

Avant Propos

Ce cours s'adresse aux étudiants de fin de cycle (Licence) des disciplines génie mécanique et maritime, l'aéronautique, physique énergétique. Connaissances de base nécessaires à la compréhension de l'essentiel sur les transferts de chaleurs. L'édition de ce cours repose sur l'expérience professionnelle acquise au sein l'Université de Mustapha STAMBOULI de Mascara, tant qu'enseignement chargé de cours au niveau de département de génie mécanique et chercheur au sein du laboratoire de modélisation numérique expérimental des phénomènes mécanique, Université de Mostaganem. Ce cour est organisée en cinq chapitres : La première partie de cour « Introduction sur les transferts thermiques », Le deuxième chapitre « Lois de base des transferts de chaleur », troisième chapitre « Conduction de la chaleur », le quatrième chapitre chapitre « Transfert de chaleur par convection » puis le dernier chapitre « Transfert de chaleur par convection »

Mascara, le 11 Septembre 2018

Table des matières

Avant Propos.....	i
Introduction	4
Chapitre 1 Introduction à la transmission de chaleur.....	6
1.1 <i>Définition de la chaleur</i>	6
1.2 <i>Lien avec la thermodynamique</i>	6
1.3 <i>Les modes de transfert de chaleur</i>	6
1.4 <i>La conduction thermique</i>	7
1.5 <i>La convection thermique</i>	9
1.6 <i>Le rayonnement thermique</i>	9
1.7 <i>Les régimes</i>	9
1.8 <i>La conservation de l'énergie</i>	11
1.9 <i>Méthodologie pour le calcul du transfert de chaleur</i>	12
Chapitre 2 Introduction à la conduction thermique.....	13
2.1 <i>La loi de Fourier</i>	13
2.2 <i>La conductivité thermique</i>	13
2.3 <i>Les conditions aux frontières et initiales</i>	13
2.3.1 <i>Condition aux frontières de type Dirichlet</i>	16
2.3.2 <i>Condition aux frontières de type Neumann</i>	16
2.3.3 <i>Condition aux frontières de type mixte</i>	17
Chapitre 3 Conduction Unidimensionnelle	17
3.1 <i>La loi de Fourier</i>	18
3.1.1 <i>En géométrie cartésienne</i>	18
3.1.2 <i>En géométrie cylindrique</i>	21
3.1.3 <i>Le cylindre creux</i>	22
3.1.4 <i>Le cylindre composite</i>	23
3.2 <i>Resistance Thermique</i>	25
3.2.1 <i>Les parois composites</i>	25
3.2.2 <i>Circuit thermique équivalent d'un mur composite en série et parallèle</i>	25
3.3 <i>Exemple d'application</i>	29
3.4 <i>Les ailettes</i>	29
3.4.1 <i>Différents types d'ailettes</i>	29
3.4.2 <i>Mise en équation du bilan thermique</i>	33
3.4.3 <i>Ailettes à section non uniforme</i>	34
3.4.4 <i>Ailette à section uniforme</i>	34
3.4.5 <i>Exemple d'application</i>	38
3.4.3 <i>Efficacité d'une ailette</i>	39
3.4.3 <i>Exemple d'application</i>	41
Chapitre 4 Conduction en 2D et 3D	43
4.1 <i>Solution Analytique</i>	44

4.2	<i>Exemple d'application</i>	45
4.3	Méthode: Facteurs de forme	48
4.4	<i>Exemples d'application</i>	49
Chapitre 5	Conduction en régime transitoire	50
5.1	<i>Exemples d'application</i>	52
5.2	<i>Effets combinés</i>	53
5.3	Transfert unidirectionnel dans un milieu limité	53
5.3.1	<i>Mur plan 1D</i>	53
5.3.2	<i>Cylindre infini</i>	54
5.3.3	<i>Sphère</i>	56
5.4	<i>Milieu semi infini</i>	56
5.4.1	<i>Cas 1: Température constante imposée en surface</i>	56
5.4.2	<i>Cas 2: Flux de chaleur imposée</i>	56
5.4.3	<i>Coefficient de transfert imposé</i>	56
5.5	<i>Exemples d'application</i>	57
References	59

Introduction

De tous temps, les problèmes de transmission d'énergie, et en particulier de la chaleur, ont eu une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement d'appareils tels que les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs, les évaporateurs, les condenseurs, les moteurs etc.

Le transfert thermique entre deux corps est une interaction énergétique qui résulte d'une différence de température entre les deux corps. On distingue habituellement trois modes de transfert de chaleur, la conduction thermique ou diffusion thermique, le rayonnement thermique et la convection.

Ces trois modes sont régis par des lois spécifiques et font ainsi l'objet de chapitres différents dans notre cours..

COURS DE TRANSFERT THERMIQUE 1
Responsable : Medebber Mohamed Amine
Maître de Conférences B
Département de génie mécanique

Objectif:

Ce cours a pour but de faire acquérir les connaissances de base dans le domaine du transfert de chaleur. A la fin du cours, l'étudiant devra maîtriser les concepts et les lois fondamentales de la conduction, de la convection et du rayonnement. L'étudiant devra également savoir les appliquer dans la résolution de problèmes pratiques, simples mais représentatifs du domaine du transfert de chaleur.

Chapitre 1

Introduction à la transmission de chaleur

Définition de la chaleur

- La chaleur est une forme d'énergie qui s'écoule sous l'effet d'une différence de température.
- L'écoulement de chaleur implique le temps et le taux de transfert d'énergie que l'on appelle aussi le flux de chaleur est exprimé en Watts (ou en Watts/m ou Watts/m²)

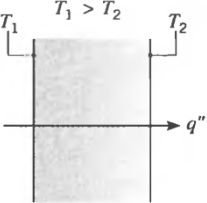
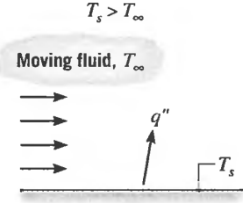
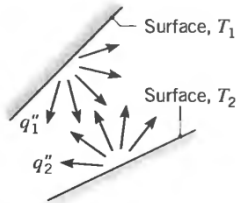
Lien avec la thermodynamique

- La thermodynamique s'intéresse aux états d'équilibre des systèmes et ne permet pas de déterminer les taux de transfert d'énergie.
- Le calcul du taux de transfert de chaleur est le principal objectif de la discipline du transfert de chaleur. Le transfert de chaleur complète donc la thermodynamique.
- Le calcul du taux de transfert d'énergie est nécessaire au calcul des distributions de température et des gradients de température ainsi que pour les besoins de bilans énergétiques de divers systèmes.

Les modes de transfert de chaleur

Le transfert de chaleur s'effectue selon trois modes principaux qui sont:

- LA CONDUCTION
- LA CONVECTION
- LE RAYONNEMENT

CONDUCTION	CONVECTION	RAYONNEMENT
Conduction à travers un solide ou un fluide au repos	Convection entre la surface d'une paroi et un fluide en mouvement	L'échange de transfert radiatif net entre deux surfaces
		

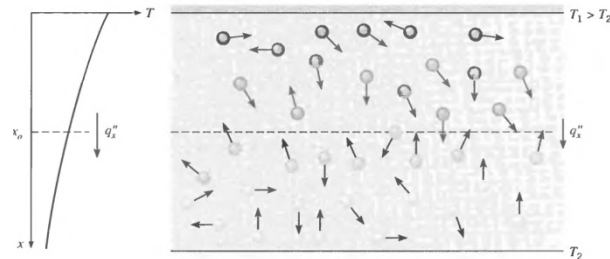
La conduction thermique

- Le transfert de chaleur par conduction résulte d'un échange d'énergie entre les particules les plus énergétiques et les moins énergétiques adjacentes dans un milieu.
- La température du milieu en chaque point est une mesure du niveau d'énergie en ce point.
- La chaleur se propage d'un point de température élevée vers un point de température plus faible.
- La chaleur se propage par conduction dans tous les milieux, que ce soit les solides, les liquides ou les gaz.

Remarque: Il ne peut pas y avoir de conduction dans le vide.

- Le mécanisme physique de la conduction est lié à l'activité moléculaire dans le milieu.

- Dans les solides, le transfert de chaleur est relié à la vibration des structures interatomiques. Egalement, dans les conducteurs électriques, le transfert des électrons libres joue un rôle important.
- Dans les fluides, le transfert de chaleur est relié aux échanges de quantité de mouvement par collisions entre les molécules



En général, le taux de transfert de chaleur par **conduction** dans les solides (et les fluides au repos) est proportionnel au **gradient de température** multiplié par la **surface A** à travers laquelle se produit le transfert de chaleur:

$$q_{\text{conduction}} \propto A \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)$$

Le coefficient de proportionnalité est appelé la conductivité thermique, k , et est une propriété physique du matériau considéré qui peut aussi dépendre de l'état thermodynamique du matériau.

A la limite $\Delta x \rightarrow 0$, nous pouvons donc écrire la LOI DE FOURIER pour la conduction de la chaleur:

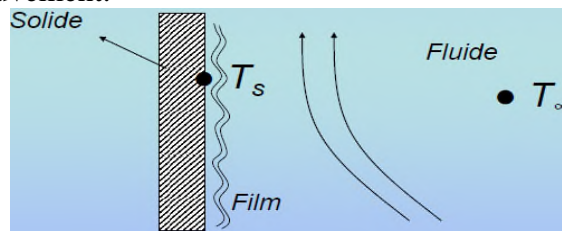
Loi de Fourier

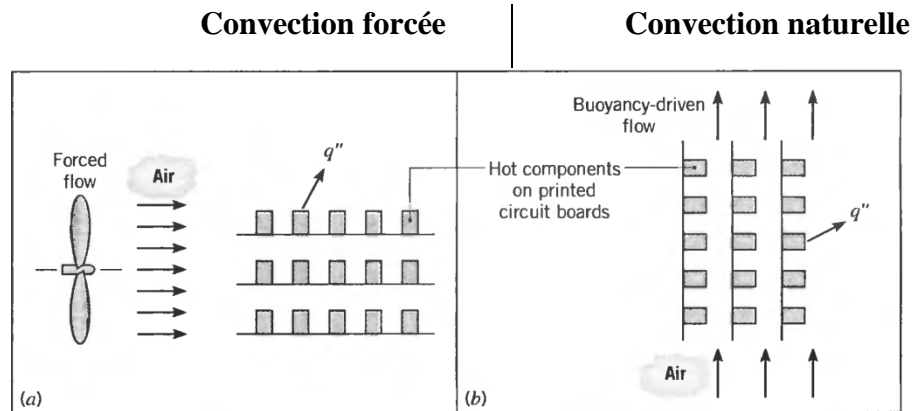
$$q = -k \left(\frac{dT}{dx} \right)$$

- où
- T: Température [Kelvin ou Celsius]
 - x: position [mètres]
 - q: flux de chaleur par unité de surface [Watts/m²]
 - k: conductivité thermique [Watts/m.K]

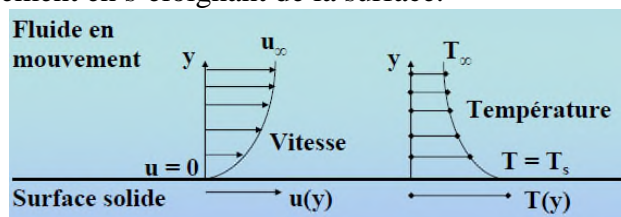
La convection thermique

La convection regroupe les échanges de chaleur entre la surface des matériaux solides et les fluides adjacents en mouvement.



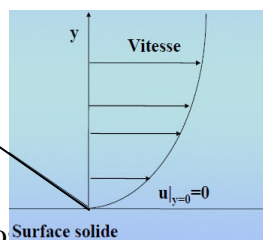


La convection est associée à la présence d'une couche limite (film) où la vitesse et la température varient rapidement en s'éloignant de la surface.



A la surface, la vitesse est nulle et l'échange de chaleur est dû uniquement à la conduction entre les deux milieux. Le flux de chaleur par conduction proportionnel au gradient de température dans le fluide: ce gradient de température dépend de la géométrie, de la vitesse de l'écoulement et des propriétés du fluide

Le flux de chaleur par conduction proportionnel au gradient de température dans le fluide: ce gradient de température dépend de la géométrie, de la vitesse de l'écoulement et des propriétés du fluide



D'un point de vue phénoménologique, ou macroscopique, le flux de transfert de chaleur par convection est proportionnel à la différence de Température entre le fluide et La surface, multiplié par la surface A à travers laquelle se produit le transfert de chaleur:

$$q_{convection} \propto A(T_s - T_\infty)$$

Le coefficient de proportionnalité est appelé le coefficient de transfert de chaleur par convection, ou plus simplement le coefficient de convection. On le dénote par la lettre h. On peut donc écrire la LOI DE NEWTON pour la convection:

$$q = h(T_s - T_\infty)$$

- où: T : Température [Kelvin ou Celsius]
- q : Flux de chaleur par unité de surface ou densité du flux de chaleur [Watts/m²]
- h : Coefficient de convection [Watts/m²K]

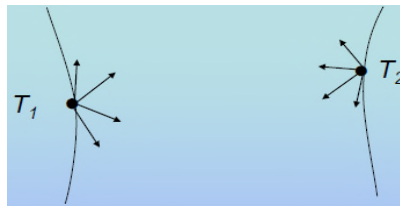
Le coefficient de transfert de chaleur par convection, h, n'est pas une propriété physique du fluide. Il dépend en fait de nombreux paramètres (géométrie, nature de l'écoulement, propriétés, état de surface, etc...). La prédiction du coefficient h pour les applications courantes sera abordée aux chapitre sur la convection.

Transfert de chaleur	h (W/m ² .K)
Convection naturelle <ul style="list-style-type: none"> • Gaz • Liquide 	2-25 50-1000
Convection forcée <ul style="list-style-type: none"> • Gaz • Liquide 	25-250 100-20000
Convection avec changement de phase <ul style="list-style-type: none"> • Ebullition ou condensation 	2500- 100000

Tab.1: Valeurs types du coefficient de convection de chaleur

Le rayonnement thermique

Le mode de transfert de chaleur par rayonnement diffère fondamentalement des premiers modes. La chaleur se propage via des ondes électromagnétiques, qui ne nécessitent pas un contact entre les corps qui échangent ni la présence d'un milieu. L'échange par rayonnement peut se faire dans le vide.



Tout corps à température supérieure à OK émet des ondes électromagnétiques vers son environnement.

- L'énergie est émise constamment et est relié à l'activité moléculaire au sein du corps.
- L'échange de chaleur entre deux corps implique que les deux corps se voient.
- Le bilan de l'échange sera non nul si les corps sont à des températures différentes.

La quantité maximale de chaleur radiante pouvant être émise par un corps est donnée par la loi de Stéfán-Botzmann :

$$q_r = E_b = \sigma T_s^4$$

où: T_s : Température de la surface [Kelvin]

q_r : Flux de chaleur par unité de surface émettante [Wats/m²]

σ : Constante de Stefan-Boltzmann=5,67 10⁻⁸ [Watts/m²K⁴]

Remarque: Le flux de chaleur par rayonnement est très important à haute température.

Les régimes

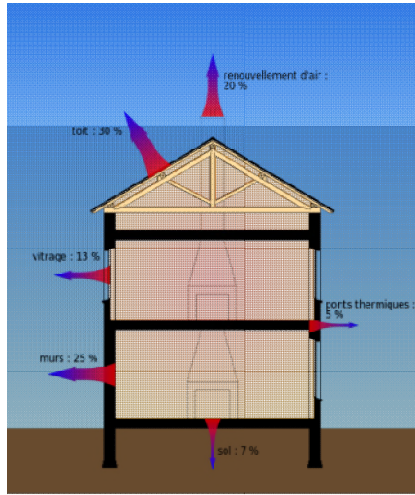
- **Le régime permanent** (ou stationnaire)

En régime permanent, le temps n'est pas une variable intervenant dans les problèmes : la distribution de température est indépendante du temps ainsi que les flux de chaleur.

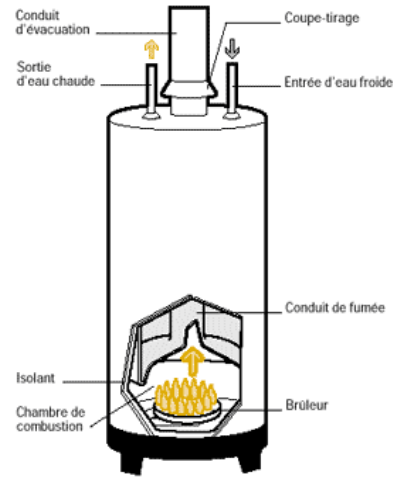
- **Le régime transitoire** (ou instationnaire)

En régime transitoire, les flux d chaleur ainsi que les distributions de température sont des fonctions du temps. Nous étudierons seulement la conduction unidimensionnelle en régime transitoire.

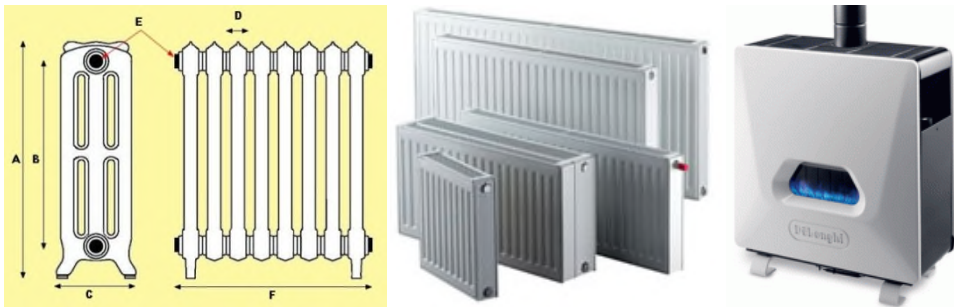
Exemple: Mécanique du bâtiment



Exemple: chauffe-eau



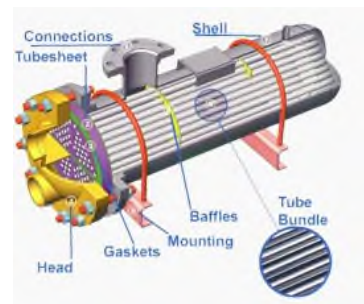
Exemple: Chauffage résidentiel



Exemple: Fours industriels

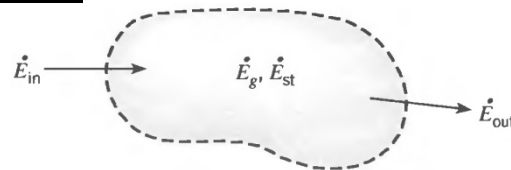


Exemple: Echangeurs de chaleur





La conservation de l'énergie



\dot{E}_{in} : Flux d'énergie entrant dans le volume de contrôle

\dot{E}_{out} : Flux d'énergie sortant du volume de contrôle

\dot{E}_g : génération volumétrique de chaleur

\dot{E}_{st} : énergie emmagasinée dans le milieu lorsque les conditions varient dans le temps (régime transitoire)

En régime transitoire, l'énergie emmagasinée, \dot{E}_{st} , résulte en un changement de la température dans le matériau qui fait intervenir la capacité calorifique de matériau selon la relation:

$$\dot{E}_{st} = \rho C_p V \frac{dT}{dt}$$

où: ρ : masse volumique [kg/m^3]

C_p : Capacité calorifique
[Joule/Kg.K]

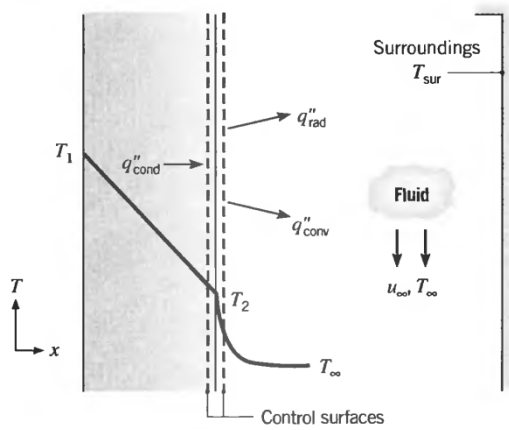
V : Volume [m^3]

T : Température [K]

t : Temps [s]



Sur une surface de contrôle, seuls les termes en entrée et sortie sont présents:



$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$

$$q_{cond} = q_{cov} + q_{ray}$$

Méthodologie pour le calcul du transfert de chaleur

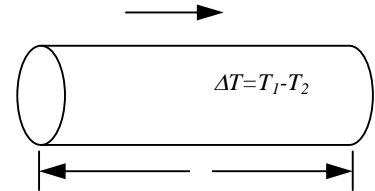
- Définir un volume de contrôle approprié.
- Identifier les modes de transfert d'énergie.
- Indiquer les flux et les sources de chaleur.
- Ecrire l'équation de conservation de l'énergie.

Chapitre 2

Introduction à la conduction thermique

La conduction unidimensionnelle

Considérons une tige de section constante A , soumise à une différence de température T_1-T_2 .



Le flux de chaleur est donné par la loi phénoménologique.

La loi de Fourier:

$$Q_x = -kA \frac{\Delta T}{L}$$

Remarque: Le signe négatif nous assure un flux de chaleur positif d'une haute température vers une basse température.

où: T: Température [Kelvin ou Celsius]

L: Longueur [mètres]

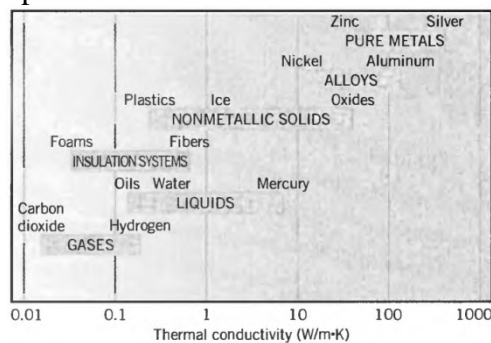
Q_x : flux de chaleur [Watts]

k: conductivité thermique [Watts/m.K]

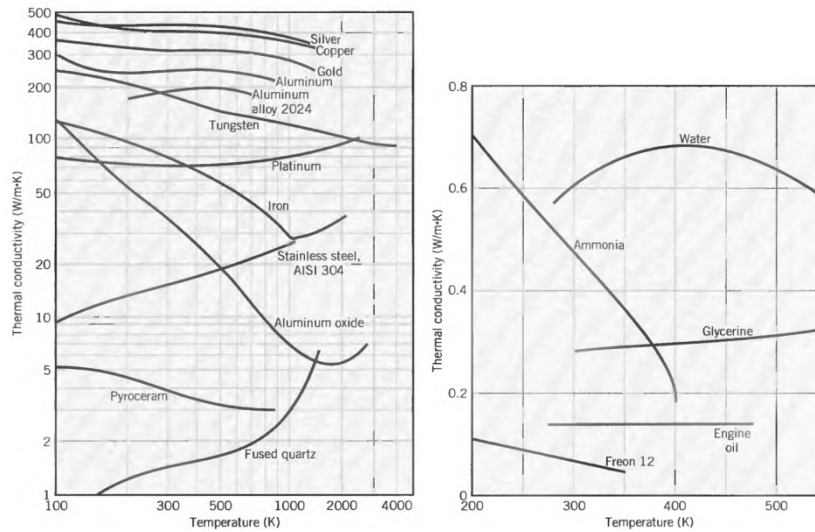
A: aire de passage de la chaleur [m^2]

La conductivité thermique

- La conductivité thermique est définie par la loi de Fourier:
 - Flux de chaleur qui traverse une surface unitaire en présence d'un gradient unitaire.
 - Différente pour chaque matériau
 - Dépend en général de la température
 - Dépend de la pression pour les fluides



La conductivité thermique est avant tout une propriété des matériaux



- La conductivité thermique est aussi dépendante de la température pour la plupart des matériaux
- Dans le cas général 2D et 3D, le flux de chaleur est un vecteur donné par la relation:

$$q = -k\nabla T$$

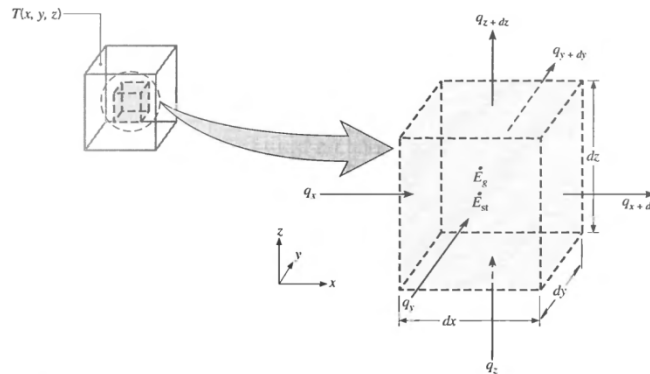
où

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

- Dans le cours, nous ferons l'hypothèse de matériaux isotropes avec $k_x=k_y=k_z=k$

L'équation de diffusion de la chaleur

- Considérons un volume infinitésimal d'un matériau homogène et considérons les flux thermiques par conduction sur les faces de ce volume



- La conservation d'énergie implique:

Taux de transfert d'énergie entrant dans le volume de contrôle

Taux de transfert d'énergie sortant du volume de contrôle

Taux d'accumulation d'énergie dans le volume de contrôle

Taux de génération d'énergie dans le volume de contrôle

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} - \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{st}$$

- Le taux de génération d'énergie thermique par unité de volume en Watts est donné par :

$$\dot{E}_{gen} = \dot{q} dx dy dz$$

où \dot{q} est la source d'énergie interne en Watts/m³

- Le taux d'accumulation d'énergie thermique par unité de volume en Watts est donné par:

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz$$

- Les flux entrants sont q_x, q_y et q_z
- Les flux sortant sont évalués à l'aide d'un développement en série de Taylor:

$$\text{Suivant } x \Rightarrow q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$\text{Suivant } y \Rightarrow q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$\text{Suivant } z \Rightarrow q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

- Le taux de transfert net aux surfaces devient:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} &= q_x - q_{x+dx} + q_y - q_{y+dy} + q_z - q_{z+dz} \\ &= -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \end{aligned}$$

- Utilisant la loi de Fourier pour le flux de chaleur par conduction

$$q_x'' = -k_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_x = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} dy dz$$

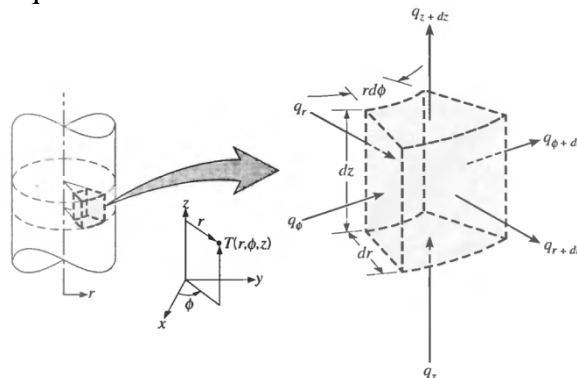
- Et similairement pour les autres directions, on obtient:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = \partial \left(k dy dz \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) + \partial \left(k dx dz \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right) + \partial \left(k dx dy \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right)$$

- En insérant les termes différentiels de flux de surfaces, de génération d'énergie thermique et d'accumulation dans l'équation de conservation et en exprimant les taux de transfert en utilisant la loi de Fourier, l'équation différentielle de diffusion devient:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

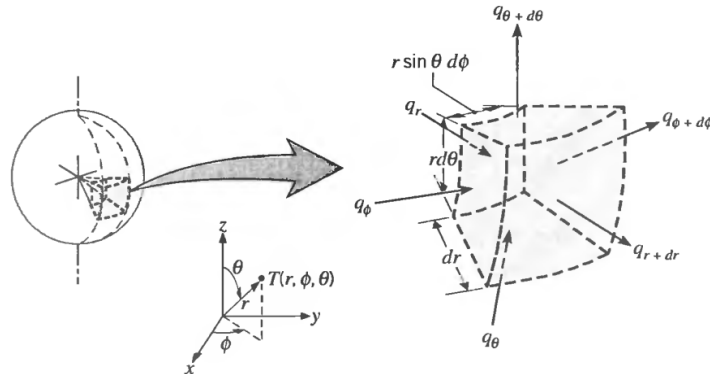
- Coordonnées cylindriques



- En effectuant une démarche similaire (*bilan d'énergie*) sur un élément de volume *cylindrique*, l'équation différentielle de diffusion devient:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Coordonnées sphériques



- En effectuant une démarche similaire (*bilan d'énergie*) sur un élément de volume *sphérique*, l'équation différentielle de diffusion devient:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Quelques simplifications en géométrie cartésienne:

- k constant

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

où $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$ est appelée la diffusivité thermique

- Régime permanent

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0$$

- k constant, régime permanent, sans source, 1D

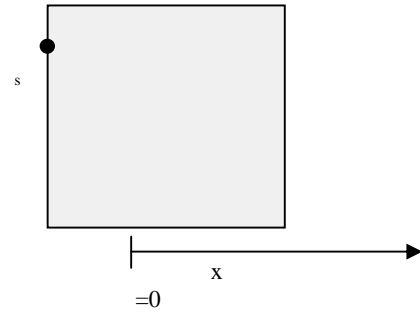
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Les conditions aux frontières et initiales

- Pour résoudre l'équation de diffusion de la chaleur et ainsi déterminer la distribution de température T dans un milieu, il faut spécifier des conditions aux frontières.
- De plus, en régime transitoire, lorsque la température dépend du temps, il faut spécifier une condition initiale, qui représente la température initiale dans le matériau.

- Condition aux frontières de type Dirichlet
- Température T imposée

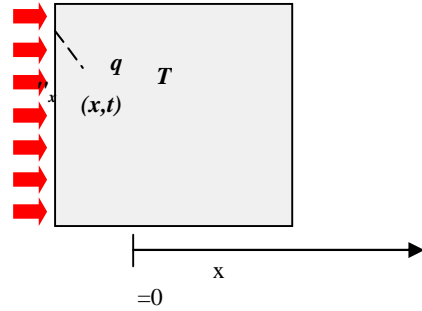
$$T(0, t) = T_s$$



- Condition aux frontières de type Neumann

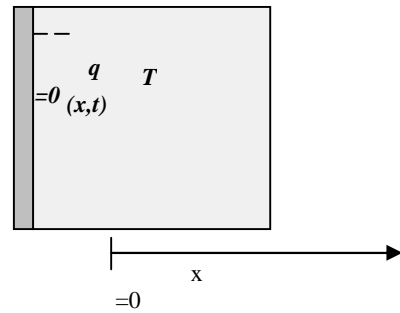
- Flux de chaleur q'' imposé

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q_x''$$



- Paroi isolée, adiabatique

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q_x'' = 0$$

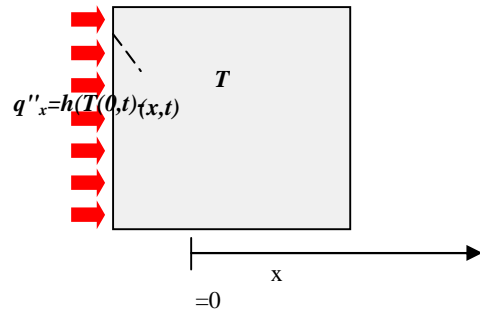


- Condition aux frontières de type mixte:

- Flux de chaleur q'' provenant de la convection

$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q_x'' = h(T_\infty - T)$$

T_∞



CHAPITRE 3 Conduction Unidimensionnelle

La loi de Fourier

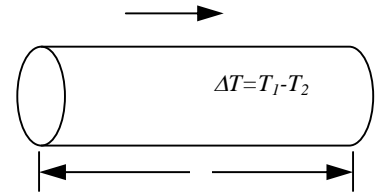
$$q_x = -k \frac{\Delta T}{L}$$

où: T: Température [Kelvin ou Celsius]

L: Longueur [mètres]

q_x : flux de chaleur [Watts/m²]

k: conductivité thermique [Watts/m.K]



L'équation de diffusion de la chaleur

- **En géométrie cartésienne:**

- **Régime permanent**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0$$

- **k constant, régime permanent, sans source, 1D**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Equation différentielle du 2nd ordre \Rightarrow solution: $T(x) = C_1 x + C_2$

Conditions aux limites (ou aux frontières): **Boundary conditions** (en anglais)

$$\begin{cases} T(0) = T_{s,1} \\ T(L) = T_{s,2} \end{cases}$$

A partir des conditions aux limites, on détermine les constantes C_1 et C_2

$$\begin{cases} T(0) = T_{s,1} \\ T(L) = T_{s,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(0) = C_2 = T_{s,1} \\ T(L) = C_1 L + C_2 = T_{s,2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = T_{s,1} \\ C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} \end{cases}$$

La distribution de température est linéaire

$$T(x) = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} x + T_{s,1}$$

Le flux de chaleur

La densité du flux de chaleur

$$Q_x = -kA \frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L} (T_{s,2} - T_{s,1})$$

$$q_x = \frac{Q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} = \frac{k}{L} (T_{s,2} - T_{s,1})$$

RESISTANCE THERMIQUE

Le concept de « résistance thermique » doit supposer que la paroi ne contient pas de source interne de chaleur et que les propriétés thermodynamiques sont constantes.

En électricité

$$R_{elec} = \frac{U_2 - U_1}{I}$$

En thermique

$$R_{th} = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{Q}$$

A partir de cette équivalence électricité-thermique, on peut déduire la résistance thermique en conduction thermique:

$$R_{th,cond} = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{Q} = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{\frac{kA}{L}(T_{s,2} - T_{s,1})} = \frac{L}{kA} \quad [K/W]$$

De la même façon, on peut déduire la résistance thermique en convection thermique:

$$R_{th,conv} = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{Q} = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{hA(T_{s,2} - T_{s,1})} = \frac{1}{hA} \quad [K/W]$$

En électricité le courant électrique qui traverse des résistances électriques en série est constant, et donc par équivalence le flux de chaleur qui traverse des résistances thermiques en série est également constant:

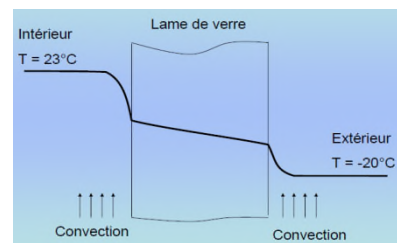
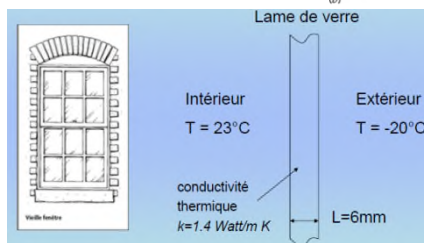
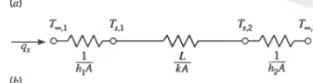
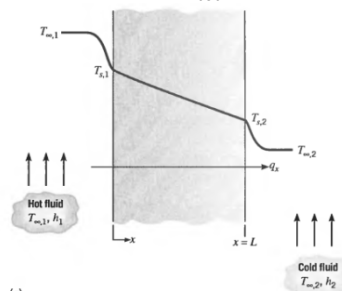
$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1A}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2A}}$$

En électricité la résistance électrique totale est la somme des résistances électriques en série, et donc par équivalence la résistance thermique totale est la somme des résistances thermiques en série:

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2A}$$

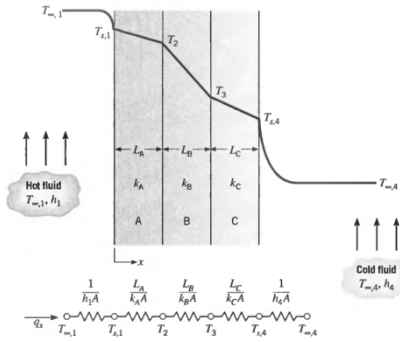
Donc, on déduit le flux de chaleur peut être calculé à partir de la résistance thermique totale:

$$Q_x = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{R_{tot}}$$

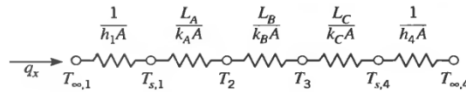


Les parois composites

Le principe d'équivalence en circuit électrique de système thermique peut être également utilisé pour d'autres systèmes plus complexes.



Circuit thermique équivalent d'un mur composite en série



$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\sum R_{tot}}$$

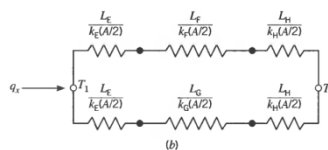
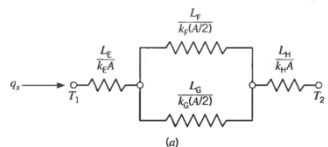
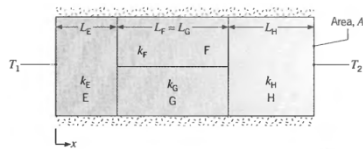
$$Q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left[\left(\frac{1}{h_1 A} \right) + \left(\frac{L_A}{k_A A} \right) + \left(\frac{L_B}{k_B A} \right) + \left(\frac{L_C}{k_C A} \right) + \left(\frac{1}{h_4 A} \right) \right]}$$

$$K = \frac{1}{R_{tot} A} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\left(\frac{L_A}{k_A A} \right)} = \frac{T_2 - T_3}{\left(\frac{L_B}{k_B A} \right)} = \frac{T_3 - T_{s,4}}{\left(\frac{L_C}{k_C A} \right)} = \frac{T_{s,4} - T_{\infty,4}}{\left(\frac{1}{h_4 A} \right)}$$

Nous pouvons introduire le coefficient global d'échange de chaleur K [W/m²K]

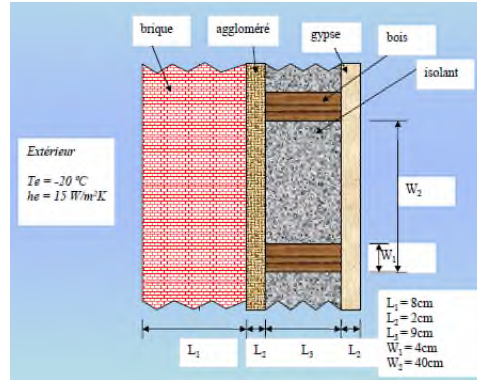
$$Q_x = KA(T_{\infty,1} - T_{\infty,4}) = KA\Delta T$$

$$K = \frac{1}{R_{tot} A} = \frac{1}{\left(\frac{1}{h_1} \right) + \left(\frac{L_A}{k_A} \right) + \left(\frac{L_B}{k_B} \right) + \left(\frac{L_C}{k_C} \right) + \left(\frac{1}{h_4} \right)}$$

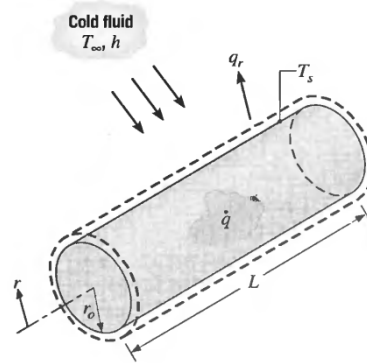


$$R_{tot} = \sum R_{th} = \frac{\Delta T}{Q} = \frac{1}{KA}$$

Circuit thermique équivalent d'un mur composite en série et parallèle



Géométrie cylindrique



Conduction dans un cylindre avec source interne

Géométrie cylindrique

En géométrie cylindrique

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

k constant, régime permanent, avec source, 1D

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

On suppose que la source est uniforme dans le cylindre donc $\dot{q} = \text{cst}$, et après la 1^{ère} intégration on obtient:

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r^2 + C_1$$

La 2^{ème} intégration on obtient:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions aux limites suivantes:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad \text{et} \quad T(r_0) = T_s$$

Après résolution les constantes obtenues sont:

$$C_1 = 0 \quad C_2 = T_s + \frac{\dot{q}}{4k} r_0^2$$

On obtient la distribution de température dans le cylindre:

$$T(r) = \frac{\dot{q}}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) + T_s$$

Après évaluation de la température au centre du cylindre ($r=0$), On obtient la distribution de la température adimensionnelle dans le cylindre avec $T(0)=T_0$:

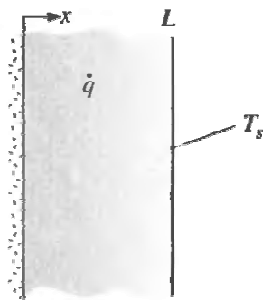
$$\frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

En utilisant le principe de conservation de l'énergie thermique à la surface ($r=r_0$):

$$\dot{q}(\pi r_0^2 L) = h(2\pi r_0 L)(T_s - T_\infty)$$

La température de la surface du cylindre:

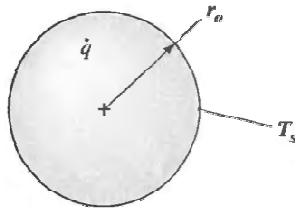
$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q} r_0}{2h}$$



$$T(x) = \frac{\dot{q} L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

$$q'(x) = \dot{q} x$$

$$q(x) = \dot{q} x A_x$$

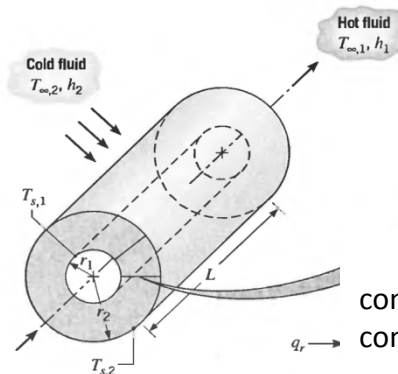


$$T(r) = \frac{\dot{q} r_0^2}{6k} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_s$$

$$q''(r) = \frac{\dot{q} r}{3}$$

$$q(r) = \frac{\dot{q} 4\pi r^3}{3}$$

Le cylindre creux



Cylindre creux avec conditions aux limites convectives aux surfaces

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Le transfert thermique est unidirectionnel suivant la direction $r \Rightarrow T(r)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

Après intégration on obtient $\Rightarrow T(r) = C_1 \ln r + C_2$

Les conditions aux limites sont nécessaires pour déterminer les constantes C_1 et C_2

$$T(r_1) = T_{s,1} \quad \text{et} \quad T(r_2) = T_{s,2}$$

$$\begin{cases} T_{s,1} = C_1 \ln r_1 + C_2 \\ T_{s,2} = C_1 \ln r_2 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{\ln(r_2/r_1)} \\ C_2 = T_{s,2} - \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{\ln(r_2/r_1)} \ln r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{\ln(r_2/r_1)} \\ C_2 = T_{s,2} - \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{1 - \ln(r_1/r_2)} \end{cases}$$

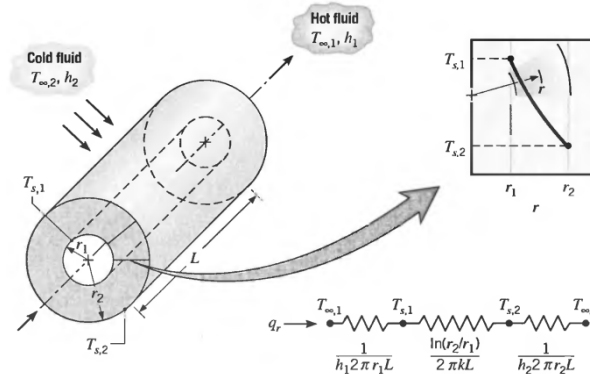
$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2}$$

Le flux de chaleur est obtenu à partir de la loi de Fourier

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{2\pi Lk(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln(r_2/r_1)}$$

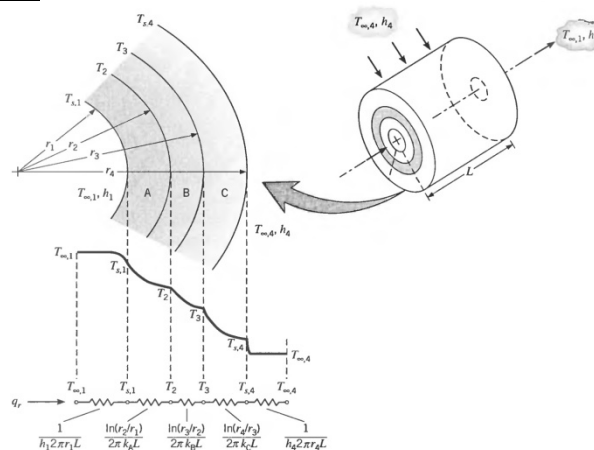
On en déduit la résistance thermique

$$R_{t,cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$$



L'évolution de la température à travers un cylindre creux est logarithmique

Le cylindre composite



Distribution de température à travers un cylindre composite

$$q_r = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}}$$

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = UA(T_{\infty,1} - T_{\infty,4})$$

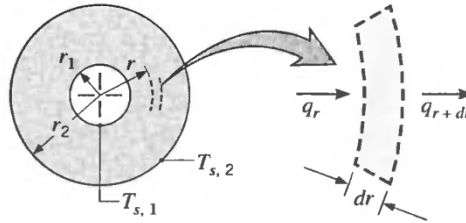
Le coefficient d'échange global par rapport à la surface $A_1=2\pi r_1 L$

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = U_1 A_1 (T_{\infty,1} - T_{\infty,4})$$

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_A} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_B} \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_C} \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4} \frac{1}{h_4}}$$

On peut vérifier facilement que $U_1 A_1 = U_2 A_2 = U_3 A_3 = U_4 A_4 = (R_{tot})^{-1}$

La sphère creuse



D'après la loi de Fourier, on détermine le flux de chaleur qui traverse la paroi d'une sphère creuse

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2) \frac{dT}{dr} \Rightarrow \frac{q_r}{4\pi} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = - \int_{T_{s,1}}^{T_{s,2}} k(T) dT \Rightarrow q_r = \frac{4\pi k (T_{s,1} - T_{s,2})}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

$$q_r = \frac{4\pi k (T_{s,1} - T_{s,2})}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

On en déduit la résistance thermique

$$R_{t,cond} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

TABLE 3.3 One-dimensional, steady-state solutions to the heat equation with no generation

	Plane Wall	Cylindrical Wall ^a	Spherical Wall ^a
Heat equation	$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$
Temperature distribution	$T_{s,1} - \Delta T \frac{x}{L}$	$T_{s,2} + \Delta T \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1} - \Delta T \left[\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \right]$
Heat flux (q'')	$k \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k \Delta T}{r \ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k \Delta T}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$
Heat rate (q)	$kA \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi L k \Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k \Delta T}{(1/r_1) - (1/r_2)}$
Thermal resistance ($R_{t,cond}$)	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k}$	$\frac{(1/r_1) - (1/r_2)}{4\pi k}$

Exemple d'application

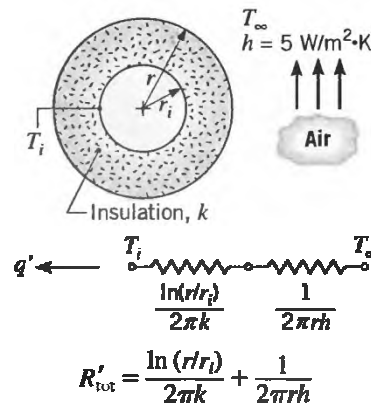
La possibilité de l'existence d'une épaisseur optimale d'isolation dans un système radial est justifiée par la présence d'un effet inverse associé à l'augmentation de cette épaisseur.

Bien que la résistance thermique de la conduction augmente avec l'ajout d'isolant, la résistance thermique de la convection diminue à cause de l'augmentation de la surface externe. Donc, il doit exister une épaisseur de l'isolant qui réduit les pertes de chaleur et augmente la résistance totale du transfert de chaleur. Résoudre ce problème en considérant le problème suivant :

1- Un tube en cuivre mince de rayon r_i est utilisé pour transporter un réfrigérant à basse température et il est à la température T_i inférieur à la température ambiante de l'air T_∞ autour du tube. Existe-t-il une épaisseur optimale appliquée à l'isolation du tube?

2- Vérifier le résultat obtenu en calculant la résistance thermique totale par unité de longueur du tube: $D=10$ mm ; épaisseur de l'isolation : 0, 2, 5, 10, 20 et 40 mm.

L'isolant est composé en laine de verre et le coefficient d'échange par convection est de $h=5\text{W/m}^2\cdot\text{K}$



$$q' = \frac{T_\infty - T_i}{R'_{\text{tot}}}$$

Pour savoir si R'_{tot} possède un extremum, il faut résoudre l'équation suivante:

$$\frac{dR'_{\text{tot}}}{dr} = 0 \longrightarrow \frac{1}{2\pi k r} - \frac{1}{2\pi r^2 h} = 0 \longrightarrow r = \frac{k}{h}$$

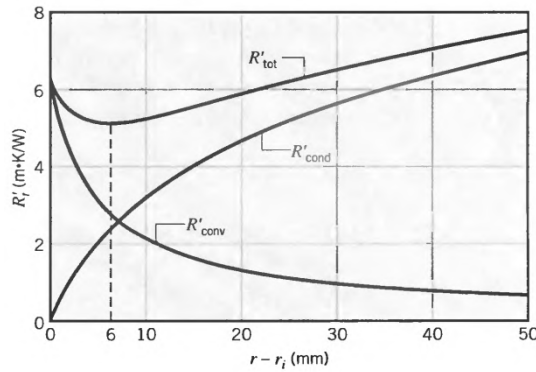
Pour savoir si cet extremum est maximum ou minimum, il faut déterminer le signe de la dérivée seconde.

Lorsqu'elle est négative c'est un maximum et lorsqu'elle est positive c'est un minimum.

$$\frac{d^2 R'_{\text{tot}}}{dr^2} = -\frac{1}{2\pi k r^2} + \frac{1}{\pi r^3 h} \qquad \frac{d^2 R'_{\text{tot}}}{dr^2} = \frac{1}{\pi(k/h)^2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2\pi k^3/h^2} > 0$$

Il existe une résistance totale minimum donc il n'existe pas une épaisseur d'isolant optimum, mais il existe une épaisseur critique $e_{\text{cr}} = r_{\text{cr}} - r_i = k/h - r_i$

A cette épaisseur correspond un transfert de chaleur maximum



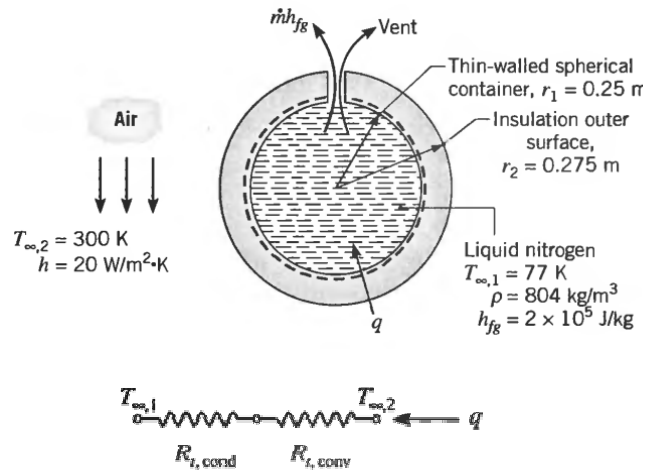
$$h = 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \text{ and } k = 0.055 \text{ W/m} \cdot \text{K}.$$

$$r_{cr} = \frac{0.055 \text{ W/m} \cdot \text{K}}{5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}} = 0.011 \text{ m}$$

$$r_{cr} - r_i = (0.011 - 0.005) \text{ m} = 0.006 \text{ m}$$

Exemple d'application

Un réservoir métallique de forme sphérique est utilisé pour stocker de l'azote liquide à 77 K. Le réservoir a un diamètre de 0,5 m et est couvert avec un isolant composé de poudre de silice. L'isolant a une épaisseur de 25 mm, et la surface extérieure est exposée à de l'air ambiant à une température de 300 K. Le coefficient de convection est 20 W/m²·K. La chaleur latente de vaporisation et la masse volumique de l'azote liquide sont respectivement 2 10⁵ J/kg et 804 kg/m³.



Quel est le flux de chaleur introduit dans l'azote liquide?

Quel est la quantité du liquide azote

$$R_{t,cond} = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$R_{t,conv} = \frac{1}{h4\pi r_2^2}$$

$$q = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{(1/4\pi k)[(1/r_1) - (1/r_2)] + (1/h4\pi r_2^2)}$$

Application numérique:

$$q = \frac{(300 - 77)}{\frac{1}{4\pi(0,0017)} \left(\frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,275} \right) + \frac{1}{20 \times 4\pi(0,275)^2}} = \frac{223}{17,02 + 0,05} = 13,06 \text{ W}$$

Le bilan énergétique du réservoir:

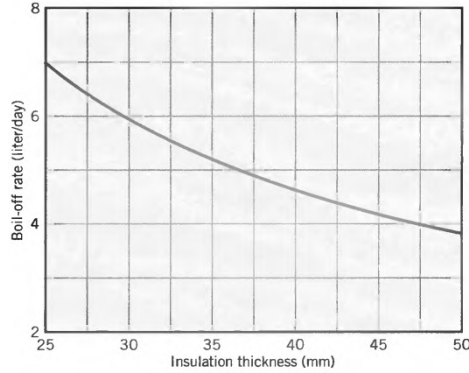
$$q - \dot{m}h_{fg} = 0 \Rightarrow \dot{m} = \frac{q}{h_{fg}} = \frac{13,06}{2 \times 10^5} = 6,53 \cdot 10^{-5} \text{ kg/s}$$

Par jour, la quantité du liquide évaporée à cause du gain de chaleur:

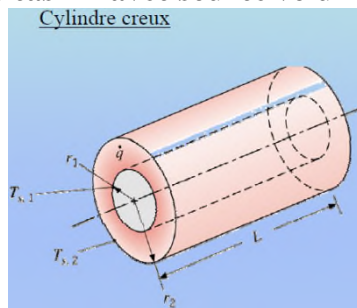
$$\dot{m} = 6,53 \cdot 10^{-5} \times 3600 \times 24 = 5,64 \text{ kg/jour}$$

Le volume du liquide évaporé

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho} = \frac{5,64}{804} = 0,007 \frac{\text{m}^3}{\text{jour}} = 7 \text{ litres/jour}$$

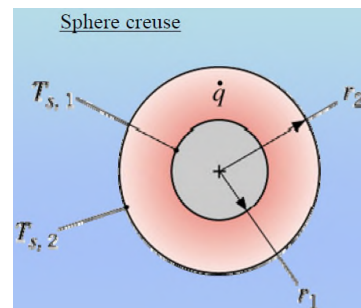


Autres cas 1D avec source volumétrique



Cylindrique

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) + \dot{g} = 0$$



Sphérique

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(kr^2 \frac{dT}{dr} \right) + \dot{g} = 0$$

Distribution de température

Paroi plane	$T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{2} \frac{x}{L} + \frac{T_{s,1} + T_{s,2}}{2}$
Paroi cylindrique	$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{2k} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$
Paroi sphérique	$T(r) = T_{s,2} + \frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r^2}{r_2^2} \right) - \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right] \frac{(1/r) - (1/r_2)}{(1/r_1) - (1/r_2)}$

Densité du flux de chaleur

Paroi plane	$q''(x) = \dot{q}x - \frac{k}{2L}(T_{s,2} - T_{s,1})$
Paroi cylindrique	$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{2} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r \ln(r_2/r_1)}$
Paroi sphérique	$q''(r) = \frac{\dot{q}r}{3} - \frac{k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$

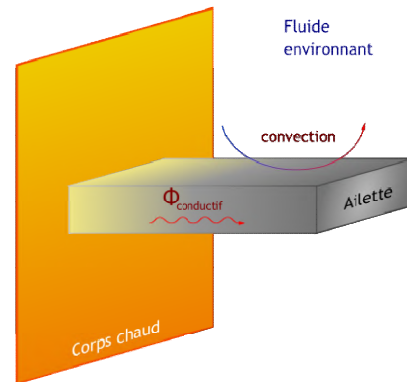
Flux de chaleur

Paroi plane	$q(x) = \left[\dot{q}x - \frac{k}{2L}(T_{s,2} - T_{s,1}) \right] A_x$
Paroi cylindrique	$q(r) = \dot{q}\pi L r^2 - \frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)} \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{4k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]$
Paroi sphérique	$q(r) = \frac{\dot{q}4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi k \left[\frac{\dot{q}r_2^2}{6k} \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) + (T_{s,2} - T_{s,1}) \right]}{[(1/r_1) - (1/r_2)]}$

LES AILETTES

Une **ailette** est dispositif thermique visant à augmenter la surface de contact avec un fluide extérieur pour augmenter les échanges convectifs, et donc le transfert de chaleur.

L'ailette est en contact avec le corps chaud, la chaleur se propage par conduction à travers l'ailette qui est refroidi par convection par le fluide environnant.



APPLICATION DES AILETTES

Les radiateurs

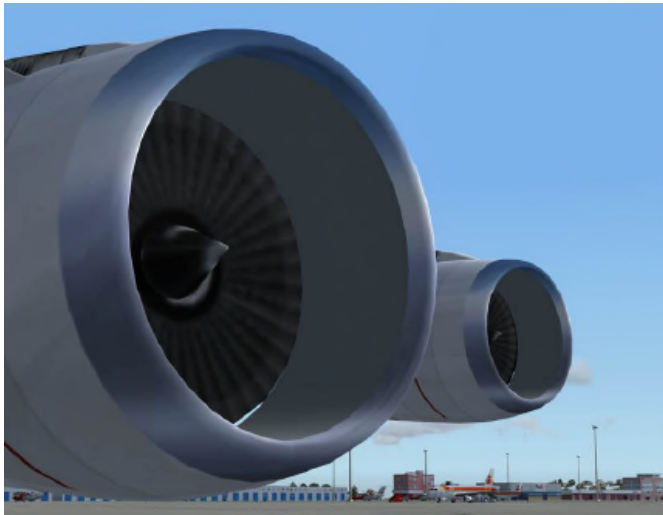
Dans le radiateur, l'eau circule dans un tube sur lequel viennent se greffer des ailettes qui améliorent le refroidissement du tube et donc de l'eau.



Résistances chauffantes à ailettes



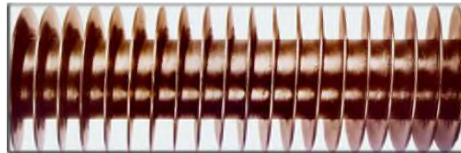
Composants aérospatiaux



Frein à disque en fonte ventilés

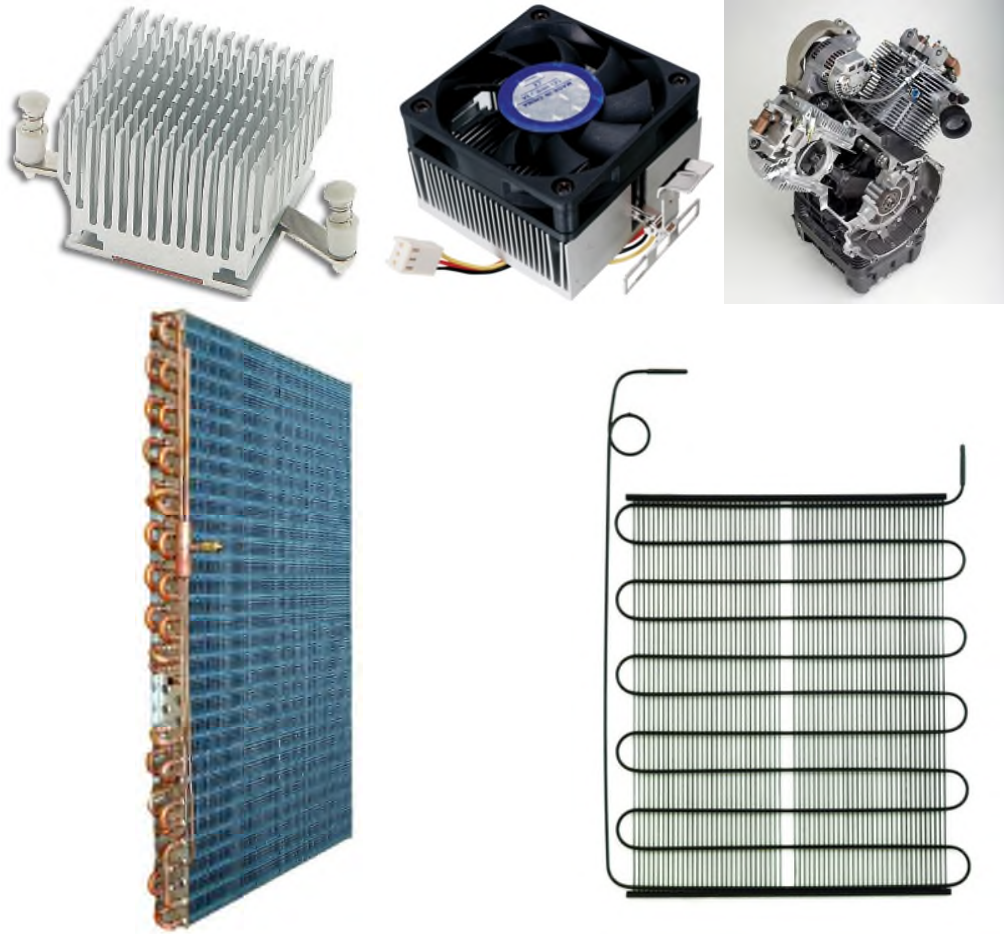


Ailettes hélicoïdales



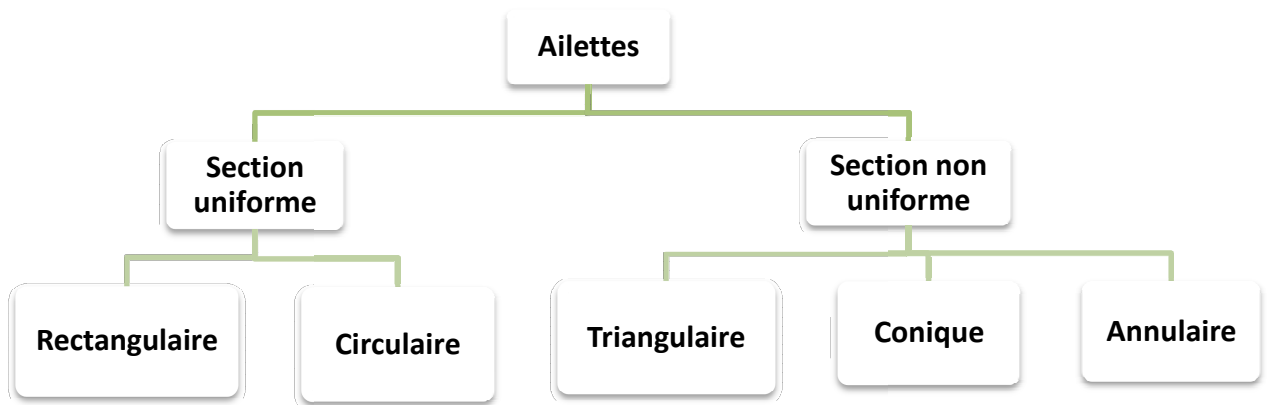
Tubes à ailettes spirale conviennent dans toutes sortes d'applications:

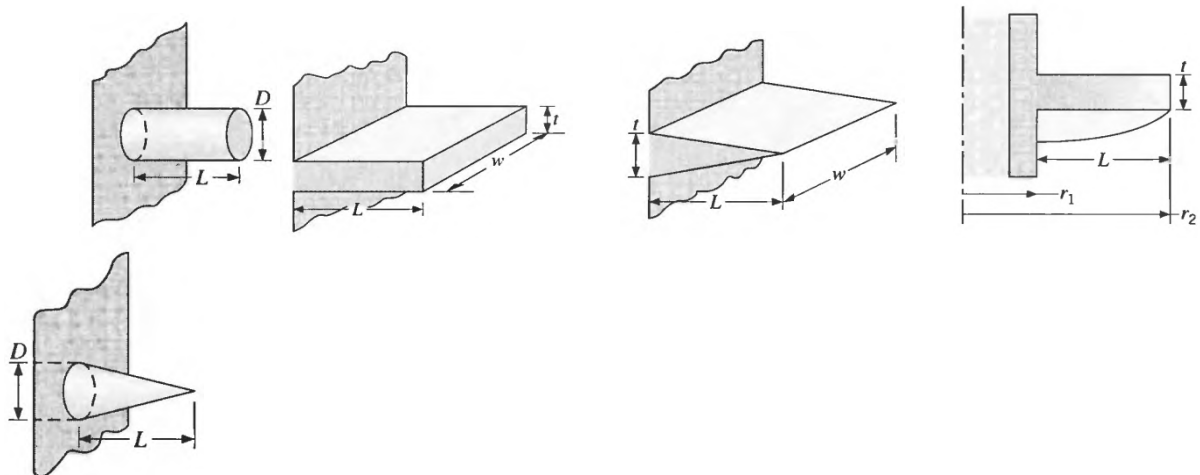
- chaudières de centrales thermiques,
- chauffage,
- industries chimiques,
- aciéries,
- ainsi que dans les raffineries:
 - industrie alimentaire,
 - industrie de la cellulose, etc...



D'autres applications d'ailettes

Différents types d'ailettes



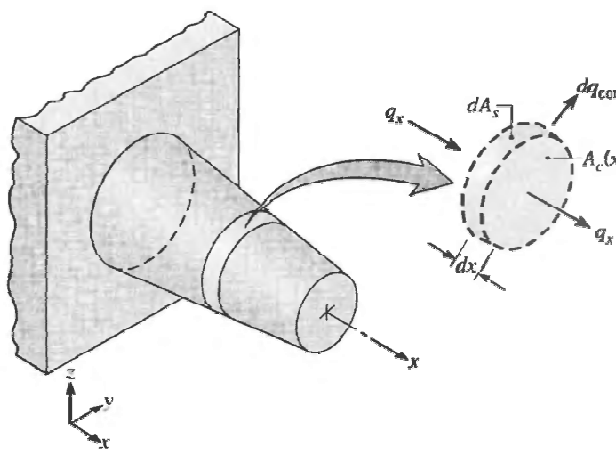


Mise en équation du bilan thermique

Hypothèses

- Régime permanent sans source d'énergie
 - Le gradient de température est unidirectionnel \Rightarrow champ de température est uniforme dans une section donnée de l'ailette
 - Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable
- La conductivité thermique k et le coefficient d'échange, h sont constants

Ailettes à section non uniforme



Bilan thermique

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

Loi de Fourier

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx}$$

(1)

Developpement en série de Taylor

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx$$

$$q_{x+dx} = -kA_c \frac{dT}{dx} - k \frac{d}{dx} \left(A_c \frac{dT}{dx} \right) dx$$

(2)

Loi de Newton

$$dq_{conv} = h dA_s (T - T_\infty)$$

(3)

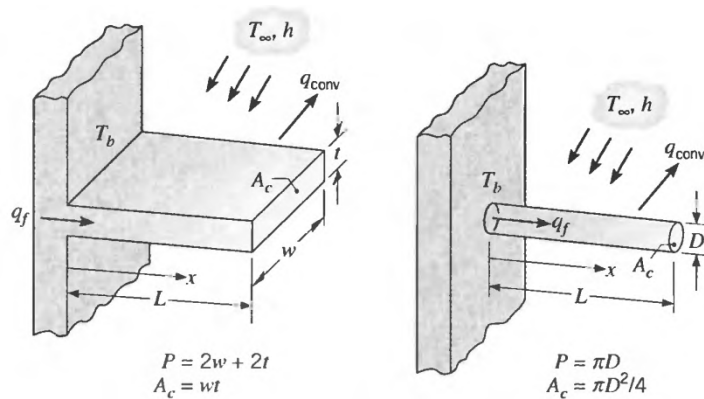
En remplaçant les équations (1) et (2) dans l'équation (3), on obtient:

$$\frac{d}{dx} \left(A_c \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h dA_s}{k dx} (T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_c} \frac{h dA_s}{k dx} \right) (T - T_\infty) = 0$$

C'est l'équation différentielle donnant le profil de température

Ailette à section uniforme



Lorsque l'ailette est à section uniforme l'équation différentielle donnant le profil de température se réduit à:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_c} (T - T_\infty) = 0$$

En posant $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad m^2 = \frac{hP}{kA_c}$$

C'est un équation différentielle linéaire homogène du second ordre qui a pour solution:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

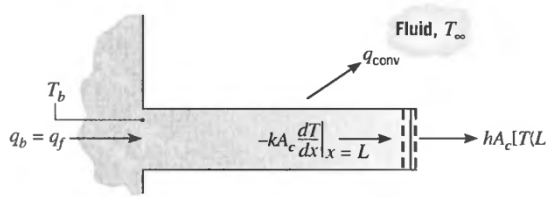
Pour déterminer les constantes C1 et C2 on utilise les conditions aux limites

- Première condition est la température à la base de l'ailette à x=0

$$\theta(0) = T_b - T_\infty$$

- Deuxième condition est la température à l'extrémité de l'ailette à x=L suivant 4 cas de configurations:

1^{er} cas:



$$hA_c [T(L) - T_\infty] = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

$$h\theta(L) = -k \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L}$$

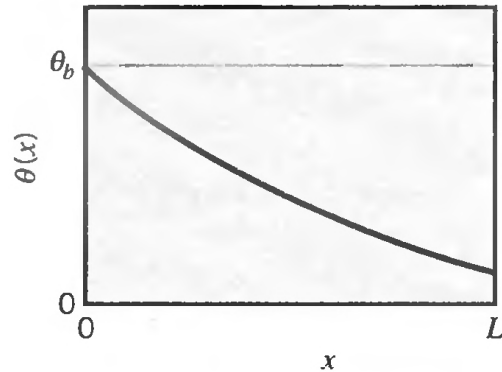
$$\begin{cases} \theta_b = C_1 + C_2 \\ h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL}) \end{cases}$$

La distribution de température est donnée par la fonction suivante:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL}$$

On remarque que le gradient de température décroît lorsque x augmente.

Ce qui a pour conséquence la réduction du transfert de chaleur par conduction thermique lorsque x augmente due aux pertes thermiques continues par convection à la surface de l'ailette.



Pour déterminer le flux de chaleur évacué par l'ailette, deux méthodes peuvent être utilisées:

1) la procédure la plus simple est d'utiliser la loi de Fourier à la base de l'ailette.

$$q_f = q_b = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -kA_c \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0}$$

En connaissant la distribution de température, on obtient le flux q_f de chaleur évacué par l'ailette.

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\sinh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \cosh mL}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL}$$

2) L'autre méthode est d'utiliser le bilan énergétique de l'ailette:

Le flux de chaleur évacué à la base de l'ailette est égale au flux de chaleur évacué à la surface latérale de l'ailette et au sommet de l'ailette.

$$q_f = \int_{A_f} h[T(x) - T_\infty] dA_s$$

On obtient $q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\sinh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \cosh mL}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL}$

$$q_f = \int_{A_f} h\theta(x) dA_s$$

2^{ème} cas:

On suppose que le flux de chaleur à l'extrémité de l'ailette est négligeable:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

En remplaçant $C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = 0$ dans $\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=L} = 0$ on obtient :

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$$\begin{cases} \theta_b = C_1 + C_2 \\ C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = 0 \end{cases}$$

La distribution de température est donnée par la fonction suivante:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

En utilisant la loi de Fourier à la base de l'ailette

$$q_f = q_b = -kA_c \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = -kA_c \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0}$$

On obtient :

3^{ème} cas:

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \tanh mL$$

On suppose qu'à l'extrémité de l'ailette la température T_L est imposée.

De la même façon que les deux cas précédents on obtient la distribution de température et le flux de chaleur évacué par l'ailette

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right) \sinh mL + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b \frac{\cosh mL - \left(\frac{\theta_L}{\theta_b}\right)}{\sinh mL}$$

4^{ème} cas:

On suppose qu'à l'extrémité de l'ailette est à l'infini de tel façon que la température T_L est égale à la température T_∞ .

De la même façon que les cas précédents on obtient la distribution de température et le flux de chaleur évacué par l'ailette

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$

TABLE 3.4 Temperature distribution and heat loss for fins of uniform cross section

Case	Tip Condition ($x = L$)	Temperature Distribution θ/θ_b	Fin Heat Transfer Rate q_f
A	Convection heat transfer: $h\theta(L) = -kd\theta/dx _{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.70)	$M \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.72)
B	Adiabatic $d\theta/dx _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ (3.75)	$M \tanh mL$ (3.76)
C	Prescribed temperature: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$ (3.77)	$M \frac{(\cosh mL - \theta_L/\theta_b)}{\sinh mL}$ (3.78)
D	Infinite fin ($L \rightarrow \infty$): $\theta(L) = 0$	e^{-mx} (3.79)	M (3.80)

$$\theta \equiv T - T_\infty \quad m^2 \equiv hP/kA_c$$

$$\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty \quad M \equiv \sqrt{hPkA_c}\theta_b$$

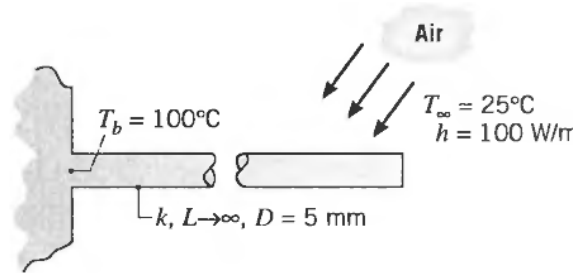
Rappel mathématique:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = (\cosh u) \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\cosh u) = (\sinh u) \frac{du}{dx} \quad \frac{d}{dx}(\tanh u) = \left(\frac{1}{\cosh^2 u}\right) \frac{du}{dx}$$

Exemple d'application

Une très longue tige de 5 mm de diamètre a un côté maintenu à une température de 100°C. La surface de la tige est exposé à l'air ambiant à 25°C avec un coefficient de convection de 100 W/m².K.



1) Déterminez la distribution de température dans la tige si celle-ci est en cuivre, en aluminium ou en acier inoxydable.

2) Estimez quelle longueur doit avoir la tige pour que celle-ci puisse être considéré comme infiniment longue.

A la température moyenne $T = (T_b + T_\infty) / 2 = (100 + 25) / 2 = 62,5^\circ\text{C}$, les conductivités thermiques de chaque matériau sont:

Cuivre: $k = 398 \text{ W/m.K}$

Aluminium: $k = 180 \text{ W/m.K}$

Acier inoxydable: $k = 14 \text{ W/m.K}$

$$m = \left(\frac{hP}{kA_c} \right)^{1/2} = \left(\frac{h\pi D}{k \frac{\pi D^2}{4}} \right)^{1/2} = \left(\frac{4h}{kD} \right)^{1/2}$$

Avec $h = 100 \text{ W/m}^2.\text{K}$ et $D = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ pour chaque matériau on obtient:

Cuivre: $m = 14,2 \text{ m}^{-1}$

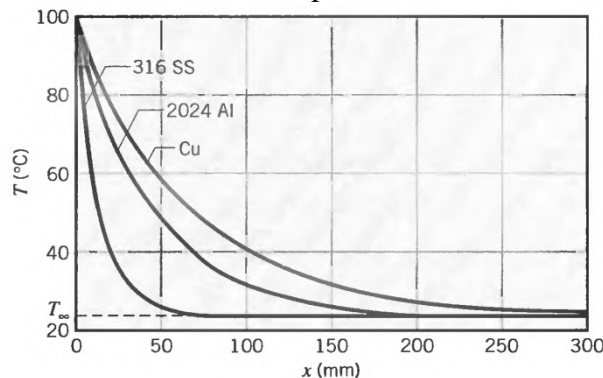
Aluminium: $m = 21,2 \text{ m}^{-1}$

Acier inoxydable: $m = 75,6 \text{ m}^{-1}$

La distribution de température le long de l'ailette est donnée par l'équation suivante (cas D):

$$T(x) = e^{-mx}$$

Pour chaque matériau on obtient la courbe exponentielle



L'évacuation de la chaleur par l'ailette:

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b$$

Pour le cuivre:

$$q_f = \sqrt{hPkA_c} \theta_b = \sqrt{100 \times \pi \times 0,005 \times 398 \times \frac{\pi}{4} \times (0,005)^2} (100 - 25) = 8,3 \text{ W}$$

Pour l'aluminium: $q_f=5,6 W$ pour l'acier inoxydable: $q_f=1,6 W$

2) À l'infini la température de l'ailette est égale à la température de l'air ambiant et la transfert de chaleur est nul comme si l'extrémité de l'ailette est isolé (adiabatique). Donc on compare le cas B et D:

B	Adiabatic $d\theta/dx _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$	$M \tanh mL$	
D	Infinite fin ($L \rightarrow \infty$): $\theta(L) = 0$	e^{-mx}	M	(3.80)

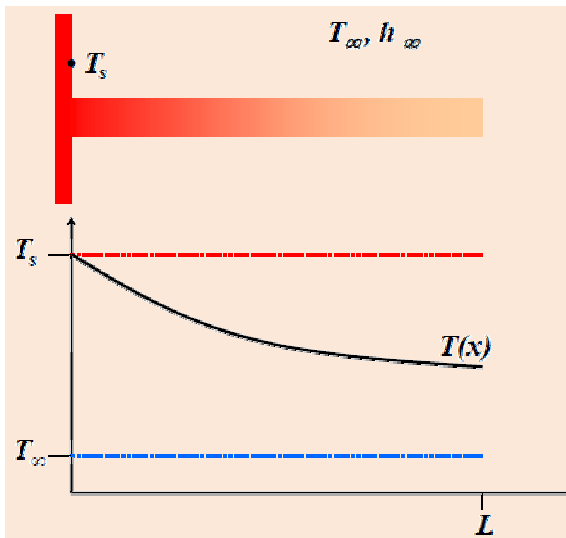
Pour approximer la longueur de l'ailette à une ailette infini il faut déterminer la longueur L pour que $\tanh mL \geq 0,99$ ou $mL \geq 2,65 \Rightarrow L \geq 2,65/m = 2,65/14,2 = 0,187m \approx 0,19m$.

Pour l'aluminium $L \geq 2,65/m = 2,65/21,2 = 0,125m \approx 0,13m$.

Pour l'acier inoxydable $L \geq 2,65/m = 2,65/75,6 = 0,035m \approx 0,04m$.

Effacité d'une ailette

L'ailette a pour but de permettre une plus grande dissipation de chaleur. Le taux maximum de dissipation qu'une ailette pourrait avoir est le taux qu'on obtiendrait si l'ailette entière était à la température de la base (car c'est celle-ci qui à le plus grand ΔT). Par contre, cette situation n'est pas possible car il doit y avoir un gradient de température dans l'ailette associé au phénomène de conduction. On peut ainsi définir une efficacité de l'ailette par:



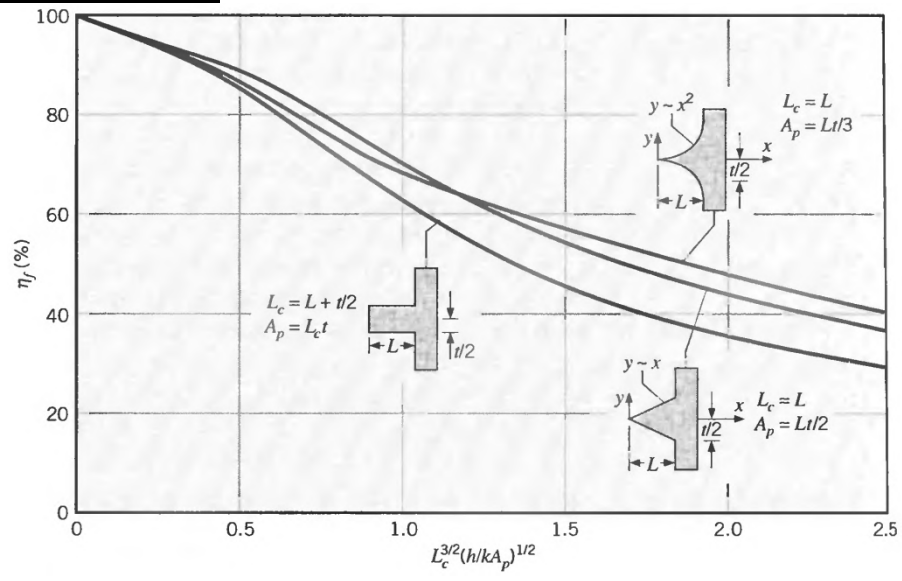
$$\eta_f = \frac{q_f}{h A_f \theta_b}$$

Ailette de section transverse non-uniforme

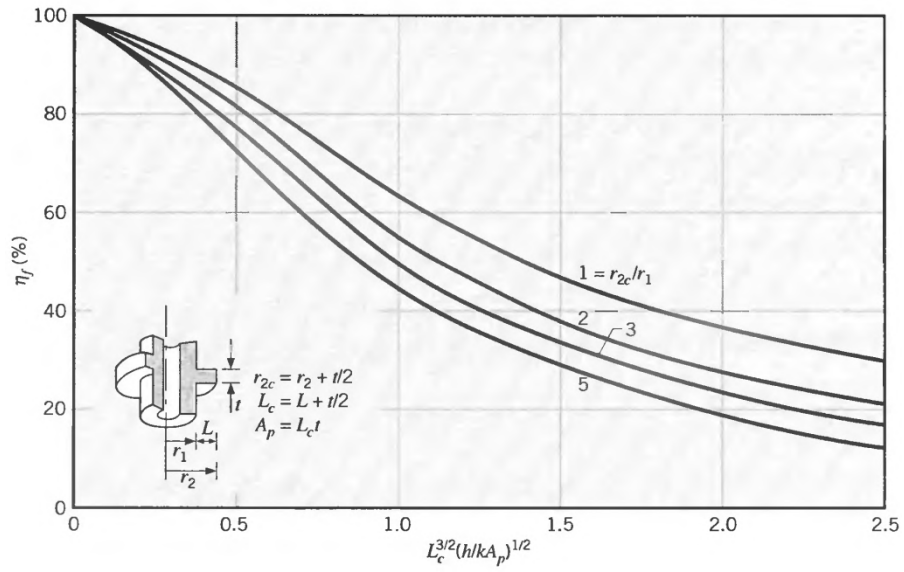
$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_c} \frac{dA_c}{dx} \right) \frac{dT}{dx} - \frac{h}{k A_c} \frac{dA_c}{dx} (T(x) - T_\infty) = 0$$

La dérivée du deuxième terme n'est plus nulle! Ce petit détail complique grandement la résolution de l'équation différentielle.

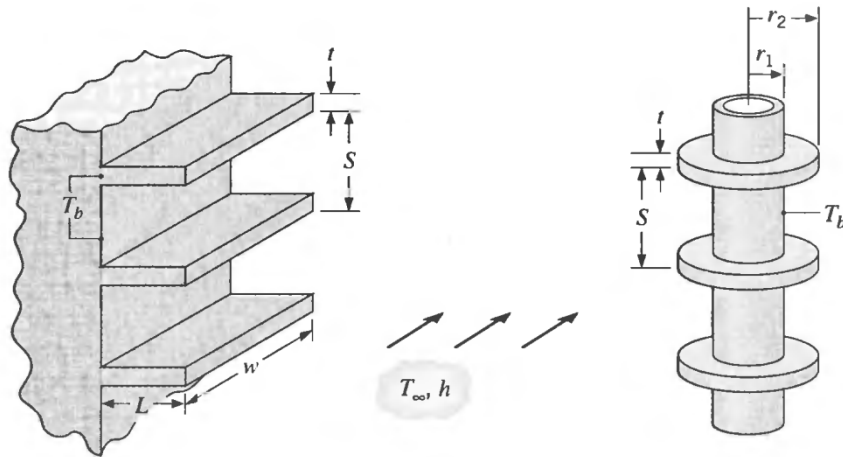
Efficacité des ailettes 2D



Efficacité des ailettes cylindrique



Surface avec ailettes



$$\begin{cases} q_t = N\eta_f h A_f \theta_b + h A_b \theta_b \\ A_t = N A_f + A_b \end{cases} \Rightarrow q_t = h [N\eta_f A_f + (A_t - N A_f)] \theta_b = h A_t \left[1 - \frac{N A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] \theta_b$$

$$\eta_0 = \frac{q_t}{q_{max}} = \frac{q_t}{h A_t \theta_b} \Rightarrow \eta_0 = 1 - \frac{N A_f}{A_t} (1 - \eta_f)$$

TABLE 3.5 Efficiency of common fin shapes

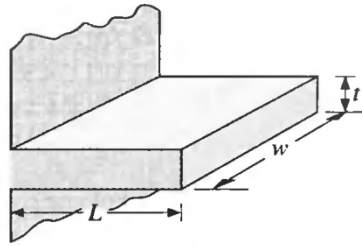
Straight Fins

Rectangular^a

$$A_f = 2wL_c$$

$$L_c = L + (t/2)$$

$$A_p = tL$$

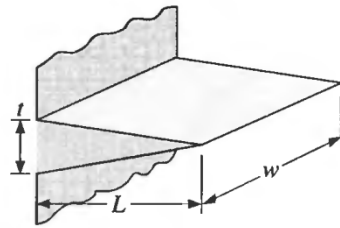


$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

Triangular^a

$$A_f = 2w[L^2 + (t/2)^2]^{1/2}$$

$$A_p = (t/2)L$$



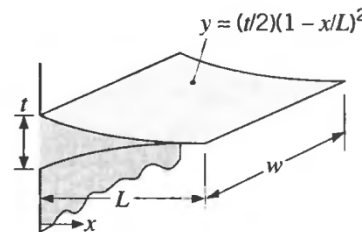
$$\eta_f = \frac{1}{mL} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$$

Parabolic^a

$$A_f = w[C_1L + (L^2t)\ln(t/L + C_1)]$$

$$C_1 = [1 + (t/L)^2]^{1/2}$$

$$A_p = (t/3)L$$



$$\eta_f = \frac{2}{[4(mL)^2 + 1]^{1/2} + 1}$$

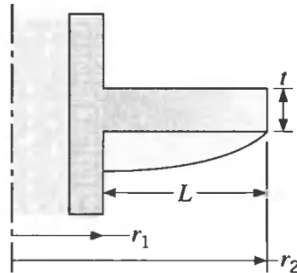
Circular Fin

Rectangular^a

$$A_f = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2)$$

$$r_{2c} = r_2 + (t/2)$$

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2)t$$



$$\eta_f = C_2 \frac{K_1(mr_1)I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1)K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1)K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1)I_1(mr_{2c})}$$

$$C_2 = \frac{(2r_1/m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$$

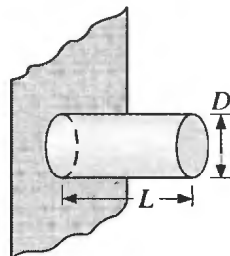
Pin Fins

Rectangular^b

$$A_f = \pi DL_c$$

$$L_c = L + (D/4)$$

$$V = (\pi D^2/4)L$$

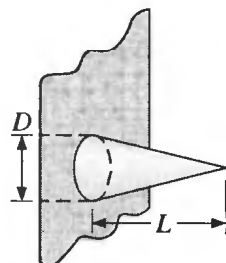


$$\eta_f = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

Triangular^b

$$A_f = \frac{\pi D}{2} [L^2 + (D/2)^2]^{1/2}$$

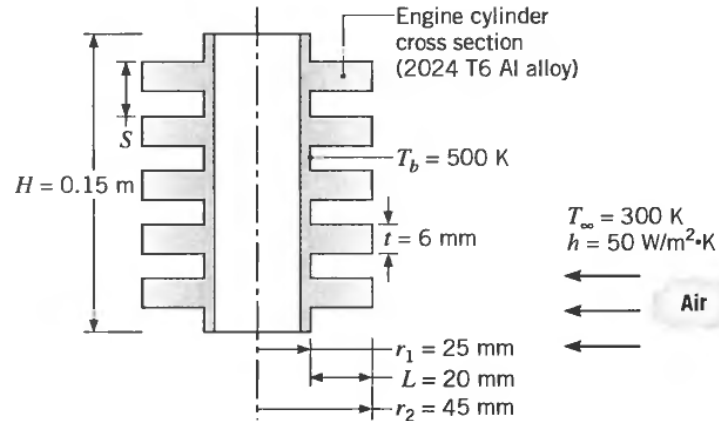
$$V = (\pi/12)D^2L$$



$$\eta_f = \frac{2}{mL} \frac{I_2(2mL)}{I_1(2mL)}$$

Exemple d'application

Le cylindre d'une moto est en aluminium et a une hauteur 0.15m et un diamètre externe de 50mm. Sous conditions normales, la surface extérieure du cylindre est à une température de 500 K. La température ambiante est à 300 K avec un coefficient de convection de 50 W/m². Des ailettes circulaires sont encastrées autour du cylindre pour augmenter la dissipation de chaleur. Il y a 5 ailettes d'une épaisseur de 6 mm et d'une longueur de 20 mm. Calculez l'augmentation du transfert de chaleur dû à la présence de ces 5 ailettes.



$$A_f = 2\pi(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi r_2 t = 2\pi(0,045^2 - 0,025^2) + 2\pi \times 0,045 \times 0,006 = 0,0105 \text{ m}^2$$

$$A_f = 2\pi(r_{2c}^2 - r_1^2) = 2\pi(0,048^2 - 0,025^2) = 0,0105 \text{ m}^2$$

$$A_t = NA_f + 2\pi r_1(H - Nt) = 0,0527 + 2\pi \times 0,025(0,15 - 0,03) = 0,0716 \text{ m}^2$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = 1,92$$

$$L_c = 0,023 \text{ m}$$

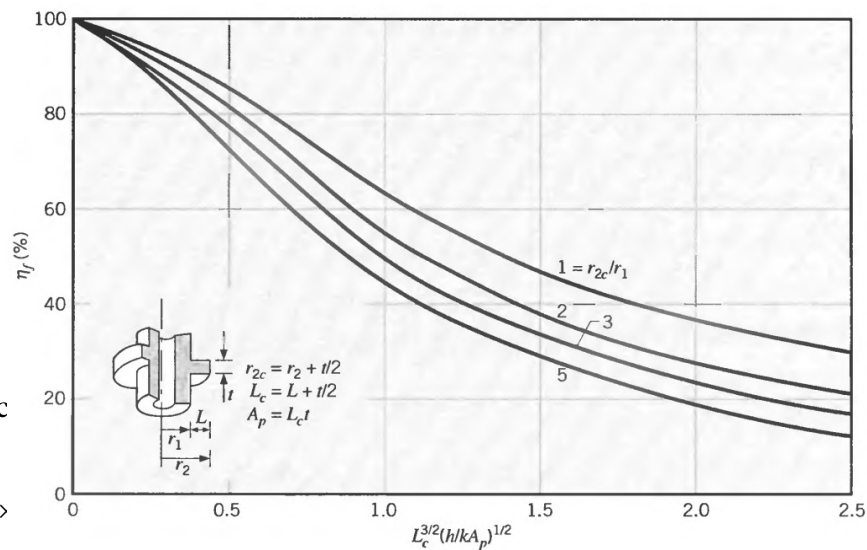
$$A_p = 1,38 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$L_c^{3/2} (h / kA_p)^{1/2} = 0,15$$

Graphiquement, on obtient l'efficacité de l'ailette $\eta_f = 0,95$

Avec les ailettes la quantité de chaleur évacuée est la suivante:

$$q_t = hA_t \left[1 - \frac{NA_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] \theta_b = 50 \times \dots$$

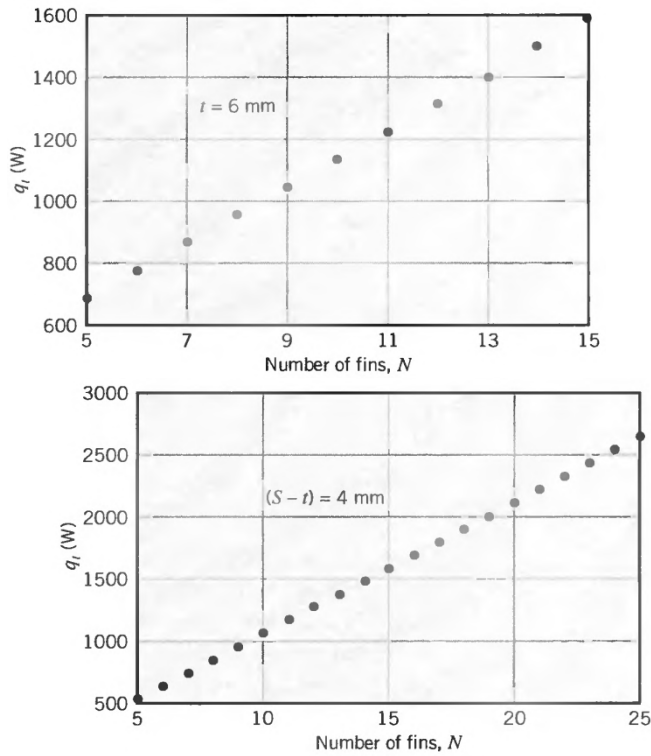


Sans les ailettes la quantité de chaleur évacuée est obtenue à partir de l'équation suivante:

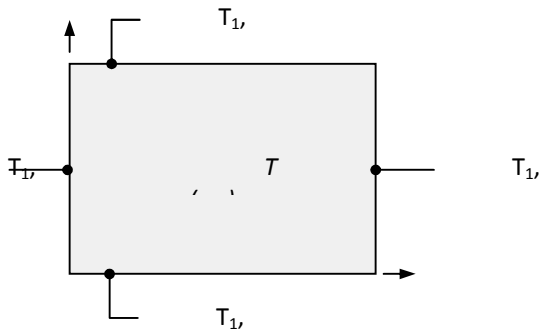
$$q_t = h(2\pi r_1 H) \theta_b = 50 \times (2\pi \times 0,025 \times 0,15) (500 - 300) = 236 \text{ W}$$

Donc, l'augmentation du transfert de chaleur dû à la présence de ces 5 ailettes est:

$$\Delta q_t = 690 - 236 = 454 \text{ W}$$



CHAPITRE 4
Conduction en 2D et 3D



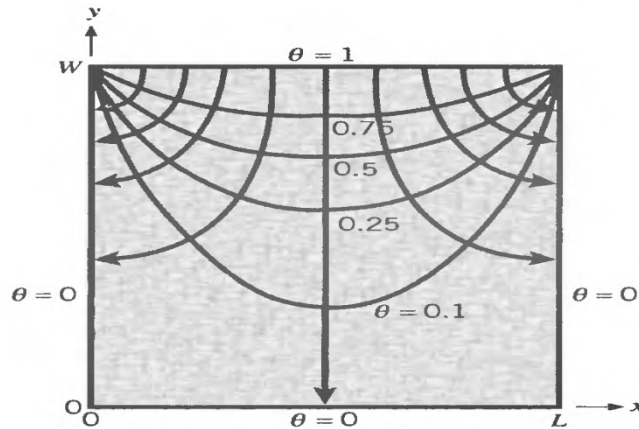
$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

- 2-D
- Source de chaleur nulle
- Propriétés constantes.

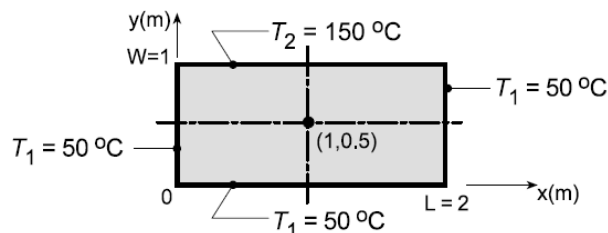
Solution Analytique

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$



Exemple d'application

Une plaque rectangulaire est sujette aux conditions initiales décrites sur la figure ci-dessous. En utilisant la solution analytique pour une plaque plane, calculez la température au point P(1, 0.5) en ne considérant que les cinq premiers termes NON-NULS de la série. Déduire l'erreur approximative en ne considérant que les trois premiers termes de la série non-nuls.



$$\theta(x, y) \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

Pour $(x, y) = (1; 0,5)$, on obtient $x/L = 1/2$; $y/L = 1/4$ et $W/L = 1/2$,

$$\theta(1, 0.5) \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sinh(n\pi/4)}{\sinh(n\pi/2)}$$

Lorsque n est paire, le terme correspondant s'annule, et donc on ne considère que les termes où n est impaire n=1,3,5,7 et 9 les 5 premiers termes non nuls.

$$\theta(1, 0.5) = \frac{2}{\pi} \left\{ 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sinh(\pi/4)}{\sinh(\pi/2)} + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \frac{\sinh(3\pi/4)}{\sinh(3\pi/2)} + \frac{2}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \frac{\sinh(5\pi/4)}{\sinh(5\pi/2)} + \frac{2}{7} \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \frac{\sinh(7\pi/4)}{\sinh(7\pi/2)} + \frac{2}{9} \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) \frac{\sinh(9\pi/4)}{\sinh(9\pi/2)} \right\}$$

$$\theta(1, 0.5) = \frac{2}{\pi} [0.755 - 0.063 + 0.008 - 0.001 + 0.000] = 0.445$$

$$T(1, 0.5) = \theta(1, 0.5)(T_2 - T_1) + T_1 = 0.445(150 - 50) + 50 = 94.5^\circ \text{C}$$

Si on ne considère que les 3 premiers termes, c'est-à-dire n=1, 3, 5 ; on obtient $\theta(1; 0,5) = 0,46$; avec une erreur de 0,2%

Méthode: Facteurs de forme

- En 2D et 3D, le flux de chaleur pour les géométries bordées par deux surfaces isothermes à T1 et T2 peut être calculé par la relation suivantes, où S est appelé le facteur de forme de conduction:

$$q = Sk(T_1 - T_2)$$

- Relations pour S: Table ci-dessous
- En terme de circuit-thermique, la résistance de conduction en 2D ou 3D est donc:

$$R_{cond(2D,3D)} = \frac{1}{Sk}$$

TABLE 4.1 Conduction shape factors and dimensionless conduction heat rates for selected systems.

(a) Shape factors [$q = Sk(T_1 - T_2)$]

System	Schematic	Restrictions	Shape Factor
<p>Case 1</p> <p>Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium</p>		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
<p>Case 2</p> <p>Horizontal isothermal cylinder of length L buried in a semi-infinite medium</p>		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
<p>Case 3</p> <p>Vertical cylinder in a semi-infinite medium</p>		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$
<p>Case 4</p> <p>Conduction between two cylinders of length L in infinite medium</p>		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$
<p>Case 5</p> <p>Horizontal circular cylinder of length L midway between parallel planes of equal length and infinite width</p>		$z \gg D/2$ $L \gg z$	$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$
<p>Case 6</p> <p>Circular cylinder of length L centered in a square solid of equal length</p>		$w > D$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\ln(1.08 w/D)}$
<p>Case 7</p> <p>Eccentric circular cylinder of length L in a cylinder of equal length</p>		$D > d$ $L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$

Exemples d'application

TABLE 4.1 *Continued*

System	Schematic	Restrictions	Shape Factor
Case 8 Conduction through the edge of adjoining walls		$D > 5L$	$0.54D$
Case 9 Conduction through corner of three walls with a temperature difference ΔT_{1-2} across the walls		$L \ll \text{length and width of wall}$	$0.15L$
Case 10 Disk of diameter D and temperature T_1 on a semi-infinite medium of thermal conductivity k and temperature T_2		None	$2D$
Case 11 Square channel of length L		$\frac{W}{w} < 1.4$ $\frac{W}{w} > 1.4$ $L \gg W$	$\frac{2\pi L}{0.785 \ln(W/w)}$ $\frac{2\pi L}{0.930 \ln(W/w) - 0.050}$

Exemple n°1

Un pipeline, servant à transporter de l'huile, est enfoui sous terre tel que son centre est à une distance de 1,5 mètre sous la surface. Le pipeline a un diamètre de 0,5 mètre et possède un isolant d'une épaisseur de 100 mm. Quel est le transfert de chaleur par mètre de pipeline perdu pour de l'huile circulant à une température de 120°C si la surface de la terre est au point de congélation?

On prend $k=0,069$ W/m.K pour l'isolant et $k=0,52$ W/m.K pour la terre noire.

Exemple n°2

Des déchets radioactifs sont temporairement stockés dans un contenant sphérique enfoui à une profondeur de 10 mètres sous le sol. Le diamètre du contenant est de 2 mètres et il dissipe 500 Watts de chaleur dû au processus de désintégration radioactif. Si la température à la surface du sol est de 20°C, quel est la température de la surface du contenant?

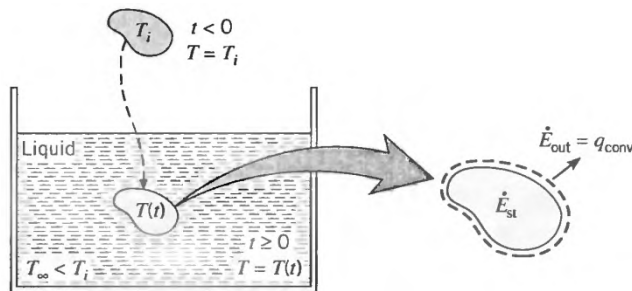
CHAPITRE 5

Conduction en régime transitoire

On va étudier le transfert de chaleur vers un milieu à température uniforme, ce qui est contradictoire car il est nécessaire qu'il y ait un gradient thermique pour qu'il y ait transfert de chaleur.

Cette approximation du milieu à température uniforme peut être justifiée dans certains cas.

Considérons la trempe d'une bille métallique qui consiste à immerger une bille initialement à la température T_i dans un bain à température T_0 maintenue constante. Si l'on suppose que la température à l'intérieur de la bille est uniforme, ce qui sera d'autant plus vrai que sa dimension est petite et sa conductivité thermique élevée, on peut écrire le bilan thermique de cette bille entre deux instants t et $t+dt$



$$-\dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \Rightarrow -hA_s(T - T_\infty) = \rho V c \frac{dT}{dt} \quad \text{En posant } \theta = T - T_\infty$$

$$\rho V c \frac{d\theta}{dt} = -hA_s \theta \Rightarrow \frac{\rho V c}{hA_s} \frac{d\theta}{\theta} = -dt \Rightarrow \frac{\rho V c}{hA_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt$$

$$\frac{\rho V c}{hA_s} \ln\left(\frac{\theta_i}{\theta}\right) = t$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho V c}\right)t\right]$$

On remarque que le groupement $\frac{\rho V c}{hA_s}$ est homogène à l'inverse d'un temps, on l'appellera τ la constante de temps du système.

$$\tau = \frac{\rho V c}{hA_s}$$

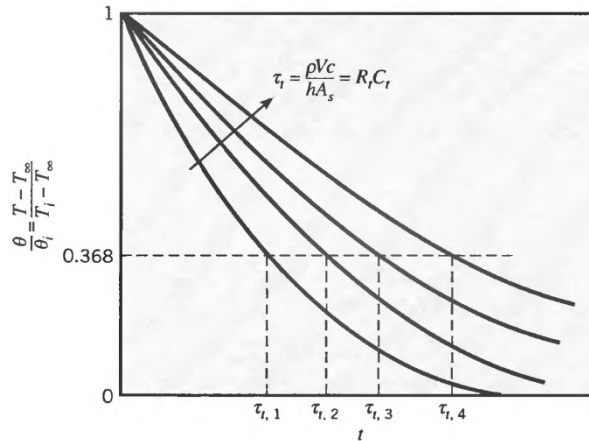
Cette grandeur est fondamentale car elle donne l'ordre de grandeur de temps du phénomène physique

Si on désire connaître le temps nécessaire pour qu'un solide atteigne une certaine température, on utilise l'équation:

$$t = \frac{\rho V c_p}{hA_s} \ln\left(\frac{\theta_i}{\theta}\right)$$

Par contre, si on désire déterminer la température que le solide atteindra après un certains lapse de tems, on a:

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\left(\frac{hA_s}{\rho V c_p}\right)t\right)$$



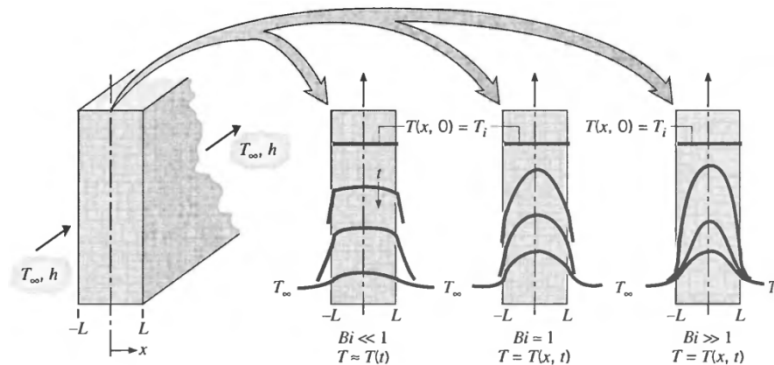
Il est toujours intéressant en physique de présenter les résultats sous forme adimensionnelle, on peut définir deux nombres adimensionnels qui sont particulièrement important en régime variable:

Le nombre de Biot:
$$Bi = \text{nombre de Biot} = \frac{\text{Résistance thermique interne}}{\text{Résistance thermique externe}} = \frac{\frac{L}{kA_s}}{\frac{1}{hA_s}}$$

L est une longueur caractéristique du milieu.

$$Bi = \frac{hL}{k}$$

L'hypothèse d'uniformité de la température est justifié lorsque $Bi < 0,1$.



Remarque: Pour définir une longueur caractéristique, L est déterminé comme le rapport entre le volume du solide et l'aire en contact avec le fluide:

$$L = \frac{V}{A_s}$$

Pour un mur plan soumis à la même convection de part et d'autre, la longueur caractéristique sera $L/2$.

Pour un cylindre, la longueur caractéristique sera de $r/2$.

Pour une sphère, la longueur caractéristique sera de $r/3$

Remarque: Pour un mur plan ou un côté est adiabatique, la longueur caractéristique sera la longueur du mur.

Le nombre de Fourier:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Le nombre de Fourier caractérise la diffusion de la chaleur en régime variable.

La définition du nombre de Biot et du nombre de Fourier permet d'écrire l'expression de la température du solide sous la forme.

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{(-BiFo)}$$

La connaissance des nombres de Biot (Bi) et de Fourier (Fo) permet de déterminer l'évolution de la température de tout système à température uniforme souvent appelés systèmes minces (Bi<0,1).

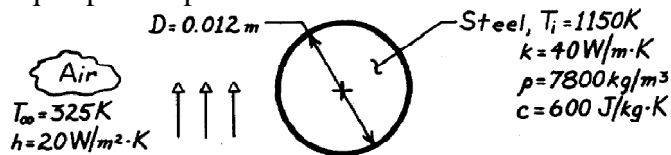
Exemples d'application

Exemple n°1:

Des billes en acier de 12 mm de diamètres sont cuites en les chauffant à 1150 K pour être ensuite refroidies à 400 K à l'air ambiant (325 K et un coefficient de convection de 20 W/m².K). En utilisant les propriétés suivantes de l'acier:

- K=40 W/m.K;
- $\rho = 7800 \text{ Kg/m}^3$;
- $c_p = 600 \text{ J/kg.K}$.

Estimez le temps requis pour le procédé de refroidissement.



Le nombre de Biot:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{h\left(\frac{r_0}{3}\right)}{k} = \frac{20 \times 0,002}{40} = 0,001 < 0,1 \quad \text{c'est un corps mince et donc } T = f(t)$$

$$t = \frac{\rho V c_p}{h A_s} \ln \frac{T_i - T_{\infty}}{T - T_{\infty}} = \frac{\rho(\pi D^3/6) c_p}{h \pi D^2} \ln \frac{T_i - T_{\infty}}{T - T_{\infty}} = \frac{\rho D c_p}{6h} \ln \frac{T_i - T_{\infty}}{T - T_{\infty}}$$

$$t = \frac{7800 \times 0,012 \times 600}{6 \times 20} \ln \frac{1150 - 325}{400 - 325} = 1122 \text{ s} = \mathbf{0h 18mn 42s}$$

Remarque: Si on prend en considération le rayonnement thermique de la bille vers le milieu ambiant, le temps de refroidissement serait plus court.

Exemple n°1:

Un thermocouple, qui peut-être approximé comme une sphère, est utilisé pour mesuré la température dans un écoulement de gaz. Le coefficient de convection entre le thermocouple et le gaz est de 400 W/m².K. Les propriétés du thermocouple sont k=20 W/m.K, $c_p=400 \text{ J/kg.K}$ et $\rho=8500 \text{ kg/m}^3$.

Déterminez le diamètre du thermocouple requis pour avoir une constante de temps de 1 s. Si ce thermocouple est à 25°C et est placé dans un écoulement de gaz à 200°C, quel est le temps requis pour qu'il atteigne 199°C?

La constante de temps est définie par: $\tau = \frac{\rho V c}{h A_s}$

$$\tau = \frac{\rho(\pi D^3/6) c}{h \pi D^2} = \frac{\rho D c}{6h} \Rightarrow D = \frac{6h\tau}{\rho c}$$

$$D = \frac{6h\tau}{\rho c} = \frac{6 \times 400 \times 1}{8500 \times 400} = 7,06 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,706 \text{ mm}$$

Pour déterminer le nombre de Biot, on doit calculer la longueur caractéristique $L_c = r_0/3$

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{hr_0}{3k} = \frac{400 \times 3,53 \cdot 10^{-4}}{3 \times 20} = 2,35 \cdot 10^{-3} < 0,1$$

La condition du corps mince est vérifiée, et donc les équations correspondant peuvent être utilisées.

Le temps nécessaire pour que le thermocouple atteigne la température 199°C

$$t = \frac{\rho V c_p}{h A_s} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho (\pi D^3 / 6) c_p}{h \pi D^2} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} = \frac{\rho D c_p}{6h} \ln \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty}$$

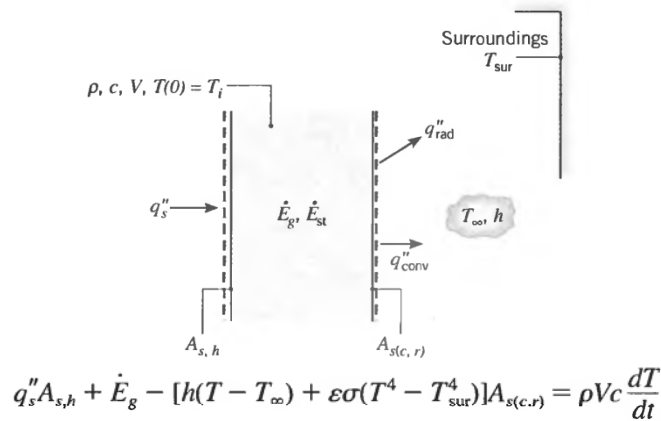
$$t = \frac{8500 \times 7,06 \cdot 10^{-4} \times 400}{6 \times 400} \ln \frac{25 - 200}{199 - 200} = 5,2 \text{ s} \approx 5\tau$$

Effets combinés

À la section précédente, nous avons effectué un bilan autour d'une pièce de métal dans un écoulement d'eau. Nous avons émis implicitement l'hypothèse que seul la convection entrainait en jeu et c'est ainsi que nous avons déduit certaines formules. Pourtant, d'autres situations peuvent être à l'origine de phénomène transitoire:

- Génération d'énergie à l'intérieur du solide considéré
- Irradiation
- Convection sur une seule face du solide

Tous ces phénomènes induisent un régime transitoire.



Transfert unidirectionnel dans un milieu limité (Plaque, cylindre, sphère)

Mur plan 1D

- En géométrie cartésienne et avec k constant dans le cas d'un mur plan traité en 1D

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- La solution analytique de cette équation est la série infinie suivante:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) \cos(\zeta_n x^*)$$

$$C_n = \frac{4 \sin(\zeta_n)}{2\zeta_n + \sin(2\zeta_n)}$$

- La solution approximative à 1 terme est donc

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 x^*)$$

$$\theta^* = \frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty}$$

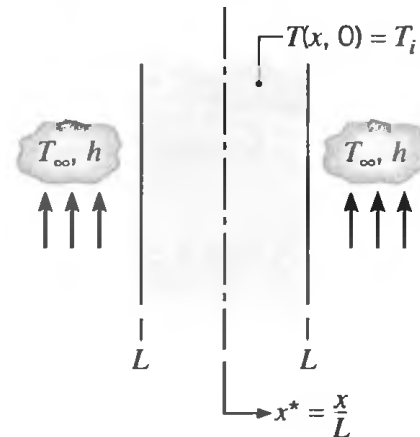
La température à $x^* = 0$ est donc:

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

- Energie emmagasinée dans le mur

$$Q = Q_o \left(1 - \frac{\sin \zeta_1}{\zeta_1} \theta_o^* \right)$$

où : $Q_o = \rho c V (T_i - T_\infty)$



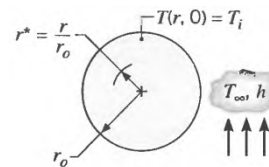
Cylindre infini

- La solution approximative à 1 terme est donc

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 r^*)$$

$$C_1 = \frac{2 J_1(\zeta_1)}{\zeta_1 J_0(\zeta_1)}$$

$$\zeta_1 \frac{J_1(\zeta_1)}{J_0(\zeta_1)} = Bi = \frac{hr_0}{k}$$



- L'énergie emmagasinée dans le cylindre durant un intervalle de temps est donnée par:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{2\theta_o^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$$

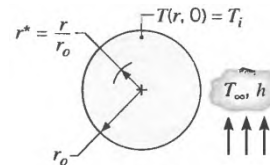
Sphère

- La solution approximative à 1 terme est donc

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*)$$

$$C_1 = \frac{4(\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1))}{2(\zeta_1) - \sin(2\zeta_1)}$$

$$1 - \zeta_1 \cot(\zeta_1) = Bi = \frac{hr_0}{k}$$



L'énergie emmagasinée dans le cylindre durant un intervalle de temps est donnée par:

$$\frac{Q}{Q_o} = 1 - \frac{3\theta_o^*}{\zeta_1^3} (\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1))$$

B.3***The First Four Roots of the Transcendental Equation, $\xi_n \tan \xi_n = Bi$, for Transient Conduction in a Plane Wall***

$Bi = \frac{hL}{k}$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
0	0	3.1416	6.2832	9.4248
0.001	0.0316	3.1419	6.2833	9.4249
0.002	0.0447	3.1422	6.2835	9.4250
0.004	0.0632	3.1429	6.2838	9.4252
0.006	0.0774	3.1435	6.2841	9.4254
0.008	0.0893	3.1441	6.2845	9.4256
0.01	0.0998	3.1448	6.2848	9.4258
0.02	0.1410	3.1479	6.2864	9.4269
0.04	0.1987	3.1543	6.2895	9.4290
0.06	0.2425	3.1606	6.2927	9.4311
0.08	0.2791	3.1668	6.2959	9.4333
0.1	0.3111	3.1731	6.2991	9.4354
0.2	0.4328	3.2039	6.3148	9.4459
0.3	0.5218	3.2341	6.3305	9.4565
0.4	0.5932	3.2636	6.3461	9.4670
0.5	0.6533	3.2923	6.3616	9.4775
0.6	0.7051	3.3204	6.3770	9.4879
0.7	0.7506	3.3477	6.3923	9.4983
0.8	0.7910	3.3744	6.4074	9.5087
0.9	0.8274	3.4003	6.4224	9.5190
1.0	0.8603	3.4256	6.4373	9.5293
1.5	0.9882	3.5422	6.5097	9.5801
2.0	1.0769	3.6436	6.5783	9.6296
3.0	1.1925	3.8088	6.7040	9.7240
4.0	1.2646	3.9352	6.8140	9.8119
5.0	1.3138	4.0336	6.9096	9.8928
6.0	1.3496	4.1116	6.9924	9.9667
7.0	1.3766	4.1746	7.0640	10.0339
8.0	1.3978	4.2264	7.1263	10.0949
9.0	1.4149	4.2694	7.1806	10.1502
10.0	1.4289	4.3058	7.2281	10.2003
15.0	1.4729	4.4255	7.3959	10.3898
20.0	1.4961	4.4915	7.4954	10.5117
30.0	1.5202	4.5615	7.6057	10.6543
40.0	1.5325	4.5979	7.6647	10.7334
50.0	1.5400	4.6202	7.7012	10.7832
60.0	1.5451	4.6353	7.7259	10.8172
80.0	1.5514	4.6543	7.7573	10.8606
100.0	1.5552	4.6658	7.7764	10.8871
∞	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956

TABLE 5.1 Coefficients used in the one-term approximation to the series solutions for transient one-dimensional conduction

Bi^a	Plane Wall		Infinite Cylinder		Sphere	
	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060
0.03	0.1723	1.0049	0.2440	1.0075	0.2991	1.0090
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120
0.05	0.2218	1.0082	0.3143	1.0124	0.3854	1.0149
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179
0.07	0.2615	1.0114	0.3709	1.0173	0.4551	1.0209
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239
0.09	0.2956	1.0145	0.4195	1.0222	0.5150	1.0268
0.10	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298
0.15	0.3779	1.0237	0.5376	1.0365	0.6609	1.0445
0.20	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592
0.25	0.4801	1.0382	0.6856	1.0598	0.8447	1.0737
0.30	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0932	1.0528	1.1164
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713
0.7	0.7506	1.0919	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732
2.0	1.0769	1.1785	1.5994	1.3384	2.0288	1.4793
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202
5.0	1.3138	1.2402	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	1.7654	1.8920
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249
20.0	1.4961	1.2699	2.2881	1.5919	2.9857	1.9781
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990
∞	1.5708	1.2733	2.4050	1.6018	3.1415	2.0000

Milieu semi infini

- Un milieu semi-infini est une paroi d'épaisseur suffisamment grande pour que la perturbation appliquée sur une face ne soit pas ressentie par l'autre face.
- Un tel système représente l'évolution d'un mur d'épaisseur finie pendant un temps suffisamment court pour la perturbation créée sur une face n'ait pas atteint l'autre face.

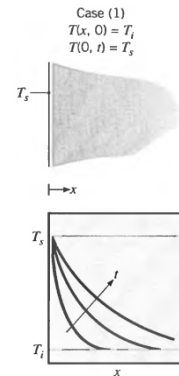
Cas 1: Température constante imposée en surface

- Un milieu semi-infini est initialement à la température uniforme T_i . On impose brutalement la température T_0 sur sa surface (Condition Dirichlet):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \begin{cases} T(x, 0) = T_i \\ T(x = 0, t) = T_s \\ \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t) = T_i \end{cases}$$

- La solution

$$\theta' = \text{erf}(\eta) \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \quad q_s'' = \frac{k(T_s - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

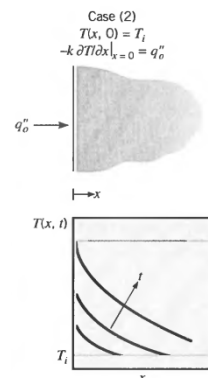


Cas 2: Flux de chaleur imposée

- Considérons la même configuration mais en imposant brutalement une densité de flux de chaleur à la surface du milieu semi-infini (Condition de Neumann):

- La solution

$$T(x, t) - T_i = \frac{2q_o''(\alpha t / \pi)^{1/2}}{k} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q_o'' x}{k} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

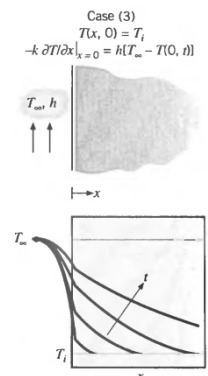


Cas 3: Coefficient de transfert imposé

- Considérons le cas où le coefficient de transfert de chaleur par convection h entre le milieu semi-infini et le milieu ambiant est imposé (Condition de Newton):

- La solution

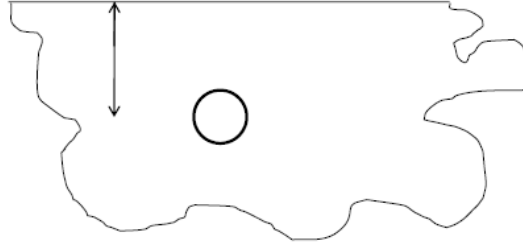
$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_\infty - T_i} = \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2 \alpha t}{k^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} + \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k}\right) \right]$$



Exemples d'application

Lors de l'installation de tuyau transportant de l'eau dans une ville, l'ingénieur doit se préoccuper de la profondeur minimale requise du tuyau pour éviter le gel. Pour ce faire, on suppose que l'eau est stagnante dans le tuyau et donc qu'elle gèle à 0°C et on modélise l'hiver en supposant une température de surface du sol de -15°C pendant 60°C.

Quelle distance recommanderiez-vous pour la pose d'un nouveau système d'égout si on suppose que la température du sol est initialement à 20°C?



Les propriétés physiques du sol à 300K=27°C sont:

$\rho=2050 \text{ kg/m}^3$, $k=0,52 \text{ W/m.K}$, $c=1840 \text{ J/kg.K}$, $\alpha=(k/\rho c)=0,138 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Le problème correspond au cas 1 (température imposée).

$$\frac{T(x_m, t) - T_s}{T_i - T_s} = \text{erf}\left(\frac{x_m}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

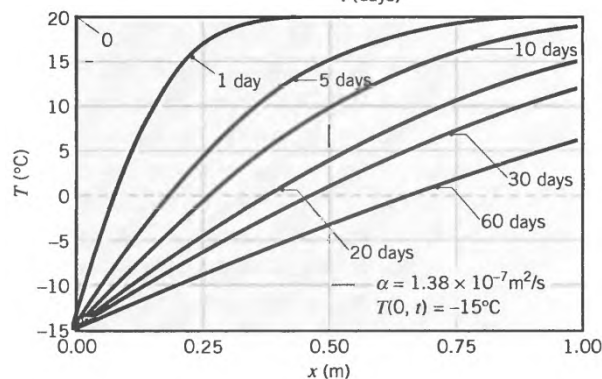
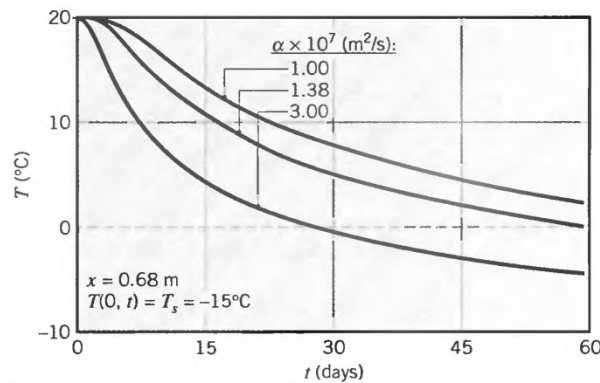
$$\text{erf}\left(\frac{x_m}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \frac{0 - (-15)}{20 - (-15)} = 0,429$$

D'après la table numérique de la fonction erf, on détermine :

$$\text{erf}\left(\frac{x_m}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = 0,429 \Rightarrow \frac{x_m}{2\sqrt{\alpha t}} = 0,40 \Rightarrow x_m = 0,40 \times 2\sqrt{\alpha t}$$

$$x_m = 0,40 \times 2\sqrt{0,138 \cdot 10^{-6} \times 60 \times 24 \times 3600} = 0,68 \text{ m}$$

Les propriétés du sol peuvent changer en fonction de la composition et de son humidité, et la diffusivité thermique varie entre $10^{-7} < \alpha < 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.



Références bibliographiques:

1. J. F. Sacadura coordonnateur, Transfert thermiques : Initiation et approfondissement, Lavoisier 2015.
2. Cours de transferts thermiques, Yves Jannot, 2005.
3. Kreith, F.; Boehm, R.F et. al., "Heat and Mass Transfer", Mechanical Engineering Handbook Ed. Frank Kreith, CRC Press LLC, 1999.
4. Transfert de chaleur par conduction, Chevrier J- C Ecole des Mines, Nancy, 1979.
5. Bejan and A. Kraus, "Heat Handbook", J. Wiley and sons 2003.
6. Transfert de chaleur, A.Bouvenot Masson, 1980.
7. F. Kreith and M. S. Bohn. "Principles of Heat Transfer", 6th ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2001.
8. Y. A. Cengel, "Heat and Mass Transfer", Mc Graw Hill.
9. Transformées de Lapalce, Spiegel.M.R, cours et problèmes, Schaum, 1990.
10. Transferts thermiques, Taine.J et Petit.J.P, cours et données de base, Dunod, 1995.
11. H. D. Baehr and K. Stephan, "Heat and Mass transfer", 2nd revised edition, Springer Verlag editor, 2006.
12. J. L. Battaglia, A. Kuzik et J. R. Puiggali, . Introduction aux transferts thermiques, Dunod 2010.
13. De Giovanni B. Bedat, . Transfert de chaleur ., Cepadues, 2012.
14. J. P. Holman, "Heat Transfer". 9th ed. New York: McGraw-Hill, 2002.
15. F. P. Incropera and D. P. DeWitt. "Introduction to Heat Transfer", 4th ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.
16. J. Taine, J. P. Petit, . Transfert de chaleur et mecanique des fluides anisothermes ., Dunod, 1988.
17. N. V. Suryanaraya. "Engineering Heat Transfer", St. Paul, Minn.: West, 1995.
18. H. D. Baehr and K. Stephan, "Heat and Mass transfer", 2nd revised edition, Springer Verlag.