

Université MUSTAPHA Stambouli  
Mascara



جامعة مصطفى أسطبولي  
معسكر

Faculté des sciences et technologie  
Département de Génie Mécanique  
Laboratoire de Physique Quantique de la Matière et Modélisations

## THESE DE DOCTORAT DE 3<sup>eme</sup> CYCLE

Spécialité : Génie Mécanique  
Option : Mécanique des Matériaux et structures

Intitulée

**Analyse des problèmes d'élasticité plane dans un milieu fissures par la méthode des éléments finis étendus (XFEM)**

*Présentée par : TAGHEZOUT ALI*

**Le :05/03/2020 à 10:00h**

Devant le jury :

Président	MEDDAH Hadj Miloud	Pr	Université M. S. de Mascara
Examineur	BENGUEDIAB Mohamed	Pr	Université Sidi Belabes
Examineur	HAMMADI Fodil	Pr	Université T.M de Bechar
Examineur	BOUZIANE Med Mokhtar	Pr	Université M. S. de Mascara
Encadreur	AID Abdelkrim	Pr	Université M. S. de Mascara
Co-Encadreur	BENDOUBA Mostefa	MCA	Université M. S. de Mascara

## **REMERCIEMENTS**

*Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude à **Mr. AID ABDELKARIM** professeur à l'Université de Mascara, pour m'avoir accueilli dans son équipe et de m'avoir témoignée durant ces années une totale confiance. Merci d'avoir été un directeur de mon travail.*

*Je tiens également à adresser mes sincères remerciements à **Mr. BENDOUBA MUSTAPHA** Maitre de Conférence à l'Université de Mascara, pour avoir co-encadré cette thèse, pour ses conseils avisés et aussi pour sa bonne humeur et ses encouragements.*

*J'exprime, mes remerciements à **Mr. MEDDAH HADJ MILOUD** professeur à l'Université de Mascara d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.*

*J'adresse ma reconnaissance à **Mr. BENGUEDIAB MOHAMED** (Professeur à l'Université de Sidi Bel Abbès), **Mr. HAMMADI FODIL** (Professeur à Université de bechar), **Mr. BOUZIANE MED MOKHTAR** (professeur à l'Université de Mascara), pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être membres du jury et de consacrer du temps pour la lecture et le jugement de ce travail.*

*Un grand merci également à Messieurs **Pr. AID ABDELKARIM** et **Dr. BENDOUBA MOSTEFA** pour l'aide qu'ils m'ont apportée tout au long de ce travail.*

*Enfin, je voudrais remercier ma grande familles et ma petite famille , mes amis, pour leur soutien permanent pendant mes études et durant la réalisation de cette thèse.*

*Ali Taghezout*

## *DEDICACE*

*Je dédie ce modeste travail à :*

 *A ma mère et mon frère*

 *A ma petite famille*

 *A ma grande famille*

 *A tous mes amis (es)*

❖ *L'esprit de Mon grand père et à  
Mon père*

*(Rabi yarhamhom )*

*Ali Taghezout*

## **RESUME**

Dans cet article, une modélisation numérique a été réalisée pour étudier le problème de l'élasticité plane dans un milieu fissuré par la méthode des éléments finis étendus (XFEM) dans une plaque mince fissurée en aluminium à l'aide du logiciel Abaqus 6.13. Cette méthode a amélioré la méthode classique des éléments finis, en particulier les problèmes de propagation de fissure. De plus, la méthode des éléments finis étendus a été utilisée pour simuler le comportement en traction et en rupture des matériaux de l'étude. Sur la base des variations de taille et de forme de la fissure, les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus expérimentalement. Cette comparaison montre un bon accord.

**Mots-clés:** Aluminium, Méthode des éléments finis étendus(XFEM), Plaque fissurée, Élasticité plane

## **ABSTRACT**

In this article, a numerical modeling was carried out to study the problem of plane elasticity in a cracked medium by the extended finite element method (XFEM) in a thin cracked aluminum plate using Abaqus 6.13 software. method has improved the classical finite element method, in particular the crack propagation problems. In addition, the extended finite element method was used to simulate the tensile and fracture behavior of the study materials. On the basis of the size and shape variations of the crack, the results obtained will be compared with those obtained experimentally. This comparison shows a good agreement.

**Keywords:** Aluminum, Extended finite element method, Cracked plate, Plane elasticity

## المخلص

في هذا العمل، لقد تم عمل نمذجة رقمية لدراسة مشكلة المرونة المستوية في وسط متصدع بواسطة طريقة العناصر المحدودة الممتدة (XFEM) في صفيحة رقيقة من الألمنيوم المتصدع باستخدام برنامج Abaqus 6.13 وقد حسنت هذه الطريقة طريقة العناصر المحدودة الكلاسيكية، وخاصة مشاكل انتشار التصدع بالإضافة إلى ذلك، تم استخدام طريقة العناصر المحدودة (FEM) الممتدة لمحاكاة سلوك الشد والكسر لمواد الدراسة. على أساس الاختلافات في حجم وشكل الشق، ستتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها رقمياً مع التي تم الحصول عليها تجريبياً بتشير هذه المقارنة إلى اتفاق جيد..

الكلمات المفتاحية: الألمنيوم، طريقة العناصر المحدودة الممتدة (XFEM)، الألواح المتشققة، المرونة المستوية

*Remerciements*

*Dédicace*

*Résumé*

*Table des matières*

*Table des figures*

*Table des tableaux*

*Table des symboles*

***Table des matières***

***Introduction***

***Chapitre I:Generalite Sur La Mécanique De La Rupture***

<i>I. Introduction:</i>	<i>1</i>
<i>I.1. Aperçu historique sur la mécanique de la rupture</i>	<i>1</i>
<i>II. Mécanique linéaire de la rupture</i>	<i>5</i>
<i>II.1.1 .mode de rupture</i>	<i>6</i>
<i>II.1.2. Bilan énergétique de Griffith</i>	<i>8</i>
<i>II.1.3. Formule d'Irwin</i>	<i>9</i>
<i>III. La fissuration</i>	<i>11</i>
<i>III.1. Étude d'un milieu élastique fissuré</i>	<i>11</i>
<i>III.1.1. Forme et taille de la zone plastifiée</i>	<i>12</i>
<i>III.1.1.1. Analyse d'Irwin</i>	<i>14</i>
<i>III.1.1.2. Analyse de Rice :</i>	<i>16</i>
<i>III.1.1.3. Analyse de Dugdale</i>	<i>19</i>
<i>III.1.1.4. Analyse basée sur les lois d'écoulements</i>	<i>21</i>
<i>III.2. Facteur d'intensité des contraintes</i>	<i>25</i>
<i>III.2.1. Détermination expérimentale de KIC :</i>	<i>26</i>
<i>III.2.2.Calcul numérique des facteurs d'intensité de contraintes FIC</i>	<i>26</i>
<i>III.2.3.Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes par extrapolation</i>	<i>28</i>
<i>III.3.Mesure de ténacité</i>	<i>29</i>
<i>III.4. Taux de restitution d'énergie :</i>	<i>30</i>
<i>III.4.1. Méthode des compliances pour la mesure de GIC</i>	<i>30</i>
<i>III.4.2. Méthode WILLIAMS pour la mesure de GIC</i>	<i>33</i>
<i>IV. Mécanique non-linéaire de la rupture</i>	<i>34</i>
<i>IV.1. Extension de la théorie de Griffith</i>	<i>34</i>

<i>IV.2. Intégrale de Rice (Intégrale J)</i>	35
<i>IV.3. Approche classique HRR</i>	37
<i>Conclusion</i>	38
<b><i>Chapitre II: Modélisation des discontinuités par la méthode X-FEM</i></b>	
<i>Introduction</i>	39
<i>I. Etat de l'art sur la méthode des éléments finis</i>	40
<i>II .Méthode d'éléments finis</i>	45
<i>II.1. Bases de FEM</i>	45
<i>II.2. Partition de l'unité, PoU</i>	46
<i>II.3 .Construction de la base enrichie en FEM</i>	49
<i>III .La méthode des éléments finis étendus (XFEM)</i>	51
<i>III.1. XFEM pour les problèmes de propagations des fissures</i>	52
<i>III.2. Modélisation de la fissure intérieure</i>	52
<i>III.3. Modélisation de la région du fond de fissure</i>	53
<i>IV. Critères d'initiation et de croissance de la fissure</i>	54
<i>IV.1. Initiation de la fissure</i>	54
<i>IV.2. Croissance des fissures</i>	54
<i>V. Méthode du courbes de niveau (Level Set)</i>	55
<i>V.1. Couplage X FEM/ LSM</i>	57
<i>V.1.1. Fonctions de niveau pour le cas d'un vide et d'une inclusion</i>	58
<i>V.1.1.1.Cas d'un vide circulaire</i>	58
<i>V.1.1.2.Cas d'une inclusion circulaire</i>	59
<i>VI. Etudes de cas</i>	60
<i>VI.1. Specimen SENT ( Single Edge Notched Tension Plate).</i>	62
<i>VII. Conclusion</i>	63
<b><i>CHAP III: Etude expérimentale et numérique</i></b>	
<i>Introduction</i>	64
<i>III.1.Utilisation d'un logiciel éléments finis :</i>	64
<i>III.2.Déroulement d'une étude :</i>	64
<i>III.2.1.Abaqus</i>	65
<i>III.2.1.1.Creation du fichier d'entree</i>	65
<i>III.2.1.2.Types de non-linéarités:</i>	66
<i>III.3.Etude expérimentale</i>	66

<i>III.3.1.choix du matériaux</i>	67
<i>III.3.2.Géométrie du Spécimen et Matériel</i>	68
<i>III.3.3.Machine de traction</i>	71
<i>III.3.4.Préparation des éprouvettes</i>	72
<i>III.3.5.Préfissuration</i>	73
<i>III.4.Étude du comportement élastique</i>	74
<i>III.4.1.L'essai de traction uniaxiale</i>	74
<i>III.4.2.Coefficient de Poisson</i>	76
<i>III.4.3.Détermination du module d'Young par essai de traction</i>	77
<i>III.4.4.La résistance élastique</i>	78
<i>III.4.5.Caractérisation du comportement plastique</i>	78
<i>III.4.6.La mesure des déplacements</i>	79
<i>III.4.6.1.Détermination des déplacements par des techniques optiques de mesure</i>	79
<i>III.5.Modélisation numérique et conditions aux limites</i>	80
<i>III.5.1.Diagramme contrainte-déformation</i>	81
<i>III.5.2.Résultats et discussion</i>	82
<i>III.6.Facteur d'intensité de contrainte</i>	90
<i>III.6.1.Calcul des facteurs d'intensité des contraintes</i>	91
<i>III.7.Conclusion</i>	95
<i>Conclusion général</i>	97
<i>Remerciements</i>	97
<i>General conclusion</i>	98
<i>Acknowledgements</i>	98
<i>Références</i>	101
<i>Table des figures</i>	
<i>Figure 1.1 :representation shematique des trois mode de rupture</i>	6
<i>Figure 1.2 :coordonnées polaires</i>	7
<i>Figure 1.3: singularité en fond de fissure</i>	10
<i>Figure 1.4 : Les zones de champs mécaniques</i>	12
<i>Figure 1.5 : Plasticité en pointe de fissure</i>	12
<i>Figure 1.6: Enclave plastique entourant la fissure</i>	13
<i>Figure 1.7 : Forme de la zone déformée plastiquement (Modèle d'Irwin)</i>	14
<i>Figure 1.8 : Zones plastifiées monotone et cyclique (Selon Rice)</i>	17

<i>Figure 1.9 : Forme de la zone plastifiée en bout de fissure (Modèle de Rice)</i>	17
<i>Figure 1.10 : Forme de la zone plastifiée (calcul aux éléments finis)</i>	18
<i>Figure 1.11 : Distribution des champs de contraintes agissant sur une fissure (Selon Dugdale)</i>	20
<i>Figure 1.12 : Zone plastique en bout de fissure le long de l'épaisseur d'une éprouvette.</i>	21
<i>Figure 1.13 : Limite des zones plastifiées(Critères de Von Mises et Tresca )</i>	24
<i>Figure 1.14 :détermination des axes (x,y) et des coordonnées (r,θ) au voisinage de l'extrémité d'une fissure</i>	25
<i>Figure 1.15: Maillage avec « double nœuds »</i>	27
<i>Figure 1.16: Notations pour le calcul de KI, KII par extrapolation au nœud double (B+, B-)</i>	28
<i>Figure 1.17: courbe typique charge_ déplacement</i>	31
<i>figure 1.18:Evolution de la compliance en fonction de la longueur de fissure</i>	32
<i>Figure 1.19 : Evolution du taux de restitution d'énergie en fonction des longueur de fissure</i>	32
<i>Figure 1.20 : Représentation graphique de l'énergie en fonction de la géométrie</i>	33
<i>Figure 1.21: Définition des grandeurs introduites dans l'intégrale de Rice (équation (1-56))</i>	36
<i>Figure II.1: Une couverture ouverte du domaine <math>\Omega</math> formé par des nuages <math>w_I</math></i>	47
<i>Figure II.2: Construction de la partition de la fonction d'unité</i>	50
<i>Figure II.3: Construction d'une fonction de base enrichie par le produit de fonctions de forme FEM classiques formant la fonction PoU, <math>Q(x)</math>et une fonction d'approximation locale, <math>g(x)</math></i>	
<i>Figure II.4: Schéma d'enrichissement de la fissure</i>	53
<i>Figure II.5: Fonctions d'enrichissement proches de la pointe</i>	54
<i>Figure II.6: Construction de la fonction de level set en tant que fonction de distance signée.</i>	56
<i>Figure II.7: Construction de la fonction de level set pour les fissures.</i>	57
<i>Figure II.8 : Stratégie de recherche du type d'enrichissement (cas de fissure)</i>	58
<i>Figure II.9 : Fonction de niveau pour le cas d'un vide</i>	59
<i>Figure II.10 : Fonction de niveau pour le cas d'une inclusion</i>	59
<i>Figure II.11: Fissure traversant dans une plaque de largeur infinie soumise à une</i>	60

*contrainte de traction a distante*

<i>Figure II.12: Fissure dans une plaque semi-infinie soumise à une contrainte de traction à distance</i>	61
<i>Figure II.13: Le spécimen SENT</i>	62
<i>Figure III.1: Les éléments non linéarités de déformations</i>	66
<i>Figure III.2: Quelques domaines d'exploitation d'aluminium</i>	68
<i>Figure III.3: Forme et dimensions des spécimens d'ossature</i>	69
<i>Figure III.4: La géométrie de l'éprouvette avec les paramètres de fissure, a) la fissure du bord latéral, b) l'éprouvette à entaille en V</i>	70
<i>Figure III.5: Préparation d'une éprouvette sur la fraiseuse</i>	73
<i>Figure III.6: Des éprouvettes contiennent des pré-fissures</i>	74
<i>Figure III.7: Essai de traction sur éprouvette fixée verticalement et centrée entre les mors</i>	75
<i>Figure III.8: Courbe contrainte-déformation d'un alliage d'aluminium</i>	75
<i>Figure III.9: Coefficient de Poisson</i>	76
<i>Figure III.10: Module de Young</i>	78
<i>Figure III.10: machine de mesure des déplacements</i>	79
<i>Figure III.11: Comparaison entre résultats de traction expérimentaux et simulés</i>	81
<i>Figure III.12: courbe contrainte-déformation des éprouvettes étudiées</i>	82
<i>Figure III.13(a): Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec <math>a = 10</math></i>	83
<i>Figure III.13(b) : Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec <math>a = 15</math></i>	84
<i>Figure III.13(c): Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec <math>a = 20</math></i>	84
<i>Figure III.13(d) : Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec <math>a = 25</math></i>	85
<i>Figure III.14: Erreur relative de la charge à la rupture pour les différentes longueurs de fissure</i>	86
<i>Figure III.14(a): Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec <math>a = 20</math> mm et <math>a = 0</math></i>	87
<i>Figure III.14(b): Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec <math>a = 20</math> mm et <math>a = 30^\circ</math></i>	88

<i>Figure III.14(c): Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec <math>a = 20</math> mm et <math>\alpha = 60^\circ</math></i>	88
<i>Figure III.14(d): Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec <math>a = 20</math> mm et <math>\alpha = 90^\circ</math></i>	89
<i>Figure III.15: Erreur relative de la Charge à la rupture pour les différents Angles de l'entaille</i>	90
<i>Figure III.16: tenseur de contrainte au point M</i>	91
<i>Figure III.17: Schéma du modèle pour l'étude de fissure stationnaire.</i>	92
<i>Figure III.18: la variation de KI en fonction de <math>a/w</math></i>	94
<i>(a- Résultat analytiques [19] b- Résultats numériques XFEM)</i>	94
<i>Figure III.19: Estimation d'erreur de KI de la X-FEM.</i>	95
<i>Liste des tableaux</i>	
<i>Tableau III.1: coefficient de Poisson du matériau étudié</i>	77
<i>Tableau III.2: exemple de coefficient de Poisson pour différents matériaux</i>	77
<i>Tableau III.3: comportement mécanique de matériaux étudiés</i>	81
<i>Tableau III.4: Charge à la rupture pour différentes longueurs de fissure</i>	83
<i>Tableau III.5: Charge à la rupture pour différents Angles de l'entaille</i>	86

**Liste des symboles**

$\nu$  : Coefficient de Poisson.

$\{\varepsilon\}$  : Vecteur de déformations.

$\{\sigma\}$  : Vecteur de contraintes.

$a$  : Longueur de l'entaille.

$H$  : Hauteur de l'éprouvette.

$w$  : Largeur de l'éprouvette.

$[x_1 y_1; x_2 y_2]$ : Coordonnées de la fissure.

$E$  : Module de Young.

$J$  : Intégrale de contour.

$F$  : Charge appliquée.

$K_I$  : Facteur d'intensité des contraintes en mode I.

$K_{II}$  : Facteur d'intensité des contraintes en mode II.

$Y(a/w)$  : Facteur de correction.

GIC : valeur critique du taux de restitution d'énergie

span: extension de point

FEM: méthode des éléments finis

XFEM: méthode des éléments finis étendu

Level Set: Méthode du courbes de niveau

SENT :Plaque de tension entaillée à bord simple

$u_i$  : Nœuds avec degrés de liberté classiques.

$\bar{u}$ : Approximation des champs de déplacement.

$\nu_{Inc}$  : Coefficient de Poisson de l'inclusion.

$\sigma_{ij}$  : composantes des tenseurs de contraintes au point courant sur le contour .

$\varepsilon_{ij}$  : composantes des tenseurs de déformations au point courant sur le contour .

$\nabla s$  : est la part symétrique de tenseur gradient.

$(x_i, y_i)$  : Coordonnées des nœuds.

$\xi_{ik}$  : Fonction d'enrichissement correspondant à chaque inclusion (i).

$a_i^e$  : Nœuds avec enrichissement discontinu.

$b_i^e$  : Nœuds avec enrichissement singulier.

$[B]$  : Matrice de déformations.

$[D]$  : Matrice des propriétés du matériau.

$[J]$  : Matrice Jacobienne.

$[k]$  : Matrice de rigidité élémentaire.

$[K]$  : Matrice de rigidité globale.

$[x_c \ y_c \ r_c]$ : Coordonnés de l'inclusion.

$[x_v \ y_v \ r_v]$ : Coordonnés du vide.

$\{F\}$  : Vecteur de force.

$\{U\}$  : Vecteur de déplacement

$a_{ik}$  : Degrés de liberté nodaux correspondant au nombre d'inclusions.

$B$  : Épaisseur de l'éprouvette.

$b_{ik}$  : Degrés de libertés nodaux correspondant aux fonctions singulières  $Fk(x)$ .

$C$  : le tenseur de Hooke.

$CT$  : Nombre de pointe de la fissure par défaut.

$CTEN$  : Contour des nœuds enrichis par la fonction  $F$ .

$D_x, D_y$  : Distance horizontale et verticale.

$D_{x1}, D_{x2}$  : Distance horizontale.

$D_{y1}, D_{y2}$  : Distance verticale.

$E_{Inc}$  : Module de Young de l'inclusion.

$f_{ij}(\theta)$  : Fonctions de répartition angulaires.

$F_\alpha(x)$  : Fonctions singulières.

$H(x)$  : Fonction de Heaviside (fonction de Saut).

$HEN$  : Contour des nœuds enrichis par la fonction  $H$ .

$I$  : Intégrale d'interaction.

$n$  : Nombre total des nœuds.

$N1$  : Numéro du premier nœud de l'élément fini.

$N2$  : Numéro du deuxième nœud de l'élément fini.

$N3$  : Numéro du troisième nœud de l'élément fini.

$N4$  : Numéro du quatrième nœud de l'élément fini.

$n_{cut}$  : Nombre de nœuds des éléments finis traversés par la fissure.

$n_e$  : Nombre des nœuds de l'élément fini.

$n_{e1}$  et  $n_{e2}$  : Nombre des nœuds des éléments contient la pointe de la fissure.

$NF$  : Nombre des nœuds enrichis par la fonction  $F$ .

$NH$  : Nombre des nœuds enrichis par la fonction  $H$ .

$Ni$  : Fonctions de forme.

$NI$  : Nombre total des nœuds.

$Ni(\xi, \eta)$  : fonctions de forme.

$ninc$  : Nombre d'inclusions dans le domaine.

$NInc$  : Nombre des nœuds enrichis pour le cas d'une inclusion.

$NV$  : Nombre des nœuds enrichis pour le cas d'un vide.

$\Phi$  et  $\Psi$  : Fonctions de Level Set.

$r$  et  $\theta$  : Coordonnées polaires.

$t$  : Epaisseur de l'élément fini.

$TN$  : Contour des nœuds classiques.

$u, v, w$  : Déplacements dans les trois directions.

$U^f(x)$  : Approximation des nœuds enrichis par  $F$ .

$U^h(x)$  : Approximation des nœuds enrichis par  $H$ .

$U_x$  et  $U_y$  : Déplacements dans le plan  $(x,y)$ .

$W$  : Densité d'énergie de déformation.

$x(\xi,\eta)$  et  $y(\xi,\eta)$  : coordonnées d'un point de l'élément réel.

$x_i$  et  $y_i$  : Coordonnées d'un point de l'élément réel.

$\alpha_1, \alpha_2, \beta$  : Angles d'inclinaison de la fissure.

$\varepsilon$  : Déformation.

$\xi$  et  $\eta$  : Coordonnées d'un point de l'élément de référence.

$\sigma$  : Contrainte normale.

$\tau$  : Contrainte tangentielle.

$\varphi$  et  $\psi$  : Fonctions « Level Set » correspond la fissure.

$\chi, \zeta$  : Fonctions de courbes de niveau correspond le vide et l'inclusion.

## **INTRODUCTION GENERAL**

La plus grande inquiétude de nos jours aujourd'hui est de prévoir le comportement de croissance des fissures qui devient un problème majeur pour assurer la fiabilité des structures sous différents types de chargement dans de nombreux cas tels que les structures aérospatiales, l'automobile et bien d'autres applications industrielles. Par conséquent, l'un des paramètres les plus importants pour estimer la durée de vie de cette structure fissurée est le facteur d'intensité de contrainte (SIF).

Dans ce contexte, les industries automobile et aérospatiale demandent de plus en plus d'alliages d'aluminium pour répondre aux exigences strictes visant à réduire la consommation de carburant [1].

Ces alliages sont fréquemment utilisés dans les applications marines en raison de leur bon équilibre entre légèreté et bonnes propriétés mécaniques et améliorent la résistance à la corrosion [2].

L'objectif général de ce travail de thèse est de contribuer aux méthodes expérimentales et d'analyse les caractérisations des matériaux, Particulièrement analyse du problème d'élasticité plane dans un milieu fissures par la méthode des éléments finis étendus (XFEM) ,avec des objectifs spécifiques par exemple:

- Etudier en profondeur la capacité de cette démarche expérimentale pour donner des mesures précises de la ténacité des éprouvettes.
- Mesurer la ténacité ou la charge à la rupture de matériaux , sain et endommagé (pré\_fissuré).
- Valider l'utilisation du Facteur d'Intensité de Contraintes en tant que paramètre de ténacité à la rupture pour les éprouvettes entaillées.

La thèse est organisée en trois chapitres dont le contenu général est décrit ci-dessous.

Une introduction générale présentant les objectifs du travail et l'organisation du manuscrit.

Le premier chapitre donne une vision générale de la mécanique de la rupture à travers les définitions et les concepts de base permettant de mettre en œuvre des analyses de

risque des défauts et leur propagation sous l'effet d'un chargement, pour des structures et assemblages. en particulier dans le domaine aéronautique, qui ont poussé les ingénieurs à intégrer de plus en plus la mécanique de la rupture dans les cycles de conception.

Le deuxième chapitre constitue une présentation des principes et potentialités de la méthode des éléments finis étendus comme une nouvelle approche de modélisation de plaques pré\_fissure et il traite d'une adaptation de XFEM au calcul de plaques minces, qui présentent une fissure traversante. Rappelons que XFEM est un moyen d'introduire la discontinuité à travers la fissure et le déplacement asymptotique dans l'espace des éléments finis. Il a été initialement développé pour les problèmes d'élasticité plane et fait maintenant l'objet d'une large littérature.

Dans le chapitre trois différents cas de test ont été adoptés pour les analyses expérimentales et numériques pour souligner le comportement du matériaux étudié, des comparaisons avec un modèle standard d'endommagement ductile ont été effectuées pour mettre en évidence les avantages de la méthode X-FEM .elle est apparu comme une technique numérique capable de fournir des fonctions d'édition locales à l'interface des matériaux, évitant ainsi de devoir mailler l'ensemble de la structure tout en découvrant des solutions pour les fonctions discontinues [3]. Ce faisant, XFEM émergera pour résoudre les défauts du FEM en apportant des solutions précises à des problèmes d'ingénierie complexes qu'il serait impossible de résoudre autrement [4].

Cette méthode est développée par Belytschko et Black [5], qui est habile à intégrer l'enrichissement local dans l'espace d'approximation dans le cadre d'éléments finis. L'espace enrichi résultant est alors capable de saisir les solutions non lisses avec un taux de convergence optimal. Cela devient possible grâce à la notion de division de l'unité identifiée par Melenk et Babuska [6].

La simulation de la propagation des fissures en 3D est une tâche difficile. L'application de la méthode standard par éléments finis (FEM) à la rupture est difficile car elle requiert un maillage qui épouse la surface de la fissure et présente un raffinement au

niveau du front de la fissure. Par conséquent, lors de la propagation, un ré-maillage fréquent est nécessaire, qui peut, en particulier en trois dimensions, être à peine automatisé.

Une comparaison finale avec les données expérimentales d'un échantillon en traction a démontré la précision de la solution, en termes de courbes charge-déplacement, obtenues avec la formulation X-FEM.

Dans ce travail, une modélisation numérique a été réalisée pour étudier le problème de l'élasticité plane dans un milieu fissuré par la méthode des éléments finis étendus (XFEM) dans une plaque mince fissurée en aluminium à l'aide du logiciel Abaqus 6.13. Cette méthode a amélioré la méthode classique des éléments finis, en particulier les problèmes de propagation de fissure.

De plus, la méthode des éléments finis étendus a été utilisée pour simuler le comportement en traction et en rupture des matériaux de l'étude. Sur la base des variations de taille et de forme de la fissure, les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus expérimentalement. Cette comparaison montre un bon accord

## ***Généralités sur la mécanique de la rupture***

### ***I. Introduction:***

Dans ce chapitre, on présente quelques aspects bibliographiques liés à la fissuration des matériaux.. On commence d'abord par introduire la mécanique linéaire de la rupture. Les fondements théoriques de cette approche sont bien établis, et elle se montre efficace dans des situations simples où les matériaux sont élastiques linéaires et isotropes. On insistera ici sur l'établissement des facteurs d'intensité de contraintes et sur la mise en place de l'approche énergétique qui introduit la notion de taux de restitution d'énergie.

La mécanique linéaire de la rupture est décrite dans le cadre de l'élasticité linéaire. Elle est ainsi particulièrement adaptée pour étudier la rupture des matériaux fragiles. Pour étudier des matériaux ductiles, on a recours à la mécanique non-linéaire de la rupture. On établira la notion clé d'intégrale et on rappellera qu'un sens physique peut lui être attribué dans la mesure où l'on peut montrer qu'elle est équivalente au taux de restitution d'énergie dans le cas de la mécanique linéaire de la rupture.

On présentera aussi la notion de zone plastique confinée en pointe de fissure et certaines extensions de l'intégrale , Certains points ne sont pas abordés dans la mécanique classique de la rupture, qu'elle soit linéaire ou non. Par exemple, les problèmes de l'amorçage et de la propagation instable des fissures ne peuvent pas être traités avec cette approche. Pour traiter dans un même formalisme le problème de l'amorçage et de la propagation, il est possible d'utiliser, des modèles de zone cohésive [07]

### ***I.1. Aperçu historique sur la mécanique de la rupture***

Eviter la rupture n'est pas en soi une idée nouvelle. Les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons (pyramides) ou ceux de l'empire romain nous ont laissé des édifices que l'on peut encore contempler ce qui prouve bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Les matériaux utilisés avant la révolution industrielle étaient cependant limités pour l'essentiel au bois de construction, à la pierre ou à la brique .

Ils sont relativement fragiles lorsqu'on les utilise en traction ; les structures anciennes qui ont résisté au temps, étaient chargées en compression (pyramides, ponts romains...) et de façon générale toutes les structures de l'époque qui précède la révolution industrielle étaient conçues pour des chargements en compression. Il a fallu attendre la révolution industrielle au début du 19<sup>ème</sup> siècle, avec l'utilisation de l'acier dont les propriétés mécaniques permettaient de concevoir des structures pouvant résister à des charges de traction. La comparaison des anciens ponts romains avec les ponts modernes de structure métallique montre bien que les premiers étaient chargés en compression alors que les seconds le sont plutôt en traction[08]. L'utilisation de nouveaux matériaux ductiles (acier et autres alliages métalliques) pour des chargements en traction conduisit cependant à quelques problèmes ; des ruptures se produisaient parfois pour des niveaux de charges bien inférieurs à la limite d'élasticité ; on a dans un premier temps essayé d'éviter ces risques de ruptures en surdimensionnant les structures, mais la nécessité d'alléger de plus en plus les structures et de réduire les coûts conduisit au développement des recherches sur la mécanique de la rupture.

Les premiers essais de rupture a montré que la résistance à la traction de fils de fer variait inversement avec leur longueur. Ces résultats suggéraient que les défauts contenus dans le matériau contrôlaient sa résistance ; plus le volume est important (fil de fer long) plus la probabilité de présence de fissure par exemple est importante. Cette interprétation qualitative fût précisée plus tard en 1920 par Griffith [09] qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux d'Inglis, Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure ; il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture. Selon cette théorie, un défaut devient instable et conduit à la rupture lorsque la variation d'énergie liée à une propagation du défaut atteint l'énergie spécifique du matériau. Cette théorie prédit correctement la relation entre la contrainte de rupture et la taille du défaut dans les matériaux fragiles. Dans les matériaux ductiles et notamment les alliages métalliques, l'avancée d'un défaut s'accompagne d'une importante dissipation d'énergie due à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure et la théorie de Griffith qui ne considère que l'énergie de création de surface ne peut en rendre

compte. Il a fallu attendre les travaux d'Irwin en 1948 [10] qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

La mécanique de la rupture passa du stade de curiosité scientifique à celui d'une discipline scientifique largement utilisée dans l'ingénierie de la construction, après ce qui arriva aux bateaux de la liberté lors de la deuxième guerre mondiale. Le principe de conception de ces bateaux avec une coque entièrement soudée constituait un grand succès jusqu'au jour où un de ces navires se fissura en deux parties entre la Sibérie et l'Alaska dans une mer très froide. Une dizaine d'autres navires sur les 2700 en service, subira ensuite le même sort. Les analyses des causes de rupture montraient que celles-ci étaient dues à la combinaison de trois paramètres :

1. les joints de soudures contenaient des fissures.
2. la plupart de ces fissures qui conduisaient à la rupture, se développaient à partir de zones de forte concentration de contrainte.
3. l'acier de construction utilisé pour ces bateaux, qui convenait pour les assemblages par rivetage où il n'y avait pas de risque qu'une fissure traverse toute la coque, avait une faible ténacité.

Dès l'instant où la cause des ruptures était clairement identifiée, des plaques en acier de meilleure ténacité furent rivetées près des zones de forte concentration des contraintes pour arrêter la propagation des fissures. On développa ensuite des aciers de forte ténacité et on améliora le procédé de soudage ; c'est dans ces années après guerre qu'un groupe de chercheurs dirigé par Irwin étudia en détail le problème de la rupture au laboratoire national de recherche de la marine américaine.

Irwin considéra que les outils fondamentaux pour étudier la rupture existaient et proposa en 1948, une extension de l'approche de Griffith aux matériaux ductiles en y incluant le terme de dissipation d'énergie due à l'écoulement plastique près des extrémités d'une fissure. Il

développa ensuite en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard [11] qui analysa les champs de déplacements et de contraintes élastiques près de l'extrémité d'une fissure sous chargement donné, Irwin montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique qui était relié au taux de restitution d'énergie ; ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est le facteur d'intensité des contraintes (FIC).

Les nouveaux concepts de la mécanique de la rupture furent ensuite utilisés pour montrer que la plupart des ruptures dans les fuselages d'avions étaient dues à des fissures de fatigue qui atteignaient une taille critique. Ces fissures prenaient naissance près des hublots dans les coins qui constituent des zones de forte concentration des contraintes. Les ruptures qui se produisaient dans les essieux d'engins roulants ou encore dans les rotors des turbines à vapeur furent aussi expliquées grâce à l'application de ces nouveaux concepts. Le concept de FIC fut également utilisé par Paris pour décrire la propagation des fissures de fatigue et progressivement les courbes de propagation des fissures de fatigue proposées par ces auteurs remplacèrent les courbes d'endurance pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles qui s'affrontaient. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs (Irwin, Dugdale et Barenblatt ...) proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone plastique ; la taille de la fissure est alors augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC.

Wells proposa en 1961 [12] le déplacement à fond de fissure - ou CTOD « Crack Tip Opening Displacement » - comme paramètre alternatif à la mécanique linéaire de la rupture ou plus précisément au concept de FIC, lorsque la plastification devient importante comme c'est le cas dans les matériaux très ductiles. Plus tard, Hutchinson, Rice et Rosengren (HRR) [13] développèrent un nouveau paramètre appelé intégrale  $J$  pour mieux décrire la répartition des contraintes dans les zones plastifiées (champ HRR). Begley et Landes [14] caractérisèrent la ténacité à l'aide du paramètre  $J$  et développèrent une procédure standard pour l'utilisation de cette intégrale dans des cas pratiques.

Les récents développements de la mécanique de la rupture montrent que si les recherches se sont cristallisées sur l'effet de la plastification dans la période entre 1960 et 1980, on s'intéresse actuellement plus aux comportements viscoplastique et/ou viscoélastique. Les premiers se rencontrent à température élevée lorsque les phénomènes de fluage deviennent importants alors que les seconds caractérisent les matériaux polymères de plus en plus utilisés dans l'industrie. L'apparition des nouveaux matériaux composites nécessita également l'utilisation des concepts de la mécanique linéaire de la rupture pour décrire leur comportement. Plus récemment encore, de nouvelles approches tentent de relier le comportement local à l'échelle microscopique au comportement global lors de la rupture d'un matériau. Ces approches micro-macro deviennent parfois nécessaires lorsqu'on atteint les limites d'utilisation des autres approches plus classiques.

L'objet de mécanique de la rupture est l'étude des évolutions de cette surface (propagation de la fissure) en fonction des chargements appliqués et des caractéristiques du matériau constituant.

## ***II. Mécanique linéaire de la rupture***

La mécanique linéaire de la rupture s'est beaucoup développée depuis les années 1960. Cette approche permet d'écrire différents critères de propagation des fissures. Elle constitue un outil efficace pour analyser ou simuler les mécanismes de la rupture fragile. On précise ici le cadre de la mécanique linéaire de la rupture. Les principales hypothèses classiquement retenues sont les suivantes :

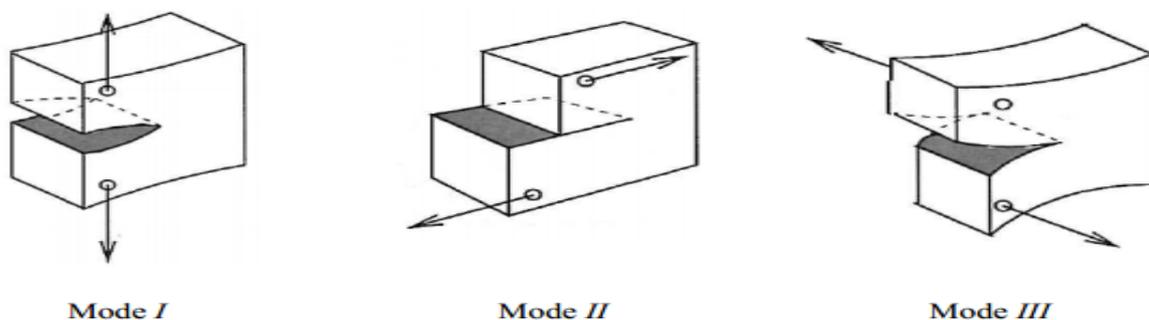
- 1) petites perturbations,
- 2) matériaux élastiques et linéaires,
- 3) évolutions quasi\_statiques et isothermes
- 4) fissuration rectiligne dans un corps bidimensionnel.

Dans le cadre de ces hypothèses, on peut étudier la fissuration par une analyse des contraintes en pointe de fissure ou par une analyse énergétique [07].

### ***II.1.1.Mode de rupture***

On présente d'abord l'approche locale en contrainte, qui se base sur l'écriture du champ de contrainte au voisinage de la fissure. Selon le type de chargement, on peut classifier le chargement de la fissure en trois modes (figure I.1) :

1. Mode I : la fissure se propage sous une contrainte de traction normale au plan de la fissure.
2. Mode II : la fissure se propage sous une contrainte de cisaillement plan.
3. Mode III : la fissure se propage sous une contrainte de cisaillement anti-plan.



*Figure I.1:Représentation schématique des trois mode de rupture*

En se plaçant sous les hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture, Williams (Williams, 1957) a montré que quels que soient le chargement et la géométrie du corps, dans la zone de singularité, l'expression des contraintes selon les modes de propagation de la fissure s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_\alpha}{r^{\frac{1}{2}}} f_{ij}^\alpha(\theta) j_\alpha(r, \theta) \quad (I.1)$$

avec  $\sigma_{ij}$  est le chargement,  $\alpha=I,II,III$  correspondent au mode *I,II,III*, les variables  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires d'un point du solide repéré par rapport à la pointe de la fissure (Figure I.2). Les fonctions  $j_\alpha(r, \theta)$  sont des fonctions bornées lorsque  $r$  tend vers 0 et  $f_{ij}^\alpha(\theta)$  sont des fonctions de l'angle  $\theta$

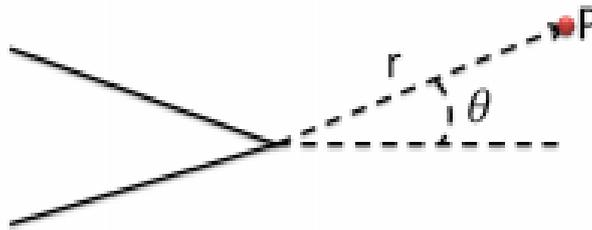


Figure 1.2: Coordonnées polaires

les termes  $K_I, K_{II}$  et  $K_{III}$  sont appelés facteurs d'intensité de contrainte en mode I, II et III. Leurs unités sont des MPa.m<sup>1/2</sup>. Ils dépendent bien évidemment de la géométrie au sens large (de l'échantillon et de la fissure) et du chargement appliqué et leur forme générale peut être exprimée par :

$$f(l, \xi) \quad K = \sigma \sqrt{\pi l} \quad (I.2)$$

$f$  représente une fonction qui dépend de la longueur de la fissure  $l$  et de la « géométrie » de l'éprouvette  $\xi$ .

Les facteurs d'intensité de contrainte sont des paramètres clés de la mécanique linéaire de la rupture. Le champ de contraintes en pointe de fissure s'exprime directement en fonction de ces facteurs (voir équation (1-1)). Irwin (Irwin, 1957) propose en 1957 un critère de propagation de fissure en mode I en supposant l'existence d'une valeur critique appelée ténacité du matériau  $K_{IC}$ , au-delà de laquelle, la fissure se propage. On peut généraliser ce critère pour tous les modes de propagation :

$$\begin{cases} k_{\alpha} < k_{\alpha c} \Rightarrow i = 0, \\ k_{\alpha} = k_{\alpha c} \Rightarrow i > 0, \end{cases} \quad \alpha = I, II, III \quad (I.3)$$

On remarque que les ténacités  $K_{\alpha c}$  sont différentes des facteurs d'intensité de contrainte  $K_{\alpha}$

Ce sont des grandeurs intrinsèques au matériau. Elles sont indépendantes de la géométrie de l'éprouvette. Plusieurs méthodes, issues des travaux de Williams, Muskhelishvili [15] permettent d'estimer ces paramètres.

La limitation principale de cette approche est la singularité de contrainte en fond de fissure. En effet, dans l'équation (1-1), la contrainte tend vers l'infini lorsque  $r$  tend vers 0. il ne peut en être ainsi dans la réalité, et d'autres mécanismes apparaissent au voisinage de la fissure (plastification, propagation de la fissure).

### II.1.2. Bilan énergétique de Griffith

L'approche proposée par Griffith [16], permet de définir un critère énergétique qui caractérise la propagation ou la non-propagation de fissures. Il se place lui aussi dans le cadre des hypothèses de la mécanique linéaire de la rupture (élasticité linéaire isotrope, HPP, quasi\_stativité).

On considère un corps élastique contenant une fissure comme un système thermodynamiquement réversible. En supposant l'existence d'une densité linéique d'énergie  $\mathcal{G}$  qui est créée par l'avancement de la fissure, on peut exprimer l'énergie totale du système  $E_{tot}(l)$  par cette densité d'énergie et l'énergie potentielle mécanique  $P(l)$  en fonction de la longueur de la fissure  $l$ .

$$E_{tot}(l)=p(l)+2\gamma l \quad (1.4)$$

ou  $P(l)$  représente l'énergie potentielle du système, et  $l$  représente la longueur de la fissure. La quantité  $2\gamma l$  est l'énergie relative à la création des deux lèvres de la fissure.

La fissure avance d'une quantité  $\Delta l$  si les énergies totales du système avant et après la propagation de la fissure vérifient l'inégalité  $E_{tot}(l+\Delta l) < E_{tot}(l)$ . on a donc

$$p(l+\Delta l)+ 2\gamma(l+\Delta l) \leq p(l)+2\gamma l \quad (1.5)$$

En définissant le taux de restitution d'énergie  $G = -\frac{\partial p}{\partial l}$ , on obtient un critère énergétique de propagation de la fissure à partir de l'équation (1-5) :

$$\begin{cases} G < 2\gamma \Rightarrow \dot{l} = 0 \\ G \geq 2\gamma \Rightarrow \dot{l} > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

Ce critère est établi d'un point de vue énergétique. Il ne fait pas intervenir l'expression des contraintes, ni la singularité de la contrainte en pointe de fissure. Par contre, cette approche globale n'est valable que dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture. La propagation de la fissure est étudiée comme un processus thermodynamique réversible. Comme pour l'approche en contrainte, l'effet de phénomènes irréversibles n'est pas pris en compte. Pour résoudre ce problème, la mécanique non-linéaire de la rupture est développée.

### **II.1.3. Formule d'Irwin**

Deux critères de propagation de la fissure sont disponibles : l'un d'un point de vue local (approche en contrainte) et l'autre d'un point de vue global (approche énergétique).

Dans le cadre des hypothèses proposées, il existe un lien entre ces deux approches. La formule d'Irwin, proposée en 1960 [07], décrit la relation entre les facteurs d'intensité des

contraintes en pointe de fissure et le taux de restitution d'énergie associé à une propagation de la fissure dans la direction de la pointe de fissure :

$$G = \begin{cases} \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1-\nu}{E} K_{III}^2 & \text{cas de deformation plane} \\ \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1-\nu}{E} K_{III}^2 & \text{cas de contrainte plane} \end{cases} \quad (I.7)$$

ou  $\nu$  est le coefficient de poisson et  $E$  représente le module de Young

Contrairement à un trou macroscopique dans une plaque semi-infinie, le rayon de la pointe d'une fissure est infiniment petit. Cette particularité géométrique du défaut rend inadéquate l'utilisation du facteur de concentration de contrainte  $F$  pour l'analyse des contraintes près du fond de la fissure. En effet, il existe une singularité de contrainte,  $k \rightarrow \infty$ , à la pointe d'une fissure. La courbe pointillée de la Figure I.3 présente la distribution de la composante de contrainte  $\sigma_{yy}$  près du fond de fissure.  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées cylindriques relatives à la pointe de la fissure [17].

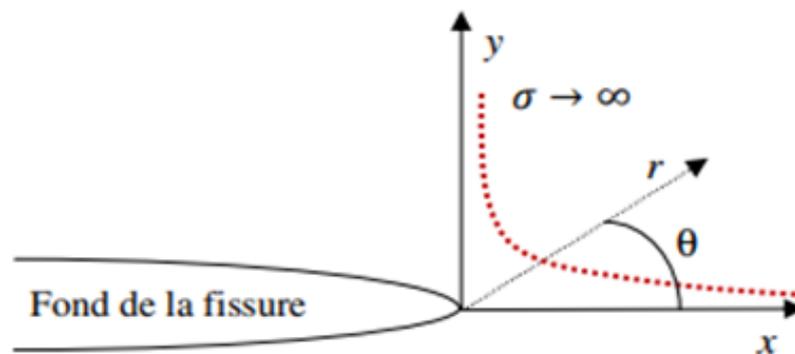


Figure 1.3: Singularité en fond de fissure

Les mécaniciens du 20<sup>ème</sup> siècle ont dû attendre la venue des travaux de Griffith [18] pour analyser les problèmes de plaques fissurées. Il fut le premier à considérer la notion d'équilibre énergétique entre les surfaces produites par la propagation d'un défaut et le changement d'énergie potentielle du corps fissuré. Par la suite, les travaux d'Irwin [19] ont été marquants dans le domaine de la mécanique de la rupture, lorsque celui-ci, à l'aide des

travaux de Westergaard en 1939, a quantifié le champ de contrainte à proximité du fond de fissure. Cette quantité, le facteur d'intensité de contrainte  $K$ , attribue une valeur à la restrictions du défaut en fond de fissure. Il devient donc possible de comparer cette sévérité à la ténacité du matériau  $K_{IC}$ , une quantité intrinsèque au matériau.

L'équation (1-1) provient d'un développement en série proposé par Williams (Williams, 1957) [20] et présente la définition du tenseur des contraintes en fond de fissure:

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta_{ij}) + T\delta_{1j}\delta_{1j} + o\left(r^{\frac{1}{2}}\right) + \dots \quad (I.8)$$

Où  $\sigma_{ij}$  représente les composantes de la matrice des contraintes,  $K$  le facteur d'intensité de contrainte,  $T$  la contrainte uniforme ou communément appelée T-Stress,  $\delta_{ij}$  le delta de Kronecker et  $O$  l'un des termes d'ordres supérieurs [ 17].

### **III. La fissuration**

La fissuration est le résultat de l'endommagement local des plans cristallographiques provoqué, généralement, par une sollicitation mécanique répétée. Malgré le fait que la contrainte maximale ne dépasse pas la contrainte d'écoulement du matériau,  $\sigma_{ys}$  il se crée au niveau microscopique des déformations plastiques permanentes.

Ces dernières se traduisent par une scission des plans cristallographiques menant à une décohésion du grain. Suite à cette décohésion, des vallées sont produites d'où peuvent s'amorcer les fissures (Forsyth, P.J.E., 1957; Wood, 1958).

Lorsqu'une fissure est amorcée, deux options sont envisageables. Soit elle progresse ou elle cesse d'avancer.

Si les conditions de chargements nécessaires à l'amorçage sont maintenues, certaines fissures vont se propager à un rythme croissant jusqu'à ce que la longueur du défaut atteigne la valeur critique,  $a_c$ , menant à la rupture de la pièce. Dans le cas d'un chargement de type déplacement imposé, il est possible que la fissure arrête sa progression puisque

l'augmentation de l'énergie potentielle du corps ne suffit plus à surpasser l'énergie de rupture,  $R_{rup}$  [17]

### III.1. Étude d'un milieu élastique fissuré

Dans un milieu élastique fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones (Figure 1.4) :

- Zone 1 : La zone d'élaboration : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) à la pointe de fissure ;
- Zone 2 : La zone singulière : dans cette zone, le champ de contrainte présente une singularité en  $r^{-1/2}$  ;
- Zone 3 : La zone des champs lointains : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement. [21]

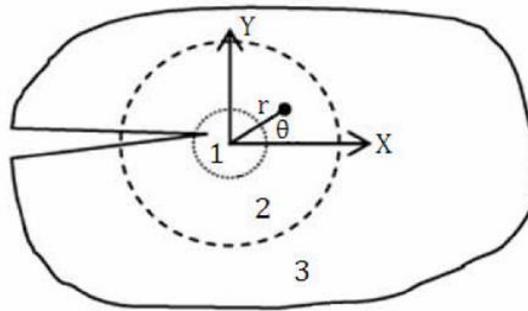


Figure 1.4 : Les zones de champs mécaniques

C'est la singularité d'ordre  $-1/2$  dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure. Cette solution n'est malheureusement pas physiquement réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure sont « écrêtées » par la plasticité (Figure 1.5) .

De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, Une partie de l'énergie est dissipée (phénomène

irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

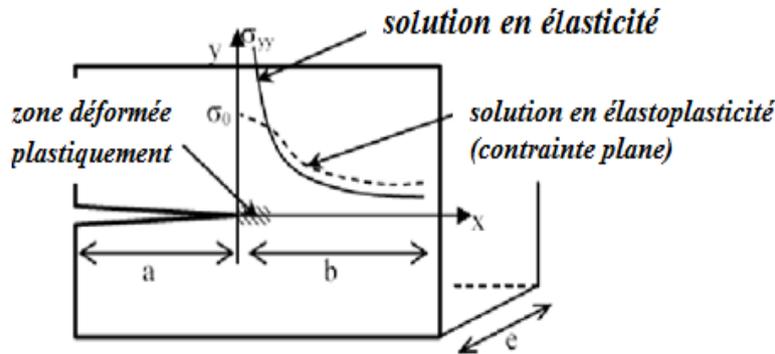


Figure I.5 : Plasticité en pointe de fissure

### III.1.1. Forme et taille de la zone plastifiée

Plusieurs auteurs ont tenté d'évaluer la forme et la taille de la zone plastifiée en bout de fissure en se basant sur les critères classiques de l'élasticité ou par un calcul par éléments finis [22].

Les équations de Westergaard obtenues dans le cadre de l'élasticité, et définissant l'état de contraintes au voisinage immédiat du prolongement de la fissure dans le mode I de sollicitation, font apparaître une singularité de contrainte. Lorsque « r » tend vers zéro, cette singularité se traduit pour les métaux ductiles par l'existence d'une zone plastifiée en fond de fissure. On peut donc donner une estimation simple de la taille de cette zone plastifiée.

En contrainte plane,  $\sigma_z$  est nul et puisque  $\sigma_y$  n'intervient pas, la seule composante active est  $\sigma_x$ .

Pour  $\theta = 0$  on a :

$$\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.9)$$

Au cours de la traction,  $\sigma_x$  atteindra localement la limite d'élasticité ce qui provoque une plastification au fond de la fissure dans une zone telle que :

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.10)$$

$$\text{Soit} \quad r = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_Y^2} \quad \text{ou} \quad r = \frac{K_I^2}{2\pi Re^2} \quad (1.11)$$

Lorsque la fissure se propage, cette zone plastifiée génère un sillage plastique en arrière du fond de la fissure. On obtient une enclave plastique au sein d'un milieu élastique

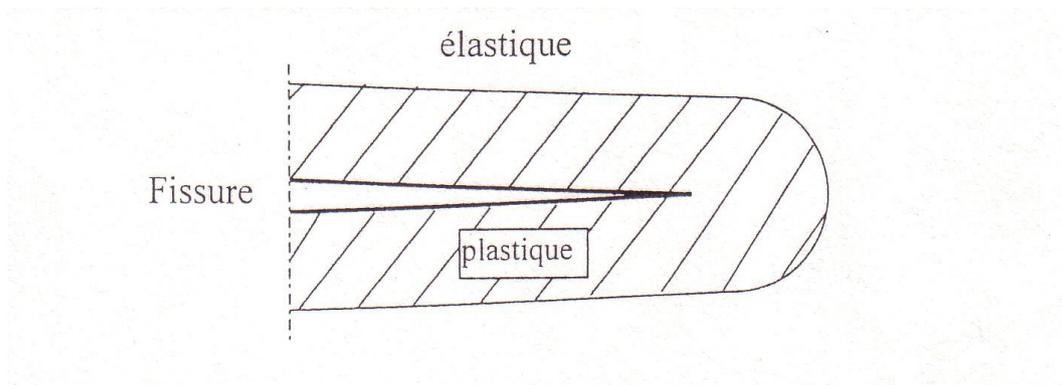


Figure 1.6: Enclave plastique entourant la fissure

### III.1.1.1. Analyse d'Irwin [22]

Le modèle où l'analyse d'Irwin s'applique aux conditions de contrainte plane, pour définir le rayon ( $r$ ) d'une zone plastifiée à fond de fissure et dans le mode I, Irwin suppose que le profil des contraintes élastiques, hors de cette zone plastifiée est le même que l'on détermine dans l'analyse purement élastique. et si la taille de cette zone demeure assez petite elle n'a pour effet que de décaler la distribution singulière des contraintes d'une quantité ( $r_y$ ) appelée correction d'Irwin.

Pour déterminer la zone plastifiée, Irwin [23] considère l'existence d'une fissure fictive de profondeur  $(a + r_y)$ , ( $a$  est la longueur de la fissure), et considère aussi que la forme de la

zone plastifiée de dimension  $R$  est circulaire, lorsque la contrainte normale est égale à la limite d'élasticité  $R_e$ . figure 1.7.

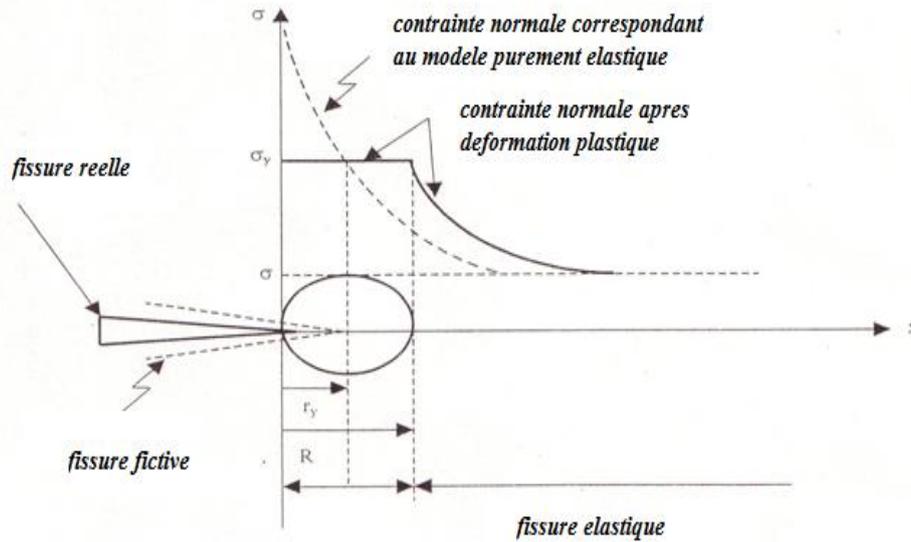


Figure 1.7 : Forme de la zone déformée plastiquement (Modèle d'Irwin) [23]

On montre facilement que l'équilibre des contraintes au fond de la fissure conduit à :

$$R = 2r_y \quad (1.12)$$

$r_y$ : est déterminé à partir de l'équilibre des efforts à travers le plan de la fissure.

Cette contrainte excède la limite d'écoulement plastique  $\sigma_f$ , Soit  $R_e$  en contrainte plane,  $\sqrt{3}R_e$  en déformation plane,  $R_e$  étant la contrainte d'écoulement à une distance ( $r_y$ ) de la pointe de fissure donné par :

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{K_I}{\sigma_f} \right]^2 \quad (1.13)$$

$$\text{Ainsi} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_y = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{K_I}{R_e} \right]^2 \quad (\text{en contrainte plane}) \quad (1.14) \\ r_y = \frac{1}{6\pi} \left[ \frac{K_I}{R_e} \right]^2 \quad (\text{en déformation plane}) \quad (1.15) \end{array} \right.$$

Ces deux dernières relations montrent que la zone plastifiée est plus petite en déformations planes qu'en contraintes planes.

Le modèle d'Irwin [23] est bien que très approximatif en ce qui concerne la taille et la forme circulaire de la zone plastifiée, et reste un moyen pratique pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte. Il montre que la zone plastique dépend du coefficient de consolidation plastique et du mode de sollicitation.

Mc Clintock et Irwin, proposent deux autres critères pour la taille de la zone plastifiée dans le cas où l'état de déformations planes n'est pas atteint.

$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 = \frac{1}{3} r_1 = \frac{1}{6\pi} \left[ \frac{K}{R_e} \right]^2 \quad (1.16) \\ r_3 = \frac{2}{3} r_1 = \frac{1}{3\pi} \left[ \frac{K}{R_e} \right]^2 \quad (1.17) \end{array} \right.$$

$r_1$ : est donné par la relation (I-15).

### **III.1.1.2. Analyse de Rice :**

actuellement, le modèle de Rice [24] est le plus crédible et le plus proche de la réalité.

Selon Rice, si la conservation de la charge totale consiste à augmenter la taille de la zone plastifiée, cette dernière est déterminée par la relation suivante:

$$r_2 = r_1 \quad (1.18)$$

$r_1$ : est donné par la relation (I-11).

$$r_2 = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{K}{R_e} \right]^2 \quad (1.19)$$

Pour la détermination de la taille de la zone plastifiée formée lors de la montée en charge ou traction (zone plastifiée monotone Z.P.M), Rice propose la relation suivante [25] :

$$r_p = \alpha \left( \frac{K}{R_e} \right) \quad (1.20)$$

$\alpha$  : Coefficient adimensionnel.

$R_e$  : Limite d'élasticité du matériau en  $[\text{MPa} \sqrt{m}]$

Pour la taille de la zone plastifiée formée lors de la décharge, ou la fermeture (zone plastifiée cyclique Z.P.C) déterminée par une méthode de superposition figure (1.8), Rice [24] propose la relation donnée par :

$$r_c = \alpha \left( \frac{\Delta k}{2R_e} \right)^2 \quad (1.21)$$

$\Delta K$  : Amplitude du facteur d'intensité de contrainte en  $[\text{MPa} \sqrt{m}]$ .

Donc soit une zone plastifiée cyclique 4 fois plus petite que la zone plastifiée formée lors de la montée, lorsque  $K_{\max} = \Delta K$  (pour  $R=0$ ).

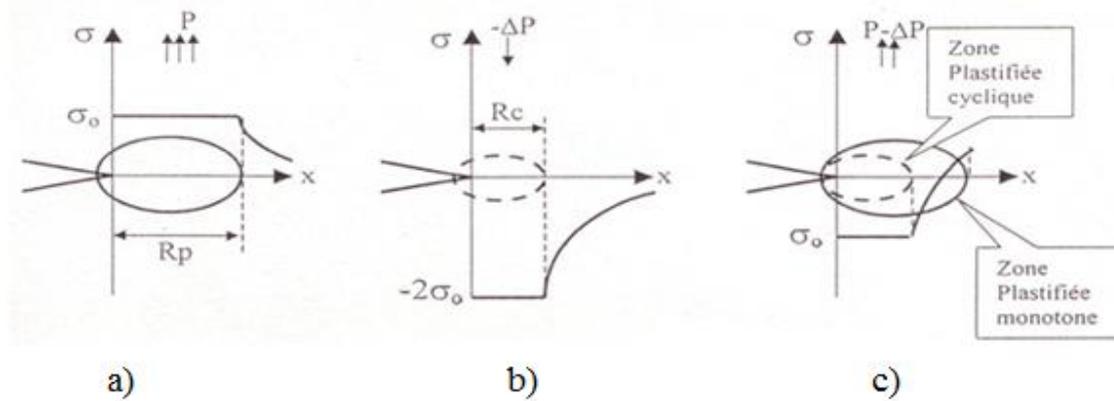


Figure 1.8 : Zones plastifiées monotone et cyclique (Selon Rice) [23].

En examinant les conditions de plastification en mode I et en déformations planes pour des angles différents de Zéro, l'analyse de Rice [23] concernant l'étendue de la zone plastifiées a permis de montrer que la plastification se développe principalement de part et d'autre et en avant de la fissure, mais dans une certaine mesure aussi en arrière de la fissure, donc une forme de deux ailes Figure I.9 ; cette analyse est basée sur un calcul aux éléments finis.

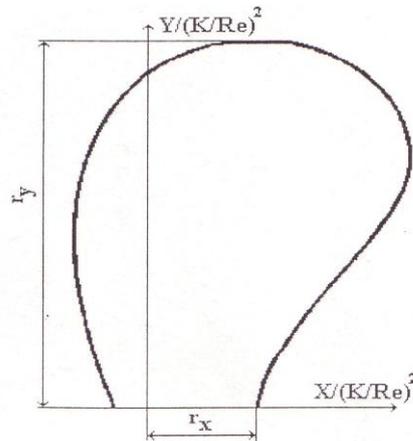


Figure 1.9 : Forme de la zone plastifiée en bout de fissure (Modèle de Rice)

Les deux ailes de la zone plastifiée peuvent être déterminées par les coordonnées ( $r_x$ ) et ( $r_y$ )

$r_x$  : étant la dimension dans la direction de fissuration en [mm] :

$$r_x = 0,0036 \left( \frac{K_I}{R_e} \right)^2 \quad (1.22)$$

$r_y$  : étant la dimension dans la direction perpendiculaire en [mm] :

$$r_y = 0,15 \left( \frac{K_I}{R_e} \right)^2 \quad (1.23)$$

Rice , montre que ces dimensions sont très proches de celles mesurées expérimentalement et que la zone plastifiée est légèrement affectée par le taux d'écroutissage .

Rice et Levy [13], montrent par calcul pour éléments finis que la zone plastifiée est inclinée en avant de la fissure.

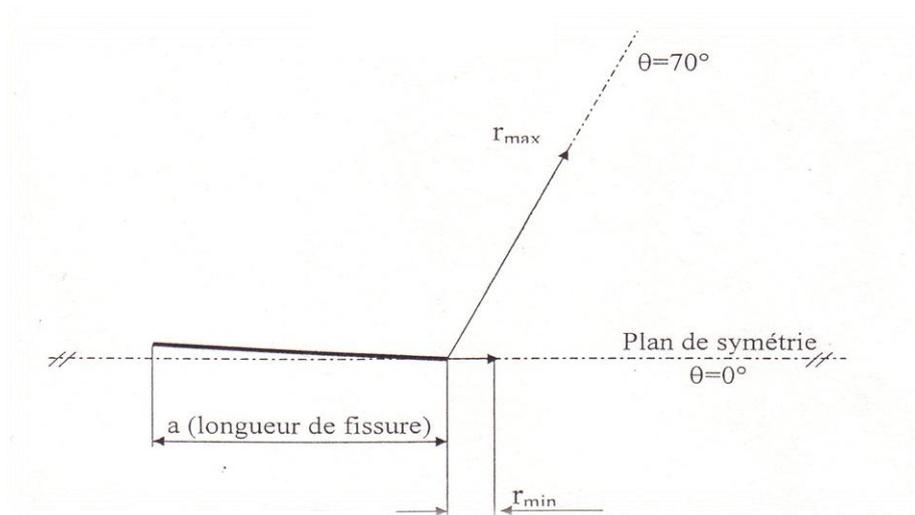


Figure I.10 : Forme de la zone plastifiée (calcul par éléments finis)

Taille maximale atteinte pour  $\theta = 70^\circ$ .

Taille minimale atteinte pour  $\theta = 0^\circ$ .

Tracy estime la taille de la zone plastique à :

$$r_y = \alpha \left( \frac{k_I}{R_e} \right)^2 \quad (1.24)$$

Avec  $\left\{ \begin{array}{l} \alpha \approx 0,04 \text{ pour } \theta = 0^\circ \\ \alpha \approx 0,14 \text{ pour } \theta = 90^\circ \end{array} \right.$

Cette estimation est basée sur l'influence du coefficient de consolidation du matériau sur la plastification en tête de fissure.

### III.1.1.3. Analyse de Dugdale

Pour l'estimation de la taille de la zone plastifiée Dugdale [26], propose un modèle calculé en contrainte plane. Pour cela il considère dans une plaque plane infinie une fissure soumise à une contrainte uniforme à l'infini  $\sigma_\infty$ , configuration d'Inglis [27]. Selon cet auteur la plastification se fait le long d'une tranche étroite et à une longueur R de part et d'autre de la fissure.

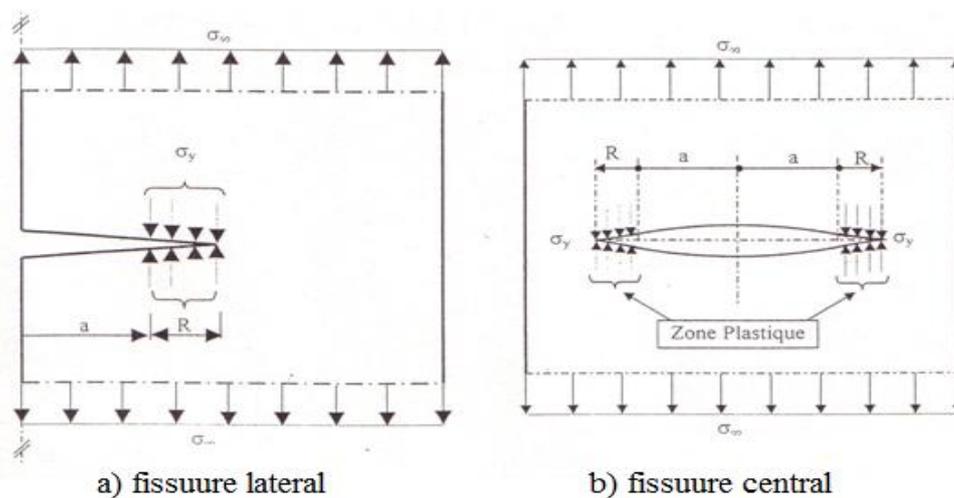


Figure I.11 : Distribution des champs de contraintes agissant sur une fissure (Selon Dugdale)

Les forces intérieures d'intensité  $\sigma_y(R_e)$  agissent tout au long de la longueur R, cette fissure est soumise au champ de contrainte  $\sigma_\infty$  à l'infini et au champ  $\sigma_y$  sur la longueur R. Cette configuration provoque l'introduction de deux facteurs d'intensité de contraintes qui s'ajoutent :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_I = \sigma \sqrt{\pi a} \\ k_{II} = \alpha \sigma_y \sqrt{\pi R} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_I = \sigma \sqrt{\pi a} \\ k_{II} = \alpha \sigma_y \sqrt{\pi R} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Avec 
$$\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

Dans le cas où  $R \ll a$  (plastification confinée), le problème revient à calculer R de façon à supprimer la singularité élastique à  $(1/\sqrt{R})$ , tout en superposant les deux solutions élastiques.

À partir des deux relations (1.25) et (1.26) on détermine la longueur R de la tranche étroite plastifiée.

$$R = \frac{\pi}{8} \left[ \frac{K}{R_e} \right]^2 \quad (1.27)$$

Il est à noter que le facteur  $(\pi/8)$  est très proche du facteur  $(1/\pi)$  donné par la relation (1.19) de Rice [24].

#### **III.1.1.4. Analyse basée sur les lois d'écoulements**

Si on analyse une zone plastique le long de l'épaisseur d'une éprouvette, on remarque que cette zone se trouve insérée dans une matrice élastique qui restreint les possibilités d'écoulement plastique (c'est l'effet de confinement plastique).

Cet effet s'oppose à la contraction transversale et diminue du fait de la surface libre ce qui conduit à l'existence de deux états de sollicitations différents sur l'éprouvette :

1. Déformation plane (au cœur de l'éprouvette)
2. Contrainte plane (en surface de l'éprouvette).

Ce qui fait que la zone plastifiée doit décroître graduellement depuis la surface jusqu'au cœur, comme montre la figure I.12.

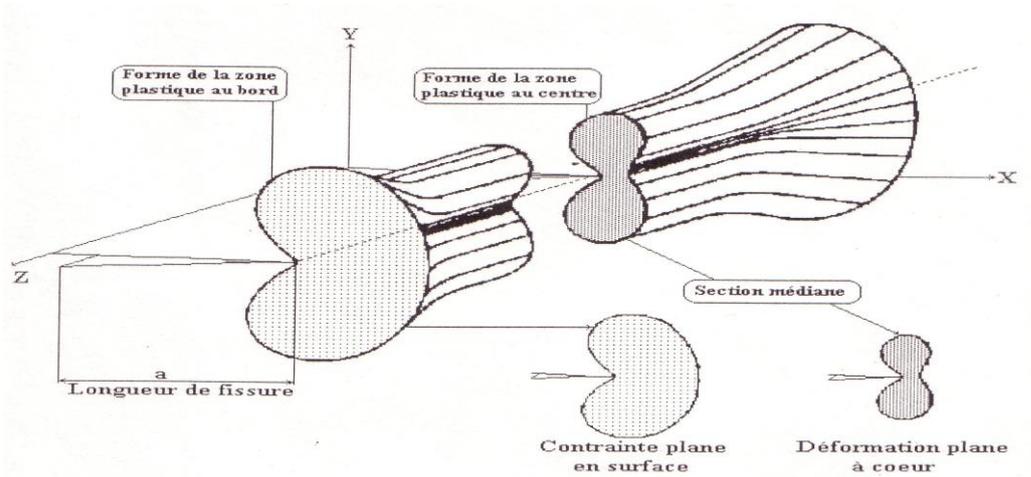


Figure 1.12 : Zone plastique en bout de fissure le long de l'épaisseur d'une éprouvette.

### a) Critère de Von Mises

Il permet la détermination du seuil plastique. Selon ce critère l'énergie déviatrice provoque la plasticité. Prenons comme état initial l'élasticité linéaire, en milieu bidimensionnel en mode I, pour  $\sigma = R_e$ . Le rayon de la zone plastifiée est donné par :

$$r_1 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{K_I}{R_e} \right]^2 \quad (1.28)$$

Ainsi, l'utilisation de ce critère conduit aux relations suivantes :

#### - Etat de contraintes planes

$$r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_e} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( 1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.29)$$

$$r_x = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K}{R_e} \right)^2 \quad (\text{Pour } \theta = 0^\circ) \quad (1.30)$$

$$\text{et } r_y = \frac{5}{8\pi} \left( \frac{K}{R_e} \right)^2 \quad (\text{Pour } \theta = \frac{\pi}{2}) \quad (1.31)$$

$$\frac{r}{r_l} = \cos^2 \frac{2\theta}{2} \left( 1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.32)$$

**- Etat de déformations planes**

$$r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_l}{R_e} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( (1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{2\theta}{2} \right) \quad (1.33)$$

$$r_x = \frac{(1-2\nu)^2}{2\pi} \left( \frac{K}{R_e} \right)^2 \quad (\text{Pour } \theta = 0^\circ) \quad (1.34)$$

$$\text{Et } r_y = \frac{1-3\nu + \frac{3}{2}}{4\pi} \left( \frac{K}{R_e} \right)^2 \quad (\text{Pour } \theta = \frac{\pi}{2}) \quad (1.35)$$

$$\frac{r}{r_l} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( (1-2\nu)^2 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.36)$$

**b) Critère de Tresca**

**- Etat de contraintes planes**

$$r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_l}{R_e} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.37)$$

$$\frac{r}{r_l} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.38)$$

- *Etat de déformations planes :*

$$r = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_e} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( 1 - 2\nu + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \quad (1.39)$$

$$\frac{r}{r_I} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left( (1 - 2\nu) + \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \quad (1.40)$$

Les contours des différentes relations obtenues sont représentés sur la figure I.13

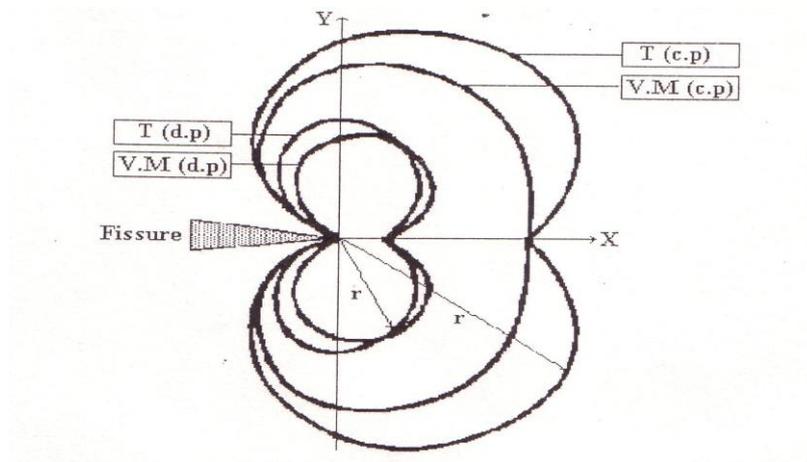


Figure 1.13 : Limite des zones plastifiées (Critères de Von Mises et Tresca )

- Le contour de la relation (I-32) est désigné par (VM-CP).
- Le contour de la relation (I-36) est désigné par (VM-DP).
- Le contour de la relation (1-38) est désigné par (T-CP).
- Le contour de la relation (1-40) est désigné par (T-DP).

Dans le cas d'une éprouvette mince (plaque) on a :

- ✚ En surface des conditions de contraintes planes  $\sigma_{z=} = 0$
- ✚ A l'intérieur des conditions de déformations planes  $\varepsilon_{z=} = 0$

L'estimation de l'évolution de la forme de la zone plastifiée en tête de fissure le long de l'épaisseur est facile à déterminer. Pour un matériau soumis au critère de Von Mises, Elber a montré que la contrainte hydrostatique peut être égale à trois fois la limite élastique uniaxiale. Cette contrainte peut être élevée pour un matériau qui se consolide.

### III.2. Facteur d'intensité des contraintes

Lorsqu'un corps fissuré est sollicité par un champ de force il se produit au voisinage de la fissure une très grande concentration de contraintes, dans ces conditions qui représentent d'un point de vue pratique la réalité des pièces et structures. Les théories de l'élasticité permettent d'exprimer la contrainte proche du front de fissure par une série de Taylor en coordonnées polaires[28]:

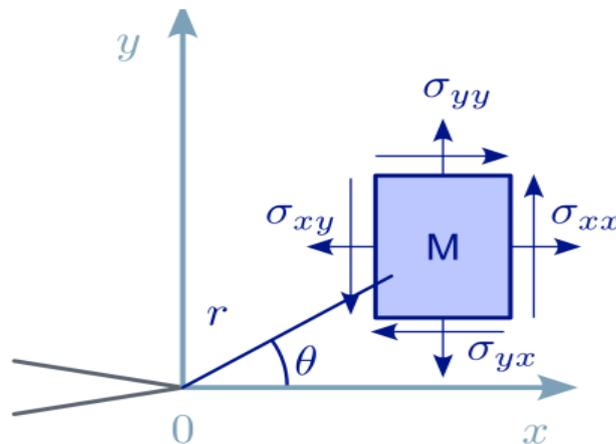


Figure 1.14 : Détermination des axes  $(x,y)$  et des coordonnées  $(r,\theta)$  au voisinage de l'extrémité d'une fissure

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta_{ij}) + \underbrace{\dots + \dots + \dots}_{\text{négligeable}} \quad (I.41)$$

$K_I$  représente le facteur d'intensité de contraintes en mode I définis par *Irwin* .

*Irwin* a cherché une expression pouvant définir le champ de contraintes au voisinage de la fissure en tenant compte de la zone plastique par l'accroissement de la fissure. Il suggère que la fissure devient instable et se propage lorsque le facteur d'intensité de contraintes KI atteint une valeur critique KIC appelée ténacité qui caractérise quantitativement la résistance d'un matériau à la propagation brutale d'une fissure en mode I. Il énonça ainsi le critère de contrainte par la relation:

$$K_I = c\sigma\sqrt{\pi a} \quad (I.42)$$

$C$  : Représente un coefficient de forme, c'est une fonction géométrique de l'éprouvette et de la longueur de fissure, il est donné pour les principales pièces par des tables [29].

$$c = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{w}\right) + 10.55\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (I.43)$$

### III.2.1. Détermination expérimentale de KIC :

L'essai consiste à solliciter en traction ou en flexion des éprouvettes géométriquement identiques comprenant des fissures de longueurs différentes, les charges de rupture relevées serviront au calcul de KIC. Dans la mesure ou l'on veut représenter graphiquement la courbe qui traduit l'évolution de KIC et sera en fonction de a/w.

### III.2.2. Calcul numérique des facteurs d'intensité de contraintes FIC

La modélisation d'un solide fissuré par la méthode des éléments finis obéit aux principes généraux développés. Il y a toutefois des considérations spécifiques importantes, qu'il convient de souligner.

En mécanique linéaire de la rupture, une fissure est modélisée, pour les problèmes plans, par une ligne F à travers laquelle le champ de déplacement est discontinu. Un modèle construit par la méthode des éléments finis devra donc reproduire cette condition[21].

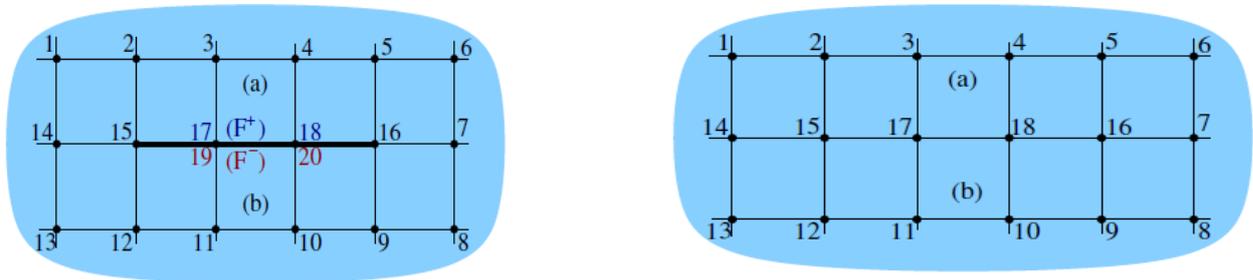


Figure 1.15: Maillage avec « double nœuds »

Les fonctions de base de la méthode des éléments finis sont par construction continues sur l'ensemble du domaine approché  $\Omega_h$ . Par conséquent, une fissure ne pourra pas traverser des éléments; la courbe  $F$  devra coïncider avec des frontières d'éléments finis. De plus, il faut traiter les nœuds situés sur cette courbe comme des « nœuds doubles », comme suggéré par la figure 1.15 ; cela revient à traiter le maillage du solide fissuré comme la situation limite du maillage d'un solide contenant une cavité infiniment mince. Les nœuds, éventuellement géométriquement confondus, relatifs aux deux lèvres de la fissure doivent porter des numéros distincts. Les fonctions de base construites sur un tel maillage sont alors automatiquement discontinues à travers  $F$ .

Le caractère singulier en pointe de fissure de la solution élastique en déformation et en contrainte modifie les propriétés de convergence de la solution approchée vers la solution exacte. Alors, la modélisation d'un solide fissuré nécessite ainsi, pour obtenir une précision raisonnable, des aménagements spécifiques, tels que :

- Maillage très raffiné au voisinage de la pointe de fissure, afin d'améliorer la représentation de champs par les fonctions de base usuelles de la méthode des éléments finis .
- Création de nouveaux éléments finis, spécialement adaptés à la prise en compte de champs de déformations singuliers en  $1/\sqrt{r}$  au voisinage de la pointe de fissure.

La discontinuité (vectorielle) de déplacement à la traversée de la fissure et au voisinage de la pointe

est donnée par l'expression asymptotique

$$\|\hat{\xi}\| = \frac{4}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ (1-\nu) [K_I e_1 + K_{II} e_2] + K_{III} e_3 \right\} + o(r) \quad (1.44)$$

Dans ces expressions asymptotiques, la notation  $O(r^a)$  indique, conformément à l'usage, des termes non spécifiés d'ordre  $r^a$  pour  $r$  petit.

### III.2.3. Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes par extrapolation

C'est la méthode la plus simple à mettre en œuvre. Elle consiste à exploiter directement les déplacements nodaux situés aux nœuds les plus proches d'une pointe de fissure, en les comparant à l'expression asymptotique (I. 44) du saut de déplacement à travers la fissure.

Par exemple (avec les notations de la figure ( 1.16), prenant sur les lèvres  $F^\pm_h$  de la fissure les nœuds  $B^+$  et  $B^-$  les plus proches de la pointe A, la formule (I.44) suggère d'écrire [21] :

$$K_I \approx \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \|\xi(B)\|_{\underline{t}}, \quad K_{II} \approx \frac{E}{8(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \|\xi(B)\|_{\underline{n}} \quad (1.45)$$

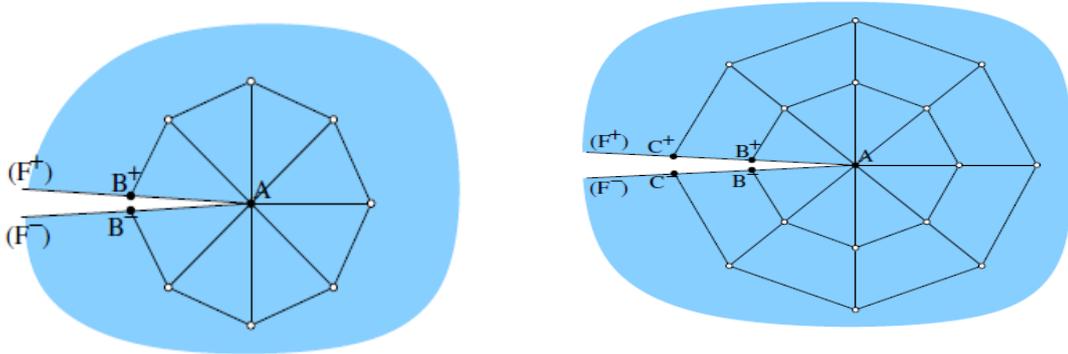


Figure 1.16: Notations pour le calcul de  $K_I$ ,  $K_{II}$  par extrapolation au nœud double ( $B^+$ ,  $B^-$ )

Où  $\underline{t}$  et  $\underline{n}$  sont les directions tangente et normale à  $F$  en A,  $B$  est le lieu géométrique commun à  $B^+$  et  $B^-$  et  $d$  est la distance de  $B$  à  $A$ . Ces formules nécessitent en pratique un maillage très raffiné au voisinage de la pointe de fissure.

Une  $\|\hat{\xi}\|$  variante de cette approche consiste à utiliser plusieurs nœuds doubles successifs à partir de la pointe de fissure, et de considérer une approximation du saut de déplacement de la forme

$$\|\hat{\xi}\| = \sqrt{r}[\alpha t + \beta n]$$

Les constantes  $\|\hat{\xi}\|$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , sont alors recherchées par une méthode de moindres carrés, de façon à ce que la fonction s'approche au mieux des valeurs de saut de déplacement aux nœuds doubles. Les facteurs  $K_I$ ,  $K_{II}$  sont alors approchés par les valeurs obtenues par identification avec le terme principal de la relation (I. 44):

$$K_I \approx \frac{\sqrt{2\pi} E}{8(1-\nu^2)} \alpha \quad K_{II} \approx \frac{\sqrt{2\pi} E}{8(1-\nu^2)} \beta \quad (1.46)$$

### **III.3. Mesure de ténacité**

La ténacité est une grandeur qui caractérise la résistance à la propagation brutale de fissure d'un matériau. Lors de l'application d'une contrainte sur un matériau fissuré, deux mécanismes sont en compétition : l'accommodation de la contrainte par la déformation plastique et la propagation de la fissure par déchirement. La taille de la zone plastique est minimale en déformation plane, qui constitue ainsi le mode le plus pénalisant et dans lequel les mesures doivent être effectuées. Le principe de l'essai consiste à mesurer la valeur du facteur d'intensité de contraintes  $K_c$  à rupture (facteur critique d'intensité de contraintes). Ce facteur d'intensité de contrainte est présent dans les équations de la mécanique de la rupture et dépend des conditions macroscopiques du chargement. Une première approximation généralement satisfaisante pour une mesure plane de longueur  $2a$  dans une plaque de grandes dimensions chargée perpendiculairement à son plan par une contrainte  $\sigma$  est  $K = \sigma \sqrt{\pi a}$  (l'unité de  $K$  est le  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ), avec  $a$  la longueur de la fissure et  $\sigma$  la contrainte à l'infini. On voit clairement que plus un matériau résiste à la rupture, donc plus il faut appliquer une contrainte élevée pour le rompre, plus son KIC (où I dénote le mode de rupture et C signifie critique) sera élevé. En outre, il existe une relation linéaire entre  $K$  et l'ouverture de la

fissure. L'essai consiste alors à augmenter progressivement la charge sur une éprouvette pré fissurée, jusqu'à rupture [30].

#### **III.4. Taux de restitution d'énergie :**

En se basant sur des considérations thermodynamiques Griffith a mis en évidence le fait que la rupture est un phénomène consommateur d'énergie, car pour augmenter la surface d'une fissure dans un matériau il faut fournir un certain travail. Le bilan énergétique du système composé des forces extérieures et du corps fissuré s'écrit [31]:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{dU}{dA} + \frac{dT}{dA}$$

W : Travail des forces extérieures U : l'énergie élastique stockée dans les matériaux

A : surface de la fissure

T : la somme de toutes les énergies dissipées de façon irréversible L'énergie cinétique étant supposée nulle (situation quasi-statique). De cette relation découle l'énergie nécessaire à la création de surface (G) :

$$\frac{d}{dA}(W - V) = \frac{dT}{dA} = G \quad (I.47)$$

Elle est appelée taux de restitution d'énergie. L'amorçage de la fissure se caractérise par une valeur critique du taux de restitution d'énergie notée  $G_{IC}$  d'où le critère de rupture:

$$G \geq G_{IC} \quad (I.48)$$

##### **III.4.1. Méthode des compliances pour la mesure de $G_{IC}$ [28] :**

Pour un corps fissuré, le taux du restitution d'énergie par unité de surface est donné par :

$$G = \frac{dU}{dA} \quad (I.49)$$

Sachons que :

U: énergie du système

A: surface de la fissure  $A= B.a$

B: largeur, a : longueur de fissure Ce qui donne:

$$G = \frac{1}{B} \frac{dU}{da} \quad (I. 50)$$

Sur une série d'éprouvettes identiques et fissurées avec différentes longueur de fissures on mesure l'évolution de la charge en fonction du déplacement.

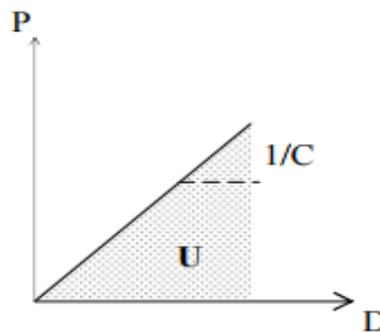


Figure I.17: courbe typique charge \_ déplacement

C: représente la compliance du système,

$$C = \frac{D}{P} \quad (I. 51)$$

Ce qui nous donne une méthode expérimentale basée sur la forme :

$$G = \frac{1}{2} \frac{p^2}{B} \frac{dC}{da} \quad (1. 52)$$

Une fois les compliances de chaque éprouvette calculé, on trace la variation de  $C$  en fonction de  $a$ .

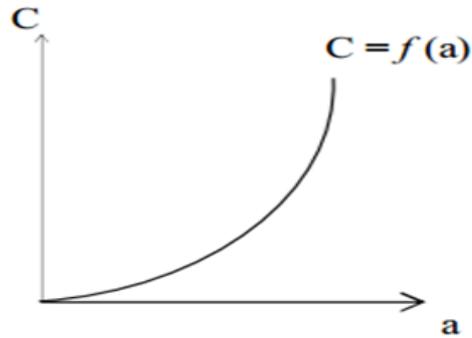


Figure 1.18: Evolution de la compliance en fonction de la longueur de fissure

On détermine par interpolation la relation  $C = F(a)$ , pour aboutir à relation de  $(dC/da)$  ainsi nous obtenons différentes valeurs de  $G$  ce qui va permettre de tracer son évolution en fonction des différentes longueurs de fissures, figure (I.19).

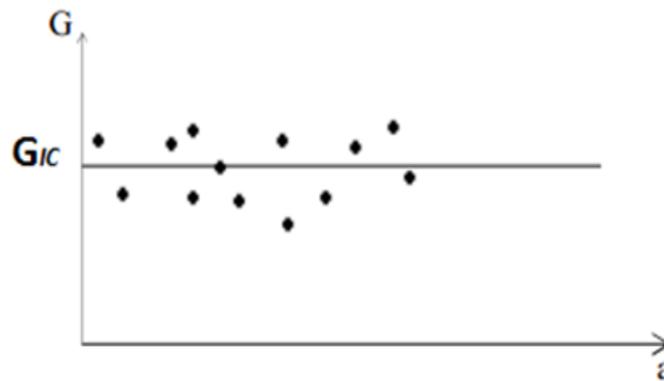


Figure I.19 : Evolution du taux de restitution d'énergie en fonction des longueur de fissure

### III.4.2. Méthode WILLIAMS pour la mesure de GIC:

Le paramètre intrinsèque GIC mesuré en choc des matériaux à été estimé par la méthode de Turner et Williams [32] en utilisant les technique de la mécanique linéaire élastique de la rupture. En cassant en choc des éprouvettes de différentes longueurs d'entailles, on peut tracer la droite  $U = f(B, W, Y)$  :

$$U = G_{IC} \times B \times W \times Y \quad (1.53)$$

On a la pente GIC représente le taux de restitution d'énergie critique du matériau. U est l'énergie perdue par le marteau et Y un facteur de calibration qui a été tabulé par les même auteurs. Il dépend de la profondeur d'entaille, des dimensions de l'éprouvette et de la distance entre appuis comme la Figure (I.20) :

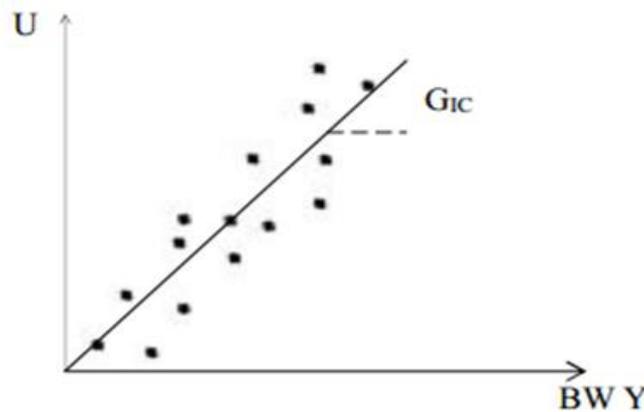


Figure (I.20) : Représentation graphique de l'énergie en fonction de la géométrie

### IV. Mécanique non-linéaire de la rupture

La section précédente a présenté la mécanique linéaire de la rupture. Cette dernière permet d'écrire le champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure en fonction des facteurs d'intensité de contrainte. La mécanique linéaire de la rupture est adaptée pour décrire l'évolution de la fissuration de matériaux fragiles tels que le verre. Ces matériaux possèdent en effet un comportement élastique, et ils rompent de manière brutale. Les hypothèses sous-jacentes à la mécanique linéaire de la rupture peuvent se montrer trop restrictives, notamment dès que l'on rencontre des matériaux élasto-plastiques. La

déformation plastique se localise alors dans une zone située au voisinage du front de fissure. Dans le cas où les dimensions de la zone plastique sont très petites devant les autres dimensions de l'échantillon, il est possible de continuer d'appliquer la mécanique linéaire de la rupture moyennant quelques corrections sur les facteurs d'intensité de contrainte (Irwin, 1962).

Dans les matériaux ductiles, la taille de la zone plastique peut être du même ordre de grandeur que la longueur de la fissure. La mécanique non-linéaire de la rupture est introduite pour proposer des critères de propagation de fissure dans cette situation. Cette dernière permet aussi d'accéder aux champs de contrainte et de déformation au voisinage de la pointe de la fissure. [07]

#### ***IV.1. Extension de la théorie de Griffith***

Les phénomènes décrits par l'approche de Griffith sont réversibles et la dissipation associée est nulle (puisqu'ils sont isothermes et élastiques). Les travaux d'Irwin (Irwin, 1958) et Quelques aspects bibliographiques de la mécanique de la rupture d'Orowan (Orowan, 1955) complètent l'approche de Griffith en y incluant la contribution de la zone plastique qui se développe en fond de fissure. Ils modifient la valeur du taux critique de restitution d'énergie  $G_c$  de l'équation (1-6) pour y ajouter le terme  $R_f$  qui rend compte des énergies dissipées durant le processus de fissuration[33] :

$$G_c = 2\gamma + R_f \quad (1.54)$$

Cette analyse peut être introduite dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles (Suquet, 2003) et (Monerie, 2000). Le second principe de la thermodynamique permet alors d'écrire un critère plus général

$$\begin{cases} G < G_c \Rightarrow \dot{i} = 0 \\ G = G_c \Rightarrow \dot{i} \geq 0 \end{cases} \quad (I.55)$$

Le critère de propagation prend ici la forme d'une égalité car on suppose que l'évolution de la fissure est quasi-statique (l'énergie cinétique est donc nulle).

La dissipation  $R_f$  est négligeable pour les matériaux fragiles. Le critère (1.55) correspond donc bien alors à celui de Griffith donné en équation (1.6). Au contraire, la densité d'énergie  $\gamma$  est très petite devant  $R_f$  pour les matériaux ductiles. Dans ce cas, le taux critique de restitution d'énergie dépend principalement de la dissipation  $R_f$ .

Pour pouvoir manipuler ce critère, il est nécessaire de connaître la valeur de taux de restitution d'énergie  $G$ . Dans la section suivante, on présente une méthode pratique pour déterminer cette grandeur[07].

#### IV.2. Intégrale de Rice (Intégrale $J$ )

Le concept théorique de l'intégrale de Rice  $J$  est initialement introduit par Eshelby (Eshelby, 1956), et développée par Cherepanov (Cherepanov, 1967) puis Rice (Rice, 1968). Cette intégrale curviligne est un moyen mathématique pour estimer le taux de restitution d'énergie. L'intégrale de Rice permet de relier l'approche mécanique « en contrainte » de Williams avec l'approche « énergétique » de Griffith [33] et ses évolutions. Cette intégrale de Rice s'exprime par :

$$J = \int_{\Gamma} \left( \rho w n_1 - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_k \right) ds \quad (I.56)$$

avec:

$w$  est la densité massique d'énergie élastique, et  $\rho$  est la masse volumique.

La Figure 1.21 illustre les autres grandeurs introduites dans l'équation (1-56).

$\Gamma$  est un contour ouvert orienté autour de la fissure,  $\vec{n}$  est la normale sortante à  $\Gamma$  et  $dS$  représente un élément de surface élémentaire sur le contour  $\Gamma$ .

La direction  $\vec{x}$  est colinéaire à la fissure et Le contour se propage dans la direction  $\vec{n}_i$ .

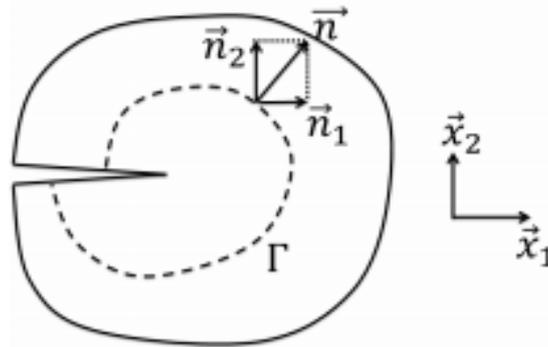


Figure 1-21: Définition des grandeurs introduites dans l'intégrale de Rice (équation (1.56))

L'intégrale de Rice possède la propriété d'être indépendante du contour d'intégration  $\Gamma$  pour un corps élastique soumis à un champ de déformation bidimensionnel, et en l'absence de forces volumiques. On peut donc la calculer aussi bien près de la fissure que sur un contour qui en est éloigné. Cette propriété permet d'obtenir une méthode pratique dans la simulation numérique de type éléments finis. De plus, Budiansky et Rice en 1973 ont montré l'équivalence de cette intégrale avec le taux de restitution d'énergie dans le cas où la fissure se propage de façon rectiligne et que le chargement soumis est constant, soit :

$$J = G \quad (1.57)$$

Cette relation donne un accès simple et rapide pour calculer le taux de la restitution d'énergie sur des matériaux élastiques afin de pouvoir appliquer un critère de propagation des fissures tel que celui donné dans l'équation (1-57). Du fait de ses propriétés, l'intégrale de Rice est particulièrement utilisée en mécanique non-linéaire de la rupture.

### IV.3. Approche classique HRR

Une extension importante de l'intégrale de Rice consiste à prendre en compte des champs de contrainte dans la zone plastique. On étudie ici un matériau qui respecte une loi d'écoulement de type Ramberg-Osgood :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1.58)$$

où  $\alpha$  est une constante du matériau,  $n$  représente le coefficient d'écrouissage,  $\sigma_0$  est la limite élastique et  $\varepsilon_0$  représente la déformation correspondante.

L'approche classique HRR proposée par Hutchinson [34], Rice et Rosengren en 1968 permet de décrire le champ de contrainte en pointe de fissure pour le matériau étudié par l'expression suivante :

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \delta_{ij}(\theta) \quad (I.59)$$

Les variables  $(r, \theta)$  correspondent aux coordonnées polaires centrées sur le fond de la fissure. Les grandeurs  $I_n$  et  $\delta_{ij}$  représentent des fonctions qui dépendent de  $n$  et  $\theta$ . Ici, le rôle de l'intégrale  $J$  est similaire aux facteurs d'intensité de contrainte dans la mécanique linéaire de la rupture.

le champ de contrainte dans la zone plastique est déterminé par l'intégrale de Rice.

La relation entre l'intégrale de Rice  $J$  et les facteurs d'intensité de contrainte  $K$  peut être obtenue en combinant les équations (1.7) et (1.57). On rencontre le même problème que dans une approche locale en contrainte, l'équation (1.59) montre que la contrainte tend vers l'infini au voisinage de la pointe de la fissure.

Ces singularités de contrainte proviennent de la mécanique des milieux continus [07].

## V. Conclusion

dans la mécanique de la rupture il existe deux types principaux de rupture : fragile et ductile. Le passage d'un mécanisme de rupture à l'autre est produit par le changement de température, de la vitesse de chargement ou l'introduction d'une entaille.

l'amorçage d'une rupture se fait obligatoirement sur une concentration locale de contrainte pour pouvoir surmonter la contrainte de cohésion atomique.

l'état local des contraintes en tête du défaut est relié aux efforts extérieurs, et aussi au mode de chargement et à la géométrie de la structure, ce qui impliquera une réponse non intrinsèque au matériau. La ténacité est la capacité d'un matériau à résister à la propagation d'une fissure. Les valeurs de ténacité est aussi une propriété à prendre notamment en

considération lorsque l'on utilise des coefficients de sécurité pour le dimensionnement des structures .

## ***Introduction***

La méthode des éléments finis (FEM) est l'une des outils numériques les plus courants pour trouver les solutions approximatives. Il a été appliqué avec succès dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur pour étudier, modéliser et prédire le comportement de structures par exemple dans les domaines suivants: ingénierie aéronautique et aérospatiale, industrie automobile, ingénierie mécanique, génie civil, biomécanique, sciences des matériaux, etc.

Afin de prévoir la charge de défaillance, ou le comportement post-pic, il est essentiel de disposer d'algorithmes de calcul robustes et stables, capables de traiter l'ensemble d'équations de base. Il existe un certain nombre de cas où la méthode FEM pose des restrictions pour une application efficace .

Le FEM s'appuie sur les propriétés d'approximation des polynômes et nécessite donc des solutions lisses pour obtenir une précision optimale.

Mais, si la solution contient un comportement non lisse , comme des singularités élevés dans les champs de contraintes , des fortes discontinuités dans le champ de déplacement , la méthodologie FEM devient alors coûteuse en calcul pour obtenir une convergence optimale. des fois les contraintes peuvent dépasser la capacité de résistance élastique du matériau. Cela peut entraîner une réponse non élastique des éléments structurels et peut entraîner une défaillance progressive de la structure et nécessite des méthodes précises et efficaces pour modéliser et simuler numériquement le comportement structurel et le type de dégât. Ces processus de défaillance matérielle se manifestent dans les matériaux quasi-fragiles tels que les roches et le béton comme zones de processus de fracture, les bandes de cisaillement dans les métaux ductiles ou les discontinuités discrètes de fissures dans les matériaux fragiles. Cela nécessite une modélisation précise et une analyse minutieuse de la structure afin d'évaluer la véritable force du corps.

En plus de cela, la modélisation des trous ,des inclusions, et des glissements de terrain pose une autre forme de problèmes où le FEM devient un choix coûteux pour obtenir une convergence optimale de la solution.

La modélisation des fissures dans les structures et dans les fissures spécialement évolutives nécessite que le maillage FEM épouse la géométrie de la fissure et doit donc être mis à jour à chaque fois que la fissure se développe. Cela est non seulement coûteux en termes de calcul, mais entraîne également des pertes de précision lorsque les données sont mappées d'un ancien au nouveau maillage.

la méthode des éléments finis étendus (XFEM) est une technique numérique qui permet d'intégrer un enrichissement local d'espaces d'approximation. est réalisée à travers la notion de partition de l'unité. il est alors possible d'intégrer n'importe quel type de fonction pour se rapprocher localement du champ. Ces fonctions peuvent inclure toute solution analytique du problème ou toute connaissance a priori de la solution à partir des résultats des tests expérimentaux[35]

La base d'enrichie est formée par la combinaison des fonctions de forme nodale associées au maillage et du produit de fonctions de forme nodale à fonctions discontinues.

Cette construction permet la modélisation de géométries indépendantes du maillage.

De plus, l'enrichissement n'est ajouté que localement, c'est-à-dire lorsque le domaine doit être enrichi. Le système d'équations algébrique qui en résulte se compose de deux types d'inconnues, à savoir les degrés de liberté classiques et les degrés de liberté enrichis. De plus, l'incorporation de fonctions d'enrichissement utilisant la notion de partition d'unité garantit le maintien d'une mesure de la parcimonie dans le système d'équations.

L'objectif de ce travail est la recherche de stratégies optimales pour l'extension de la méthode XFEM au cas des plaques minces en traction, dans le cas d'un matériau homogène isotrope, la fissure étant traversant. En particulier, il est capital que la méthode reste fiable même pour les plaques très minces (en aéronautique, l'épaisseur de peau d'un avion peut descendre à 1.4 mm).

De plus, on garde comme objectif que le taux de convergence de la méthode doit rester du même ordre que celui d'une méthode d'éléments finis classique sur un problème régulier.

## I. Etat de l'art sur la méthode des éléments finis

la modélisation des discontinuités par rapport aux zones de localisation est toujours restée un défi dans le domaine de la mécanique et pour modéliser les fissures, avec la méthode des éléments finis standard (FEM), nécessitent que le maillage synchronise à la géométrie de la fissure avec un raffinement du maillage .

la technique de re-maillage par *Swenson, et Ingraffea* [36] est une technique traditionnellement utilisée pour modéliser les fissures dans le cadre de la méthode des éléments finis. Lorsqu'une restructuration est effectuée près de la fissure pour aligner les bords de l'élément avec les faces de la fissure. Cela devient assez lourde en cas de fissures évolutives statiques , quasi-statiques ou de problèmes dynamiques de propagation de fissure, donc chaque fois un nouveau maillage est généré . Il en résulte la construction de fonctions de forme totalement nouvelles et tous les calculs doivent être répétés. De plus, la solution dynamique représente une histoire en évolution en raison de l'inertie, et chaque fois que le maillage est modifié, cette histoire doit être préservée. Ceci est accompli en transférant les données de l'ancien maillage au nouveau maillage.

Le processus de changement des variables de l'ancien maillage sur le nouveau maillage peut également entraîner une perte de précision. La méthode de suppression d'élément déployé par *Beissel et al. en 1998; Song et al. en 2008.* est l'une des méthodes les plus simples de simulation de problèmes de croissance de fissure. Dans cette méthode les discontinuités ne sont pas explicitement modélisées, mais une relation constitutive est modifiée dans un élément coupé par la fissure appelée élément raté [37].

Dans la méthode de séparation inter-éléments, la fissure est autorisée à se former et à se propager le long des limites des éléments. Par conséquent, la méthode dépend du maillage, qui doit être construit de manière à fournir un ensemble plus riche de chemins de défaillance possibles. Dans la formulation de *Xu et Needleman* [38]. tous les éléments sont séparés du début et un modèle de loi cohérent est utilisé pour joindre les frontières de l'élément, tandis que dans l'approche de *Camacho et Ortiz* [39].

Des nouvelles surfaces sont créées d'une manière adaptative le long des limites de l'élément précédemment cohérent, les critères étant remplis conformément au modèle de la loi de cohésion.

La méthodologie globale locale introduit l'idée d'enrichir le champ d'approximation. L'idée de base était d'obtenir une solution globale à l'aide de la grille grossière d'éléments finis, puis d'obtenir des résultats détaillés en effectuant un zoom sur la zone d'intérêt (zones de localisation), en affinant le maillage et en utilisant les déplacements de l'analyse globale pour le maillage raffiné. L'analyse locale (détaillée) a également été réalisée en introduisant des solutions de comportements physiques et analytiques par exemple, des fonctions polaires ou des fonctions de bord pour des réservoirs avec des découpes [40].

*Gifford et Hiltonen* [41] ont utilisé l'idée d'enrichir le champ avec une solution analytique dans le contexte de problèmes de croissance de la fissure. L'approximation du déplacement d'un élément était considérée comme la combinaison de l'hypothèse de déplacement polynomiale de la méthode des éléments fini classique (FEM) et d'un déplacement enrichi ( $U = U_{std} + U_{enr}$ ) Où la partie enrichie provient de champs de déplacement singuliers pour les fissures. De plus, le procédé nécessite que le fond de fissure soit situé sur les nœuds d'un élément et non à l'intérieur de l'élément.

*Belytschko et al* [42] ont l'un des travaux pionniers en vue de l'enrichissement local du champ d'approximation au niveau des éléments pour les problèmes de localisation. Où le champ de déformation est modifié pour obtenir les sauts nécessaires dans le champ de déformation.

La méthode des éléments finis Intégré (EFEM) par *Oliver et Jirasek* . [43- 44] utilise un schéma d'enrichissement en éléments, dans lequel le champ est enrichi dans le cadre du principe variationnel à trois champs. sont le champ de déplacement  $u$ , le champ de déformation  $\varepsilon$  et le champ de contrainte  $\sigma$

L'approximation enrichie du champ sous forme générique peut être exprimée sous la forme: ( $u \approx Nd + N_c d_c$  et  $\varepsilon \approx Bd + G_e$ ) avec  $N$  et  $B$  sont les matrices standard d'interpolation de déplacement et de déformation,  $d$  est le degré de liberté standard.  $N_c$  et  $G$  sont les matrices contenant les termes d'enrichissement pour les champs de déplacement et de contrainte.  $d_c$  et  $e$  sont les degrés enrichis de libertés et sont inconnus.

Ces inconnues sont trouvées en imposant une continuité de traction et une compatibilité au sein de l'élément.

Le principe de cette méthode est que l'enrichissement est localisé au niveau de l'élément. Mais, ces méthodes nécessitent la continuité du chemin de la fissure.

dans la Méthode des éléments finis étendus (XFEM) au contraire, il s'agit également d'un système d'enrichissement local, mais elle utilise une notion de partition de l'unité pour insérer un enrichissement au champ approximatif.

Plus tard, *Strouboulis et al* [45] ont utilisé le même concept de partition de l'unité et ont montré que différentes partitions de fonctions d'unité peuvent être intégrées à l'approximation en éléments finis pour enrichir localement le champ. Cette méthode s'appelait la méthode des éléments finis généralisés (GFEM).

La méthode des éléments finis généralisés repose sur l'incorporation d'une solution analytique permettant d'approcher localement le champ en utilisant la partition de l'unité.

*Belytschko et Black* en 1999 ont développé une autre méthode basée sur les éléments finis pour enrichir localement le champ en utilisant la partition de l'unité. L'une des différences avec la méthode des éléments finis généralisés (GFEM) était que n'importe quel type de fonction générique peut être incorporé dans XFEM pour construire la fonction de base enrichie, mais la forme actuelle de GFEM ne présente pas de telles différences avec XFEM.

Dans sa première tentative de méthode des éléments finis étendus, *Belytschko et Black* [27] ont proposé un enrichissement local du domaine pour le problème de la propagation des fissures en utilisant la partition de l'unité. La fonction de base enrichie a été construite par simple multiplication de la fonction d'enrichissement avec les fonctions de base par éléments finis standard. La solution analytique pour le déplacement et le champ de contrainte près du fond de fissure était connue de la théorie de la mécanique de la rupture élastique linéaire (LEFM). Ils ont donc utilisé des fonctions d'enrichissement proches de la pointe pour enrichir le champ près de la fissure sur toute sa longueur.

Par cette méthode, aucun remodelage n'était nécessaire à mesure que la fissure se développait.

Ensuite, une modification de la méthode a été proposée par *Moes et al* [46]. La version modifiée, appelée désormais méthode des éléments finis étendus, elle supprime la nécessité d'un affinement minimal du maillage. Ils ont montré que n'importe quel type de

fonction générique qui décrit le mieux de champ peut être incorporé dans l'espace d'approximation. Pour résoudre les problèmes de propagation de fissure, deux types de fonctions d'enrichissement ont été proposés. En raison du fait que la propriété de partition d'unité permet d'incorporer tout type de fonction d'enrichissement non lisse, non polynomiale dans l'espace d'approximation, une fonction discontinu est utilisée pour enrichir le champ sur toute la longueur de la fissure, donnant ainsi la discontinuité requise le long de la longueur de la fissure. Les solutions exactes pour les champs de contrainte et de déplacement près du fond de fissure étaient déjà connues dans la mécanique élastique linéaire de la rupture. Des fonctions d'enrichissement proches de la pointe dérivées de solutions analytiques ont donc été utilisées pour enrichir le champ près de la fissure.

*Stolarska et al* en 2001 ont améliorés la méthode XFEM, lorsque ont été couplé avec la méthode de Level Set qui était est une technique numérique permettant de suivre les discontinuités alignées arbitrairement avec le maillage par éléments finis et elle aide également à définir la position d'un point dans un Système de coordonnées polaires en pointe de fissure et évaluation des fonctions d'enrichissement généralement utilisées telles que la fonction de pas et la fonction de distance pour la modélisation de discontinuités fortes et faibles.

*Sethian* [47] a utilisé la méthode de marche rapide (FMM) pour les fissures en évolution, qui consiste à mettre à jour uniquement les fonctions d'ensemble de niveaux situées dans la bande étroite entourant une discontinuité existante. La bande étroite avance, fixe les valeurs des points existants et en amenant des nouveaux dans la bande étroite pour mettre à jour.

Ensuite La méthode (FMM) a été étendue par *Gravouil et al* [48]. selon la modélisation des discontinuités ouvertes ,il ont utilisés une forme standard de jeu d'ensembles de niveaux, la complexité de l'algorithme a été rendue complexe par la nécessité de fixé l'ensemble de niveaux décrivant la fissure ou la discontinuité existante.

*Sukumar et al* [49] ont associées la méthode de marche rapide (FMM) de *Sethian* à une implémentation tridimensionnelle de la méthode des éléments finis étendus. En outre, ils ont utilisé des maillages distincts pour le modèle mécanique .

En raison de la possibilité de définir les discontinuités alignées arbitrairement, indépendamment du maillage, la méthode XFEM peut également être appliquée avec succès pour la modélisation des trous et des inclusions, ce qui requiert l'utilisation du procédé standard par éléments finis pour que le maillage se conforme à la géométrie ou aux interfaces des matériaux. Les interfaces matérielles dans les composites peuvent également être modélisées pour prévoir les comportements mécaniques à l'aide de XFEM.

Une approche similaire est également appliquée dans le cadre de la méthode des éléments finis généralisés GFEM, où *Strouboulis et al* [45] ont utilisé des fonctions d'enrichissement locales dans GFEM pour modéliser les angles .

La méthode XFEM a été initialement développée pour les problèmes de croissance de fissure dans les matériaux fragiles. La théorie de la mécanique élastique linéaire de la rupture n'est valable que lorsque la zone du processus de fracture située derrière le fond de la fissure est petite, comparée à la taille de la fissure et à la taille de l'échantillon. Dans d'autres cas, la zone de traitement de fracture doit être prise en compte pour l'analyse. En cas de croissance de fissure cohésive, la propagation de la fissure est régie par la loi de séparation par traction au niveau des faces de la fissure. Ce type de modèle a été présenté pour la première fois dans les années soixante pour les métaux, comme celui de *Dugdale* en 1960.

Les simulations de croissance de fissure cohésive ont d'abord été incorporées dans XFEM par *Wells et Sullays* en 2001 ,pour établir le bilan énergétique. Plus tard, *Moes et Belytschko* [50] ont amélioré leur méthode antérieure et fourni un modèle plus complet pour la croissance cohésive des fissures dans le cadre de XFEM, qui traitait de la question de l'étendue de la zone de cohésion. Ils ont également proposé un élément partiellement fissuré enrichi de l'ensemble des fonctions de branche non singulières pour modéliser le champ de déplacement autour de la pointe de la fissure.

*Zi et Belytschko* [51] ont proposé un nouvel élément de fond de fissure dans lequel la totalité de la fissure est enrichie d'un type de fonction d'enrichissement, y compris les éléments contenant le fond de fissure, de sorte que la partition de l'unité soit conservée dans l'ensemble du sous-domaine enrichi grâce à l'enrichissement décalé. Dans leur

approche, ils ont utilisé une fonction de signe pour enrichir les nœuds dont le support est coupé par la fissure.

*Asferg et al* [52] ont montré que le nouvel élément de fond de fissure proposé dans *Zi et Belytschko* à 2003 ne peuvent pas modéliser des contraintes égales des deux côtés de la fissure et ont proposé un nouvel élément XFEM partiellement fissuré pour la croissance cohésive de fissures avec un enrichissement supplémentaire des éléments fissurés. L'enrichissement supplémentaire est construit comme une superposition des fonctions de forme nodale standard et des fonctions de forme nodale standard créées pour une sous-zone de l'élément fissuré .

## **II .Méthode d'éléments finis**

### **II.1. Bases de FEM**

L'approximation par éléments finis d'une variable de champ  $u(x)$  est donnée comme une combinaison linéaire de fonctions de base

$$u(x) = \sum_{i=1}^n N_I(x)u_I \quad \forall x \in \Omega \quad (II.1)$$

où  $N_I(x)$  représente les fonctions de forme standard des éléments finis et  $U_I$  les paramètres nodaux inconnus.

L'approximation par éléments finis s'appuie sur des polynômes par morceaux pour approximer le champ et nécessite par conséquent des solutions lisses.

Cependant, si la solution contient un comportement non lisse (comme des discontinuités fortes ou faibles ou des singularités) alors la méthode des éléments finis ne donne pas de bons résultats avec une convergence optimale[53].

### **II.2. Partition de l'unité, PoU**

L'idée de base dans la méthode de partition de l'unité est de couvrir le domaine  $\Omega$  avec des patchs se chevauchant  $W_I$  centrés sur node I.

Nous construisons ensuite des fonctions lisses  $\Phi_I(x)$ , chacune associée à un patch correspondant  $W_I$  et telle que  $\Phi_I(x)$  sont pas nuls uniquement dans le sous-domaine  $W_I$  et possèdent la propriété suivante [54]

$$\sum_{i=1}^n \Phi_I(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (II.2)$$

où  $n$  est le nombre de nœuds.

Grâce à la propriété comptabilisée en charges dans l'équation 2, l'ensemble des fonctions  $\Phi_I(x)$  est indiqué comme une partition d'unité.

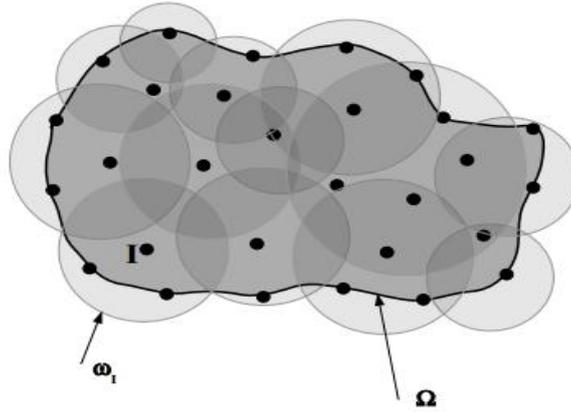


Figure II.1: Une couverture ouverte du domaine  $\Omega$  formé par des nuages  $w_I$  [54]

**Notez** que l'exigence ci-dessus est identique à celle appliquée aux fonctions de forme d'éléments finis. Il est également intéressant de voir que l'équation 2 représente une condition de reproduction, essentielle pour la convergence, c'est-à-dire que pour toute fonction quelconque  $g(x)$ , la propriété suivante est valable.

$$u(x) = \sum_{I=1}^n g(x) \Phi_I(x) u_I = g(x) \quad u_I = 1 \quad (II.3)$$

Cela suggère que toute fonction autre que le polynôme peut être reproduite exactement avec la seule exigence que l'équation 2 soit satisfaite.

Pour approfondir l'idée, notons  $\chi_I(W_I)$  est l'extension de  $\{F_m\}$  avec  $m \in M(I)$  comme un espace d'approximation local défini sur le support  $W_I$ , capable de capturer localement la solution physique, où  $\{F_m\}$  désigne l'approximation locale fonctions et  $M(I)$  est l'ensemble d'index.

L'espace d'approximation globale,  $X$ , est ensuite construit à l'aide de la partition de fonctions d'unité, telle que  $X$  est l'extension de  $\bar{\Phi}_i^m = \Phi_i f_i^m$ . Où  $\bar{\Phi}_i^m$  sont les fonctions d'approximation enrichies construites à partir du produit de la partition des fonctions d'unité  $\Phi_i$  et des fonctions d'approximation locales  $f_{ml}$ . Il convient de noter ici que l'espace d'approximation global  $X$  obtient des propriétés d'approximation d'espaces d'approximation locaux  $X_I$ . De plus, la finesse de la partition des fonctions d'unité impose une continuité entre les éléments, ce qui n'est pas possible dans d'autres cas à l'aide d'espaces d'approximation non polynomiaux. Cela laisse une grande liberté dans le choix des espaces d'approximation locaux  $X_I$ .

nettement, on peut écrire un espace d'approximation local comme suit:

$$X_I = \text{span} \{f_i^m\}_{m \in M(I)} = \{1, g^1(x), g^2(x), g^3(x), \dots, g^k(x), \dots\} \quad (II.4)$$

avec :

- ✚  $g^k(x)$  sont les fonctions supplémentaires capables de capturer localement la solution physique
- ✚  $k = 1 \dots n^E$  est le numéro d'index des fonctions additionnelles / fonctions d'enrichissement.

En particulier, les fonctions  $g^k(x)$  peuvent être polynomiales, non polynomiales, discontinues, singulières, trigonométriques, logarithmiques ou toute autre fonction contenant une connaissance a priori des propriétés caractéristiques de la solution attendue. Il convient de reconnaître ici que le nombre total de fonctions supplémentaires incorporées dans l'espace d'approximation n'est pas limité et qu'il est donc possible d'ajouter un grand nombre de fonctions supplémentaires pour construire un espace d'approximation de plus grande dimension, en fonction des besoins.

En outre, chaque  $\{f_i^m\}$  pouvant être différent pour chaque nœud  $I$ , nous pouvons utiliser différentes fonctions de base associées à différents nœuds  $I$ .

L'approximation de la variable de champ  $u(x)$  s'exprime alors comme une combinaison linéaire de fonctions de base sous la forme:

$$u(x) = \sum_{I=1}^n \left( \sum_{m=1}^{1+n^E} \bar{\Phi}_I^m(x) u_{Im} \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (II.5a)$$

$$u(x) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(x) \left( \sum_{m=1}^{1+n^E} f_I^m u_{Im} \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (II.5b)$$

$$u(x) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(x) \left( u_I + \sum_{k=1}^{n^E} g^k(x) a_{Ik} \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (II.5c)$$

avec:

- $\Phi_I(x)$  : la partition des fonctions d'unité.
- $g^k(x)$  : les fonctions supplémentaires avec des bonnes propriétés d'approximation locale.
- $U_{mI} = \{u_I, a_{Ik}\}$  : l'ensemble de tous les paramètres inconnus.
- $u_I$  et  $a_{Ik}$  : les paramètres inconnus standard et supplémentaires pour les approximations.
- $n^E$  : le nombre de termes d'enrichissement sur chaque nœud.

**Notez** que, pour un nœud avec  $n^E = 0$ , l'équation 5c devient identique à l'approximation par éléments finis standard.

Il convient de mentionner ici que différentes partitions de fonctions d'unité peuvent également être utilisées à des fins d'approximation, c.-à-d. l'équation 5c peut être généralisée comme suit:

$$u(x) = \sum_{I=1}^n \Phi_I^p(x) u_I + \sum_{I=1}^n \Phi_I^q(x) \left( \sum_{k=1}^{n^E} g^k(x) a_{Ik} \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (II.6)$$

avec:  $\Phi_I^p(x)$  et  $\Phi_I^q(x)$  sont la partition des fonctions d'unité d'ordre p et q respectivement.  $\Phi_I$

### II.3 .Construction de la base enrichie en FEM

Dans le cadre de la méthode des éléments finis (FEM), il est intéressant de constater que les fonctions de forme standard possèdent également la propriété de partition d'unité et peuvent donc être utilisées en tant que partition de fonctions d'unité[54]

Afin de construire une fonction de partition d'unité, nous regroupons tous les éléments partageant le même nœud I; l'union de tous ces éléments peut maintenant être considérée comme un nuage ou un patch  $W_I$  centré sur I. Regrouper les fonctions de forme de ces éléments la fonction de partitionnement de l'unité  $\Phi_I$ , qui a une valeur d'unité au nœud I et zéro à la limite, voir la figure (II.2).

La base enrichie peut maintenant être construite à l'aide du produit de fonctions de forme classiques (polynômes par morceaux) et de toute base locale enrichie, voir la figure (II.3).

La nouvelle fonction ainsi créée est zéro à la limite et non nulle à l'intérieur du patch  $W_I$ .

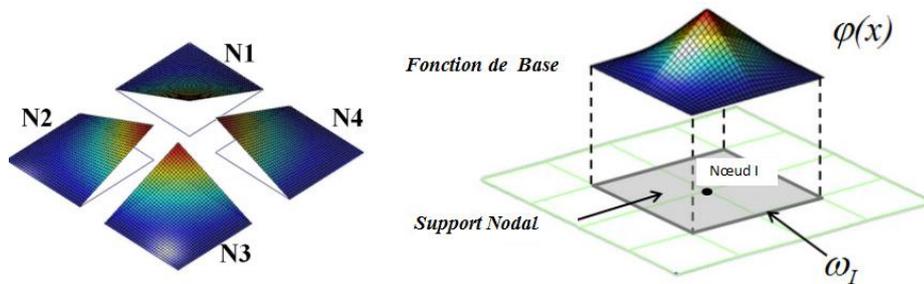


Figure II.2: Construction de la partition de la fonction d'unité[54]

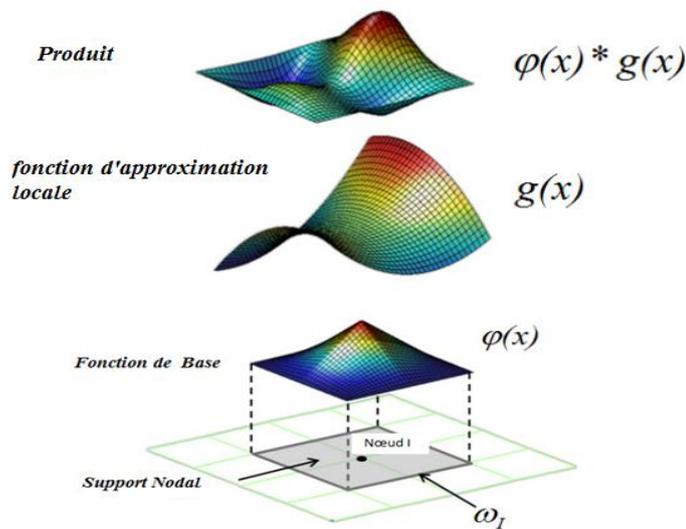


Figure II.3: Construction d'une fonction de base enrichie par le produit de fonctions de forme FEM classiques formant la fonction PoU,  $\Phi_I(x)$  et une fonction d'approximation locale,  $g(x)$  [54].

Ensuite, l'approximation enrichie du champ  $u(x)$  est donnée par:

$$u(x) = \underbrace{\sum_{I=1}^n N_I(x) u_I}_{\text{Standard}} + \underbrace{\sum_{I=1}^n N_I \left( \sum_{k=1}^{n^E} g^k(x) a_{Ik} \right)}_{\text{Enrichie}} \quad \forall x \in \Omega \quad (II.7)$$

avec  $N_I$  : les fonctions standard de la forme des éléments finis.

L'approximation du champ  $u(x)$  se compose maintenant de deux parties, une partie d'approximation par éléments finis standard et une partie d'approximation enrichie, les coefficients  $u_I$  et  $a_{Ik}$  correspondant aux inconnues standard et enrichies / supplémentaires aux nœuds, respectivement.

**Notez que** les équations II.6 et II.7 sont identiques, sauf que nous utilisons maintenant des fonctions de forme FEM standard,  $N_I$ , en tant que partition des fonctions d'unité,  $\Phi_I$ . De plus, nous utilisons les mêmes fonctions d'interpolation pour la partie standard et la partie enrichie de l'approximation.

Maintenant, si vous définissez toutes les  $U_I$  en zéros et si l'un des  $a_{Ik}$  est égal à l'unité, les valeurs restantes étant définies sur zéro (par exemple, si  $a_{II}$  est égal à l'unité), nous obtenons l'expression:

$$\sum_{I=1}^n N_I(x) g^k(x) = g^k(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (II.8)$$

La fonction supplémentaire est récupérée exactement sans perdre les propriétés d'approximation.

### III. La méthode des éléments finis étendus (XFEM)

La méthode XFEM est une évolution de la méthode classique FEM, elle a été développée par *Belytschko et al* en 1999[27]. est basé sur le concept de partition d'unité ajoutée à la formulation FEM, elle a représenté des discontinuités telles que les fissures, les trous et

les interfaces des matériaux et les singularités, indépendamment du maillage. Cette particularité rend cette méthode très robuste et attrayante pour simuler la propagation des fissures, puisqu'il n'est plus nécessaire d'avoir une mise à jour continue du maillage. Par conséquent, l'équation 7 peut être simplifiée comme suit:

$$u(x) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(x) u_i}_{\text{Standard}} + \underbrace{\sum_{j \in J} N_j \left( \sum_{k=1}^{n^E} g^k(x) a_{jk} \right)}_{\text{Enrichie}} \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{II.9})$$

avec  $I$  est l'ensemble de tous les nœuds et  $J$  est l'ensemble des nœuds devant être enrichis avec des fonctions d'enrichissement spéciales.

$n^E$  est le nombre de termes d'enrichissement ajoutés à chaque nœud.

Une autre propriété intéressante de la forme d'approximation ci-dessus est qu'elle permet l'ajout de différentes fonctions d'enrichissement  $g^k(x)$  d'un nœud à l'autre.

Sans introduire de discontinuité dans l'approximation et la continuité entre éléments est automatiquement assurée.

### III.1. XFEM pour les problèmes de propagations des fissures

Pour la modélisation des fissures, nous définissons trois régions d'enrichissement différentes, à savoir les deux régions de fond de fissure et l'intérieur des fissures.

Nous définissons trois ensembles de nœuds différents, l'ensemble  $I$  est l'ensemble des nœuds, les ensembles  $K_1$  et  $K_2$  étant l'ensemble des nœuds à enrichir pour les régions de fond de fissure 1 et 2 respectivement. Ce sont les nœuds dont le support nodal contient les fonds de fissure. L'ensemble  $J$  contient les nœuds à enrichir pour l'intérieur de la fissure. Ce sont les nœuds dont le support nodal est coupé par la fissure.

L'approximation XFEM pour le problème de propagation de la fissure peut maintenant être écrite comme suit:

$$u^h = \sum_{i \in I} N_i u_i + \sum_{i \in I_c} N_i H_c u_i^c + \sum_{i \in I_t} N_i \left( \sum_{l=1}^4 H_t^l u_{il}^t \right) \quad (\text{II.10})$$

avec  $u_i$  et  $u_i^c$ ,  $u_{il}^t$  il sont les degrés de liberté standard et enrichis,  $H_c$  et  $H_t^l$  sont les fonctions d'enrichissement définies dans les sections suivantes,  $c$  correspond à l'intérieur de la fissure et  $t$  désigne les fonds de fissure,  $t = 1, 2$ .

La figure II.4 montre le schéma d'enrichissement pour le problème de modélisation des fissures.

Les nœuds marqués d'un cercle sont les nœuds appartenant à l'ensemble  $J$  et les nœuds marqués d'un carré appartiennent aux ensembles  $K_1$  et  $K_2$ .

### III.2. Modélisation de la fissure intérieure

Les nœuds dont le support nodal est coupé par la fissure appartiennent à l'ensemble  $J$  et sont enrichis en fonction de pas ou Heaviside:

$$H_c(x, y) = \begin{cases} +1 & \text{pour } \Phi(x) > 0 \\ -1 & \text{pour } \Phi(x) < 0 \end{cases} \quad (II.11)$$

$\Phi$  : la fonction de réglage du niveau,

Les nœuds enrichis en fonction de pas sont entourés à la figure II.5.

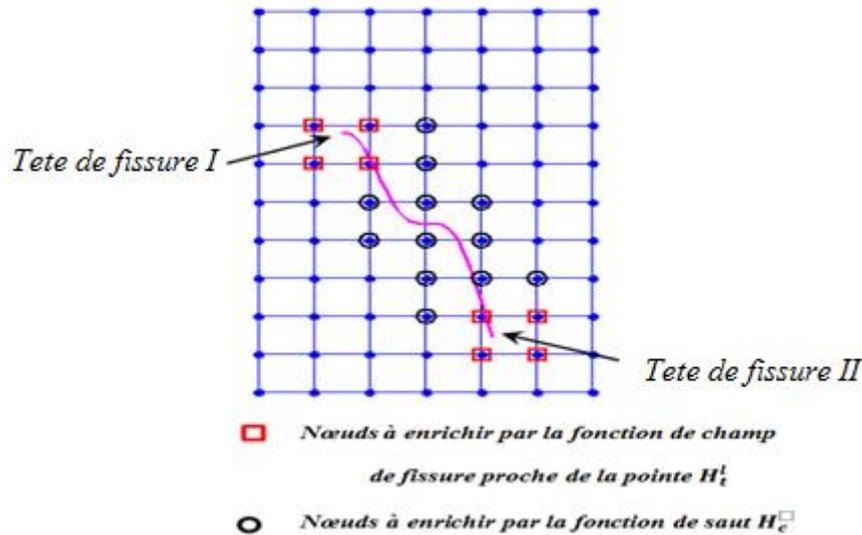


Figure II.4: Schéma d'enrichissement de la fissure

### III.3. Modélisation de la région du fond de fissure

Pour la modélisation des zones de fond de fissure, nous utilisons des solutions analytiques pour le champ de déplacement asymptotique autour du fond de fissure. Ces

champs sont contenus dans les quatre fonctions suivantes proposées par Flemming et al. en 1997:

$$\{ H_t^l(r, \theta) \}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta \right\} \quad (II.12)$$

Les nœuds enrichis en fonctions d'enrichissement proches de la pointe sont représentés par des nœuds carrés dans la figure (II.4).

La figure (II.5) montre l'intrigue des fonctions d'enrichissement proches de la pointe.

Il est intéressant de constater que la deuxième fonction  $\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  parmi les quatre est discontinue dans la fissure et donne ainsi la discontinuité requise dans l'approximation. En outre, il peut on s'aperçoit qu'avec l'aide de cette fonction, il est possible de modéliser la fissure qui coupe partiellement l'élément, ceci ne peut par contre pas être modélisé avec la fonction pas.

Le terme  $\sqrt{r}$  donnera la singularité requise dans la pente du champ. Les trois fonctions restantes sont utilisées pour améliorer la solution.

## ***IV. Critères d'initiation et de croissance de la fissure***

### ***IV.1. Initiation de la fissure***

les critères d'initiation des fissures sont basés sur les principaux critères de contrainte. Lorsque la contrainte principale après chaque étape d'équilibre dépasse la résistance maximale à la traction du matériau, une fissure est introduite orthogonalement à la direction de la contrainte principale maximale.

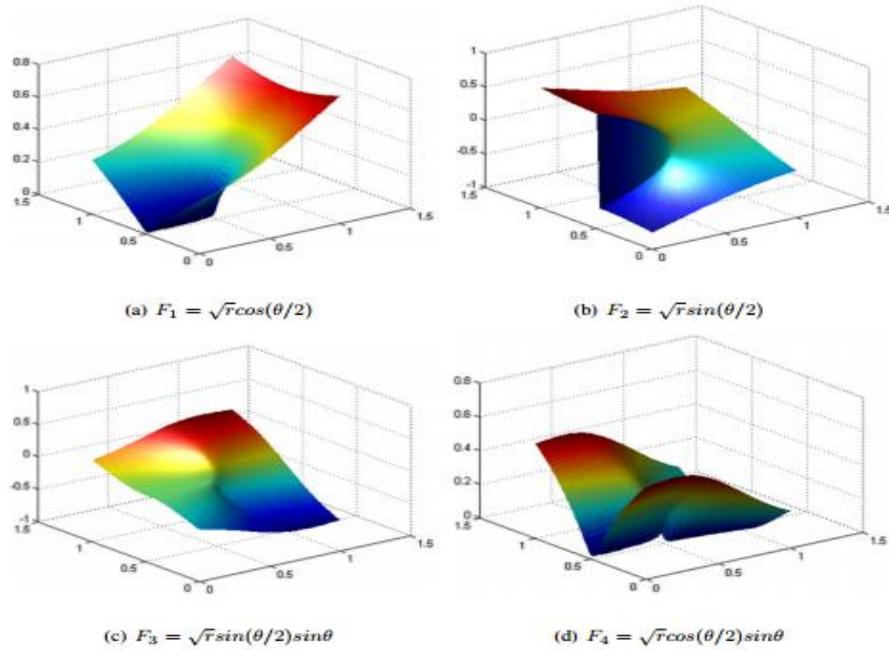


Figure II.5: Fonctions d'enrichissement proches de la pointe[54]

## IV.2. Croissance des fissures

La précision et la fiabilité de l'analyse d'un corps fissuré dépendent principalement de la détermination précise et de la continuité du chemin de la fissure.

Il est donc très important de sélectionner très strictement les critères de croissance des fissures. Parmi les critères de croissance de la fissure les plus couramment utilisés, citons: les critères de densité d'énergie de déformation minimale par *Sih* en 1974[55]., les critères de taux de libération d'énergie maximal, par *Nuismer* 1975[56], les critères de contrainte maximale du cerceau ou de contrainte principale, par *Erdogan et Sih* en 1963[57].

nous avons utilisé un critère de contrainte maximale du cerceau. Selon ce critère, on suppose que :le début de la fissure se produira lorsque la contrainte maximale du cerceau atteindra une valeur critique, et que la fissure se développera dans une direction  $\theta_{cr}$  dans laquelle la contrainte périphérique  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale.

La contrainte périphérique dans le sens de la propagation de la fissure est une contrainte principale; par conséquent, la direction de la propagation de la fissure est déterminée en fixant la contrainte de cisaillement à zéro. Ceci conduit à l'équation pour la direction de

propagation de la fissure  $\theta_{cr}$  dans le système de coordonnées local de fond de fissure comme suit:

$$\theta_{cr} = 2 \tan^{-1} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right) \quad (II.13)$$

Une expression plus efficace pour  $\theta_{cr}$  est mise en œuvre par *Liang et al* en 2003[58].

$$\theta_{cr} = 2 \tan^{-1} \left( \frac{-2 \left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)}{1 + \sqrt{1 + 8 \left(\frac{K_{II}}{K_I}\right)}} \right) \quad (II.14)$$

Où  $K_I$  et  $K_{II}$  sont des facteurs d'intensité de contrainte de mode I et de mode II, obtenus à l'aide de la forme de domaine de l'intégrale d'interaction.

#### V. Méthode du courbes de niveau (Level Set)

Dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus, les discontinuités sont souvent représentées à l'aide du Méthode de Level Set [59].

Méthode de Level Set est une technique numérique permettant de suivre les interfaces en mouvement. Il permet le traitement des limites internes et des interfaces sans traitement explicite de la géométrie de l'interface. L'idée principale est de construire des iso-contours de manière à ce que l'interface soit représentée sous la forme d'un iso-contour à zéro. La forme la plus simple de la fonction level set est une fonction de distance signée définie comme suite:

$$\Phi(x) = d \cdot n \quad (II.15)$$

avec  $d = (X - X_{\Gamma_{min}})$  et  $(X - X_{\Gamma_{min}}) = \min \| X - X_{\Gamma} \|$

Pour la modélisation des fissures, nous définissons des fonctions d'ensembles à deux niveaux:

- Fonction de réglage de niveau normal  $\Phi(x)$ , distance minimale signée de la fissure et de ses extensions tangentes

- Fonction de réglage du niveau tangentiel  $\psi(x)$ , distance minimale signée par rapport aux normales dessinées au fond de la fissure, voir figure (II. 7). Une fissure peut désormais être entièrement définie comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } X \in \Gamma_c \quad \Phi = 0 \text{ et } \psi \leq 0 \\ \text{pour } X \in \Gamma_{tip} \quad \Phi = 0 \text{ et } \psi = 0 \end{array} \right\}$$

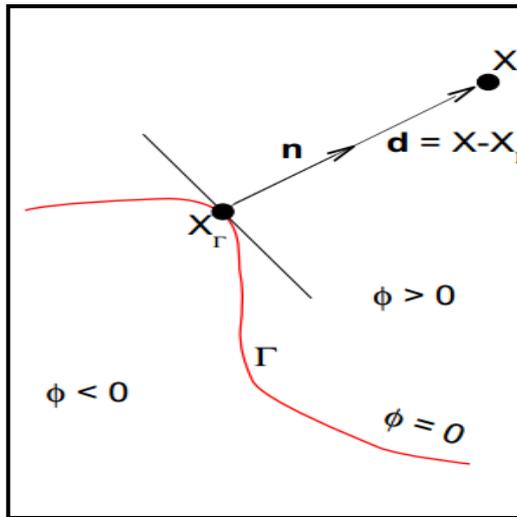


Figure II.6: Construction de la fonction de level set en tant que fonction de distance signée[59].

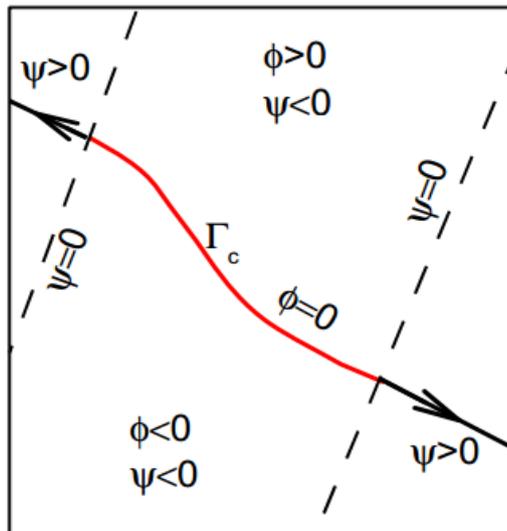


Figure II.7: Construction de la fonction de level set pour les fissures[59].

### V.1. Couplage X FEM/ LSM

Le couplage de la méthode X-FEM avec la méthode LSM facilite la sélection des nœuds à enrichir ainsi que l'utilisation des fonctions de niveau  $\varphi$  et  $\psi$  afin de déterminer leurs types d'enrichissement (Figure II.8) [60].

- Si  $\psi < 0$  et  $\varphi_{\max} \varphi_{\min} < 0$  : l'élément est traversé par la fissure (enrichissement par  $H(x)$ ).
- Si  $\psi_{\max} \psi_{\min} \leq 0$  et  $\varphi_{\max} \varphi_{\min} \leq 0$  : l'élément contient le front de la fissure (enrichissement par  $\{F_k(r, \theta)\}$ ).

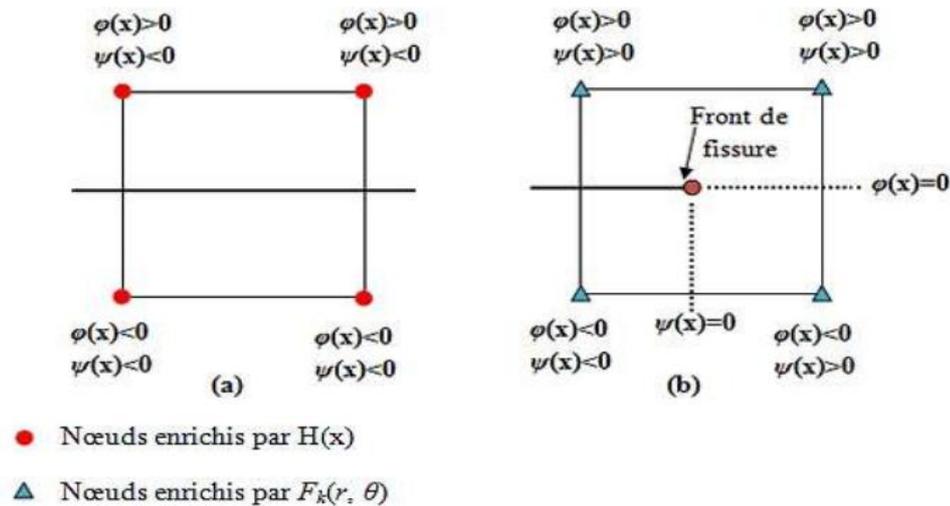


Figure II.8 : Stratégie de recherche du type d'enrichissement (cas de fissure) [60].

#### V.1.1. Fonctions de niveau pour le cas d'un vide et d'une inclusion

Dans le cas d'une discontinuité circulaire (vide ou inclusion), la valeur de la fonction de niveau en un point est définie comme suit [61]

##### V.1.1.1. Cas d'un vide circulaire

$$x(x) = \sqrt{(x - x_v)^2 + (y - y_v)^2} - r_v \quad (II.16)$$

Où,  $(x_v, y_v)$  et  $r_v$  sont respectivement le centre et le rayon de vide.

$$x(x) < 0 \quad x(x) > 0 \quad x(x) = 0$$

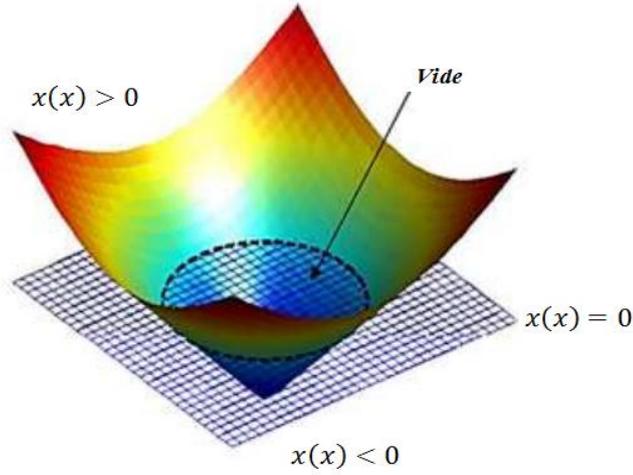


Figure II.9 : Fonction de niveau pour le cas d'un vide [61].

#### V.1.1.2. Cas d'une inclusion circulaire

$$\xi(x) = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} - r_c \quad (II.17)$$

avec,  $(x_c, y_c)$  et  $r_c$  sont respectivement le centre et le rayon de l'inclusion [61].

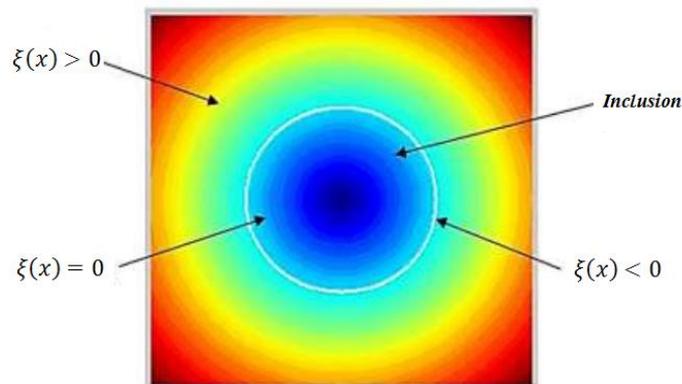


Figure II.10 : Fonction de niveau pour le cas d'une inclusion [61].

## VI. Etudes de cas

Le but est de valider la méthode XFEM dans le contexte du comportement mécanique de la rupture. Le paramètre le plus intéressant à considérer est le facteur d'intensité de contrainte; une valeur très utile pour quantifier l'importance de la fissure sur la distribution des contraintes. Afin de souligner les éventuels avantages ou inconvénients apportés par XFEM, il convient d'étudier la qualité des solutions avec l'aide de XFEM. D'après Anderson [62], il est très difficile de trouver les solutions analytiques pour le facteur d'intensité de contrainte d'une géométrie chargée donnée.

Néanmoins, il existe encore des solutions pour des configurations très simples. Pour les géométries plus complexes, le facteur d'intensité de contrainte doit être dérivé numériquement, par éléments finis. Par exemple, une configuration pour laquelle une solution de forme fermée existe est une fissure tranchante dans une plaque infinie soumise à une contrainte de traction à distance (figure II.11).

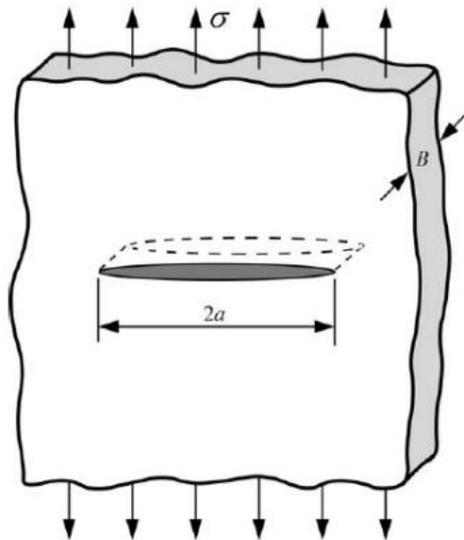


Figure II.11: Fissure traversant dans une plaque de largeur infinie soumise à une contrainte de traction à distance [62]

On peut montrer que la solution dans ce cas, est donnée par:

$$K_I = Y(a)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (II.18)$$

$$Y(a) = 1 \quad (II.19)$$

Ainsi, l'amplitude de la singularité de fond de fissure pour cette configuration est proportionnelle à la contrainte à distance et à la racine carrée de la taille de la fissure. Notez que cette solution est pour un corps infini. Il existe également une solution connexe pour une plaque semi-infinie avec une fissure au bord, figure (II.12) [62].

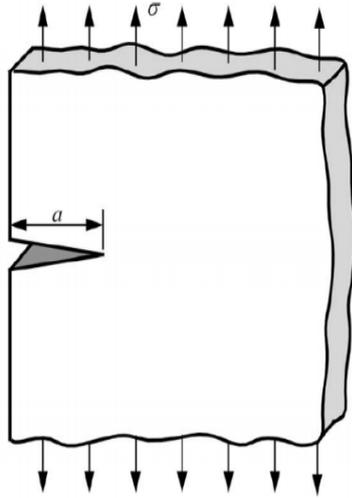


Figure II.12: Fissure dans une plaque semi-infinie soumise à une contrainte de traction à distance [62].

de Cette configuration peut être obtenue en découpant la plaque de la figure II.11 au centre de la fissure.

Le facteur d'intensité de contrainte pour la fissure du bord est donné par:

$$K_I = 1.12\sigma\sqrt{\pi a} \quad (II.20)$$

Ceci est très proche de l'équation II.18. L'augmentation de 12% de  $K_I$  pour la fissure du bord est causée par différentes conditions aux limites au bord libre. Comme l'illustre la figure (II.12), la fissure au bord s'ouvre plus, car elle est moins retenue que la fissure traversant, qui forme une forme elliptique lorsqu'elle est chargée. Même si, un corps semi-infini n'est pas simple à simuler .dans la plupart des configurations pour lesquelles il existe une solution K de forme fermée consistant en une fissure de forme simple dans une plaque infinie ou semi-infinie. Présentés d'une autre manière, les dimensions de la fissure sont petites comparées à la taille de la plaque; les conditions de fond de fissure ne sont

pas influencées par les limites externes. Dans tous les cas restants, où le corps a des dimensions finies, une solution n'est pas possible.

Pour ces cas, les solutions existantes ont été obtenues par l'analyse par éléments finis au cours des dernières décennies. Les solutions de ce type sont généralement adaptées à une expression polynomiale. Plusieurs manuels consacrés uniquement aux solutions d'intensité de contraintes ont été publiés par *Murakami* et *Rooke* [63-64]. Les cas les plus fréquents sont simplifiés par *Mohammadi* et par *Anderson* [62].

### VI.1. Specimen SENT (Single Edge Notched Tension Plate).

Le spécimen SENT, est un spécimen parallélépipédique avec une fissure de coin dans son axe de symétrie longitudinal / Plaque de tension entaillée à bord simple, Le choix de cet échantillon est pour sa popularité dans les études expérimentales sur la mécanique de la rupture. De ce fait, cet échantillon aura probablement une solution empirique précise pour le facteur d'intensité de contrainte [65].

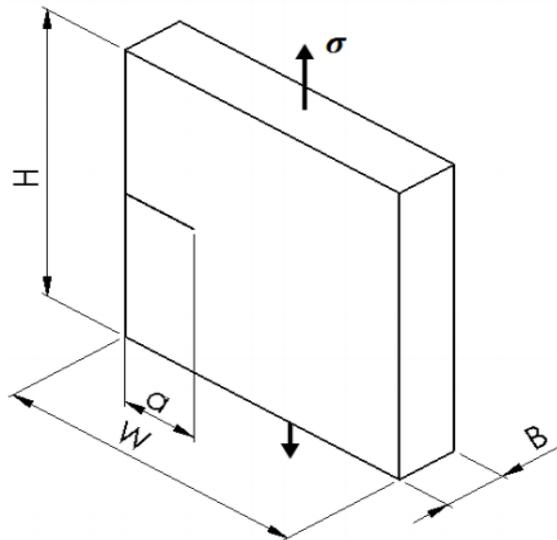


Figure II.13: Le spécimen SENT

Comme on peut le voir sur la figure II.13, l'échantillon a une hauteur H, une largeur W, une fissure au bord de largeur a et épaisseur B. La solution du facteur d'intensité de contrainte de cet échantillon est donnée

$$K_I = Y(a)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (II.21)$$

$$Y(a) = \left[ 1.12 - 0.23 \left( \frac{a}{w} \right) + 10.56 \left( \frac{a}{w} \right)^2 - 21.74 \left( \frac{a}{w} \right)^3 + 30.42 \left( \frac{a}{w} \right)^4 \right] \quad (II.22)$$

### **VII. Conclusion**

Nous avons montré dans ce chapitre le potentiel de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), pour la modélisation des différentes discontinuités mobiles (fissures, vides et inclusions).

Nous avons rappelé les concepts de base de la méthode standard des éléments finis et les étapes nécessaires à sa mise en œuvre numérique en insistant sur l'enchaînement des tâches qui assurent la cohérence du processus de calcul par éléments finis. Dans un second temps, nous avons présenté le cadre théorique de la méthode (X-FEM) pour la modélisation des discontinuités évolutives sur un maillage unique (sans remaillage). Puis, nous avons également montré l'introduction des fonctions d'enrichissement dans l'approximation standard d'éléments finis par des fonctions discontinues qui possédant des degrés de liberté supplémentaires, dans le but de représenter le saut de déplacement à travers la discontinuité. Après, nous avons vu l'utilisation de la méthode des courbes de niveau (LSM) qui permet de représenter implicitement l'endroit de la discontinuité. En effet, le principal intérêt de l'approche X-FEM est d'éviter un certain nombre d'inconvénients liés à l'utilisation de la méthode standard des éléments finis, qui nous a permis de mettre en œuvre les outils numériques nécessaires à leur implantation dans un programme de calcul.

### **III .Introduction**

Dans ce dernier chapitre, nous nous intéressons en premier lieu à l'étude du comportement du matériaux étudié (Aluminium) par une série d'essais au Laboratoire des Sciences et Techniques de l'Eau (LSTE) Faculté des sciences et technologies Université de Mascara -Algérie-). Par la suite nous avons validé nos résultats expérimentaux avec les résultats obtenus par la réalisations des modèles 3D contenant des fissures latérales ,en utilisons le code de calcul abaqus 6.13 basé sur la méthode des éléments finis étendus (X-FEM).

Les résultats de ce travail ont été publiés dans une revue internationale sous la référence[66].

#### **III .1.Utilisation d'un logiciel éléments finis :**

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels : NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses

1. analyse linéaire ou non d'un système physique continu
2. analyse statique ou dynamique
3. prise en compte de lois de comportement complexes
4. prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques,...)
5. problèmes d'optimisation, etc.

L'utilisation de tels programmes nécessite une formation de base [67]

#### **III.2.Déroulement d'une étude :**

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis. C'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec

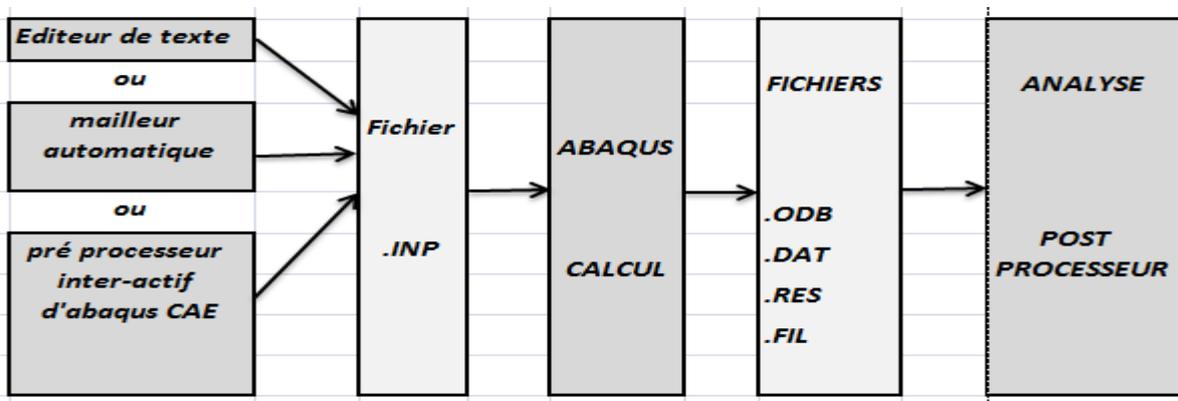
les objectifs et la précision cherchée donc l'étude est organisée de façon logique selon les étapes suivantes

1. Analyse du problème
2. Choix du modèle, type d'éléments et du maillage :
3. Hypothèses de comportement avec la Création et vérification des données
4. Exécutions du calcul et Exploitation des résultats

### III.2.1.Abaqus

Abaqus est un programme éléments finis qui permet de faire des calculs en linéaire ou non linéaire. Comme tout les programmes éléments finis il doit comporter un fichier entrée et délivre des fichiers sorties.

Le fichier d'entrée **.INP** peut-être réalisé soit avec un éditeur de texte soit avec un pré processeur. Il est important de savoir lire ce fichier puisque le logiciel de calcul connaît uniquement ce fichier comme fichier d'entrée.



Les données doivent être fournies avec des unités compatibles.

#### III.2.1.1.Création du fichier d'entrée

Le fichier sera réalisé avec le pré-processeur **d'ABAQUS CAE**

Lancer **ABAQUS CAE** depuis le menu programme

1. La géométrie est composée d'une ou plusieurs **PARTS**
2. A partir de ces **PARTS** dans le module **ASSEMBLY** on créera la structure totale par assemblage de ces parties.

3. Création des matériaux avec le module **MATERIAL**
4. Création des sections (surface , épaisseur, inerties etc) avec le module **SECTION**
5. Affectation des matériaux et section à la géométrie de chaque **PART** avec le module **SECTION ASSIGNEMENT**
6. Maillage avec le module **MESH**
7. Création du cas de calcul avec le module **STEP**.
8. Création des conditions aux limites avec le module **BCs**
9. Création du chargement avec le module **LOAD**
10. Création des sorties demandées avec le module **FIELD OUTPUT REQUEST**
11. Lancement des calcul avec le module **JOB**

**Abaqus** ne gère pas les unités : c'est à l'utilisateur d'utiliser un système d'unités cohérent

### III.2.1.2.Types de non-linéarités:

Matériaux, Géométriques, Contact

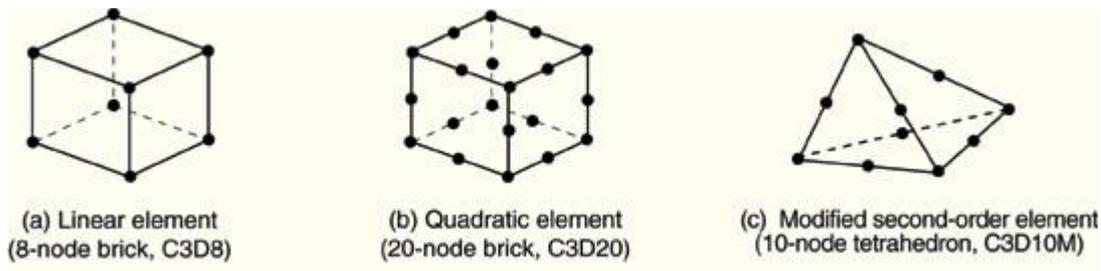


Figure III.1: Les éléments non linéarités de différents nœuds [67]

### III.3. Etude expérimentale

Une plaque carrée en traction possède une fissure perpendiculaire à la direction de la traction, c'est un cas de mode I pur et pour l'objectif de la détermination du comportement mécanique du matériau, on distingue deux types de déformation, une déformation non permanente et une déformation permanente.

La modélisation du matériau étudié nécessite la connaissance de son comportement mécanique dans le domaine élastique et lors d'une déformation plastique pour des gammes de déformation et vitesse de déformation les plus proches possibles des conditions de chargement.

Pour se faire, sa caractérisation par un essai mécanique adapté est nécessaire.

Les essais mécaniques les plus couramment utilisés sont les essais de type traction et compression uniaxiale, de flexion, de torsion, de cisaillement, de dureté, et de fatigue . Dans le cas de cette étude, la campagne de caractérisation doit être menée de manière à déterminer la réponse mécanique du matériau pour différentes vitesses de déformation. Les caractérisations du comportement dans le domaine élastique et lors d'une déformation plastique sont différenciées afin de mettre en œuvre l'essai le mieux adapté à chaque situation [68].

Dans la littérature, le module d'élasticité est souvent donné comme une constante dont la valeur est extraite des fiches matériaux sur le comportement. Cette valeur est généralement rarement remise en cause par les expérimentateurs alors que sa détermination n'est pas si triviale. Des auteurs [69-70] ont souligné l'importance du module d'élasticité. C'est donc un paramètre à déterminer avec précision.

Dans ce chapitre, la température est fixée à 25°C (température ambiante) .

1. La première partie est de définir les conditions de chargement retenues dans le cadre de cette première étude expérimentale axée sur la détermination de la sensibilité du comportement mécanique du matériau à la vitesse de déformation.
2. La deuxième partie donne les résultats d'une étude du comportement élastique et plastique du matériau .

### ***III.3.1.choix du matériaux***

*On commence avec la question Pourquoi faire le choix de l'Aluminium ?*

la réponse est que L'aluminium presque trois fois plus léger que l'acier (2,7 g/cm<sup>3</sup>) Cette capacité d'allègement des structures est déjà exploitée dans des applications telles que

- le transport routier , le transport ferroviaire (le TGV, les métros et les tramways)
- le transport maritime : les navires à grande vitesse.
- l'aérospatiale : tous les avions sont construits en alliage d'aluminium.
- les applications mécaniques : les éléments de machines en déplacement comme les moteurs et les robots.
- le transport d'énergie électrique : le conducteur en alliage d'aluminium est deux fois plus léger que le conducteur en cuivre.
- la résistance aux sollicitations mécaniques et la réflexion car est mou et souple.
- La résistance à la corrosion
- La conductivité électrique , thermique et l'anti magnétisme
- La ductilité et la facilité de mise en œuvre
- La décoration grâce à l'aptitude au traitement de surface
- La non toxicité



Figure III.2: Quelque domaines d'exploitation d'aluminium

### III.3.2. Géométrie du spécimen et matériel

La figure III.3 représente la Forme et dimensions de spécimen d'ossature de déformation. Il a une largeur de 10 mm, une largeur de section de poignée de 30 mm, une longueur totale égale à 180 mm, une longueur de section réduite de 104 mm, une longueur de section de poignée de 30 mm, un rayon de filet de 8 mm et une épaisseur de 2mm. Les contraintes uniformes égales et opposées de magnitude sont augmentées

de façon monotone. Les éprouvettes ont été préparées selon la norme ASTM E8-13a pour les essais de traction de matériaux métalliques[71].

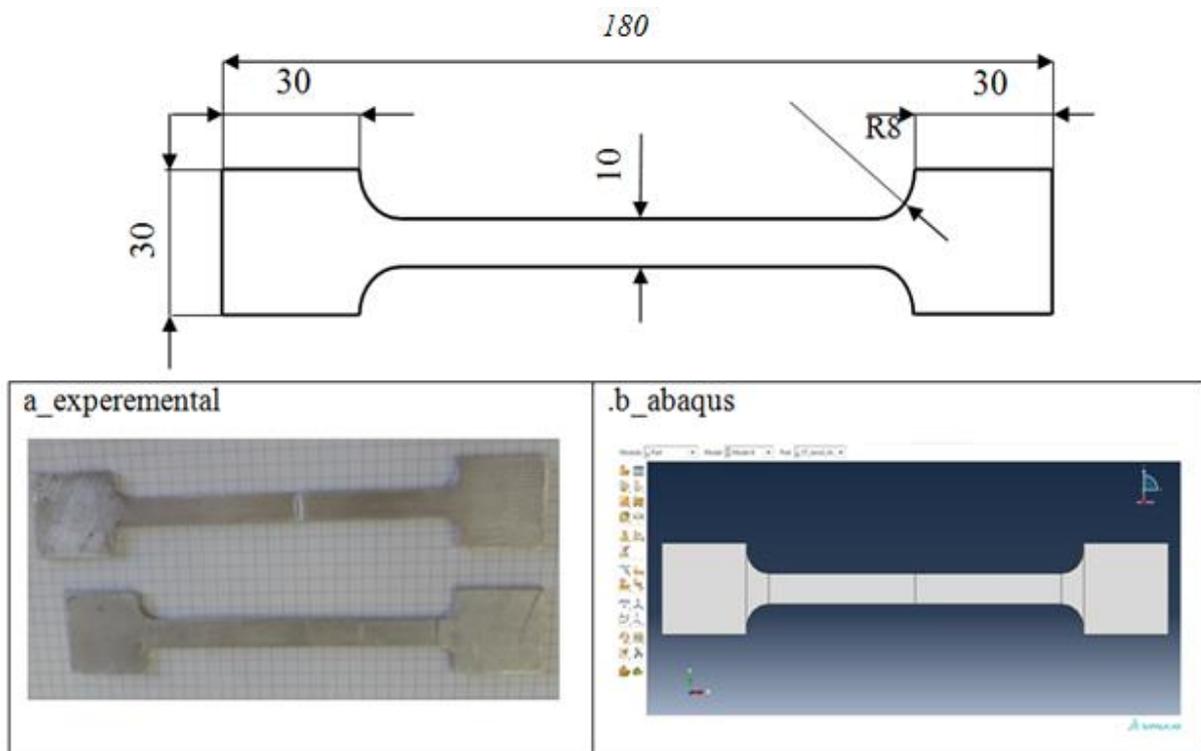


Figure III.3: Forme et dimensions des spécimens d'ossature[71].

Les examens sur les paramètres de rupture pour les configurations à fissures multiples sont effectués sous traction, comme indiqué sur la Figure (III.4.a).

Quatre cas de longueur de fissure  $a$  (10, 15, 20 et 25 mm) ont été considérés

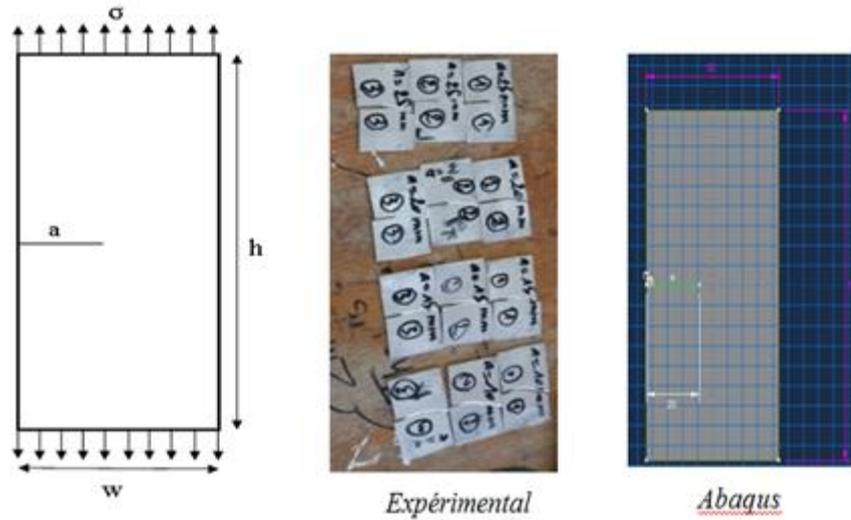


Figure III.(4.a): La géométrie de l'éprouvette avec les paramètres de fissure  
a) la fissure du bord latéral

Comme on le voit sur Figure III.4.b, les paramètres  $\alpha$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $W$ , indiquent l'angle de l'entaille, la longueur de l'entaille (c'est-à-dire la longueur de la fente), la longueur et la largeur de l'éprouvette respectivement. Les valeurs de ces paramètres considérées dans les expériences sont les suivantes:  $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$  et  $90^\circ$

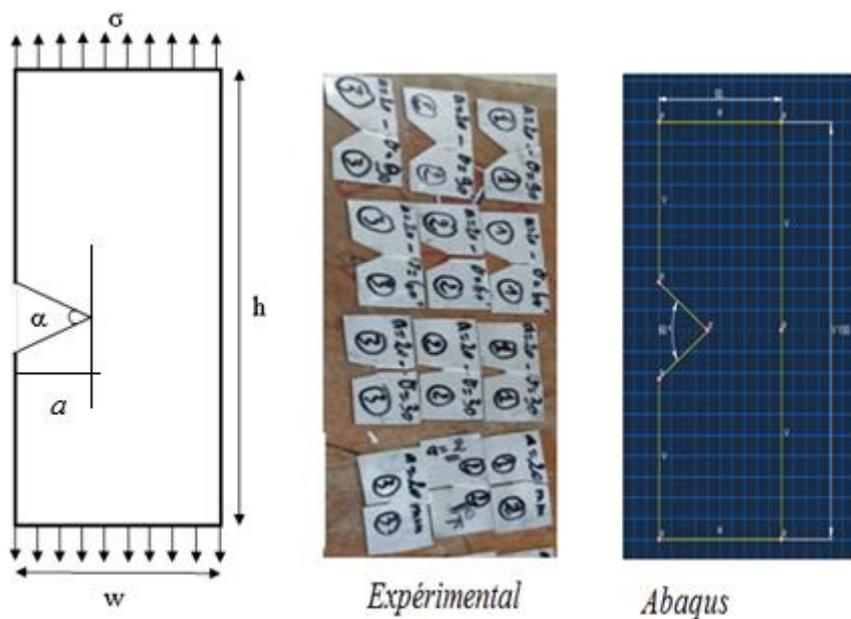


Figure III.(4.b): La géométrie de l'éprouvette avec les paramètres de fissure  
b) l'éprouvette à entaille en V

Les essais de traction permettant de caractériser le matériau à étudier.

Ont été réalisés sur une machine d'essai MTS 810 avec contrôle de la force exercée sur les éprouvettes dans le laboratoire de science et technologie de l'eau du matériau (Université de Mascara-Algerie ).

Les propriétés du matériau sont présentées dans le Tableau III.3.

### ***III.3.3.Machine de traction***

MTS est l'un des principaux fournisseurs mondiaux de solutions d'essai et de simulation mécaniques. Les technologies MTS d'asservissement de précision de la force et du mouvement ainsi que le savoir-faire inégalé sur les essais sont au cœur de la recherche et de l'innovation des systèmes, des composants et des structures dans tous les secteurs et domaines[72].

La famille MTS criterion intègre des boucles d'asservissement MTS haute résolution, un large portefeuille de bâtis de charge électromécaniques et statiques-hydrauliques, et une gamme complète d'accessoires d'essais de haute qualité. Son logiciel MTS *Test\_Suite TW* facile à utiliser et le nombre toujours croissant de modèles d'essais étendent l'utilité de ces systèmes à une gamme variée d'applications, notamment les essais de traction, de compression, de flexion et de cisaillement sur des éprouvettes tels que les :Métaux , Matériaux composites ,Polymères ,Matériaux de construction ,Produits en bois et papier , Produits biomédicaux , Fibres et textiles, Adhésifs et revêtements , et plus encore cette machine de traction est équipée d'un capteur de force , fixé sur la traverse mobile, d'un capteur de déplacement, de deux attaches (mors) mobiles idéalement auto-serrantes pour réaliser un essai de traction et d'un enregistreur graphique. La traverse mobile est entraînée par deux vis latérales, actionnées par un motoréducteur à courant continu.

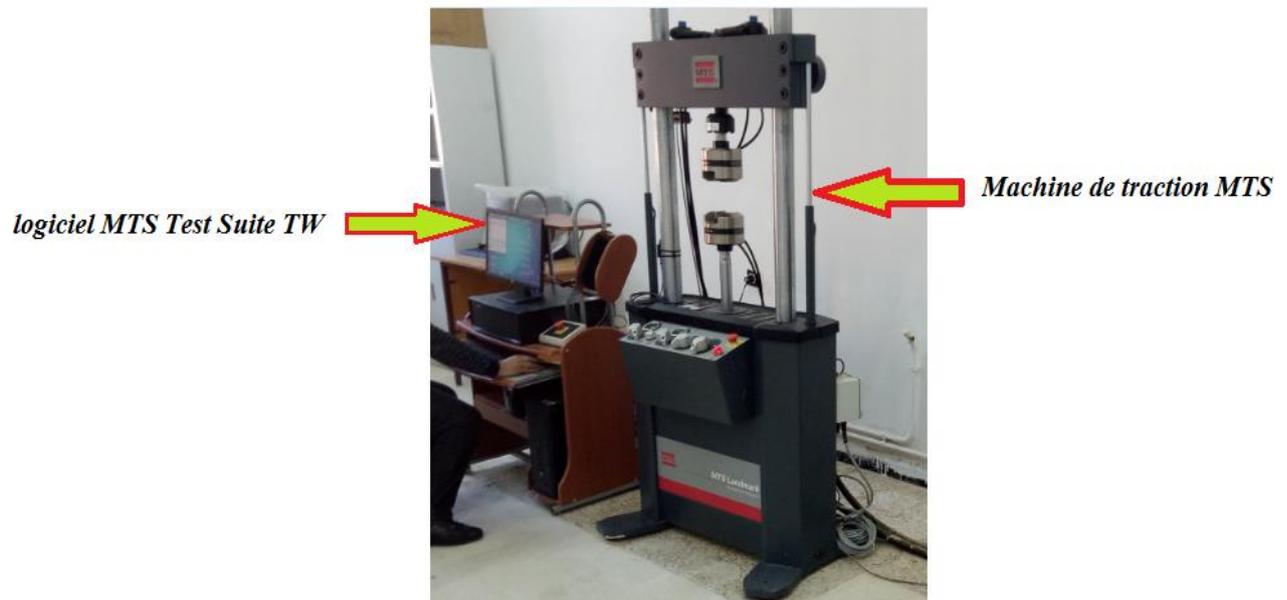


Figure III.5: Machine de traction MTS avec logiciel Test Suite (TW)

#### III.3.4. Préparation des éprouvettes

Un bon essai commence par une bonne éprouvette. Les éprouvettes fabriquées à partir de tôles et feuilles d'aluminium sont aujourd'hui précisément produites à l'aide de presses à découper. Pour que les résultats d'essais ne doivent être influencés par aucun changement de matériau, qui serait provoqué par l'écroutissage dans la zone de bordure.

La préparation des éprouvettes par usinage a une influence sur les surfaces finies, et même dans certains cas, sur la structure interne des éprouvettes. Les résultats d'essai dépendent fortement de ces deux paramètres, il est important de définir exactement les outils et les conditions d'usinage nécessaires pour obtenir des résultats d'essai reproductibles avec les éprouvettes usinées.

Le fraisage permet de préparer des éprouvettes complètes, curvilignes (haltères) et rectangulaires, ainsi que des entailles sur des éprouvettes finies.



Figure III.6: Préparation d'une éprouvette sur la fraiseuse

### III.3.5. Préfissuration

Technique consistant à provoquer une fissuration contrôlée selon un petit pas, afin d'obtenir des fissures fines, rectilignes et peu évolutives donc la discontinuité créée .



Figure III.7: Lame de la Scie Circulaire Disque de couper Haute Vitesse.

L'objectif de l'essai est de générer une fissure dans une éprouvette à partir d'une entaille existante (réalisée à la scie par exemple) sans que cette fissure se propage à travers toute l'éprouvette.

a) Eprouvette avant l'essai



b) Eprouvette avant l'essai



c) Simulation par XFEM

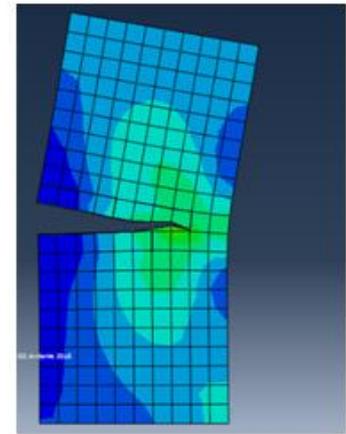


Figure III.8: Des éprouvettes contiennent des Pré fissures.

### III.4. Étude du comportement élastique

#### III.4.1. L'essai de traction uniaxiale

Le principe de l'essai de traction uniaxiale est de déformer une éprouvette dont la zone utile de section constante peut être cylindrique ou parallélépipédique.

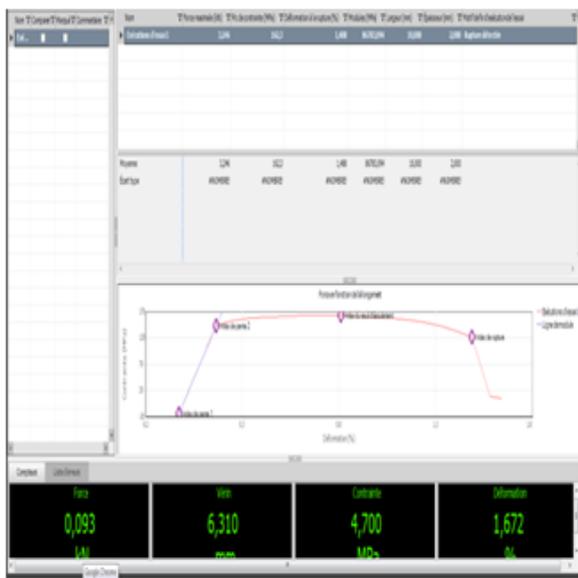
La longueur de l'éprouvette est généralement grande devant les dimensions de la section de la zone utile afin de respecter les conditions géométriques nécessaires à l'essai de traction. Cette éprouvette est maintenue entre deux mors, l'un fixe et l'autre mobile. La commande est une vitesse de déplacement (ou de déformation) constante. Durant un essai de traction, la zone utile de l'éprouvette est soumise à un effort unidirectionnelle longitudinale jusqu'à sa rupture. La charge appliquée  $F$  et l'allongement  $\Delta L$  de la longueur initiale de la zone utile  $L_0$  sont enregistrés simultanément au cours de l'essai. Cet allongement peut être mesuré par l'intermédiaire du déplacement de la traverse de la machine de traction, à l'aide d'un extensomètre ou par une technique optique de mesure.



Figure III.9: Essai de traction sur éprouvette fixée verticalement et centrée entre les mors

Les caractéristiques mécaniques tirées d'un essai de traction doivent être mesurées suivant des procédures normalisées [73]. Ces données permettent ensuite d'obtenir les grandeurs caractéristiques de la résistance mécanique du matériau (paramètres élastiques et plastiques) mais elles permettent aussi d'accéder à la courbe de référence contrainte-déformation.

a) Ecran de logiciel MTS Test Suite TW



b) Courbe contrainte-déformation du matériau étudié (Aluminium)

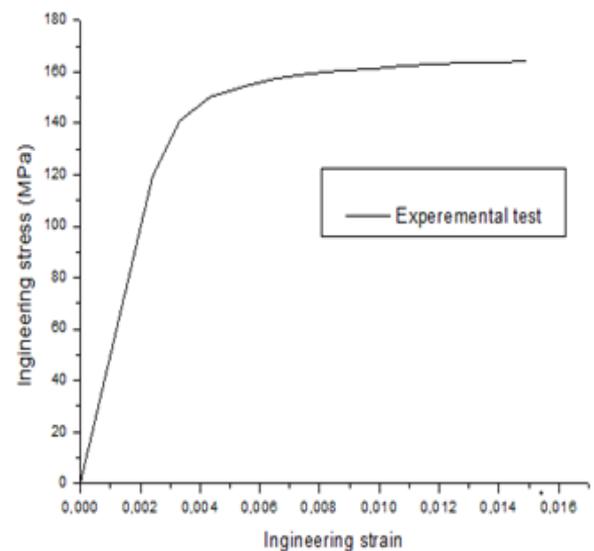


Figure III.10: Courbe contrainte-déformation d'un alliage d'Aluminium

Lors d'un essai de traction, le tenseur des contraintes  $\sigma$  ne comporte qu'une composante non nulle suivant l'axe de traction  $x$ , est  $\sigma_I$ . Sous les hypothèses d'isotropie et d'homogénéité des champs de déformations et de contraintes, les tenseurs dans le repère principal sont les suivants

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} = \varepsilon_{II} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne en élasticité

$$\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_I & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\varepsilon_I \end{pmatrix}$$

Où  $\nu$  est le coefficient de Poisson

#### **III.4.2.Coefficient de Poisson**

Ce coefficient représente l'aptitude du matériau à se comprimer et traduit le rapport entre l'allongement relatif transversal et l'allongement relatif longitudinal. Ainsi, cette quantité lie les composantes de l'état de déformation [74].

Ce coefficient de Poisson est particulièrement difficile à mesurer lorsque les déformations sont petites.

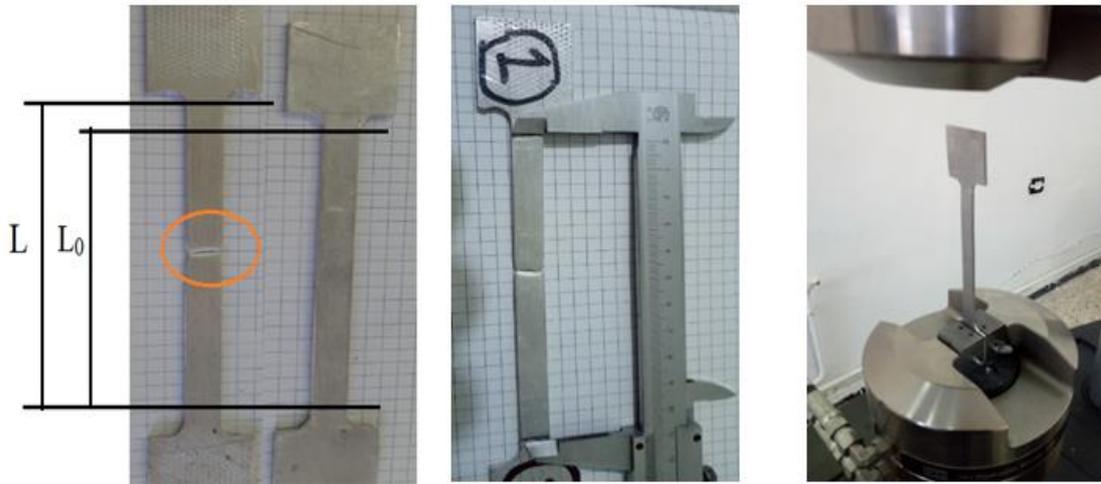


Figure III.11: Détermination de coefficient de poisson.

Les résultats obtenus expérimentalement pour le calcul de coefficient de poisson sont illustrés dans le tableau suivant

<i>Eprouvette_caractirisation</i>						
<i>L</i>	<i>L0</i>	$(L-L0)/L0$	<i>l0</i>	<i>l</i>	$(l0-l)/l0$	$coef\ de\ poisson = \frac{(l0-l)/l0}{(L-L0)/L0}$
<b>110</b>	<b>104</b>	<b>0,05769</b>	<b>10</b>	<b>9,8</b>	<b>0,02</b>	<b>0,346</b>

Tableau III.1: Détermination de coefficient de Poisson du matériau étudié

Matériaux	Aluminium (Al)	Béryllium (Be)	Bore (B)	Cuivre (Cu)	Fer (Fe)	Magnésium (Mg)	Or (Au)	Plomb (Pb)	Titane (Ti)
<b>Coef de Poisson</b>	0,346	0,32	0,21	0,33	0,21 - 0,259	0,35	0,42	0,44	0,34

Tableau III.2: Exemple de coefficient de Poisson pour différent matériaux

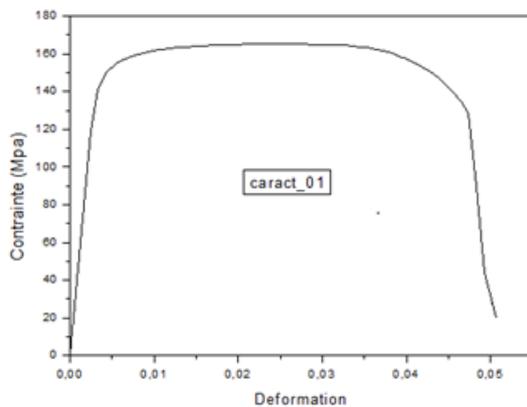
### III.4.3. Détermination du module d'Young par essai de traction

Le métal Comme un ressort, sollicité d'abord à un comportement parfaitement élastique. La rigidité de ce métal est le module d'Young, noté  $E$ . Il correspond à la pente de la partie linéaire élastique d'une courbe de traction :

$$E = \frac{F/S_0}{\Delta L/L_0}$$

où  $F$  est l'effort appliqué lors d'un essai de traction,  $S_0$  la section initiale de l'éprouvette testée,  $L_0$  la longueur initiale de la zone utile de l'éprouvette et  $\Delta L$  la différence entre la longueur  $L$  la longueur de la zone utile de l'éprouvette à un instant donné et  $L_0$ . Il est généralement déterminé en réalisant une régression linéaire sur des points de la partie élastique d'une courbe de traction

a) Courbe contrainte /déformation



b) Détermination de module de Young du matériau étudié (Aluminium)

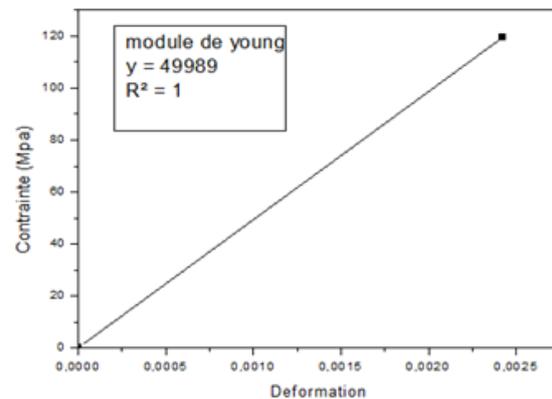


Figure III.12: Détermination de module de Young

### III.4.4. La résistance élastique

La limite d'élasticité  $\sigma_0$  correspond à la contrainte à partir de laquelle un matériau commence à plastifier, c'est-à-dire à se déformer de manière irréversible. Cette limite d'élasticité est parfois difficile à mesurer sur des matériaux ayant un fort taux d'écroutissage. C'est pourquoi on utilise souvent  $R_{p0.2}$ , la limite conventionnelle d'élasticité définie à 0, 2 % de déformation. Pour un matériau présentant une courbe

avec un palier on définit la limite inférieure d'élasticité,  $R_{eL}$ , et la limite supérieure d'élasticité  $R_{eH}$  d'après la norme sur l'essai de traction

#### ***III.4.5. Caractérisation du comportement plastique***

Les essais mécaniques dans un environnement spécifique donnent accès aux paramètres nécessaires à la modélisation du comportement des matériaux solides. Pour que les modèles ainsi déterminés soient corrects, les grandeurs mécaniques telles que les contraintes et les déformations doivent être déterminées précisément. Il existe une panoplie d'essais homogènes ou hétérogènes de caractérisation destinés chacun à la détermination de propriétés particulières du comportement : écrouissage, viscosité, endommagement... Ces essais peuvent être monotones ou cycliques et sont conduits en conditions quasi-statiques ou dynamiques. Cependant, les essais hétérogènes ne permettent pas d'avoir une relation entre une composante de contrainte et une composante de déformation. Pour cette raison, les essais homogènes dans lesquels les états de contraintes et de déformations sont uniformes (ou quasi-uniformes) sont les principaux essais utilisés en caractérisation expérimentale du comportement des matériaux solides pour étudier l'incidence de facteurs tels que la vitesse de déformation .

#### ***III.4.6. Mesure des déplacements***

Les jauges, extensomètres et autres moyens de mesure avec contact de déplacement sont performants, simples à utiliser et permettent une mesure en temps réel du déplacement avec une grande précision. Cependant, ces dispositifs se contentent d'une mesure ponctuelle (jauges) ou moyennent les déplacements d'une surface (extensomètre). C'est pourquoi ces techniques sont de plus en plus complétées ou remplacées par des techniques optiques de mesure qui déterminent le déplacement de points d'une grille virtuelle associée à la surface de l'éprouvette sollicitée lors de l'essai.

### **III.4.6.1. Détermination des déplacements par des techniques optiques de mesure**

La détermination des déplacements surfaciques sans contact s'appuie principalement sur deux grandes familles de techniques optiques de mesure [75] :

1. les techniques de mesure non interférométriques
2. les techniques de mesure interférométriques.

Les techniques de mesure non interférométriques utilisent une intensité lumineuse pour créer un repérage de points sur la surface de l'échantillon à tester. Ce repérage se fonde soit sur une association aléatoire entre les points physiques de la surface et un signal lumineux (dépôt de mouchetis, nature des surfaces [76-77]), soit sur une association « régulière » (en créant des grilles sur la surface de l'échantillon [78,79]). La détermination des déplacements surfaciques est ensuite réalisée par un logiciel d'analyse des images. Le dépôt de mouchetis sur une surface est beaucoup plus facile à réaliser qu'une grille. De plus, l'inconvénient principal d'un motif périodique réside justement dans sa périodicité. Le même motif peut se retrouver plusieurs fois sur la surface ce qui peut mener à des ambiguïtés lors de l'analyse des images.

L'interférométrie est une technique de mesure qui exploite les interférences intervenant entre plusieurs ondes lumineuses entre elles. La détermination des déplacements se fait alors à partir de la lumière diffusée [80] ou de la lumière diffractée [81, 82]. Les méthodes interférométriques conduisent à la détermination des champs de déplacement surfacique avec une excellente précision mais nécessitent une mise en œuvre complexe. Le système d'interférométrie se compose d'un système de projection (source lumineuse, lentille d'imagerie, structure de grille à onde carrée) et d'un système de visualisation (lentille d'imagerie, sous-grille, caméra). L'ensemble est très sensible aux vibrations. Ce n'est pas le cas des dispositifs d'acquisition d'images numériques qui sont plus tolérants quant à leur mise en place. C'est donc la corrélation d'images qui est choisie pour la détermination des déformations des éprouvettes lors des essais quasi-statiques et dynamiques

### ***III.5. Modélisation numérique et conditions aux limites***

Le modèle qui a été sollicité est serré et tiré vers le haut avec une vitesse constante ( $V_y = 10 \text{ mm / s}$ ) sur le bord supérieur dans la direction  $y$  avec un bord inférieur enchâssé. Une courbe de contrainte élastique-déformation plastique non linéaire est donnée à la Figure III.13.

L'analyse a été réalisée à l'aide du logiciel Abaqus 6.13.

La méthode d'éléments finis étendus tridimensionnels avec maillage automatique a été utilisée sur la structure. Toutes les simulations sont effectuées à l'aide d'éléments quadrilatéraux bilinéaires à quatre nœuds sous contrainte plane.

Un raffinement du maillage a été créé au voisinage des fonds de fissure.

Le cas étudié présentant une fissure inclinée, le mode d'ouverture et de glissement dans le plan de la fissure sont simultanément présents, ce qui conduit au mode I et mode II .

Les expériences d'essais de traction dans le but d'estimer la charge de rupture et la ténacité, pour les configurations des fissures multiples.

La simulation XFEM des propriétés de résistance à la traction et à la ténacité a été réalisée dans le logiciel Abaqus 6.13. Les propriétés mécaniques expérimentales et simulées ont été comparées.

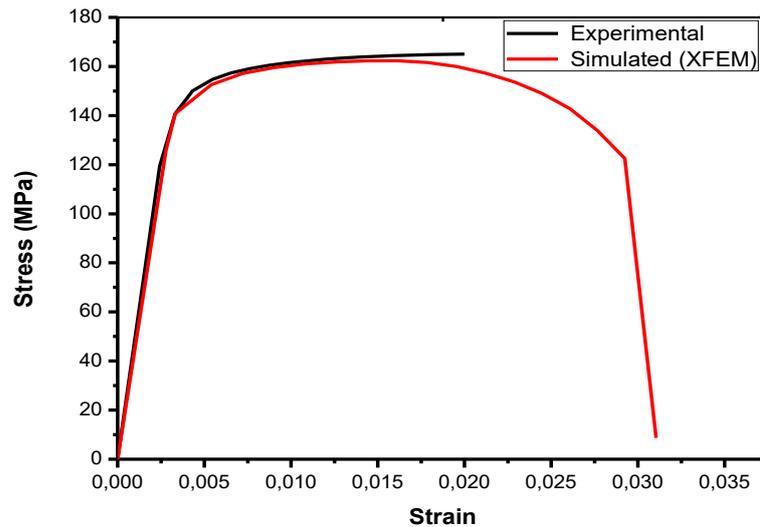


Figure III.13: Comparaison entre résultats de traction expérimentaux et simulés.

Une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques obtenus par la simulation XFEM dans le logiciel de calcul Abaqus 6.13. Les résultats de l'essai de traction, on conclut clairement que l'essai de traction, (dans la zone tendue), approche le mieux la résistance à la traction uniaxiale.

### III.5.1. Diagramme contrainte-déformation

Le diagramme contrainte-déformation met très bien en évidence les différences de comportement des matériaux, et fournit les valeurs caractéristiques de résistance à la traction  $R_m$ , limite d'élasticité  $R_e$ , limite de proportionnalité  $R_p$ , allongement de rupture  $A$  et module d'élasticité  $E$ .

Les résultats des essais de traction qui ont été réalisés sur les éprouvettes sont présentés dans le Tableau III.3. Ce tableau donne les valeurs moyennes de la limite d'élasticité, de la contrainte ultime de traction, du module de Young et du coefficient de Poisson.

Module d'élasticité (MPa)	Coefficient de Poisson	Contrainte de limite d'élasticité (MPa)	Contrainte ultime (Mpa)
50000	0.34	155	162

Tableau III.3: Comportement mécanique de matériaux étudiés.

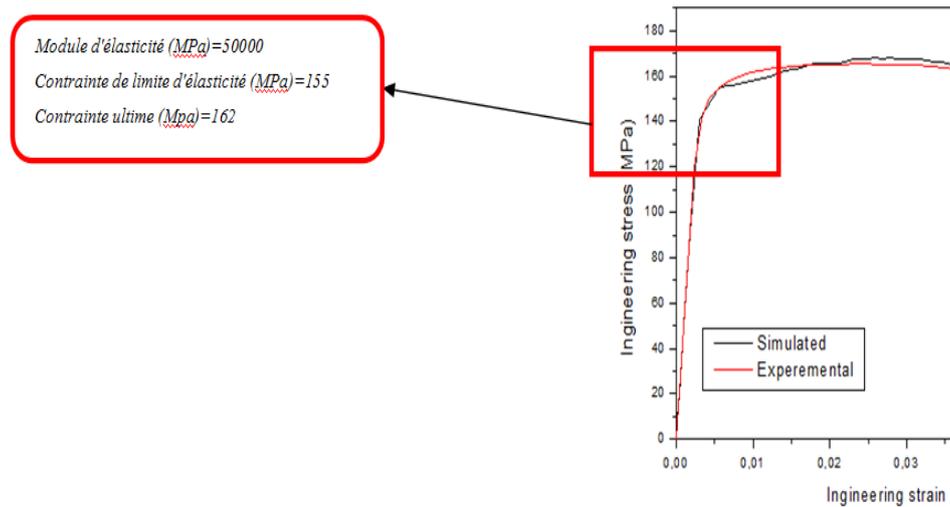


Figure III.14: Courbe contrainte-déformation des éprouvette étudiés.

Cette caractérisation en traction est très importante pour la détermination des contraintes maximales à appliquer lors des essais de traction sans dépasser la limite d'élasticité du matériau. En effet, l'objectif de cette partie est de déterminer un indicateur de dommage par l'intermédiaire de la ténacité statique.

### III.5.2. Résultats et discussion

Les courbes déplacement / charge illustrées dans les figures ci-dessous, les données réduites montrent des différences marquées.

La simulation numérique produit la même rigidité dans la branche élastique presque les mêmes valeurs de charge et de déplacement imposé.

Quartés essais de traction sont effectués pour la même configuration de fissure. Le même nombre d'essais est considéré dans le cas d'échantillons en forme de V pour le même angle d'entaille.

Les charges à la rupture pour différentes longueurs de fissures sont résumées dans le Tableau III.4.

<i>a/w</i>	<i>Spécimen</i>	<i>Charge à la rupture (KN)</i>			<i>Erreur %</i>
		<i>Expérimental</i>	<i>Valeur expérimentale moyenne</i>	<i>XFEM</i>	
0,2	<i>a_10-1</i>	12,62	12,65	13,01	2,85
	<i>a_10-2</i>	12,91			
	<i>a_10-3</i>	12,41			
0,3	<i>a_15-1</i>	10,55	10,51	10,31	-1,90
	<i>a_15-2</i>	10,75			
	<i>a_15-3</i>	10,24			
0,4	<i>a_20-1</i>	8,67	9,00	8,95	-0,56
	<i>a_20-2</i>	9,23			
	<i>a_20-3</i>	9,09			
0,5	<i>a_25-1</i>	8,3	7,92	7,62	-3,79
	<i>a_25-2</i>	7,79			
	<i>a_25-3</i>	7,67			

*Tableau III.4: Charge à la rupture pour différentes longueurs de fissure et l'erreur relatif .*

$$\text{avec } \text{Erreur \%} = \frac{(\text{valeur XFEM} - \text{valeur Exprml})}{\text{valeur Exprml}} * 100\%$$

Le faible niveau de ductilité indique un mode de défaillance fragile dû à la faible plasticité du fond de fissure, alors qu'un niveau de ductilité élevé reflète un comportement d'affaissement et d'étranglement au fond d'une fissure.

On remarque sur le tableau (III.4) que les erreurs relatives pour les cas étudiés sont inférieures à 4% en valeur absolue, ce qui signifie que nos résultats numériques sont acceptables par rapport aux résultats expérimentaux.

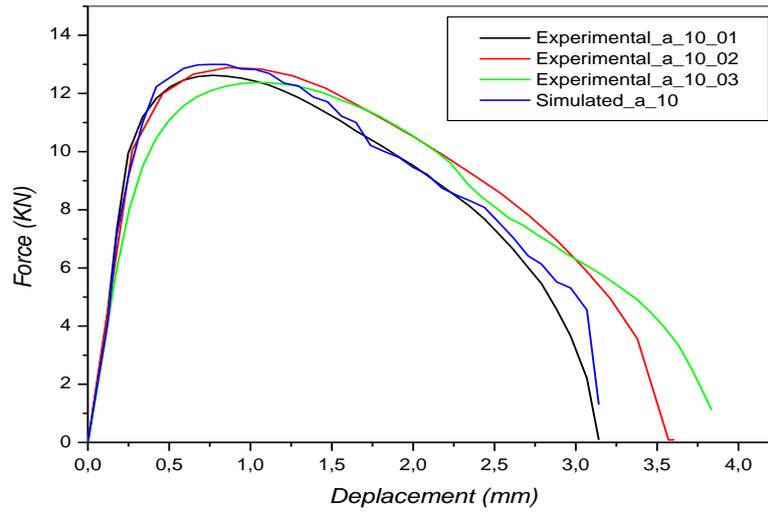


Figure III.15: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec  $a = 10$ .

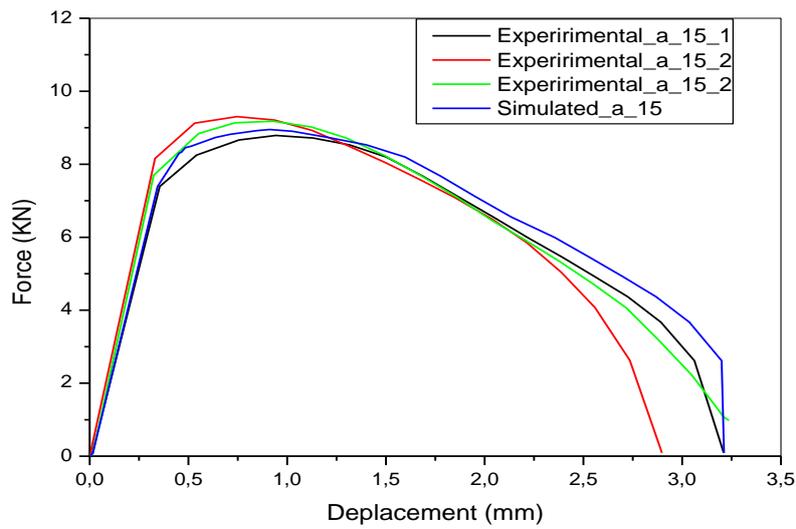


Figure III.16: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec  $a = 15$ .

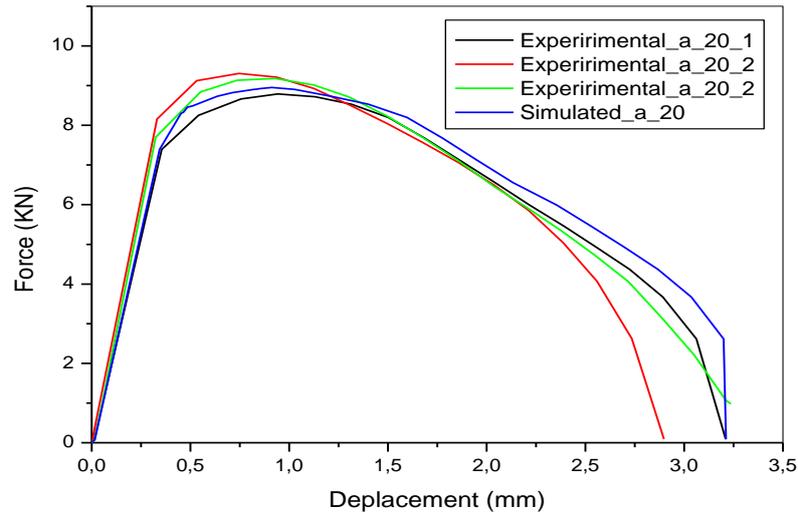


Figure III.17: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec  $a = 20$ .

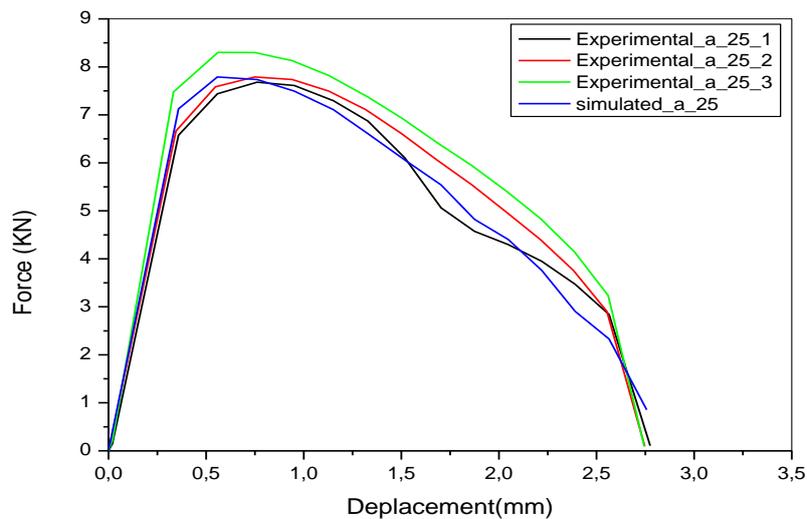


Figure III.18: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour la fissure du bord latéral avec  $a = 25$

On voit sur ces figures que les courbes force-déplacement ont la même forme pour les différents cas étudiés. La charge maximale est observée dans le cas où la longueur de la fissure est la plus courte ( $a = 10$  mm) et la charge minimale est observée dans le cas où la longueur de fissure est la plus longue ( $a = 25$  mm)

La fissure en mode I se propage plus vite dans l'éprouvette avec longueur de fissure ( $a=25\text{mm}$ ) par rapport au l'éprouvette avec longueur de fissure ( $a=10\text{mm}$ ).

On remarque que toutes les éprouvettes pré-fissurées ont une valeur de Charge à la rupture quasiment similaire ( entre 7.62 et 13.01KN).

Ce matériaux présente un comportement linéaire jusqu'au point correspondant à la charge maximal de rupture .la phase de rupture est très irrégulière.

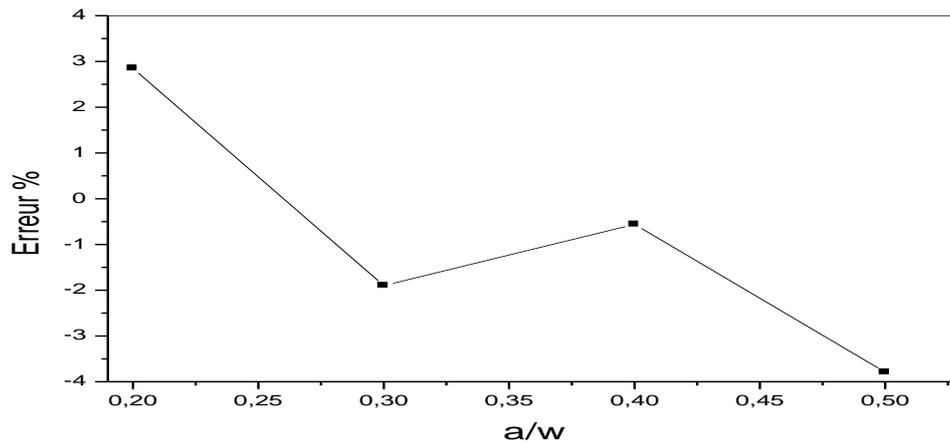


Figure III.19: Erreur relative de la Charge à la rupture pour les différents longueurs de fissure

Pour les éprouvettes pré-fissurées, on obtient la même tendance. La vitesse de propagation de fissure augmente avec l'augmentation de la longueur de fissure est un ajustement direct

Dans le Tableau III.5 une comparaison entre la charge à la rupture par la méthode expérimentale et la méthode XFEM pour les spécimens à entaille en V.

Angle de spécimen entaillé (a=20 mm)		la Charge à la rupture (KN)			Erreur %
		Expérimental	Valeur expérimentale moyenne	XFEM (présent)	
a = 0°	a_20-1	8,67	9	8,95	-0,56
	a_20-2	9,23			
	a_20-3	9,09			
a = 30°	ang_30-1	9,47	9,13	9,34	2,30
	ang_30-2	8,86			
	ang_30-3	9,07			
a = 60°	ang_60-1	8,81	8,99	9,02	0,33
	ang_60-2	8,95			
	ang_60-3	9,22			
a = 90°	ang_90-1	9,03	9,051	9,05	-0,01
	ang_90-2	9,26			
	Ang_90-3	8,86			

Tableau III.5: Charge à la rupture pour différents Angles de l'entaille et l'erreur relatif

$$\text{avec Erreur \%} = \frac{(\text{valeur XFEM} - \text{valeur Exprml})}{\text{valeur Exprml}} * 100\%$$

les courbes de charge-déplacement obtenues expérimentalement et numériquement par la méthode des éléments finis étendus XFEM pour le matériau testé avec un angle d'encoche sont présentées dans Les Figures III(20,21,22,23).

La simulation, qui utilise une vitesse de déformation fixe, correspond bien aux données de test expérimental, en particulier pour la zone de rupture fragile.

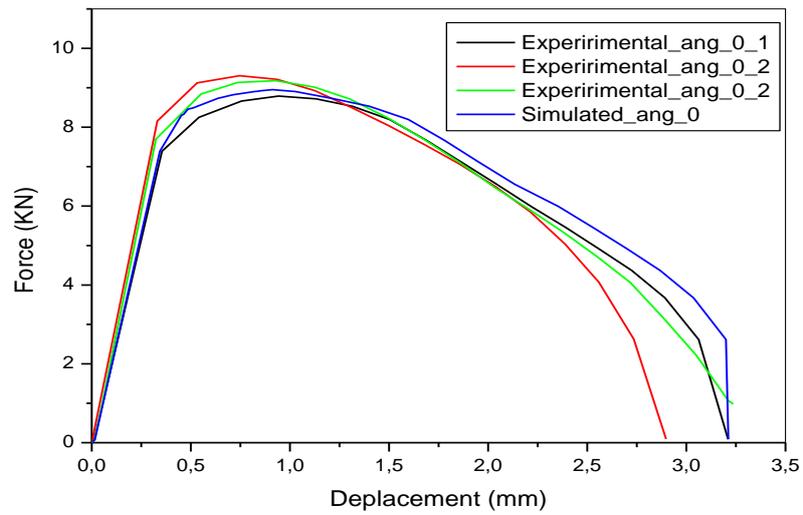


Figure III.20: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec  $a = 20$  mm et  $\alpha = 0$ .

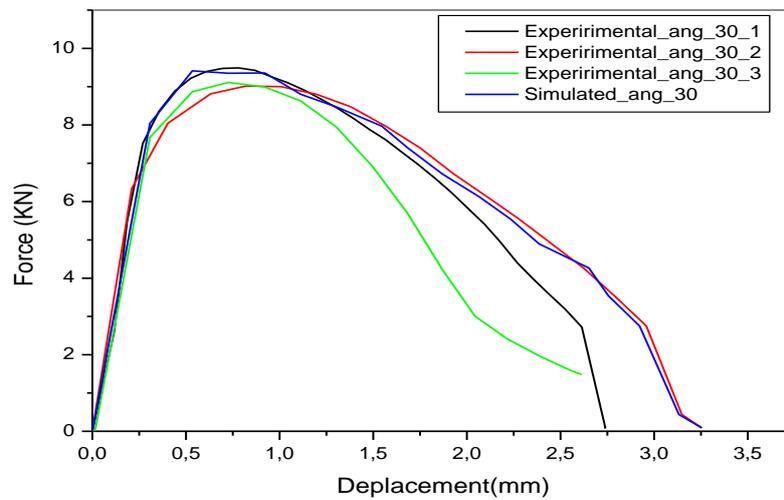


Figure III.21: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec  $a = 20$  mm et  $\alpha = 30^\circ$ .

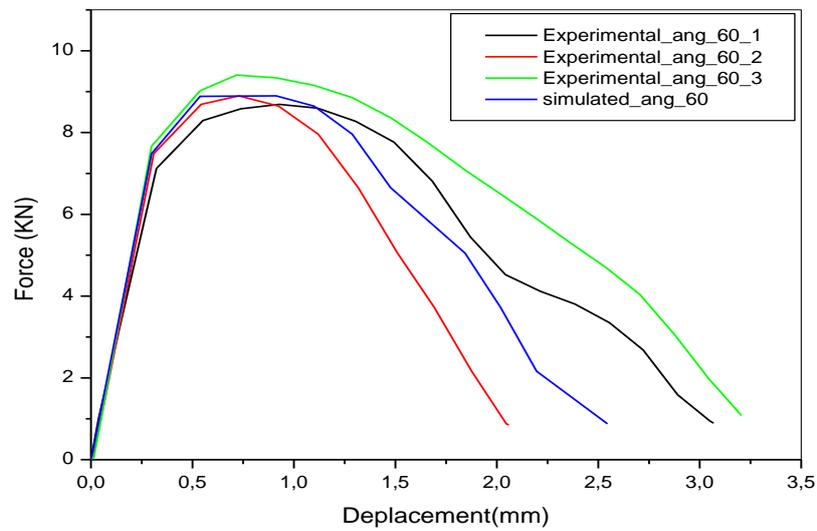


Figure III.22: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec  $a = 20$  mm et  $\alpha = 60^\circ$ .

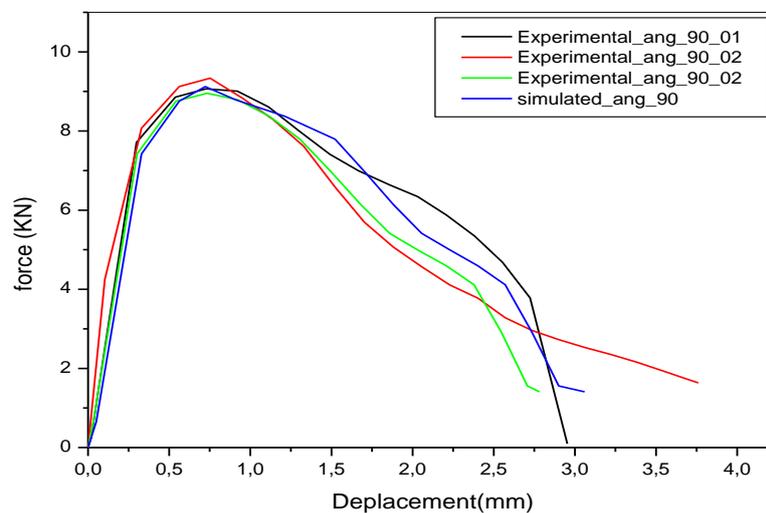


Figure III.23: Comparaison des résultats de traction expérimentaux et simulés pour le spécimen à entaille en V avec  $a = 20$  mm et  $\alpha = 90^\circ$ .

Les Figures III(20,21,22,23) montrent un comportement linéaire similaire jusqu'au point de la charge maximal de rupture et une déformations plastiques au voisinage de la pointe de fissure. Il est noter que les valeurs de déformation plastique autour de la pointe de fissure presque égaux.

La déformation est beaucoup plus grande dans le cas ( $a=20\text{mm}$  et  $\alpha = 90^\circ$ ) que dans le cas ( $a=20\text{mm}$  et  $\alpha = 0^\circ$ ). Par contre, les valeurs sont très faibles entre le cas ( $a=20\text{mm}$  et  $\alpha = 30^\circ$ ) que le cas ( $a=20\text{mm}$  et  $\alpha = 60^\circ$ ) il est noter que la fissure en mode I se propage plus vite dans l'éprouvette ( $a=20\text{mm}$  et  $\alpha = 90^\circ$ ) par rapport l'éprouvette ( $a=20\text{mm}$  et  $\alpha = 0^\circ$ ).

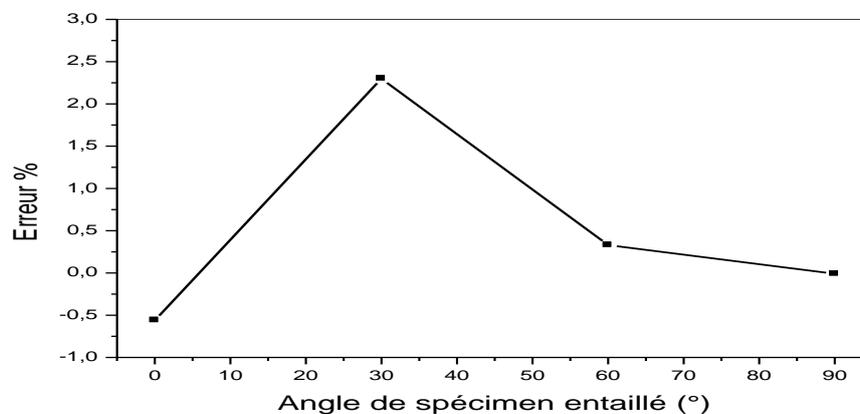


Figure III.24: Erreur relative de la Charge à la rupture pour les différents Angles de l'entaille

la fissure se propage plus rapidement pour la grande ouverture ( $\alpha = 90^\circ$ ) La plus faible vitesse de propagation est celle qui correspond à la fissure de longueur ( $a=20\text{ mm}$  et  $\alpha = 0^\circ$ ) la vitesse de propagation est quasiment identique dans les éprouvettes entaillées en V pour ( $\alpha = 30^\circ$  et  $60^\circ$ )

### III.6. Facteur d'intensité de contrainte [83]

Lorsqu'un matériau soumis à une sollicitation mécanique développe une fissure, celle-ci peut se propager selon plusieurs modes distincts : l'ouverture (mode I), le glissement (mode II) ou encore le glissement dévié (mode III) . Le mode le plus étudié parce qu'il

est le plus dangereux dans les matériaux est le mode I , pour lequel les contraintes en pointe de fissure, s'expriment par

$$\sigma_{ij}(M) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

avec  $ij = xx, yy, xy$  ou  $yx$

où  $K_I$  est le facteur d'intensité de contrainte en mode I et  $r$  et  $\theta$  définissent la position du point  $M$ , et  $f_{ij}(\theta)$  est une fonction trigonométrique.

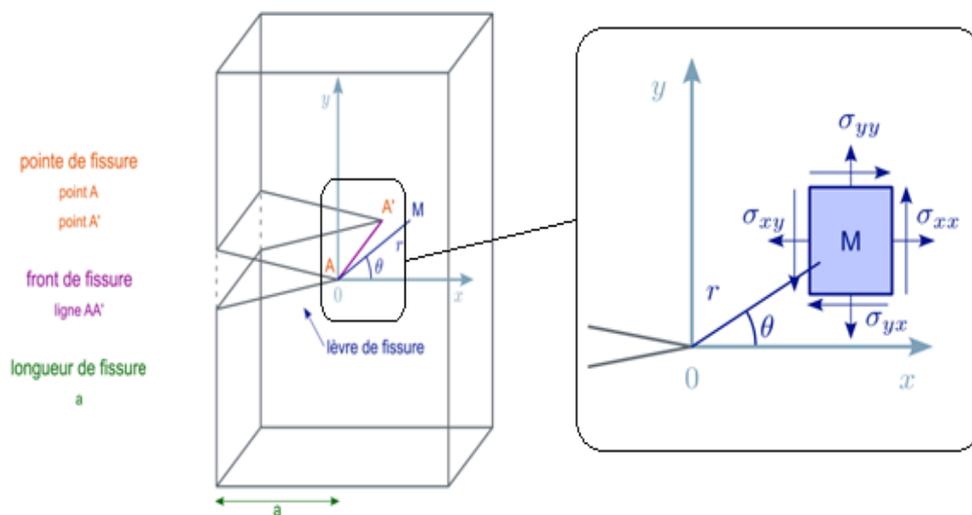


Figure III.25: Tenseur de contrainte au point  $M$  [83].

On constate que si  $r$  se rapproche de 0, alors les contraintes tendent vers l'infini, ce l'augmentation des contraintes au voisinage de la fissure conduit généralement à un dépassement local de la limite d'élasticité qui se traduit par l'apparition d'une zone déformée plastiquement .

### III.6.1. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes s'expriment en fonction du champ des contraintes au voisinage de la fissure, et ce champ de contraintes étant parfaitement accessible numériquement, ce calcul ne devrait pas poser de problèmes à priori. Pourtant, nous allons voir qu'une bonne précision sur ces facteurs est difficile à

obtenir. Il existe un bon nombre de solution ; la méthode la plus couramment utilisée consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus dont les solutions sont connues. Le principe utilisé est toujours celui de superposition des solutions qui, bien évidemment, résulte de l'élasticité linéaire[84].

Considérons une plaque rectangulaire, contenant une fissure horizontale débouchante, représentée par la Figure III.26: On note par  $a$  la longueur de la fissure,  $w$  la largeur de la plaque et  $h$  sa hauteur. La plaque est soumise à un effort de traction uniforme symétriquement appliqué sur ses deux côtés. la plaque caractérisée par module d'élasticité  $E=50GPa$  matériel Aluminium élastique isotropique et coefficient de poisson  $\nu=0.34$ , et par géométrie de  $h=2w=100mm$  avec  $a=10,15,20$  et  $25mm$  respectivement.

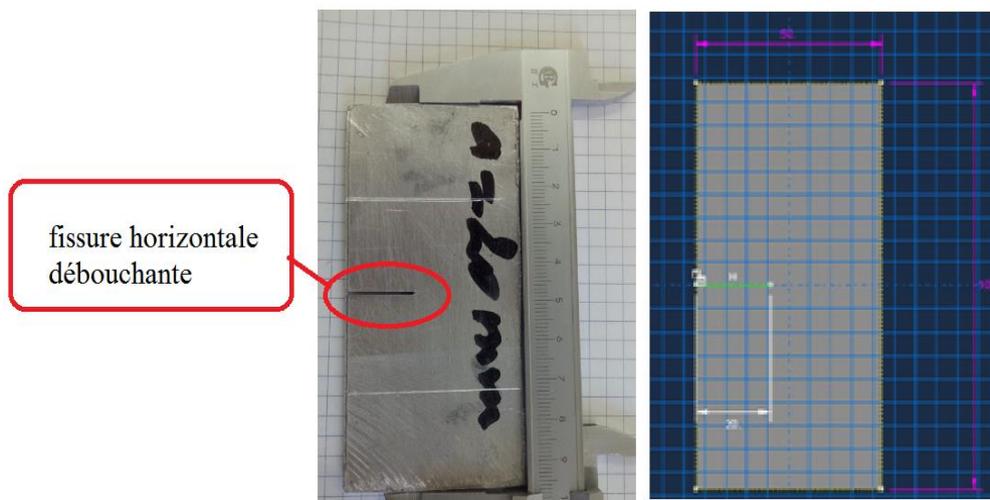


Figure III.26: Schéma du modèle pour l'étude de fissure stationnaire.

On note pour ce type de problème, que le calcul de FIC ( $K_I$ ) est publiée dans les ouvrages latéral de modélisation de la fissure. Par exemple, la solution analytique obtenue par *Ewalds et al* [29]

$$K_I = c\sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{III. 3}$$

Avec  $C$  est le facteur de correction géométrique[29] :

$$c = 1.12 - 0.231\left(\frac{a}{w}\right) + 10.55\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 21.72\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 30.39\left(\frac{a}{w}\right)^4$$

d'après *Ewalds et al* [29] Le facteur  $K_0$  présente la solution exacte utilisé pour normaliser les Facteurs d'Intensité des Contraintes

$$K_0 = \sigma\sqrt{\pi a} \quad \text{III.3}$$

$$K_{In} = \frac{K_{cal}}{K_0} \quad \text{III.4}$$

Avec  $k_{In}$  facteur d'intensité de contrainte en mode I normalisées.

Le tableau suivant présente les solutions exactes et analytiques de facteur d'intensité de contrainte  $K_I [MPa\sqrt{m}]$  ainsi que les valeurs normalisées

$a/w$	$K_0(exact)$	$K_I analytique$	$K_I normalise$
0,2	22,42	30,72	0,27
0,3	22,81	37,86	0,40
0,4	22,55	47,44	0,52
0,5	22,19	62,72	0,65

Tableau III.6: Calcul de Facteurs d'Intensité des Contraintes en mode I analytiquement .

### III.6.2. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du champ de déplacements

La méthode de calcul de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  en 2D et 3D par extrapolation des sauts de déplacements sur les lèvres de la fissure. aussi bien pour une fissure maillée (éléments finis classiques) que pour une fissure non maillée (éléments finis enrichis X-FEM). Dans les deux cas, la méthode n'est applicable que pour des matériaux élastiques linéaires, homogènes et isotropes[ 84].

La méthode utilisée est théoriquement moins précise que le calcul à partir de la forme bilinéaire du taux de restitution de l'énergie et des déplacements singuliers. Elle permet cependant d'obtenir facilement des valeurs relativement fiables des facteurs d'intensité des contraintes. La comparaison des différentes méthodes de calcul est utile pour estimer la précision des résultats obtenus.

La précision des résultats de la méthode d'extrapolation des sauts de déplacement est nettement améliorée si le maillage est quadratique. Pour une fissure maillée, il est recommandé d'utiliser des éléments dits de « Barsoum » en fond de fissure (éléments dont les nœuds milieux sont situés au quart des arêtes). Pour une fissure non maillée, il est recommandé d'enrichir plusieurs couches d'éléments autour du fond de fissure.

La méthode de calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du déplacement est basée sur le développement asymptotique du champ de déplacement en fond de fissure.

En 2D, dans un milieu élastique, linéaire, isotrope et homogène, les champs de contraintes et de déplacement sont connus analytiquement pour les modes d'ouverture de la fissure caractérisé par  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Dans le cas général en 3D, on peut montrer que le comportement asymptotique des déplacements et des contraintes est la somme des solutions correspondants aux modes I et II et III.

Dans tous les cas, la singularité est donc la même et on peut écrire les relations suivantes dans le plan normal au fond de fissure, en un point  $M$  :

$$K_I(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} [U_m] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \quad (III.)$$

$$K_{II}(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} [U_n] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \quad (III.)$$

$$K_{III}(M) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1-\nu^2)} [U_t] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \quad (III.)$$

avec :

$t, n$  dans le plan de la fissure en M ,

$t$  vecteur tangent au fond de fissure en M ,

$n$  vecteur normal au fond de fissure en M ,

$m$  vecteur normal au plan de la fissure en M

$[U]$  saut de déplacement entre les lèvres de fissure.

$$[U_m] = (U_{\text{lèvre supérieure}} - U_{\text{lèvre inférieure}}) \cdot \mathbf{m}$$

$r = \|MP\|$  où  $P$  est un point du plan normal au fond de fissure en M , situé sur une des lèvres.

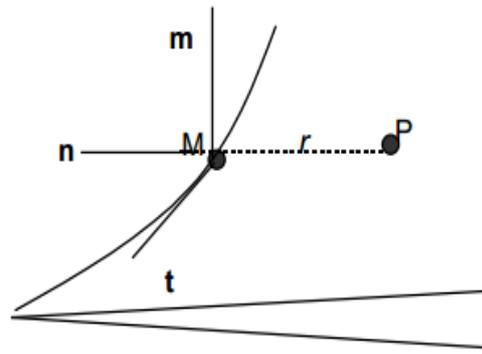


Figure III.27: Système de coordonnées pour l'analyse du champ de contrainte en pointe de fissure

Les résultats obtenus numériquement par la méthode des éléments finis étendus XFEM pour les différentes longueurs de fissure sont regroupés dans Tableau III.7

$a/w$	$K_{I \text{ analytique}}$ ( $MPa\sqrt{m}$ )	$K_{I \text{ PRESENT (XFEM)}}$ ( $MPa\sqrt{m}$ )	Erreur %
0,2	30,72	31,01	0,94
0,3	37,86	36,95	-2,40
0,4	47,44	48,14	1,48
0,5	62,72	61,89	-1,32

Tableau III.7: Représente la variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de fissure

$$\text{avec Erreur \%} = \frac{(\text{valeur } K_I(\text{XFEM}) - \text{valeur } K_I(\text{analytique}))}{\text{valeur } K_I(\text{analytique})} * 100\%$$

Dans le Tableau (III.7) une représentation de la variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de fissure pour les résultats obtenus analytiquement et les résultats obtenus numériquement par la méthode des éléments finis étendus XFEM.

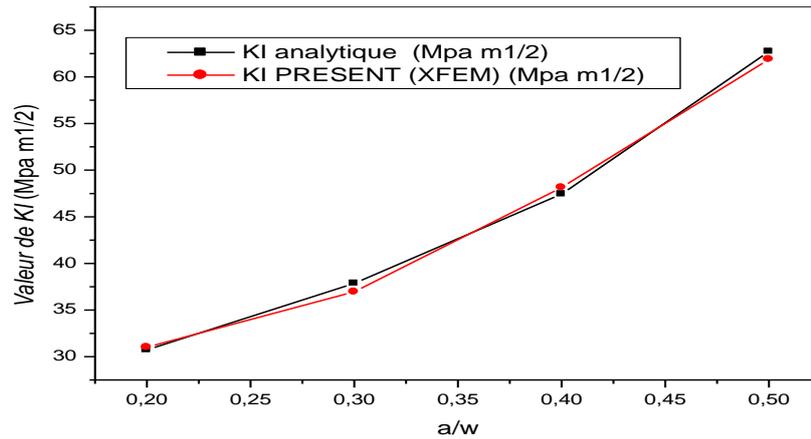


Figure: La variation de  $K_I$  en fonction de  $a/w$   
 a) Résultat analytiques et b) Résultats numériques XFEM)

On remarque à partir de la figure représenté ci-dessus (Figure III.28) qu'il y a une bonne dépendance entre les résultats obtenus analytiquement et les résultats obtenus numériquement par la méthode des éléments finis étendus XFEM.

Les résultats ont montré que le facteur d'intensité de contrainte augmente avec l'augmentation de la longueur de fissure. En résulte qu'il y a une relation de corrélation directe entre la taille de la fissure caractérisée par sa longueur ( $a$ ) et les valeurs de facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ .

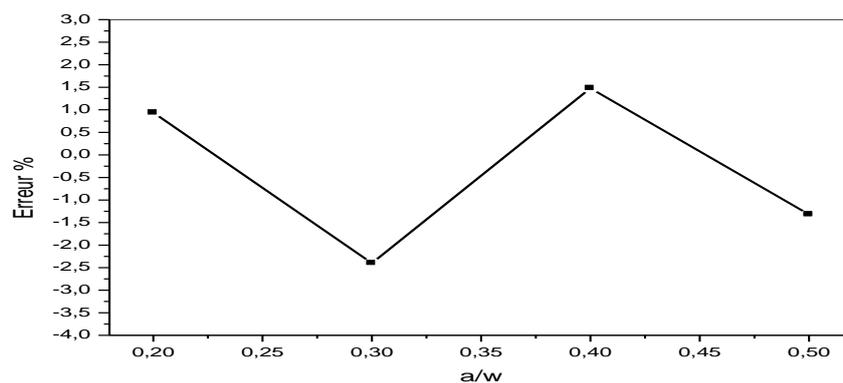


Figure III.29: Erreur relative de  $K_I$  pour les différentes longueurs de fissure

L'estimation d'erreur entre les valeurs de facteur d'intensité des contraintes obtenus analytiquement et numériquement par la méthode des éléments finis étendus XFEM, en mode I pure représentée dans la figure III.29 . À partir de cette figure, on remarque que l'erreur estimée varie entre  $[-0.01$  et  $0.02]$  c'est à dire ne dépasse pas 0.02% ceci confirme la validité de notre modèle numérique.

### **III.7. Conclusion**

Le travail de recherche guidé dans le cadre de cette thèse et qui avait comme objectif principal est l'analyse du problème d'élasticité plane dans un milieu fissures par la méthode des élément finis étendus XFEM dans une plaque d'aluminium , constitue une contribution aussi bien d'un point de vue expérimental que d'un point de vue numérique par la méthode des éléments finis entendus(XFEM).

La question de la validité des interprétations des essais de traction a été aussi un point central autour du quel on s'est concentré. Les essais qui ont été conduits sur la plaque d'aluminium sont des essais de traction directe .

La préparation des éprouvettes a nécessité une grande conscience qui permettait d'assurer l'homogénéité des échantillons.

A partir des essais de traction , on montre que la valeur de la résistance de traction calculée pour des matériaux à comportement élastique et quasiment fragile dépendait fortement de matériaux . Cette résistance diminuer avec l'augmentation de longueur de fissure jusqu'à la rupture brutal du matériaux. On constate que la rupture est typiquement par traction.

L'approche numérique a permis de réaliser différents essais de traction pour juger la validité des essais de traction et des interprétations qui en résultent.

Dans le cas d'un chargement réel uniforme, on a mis en évidence la validité de la solution en contrainte.

les modèles de traction élastique qui approchent le mieux l'état de contraintes dans la partie comprimée de la section puisque cette dernière reste en phase élastique. En revanche, le modèle paraît le mieux adapté pour déterminer le diagramme des contraintes/déformations dans la zone tendue de la section de l'éprouvette.

En utilisant les résultats de l'essai de traction directe, on conclut clairement que l'essai de traction, (dans la zone tendue), approche le mieux la résistance à la traction uniaxiale.

Nous pouvons donc à partir de cette étude numérique basée sur une campagne d'essais expérimentaux au laboratoire, conclure que ce modèle permet d'interpréter correctement les essais de traction uniaxiale et semble pouvoir approcher la résistance à la traction.

Ce résultat est d'une commodité non négligeable pour les approches numériques en mécanique des milieux continus et en plasticité.

Comme perspectives à ce travail de recherches, nous pouvons citer à titre non exhaustif les remarques suivantes :

- D'un point de vue expérimental : La conception et la fabrication d'un dispositif de traction semble nécessaire. De même, il serait utile d'améliorer le dispositif de traction par des capteurs pour permettre l'analyse des résultats.
- D'un point de vue numérique L'automatisation de la procédure du modèle numérique pourrait se faire avantageusement en se basant sur des techniques avancées tels que les algorithmes génétiques. L'utilisation d'un modèle d'éléments discrets en 3D, des logiciels basés sur la méthode XFEM pour prendre éventuellement en considération les phénomènes qui se produisent en volume peut également être envisagé.

On plus est pour objet d'analyser le comportement en rupture dans le plan d'une plaque mince d'aluminium affaiblie par des entailles en V et différents cas de longueur de fissure.

Dans la région élastique, la charge augmente par rapport au déplacement. Auparavant, les dégâts commençaient.

les observations expérimentales ont démontré une importante déformation plastique tout au long de la pointe de l'entaille au début de la fissure, ce qui a permis de mettre en évidence une échelle de signification conduisant à un régime de défaillance des plaques d'aluminium.

La méthode établie par XFEM pour la simulation de configurations de fissures multiples sous une charge de traction est estimée numériquement et comparée aux résultats expérimentaux. Sans avoir besoin d'analyses complexes par éléments finis, il a été démontré que les résultats certifient la validité et la précision de la méthode XFEM.

Références

- [1] Hirsch, Jürgen. "Recent development in aluminium for automotive applications." *Transactions of Nonferrous Metals Society of China* 24.7 (2014): 1995-2002.
- [2] Sadek, Kaddour, et al. "Analysis of Crack Propagation by Bonded Composite for Different Patch Shapes Repairs in Marine Structures: A Numerical Analysis." *International Journal of Engineering Research in Africa*. Vol. 35. Trans Tech Publications, 2018.
- [3] Fries, Thomas-Peter, and Ted Belytschko. "The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications." *International journal for numerical methods in engineering* 84.3 (2010): 253-304.
- [4] Abdelaziz, Yazid, and Abdelmadjid Hamouine. "A survey of the extended finite element." *Computers & structures* 86.11-12 (2008): 1141-1151.
- [5] Belytschko, Ted, and Tom Black. "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing." *International journal for numerical methods in engineering* 45.5 (1999): 601-620.
- [6] Melenk, Jens M., and Ivo Babuška. "The partition of unity finite element method: basic theory and applications." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 139.1-4 (1996): 289-314.
- [7] Kelley, Paul F., et al. "Tensile and fatigue behavior of direct metal laser sintered (DMLS) Inconel 718." *ASME 2015 international mechanical engineering congress and exposition*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2015.
- [8] Dhatt, Gouri, and Gilbert Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses Université Laval, 1981.
- [9] Griffith, Alan Arnold. "VI. The phenomena of rupture and flow in solids." *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593 (1921): 163-198.
- [10] Rossmannith, H. P. "George Rankin Irwin-The Father of Fracture Mechanics 1907-1998." *Fragblast* 2.2 (1998): 123-141.

- [11] Westergaard, Harold M. "Bearing pressures and cracks." *Trans AIME, J. Appl. Mech.* 6 (1939): 49-53.
- [12] Chettah, Rabie. "Etude de l'analyse limite et calcul à la rupture des matériaux élastiques parfaitement plastiques."
- [13] Rice, JRa, and Gl F. Rosengren. "Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16.1 (1968): 1-12.
- [14] Begley, J. A., and J. D. Landes. "The J integral as a fracture criterion." *Fracture Toughness: Part II*. ASTM International, 1972.
- [15] Muskhelishvili, Nikolaï Ivanovich, and Jens Rainer Maria adok. *Singular integral equations: boundary problems of function theory and their application to mathematical physics*. Courier Corporation, 2008.
- [16] Griffith, Alan Arnold. "VI. The phenomena of rupture and flow in solids." *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character* 221.582-593 (1921): 163-198.
- [17] Oudin, Hervé. "Méthode des éléments finis." (2008).
- [18] Benhamouda, Ahmed. "étude du comportement des fissures dans les tubes sous pression interne." (2010).
- [19] Miloudi, Y. *Caractérisation a la rupture des tôles en acier inoxydable AISI 304L*. Diss. Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2013.
- [20] Williams, Max L. "The bending stress distribution at the base of a stationary crack." (1961): 78-82.
- [21] Baltach, Abdelghani. *Contribution à l'étude des fissures de fatigue réparées par patch en composite*. Diss. 2017.
- [22] Suvranu. *Introduction to Finite Elements Abaqus Handout and Nuclear Engineering Department Of Mechanical, Aerospace And Nuclear Engineering: Mane 4240/ Civil 4240*
- [23] Vautrot, Mathieu. *Étude du comportement mécanique des matériaux dans des conditions étendues de vitesses et de températures: application à l'acier C68 dans le cas d'une opération de formage incrémental*. Diss. 2012.

- [24] Pouzols, Virginie. *Optimisation d'opérations industrielles de pliage par la méthode des éléments finis*. Diss. Grenoble, 2011.
- [25] Zang, S. L., J. Liang, and C. Guo. "A constitutive model for spring-back prediction in which the change of Young's modulus with plastic deformation is considered." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 47.11 (2007): 1791-1797.
- [26] Koss, Stefan. *Écrouissage isotrope et anisotrope des aciers laminés soumis à de grandes déformations*. Diss. Grenoble 1, 1992.
- [27] Morestin, Fabrice, and Maurice Boivin. "On the necessity of taking into account the variation in the Young modulus with plastic strain in elastic-plastic software." *Nuclear Engineering and Design* 162.1 (1996): 107-116.
- [28] [Http://Www.Utc.Fr/~Mecagom4/Mecaweb/Exemple/Fiches/Poiaf1.Htm](http://Www.Utc.Fr/~Mecagom4/Mecaweb/Exemple/Fiches/Poiaf1.Htm)  
(Consulté: Le 14/05/2016)
- [29] Bischoff, Ewald, et al. "Microstructural studies of the interfacial zone of a SiC-fiber-reinforced lithium aluminium silicate glass-ceramic." *Journal of the American Ceramic Society* 72.5 (1989): 741-745.
- [30] Surrel, Yves. "Les techniques optiques de mesure de champ: essai de classification." *Instrumentation, Mesure, Métrologie* 4.3-4 (2004): 11-42.
- [31] Wen, Shuang. *Identification expérimentale de modèles de zones cohésives à partir de techniques d'imagerie thermomécanique*. Diss. Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2012.
- [32] B. Kärändet et G. Sanz, 'Mécanique de La Rupture', Rapport final Convention rio. 6210- 30/3/301, Information Scientifique et Technique et gestion de L'information, 1977
- [33] Benhamouda, Ahmed. "étude du comportement des fissures dans les tubes sous pression interne." (2010).
- [34] Hutchinson, J. W. "Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16.1 (1968): 13-31.

- [35] Vincent, Manet. *Méthodes d'analyse par éléments finis des contraintes aux interfaces dans les structures sandwich*. Diss. 1998.
- [36] Swenson, D. V., and A. R. Ingraffea. "Modeling mixed-mode dynamic crack propagation using finite elements: theory and applications." *Computational Mechanics* 3.6 (1988): 381-397.
- [37] Djebbloun, Youcef. *Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites*. Diss. Université mohamed k
- [38] Xu, X-P., and Alan Needleman. "Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42.9 (1994): 1397-1434..
- [39] Camacho, Godofredo T., and M. Ortiz. "Computational modelling of impact damage in brittle materials." *International Journal of solids and structures* 33.20-22 (1996): 2899-2938..
- [40] Pattabiraman, J., V. Ramamurti, and D. V. Reddy. "Statics and dynamics of elastic shells with cutouts—a review." *Journal of Ship Research* 18.02 (1974): 113-126.
- [41] Gifford Jr, L. Nash, and Peter D. Hilton. "Stress intensity factors by enriched finite elements." *Engineering Fracture Mechanics* 10.3 (1978): 485-496.
- [42] Belytschko, Ted, Jacob Fish, and Bruce E. Engelmann. "A finite element with embedded localization zones." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 70.1 (1988): 59-89.
- [43] Oliver, J., M. Cervera, and O. Manzoli. "Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach." *International journal of plasticity* 15.3 (1999): 319-351.
- [44] Jirásek, Milan. "Comparative study on finite elements with embedded discontinuities." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 188.1-3 (2000): 307-330.
- [45] Strouboulis, Theofanis, Ivo Babuška, and Kevin Copps. "The design and analysis of the generalized finite element method." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 181.1-3 (2000): 43-69.

- [46] Moës, Nicolas, John Dolbow, and Ted Belytschko. "A finite element method for crack growth without remeshing." *International journal for numerical methods in engineering* 46.1 (1999): 131-150.
- [47] Saye, Robert I., and James A. Sethian. "The Voronoi implicit interface method for computing multiphase physics." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108.49 (2011): 19498-19503.
- [48] Moës, Nicolas, Anthony Gravouil, and Ted Belytschko. "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I: Mechanical model." *International journal for numerical methods in engineering* 53.11 (2002): 2549-2568.
- [49] Sukumar, N., David L. Chopp, and B. Moran. "Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation." *Engineering Fracture Mechanics* 70.1 (2003): 29-48.
- [50] Moës, Nicolas, Anthony Gravouil, and Ted Belytschko. "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I: Mechanical model." *International journal for numerical methods in engineering* 53.11 (2002): 2549-2568.
- [51] Zi, Goangseup, and Ted Belytschko. "New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57.15 (2003): 2221-2240.
- [52] Khoei, A. R., and M. Nikbakht. "Contact friction modeling with the extended finite element method (X-FEM)." *Journal of materials processing technology* 177.1-3 (2006): 58-62.
- [53] Wróblewska, Agnieszka, Andrzej Frąckowiak, and Michał Ciałkowski. "Regularization of the inverse heat conduction problem by the discrete Fourier transform." *Inverse Problems in Science and Engineering* 24.2 (2016): 195-212.
- [54] Ahmed, Awais, and Ferdinando Auricchio. "Extended finite element method (XFEM)-modeling arbitrary discontinuities and failure analysis." *Research degree thesis* (2009).
- [55] Sih, George C. "Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack

problems." *International Journal of fracture* 10.3 (1974): 305-321.

[56] Nuismer, R. J. "An energy release rate criterion for mixed mode fracture." *International journal of fracture* 11.2 (1975): 245-250.

[57] Erdogan, Fazil, and G. C. Sih. "On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear." *Journal of basic engineering* 85.4 (1963): 519-525.

[58] Ramdoun, Sara, et al. "Analyse numérique du comportement de fissure soumise à des contraintes résiduelles dans les composites à matrice métallique." *Revue des Composites et des Matériaux Avancés* 27.3-4 (2017): 335.

[59] Ionescu, Irina, et al. "Application de X-FEM et des LEVEL-SETS à l'homogénéisation de matériaux aléatoires caractérisés par imagerie numérique." 2007.

[60] Nehar, Kheira Camellia. *Modélisation de la fissuration des structures par la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) en vue d'un calcul de la réponse sismique par l'analyse modale spectrale*. Diss. 2012.

[61] Belytschko, Ted, et al. "Arbitrary discontinuities in finite elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50.4 (2001): 993-1013.

[62] Anderson, Ted L., and Ted L. Anderson. *Fracture mechanics: fundamentals and applications*. CRC press, 2005.

[63] Yoneyama, S, T. Ogawa, and Y. Kobayashi. "Evaluating mixed-mode stress intensity factors from full-field displacement fields obtained by optical methods." *Engineering fracture mechanics* 74.9 (2007): 1399-1412.

[64] Rooke, David Percy, and David John Cartwright. "Compendium of stress intensity factors." *Procurement Executive, Ministry of Defence*. H. M. S. O. 1976, 330 p(Book). (1976).

[65] De Oliveira, F. X. G. Z. "Crack modelling with the extended finite element method." *Técnico Lisboa* (2013).

[66] Taghezout, Ali, Bendouba Mostefa, Abdelkader Djebli, Aid Abdelkarim, and Habib Khellafi. "Experimental and Numerical Fracture Modeling Using XFEM of Aluminum Plates." *International Journal of Engineering Research in Africa* 46 (January 2020): 45–52. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/jera.46.45>

- [67] Dhatt, Gouri, and Gilbert Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses Université Laval, 1981.
- [68] Vautrot, Mathieu. *Étude du comportement mécanique des matériaux dans des conditions étendues de vitesses et de températures: application à l'acier C68 dans le cas d'une opération de formage incrémental*. Diss. 2012.
- [69] Pouzols, Virginie. *Optimisation d'opérations industrielles de pliage par la méthode des éléments finis*. Diss. Grenoble, 2011.
- [70] Zang, S. L., J. Liang, and C. Guo. "A constitutive model for spring-back prediction in which the change of Young's modulus with plastic deformation is considered." *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 47.11 (2007): 1791-1797.
- [71] Standard, A. S. T. M. "E8/E8M-13a." *Standard test methods for tension testing of metallic materials*. ASTM International, West Conshohocken, PA (2013).
- [72] MTS Criterion Systemes D'essais Universels Statiques-Hydrauliques [Www.Mts.Com/Mtscriterion](http://www.mts.com/mtscriterion)
- [73] ISO 6892-1:2009 "Matériaux métalliques — Essai de traction — Partie 1: Méthode d'essai à température ambiante", ISO – International Organization for Standardization, 2009, 67 p.
- [74] Lemaitre, Jean, et al. *Mécanique des matériaux solides-3eme édition*. Dunod, 2009.
- [75] Surrel, Yves. "Les techniques optiques de mesure de champ: essai de classification." *Instrumentation, Mesure, Métrologie* 4.3-4 (2004): 11-42.
- [76] Vacher, P., et al. "Bidimensional strain measurement using digital images." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 213.8 (1999): 811-817.
- [77] Vacher, P., A. Haddad, and R. Arrieux. "Determination of the forming limit diagrams using image analysis by the correlation method." *CIRP Annals-Manufacturing Technology* 48.1 (1999): 227-230.
- [78] Avril, Stéphane, et al. "A full-field optical method for the experimental analysis of reinforced concrete beams repaired with composites." *Composites Part A: applied science and manufacturing* 35.7-8 (2004): 873-884.

- [79] Badulescu, C., et al. "A procedure for accurate one-dimensional strain measurement using the grid method." *Experimental Mechanics* 49.6 (2009): 841-854.
- [80] Sjödahl, Mikael. "Some recent advances in electronic speckle photography." *Optics and Lasers in Engineering* 29.2-3 (1998): 125-144.
- [81] Cordero, Raúl R., et al. "Whole-field analysis of uniaxial tensile tests by moiré interferometry." *Optics and Lasers in Engineering* 43.9 (2005): 919-936.
- [82] Cosola, E., et al. "A general framework for identification of hyper-elastic membranes with moiré techniques and multi-point simulated annealing." *International Journal of Solids and Structures* 45.24 (2008): 6074-6099.
- [83] Saib, Meriem. *Étude expérimentale et numérique d'une structure fissurée sous contrainte de fatigue*. Diss. 2012.
- [84] S.GENIAUT. *Calcul des facteurs d'intensité des contraintes par extrapolation du champ de déplacements* Date : 01/03/2012 Clé : R7.02.08 Révision : 8586