calcule le champ de tension $\widehat{\tau}(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau}(\varphi) &= \sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) = \sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^N_{d\varphi(e_i)} d\varphi(e_i) \\
&= \tau(\varphi) + \sum_{i=1}^m \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2 \circ \varphi} (\operatorname{grad} f) \circ \varphi \\
&= (1-\alpha) \sum_{i=1}^m \operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) (\operatorname{grad} f) \circ \varphi. \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta(f \circ \varphi) = df(\tau(\varphi)) + \operatorname{trace}_g \operatorname{Hess}_f(d\varphi, d\varphi)$ (voir [2]), et $\tau(\varphi) = 0$, on a :

$$\widehat{\tau}(\varphi) = \lambda (\operatorname{grad} f) \circ \varphi, \quad \text{avec} \quad \lambda = (1-\alpha)\Delta(f \circ \varphi).$$

Ensuite, on calcul le premier terme de (4.26), d'après le Théorème 2.2.2, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \widehat{R}^N(\widehat{\tau}(\varphi) &, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^m \Big\{ R^N(\operatorname{grad} f, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)h(R^N(\operatorname{grad} f, d\varphi(e_i))\operatorname{grad} f, d\varphi(e_i))}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2} \operatorname{grad} f
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& - \frac{(1-\alpha)^2 \operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))}{(\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2)^2} \operatorname{grad} f \\
& + \frac{(1-\alpha)^2 \operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), \operatorname{grad} f) \operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, d\varphi(e_i))}{(\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2)^2} \operatorname{grad} f \\
& + \frac{(1-\alpha) \operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2} \nabla^N_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f \\
& - \frac{(1-\alpha) \operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, d\varphi(e_i))}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2} \nabla^N_{d\varphi(e_i)} \operatorname{grad} f \Big\} \circ \varphi. \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

Puisque $\|\operatorname{grad} f\| = 1$, est constant dans N, on obtient :

$$
\operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, X) = 0, \quad \nabla^N_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \|\operatorname{grad} f\|^2 = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TN). \qquad (4.29)
$$

D'où l'équation (4.28) devient :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \widehat{R}^N(\widehat{\tau}(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i) &= \lambda \sum_{i=1}^m \Big\{ R^N(\operatorname{grad} f, d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i) \\
&+ (1-\alpha) h(R^N(\operatorname{grad} f, d\varphi(e_i)) \operatorname{grad} f, d\varphi(e_i)) \operatorname{grad} f \Big\} \circ \varphi.
\end{aligned}
$$

Le deuxième terme de (4.26) est donné par :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} \widehat{\tau}(\varphi) &= \lambda \sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} (\operatorname{grad} f) \circ \varphi \\
&= \lambda \sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} (\widehat{\nabla}^N_{d\varphi(e_i)} \operatorname{grad} f) \circ \varphi \\
&= \lambda \sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} \Big\{ (\nabla^N_{d\varphi(e_i)} \operatorname{grad} f) \circ \varphi \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)\lambda \operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), (\operatorname{grad} f) \circ \varphi)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2 \circ \varphi} (\operatorname{grad} f) \circ \varphi \Big\}. \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

D'après les équations (4.29) et (4.30), on trouve :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} \widehat{\nabla}^\varphi_{e_i} \widehat{\tau}(\varphi) &= \lambda \sum_{i=1}^m \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} (\operatorname{grad} f) \circ \varphi \\
&\quad + (1-\alpha)\lambda \sum_{i=1}^m \operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} (\operatorname{grad} f) \circ \varphi) (\operatorname{grad} f) \circ \varphi, \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

et on remarque que :

$$
\sum_{i=1}^m \operatorname{Hess}_f(d\varphi(e_i), \nabla^\varphi_{e_i} (\operatorname{grad} f) \circ \varphi) = - \sum_{i=1}^m h((\operatorname{grad} f) \circ \varphi, \nabla^\varphi_{e_i} \nabla^\varphi_{e_i} (\operatorname{grad} f) \circ \varphi). \qquad (4.32)
$$

Alors, l'application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,\widehat{h})$ est bi-harmonique si et seulement si :

$$J_\varphi\big((\operatorname{grad} f)\circ\varphi\big) - (1-\alpha)h\big(J_\varphi\big((\operatorname{grad} f)\circ\varphi\big),(\operatorname{grad} f)\circ\varphi\big)(\operatorname{grad} f)\circ\varphi = 0. \quad (4.33)$$

L'équation (4.33) est équivalente à $J_\varphi\big((\operatorname{grad} f)\circ\varphi\big) = 0$. $\square$

Exemple 4.4.1. Soient $M = \mathbb{R}^2$ et $N = \mathbb{H}^2 = \{(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 | y_2 > 0\}$. On considère l'application harmonique :

$$\varphi : (M, dx_1^2 + dx_2^2) \longrightarrow (N, y_2^2(dy_1^2+dy_2^2)), \quad (x_1,x_2) \longmapsto (x_1, \sqrt{x_2^2+1}),$$

et soit la fonction $f(y_1,y_2) = \frac{1}{2}y_2^2$. Par un simple de calcul on montre que :

$$\|\operatorname{grad} f\| = 1,\ \Delta(f\circ\varphi) = 1,\ (\operatorname{grad} f)\circ\varphi = (0, \tfrac{1}{\sqrt{x_2^2+1}}) \text{ et } J_\varphi((\operatorname{grad} f)\circ\varphi) = 0.$$

Ainsi, par rapport à la métrique Riemannienne $\widehat{h} = y_2^2(\alpha dy_1^2 + dy_2^2)$, l'application φ est bi-harmonique non-harmonique. Ici, $\widehat{\tau}(\varphi) = (0, \frac{1-\alpha}{\sqrt{x_2^2+1}})$.

Remarque 4.4.1. Soient $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application harmonique entre deux variétés Riemanniennes, et $\widehat{h} = \alpha h + (1-\alpha)df\otimes df$, où $\alpha\in(0,1)$ et $f\in C^\infty(N)$ tel que $\|\operatorname{grad} f\| = 1$. Alors, l'application $\varphi : (M,g)\longrightarrow (N,\widehat{h})$ est harmonique si et seulement si $f\circ\varphi$ est harmonique sur (M,g).

4.5 La bi-harmonicté de l'application identité par rapport à $\widehat{g}$

Soit (M,g) une variété Riemannienne, et soit $f\in C^\infty(M)$ tel que $\|\operatorname{grad} f\| = 1$ et $\Delta f = k$, où $k\in\mathbb{R}$. Alors, l'application identité de (M,g) dans $(M,\widehat{g})$ est bi-harmonique si et seulement si elle est harmonique. En effet ; d'après le Théorème 4.4.1, l'application identité de (M,g) dans $(M,\widehat{g})$ est bi-harmonique si et seulement si $\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) = 0$, et de la formule de Bochner-Weitzenböck pour les fonctions différentiables (voir [26]) :

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\operatorname{grad} f\|^2) \;=\; \|\operatorname{Hess}_f\|^2 + g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)) + \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f),$$

on obtient $\|\operatorname{Hess}_f\| = 0$, ainsi $\Delta f = 0$, d'où l'application identité de (M,g) dans $(M,\widehat{g})$ est harmonique.

Maintenant, soit $\alpha,\beta\in(0,1)$. On pose :

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{\alpha,\beta} : (M,\widehat{g}_\alpha) &\longrightarrow (M,\widehat{g}_\beta), \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

l'application identité, où $\widehat{g}_\alpha = \alpha g + (1-\alpha)df\otimes df$ et $\widehat{g}_\beta = \beta g + (1-\beta)df\otimes df$.

Théorème 4.5.1. *Si $\alpha \neq \beta$, et $\|\operatorname{grad} f\| = 1$. Alors, l'application identité $\widehat{I}_{\alpha,\beta}$ est bi-harmonique non-harmonique si est seulement si la fonction f est non-harmonique dans (M, g), et satisfait l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} 2\Delta f \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) &= -\frac{1}{\beta}\Delta^2 f \operatorname{grad} f - 2\nabla_{\operatorname{grad}\Delta f} \operatorname{grad} f - \Delta f \operatorname{grad}\Delta f \\ &\quad + \frac{1-\alpha}{\beta}\Delta f g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}\Delta f) \operatorname{grad} f \\ &\quad + \frac{1-\alpha}{\beta}\operatorname{Hess}_{\Delta f}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \operatorname{grad} f, \end{aligned}$$

où Δf est le Laplacien de f par rapport à g, et $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur M par rapport à la métrique Riemannienne g, tel que $e_1 = \operatorname{grad} f$, où $m = \dim M$. Il est facile de prouver que $\{e_1, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}e_i\}_{i=2}^m$ est une base orthonormée sur M par rapport à la métrique Riemannienne $\widehat{g}_\alpha$. Soit $\widehat{\nabla}^\alpha$ (resp. $\widehat{\nabla}^\beta$) la connexion de Levi-Civita de $(M, \widehat{g}_\alpha)$ (resp. de $(M, \widehat{g}_\beta)$), donc le champ de tension de $\widehat{I}_{\alpha,\beta}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) &= \nabla_{e_1}^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}} d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_1) - d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(\widehat{\nabla}_{e_1}^\alpha e_1) + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^m \Big\{\nabla_{e_i}^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}} d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_i) - d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(\widehat{\nabla}_{e_i}^\alpha e_i)\Big\} \\ &= \widehat{\nabla}_{e_1}^\beta e_1 - \widehat{\nabla}_{e_1}^\alpha e_1 + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^m \Big\{\widehat{\nabla}_{e_i}^\beta e_i - \widehat{\nabla}_{e_i}^\alpha e_i\Big\}, \end{aligned} \tag{4.34}$$

on utilise le Théorème 2.2.1, avec $\|\operatorname{grad} f\| = 1$, on a :

$$\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\sum_{i=2}^m \operatorname{Hess}_f(e_i, e_i) \operatorname{grad} f, \tag{4.35}$$

comme $\operatorname{Hess}_f(e_1, e_1) = 0$, l'équation (4.35) devient :

$$\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Delta f \operatorname{grad} f. \tag{4.36}$$

On remarque que $\widehat{I}_{\alpha,\beta}$ est harmonique si et seulement si $\Delta f = 0$, i.e., la fonction f est harmonique dans (M, g).
On calcule le champ de bitension de l'application identité $\widehat{I}_{\alpha,\beta}$. Pour tous $i = 1, ..., m$, on a :

$$\widehat{R}_\beta(\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}), d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_i))d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_i) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Delta f \widehat{R}_\beta(\operatorname{grad} f, e_i)e_i, \tag{4.37}$$

où $\widehat{R}_\beta$ est le tenseur de courbure de $\widehat{\nabla}^\beta$. Du Théorème 2.2.2, et l'équation (4.37) avec $\|\operatorname{grad} f\| = 1$, $\operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f, X) = 0$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$, et $\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f = 0$, on obtient l'égalité suivante :

$$\widehat{R}_\beta(\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}), d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_i))d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_i) = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Delta f \Big\{ R(\operatorname{grad} f, e_i)e_i$$

$$+(1-\beta)g(R(\operatorname{grad} f, e_i)\operatorname{grad} f, e_i)\operatorname{grad} f\Big\}, \quad (4.38)$$

d'après l'équation (4.38), et la définition de la courbure de Ricci, on trouve :

$$\begin{aligned}\widehat{R}(\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}), d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_1))d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_1) &+ \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^{m}\widehat{R}(\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}), d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_i))d\widehat{I}_{\alpha,\beta}(e_i)\\ &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^2}\Delta f\Big\{\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f)\\ &\quad -(1-\beta)\operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\Big\}. \quad (4.39)\end{aligned}$$

Soit $i = 1, ..., m$, on calcule :

$$\begin{aligned}\nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{e_i}\nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{e_i}\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) - \nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{\widehat{\nabla}^{\alpha}_{e_i}e_i}\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Big\{\widehat{\nabla}^{\beta}_{e_i}\widehat{\nabla}^{\beta}_{e_i}\Delta f\operatorname{grad} f - \widehat{\nabla}^{\beta}_{\widehat{\nabla}^{\alpha}_{e_i}e_i}\Delta f\operatorname{grad} f\Big\}\\ &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Big\{\widehat{\nabla}^{\beta}_{e_i}\nabla_{e_i}\Delta f\operatorname{grad} f - \nabla_{\widehat{\nabla}^{\alpha}_{e_i}e_i}\Delta f\operatorname{grad} f\Big\}\\ &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\Big\{\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\Delta f\operatorname{grad} f - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\Delta f\operatorname{grad} f\\ &\quad +(1-\beta)\operatorname{Hess}_f(e_i, \nabla_{e_i}\Delta f\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\\ &\quad -(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(e_i, e_i)\nabla_{\operatorname{grad} f}\Delta f\operatorname{grad} f\Big\}, \quad (4.40)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\Delta f\operatorname{grad} f - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\Delta f\operatorname{grad} f &= e_i(e_i(\Delta f))\operatorname{grad} f + 2e_i(\Delta f)\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f\\ &\quad +\Delta f\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f - (\nabla_{e_i}e_i)(\Delta f)\operatorname{grad} f\\ &\quad -\Delta f\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\operatorname{grad} f, \quad (4.41)\end{aligned}$$

$$(1-\beta)\operatorname{Hess}_f(e_i, \nabla_{e_i}\Delta f\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f = -(1-\beta)\Delta f g(\operatorname{grad} f, \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f, \quad (4.42)$$

et :

$$-(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(e_i, e_i)\nabla_{\operatorname{grad} f}\Delta f\operatorname{grad} f = -(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(e_i, e_i)(\operatorname{grad} f)(\Delta f)\operatorname{grad} f. \quad (4.43)$$

D'après les équations (4.40) et (4.43), avec $\|\operatorname{grad} f\| = 1$, on trouve que :

$$\begin{aligned}\nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{e_1}\nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{e_1}\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) &- \nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{\widehat{\nabla}^{\alpha}_{e_1}e_1}\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=2}^{m}\Big\{\nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{e_i}\nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{e_i}\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta}) - \nabla^{\widehat{I}_{\alpha,\beta}}_{\widehat{\nabla}^{\alpha}_{e_i}e_i}\tau(\widehat{I}_{\alpha,\beta})\Big\}\\ &= \frac{\alpha-\beta}{\alpha^2}\Big\{(\alpha-1)\operatorname{Hess}_{\Delta f}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f + \Delta^2 f\operatorname{grad} f\\ &\quad +2\nabla_{\operatorname{grad}\Delta f}\operatorname{grad} f + \Delta f\operatorname{trace}\nabla^2\operatorname{grad} f\\ &\quad -(1-\beta)\Delta f g(\operatorname{grad} f, \operatorname{trace}\nabla^2\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\\ &\quad -(1-\alpha)\Delta f g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}\Delta f)\operatorname{grad} f\Big\}, \quad (4.44)\end{aligned}$$

de les équations (4.39), (4.44), et suivant (voir [1]) :

$$\operatorname{trace} \nabla^2 \operatorname{grad} f = \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{grad}(\Delta f),$$

l'application identité $\widehat{I}_{\alpha,\beta}$ est bi-harmonique non-harmonique si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&2\Delta f \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) - 2(1-\beta)\Delta f \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \operatorname{grad} f \\
&+\Delta^2 f \operatorname{grad} f + 2\nabla_{\operatorname{grad} \Delta f} \operatorname{grad} f + \Delta f \operatorname{grad} \Delta f \\
&-(2-\alpha-\beta)\Delta f g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \Delta f) \operatorname{grad} f \\
&+(\alpha - 1) \operatorname{Hess}_{\Delta f}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \operatorname{grad} f = 0, \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

avec $\alpha \neq \beta$ et $\Delta f \neq 0$, ainsi :

$$\begin{aligned}
-2(1-\beta)\Delta f \operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \;=\; & \frac{1-\beta}{\beta}\Delta^2 f \qquad (4.46) \\
& -\frac{(1-\beta)(1-\alpha)}{\beta} \operatorname{Hess}_{\Delta f}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \\
& -\frac{(1-\beta)(1-\alpha-\beta)}{\beta} \Delta f g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \Delta f).
\end{aligned}$$

De les équations (4.45) et (4.46) on déduit le Théorème 4.5.1. □

Corollaire 4.5.1. *Si $\alpha \neq \beta$, $\| \operatorname{grad} f \| = 1$, $\Delta f = F(f)$, où F est une fonction non nulle dans $I \subset \mathbb{R}$, et $\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) = \lambda \operatorname{grad} f$, où $\lambda \in C^\infty(M)$. Alors, l'application identité $\widehat{I}_{\alpha,\beta}$ est bi-harmonique non-harmonique si et seulement si la fonction f soit vérifié l'équation suivante :*

$$2\beta\lambda F(f) + (\alpha+\beta)F(f)F'(f) + \alpha F''(f) = 0.$$

Du corollaire 4.5.1, on a l'exemple suivant.

Exemple 4.5.1. Soit $M = (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ muni de la métrique Riemannienne

$$g = dt^2 + \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{t},$$

et soit $f(t,x) = t$, pour tout $(t,x) \in M$. Alors, $\operatorname{grad} f = \partial_t$, $\| \operatorname{grad} f \| = 1$, $\Delta f = -\frac{n}{2t}$ et $\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) = -\frac{3n}{4t^2}\partial_t$, donc $F(s) = -\frac{n}{2s}$, pour tout $s \in I = (0, \infty)$ et $\lambda(t,x) = -\frac{3n}{4t^2}$ pour tout $(t,x) \in M$. On utilise le Corollaire 4.5.1, on trouve que, l'application identité $\widehat{I}_{\alpha,\beta}$ est bi-harmonique non-harmonique si et seulement si $n \neq 4$ et $\alpha = \frac{2n\beta}{n+4}$.

4.6 Les courbes bi-harmoniques dans $(M, \widehat{g})$

Soient $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow (M, g)$, $t \longmapsto \gamma(t)$ une courbe harmonique (géodésique) dans la variété Riemannienne (M, g), telle que $g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 1$, et $f \in C^\infty(M)$. Dans ce cas, on suppose que le gradient de f en $\gamma(t)$ est parallèle à la vecteur tangent $\dot\gamma(t)$. Ainsi, $(\operatorname{grad} f)_{\gamma(t)} = \rho(t)\dot\gamma(t)$, avec $\rho(t) = (f \circ \gamma)'(t)$, pour tout $t \in I$.

Puisque γ est harmonique, on obtient la formule suivante :

$$(\nabla_{\dot\gamma} \operatorname{grad} f)_t = \rho'(t)\dot\gamma(t), \quad \forall t \in I. \tag{4.47}$$

Théorème 4.6.1. *Soit $\widehat{g} = \alpha g + (1-\alpha) df \otimes df$, où $\alpha \in (0,1)$. Alors, la courbe $\gamma : I \longrightarrow (M, \widehat{g})$, $t \longmapsto \gamma(t)$ est bi-harmonique si et seulement si la fonction f est vérifie l'équation suivante :*

$$f(\gamma(t)) = \pm \int \sqrt{(at^2 + bt + c)^2 - \frac{\alpha}{1-\alpha}}\, dt,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, telle que $(at^2+bt+c)^2 > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, pour tout $t \in I$.

Démonstration. On a :

$$\widehat{\tau}(\gamma) \;=\; \tau(\gamma) + \frac{(1-\alpha)\operatorname{Hess}_f(\dot\gamma, \dot\gamma)}{\alpha + (1-\alpha)\|\operatorname{grad} f\|^2 \circ \gamma}(\operatorname{grad} f) \circ \gamma. \tag{4.48}$$

De la condition d'harmonicité de γ, et les équations (4.47) et (4.48), on obtient :

$$\widehat{\tau}(\gamma) = \lambda\dot\gamma, \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{(1-\alpha)\rho\rho'}{\alpha + (1-\alpha)\rho^2}. \tag{4.49}$$

La courbe $\gamma : I \longrightarrow (M, \widehat{g})$ est bi-harmonique si et seulement si :

$$\widehat{R}(\widehat{\tau}(\gamma), d\gamma(\frac{d}{dt}))d\gamma(\frac{d}{dt}) + \widehat{\nabla}^\gamma_{\frac{d}{dt}} \widehat{\nabla}^\gamma_{\frac{d}{dt}} \widehat{\tau}(\gamma) = 0. \tag{4.50}$$

D'après les propriétés du tenseur de courbure, le premier terme de coté à gauche de (4.50) est donné par :

$$\widehat{R}(\widehat{\tau}(\gamma), d\gamma(\frac{d}{dt}))d\gamma(\frac{d}{dt}) \;=\; \lambda \widehat{R}(\dot\gamma, \dot\gamma)\dot\gamma = 0. \tag{4.51}$$

Pour le deuxième terme de coté à gauche de (4.50), on calcule :

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}^\gamma_{\frac{d}{dt}} \widehat{\tau}(\gamma) &= \widehat{\nabla}^\gamma_{\frac{d}{dt}} \lambda\dot\gamma \\ &= \lambda'\dot\gamma + \lambda \widehat{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma \\ &= (\lambda' + \lambda^2)\dot\gamma. \end{aligned} \tag{4.52}$$

De la même méthode de (4.52), on trouve que :

$$\widehat{\nabla}^\gamma_{\frac{d}{dt}} \widehat{\nabla}^\gamma_{\frac{d}{dt}} \widehat{\tau}(\gamma) \;=\; \widehat{\nabla}^\gamma_{\frac{d}{dt}} (\lambda' + \lambda^2)\dot\gamma$$

$$= (\lambda'' + 2\lambda\lambda')\dot{\gamma} + (\lambda' + \lambda^2)\widehat{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \tag{4.53}$$
$$= (\lambda'' + 3\lambda\lambda' + \lambda^3)\dot{\gamma}. \tag{4.54}$$

Donc, la courbe $\gamma : I \longrightarrow (M, \widehat{g})$ est bi-harmonique si et seulement si $\lambda''+3\lambda\lambda'+\lambda^3 = 0$, ainsi la fonction λ est de la forme $(2at + b)/(at^2 + bt + c)$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$, tel que $at^2 + bt + c \neq 0$, pour tout $t \in I$. De l'équation (4.49) avec $(at^2 + bt + c)^2 > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, pour tout $t \in I$, on obtient :

$$\rho(t) = \pm\sqrt{(at^2 + bt + c)^2 - \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad \forall t \in I. \tag{4.55}$$

De l'équation (4.55), avec $\rho = (f \circ \gamma)'$, on déduit le résultat du Théorème 4.6.1. $\square$

Remarque 4.6.1. La courbe $\gamma : I \longrightarrow (M, \widehat{g})$ est bi-harmonique non-harmonique si et seulement s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ telle que $(at^2 + bt + c)^2 > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, pour tout $t \in I$, et que pour tout $i = 1, ..., m$ ($m = \dim M$) et dans toutes les coordonnées locales (x_i) dans M, on a :

$$\sum_{j=1}^{m} g^{ij}(\gamma(t))\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_{\gamma(t)} = \pm\sqrt{(at^2 + bt + c)^2 - \frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{d\gamma^i}{dt}\Big|_t, \quad \forall t \in I. \tag{4.56}$$

Nous utilisons le Théorème 4.6.1 et la Remarque précédente pour construire beaucoup d'exemples des courbes bi-harmoniques non-harmoniques.

Exemple 4.6.1. Soit $M = \mathbb{R}^n$, muni de la métrique Riemannienne :

$$g = dx_1^2 + ... + dx_n^2, \quad f(x) = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in M.$$

Pour $\alpha = \frac{n}{n+1}$, la courbe :

$$\gamma : I \longrightarrow (M, \widehat{g}), \quad t \longmapsto (\frac{t}{\sqrt{n}}, ..., \frac{t}{\sqrt{n}}),$$

est bi-harmonique non-harmonique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Baird and D. Kamissoko, On constructing biharmonic maps and metrics, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), no. 1, 65-75.

[2] P. Baird and J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Clarendon Press, Oxford (2003).

[3] P. Baird, A. Fardoun and S. Ouakkas, Conformal and semi-conformal biharmonic maps, Ann. Glob. Anal. Geom., **34** (2008), no. 4, 403-414.

[4] A. Benkartab and A. Mohammed Cherif, New methods of construction for biharmonic maps, KYUNGPOOK Math. J. 59(2019), 135-147

[5] A. Benkartab and A. Mohammed Cherif, Deformations of metrics and biharmonic maps, Communications in Mathematics n (20xy) ab-cd DOI : 10.2478/cm-2020-0022

[6] P. Buser, Géométrie Riemannienne, Notes de cours, 2003/2004.

[7] I. Chavel, Riemannian Geometry, A Modern Introduction Second Edition, 2006.

[8] M. Djaa, A. Mohammed Cherif, K. Zagga and S. Ouakkas, On the generalized of harmonic and bi-harmonic maps, Int. Electron. J. Geom. **5(1)** (2012) 90-100.

[9] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés, Centre universitaire Ahmed Zabana-Relizane, 2017.

[10] M.P. Do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhauser, Boston. Basel. Berlin, 1992/1993.

[11] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[12] J. Eells, L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. **16** (1978) 1-68.

[13] J. Eells, L. Lemaire, Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. **20** (1988) 385-524.

[14] G. Y. Jiang, 2-Harmonic maps between Riemannian manifolds, Annals of Math., China, **7A(4)**(1986), 389-402.

[15] A. Mohammed Cherif, Géométrie harmonique des variétés, Thèse de doctorat, Université d'Oran Ahmed Ben Bella, 25 juin 2014.

[16] A. Mohammed Cherif, Géométrie semi-Riemannienne, Notes de cours, Université Mustapha Stambouli-Mascara, 2015.

[17] B. O'Neil, Semi- Riemannian Geometry, Academic Press, New York (1983).

[18] C. Oniciuc, New examples of biharmonic maps in spheres, Colloq. Math. **97** (2003) 131-139.

[19] S. Ouakkas, Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geometry and its Applications, **26** (2008) 495-502

[20] P. Petersen, Riemannian Geometry, Second Edition, 53-01.

[21] T. Sakai, Riemannian geometry, Shokabo, Tokyo, 1992 (in Japanse).

[22] Y. Xin, Geometry of Harmonic Maps, Fudan University, (1996).