

Republique Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mustapha Stambouli de Mascara
Faculté des sciences et technologie
Département du tronc commun sciences et techniques



Polycopié de Cours

Maths 1 (Analyse & Algèbre 1)

Présenté par :

Mohamed Helal

Ce cours est destiné aux étudiants de première année LMD sciences et techniques.

Année universitaire 2017/2018

Table des matières

1	Logique et Raisonnements	5
1.1	Eléments logique	5
1.1.1	Les connecteurs logiques	5
1.1.2	Les quantificateurs	9
1.2	Méthode du raisonnement mathématique	9
1.2.1	Raisonnement direct	10
1.2.2	Raisonnement par contraposition	10
1.2.3	Raisonnement par l'absurde	10
1.2.4	Raisonnement par contre exemple	11
1.2.5	Raisonnement par récurrence	11
2	Les ensembles, les relations et les applications	12
2.1	Théorie des ensembles	12
2.1.1	Opérations sur les ensembles	13
2.1.2	Parties d'un ensemble	14
2.1.3	Partition d'un ensemble	14
2.2	Ensemble produit (Produit cartésien)	14
2.3	Relations binaires dans un ensemble	15
2.3.1	Relation d'équivalence	15
2.3.2	Relation d'ordre	18
2.4	Applications et Fonctions	19
2.4.1	Composition d'application	20
2.4.2	Restriction et prolongement d'une application	20
2.4.3	Applications injectives, surjectives, bijectives	21
2.5	Image directe et image réciproque	22
3	Les fonctions réelles à une variable réelle	26
3.1	Définitions et Propriétés	26
3.1.1	Opérations arithmétiques sur les fonctions	26
3.1.2	Fonctions majorées, minorées, bornées	26

3.1.3	Fonctions croissantes, décroissantes	27
3.1.4	Parité et périodicité	27
3.2	Limite d'une fonction	28
3.2.1	Limite en un point d'une fonction	28
3.2.2	Limites à gauche, à droite	28
3.2.3	Unicité de la limite	29
3.2.4	Caractérisation séquentielle de la limite	29
3.2.5	Passage à la limite	30
3.2.6	Théorème d'encadrement, de minoration et de majoration	30
3.3	Continuité d'une fonction	31
3.3.1	Continuité des fonctions composées	32
3.3.2	Continuité sur un intervalle	32
3.3.3	Opérations sur les fonctions continues	32
3.3.4	Théorèmes des valeurs intermédiaires	33
3.3.5	Prolongement par continuité	33
3.4	Dérivée et différentiabilité d'une fonction	34
3.4.1	Dérivée à gauche, Dérivée à droite	34
3.4.2	Interprétation géométrique de la dérivée	35
3.4.3	Opérations sur les dérivées	35
3.4.4	Dérivée d'ordre supérieur	37
3.4.5	Dérivée n^{eme} d'un produit (formule de Leibniz)	37
3.4.6	Dérivabilité et continuité	38
3.4.7	Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables	38
3.5	Règles de l'Hospital	39
4	Application aux fonctions élémentaires	43
4.1	Fonction puissance	43
4.2	Fonction logarithmique	43
4.3	Fonction exponentielle	44
4.4	Fonctions hyperboliques et leurs inverses	45
4.5	Fonctions trigonométriques et leurs inverses	48
5	Développement limité	55
5.1	Formules de Taylor	55
5.1.1	Formule de Taylor avec reste intégral	55
5.1.2	Formule de Taylor avec reste de Lagrange	56
5.1.3	Formule de Taylor Mac-Laurin	56
5.1.4	Formule de Taylor Young	57
5.2	Développement limité	57
5.2.1	D.L. au voisinage de zéro	57
5.2.2	D.L. des fonctions usuelles à l'origine	59
5.2.3	D.L. au voisinage de x_0 et de l'infini	60
5.2.4	Opérations sur les D.L	61

5.2.5	Dérivation de D.L.	64
5.2.6	Intégration de D.L.	65
5.2.7	D.L. généralisé	65
5.3	Applications	66
6	Algèbre linéaire	70
6.1	Structures algébriques	70
6.1.1	Lois et coposition interne	70
6.1.2	Structure de groupe	72
6.1.3	Sous groupes	76
6.1.4	Goupes Quotients	77
6.1.5	Homomorphismes de Groupes	78
6.1.6	Structure d'anneau	79
6.1.7	Corps	81
6.2	Espace vectoriel	81
6.2.1	Sous espace vectoriel	82
6.2.2	Combinaisons linéaires	83
6.2.3	Intersection et la réunion de deux sous-espaces	83
6.2.4	Somme de sous-espaces. Somme directe :	84
6.2.5	Famille de vecteurs d'un espace vectoriel	84
6.2.6	Sous-espace engendré par un ensemble	86
6.3	Application linéaire	89
6.3.1	Noyau d'une application linéaire	90
6.3.2	Image d'une application linéaire	90
6.3.3	Rang d'une application linéaire	91
6.3.4	Injectivité d'une application linéaire	91
6.3.5	Injectivité d'une application linéaire	92
6.3.6	Symétrie	92
	Bibliographie	92

Avant Propos

Ce cours d'Analyse et Algèbre est destiné surtout aux étudiants de premières années LMD Sciences et techniques, ainsi qu'aux étudiants de premières années LMD Sciences de la matière et mathématiques et informatique.

Il couvre le programme officiel du Analyse et Algèbre, à savoir :

- ▷ Logique et Raisonnements.
- ▷ Les ensembles, les relations et les applications.
- ▷ Les fonctions réelles à une variable réelle.
- ▷ Application aux fonctions élémentaires.
- ▷ Développement limité.
- ▷ Algèbre linéaire.

Chaque chapitre remet en place les bases indispensables pour aborder des études scientifiques, et introduit quelques notions nouvelles, qui seront pour la plupart traitées en cours de cette année.

Ce cours est traité en détail avec de nombreux exemples. La plupart des théorèmes et propositions sont démontrés.

À la fin de chaque chapitre nous proposons des exercices corrigés.

Enfin, des erreurs peuvent être relevées, prière de les signaler à l'auteur.

L'auteur

Logique et Raisonnements

Le but de ce chapitre est de préciser certaines règles de logique sur lesquelles nous nous appuyerons pour justifier les raisonnements utilisés dans nos démonstrations.

1.1 Éléments logique

Dans cette section on présentera les notions élémentaires de la logique classique :

Définition 1.1.1. *On appelle proposition logique toute relation qui est soit vraie soit fausse.*

- Quand la proposition est vraie (V), on lui affecte la valeur 1.
- Quand la proposition est fausse (F), on lui affecte la valeur 0.

Ces valeurs sont appelées **Valeurs de vérité de la proposition**.

Il est d'usage de noter une proposition en utilisant une lettre majuscule P, Q, R, \dots . Ainsi, pour définir une proposition logique, il suffit de donner ses valeurs de vérité. En général, on met ces valeurs dans un tableau qu'on nommera **Tableau de vérités**.

Remarque 1.1.1. *Le fait qu'une proposition ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 provient d'un principe fondamental de la logique classique qui est : le principe du tiers exclu, à savoir qu'une proposition logique ne peut pas être vraie et fausse à la fois.*

Exemple 1.1.1.

- a) «Paris est la capitale de la France» est une proposition vraie.
- b) «Trois est un nombre pair» est une proposition fausse.
- c) «Le nombre x est impair» n'est pas une proposition puisqu'il est impossible de décider si elle est vraie ou fausse tant que l'on connaît pas x .

1.1.1 Les connecteurs logiques

- a) **La Négation** \neg : notée non P ($\neg P$) ou \overline{P} , on appelle négation d'une proposition P une proposition vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie. On peut la représenter comme suit :

P	0	1
\overline{P}	1	0

Exemple 1.1.2.

▷ La négation de l'assertion $2 \geq 0$ elle est l'assertion $2 < 0$.

▷ $\overline{2 + 4 = 6}$ est $2 + 4 \neq 6$.

- b) **La Conjonction** \wedge : notée P et Q ($P \wedge Q$), on appelle conjonction des propositions P et Q une proposition qui est vraie quand P et Q sont vraies à la fois. Sa table de vérités est donnée par :

$P \setminus Q$	0	1			
0	0	0	ou	P	0 0 1 1
1	0	1		Q	0 1 0 1
				$P \wedge Q$	0 0 0 1

Exemple 1.1.3.

▷ $2^3 = 8 \wedge 4 + 4 > 11$ est une assertion fausse.

▷ $2 + 2 = 4 \wedge 2 \times 3 = 6$ est une assertion vraie.

- c) **La Disjonction** \vee : notée P ou Q ($P \vee Q$), on appelle disjonction des propositions P ou Q une proposition qui est vraie si l'une des propositions P ou Q est vraie. Sa table de vérités est donnée par :

$P \setminus Q$	0	1			
0	0	1	ou	P	0 0 1 1
1	1	1		Q	0 1 0 1
				$P \vee Q$	0 1 1 1

Exemple 1.1.4.

▷ $\sqrt{2 + 2} = 4 \vee 45 \div 3 = 15$ est une assertion vraie.

▷ $4^3 = 8 \vee 5 + 1 = 7$ est une assertion fausse.

- d) **L'Implication** \Rightarrow : notée $P \Rightarrow Q$ et se lit P implique Q . La proposition $P \Rightarrow Q$ est une fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie dans toutes les autres cas. Sa table de vérités est donnée par :

$P \setminus Q$	0	1			
0	1	1	ou	P	0 0 1 1
1	0	1		Q	0 1 0 1
				$P \Rightarrow Q$	1 1 0 1

- e) **L'Equivalence** \Leftrightarrow : deux propositions P, Q sont équivalentes si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ et on écrit $P \Leftrightarrow Q$, se lit P est équivalente à Q . La proposition $P \Leftrightarrow Q$ est une vraie lorsque P et Q sont simultanément vraie ou fausse, et fausse dans toutes les autres cas. Sa table de vérités est donnée par :

$P \setminus Q$	0	1			
0	1	0	ou	P	0 0 1 1
1	0	1		Q	0 1 0 1
				$P \Leftrightarrow Q$	1 0 0 1

Exemple 1.1.5. Soient les propositions P : "j'ai mon permis de conduire" et Q : "j'ai plus de 18 ans".

On a : $P \Rightarrow Q$ est vraie, par contre $Q \Rightarrow P$ est fausse. Alors, on en conclut que ces deux propositions ne sont pas équivalentes.

- f) **La réciproque** : étant données P et Q deux propositions logiques, on appelle la

réciroque de l'implication $P \Rightarrow Q$ la proposition $Q \Rightarrow P$.

Toutes les définitions précédentes peuvent être résumées dans la table ci-dessous dite table de vérités :

P	Q	\overline{P}	\overline{Q}	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

Propriétés 1.1.1. Soient P, Q, R trois propositions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

- $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$.
- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$.
- $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.
- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$. (Règles de De Morgan)¹
- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$. (Règles de De Morgan)²
- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. (Distributivité de \wedge par rapport à \vee)
- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$. (Distributivité de \vee par rapport à \wedge)
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Démonstration :

- La table de vérités de $\overline{\overline{P}}$ est la suivante :

P	0	1
\overline{P}	1	0
$\overline{\overline{P}}$	0	1

on voit qu'elle est identique à celle de P .

- Dans le tableau suivant,

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$P \vee Q$	$Q \vee P$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

on remarque que les propositions $(P \wedge Q)$ et $(Q \wedge P)$ ont les mêmes valeurs de vérités, donc elles sont équivalentes. De même pour les propositions $(P \vee Q)$ et $(Q \vee P)$.

1. Connues aussi sous l'appellation de : **Loi de dualité**.
 2. **De Morgan Auguste** : Mathématicien britannique (Madurai Tamil Nadu (Inde) 1806 - Londres 1871). Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne.

3. On établit la preuve des règles de De Morgan en donnant les valeurs de vérités des propositions logiques correspondantes.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1

On voit que les propositions logiques $\neg(P \wedge Q)$ et $\neg P \vee \neg Q$ ont les mêmes valeurs de vérités, donc elles sont équivalentes. De même pour $\neg(P \vee Q)$ et $\neg P \wedge \neg Q$.

4. Dans le tableau suivant, on remarque que les propositions $P \wedge (Q \vee R)$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ ont les mêmes valeurs de vérités.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

donc elles sont équivalentes. De même pour $P \vee (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, on a :

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

On déduit que $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

5. Pour montrer que la dernière proposition est vraie, il suffit de montrer que les propositions $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ont les mêmes valeurs de vérités. On a :

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Ce qui montre la véracité de notre proposition.

1.1.2 Les quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition définie sur un ensemble E :

(i) **Quantificateur universel** noté \forall , se lit "quel que soit" ou "pour tout" :

$$\forall x \in E, \quad P(x)$$

qui vraie lorsque tous les éléments x de E vérifient $P(x)$.

(ii) **Quantificateur existentiel** noté \exists , se lit "il existe au moins" :

$$\exists x \in E, \quad P(x)$$

qui vraie lorsqu'on peut trouver au moins un élément x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vrai.

Exemple 1.1.6.

- $\forall x \in [1, +\infty[; x^2 \geq 1$ est une vraie.
- $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = -1$ est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).
- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : (1+x)^n \geq 1$ est vraie.

Propriétés 1.1.2.

1. $\overline{\forall x, P(x)} \iff \exists x, \overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x, P(x)} \iff \forall x, \overline{P(x)}$.
3. $\forall x, [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [\forall x, P(x)] \wedge [\forall x, Q(x)]$.
4. $\exists x, [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow [\exists x, P(x)] \wedge [\exists x, Q(x)]$.
5. $\forall x, [P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow [\forall x, P(x)] \vee [\forall x, Q(x)]$.
6. $\exists x, [P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow [\exists x, P(x)] \vee [\exists x, Q(x)]$.

Exercice corrigé :

1. Écrire à l'aide des quantificateurs la phrase suivante :
 - (i) Pour tout nombre réel, son carré est positif : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
 - (ii) Pour tout entier n , il existe un unique réel x tel que $\exp(x)$ égale n : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R} / \exp(x) = n$.
2. Écrire la négation des propositions suivantes :
 - (i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0 : x + y > 10 \rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 : x + y \leq 10$,
 - (ii) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y < 0 : x + y \leq 8 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \exists y < 0 : x + y > 8$,
 - (iii) $P \wedge (\overline{P} \vee Q) \rightarrow \overline{P} \vee (P \wedge \overline{Q})$.

1.2 Méthode du raisonnement mathématique

Il existe plusieurs types de raisonnement mathématique, on va traiter dans cette partie les plus utilisés :

1.2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple 1.2.1. *Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*

Preuve : Prenons $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels \mathbb{Q} sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$.

Maintenant,

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de \mathbb{Z} , le dénominateur qq' est lui un élément de \mathbb{N}^* . Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}, q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.2.2 Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante (voir les Propriétés (1.1.1)) :

$$P \Rightarrow Q \iff \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}.$$

Au lieu de montrer que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, Le raisonnement par contraposition consiste à montrer que l'implication $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est vraie.

Exemple 1.2.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

Preuve : Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\ell + 1$ avec $\ell = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair. Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.2.3 Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction.

Exemple 1.2.3. *Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*

Preuve : Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a - b)(a + b) = -(a - b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

1.2.4 Raisonnement par contre exemple

Pour démontrer que la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est fausse, il suffit de trouver un x_0 de E tel que $\overline{P(x_0)}$ est vraie.

Exemple 1.2.4. *Montrer que la proposition suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés". (Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ Par exemple $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$).*

Preuve : Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

1.2.5 Raisonnement par récurrence

De nombreux résultats s'expriment sous la forme $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$. Une démonstration par récurrence permet de montrer qu'une telle proposition est vraie.

La méthodologie consiste :

(i) Vérifier que la propriété $P(0)$ est vraie.

(ii) Démonstration que si la propriété $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

La propriété $P(n)$ supposée vraie est appelée **hypothèse de récurrence**.

Exemple 1.2.5. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Preuve : Pour $n \geq 1$, notons $P(n)$ la proposition suivante : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

- Pour $n = 1$ nous avons $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Donc $P(1)$ est vraie.

- Fixons $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est

vraie c'est à dire $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Les ensembles, les relations et les applications

2.1 Théorie des ensembles

Définition 2.1.1. *On appelle ensemble E toute collection d'objets satisfaisant une même propriété, chaque objet est un éléments de l'ensemble E .*

Remarque 2.1.1.

- ✓ *Pour définir un ensemble :*
 - (i) *Ou bien on connait la liste de tous ses éléments, on dit alors que l'ensemble est donné par "Extension".*
 - (ii) *Ou bien on connait seulement les relations qui lient les éléments et qui nous permettent de les retrouver tous, on dit alors que l'ensemble est donné par "Compréhension".*
- ✓ *On met les objets qui forment l'ensemble entre deux accolades.*
- ✓ *Si le nombre de ces objets est fini, on l'appelle cardinal de E et on le note $\text{card}(E)$, si E possède une infinité d'éléments, on dit qu'il est de cardinal infini et on note $\text{Card}(E) = \infty$.*
- ✓ *Il existe un ensemble, appelé l'ensemble vide et noté \emptyset , qui ne contient aucun élément, alors $\text{Card}(\emptyset) = 0$.*
- ✓ *Un ensemble contenant un seul élément est appelé "Singleton", donc de cardinal égal à 1. On écrit $\exists ! x$ pour lire "Il existe un unique x ".*

Exemple 2.1.1.

- (i) *Soit $A = \{1, 3, a, y, \Delta, 2\}$. A est défini par extension, car on connait tous ses éléments. Le cardinal de A est égal à 6 ($\text{Card}(A) = 6$).*
- (ii) *Soit B l'ensemble des étudiants de première année tronc commun Sciences et Techniques. On ne connait pas tous ces étudiants mais on peut bien les retrouver, donc B est un ensemble donné par compréhension.*
- (iii) *Soit E l'ensemble des entiers qui divisent 20, $E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.*

2.1.1 Opérations sur les ensembles

Soient E et F deux ensembles. On note :

1. **Appartenance** : $x \in E$, veut dire que l'élément x appartient à E . Si x n'est pas un élément de E , on dit que x n'appartient pas à E et on écrit $x \notin E$.
2. **Intersection** : l'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments communs et on écrit :

$$E \cap F = \{x/x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

3. **Réunion** : la réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments comptés une seule fois et on écrit :

$$E \cup F = \{x/x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

4. **Inclusion** : E est inclus dans F si tout élément de E est un élément de F et on a :

$$E \subset F \iff \forall x, x \in E \Rightarrow x \in F.$$

On dit aussi que E est une partie de F ou que E est un sous ensemble de F .

5. **Egalité** : E et F sont égaux si E est inclus dans F et F est inclus dans E et on écrit :

$$\begin{aligned} E = F &\iff (E \subset F) \wedge (F \subset E) \\ &\iff \forall x, (x \in E \iff x \in F). \end{aligned}$$

6. **Complémentaire** : Soit E un ensemble et A une partie de E , ($A \subset E$). On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble C_E^A des éléments de E qui ne sont pas dans A et on écrit :

$$C_E^A = E \setminus A = E - A = \{x/x \in E \text{ et } x \notin A\}.$$

L'ensemble $E - A$ est dite **différence** de deux ensembles.

7. **Différence symétrique** : On appelle différence symétrique de deux ensembles E et F et on note $E \Delta F$ l'ensemble défini par :

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E).$$

Propriétés 2.1.1. Soient E, F et G trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies :

- $(E \cap F) \subset E \wedge (E \cap F) \subset F$ et $E \subset (E \cup F) \wedge F \subset (E \cup F)$.
- $E \cap F = F \cap E$ et $E \cup F = F \cup E$. (Commutativité)
- $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ et $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$. (Associativité)
- $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$ et $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$. (Distributivité)
- $E - (F \cap G) = (E - F) \cup (E - G)$ et $E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G)$.
- Si $F \subset E$ et $G \subset E$, alors $C_E^{F \cap G} = C_E^F \cup C_E^G$ et $C_E^{F \cup G} = C_E^F \cap C_E^G$.
- $E \cap \emptyset = \emptyset$ et $E \cup \emptyset = E$.
- $E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G)$.
- $E \Delta \emptyset = E$ et $E \Delta E = \emptyset$.

2.1.2 Parties d'un ensemble

Définition 2.1.2. *On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F , ou que E est une partie de l'ensemble F , ou que E est un sous ensemble de F si tout élément de E est un élément de F . On note $E \subset F$ et on a :*

$$E \subset F \iff \forall x/x \in E \Rightarrow x \in F).$$

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 2.1.2. *Soit $E = \{a, b, c\}$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.*

Remarque 2.1.2. *L'ensemble vide et E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$.*

2.1.3 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une famille des parties de E . On dit que A est une partition de E si :

- (i) Tout élément de A n'est pas vide.
- (ii) Les éléments de A sont deux à deux disjoints.
- (iii) La réunion des éléments de A est égale à E .

Exemple 2.1.3. *Soit $E = \{1, a, \ell, 3, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma\}$, alors $\mathcal{F} = \{\{a, \gamma\}, \{d, \alpha, \beta\}, \{c, 1\}, \{3, \ell\}, \{b\}\}$ est une partition de l'ensemble E .*

2.2 Ensemble produit (Produit cartésien)

Définition 2.2.1. *Soient E et F deux ensembles non vides, on note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$ est appelé produit cartésien¹ de E et F défini par*

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Par définition, on a :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F, \quad (x, y) = (x', y') \iff (x = x') \wedge (y = y').$$

Exemple 2.2.1. *Soit $E = \{1, 5, \square\}$ et $F = \{a, \alpha, \ell, \Delta, \spadesuit\}$ alors*

$$E \times F = \{(1, a), (5, a), (\square, a), (1, \alpha), (5, \alpha), (\square, \alpha), (1, \ell), (5, \ell), (\square, \ell), (1, \Delta), (5, \Delta), (\square, \Delta), (1, \spadesuit), (5, \spadesuit), (\square, \spadesuit)\}.$$

1. **DESCARTES René** : philosophe, physicien et mathématicien français (La Haye 1596-Stockholm 1650). Il créa l'algèbre des polynômes, avec Fermat il fonda la géométrie analytique. Ennonça les propriétés fondamentales des équations algébriques et simplifia les notations algébriques en adoptant les premières lettres de l'alphabet pour désigner les constantes et les dernières lettres pour désigner les variables. Publia "Le Discours de la méthode", qui est une référence pour le raisonnement logique. Découvrit aussi les principes (règles) de l'optique géométrique.

et

$$F \times E = \{(a, 1), (\alpha, 1), (\ell, 1), (\Delta, 1), (\spadesuit, 1), (a, 5), (\alpha, 5), (\ell, 5), (\Delta, 5), (\spadesuit, 5), (a, \square), (\alpha, \square), (\ell, \square), (\Delta, \square), (\spadesuit, \square)\}.$$

Remarque 2.2.1. $E \times F = F \times E$ si et seulement si $E = F$.

Propriétés 2.2.1. Soient E, F, G et H quatre ensembles, alors les relations suivantes sont vraies :

1. $E \times F = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
2. $E \times F = F \times E \iff E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$ ou $E = F$.
3. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
4. $(E \cup G) \times F = (E \times F) \cup (G \times F)$.
5. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.
6. $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.

2.3 Relations binaires dans un ensemble

Définition 2.3.1. Soient E un ensemble, x et y deux éléments de E . S'il existe un lien qui relie x et y on dit qu'ils sont reliés par une relation \mathcal{R} , on écrit $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$ et on lit "x est en relation avec y".

Exemple 2.3.1. $E = \mathbb{R}, \forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \iff |x| - |y| = x - y$.

Définition 2.3.2. Etant donnée une relation binaire \mathcal{R} entre les éléments d'un ensemble non vide E , on dit que :

1. \mathcal{R} est **Reflexive** $\iff \forall x \in E; (x\mathcal{R}x)$.
2. \mathcal{R} est **Transitive** $\iff \forall x, y, z \in E; (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
3. \mathcal{R} est **Symétrique** $\iff \forall x, y \in E; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
4. \mathcal{R} est **Anti-Symétrique** $\iff \forall x, y \in E; (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

2.3.1 Relation d'équivalence

Définition 2.3.3. On dit qu'une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

- On appelle **classe d'équivalence** d'un élément $x \in E$ notée \bar{x}, \dot{x} ou C_x , l'ensemble de des éléments y de E qui sont en relation \mathcal{R} avec x . On écrit :

$$\dot{x} = \{y \in E, y\mathcal{R}x\}.$$

- On définit l'ensemble quotient de E par la relation \mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E , noté E/\mathcal{R} et on a :

$$E/\mathcal{R} = \dot{x}, x \in E.$$

Exemple 2.3.2. Dans \mathbb{R} , on définit la relation binaire \mathcal{R} par

$$x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

- Montrons que \mathcal{R} une relation d'équivalence :
 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x^2 = x - x = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive.
 - $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff x^2 - y^2 = x - y \\ &\iff -(y^2 - x^2) = -(y - x) \\ &\iff y^2 - x^2 = y - x \\ &\iff y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

donc \mathcal{R} est symétrique.

(c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = x - y \tag{2.1}$$

et

$$y\mathcal{R}z \iff y^2 - z^2 = y - z \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} (2.1) + (2.2) &\iff x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\iff x^2 - z^2 = x - z \\ &\iff x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

donc \mathcal{R} est transitive.

De (a), (b) et (c), on a bien \mathcal{R} une relation d'équivalence.

- Précisons la classe de a pour tout a de \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 - a^2 = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x - a)(x + a) = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x - a)(x + a - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x = a \text{ ou } x = 1 - a\} \\ &= \{a, 1 - a\}. \end{aligned}$$

Exercice : Soit l'applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow [5, +\infty[$ définie par :

$$f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On définit dans \mathbb{R} la relation \mathcal{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

1. Vérifier que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
2. Calculer $\dot{0}$ et $\dot{2}$.

Solution : Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow [5, +\infty[$ définie par :

$$f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On définit dans \mathbb{R} la relation \mathcal{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

1. Vérifier que \mathcal{R} est une relation d'équivalence :
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x) \Rightarrow x\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive.
 - (b) $\forall x, y \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff f(x) = f(y) \\ &\iff f(y) = f(x) \\ &\iff y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

donc \mathcal{R} est symétrique.

- (c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R},$

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

et

$$\begin{aligned} y\mathcal{R}z &\iff f(y) = f(z) \\ &\iff f(x) = f(z) \\ &\iff x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

donc \mathcal{R} est transitive.

De (a), (b) et (c), on a bien \mathcal{R} une relation d'équivalence.

2. Calculer $\dot{0}$ et $\dot{2}$:

$$\begin{aligned} \dot{0} &= \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8)^2 + 5 = 8^2 + 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8) = \pm 8\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 0 \vee x^2 = 16\} \\ &= \{-4, 0, 4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{2} &= \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8)^2 + 5 = (-4)^2 + 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8) = \pm 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \vee x^2 = 12\} \\ &= \{\pm 2, \pm 2\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

2.3.2 Relation d'ordre

Définition 2.3.4. On dit qu'une relation binaire \mathcal{R} sur un ensemble E est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et anti-symétrique.

Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur un ensemble E .

- On dit que \mathcal{R} est **d'ordre total** si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

- On dit qu'elle est **d'ordre partiel** si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x.$$

Exemple 2.3.3. Soit $E = \{a, b, c\}$, on note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Dans $\mathcal{P}(E)$, on définit la relation binaire \mathcal{R} par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \iff A \subset B.$$

- Montrons que \mathcal{R} une relation d'ordre :

(a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, alors il est clair que $A \subset A$ donc $A\mathcal{R}A$ c'est à dire que \mathcal{R} est réflexive.

(b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned} A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}A &\iff A \subset B \text{ et } B \subset A \\ &\iff A = B, \end{aligned}$$

donc \mathcal{R} est anti-symétrique.

(c) Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}C &\iff A \subset B \text{ et } B \subset C \\ &\iff A \subset C, \end{aligned}$$

donc \mathcal{R} est transitive.

De (a), et (c), on a bien \mathcal{R} une relation d'ordre.

- Cet ordre est-il total ?

On a $E = \{a, b, c\}$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. L'ordre de la relation est partiel car $\exists A = \{a\} \in \mathcal{P}(E), \exists B = \{b\} \in \mathcal{P}(E) : A$ n'est pas inclus dans B et B aussi n'est pas inclus dans A .

Exercice : La relation suivante est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ? sur \mathbb{R} .

$$x\mathcal{R}y \iff (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1.$$

Solution :

▷ \mathcal{R} est une relation réflexive car :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \implies x\mathcal{R}x.$$

▷ \mathcal{R} est une relation symétrique car :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1 \\ &\iff 1 - (\sin x)^2 + 1 - (\cos y)^2 = 1 \\ &\iff -(\cos y)^2 - (\sin x)^2 = -1 \\ &\iff (\cos y)^2 + (\sin x)^2 = 1 \\ &\iff y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

▷ \mathcal{R} n'est une relation antisymétrique car :

$$\left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}x \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1 \\ \wedge \\ (\cos y)^2 + (\sin x)^2 = 1 \end{array} \right.$$

qui n'implique pas que $x = y$.

Par contre exemple : si $x = 0$ et $y = 2\Pi$;

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos 0)^2 + (\sin 2\Pi)^2 = 1 \\ \wedge \\ (\cos 2\Pi)^2 + (\sin 0)^2 = 1 \end{array} \right.$$

qui implique que $0 \neq 2\Pi$.

▷ \mathcal{R} est une relation transitive car : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1 \\ \wedge \\ (\cos y)^2 + (\sin z)^2 = 1 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow (\cos x)^2 + (\sin y)^2 + (\cos y)^2 + (\sin z)^2 = 2 \\ &\Rightarrow (\cos x)^2 + (\sin z)^2 = 1 \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

2.4 Applications et Fonctions

Définition 2.4.1. Soit E, F deux ensembles.

- ✓ On appelle **fonction** de l'ensemble E vers l'ensemble F une relation de E vers F dont à tout élément x de E on lui correspond au plus un élément y de F . x est dit antécédant, E l'ensemble de départ ou des antécédants, y est appelé l'image, F l'ensemble d'arrivée ou des images.
- ✓ On appelle **application** de E dans F une relation de E dans F dont à tout élément x de E on lui correspond un et un seul élément y de F .
- ✓ Deux applications sont égaux si leurs ensembles de départ sont égaux, leurs ensembles d'arrivée sont égaux et leurs valeurs également.

✓ En général, on schématise une fonction ou une application f par :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$

$\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \in E \times F : y = f(x)\}$. est appelé *graphe* de f .

Exemple 2.4.1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & g : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x}{x-1} & & & x &\longmapsto g(x) = \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Dans cet exemple g est une application mais f est une fonction et n'est pas une application car l'élément 1 n'a pas une image dans \mathbb{R} .

2.4.1 Composition d'application

Définition 2.4.2. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ deux applications. On note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par :

$$\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Cette application² est appelée **composée** des applications f et g .

Exemple 2.4.2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ & \text{et} & & g : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow [-1; 1] \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 & & & x &\longmapsto g(x) = \sin x, \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\longrightarrow [-1; 1] \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = \sin x^2. \end{aligned}$$

Remarque 2.4.1.

- (i) En général, $g \circ f \neq f \circ g$: non commutative.
- (ii) $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$: l'opération "composition d'applications" est associative.

2.4.2 Restriction et prolongement d'une application

Soit E_1 un sous ensemble de E et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application $g : E_1 \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in E_1, g(x) = f(x)$ est appelée **la restriction** de f à E_1 et on écrit $g = f/E_1$ et on dit aussi que f est **le prolongement** de g à E .

2. $g \circ f$ est une application car pour $x, x' \in E$ si $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$ car f est une application et comme g est une application alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

Exemple 2.4.3.

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} g : [-\Pi/2; \Pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \sin x \end{array}$$

Dans cet exemple, on a : g est la restriction de f à la partie $[-\Pi/2; \Pi/2]$ ou f est le prolongement de g sur \mathbb{R} . On écrit : $g = f|_{[-\Pi/2; \Pi/2]}$.

2.4.3 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 2.4.3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que :

(a) f est **surjective** si tout élément de F possède au moins un élément de E ,

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

(b) f est **injective** si tout élément de F possède au plus un élément de E ,

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

ou d'une manière d'équivalente (la négation logique) :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

(c) f est **bijective** si elle est injective et surjective, c'est à dire si tout élément de F admet un unique élément dans E par f ,

$$\forall y \in F; \exists ! x \in E : y = f(x).$$

Exercice : Soient

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = 2x + 1 \end{array}$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g .

Solution :

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{lcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = 2x + 1 \end{array}$$

- ▷ f non injective car $f(-1) = f(1) = 2$ n'implique pas $-1 = 1$.
- ▷ f non surjective car $x^2 + 1 = -3$ n'admet pas une solution.
- ▷ f non bijective car f non injective.
- ▷ g est injective car

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\implies 2x + 1 = 2y + 1 \\ &\implies 2x = 2y \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$

- ▷ g est surjective car $y = 2x + 1 \implies x = \frac{y-1}{2}$ c'est à dire $\forall y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \frac{y-1}{2}$
- ▷ g est bijective car g est injective et surjective.

Propriétés 2.4.1. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applicataions, alors on a :

1. $(f \text{ surjective}) \wedge (g \text{ surjective}) \implies g \circ f \text{ surjective.}$
2. $(f \text{ injective}) \wedge (g \text{ injective}) \implies g \circ f \text{ injective.}$
3. $(f \text{ bijective}) \wedge (g \text{ bijective}) \implies g \circ f \text{ bijective.}$

Preuve : On a : $g \circ f : E \longrightarrow G$.

1. Supposons f et g surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$, g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g[f(x)]$ et on déduit que :

$$\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x),$$

ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

2. Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$, alors :

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\implies f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{car } f \text{ injective} \\ &\implies g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)] \quad \text{car } g \text{ injective} \\ &\implies (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que $g \circ f$ est injective.

3. De 1. et 2., on déduit que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

2.5 Image directe et image réciproque

Définition 2.5.1. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$.

- On définit l'**image directe** de A par l'application f le sous ensemble de F noté $f(A)$:

$$f(A) = \{y \in F, \forall x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\} \subset F.$$

Exemple 2.5.1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

et $A = [-2, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x), x \in A\} \\ &= \{x^2, x \in [-2, 1]\} \\ &= [0, 4]. \end{aligned}$$

- On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous ensemble de E noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 2.5.2. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

et $B = [0, 4]$. On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0, 4]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x^2 \leq 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x - 2)(x + 2) \leq 0\} \\ &= [-2, 2]. \end{aligned}$$

- Soit f une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par $f^{-1} : F \longrightarrow E$,

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y),$$

appelée **application réciproque** de f .

Proposition 2.5.1. Soient $f : E \longrightarrow F, A, B \subset E$ et $M, N \subset F$, alors

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.
4. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.
5. $f^{-1}(C_F M) = C_E f^{-1}(M)$.

Preuve :

1. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in (A \cup B) : y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A \vee \exists x \in B) : y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A : y = f(x)) \vee (\exists x \in B : y = f(x)) \\ &\iff y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ &\iff y \in (f(A) \cup f(B)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\iff \exists x \in A \cap B : y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A \wedge \exists x \in B) : y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A : y = f(x)) \wedge (\exists x \in B : y = f(x)) \\ &\implies y \in (f(A) \wedge y \in f(B)) \\ &\implies y \in (f(A) \cap f(B)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cup N) &\iff f(x) \in (M \cup N) \\ &\iff (f(x) \in M) \vee (f(x) \in N) \\ &\iff (x \in f^{-1}(M)) \vee (x \in f^{-1}(N)) \\ &\iff x \in (f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

4. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cap N) &\iff f(x) \in (M \cap N) \\ &\iff (f(x) \in M) \wedge (f(x) \in N) \\ &\iff (x \in f^{-1}(M)) \wedge (x \in f^{-1}(N)) \\ &\iff x \in (f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

5. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C_F M) &\iff f(x) \in C_F M \\ &\iff (f(x) \in F) \wedge (f(x) \notin M) \\ &\iff (x \in E) \wedge (x \notin f^{-1}(M)) \\ &\iff x \in C_E f^{-1}(M), \end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(C_F M) = C_E f^{-1}(M)$.

Exemple 2.5.3. On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{2\} &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x+5}{x-2}, \end{aligned}$$

avec F un sous ensemble de \mathbb{R} .

Déterminer F pour que l'application f soit bijective et donner l'application inverse de f .

Montrer que f est bijective revient à examiner l'existence de solution de l'équation $y = f(x)$, pour tout $y \in F$.

Soit $y \in F$, alors,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{x+5}{x-2} \\ &\iff y(x-2) = x+5 \\ &\iff yx - x = 2y + 5 \\ &\iff x(y-1) = 2y + 5 \\ &\iff x = \frac{2y+5}{y-1} \quad \text{si } y \neq 1, \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists! x = \frac{2y+5}{y-1}; \quad y = f(x).$$

Pour montrer que f est bijective, il reste à voir si $x = \frac{2y+5}{y-1} \in \mathbb{R} - \{2\}$?

On a :

$$\begin{aligned} \frac{2y+5}{y-1} = 2 &\iff 2y+5 = 2y-2 \\ &\iff 5 = -2 \quad \text{ce qui est impossible,} \end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{2y+5}{y-1} \in \mathbb{R} - \{2\}$ et par suite :

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists! x = \frac{2y+5}{y-1} \in \mathbb{R} - \{2\}; \quad y = f(x).$$

Donc f est bijective si $F = \mathbb{R} - \{1\}$ et l'inverse de f est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{2y+5}{y-1}. \end{aligned}$$

Les fonctions réelles à une variable réelle

3.1 Définitions et Propriétés

Définition 3.1.1. Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, où E est une partie de \mathbb{R} . En général, E est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle E le **domaine de définition** de la fonction f . On note l'ensemble de ces fonctions par : $F(E; \mathbb{R})$.

On appelle **graphe** d'une fonction f le lieu géométrique des points $M(x, y)$ où $x \in E$ et $y = f(x)$ et on écrit :

$$G_f = \{(x, y) : x \in E, y = f(x)\}.$$

3.1.1 Opérations arithmétiques sur les fonctions

Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie E de \mathbb{R} . On peut alors définir les fonctions suivantes :

- (i) la **somme** de f et g est la fonction $f + g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in E$.
- (ii) le **produit** de f et g est la fonction $f \times g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ et $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ pour tout $x \in E, \alpha \in \mathbb{R}$.
- (iii) le **rapport** de f et g est la fonction $\frac{f}{g}$ définie par $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in E, g(x) \neq 0$.

3.1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, On dit que :

- f est dite **majorée** dans E s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x \in E; f(x) \leq M.$$

- f est dite **minorée** dans E s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x \in E; f(x) \geq m.$$

- f est dite **bornée** dans E si elle est majorée et minorée à la fois.

3.1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, On dit que :

1. Une fonction f est dite **croissante** dans E si et seulement si :

$$\forall x_1; x_2 \in E; x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

et elle est **strictement croissante** si au lieu de \leq on a $<$.

2. Une fonction f est dite **décroissante** dans E si et seulement si :

$$\forall x_1; x_2 \in E; x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$$

et elle est **strictement décroissante** si au lieu de \geq on a $>$.

3. Une fonction **monotone** (resp. **strictement monotone**) est une fonction qui est ou bien croissante ou bien décroissante (resp. strictement croissante ou bien strictement décroissante).

4. Une fonction f est dite **constante** dans E si et seulement si :

$$\forall x_1; x_2 \in E; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) = f(x_2).$$

Exemple 3.1.1.

- ✓ La fonction racine carrée $\sqrt{x} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante.
- ✓ Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et logarithme $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.
- ✓ La fonction valeur absolue $|x| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction $|x| : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante.

3.1.4 Parité et périodicité

Un ensemble $E \in \mathbb{R}$, est dit symétrique par rapport à l'origine si : $x \in E \implies -x \in E$.
Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- (a) f est **paire** si $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$.
- (b) f est **impaire** si $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.
- (c) f est **périodique** dans E de période T si et seulement si :

$$\exists T > 0; \forall x \in E; f(x + T) = f(x).$$

Interprétation graphique :

- (i) f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- (ii) f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
- (iii) f est périodique de période T si et seulement si son graphe est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$, où \vec{i} est le premier vecteur de coordonnées.

Exemple 3.1.2.

1. La fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire.
2. La fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.
3. La fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire.
4. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique.

3.2 Limite d'une fonction

Soit $a \in \mathbb{R}$. Dans tout ce chapitre, on dira qu'une fonction f de domaine de définition D_f est définie au voisinage de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que l'on soit dans un des trois cas suivants :

- ▷ $D_f \cap [a - h; a] \setminus \{a\} = [a - h; a[$ i.e. f est définie dans un voisinage à gauche de a et éventuellement non définie en a ;
- ▷ $D_f \cap [a; a + h] \setminus \{a\} =]a; a + h]$ i.e. f est définie dans un voisinage à droite de a et éventuellement non définie en a ;
- ▷ $D_f \cap [a - h; a + h] \setminus \{a\} = [a - h; a + h] \setminus \{a\}$ i.e. f est définie dans un voisinage de a et éventuellement non définie en a .

3.2.1 Limite en un point d'une fonction

Définition 3.2.1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a . Le nombre ℓ est dit limite de f lorsque x tend vers a et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a .

Exemple 3.2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} (3x + 1) = 1$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x \in D_f, |x - 0| < \frac{\varepsilon}{3} \implies |(3x + 1) - 1| < \varepsilon.$$

3.2.2 Limites à gauche, à droite

Définition 3.2.2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie au voisinage de a .

1. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si la restriction de f à $D_f \cap]-\infty; a[$ admet ℓ pour limite en a . Dans ce cas, cette limite est unique et on la note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a - \alpha < x < a \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

2. On dit que f admet ℓ pour limite à droite en a si la restriction de f à $D_f \cap]a; +\infty[$ admet ℓ pour limite en a . Dans ce cas, cette limite est unique et on la note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, a < x < a + \alpha \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Exemple 3.2.2.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < 0, \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en 0.

Proposition 3.2.1.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

3.2.3 Unicité de la limite

Théorème 3.2.1. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

- (i) Si f admet une limite ℓ en a , elle est unique, on note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
 (ii) Si f est définie en a et admet une limite en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

3.2.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 3.2.2. Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.
 (ii) Pour toute suite (u_n) à valeurs dans D_f de limite en a , $f(u_n)$ a pour limite ℓ .

Méthode : Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en a , il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) de même limite en a telles que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ possèdent des limites différentes.

Exemple 3.2.3. La fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0; en effet; soient

$$u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{\pi + 2\pi n}.$$

Alors,

$$f(u_n) \longrightarrow 1, \quad f(v_n) \longrightarrow 0$$

possèdent des limites différentes et par suite, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Théorème 3.2.3. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$. Alors

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \ell\ell'$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\ell}{\ell'}, \quad \ell' \neq 0$.

Proposition 3.2.2. Composition de limites.

Soient f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell$.

3.2.5 Passage à la limite

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et soient $\ell, \ell', m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell'$ et si $f \leq g$ au voisinage de a , alors $\ell \leq \ell'$.

(ii) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $f \leq M$ au voisinage de a , alors $\ell \leq M$.

(iii) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et $f \geq m$ au voisinage de a , alors $\ell \geq m$.

3.2.6 Théorème d'encadrement, de minoration et de majoration

Soient $a, \ell \in \mathbb{R}$ et soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a .

Théorème 3.2.4. (Théorème des gendarmes / d'encadrement)

Si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ et $h \leq f \leq g$ au voisinage de a , alors f admet une limite en a et celle-ci vaut ℓ .

Exemple 3.2.4. Etudier la limite de $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ en 0. On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \iff \begin{cases} x \leq \sin \frac{1}{x} \leq -x, & \text{si } x < 0, \\ -x \leq \sin \frac{1}{x} \leq x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En utilisant le théorème précédent, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Théorème 3.2.5. (Théorème de minoration)

Si $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = +\infty$ et $h \leq f$ au voisinage de a , alors f admet une limite en a et celle-ci vaut $+\infty$.

Théorème 3.2.6. (Théorème de majoration)

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ et $f \leq g$ au voisinage de a , alors f admet une limite en a et celle-ci vaut $-\infty$.

Exemple 3.2.5. Etudier la limite de $f(x) = \frac{x}{2+\sin x}$ en $\pm\infty$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin x} \leq 1.$$

▷ Si $x \in]-\infty, 0[\Rightarrow \frac{x}{3} \geq \frac{x}{2+\sin x}$ et en utilisant le théorème de majoration, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3} = -\infty.$$

▷ Si $x \in]0, +\infty[\Rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{x}{2+\sin x}$ et en utilisant le théorème de minoration, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} = +\infty.$$

3.3 Continuité d'une fonction

Définition 3.3.1. Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f est continue en a si f est définie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemple 3.3.1. $f(x) = 3x + 1$ sur \mathbb{R} , f est continue en $x_0 = 2$; en effet,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x \in D_f, |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |(3x + 1) - 7| < \varepsilon.$$

Définition 3.3.2. Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que :

(i) f est continue à gauche en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$. C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemple 3.3.2. Soit $f(x) = \sqrt{3-x}$; $D_f =]-\infty, 3]$.

f est continue à gauche en $a = 3$ car $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 = f(3)$.

(ii) f est continue à droite en a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$. C'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f, 0 < x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Exemple 3.3.3. Soit $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $D_f = [-1, 1]$.

f est continue à droite en $a = -1$ car $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$.

Exemple 3.3.4. *La fonction :*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 1, \\ 2 & \text{si } x = 1, \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

f n'est pas continue à gauche en 1 mais elle est continue à droite en 1 car :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq f(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 = f(1).$$

Dans ce cas f n'est pas continue en 1.

Proposition 3.3.1. f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et continue à droite en a .

3.3.1 Continuité des fonctions composées

Soit $f : I \rightarrow I'$ et $g : I' \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a et $f(a)$ respectivement. Alors $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en a .

3.3.2 Continuité sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I (I désigne un intervalle) si f est continue en tout point de I .

On note $C(I; \mathbb{R})$ ou $C^0(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} .

Exemple 3.3.5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x^2 + (\alpha^2 - 1)^2 & \text{si } x < 0, \\ x^3 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

f est continue sur \mathbb{R} si :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (\alpha^2 - 1)^2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, alors par identification, on obtient : $(\alpha^2 - 1)^2 = 0$, ce qui donne $\alpha = \pm 1$.

3.3.3 Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions continues au point a . Alors ;

* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g$ est continue en a .

* $f \cdot g$ est continue en a .

* $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$.

* $|f|$ est continue en a .

Remarque 3.3.1. f est dite *discontinue* en a si :

- (a) f n'est pas définie en a .
- (b) la limite existe mais différente de $f(a)$.
- (c) la limite n'existe pas.

3.3.4 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème 3.3.1. Soit f une fonction continue sur intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = k$, et si de plus f est strictement monotone, alors le x_0 est unique.

Exemple 3.3.6. Montrer que $\ln x - \frac{1}{x} = 0$ admet une unique solution sur $]1; 2[$.

On pose $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. On a :

- (i) f est continue sur $[1; 2]$.
- (ii) $f(1) = -1$ et $f(2) \simeq 0,19$.

Le TVI, implique $\exists x_0 \in]1; 2[: f(x_0) = 0$.

Unicité : $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, donc f est strictement croissante. Par suite la solution x_0 est unique.

3.3.5 Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie au voisinage de a mais non définie en a . On dit que f est prolongeable par continuité en a si f admet une limite finie ℓ en a . Le prolongement \tilde{f} de f définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est alors continu en a .

Exemple 3.3.7. Trouver un prolongement par continuité à \mathbb{R} de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

On a : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1} = \frac{8}{3}$. Le prolongement \tilde{f} de f définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 5x + 6}{x^3 + 1} & \text{si } x \neq -1, \\ \frac{8}{3} & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

3.4 Dérivée et différentiabilité d'une fonction

Définition 3.4.1. Soit f une fonction et $a \in D_f$. On dit que f est dérivable au point a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe et finie.}$$

Cette limite est appelée dérivée de f au point a et notée $f'(a)$, ou bien $\frac{df}{dx}(a)$. Une autre écriture de la dérivée au point a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Exemple 3.4.1. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3. \end{aligned}$$

Trouver la dérivée de f en un point a de \mathbb{R} . On a :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2. \end{aligned}$$

3.4.1 Dérivée à gauche, Dérivée à droite

On définit la dérivée à gauche de f en a par :

$$f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

De même, on définit la dérivée à droite de f en a par :

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Et

$$f \text{ est dérivable en } a \iff f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a).$$

Exemple 3.4.2. Soit f la fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 0, \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

f est-elle dérivable en 0 ?

On a :

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - 2x) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x} = -2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + 1) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1. \end{aligned}$$

Finalement, f n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) \neq f'_d(0)$.

Définition 3.4.2. f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I et l'application :

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

est appelée la fonction dérivée de f .

3.4.2 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction dérivable en a et (C) la courbe représentative de f . L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $M(a, f(a))$ est

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a),$$

avec $f'(a)$ représente la pente de la droite tangente à la courbe (C) .

3.4.3 Opérations sur les dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables au point a . Alors αf , $\alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$, $f \times g$ sont dérivables en a , ainsi que $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$. De plus, on a les formules :

- $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$.
- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Théorème 3.4.1. La dérivée d'une fonction composée :

Soient $f : I \rightarrow I'$ et $g : I' \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en a et $f(a)$ respectivement. Alors, $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'[f(a)].$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g[f(x)] - g[f(a)]}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f'(a) \cdot g'[f(a)]. \end{aligned}$$

Exemple 3.4.3. Soient les fonctions f et g définies par :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ & \text{et} \quad g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1; 1] \\ x \mapsto f(x) = x^2 & x \mapsto g(x) = \sin x, \end{array}$$

alors

$$\begin{array}{ll} g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1] \\ x \mapsto (g \circ f)(x) = \sin x^2 \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= f'(x) \cdot g'[f(x)] \\ &= 2x \cos x^2. \end{aligned}$$

Théorème 3.4.2. Dérivée d'une fonction réciproque :

Si f est dérivable en x_0 , alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{(f^{-1})(y) - (f^{-1})(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{(f^{-1})(y) - (f^{-1})(y_0)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Exemple 3.4.4. Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow]0, +\infty[\\ x &\longmapsto f(x) = e^x \end{aligned}$$

est bijective donc admet une application réciproque :

$$\begin{aligned} f^{-1} :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \ln y, \end{aligned}$$

avec

$$y = f(x) \iff y = e^x \iff x = \ln y.$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{e^x} \\ &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

3.4.4 Dérivée d'ordre supérieur

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I , alors f' est dite dérivée d'ordre 1 de f . Si f' est dérivable sur I alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f . On la note f'' ou f^2 :

$$f^2 = f'' = (f')'.$$

D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par :

$$f^n = (f^{n-1})'; \quad \forall n \geq 1, f^0 = f.$$

On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I .

On dit que f est de classe C^n sur I et on écrit $f \in C^n(I)$ si f est n fois dérivable sur I et f^n est continue sur I .

f est dite de classe C^∞ sur I si elle est de classe $C^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.4.5 Dérivée n^{eme} d'un produit (formule de Leibniz)

Théorème 3.4.3. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivables, alors $f \cdot g$ est n fois dérivable et on a :

$$\forall x \in [a, b]; \quad (f \cdot g)^n(x) = \sum_{k=0}^n C_k^n f^{n-k}(x) g^k(x) \quad \text{avec } C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Preuve : si $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^1(x) = (f \cdot g)'(x) &= \sum_{k=0}^1 C_k^1 f^{1-k}(x) g^k(x) \\ &= C_0^1 f^1(x) g^0(x) + C_1^1 f^0(x) g^1(x) \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Exemple 3.4.5. Calculer $(x^3 \sin 4x)^3$. On a :

$$\begin{aligned}(x^3 \sin 4x)^3 &= \sum_{k=0}^3 C_k^3 (x^3)^{3-k} (\sin 4x)^k \\ &= C_0^3 (x^3)^3 (\sin 4x)^0 + C_1^3 (x^3)^2 (\sin 4x)^1 \\ &\quad + C_2^3 (x^3)^1 (\sin 4x)^2 + C_3^3 (x^3)^0 (\sin 4x)^3,\end{aligned}$$

continuez . . .

3.4.6 Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 . La réciproque est fautive en général.

Exemple 3.4.6. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. f est continue en $x_0 = 0$ mais elle n'est pas dérivable en $x_0 = 0$ car $f'_g(0) = -1 \neq f'_d(0) = 1$.

3.4.7 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

Théorème 3.4.4. (Théorème de Rolle) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$,
3. $f(a) = f(b)$.

Alors, $\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$.

Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x .

Exemple 3.4.7. Pour montrer que l'équation $\sin x + \cos x = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; \Pi[$, on utilise la fonction $f(x) = e^x \sin x - 1$ qui est continue dans $]0; \Pi[$, dérivable dans $]0; \Pi[$ et $f(0) = f(\Pi) = -1$. Donc d'après le **théorème ROLLE** $\exists c \in]0; \Pi[$ telle que : $f'(c) = 0 \Rightarrow e^c \sin c + e^c \cos c = 0 \Rightarrow \sin c + \cos c = 0$.

Théorème 3.4.5. (Théorème de Lagrange ou des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors, $\exists c \in]a, b[$: $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Preuve : Considérons la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in [a, b], g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction g est :

- continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car c'est le produit et la somme des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.
- $g(a) = g(b) = 0$.

Donc d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, b[$: $g'(c) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} g'(c) = 0 &\iff f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \\ &\iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\ &\iff \exists c \in]a, b[: f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \end{aligned}$$

Le théorème de Lagrange nous affirme qu'il existe un point $c \in]a, b[$ en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite joignant les deux points $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

3.5 Règles de l'Hospital

(i) Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I , dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

$$\triangleright g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\},$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exemple 3.5.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

La réciproque est en général fausse.

Remarque 3.5.1. La règle de l'Hospital est vraie lorsque $x \rightarrow +\infty$. En effet, posons $x = \frac{1}{t}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow t} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow t} \frac{\frac{-1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{\frac{-1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} \\ &= \lim_{x \rightarrow t} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow t} f'(x)g'(x). \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow t} f'(x)g'(x) = \frac{0}{0}$ et f', g' vérifient les conditions du théorème, alors on peut appliquer encore une fois la règle de l'Hospital.

(i) Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I , dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty,$$

$$\triangleright g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\},$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

La remarque précédente est vraie dans ce cas.

Exemple 3.5.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \\ &= \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots x^0}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Exercice 01 : Soit a un réel strictement positif, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{a} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sin(ax)}{x} - \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq a. \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x_0 = 0$.
3. Pour la valeur de a trouvée en question 2., montrer qu'il existe au moins un réel c dans l'intervalle $]0; a[$ solution de l'équation $f(x) = 0$.

Solution : Soit a un réel strictement positif, on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{a} & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{\sin(ax)}{x} - \sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq a. \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de définition de f :

$$D_f =]-\infty; 0] \cup]0; a] =]-\infty; a].$$

2. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x_0 = 0$:

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + x + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(ax)}{x} - \sqrt{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot \frac{\sin(ax)}{ax} - \sqrt{x} \\ &= a. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient : $\frac{1}{a} = a$, ce qui donne $a = \pm 1$, puisque a un réel strictement positif, alors, $a = 1$.

3. Montrer que $\exists c \in]0; a[$ solution de l'équation $f(x) = 0$:

$$a = 1, \quad f(x) = \frac{\sin(ax)}{x} - \sqrt{x}.$$

Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à f sur $]0; 1[$:

- f est continue sur $[0; 1]$.
- $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = \sin 1 - 1 < 0$.

Le TVI, implique $\exists c \in]0; 1[: f(c) = 0$.

Exercice 02 : Soit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 1 - \frac{\sin(2x)}{x}. \end{aligned}$$

1. Calculer $f(-\Pi)$ et $f(\Pi)$. La fonction f est-elle injective ? justifier.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
3. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$. Soit g le prolongement par continuité de f , écrire l'expression de $g(x)$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution réelle dans l'intervalle $[0, \Pi]$.
5. Etudier la dérivabilité de g en $x_0 = 0$.

Solution :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = 1 - \frac{\sin(2x)}{x}. \end{aligned}$$

1. $f(-\Pi) = 1 - \frac{\sin(-2\Pi)}{\Pi} = 1$ et $f(\Pi) = 1 - \frac{\sin(2\Pi)}{\Pi} = 1$. (Remarquer que l'application f est paire).
l'application f n'est pas injective car $-\Pi \neq \Pi$ et $f(-\Pi) = f(\Pi)$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\sin(2x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 - 2 \frac{\sin(2x)}{2x} \right] = -1$, car $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.
3. La limite de $f(x)$ en $x_0 = 0$ existe et est finie donc la fonction f est prolongeable par continuité en ce point. Son prolongement g est défini par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & x = 0. \end{cases}$$

4. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution réelle dans l'intervalle $[0, \Pi]$:
 - (i) La fonction g est continue sur $[0, \Pi]$.
 - (ii) $g(0)g(\Pi) = g(0)f(\Pi) = -1 < 0$.
 D'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists c \in]0, \Pi[: g(c) = 0$.

5. Dérivabilité de g en $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{\sin(2x)}{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^2},$$

le calcul direct mène à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on peut appliquer la règle de l'Hospital car les fonctions $x \mapsto 2x - \sin(2x)$ et $x \mapsto x^2$ sont dérivable en 0. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2x - \sin(2x)]'}{[x^2]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos(2x)}{2x}$$

donne elle aussi la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Réappliquons la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[2 - 2 \cos(2x)]'}{[2x]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin(2x)}{2} = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0.$$

La fonction g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Chapitre 4

Application aux fonctions élémentaires

4.1 Fonction puissance

Définition 4.1.1. La fonction puissance d'exposant a , ($a \in \mathbb{R}^*$) :

$$x \mapsto x^a = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{a \text{ fois}}$$

est une application continue sur $]0, +\infty[$ et strictement monotone (croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$).

Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée : $x \mapsto ax^{a-1}$. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^a = \begin{cases} +\infty & a < 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0 & a > 0. \end{cases}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} 0 & a < 0, \\ 1 & a = 0, \\ +\infty & a > 0. \end{cases}$$

Regardons la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{a}}$ sur \mathbb{R}^+ est la fonction réciproque de $f : x \mapsto x^a$ sur \mathbb{R}^+ .

4.2 Fonction logarithmique

Définition 4.2.1. Il existe une unique fonction, notée $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{pour tout } x > 0 \text{ et } \ln 1 = 0.$$

Proposition 4.2.1.

- (i) \ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} .

- (ii) la fonction \ln est concave et $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
- (iii) De plus cette fonction \ln vérifie pour tout $a, b > 0$:
 - ▷ $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
 - ▷ $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$,
 - ▷ $\ln a^n = n \ln a, \forall n \in \mathbb{N}$.
- (iv) Trois limites doivent être connues :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Remarque 4.2.1. $\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme népérien. Il est caractérisé par $\ln e = 1$. On définit le logarithme en base a par :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \text{de sorte que } \log_a a = 1.$$

Pour $a = 10$ on obtient le logarithme décimal \log_{10} qui vérifie $\log_{10} 10 = 1$ et donc $\log_{10}(10)^n = n$. Dans la pratique on utilise l'équivalence : $x = 10^y \iff y = \log_{10} x$.

4.3 Fonction exponentielle

Définition 4.3.1. La bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition 4.3.1.

- (i) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante.
- (ii) La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' x = \exp x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est convexe et $\exp x \geq 1 + x$.
- (iii) De plus cette fonction \ln vérifie pour tout $a, b > 0$:
 - ▷ $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - ▷ $\exp(a + b) = \exp a \times \exp b$, $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
 - ▷ $(\exp x)^n = \exp(nx)$.
- (iv) Trois limites doivent être connues :

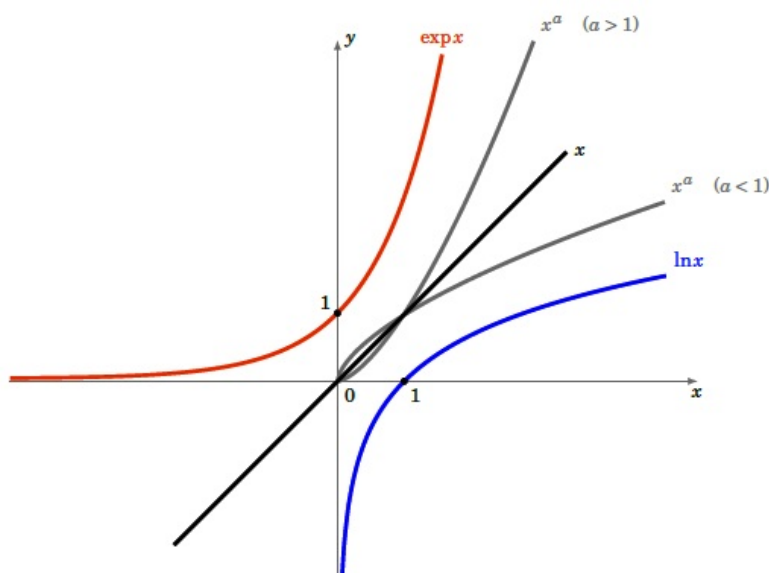
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Remarque 4.3.1. La fonction exponentielle est l'unique fonction qui vérifie $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\exp(1) = e$. Où $e = 2,718\dots$ est le nombre qui vérifie $\ln e = 1$. On appelle exponentielle de base $a (a > 0)$, la fonction notée \exp_a définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp_a(x) = e^{x \ln(a)} = a^x.$$

Puissance et comparaison : Par définition, pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} : x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, Comparons les fonctions $\ln x, \exp x$ avec x :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \exp x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty.$$

FIGURE 4.1 – Comparer les fonctions $\ln x$, $\exp x$ et x^a .

4.4 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

Les quatre fonctions hyperboliques sont définies comme suit :

▷ **sinus hyperbolique :**

$$\begin{aligned} sh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

▷ **cosinus hyperbolique :**

$$\begin{aligned} ch : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

▷ **tangente hyperbolique :**

$$\begin{aligned} th : \mathbb{R} &\longrightarrow]-1, +1[\\ x &\longmapsto thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

▷ **cotangente hyperbolique :**

$$\begin{aligned} coth : \mathbb{R}^* &\longrightarrow]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ x &\longmapsto cothx = \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Les fonctions sont définies sur \mathbb{R} sauf $cothx$ qui définit sur $\mathbb{R} - \{0\}$, continues, dérivables et satisfont les propriétés suivantes :

1. La fonction $x \mapsto shx$ est impaire et strictement croissante sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} shx = \mp\infty$, sa dérivée est $(shx)' = chx$.
 Sa fonction réciproque, notée $x \mapsto \arg shx$ est aussi continue strictement croissante de \mathbb{R} sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} \arg shx = \mp\infty$:

$$y = \arg shx \iff x = shy.$$

Une autre écriture de la fonction $\arg sh$, on a :

$$ch^2y - sh^2y = 1 \implies chy = \sqrt{1 + sh^2y} = \sqrt{1 + x^2}.$$

D'autre part, si $x = shy$ alors $\frac{dx}{dy} = chy$ et

$$\begin{aligned} (\arg shx)' &= \frac{1}{chy} = \frac{1}{\sqrt{1 + sh^2y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc

$$chy + shy = e^y = x + \sqrt{1 + x^2},$$

ce qui implique :

$$\arg shx = y = \ln e^y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

2. La fonction $x \mapsto chx$ est paire et strictement décroissante sur \mathbb{R}^- et strictement croissante dans \mathbb{R}^+ , $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} chx = \mp\infty$, sa dérivée est $(chx)' = shx$.
 Sa fonction réciproque, notée $x \mapsto \arg chx$ est aussi continue strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur \mathbb{R}^* avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arg chx = +\infty$:

$$y = \arg chx \iff x = chy.$$

D'autre part, si $x = chy$ alors $\frac{dx}{dy} = shy$ et

$$\begin{aligned} (\arg chx)' &= \frac{1}{shy} = \frac{1}{\sqrt{ch^2y - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

Une autre écriture de la fonction $\arg ch$, on a :

$$ch^2y - sh^2y = 1 \implies shy = \sqrt{ch^2y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Donc

$$chy + shy = e^y = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

ce qui implique :

$$\arg chx = y = \ln e^y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. La fonction $x \mapsto thx$ est impaire et strictement croissante dans \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} thx = \mp 1$,

sa dérivée est $(th)'(x) = 1 - th^2x = \frac{1}{ch^2x}$.

Sa fonction réciproque, notée $x \mapsto \arg thx$ est aussi continue strictement croissante de $] - 1, +1[$ sur \mathbb{R} avec $\lim_{x \rightarrow -1^+} \arg thx = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +1^-} \arg thx = +\infty$:

$$y = \arg thx \iff x = thy.$$

D'autre part, si $x = thy$ alors $\frac{dx}{dy} = 1 - th^2y$ et

$$(\arg thx)' = \frac{1}{1 - th^2y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Une autre écriture de la fonction $\arg th$, on a :

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}, \quad \text{donc} \quad e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}.$$

Ce qui implique :

$$\arg thx = y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

4. La fonction $x \mapsto cothx$ est impaire et strictement décroissante et bijective de \mathbb{R}^* dans $] - \infty, -1[\cup] 1, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} cothx = \mp 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1^\mp} cothx = \mp\infty$, sa dérivée est

$(coth)'(x) = 1 - coth^2x = \frac{-1}{sh^2x}$.

Sa fonction réciproque, notée $x \mapsto \arg cothx$ est aussi continue strictement croissante de $] - 1, +1[$ sur \mathbb{R} ,

$$y = \arg cothx \iff x = cothy.$$

On peut montrer que :

$$\arg cothx = y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

Voici les graphes des ces fonctions :

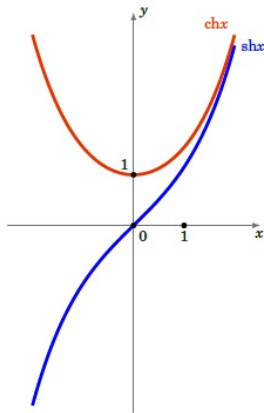


FIGURE 4.2 – Les fonctions shx , chx .

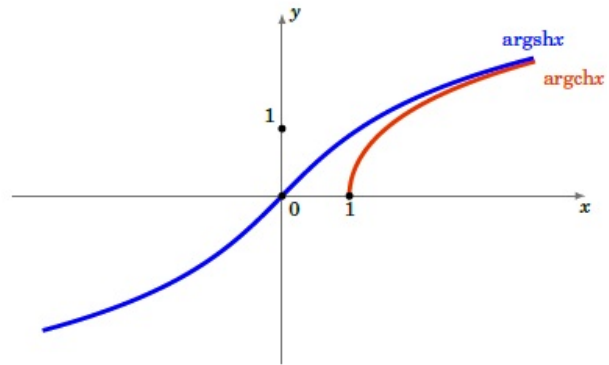


FIGURE 4.3 – Les fonctions inverses $\arg shx$, $\arg chx$.

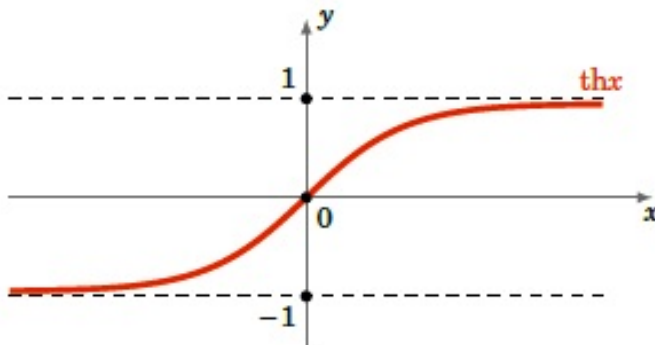


FIGURE 4.4 – La fonction thx .

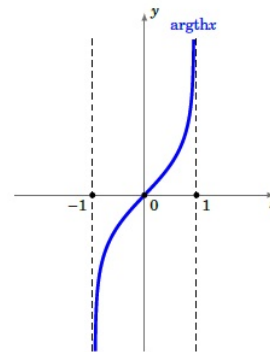


FIGURE 4.5 – La fonction inverse $\arg thx$.

4.5 Fonctions trigonométriques et leurs inverses

Définition 4.5.1. La fonction $y = \sin x$ est une fonction impaire de période 2Π . Cette fonction est continue et définie sur \mathbb{R} et vérifie les relations suivantes :

- ▷ $-1 \leq \sin x \leq 1$,
- ▷ $\sin(-x) = -\sin(x)$,
- ▷ $\sin(\Pi \pm x) = \mp \sin(x)$,
- ▷ $\sin(\frac{\Pi}{2} \pm x) = \cos(x)$.

Sa dérivée qui se déduit par une rotation dans le sens inverse trigonométrique sur le cercle (sens horloge) est égale à :

$$(\sin(x))' = \cos(x).$$

Définition 4.5.2. La fonction $y = \cos x$ est une fonction paire de période 2Π . Cette fonction est continue et définie sur \mathbb{R} et vérifie les relations suivantes :

- ▷ $-1 \leq \cos x \leq 1$,

- ▷ $\cos(-x) = \cos(x)$,
- ▷ $\cos(\Pi \pm x) = -\cos(x)$,
- ▷ $\cos(\frac{\Pi}{2} \pm x) = \mp \sin(x)$.

Sa dérivée qui se déduit par une rotation dans le sens inverse trigonométrique sur le cercle (sens horloge) est égale à :

$$(\cos(x))' = -\sin(x).$$

Remarque 4.5.1. Les fonctions Sinus et Cosinus représentent les coordonnées du point M appartenant au cercle trigonométrique. Ces fonctions vérifient la relation suivante :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Définition 4.5.3. La fonction $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est une fonction impaire de période Π . Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R} - \{(2k + 1)\frac{\Pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ et vérifie les relations suivantes :

- ▷ $\tan(-x) = -\tan(x)$,
- ▷ $\tan(\Pi \pm x) = \pm \tan(x)$,
- ▷ $\tan(\frac{\Pi}{2} \pm x) = \mp \frac{1}{\tan}$.

Sa dérivée est égale à :

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Définition 4.5.4. La fonction $y = \cotan x = \frac{1}{\tan}$ est une fonction impaire de période Π . Cette fonction est continue et définie sur $\mathbb{R} - \{k\Pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et vérifie les relations suivantes :

- ▷ $\cotan(-x) = -\cotan(x)$,
- ▷ $\cotan(\Pi \pm x) = \pm \cotan(x)$,
- ▷ $\cotan(\frac{\Pi}{2} \pm x) = \mp \cotan(x)$.

Sa dérivée est égale à :

$$(\cotan(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cotan^2(x)).$$

On appelle **fonctions circulaires réciproques** les quatre fonctions suivantes :

1. Fonction **arc sinus** est une fonction réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\longrightarrow \left[-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \arcsin x, \end{aligned}$$

et vérifie les relations suivantes :

- ▷ si $x \in [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$: $\sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y$,
- ▷ $\sin(\arcsin x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$,
- ▷ $\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$,

▷ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Elle est impaire, continue, dérivable sur $] -1, 1[$ et strictement croissante, de dérivée :

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. Fonction **arc cosinus** est une fonction réciproque de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0, \Pi]$:

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \Pi] \\ x &\longmapsto \arccos x, \end{aligned}$$

et vérifie les relations suivantes :

▷ si $x \in [0, \Pi]$: $\cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$,

▷ $\cos(\arccos x) = x$, $\forall x \in [-1, 1]$,

▷ $\arccos(\cos x) = x$, $\forall x \in [0, \Pi]$,

▷ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Elle est continue, dérivable sur $] -1, 1[$ et strictement décroissante, de dérivée :

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Fonction **arc tangente** est une fonction réciproque de la fonction tangente sur l'intervalle $] \frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$:

$$\begin{aligned} \arctan :] -\infty, +\infty[&\longrightarrow] \frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[\\ x &\longmapsto \arctan x, \end{aligned}$$

et vérifie les relations suivantes :

▷ si $x \in] \frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$: $\tan x = y \Leftrightarrow x = \arctan y$,

▷ $\tan(\arctan x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

▷ $\arctan(\tan x) = x$, $\forall x \in] \frac{-\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}[$.

Elle est impaire, continue, dérivable et strictement croissante, de dérivée :

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Fonction **arc cotangente** est une fonction réciproque de la fonction cotangente sur l'intervalle $]0, \Pi[$:

$$\begin{aligned} \operatorname{arccotan} :] -\infty, +\infty[&\longrightarrow]0, \Pi[\\ x &\longmapsto \operatorname{arccotan} x. \end{aligned}$$

Elle est continue, dérivable et strictement décroissante, de dérivée :

$$(\operatorname{arccotan}(x))' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Voici les graphes des ces fonctions :

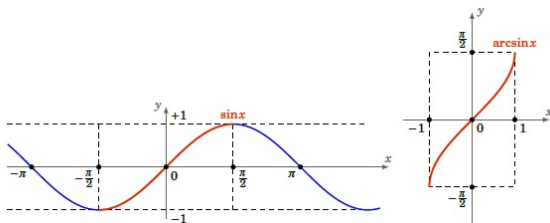


FIGURE 4.6 – Les fonctions $\sin x$ et $\arcsin x$.

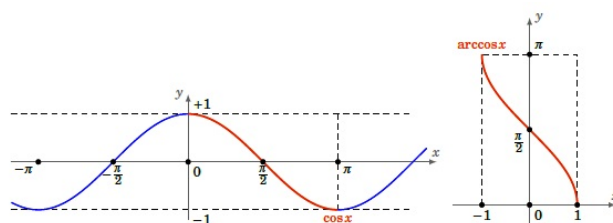


FIGURE 4.7 – Les fonctions $\cos x$ et $\arccos x$.

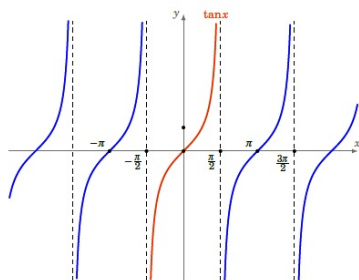


FIGURE 4.8 – Les fonction $\tan x$.

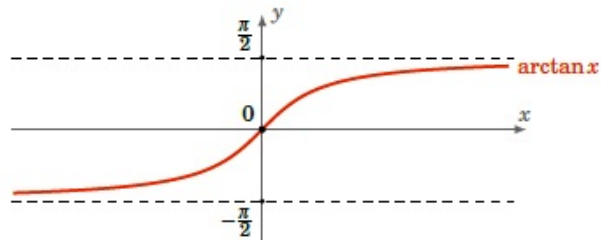


FIGURE 4.9 – La fonction inverse $\arctan x$.

Exercice 01 : En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}.$$

Solution :

- Posons $f(x) = \cos \sqrt{x} \Rightarrow f(0) = 1$, alors,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -f'(0),$$

avec

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \sin \sqrt{x} \sqrt{x} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{x} \sqrt{x} = -\frac{1}{2}.$$

La limite cherchée est

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2}.$$

- Posons $g(x) = \arctan x \Rightarrow g(1) = \frac{\pi}{4}$, Ce qui donne :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -g'(1).$$

avec

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = \frac{1}{2}.$$

La limite cherchée est

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 02 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = (\sin x + \ln(4 + x^2))^{\frac{3}{7}}, \quad g(x) = (ch)^{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R},$$

Solution : On utilise les règles de dérivation usuelles dans chaque cas.

(i) Posons $u(x) = \sin x + \ln(4 + x^2)$ donc $f(x) = (u(x))^{\frac{3}{7}}$ alors,

$$f'(x) = \frac{3}{7}u'(x)(u(x))^{\frac{3}{7}-1} = \frac{3}{7}u'(x)(u(x))^{-\frac{4}{7}}.$$

Soit que

$$f'(x) = \frac{3}{7} \left(\cos x + \frac{2x}{4 + x^2} \right) (\sin x + \ln(4 + x^2))^{-\frac{4}{7}}.$$

(ii) La fonction g peut s'écrire $g(x) = (chx)^{\cos^2 x} = e^{v(x)}$ avec $v(x) = \cos^2 x \ln chx$.

Alors $g'(x) = v'(x)e^{v(x)}$. On a :

$$v'(x) = \left(-2 \cos x \sin x \ln chx + \cos^2 x \frac{shx}{chx} \right).$$

Donc

$$g'(x) = (-2 \sin 2x \ln chx + \cos^2 x thx) (chx)^{\cos^2 x}.$$

Exercice 03 : Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\Pi} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue au point $x = 0$.
2. Déterminer la dérivée à droite $f'_d(0)$ et la dérivée à gauche $f'_g(0)$ de f au point $x = 0$.
La fonction f est-elle dérivable au point $x = 0$?

Solution :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left| \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{\Pi}{2} \implies |f(x)| = \frac{|x|}{\Pi} \left| \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{|x|}{2},$$

alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$. Par conséquent la fonction f est continue en $x = 0$.

2. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \frac{\Pi}{2}$, alors,

$$f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\Pi} \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

La dérivée à droite de la fonction f est $f'_d(0) = \frac{1}{2}$. De même, lorsque $x \rightarrow 0^-$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow -\frac{\Pi}{2}$, alors,

$$f'_g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\Pi} \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

La dérivée à gauche de la fonction f est $f'_g(0) = -\frac{1}{2}$. Comme $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, la fonction f n'est pas dérivable au point $x = 0$.

Exercice 04 :

1. Ecrire en fonction de x les deux fonctions : $\cos(\arcsin x)$ et $\sin(\arccos x)$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}.$$

3. Montrer que :

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\Pi}{2}.$$

Solution :

1. On a :

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \implies \cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y},$$

puisque

$$-\frac{\Pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\Pi}{2} \implies \cos(\arcsin x) \geq 0,$$

$$\implies \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

de même ?

$$\begin{aligned} \sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y} &\implies \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} \\ &\implies \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ car : } 0 \leq \arccos x \leq \Pi. \end{aligned}$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}.$$

On a :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5} \implies \sin(\arcsin x) = \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5} \right) \\ &\implies x = \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) \cos \left(\arcsin \frac{3}{5} \right) + \cos \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) \sin \left(\arcsin \frac{3}{5} \right) \\ &\implies x = \frac{4}{5} \sqrt{1 - \frac{9}{25}} + \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \frac{3}{5} \\ &\implies x = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1. \end{aligned}$$

3. Montrer que : $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. On pose :

$$\begin{aligned} f(x) = \arccos x + \arcsin x &\implies f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\ &\implies f(x) = C, \quad C \text{ est une constante, mais } f(0) = \frac{\pi}{2} \\ &\implies f(x) = \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 05 : Montrons l'inégalité suivante :

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solution : On applique le **théorème des accroissements finis** sur la fonction $\arcsin x$ dans $[0; x] \subset [0; 1]$. Alors il existe une constante $c \in]0; x[$ tel que :

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c) \implies f'(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}.$$

Mais,

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{car } c < x;$$

qui implique :

$$\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Développement limité

5.1 Formules de Taylor

Une fonction f continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable en $x_0 \in]a, b[$ peut s'écrire au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$. Celà revient à dire que f est approximée par un polynôme de degré 1

$$x \longmapsto P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

L'erreur commise $R(x) = (x - x_0)\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 . La formule de Taylor généralise ce résultat à des fonctions n fois dérivables qui peuvent être approximées (au voisinage de x_0) par des polynômes de degré n . Plus exactement,

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{P_n(x)} + R_n(x_0, x).$$

$P_n(x)$ est un polynôme de degré n en $(x - x_0)$ qui approxime f avec une précision R_n . Et $R_n(x_0, x)$ est appelé reste d'ordre n . Diverses formes de $R_n(x_0, x)$ existent, la forme la plus classique est la suivante :

5.1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 5.1.1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et soit $x, x_0 \in [a, b]$. Alors,

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) \\ & + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \end{aligned}$$

Exemple 5.1.1. La fonction $f(x) = e^x$ est de classe C^{n+1} sur \mathbb{R} pour tout n . Fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = e^{x_0} + (x - x_0)e^{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}e^{x_0} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}e^{x_0} + \int_{x_0}^x \frac{e^t}{n!}(x - t)^n dt.$$

5.1.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Théorème 5.1.2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et soit $x, x_0 \in [a, b]$. Il existe un réel c entre x_0 et x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f^{(2)}(x_0) \\ &+ \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

Exemple 5.1.2. Soient $x_0, x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 0$, il existe c entre x_0 et x tel que :

$$e^x = e^{x_0} + (x - x_0)e^{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!}e^{x_0} + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}e^{x_0} + \frac{(x - x_0)^n}{n!}e^{x_0} + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}e^c.$$

5.1.3 Formule de Taylor Mac-Laurin

Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on pose $c = \theta x, 0 < \theta < 1, c \in]0, x[$ et on obtient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Remarque 5.1.1. La formule de Taylor Mac-Laurin est souvent utilisée dans le calcul des valeurs approchées.

Exemple 5.1.3. En utilisant la formule de Mac-Laurin d'ordre 2 à la fonction $x \mapsto e^x$, montrer que l'on a $\frac{8}{3} < e < 3$. On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}e^{\theta x},$$

et pour $x = 1, e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^\theta$, i.e., $e = \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e^\theta$. En utilisant le fait que $0 < \theta < 1$, on obtient :

$$\frac{8}{3} < \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e^\theta < \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e.$$

D'où

$$\begin{aligned} e < \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e &\Rightarrow \frac{5}{6}e < \frac{5}{2} \\ &\Rightarrow e < 3. \end{aligned}$$

Finalement, $\frac{8}{3} < e < 3$.

5.1.4 Formule de Taylor Young

Nous allons restreindre les hypothèses en supposant uniquement que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Théorème 5.1.3. *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a, b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe (finie), alors $\forall x \in \mathcal{V}(x_0)$,*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(x - x_0)^n,$$

où $o(x - x_0)^n = (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 5.1.2. *La formule de Taylor Lagrange donne une étude globale de la fonction sur l'intervalle, tandis que la formule de Taylor Young donne une étude locale de la fonction au voisinage de x_0 .*

La formule de Taylor Young est pratique pour le calcul des limites.

Exemple 5.1.4. *Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1 + x)$; f est infiniment dérivable. On a : $f(0) = 0$ et*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x}, & f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}, & f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \\ f'(0) &= 1, & f''(0) &= -1, & f'''(0) &= 2. \end{aligned}$$

Alors,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$$

est un D.L d'ordre 3 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0.

5.2 Développement limité

5.2.1 D.L. au voisinage de zéro

Nous avons vu que dans un voisinage de x_0 on peut approcher $f(x)$ par un polynôme P_n de degré n de sorte que $f(x) - P_n(x) = o(x - x_0)^n$. Ceci lorsque $f^{(n)}(x)$ existe. Maintenant, nous allons voir qu'un tel polynôme peut exister même si $f^{(n)}$ n'existe pas et même si f n'est pas continue en x_0 .

Définition 5.2.1. *Soit f une fonction définie au voisinage de zéro. On dit que f admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un ouvert I de centre 0 et des constantes a_0, a_1, \dots, a_n tels que $\forall x \in I, x \neq 0$*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}_{P_n(x)} + o(x^n). \end{aligned}$$

- $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ est la partie régulière du D.L.
- $o(x^n) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ est le reste.

Exemple 5.2.1.

1. $f(x) = 1 + \frac{5}{2}x + 3x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ est un D.L₂(0).
Si f admet un D.L_n(0) alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe. En effet, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a_0$. Cela ne veut pas dire que f est continue en 0 car $f(0)$ peut ne pas exister.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ n'admet pas D.L au voisinage de 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$.
Si f admet un D.L_n(0) et $a_0 = f(0)$, alors f est dérivable en 0. En effet, $\forall x \neq 0$, $f(x) = f(0) + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1 + a_2x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1 = f'(0).$$

Proposition 5.2.1. (Unicité) Si f admet un D.L_n(0) alors ce D.L est unique.

Preuve : Supposons que f admet deux D.L_n(0), c'est à dire :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = x^n[\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)].$$

En passant à la limite lorsque $x \rightarrow 0$, on aura $a_0 = b_0$, d'où

$$(a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n = x^n[\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)].$$

Si $x \neq 0$, on obtient

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1}[\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)].$$

En passant à la limite lorsque $x \rightarrow 0$, on aura $a_1 = b_1$. De cette manière, on aura $a_n = b_n, \forall n$. D'où l'unicité du D.L.

Théorème 5.2.1. Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors le D.L de f est

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Corollaire 5.2.1. *Si $f^{(n)}(0)$ existe et f admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 , alors*

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}, \dots, \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve : C'est grâce à l'unicité du D.L.

Exemple 5.2.2. *(D.L obtenu par division suivant les puissance croissante)*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \epsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\epsilon(x) = \frac{x}{1-x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$.

On peut déduire $f^{(n)}(0)$, en effet

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0,$$

et par identification, on a $\forall k : 0 \leq k \leq n, \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$.

Remarque 5.2.1. *L'existence d'un D.L n'implique pas l'existence des dérivées. En effet, soit*

$$g(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} \sin \frac{1}{x}.$$

Il est clair que g admet un $D.L_n(0)$ mais elle n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas définie en 0 .

5.2.2 D.L. des fonctions usuelles à l'origine

Dans tout cette sous section, ϵ désigne une fonction de limite nulle en 0 .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x).$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \epsilon(x).$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \epsilon(x).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p+1} \epsilon(x).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} x^n + x^n \varepsilon(x).$$

5.2.3 D.L. au voisinage de x_0 et de l'infini

Définition 5.2.2. On dit que f définie au voisinage de x_0 admet un D.L d'ordre n au $\mathcal{V}(x_0)$ si la fonction

$$F : x \longmapsto F(x) = f(x_0 + x)$$

admet un D.L d'ordre n au $\mathcal{V}(0)$. On a :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

et donc

$$f(x_0 + x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

c'est à dire

$$f(y) = a_0 + a_1(y - x_0) + \dots + a_n(y - x_0)^n + (y - x_0)^n \varepsilon((y - x_0)),$$

ou d'une manière équivalente :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon((x - x_0)).$$

Finalement, on se ramène du voisinage de x_0 au voisinage de 0 par le changement de variable $z = x - x_0$.

De même le D.L au voisinage de l'infini se fait par le changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

Définition 5.2.3. On dit qu'une fonction numérique admet un D.L d'ordre n au $\mathcal{V}(+\infty)$ s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que l'on ait au $\mathcal{V}(+\infty)$,

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Exemple 5.2.3.

(i) Le D.L de $x \mapsto e^x$ au $\vee(1)$. On pose $u = x - 1$, donc au $\vee(0)$ on a :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n).$$

Par suite

$$e^{x-1} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o(u(x-1)^n).$$

Finalement

$$e^x = e \left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + o(u(x-1)^n) \right].$$

(ii) Le D.L de $x \mapsto e^x$ au $\vee(+\infty)$. Au voisinage de l'infini, il suffit de poser $y = \frac{1}{x}$.

On a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

et donc

$$e^{\frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3!y^3} + \dots + \frac{1}{n!y^n} + o\left(\frac{1}{y^n}\right).$$

5.2.4 Opérations sur les D.L

1. **D.L obtenu par restriction** : Si f admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0, alors $\forall k \leq n$, f admet un D.L d'ordre k . En effet, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \dots \\ &\quad + a_nx^n + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k \\ &= +x^k[a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \dots + a_nx^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)]. \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_2(x) = [a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \dots + a_nx^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)] \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$.

2. **Opérations algébriques sur les D.L** :

Théorème 5.2.2. Si f et g admettent des D.L d'ordre n au voisinage de 0, alors $f+g, f \times g$ admettent des D.L d'ordre n et $\frac{f}{g}$ admet un D.L d'ordre n si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$.

▷ **Somme et produit** : On suppose que f et g sont deux fonctions qui admettent des D.L en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x), g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x).$$

Propriétés 5.2.1.

- $f + g$ admet un D.L en 0 l'ordre n qui est :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Exemple 5.2.4. Soit $h(x) = \ln(1 + x) + \cos x$. On a :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} h(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \varepsilon_1(x) + 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \varepsilon_2(x) \\ &= 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{5}{4}x^4 + x^4 \varepsilon(x), \end{aligned}$$

est un D.L d'ordre 4 de h au voisinage de 0.

- $f \times g$ admet un D.L en 0 l'ordre n qui est :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = T_n(x) + x^n \varepsilon(x).$$

Où $T_n(x)$ est le polynôme $(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \times (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)$ tronqué à l'ordre n . (Tronquer un polynôme à l'ordre n signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leq n$.)

Exemple 5.2.5. Soient $f(x) = \sin x \cdot \cos x$. On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_1(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3 \varepsilon_2(x).$$

Alors,

$$f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + x^3 \varepsilon(x).$$

▷ **Division** : Voici comment calculer le D.L d'un quotient f/g . Soient

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^{n+1} \varepsilon_1(x), \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + x^{n+1} \varepsilon_2(x).$$

Nous allons utiliser le D.L de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$.

(a) Si $b_0 = 1$, on pose $u = b_1x + b_nx^n + x^n \varepsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit :

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} = f \cdot \frac{1}{1+u}.$$

Exemple 5.2.6. *D.L de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5. Tout d'abord,*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon_1(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_2(x).$$

En posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_2(x)$. Nous aurons besoin de

$$u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_2(x) \right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^5 \varepsilon_2(x), \quad u^3 = x^5 \varepsilon_2(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^3 \varepsilon_2(x) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^5 \varepsilon_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + x^5 \varepsilon_2(x). \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \tan x &= \sin x \times \frac{1}{\cos x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5 \varepsilon_1(x) \right) \\ &\times \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{24}x^4 + x^5 \varepsilon_2(x) \right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5 \varepsilon_1(x). \end{aligned}$$

- (b) Si b_0 est quelconque avec $b_0 \neq 1$ alors on se ramène au cas précédent en écrivant :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \dots + \frac{b_n}{b_0}x^n + \frac{x^n \varepsilon(x)}{b_0}}.$$

Exemple 5.2.7. *D.L de $\frac{1+x}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4.*

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{2+x} &= (1+x) \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}(1+x) \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4). \end{aligned}$$

- (c) Si $b_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener aux cas précédents.

Exemple 5.2.8. *Si l'on souhaite calculer le D.L de $\frac{\sin x}{shx}$ en 0 à l'ordre 4 alors on écrit :*

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{shx} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{x(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4))}{x(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4))} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4) \right) \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)} \\ &= \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{18} + o(x^4). \end{aligned}$$

▷ **D.L. d'une fonction composée :**

Théorème 5.2.3. *Si f et g admettent des D.L d'ordre n au voisinage de 0 et si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un D.L d'ordre n au voisinage de 0 .*

Remarque 5.2.2. *La partie régulière de $f \circ g$ s'obtient en remplaçant dans la partie régulière de f , la partie régulière de g et en gardant que les puissances inférieures ou égales à n .*

Exemple 5.2.9. *Soit $h(x) = e^{\sin x}$. Posons $f(u) = e^u$ et $g(x) = \sin x$. On a $g(0) = \sin 0 = 0$,*

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + o(u^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

et donc

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= e^{\sin x} \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

5.2.5 Dérivation de D.L.

Nous avons vu que l'existence de D.L ne nécessite pas l'existence de la dérivée. Donc nous ne pouvons rien dire en ce qui concerne le D.L de la dérivée.

Théorème 5.2.4. *Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 et admettant un D.L d'ordre n au voisinage de 0*

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Si la dérivée f' admet un D.L d'ordre $(n - 1)$ au voisinage de 0 , alors

$$f'(x) = Q(x) + x^{n-1} \eta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0.$$

avec

$$Q(x) = P'(x).$$

Exemple 5.2.10. *Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On sait que*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' = f'(x) \\ &= 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} + x^{n-1}\eta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0. \end{aligned}$$

5.2.6 Intégration de D.L.

Théorème 5.2.5. Soit f une fonction numérique dérivable dans l'intervalle $I =]-\alpha, \alpha[$, $\alpha > 0$, de dérivée f' . Si f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 ,

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0,$$

alors f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0 ,

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\eta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0,$$

ici $x^{n+1}\eta(x) = \int_0^x t^n \epsilon(t) dt$.

Exemple 5.2.11. On a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0,$$

et par suite

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \eta(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \eta(x) = 0.$$

5.2.7 D.L. généralisé

Si f définie au $\vee(0)$ n'admet pas D.L au $\vee(0)$ mais $x^\alpha f(x)$, $\alpha > 0$ admet un D.L, on peut alors écrire au $\vee(0)$ pour $x \neq 0$,

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} [a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)],$$

c'est un D.L généralisé de f au $\vee(0)$.

Exemple 5.2.12. Soit f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-x^2}.$$

f n'admet pas un D.L au voisinage de 0 car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, mais on a :

$$\begin{aligned} xf(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \epsilon(x). \end{aligned}$$

Par suite

$$f(x) = \frac{1}{x} [1 + x + x^2 + \dots + x^n \epsilon(x)]$$

est le D.L généralisé de f .

5.3 Applications

Les D.L sont très utiles dans la recherche des limites de fonctions et l'étude des formes indéterminées.

Exemple 5.3.1. Soit

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin x)^4}.$$

En utilisant la formule de Taylor Young à l'ordre 4 pour la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(1+x)$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. On a :

$$g(x) = g(0) + \frac{x}{1!}g'(0) + \frac{x^2}{2!}g^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}g^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}g^{(4)}(0) + o(x)^4,$$

c'est à dire

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + x^4 \epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

Par suite

$$f(x) = \frac{-\frac{x^4}{4} + x^4 \epsilon(x)}{(\sin x)^4},$$

qui admet pour limite $\frac{-1}{4}$ lorsque x tend vers 0.

Exemple 5.3.2.

▷ Trouver la limite lorsque x tend vers 0 de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)}.$$

On a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$$

et par suite

$$f(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^2}{3} + o(x^3)}.$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3}.$$

▷ Déterminer la limite, lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}.$$

On a une forme indéterminée $+\infty - \infty$. On a vu qu'en posant $y = \frac{1}{x}$, on se ramène au voisinage de 0, on trouve :

$$\begin{aligned} g(y) &= f\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{1}{y-y^2} - \frac{1}{y}(1+y+y^3)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Après calculs on trouve :

$$g(y) = \frac{2}{3} + \frac{10}{9}y + o(y).$$

Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 01 : Calculer les limites suivantes :

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2},$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x},$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

Solution :

(a) On a :

$$\begin{aligned} e^{x^2} &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4). \end{aligned}$$

Donc

$$e^{x^2} - \cos x = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

et par suite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

(b) On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Donc

$$\ln(1+x) - \sin x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

et par suite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0.$$

(c) On a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).$$

Donc

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} = \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

et par suite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

Exercice 02 : Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x.$$

Solution : On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x &= |x| \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 \right) \\ &= |x| \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) \\ &= |x| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right). \end{aligned}$$

et par suite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = \frac{-3}{2}.$$

Exercice 03 :

1. Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \sqrt{1+x}.$$

Calculer le développement limité de la fonction g à l'ordre 2 au voisinage de zéro.

2. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x+3}{x}}.$$

Montrer qu'au voisinage de l'infini, on a :

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. Interpréter géométriquement ce résultat en faisant le dessin correspondant.

Solution :

$$g(x) = \sqrt{1+x}, \quad f(x) = x\sqrt{\frac{x+3}{x}}.$$

1. Calculer le développement limité de la fonction g à l'ordre 2 au voisinage de zéro :

$$\begin{aligned} g(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

2. Calculer le développement limité de la fonction f au voisinage de l'infini :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{\frac{x+3}{x}} \\ &= x\sqrt{x + \frac{3}{x}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{3}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= x + \frac{3}{2} - \frac{9}{8x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = -\frac{9}{8}.$$

3. Interprétation géométriquement :

$$y = x + \frac{3}{2}$$

est une équation d'asymptote de courbe (C_f).

Chapitre 6

Algèbre linéaire

6.1 Structures algébriques

Les notions qui suivent présentent de l'intérêt sur le plan terminologique que structurel avant d'aborder l'étude des espaces vectoriels.

6.1.1 Lois et composition interne

Définition 6.1.1. On appelle loi de composition interne (l.c.i) sur un ensemble E , toute application :

$$\begin{aligned} \star : E \times E &\longrightarrow E \\ (a, b) &\longmapsto a \star b. \end{aligned}$$

Un sous ensemble F de E est dit stable par rapport à la loi \star si :

$$\forall a, b \in F, a \star b \in F.$$

On la note : $a \star b$ ou $a \Delta b$ ou $a \perp b \dots$

Exemple 6.1.1. L'addition et la multiplication sont des lois de composition internes sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et \mathbb{C} mais la soustraction n'est pas interne sur \mathbb{N} .

Définition 6.1.2. Soit E et Ω des ensembles. On appelle loi de composition externe (l.c.e) sur E toute application :

$$\begin{aligned} \perp : \Omega \times E &\longrightarrow E \\ \alpha \cdot x &\longmapsto \alpha \perp x. \end{aligned}$$

Dans ce cadre général, les éléments de Ω sont appelés opérateurs et on dit que E est muni d'une loi de composition externe à opérateurs dans Ω .

Remarque 6.1.1. La loi peut être notée multiplicativement à l'aide d'un point.

Définition 6.1.3. Soient \star et \bullet deux lois de composition internes sur E , on dit que :

1. **Commutativité** : \star est commutative si : $\forall a, b \in E, a \star b = b \star a$.

Exemple 6.1.2. L'intersection et la réunion sont des lois de composition internes commutatives sur l'ensemble des parties d'un ensemble.

2. **Associativité** : \star est associative si : $\forall a, b, c \in E, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

Exemple 6.1.3. La composition des applications est une loi de composition interne associative.

Par contre la loi de composition \star définie dans \mathbb{Q} par : $x \star y = \frac{x+y}{2}$ n'est pas associative.

3. **Distributivité** : \star est distributive par rapport à \bullet si :

$$\forall a, b, c \in E, a \star (b \bullet c) = (a \star b) \bullet (a \star c) \quad \text{et} \quad (b \bullet c) \star a = (b \star a) \bullet (c \star a).$$

Si, on outre, la loi \star est commutative, il suffit de montrer l'un des deux égalités.

Exemple 6.1.4. La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans \mathbb{C} .

4. **Élément neutre** : $e \in E$ est un élément neutre de la loi \star si :

$$\forall a \in E, a \star e = e \star a = a.$$

Si, on outre, la loi \star est commutative, il suffit de montrer que : $\forall a \in E; a \star e = a$ ou bien $e \star a = a$.

Exemple 6.1.5. 1 est un élément neutre de la multiplication dans \mathbb{R} .

Proposition 6.1.1. Si l'élément neutre existe alors il est unique.

5. **Élément symétrique (inverse)** : Soit \star admettant un élément neutre e . Deux éléments a et a' sont symétriques pour la loi \star si : $a \star a' = a' \star a = e$.

Exemple 6.1.6. Le symétrique de a dans \mathbb{Z} muni de l'addition est : $-a$.

Proposition 6.1.2. Si la loi \star est associative, alors si l'élément symétrique existe il est unique.

6. **Élément régulier** : On dit que α est un élément régulier pour la loi \star s'il vérifie :

$$\forall a; b \in E; (a \star \alpha = b \star \alpha) \implies a = b \quad \text{et} \quad \forall a; b \in E; (\alpha \star a = \alpha \star b) \implies a = b.$$

Si, on outre, la loi \star est commutative, il suffit de vérifier l'un des deux implication.

Exemple 6.1.7. Dans \mathbb{C} muni de l'addition, tout élément est régulier.

7. **Partie stable** : Une partie A est dite stable de E pour la loi \star , si pour tout $a; b \in A; a \star b \in A$.

Exemple 6.1.8. L'ensemble des entiers naturels pairs est stable pour l'addition, par contre l'ensemble des entiers impairs n'est pas stable pour l'addition car : $3 + 5 = 8$ qui est pair.

Exemple 6.1.9. Soit F un ensemble et $E = \mathcal{P}(F)$. On considère sur E les lois de composition internes \cap et \cup , alors il est très facile de montrer que :

- ▷ \cap et \cup sont associatives.
- ▷ \cap et \cup sont commutatives.
- ▷ \emptyset est l'élément neutre de \cup .
- ▷ F est l'élément neutre de \cap .

Exemple 6.1.10. Soit $E = \{a, b, \gamma\}$, on définit une l.c.i dans E par :

\star	a	b	γ
a	a	b	γ
b	b	γ	a
γ	γ	a	a

C'est à dire :

$$\begin{cases} a \star a = a, & a \star b = b, & a \star \gamma = \gamma, \\ b \star a = b, & b \star b = \gamma, & b \star \gamma = a, \\ \gamma \star a = \gamma, & \gamma \star b = a, & \gamma \star \gamma = a. \end{cases}$$

On remarque que :

- (i) a est l'élément neutre de \star .
- (ii) Tous les éléments de E sont inversibles avec :
 - ▷ a est l'inverse de a .
 - ▷ γ est l'inverse de b .
 - ▷ b et γ sont des inverses de γ .

Conventions : étant donnée une loi de composition interne associative dans un ensemble E :

- Si la loi est notée $+$, son élément neutre est noté 0_E ou 0 , et on parle du symétrique de a qu'on note $a' = -a$.
- Si la loi est notée multiplicativement, son élément neutre est noté 1_E ou 1 , et on parle de l'inverse de a qu'on note $a' = a^{-1}$.

6.1.2 Structure de groupe

Définition 6.1.4. On appelle groupe, tout ensemble non vide G muni d'un loi de composition interne \star tel que :

- (i) \star est associative.
- (ii) \star possède un élément neutre e .
- (iii) Tout élément de G est symétrisable.

Si de plus \star est commutative, on dit que (G, \star) est un groupe commutatif, ou groupe Abélien¹.

Exemple 6.1.11. $(\mathbb{Z}; +)$ est un groupe commutatif.

1. **ABEL Niels Henrik** : Mathématicien norvégien (île de Finnøy 1802-Arendal 1829). Algébriste, il créa la théorie des fonctions elliptiques. Il est mort de tuberculose.

Exemple 6.1.12. On définit l'opération \star par :

$$\forall x, y \in]-1, 1[, \quad x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Montrer que $(]-1, 1[, \star)$ est un groupe Abélien.

1. \star est une loi de composition interne dans $]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in]-1, 1[: |x| < 1 \wedge |y| < 1 &\iff |x||y| = |xy| < 1 \\ &\iff 0 < 1 + xy < 2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in]-1, 1[: \left| \frac{x + y}{1 + xy} \right| < 1 &\iff \frac{|x + y|}{|1 + xy|} < 1 \\ &\iff |x + y| < |1 + xy| \\ &\iff |x + y| < 1 + xy \quad \text{car } 1 + xy > 0 \\ &\iff -(1 + xy) < x + y < 1 + xy \\ &\iff \begin{cases} x + y - 1 - xy < 0 \\ x + y + 1 + xy > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x(1 - y) + y - 1 < 0 \\ x(1 + y) + y + 1 > 0 \end{cases} \\ &\iff (*) \begin{cases} (x - 1)(1 - y) < 0 \\ (x + 1)(1 + y) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $-1 < x, y < 1$, alors

$$(1 - y > 0) \wedge (x - 1 < 0) \text{ et } (1 + y > 0) \wedge (x + 1 > 0),$$

donc

$$[(1 - y)(x - 1) < 0] \text{ et } [(1 + y)(x + 1) > 0],$$

d'où on déduit que (*) est vraie pour tous $x, y \in]-1, 1[$, et par suite :

$$\forall x, y \in]-1, 1[: |x \star y| = \left| \frac{x + y}{1 + xy} \right| < 1,$$

ce qui montre que \star est une loi de composition interne dans $]-1, 1[$.

2. \star est commutative : d'après la commutativité de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{R} on a :

$$\forall x, y \in]-1, 1[: x \star y = \frac{x + y}{1 + xy} = \frac{y + x}{1 + yx} = y \star x,$$

ce qui montre que \star est commutative.

3. \star est associative : soient $x, y, z \in]-1, 1[$, alors

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= \frac{(x \star y) + z}{1 + (x \star y)z} = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} \\ &= \frac{(x+y) + z(1+xy)}{(1+xy) + (x+y)z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}, \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= \frac{x + (y \star z)}{1 + x(y \star z)} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x\frac{y+z}{1+yz}} \\ &= \frac{x(1+yz) + (y+z)}{(1+yz) + x(y+z)} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}, \end{aligned}$$

en comparant les deux expressions on obtient :

$$\forall x, y, z \in]-1, 1[, \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

d'où on déduit que \star est associative.

4. \star admet un élément neutre : soit $e \in \mathbb{R}$, alors,

$$e \text{ élément neutre de } \star \iff \forall x \in]-1, 1[, \quad e \star x = x \star e = x,$$

comme \star est commutative et

$$\begin{aligned} x \star e = x &\iff \frac{x+e}{1+xe} = x \\ &\iff x+e = x+x^2e \\ &\iff e(1-x^2) = 0 \\ &\iff e = 0 \vee x = \pm 1. \end{aligned}$$

On déduit que $e = 0 \in]-1, 1[$ est l'élément neutre de \star .

5. Tout élément de $] - 1, 1[$ est symétrisable : soient $x \in]-1, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$, alors,

$$\begin{aligned} x \star x' = e &\iff \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \\ &\iff x+x' = 0 \\ &\iff x' = -x, \end{aligned}$$

comme \star est commutative on déduit que tout élément $x \in]-1, 1[$ est symétrisable et son symétrique est $x' = -x \in]-1, 1[$.

De **1.**, **2.**, **3.**, **4.** et **5.** on déduit que $(]-1, 1[, \star)$ est un groupe Abélien.

Exercice : Sur $\mathbb{R} - \{1\}$ on définit la loi \star comme suit : $x \star y = x + y - xy$.

- (i) Vérifier que \star est une loi de composition interne.
- (ii) Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}; \star)$ est un groupe commutatif.
- (iii) Résoudre l'équation : $2 \star 3 \star x \star 5 = 5 \star 3$.

Solution :

- (i) Vérifier que \star est une loi de composition interne : montrons que : $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$,
alors : $x \star y \in \mathbb{R} - \{1\} \iff x + y - xy \neq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Si } x + y - xy = 1 &\implies x + y - xy - 1 = 0 \\ &\implies (1 - x)(y - 1) = 0 \\ &\implies x = 1 \vee y = 1, \quad \text{contradiction.} \end{aligned}$$

Alors \star est une loi de composition interne.

- (ii) Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}; \star)$ est un groupe commutatif :
 - (a) Montrons que \star est commutative, $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\} : x \star y = y \star x$.
Soient $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$,

$$x \star y = x + y - xy = y + x - yx = y \star x.$$

Alors \star est une loi commutative.

- (b) Montrons que \star est associative, $\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\} : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= (x + y - xy) \star z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x \star (y \star z) &= x \star (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz. \end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

Alors \star est une loi associative.

- (c) Montrons que \star admet un élément neutre, $\exists e \in \mathbb{R} - \{1\}, \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, x \star e = e \star x = x$. Puisque \star est commutative alors il suffit de montrer que : $x \star e = x$, en effet,

$$x \star e = x \iff x + e - xe = x \iff e(1 - x) = 0 \iff e = 0 \text{ car } x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

- (d) Montrons que chaque élément $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ admet un élément symétrique noté x^{-1} tel que : $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e = 0$. Puisque \star est commutative alors il suffit de résoudre l'équation :

$$x \star x^{-1} = 0 \iff x + x^{-1} - xx^{-1} = 0 \iff x + x^{-1}(1 - x) = 0 \iff x^{-1} = \frac{x}{x - 1},$$

qui est bien défini car $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Conclusion : $(\mathbb{R} - \{1\}; \star)$ est un groupe commutatif.

(iii) Résoudre l'équation : $2 \star 3 \star x \star 5 = 5 \star 3$, (utilisant la notion de l'élément symétrie) :

$$\begin{aligned} 2 \star 3 \star x \star 5 = 5 \star 3 &\iff x = \frac{3}{2} \star 2 \star 5 \star 3 \star \frac{5}{4} \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

6.1.3 Sous groupes

Définition 6.1.5. Soit (G, \star) un groupe, on appelle sous groupe de (G, \star) tout sous ensemble non vide G' de G tel que la restriction de \star à G' en fait un groupe.

Comme \star est associative dans G alors sa restriction à G' est aussi associative, par suite $G' \neq \emptyset$ est un sous groupe de (G, \star) s'il est stable par rapport à \star et à l'opération inversion, c'est à dire :

- ▷ $G' \neq \emptyset$.
- ▷ $\forall a, b \in G', a \star b \in G'$.
- ▷ $\forall a \in G', a^{-1} \in G'$.

Il est clair que si (G, \star) est un groupe, alors (G', \star) est un sous groupe de G .

Propriétés 6.1.1. Soient (G, \star) un groupe et $G' \subset G$, alors

$$G' \text{ est un sous groupe de } G \iff \begin{cases} G' \neq \emptyset, \\ \forall a, b \in G', a \star b^{-1} \in G'. \end{cases}$$

Preuve :

1. Soit (G', \star) un sous groupe de (G, \star) , alors :
 - (i) \star a un élément neutre dans G' , donc $G' \neq \emptyset$.
 - (ii) Soient $a, b \in G'$, comme G' muni de la restriction de \star est un groupe alors b^{-1} existe dans G' et comme G' est stable par rapport à \star on déduit que $a \star b^{-1} \in G'$.

2. Inversement, soit G' un sous ensemble de G tel que : $\begin{cases} G' \neq \emptyset, \\ \forall a, b \in G', a \star b^{-1} \in G'. \end{cases}$

Montrons que G' muni de la restriction de \star est un groupe.

(i) Comme $G' \neq \emptyset$ alors il existe $a \in G'$ et d'après la deuxième hypothèse :

$$e = a \star a^{-1} \in G',$$

ce qui montre que la restriction de \star admet un élément neutre e dans G' .

(ii) Soit $a \in G'$, comme $e \in G'$ alors d'après la deuxième hypothèse on aura :

$$a^{-1} = e \star a^{-1} \in G',$$

ce qui montre que tout élément a de G' est inversible dans G' par rapport à la restriction de \star à G' .

(iii) La restriction de \star à G' est une loi de composition interne, car pour tous a et b dans G' , d'après (ii) on a : $b^{-1} \in G'$ et en utilisant la deuxième hypothèse on déduit que :

$$a \star b = a \star (b^{-1})^{-1} \in G'.$$

(iv) La restriction de \star à G' est associative, car \star est associative dans G .

Exemple 6.1.13. Soit (G, \star) un groupe et $G' = \{x \in G; \forall y \in G, x \star y = y \star x\}$, alors G' est un sous groupe de G .

En effet,

(i) Si e est l'élément neutre de \star , alors $e \in G'$ car :

$$\forall x \in G, \quad e \star x = x \star e = x.$$

(ii) Soient $x, y \in G'$, alors :

$$\begin{aligned} \forall z \in G, \quad (x \star y^{-1}) \star z &= (x \star y^{-1}) \star (z^{-1})^{-1} \\ &= x \star (y^{-1} \star (z^{-1})^{-1}) \quad \text{car } \star \text{ est associative} \\ &= x \star (z^{-1} \star y)^{-1} \\ &= x \star (y \star z^{-1})^{-1} \quad \text{car } y \in G' \\ &= x \star ((z^{-1})^{-1} \star y^{-1}) \\ &= x \star (z \star y^{-1}) \\ &= (x \star z) \star y^{-1} \quad \text{car } \star \text{ est associative} \\ &= (z \star x) \star y^{-1} \quad \text{car } x \in G' \\ &= z \star (x \star y^{-1}) \quad \text{car } \star \text{ est associative,} \end{aligned}$$

ce qui montre que $x \star y^{-1} \in G'$.

De (i) et (ii) on déduit que G' est un sous groupe de G .

6.1.4 Groupes Quotients

Soient (G, \star) un groupe et G' un sous groupe de G . On définit une relation binaire \mathcal{R} sur G par :

$$\forall a, b \in G, a \mathcal{R} b \iff a \star b^{-1} \in G'$$

Propriétés 6.1.2. \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur G .

Preuve :

(i) \mathcal{R} est réflexive, car : $\forall x \in G$, comme G' est un sous groupe de G , alors $x \star x^{-1} = e \in G'$, donc

$$\forall x \in G, x \mathcal{R} x.$$

(ii) \mathcal{R} est symétrique, car : $\forall x, y \in G$,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff x \star y^{-1} \in G' \\ &\implies (x \star y^{-1})^{-1} \in G' \\ &\implies y \star x^{-1} \in G' \\ &\implies y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

(iii) \mathcal{R} est transitive, car : $\forall x, y, z \in G$,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z &\iff x \star y^{-1} \in G' \wedge y \star z^{-1} \in G' \\ &\implies (x \star y^{-1}) \star (y \star z^{-1}) \in G' \quad \text{car } G' \text{ est un sous groupe} \\ &\implies x \star (y^{-1} \star y) \star z^{-1} \in G' \quad \text{car } \star \text{ est associative} \\ &\implies x \star z^{-1} \in G' \\ &\implies x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

De (i), (ii) et (iii) on déduit que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

On note G/G' l'ensemble quotient G/\mathcal{R} . On définit sur $G/G' \times G/G'$ l'opération \oplus par :

$$\forall (\dot{a}, \dot{b}) \in G/G' \times G/G', \dot{a} \oplus \dot{b} = \overline{a \star b}.$$

6.1.5 Homomorphismes de Groupes

On considère (G, \bullet) et (H, \star) deux groupes, avec e et e' leurs éléments neutres respectifs.

Définition 6.1.6. Une application $f : G \longrightarrow H$ est appelée homomorphisme de groupes de G dans H si :

$$\forall a, b \in G, f(a \bullet b) = f(a) \star f(b).$$

▷ Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme (de groupes) de G sur H . On dit alors que G est isomorphe à H , ou que G et H sont isomorphes.

▷ Si $G = H$, on dit que f est un endomorphisme de G , et si de plus f est bijective, on dit que f est un automorphisme (de groupe) de G .

Exemple 6.1.14. Etant données les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et (\mathbb{R}^*, \cdot) , alors les applications :

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}, +) &\longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot) & \text{et} & \quad g : (\mathbb{R}^*, \cdot) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ x &\longmapsto f(x) = \exp x & & \quad x &\longmapsto g(x) = \ln |x| \end{aligned}$$

sont des homomorphismes.

Définition 6.1.7. Soit $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de groupes. On appelle noyau de f l'ensemble :

$$\ker f = f^{-1}(e') = \{a \in G; f(a) = e'\}.$$

et l'image de f l'ensemble :

$$\text{Im} f = f(G) = \{f(a), a \in G\}.$$

Propriétés 6.1.3. Soit $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme de groupes, alors,

- (i) $f(e) = e'$,
- (ii) $\forall a \in G, f^{-1}(a) = f(a^{-1})$.

6.1.6 Structure d'anneau

Définition 6.1.8. On appelle anneau, tout ensemble A muni de deux lois de composition internes \star et Δ telles que :

1. (A, \star) est un groupe abélien (on notera 0 ou 0_A l'élément neutre de \star),
2. Δ est associative et distributive par rapport à \star .

Si de plus Δ est commutative, on dit que (A, \star, Δ) est un anneau commutatif.

Définition 6.1.9. On appelle sous anneau de (A, \star, Δ) , tout sous ensemble A' de A tel que muni des restrictions des lois \star et Δ est anneau.

Si A est un anneau unitaire et $1_A \in A'$, on dit que A' est sous anneau unitaire.

Exercice : Soit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ l'anneau des nombres réels. On définit deux nouvelles loi \star et Δ sur \mathbb{R} de la manière suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \star y = x + y - 2, \quad x \bullet y = xy - 2x - 2y + 6.$$

1. Montrer que (\mathbb{R}, \star) est un groupe Abélien.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, \star, \bullet)$ est un anneau commutatif.

Solution :

1. Montrons que (\mathbb{R}, \star) est un groupe Abélien :

(a) Montrons que \star est commutative, $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \star y = y \star x$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \star y = x + y - 2 = y + x - 2 = y \star x.$$

Alors \star est une loi commutative.

(b) Montrons que \star est associative, $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R} :$

$$(x \star y) \star z = (x + y - 2) \star z = (x + y - 2) + z - 2 = x + y + z - 4,$$

et

$$x \star (y \star z) = x \star (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 = x + y + z - 4.$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

Alors \star est une loi associative.

(c) Montrons que \star admet un élément neutre, $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \star e = e \star x = x$.

Puisque \star est commutative alors il suffit de montrer que : $x \star e = x$, en effet,

$$x \star e = x \Leftrightarrow x + e - 2 = x \Leftrightarrow e - 2 = 0 \Leftrightarrow e = 2.$$

(d) Montrons que chaque élément $x \in \mathbb{R}$ admet un élément symétrique noté x^{-1} tel que : $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e = 2$. Puisque \star est commutative alors il suffit de résoudre l'équation :

$$x \star x^{-1} = 2 \Leftrightarrow x + x^{-1} - 2 = 2 \Leftrightarrow x + x^{-1} = 4 \Leftrightarrow x^{-1} = 4 - x,$$

qui est bien défini car $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : (\mathbb{R}, \star) est un groupe commutatif.

2. Montrons que $(\mathbb{R}, \star, \bullet)$ est un anneau commutatif :

(a) Montrons que \bullet est commutative, $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \bullet y = y \bullet x$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \bullet y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y \bullet x.$$

Alors \bullet est une loi commutative.

(b) Montrons que \bullet est associative, $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x \bullet y) \bullet z &= (xy - 2x - 2y + 6) \bullet z \\ &= (xy - 2x - 2y + 6)z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2xy - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x \bullet (y \bullet z) &= x \bullet (yz - 2y - 2z + 6) \\ &= x(yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2xy - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6. \end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$.

Alors \bullet est une loi associative.

(c) Montrons que \bullet est distributive par rapport à \star ,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \bullet (y \star z) = (x \bullet y) \star (x \bullet z) \text{ et } (y \star z) \bullet x = (y \bullet x) \star (z \bullet x).$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x \bullet (y \star z) = x \bullet (y + z - 2) = xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10,$$

et

$$\begin{aligned} (x \bullet y) \star (x \bullet z) &= (xy - 2x - 2y + 6) \star (xz - 2x - 2z + 6) \\ &= xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10. \end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $x \bullet (y \star z) = (x \bullet y) \star (x \bullet z)$.

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (y \star z) \bullet x &= (y + z - 2) \bullet x \\ &= (y + z - 2)x - 2(y + z - 2) - 2x + 6 \\ &= xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (y \bullet x) \star (z \bullet x) &= (yx - 2y - 2x + 6) \star (zx - 2z - 2x + 6) \\
 &= (yx - 2y - 2x + 6) + (zx - 2z - 2x + 6) - 2 \\
 &= yx + zx - 4x - 2y - 2z + 10 \\
 &= xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10.
 \end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $(y \star z) \bullet x = (y \bullet x) \star (z \bullet x)$.

Alors, \bullet est distributive par rapport à \star .

Conclusion : $(\mathbb{R}, \star, \bullet)$ est un anneau commutatif.

6.1.7 Corps

Définition 6.1.10. *Un élément $x \in \mathbb{K}$ est inversible par rapport à la loi Δ s'il existe un élément $y \in \mathbb{K}$ telle que :*

$$x \Delta y = y \Delta x = e'; \quad (e' \text{ est l'élément neutre par rapport à } \Delta).$$

Définition 6.1.11. *On dit que $(\mathbb{K}; *, \Delta)$ est un corps si :*

1. $(\mathbb{K}; *, \Delta)$ est un anneau.
2. Tout élément distinct de e (opération $*$) est inversible pour la loi Δ .

Si de plus Δ est commutative, on parle de corps commutatif.

Exemple 6.1.15. $(\mathbb{R}; +; \times)$ est un corps commutatif, mais $(\mathbb{Z}; +; \times)$ n'est pas un corps.

6.2 Espace vectoriel

La structure d'espace vectoriel intervient dans une grande partie des mathématiques : elle réalise un lien fondamental entre l'algèbre et la géométrie. On l'utilisera en algèbre linéaire, en analyse et en géométrie. Dans cette section, \mathbb{K} désignera un corps commutatif, en pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 6.2.1. *On appelle \mathbb{K} -espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe définie par :*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\
 \alpha, x &\longmapsto \alpha \times x.
 \end{aligned}$$

telles que :

- (i) $(E, +)$ est un groupe Abélien,
- (ii) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$
- (iv) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$

(v) $\forall x \in E, 1x = x$.

Remarque 6.2.1.

- On abrègera espace vectoriel en $e.v$ et \mathbb{K} -espace vectoriel en \mathbb{K} - $e.v$.
- Les éléments d'un \mathbb{K} - $e.v$ seront appelés vecteurs, les éléments de \mathbb{K} seront appelés scalaires.

Exemple 6.2.1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, E = \mathbb{C}$, alors $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un \mathbb{R} - $e.v$ car :

- ▷ $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe Abélien.
- ▷ Comme $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif, alors \times est distributive par rapport à l'addition, on déduit que les conditions (ii) et (iii) sont vraie pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- ▷ De même, comme $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps, alors \times est associative. Donc,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{C}, (\alpha \times \beta) \times x = \alpha(\beta \times x),$$

d'où

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{C}, (\alpha \times \beta) \times x = \alpha(\beta \times x), \quad \text{car } \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Enfin, on a : $\forall x \in \mathbb{C}, 1 \times x = x$.

Proposition 6.2.1. (Règles de calcul)

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors ;

- $\forall \vec{x} \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$; ($\vec{0}$ est l'élément neutre de $+$ dans $(E, +)$).
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, \alpha(-\vec{x}) = (-\alpha) \cdot \vec{x} = -(\alpha \cdot \vec{x})$.
- $\alpha x = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{x} = \vec{0}$.

6.2.1 Sous espace vectoriel

Définition 6.2.2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F un sous ensemble de E . On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- (i) $F \neq \emptyset, (\vec{0} \in F)$,
- (ii) $\forall x, y \in F, x + y \in F$,
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha \cdot x \in F$.

Exemple 6.2.2. Soit $E = \mathbb{R}^3, F = \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de E car $\vec{0} = (0, 0, 0) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donc $\vec{0} \in F \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow 0 + 0 = 1$, impossible d'où on déduit que $\vec{0} \notin F$.

Exemple 6.2.3. Soit $E = \mathbb{R}^3, F = \{\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ est un sous espace vectoriel de E . En effet :

- ▷ soit $\vec{0} = (0, 0, 0)$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $x + 2y - z = 0 + 2 \cdot 0 - 0 = 0$, donc $\vec{0} \in F$.
- ▷ soient $\vec{x} = (x, y, z)$ et $\vec{y} = (x', y', z') \in F$, alors, $\vec{x} + \vec{y} = (x + x', y + y', z + z') = (u, v, w)$ et

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \in F \Rightarrow x + 2y - z = 0 \\ \vec{y} \in F \Rightarrow x' + 2y' - z' = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow (x + x') + 2(y + y') - (z + z') = 0 \\ \Rightarrow u + 2v - w = 0 \\ \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in F. \end{array}$$

▷ soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors,

$$\vec{x} \in F \Rightarrow \alpha(x + 2y - z) = 0 \Rightarrow \alpha\vec{x} \in F.$$

D'où, on déduit que F est un sous-espace de \mathbb{R}^3 .

Exercice : Parmi ces ensembles quels sont ceux qui sont des sous-espace vectoriels de $E = \mathbb{R}^3$

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 1\}$;
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 = 0\}$;
3. $F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = -2z\}$;
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2z = 0\}$.

6.2.2 Combinaisons linéaires

Définition 6.2.3. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $B = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\} \subset E$. On appelle combinaisons linéaires de $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, tout vecteur $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_n\vec{x}_n$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Exemple 6.2.4. Dans \mathbb{R}^3 , on a : $(1, 2, 3) = (1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1) = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, alors $\vec{x} = (1, 2, 3)$ est une combinaisons linéaires de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

$\vec{y} = (5, 2, -4) = 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$ est une combinaisons linéaires de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

D'une façon générale $\forall \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$, donc tout élément de \mathbb{R}^3 est combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

6.2.3 Intersection et la réunion de deux sous-espaces

Proposition 6.2.2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et F, F' deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap F'$ est un sous-espace vectoriel de E , en effet ;

(i) Soit $\vec{0} \in E$, comme F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in F'$, d'où, on déduit que $\vec{0} \in F \cap F'$.

(ii) Soient $\vec{x}, \vec{y} \in F \cap F'$, alors $(\vec{x}, \vec{y} \in F)$ et $(\vec{x}, \vec{y} \in F')$. Comme F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $[(\vec{x} + \vec{y}) \in F]$ et $[(\vec{x} + \vec{y}) \in F']$, d'où, on déduit que $(\vec{x} + \vec{y}) \in F \cap F'$.

(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\vec{x} \in F \cap F'$ donc $\vec{x} \in F$ et $\vec{x} \in F'$. Comme F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $\alpha\vec{x} \in F$ et $\alpha\vec{x} \in F'$, d'où, on déduit que $\alpha\vec{x} \in F \cap F'$.

D'après (i), (ii) et (iii), $F \cap F'$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque 6.2.2. La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel.

Par contre exemple : soit $E = \mathbb{R}^2, F = \{(x, y), x = 0\}, F' = \{(x, y), y = 0\}$. On a F et F' sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 mais $F \cup F'$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 car :

$$F \cup F' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \vee y = 0\};$$

$\vec{x} = (1, 0), \vec{y} = (0, 1) \in F \cup F'$ et $\vec{x} + \vec{y} = (1, 1) \notin F \cup F'$. D'où, on déduit que $F \cup F'$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

6.2.4 Somme de sous-espaces. Somme directe :

- ▷ **Somme de sous-espaces** : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors la somme de F et G est définie par :

$$F + G = \{x \in E \text{ tel que } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \text{ avec } \vec{x}_1 \in F \text{ et } \vec{x}_2 \in G\}.$$

- ▷ **Somme directe** : on dit que la somme $F + G$ est directe, ou encore que F et G sont supplémentaires vis-à-vis de E , si la décomposition $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ d'un élément quelconque de E en somme de deux éléments de F et G est unique. On note : $E = F \oplus G$, autrement on a :

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ \wedge \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple 6.2.5. Dans \mathbb{R}^3 les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \{(x, y, z); x = y = z\} \text{ et } G = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$

sont supplémentaires. En effet :

- On a : $\mathbb{R}^3 = F + G$ car :
 - $F \subset \mathbb{R}^3$ et $G \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow F + G \subset \mathbb{R}^3$.
 - $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = (x, y, z) = (z, z, z) + (x - z, y - z, 0) \in F + G \Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset F + G$.
- On $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $E \Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow \{0_E\} \subset F \cap G$.
 - si $\vec{x} \in F \cap G \Rightarrow \vec{x} \in F$ et $\vec{x} \in G \Rightarrow \vec{x} = (x, x, x)$ et $\vec{x} = (x, y, 0) \Rightarrow x = y$ et $x = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, 0, 0) \Rightarrow F \cap G \subset \{0_E\}$.

6.2.5 Famille de vecteurs d'un espace vectoriel

- Familles liées** : une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est liée ou linéairement dépendants s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E$.

Exemple 6.2.6. Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égale à 2 et à coefficients réels), les fonctions f_1, f_2, f_3 définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^2 - 1, \quad f_3(x) = x^2$$

sont liées. En effet : soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \implies \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\alpha_3}{2}$, il y a donc une infinité de solutions $(-\frac{\alpha_3}{2}, -\frac{\alpha_3}{2}, \alpha_3)$ avec α_3 réel arbitraire par exemple : $(1, 1, -2)$.

2. **Familles libres** : une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est libre ou linéairement indépendants si pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Exemple 6.2.7. Dans \mathbb{R}^3 les vecteurs $x_1 = (0, 1, 3)$, $x_2 = (2, 0, -1)$ et $x_3 = (2, 0, 1)$ sont libres car :

$$\begin{aligned} \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 &\implies \begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \\ &\implies \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

3. **Famille génératrice** : une famille de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est dite génératrice de E ou engendre E si tout élément x de E est combinaison linéaire de (x_1, x_2, \dots, x_n) c'est à dire :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Exemple 6.2.8. Dans \mathbb{R}^2 les deux vecteurs $x_1 = (2, 3)$ et $x_2 = (-1, 5)$ est une famille génératrice car : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} (x, y) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 (2, 3) + \alpha_2 (-1, 5) = (2\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_1 + 5\alpha_2) \\ \implies \begin{cases} x = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ y = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases} &\implies \begin{cases} \alpha_1 = \frac{5x+y}{13} \\ \alpha_2 = \frac{-3x+2y}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

donc (α_1, α_2) existe pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

4. **Base** : une famille de vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_n) d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple 6.2.9. $B_0 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ est un base de \mathbb{R}^3 , en effet :

(i) B_0 est libre car : $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \implies (\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0) \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$

(ii) B_0 est génératrice de \mathbb{R}^3 car :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1).$$

5. **Dimension d'un espace vectoriel** : la dimension finie n d'un espace vectoriel E est le nombre maximum de vecteurs que peut renfermer un système libre extrait de E ; et on note $\dim E = n$; par convention on pose : $\dim(\{0_E\}) = 0$. Autrement dit la dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de vecteurs qui forment la base de E . Si le nombre des éléments d'un système libre de E n'est pas majoré, on dit que E est de dimension infinie.

Remarque 6.2.3. Si F est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension n alors :

$$F \subset E \implies \dim F \leq \dim E.$$

Exemple 6.2.10. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

6. **Rang d'un système de vecteurs :** on appelle rang d'un système de p vecteurs (x_1, x_2, \dots, x_p) de E avec $\dim E = n$, la dimension r du sous-espace vectoriel (x_1, x_2, \dots, x_p) . En d'autres termes, r est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter un système libre extrait du système donné.

6.2.6 Sous-espace engendré par un ensemble

Définition 6.2.4. Soit A une partie d'un espace vectoriel E . On définit le sous-espace vectoriel engendré par un ensemble A , le plus petit sous-espace vectoriel contenant l'ensemble A . On le note : $S(A)$.

Exemple 6.2.11. Si A est un sous-espace vectoriel de E alors : $S(A) = A, S(\emptyset) = \{0_E\}$.

Exercice 01 : Dans \mathbb{R}^3 on considère les sous ensembles suivants :

$$E_1 = \{(a + b, b - 3a, a) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3; c \in \mathbb{R}\}$$

avec E_2 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2 .
3. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.
4. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.
5. Déduire si la somme est directe ou non.

Solution :

$$E_1 = \{(a + b, b - 3a, a) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3; c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 :
 - (i) $(0, 0, 0) \in E_1 \implies E_1 \neq \emptyset$.
 - (ii) $\forall x_1, x_2 \in E_1 \implies x_1 + x_2 \in E_1$?
Soient $x_1, x_2 \in E_1 \implies x_1 = (a_1 + b_1, b_1 - 3a_1, a_1)$ et $x_2 = (a_2 + b_2, b_2 - 3a_2, a_2)$
 $\implies x_1 + x_2 = [(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 3(a_1 + a_2), (a_1 + a_2)] \in E_1$.
 - (iii) $\forall x \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha x \in E_1$?
Soient $x \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha x = (a + b, b - 3a, a) \implies \alpha x = (\alpha a + \alpha b, \alpha b - 3\alpha a, \alpha a) \in E_1$.
 Conclusion : E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2 :
 $\triangleright x \in E_1 \implies x = (a+b, b-3a, a) = a(1, -3, 1) + b(1, 1, 0) \implies B_1 = \{(1, -3, 1); (1, 1, 0)\}$
engendre E_1 , mais :

$$\alpha(1, -3, 1) + \beta(1, 1, 0) = (0, 0, 0) \implies \alpha = \beta = 0,$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairement indépendants. Ce qui implique que $B_1 = \{(1, -3, 1); (1, 1, 0)\}$ est une base de E_1 .

▷ $x \in E_2 \implies x = (c, -2c, c) = c(1, -2, 1)$ alors $B_2 = \{(1, -2, 1)\}$ engendre E_2 , mais :

$$\alpha(1, -2, 1) = (0, 0, 0) \implies \alpha = 0.$$

Ce qui implique que $B_2 = \{(1, -2, 1)\}$ est une base de E_2 .

3. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$:

$$\dim E_1 = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 1.$$

4. Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$:

* $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \implies E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.

* Soit $u \in \mathbb{R}^3 \implies u = (x, y, z) = (a + b, b - 3a, a) + (c, -2c, c)$

$$\implies \begin{cases} x = a + b + c \\ y = b - 3a - 2c \\ z = a + c \end{cases} \implies \begin{cases} a = x - y - 3z \\ b = x - z \\ c = -x + y + 4z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies u &= (x, y, z) = (2x - y - 4z, -2x + 3y + 8z, x - y - 3z) \\ &+ (-x + y + 4z, 2x - 2y - 8z, -x + y + 4z) \\ &\in E_1 + E_2. \end{aligned}$$

D'où : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

5. En éduire que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$:

• $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$ donc $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ ou bien on a : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

• $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$ car E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels. De plus si : $u \in E_1 \cap E_2 \implies u = (a + b, b - 3a, a)$ et $u = (c, -2c, c)$

$$\begin{aligned} \implies \begin{cases} a + b = c \\ b - 3a = -2c \\ a = c \end{cases} &\implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \\ \implies \begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\} \end{cases} &\text{ou bien} \begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\} \end{cases} \end{aligned}$$

La somme est directe $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 02 : Soient :

$$E_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = c\}, \quad E_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a + b + c = 0\} \quad \text{et} \quad E_3 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que : $E_i; i = 1, 2, 3$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

2. Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

3. Dans quel cas la somme est directe.

Solution :

$$E_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = c\}, \quad E_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c = 0\} \quad \text{et} \quad E_3 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrons que : $E_i; i = 1, 2, 3$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 : pour E_1 par exemple :

(i) $(0, 0, 0) \in E_1 \implies E_1 \neq \emptyset$.

(ii) $\forall u_1, u_2 \in E_1 \implies u_1 + u_2 \in E_1$?

Soient $u_1, u_2 \in E_1 \implies u_1 = (x_1, y_1, x_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, x_2)$

$$\implies u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2) \in E_1.$$

(iii) $\forall u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha u \in E_1$?

Soient $u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha u = (\alpha a, \alpha b, \alpha a) \implies \alpha u = (\alpha a, \alpha b, \alpha a) \in E_1$.

Alors E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

De même pour les deux dernier cas.

2. Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$:

▷ Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? On a : $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \implies E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Si $u \in \mathbb{R}^3 \implies u = (x, y, z) = (\alpha, \beta, \alpha) + (\tau, \eta, -\tau - \eta)$

$$= (\alpha + \tau, \beta + \eta, \alpha - \tau - \eta) \implies \begin{cases} x = \alpha + \tau \\ y = \beta + \eta \\ z = \alpha - \tau - \eta \end{cases}$$

Il suffit de prendre par exemple : $\beta = 0 \implies \begin{cases} \alpha = \frac{x+y+z}{2} \\ \tau = \frac{x-y-z}{2} \\ \eta = y \end{cases}$. D'où

$$u = (x, y, z) = \left(\frac{x+y+z}{2}, 0, \frac{x+y+z}{2}\right) + \left(\frac{x-y-z}{2}, y, -\frac{x-y-z}{2} - y\right) \in E_1 + E_2.$$

▷ Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$? On a : $E_2 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_3 \subset \mathbb{R}^3 \implies E_2 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$. Si $u \in \mathbb{R}^3 \implies u = (x, y, z) = (x, y, x) + (0, 0, z - x) \in E_2 + E_3$.

▷ Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$? On a : $E_3 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_1 \subset \mathbb{R}^3 \implies E_1 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$. Si $u \in \mathbb{R}^3 \implies u = (x, y, z) = (x, y, -x - y) + (0, 0, x + y + z) \in E_1 + E_3$.

D'où $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

3. Dans quel cas la somme est directe :

(i) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$?

• $(0, 0, 0) \in E_1 \cap E_2$.

• Si $u \in E_1 \cap E_2 \implies \begin{cases} u \in E_1 \\ \text{et} \\ u \in E_2 \end{cases} \implies u = \begin{cases} (a, b, a) \\ (a, b, -a - b) \end{cases} \implies \begin{cases} a = -a - b \\ b = -2a. \end{cases}$

Donc par exemple $(1, -2, 1) \in E_1 \cap E_2 \implies E_1 \cap E_2 \neq \{(0, 0, 0)\}$, ce qui implique que la somme n'est pas directe.

(ii) Il suffit de vérifier si on a $E_2 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\}$?

• $(0, 0, 0) \in E_2 \cap E_3$.

$$\bullet \text{ Si } u \in E_2 \cap E_3 \Rightarrow \begin{cases} u \in E_2 \\ \text{et} \\ u \in E_3 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} (a, b, -a - b) \\ (0, 0, c) \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

$$\Rightarrow u = (0, 0, 0) \Rightarrow E_2 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\},$$

ce qui implique que la somme est pas directe.

(iii) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\}$?

$$\bullet (0, 0, 0) \in E_1 \cap E_3$$

$$\bullet \text{ Si } u \in E_1 \cap E_3 \Rightarrow \begin{cases} u \in E_1 \\ \text{et} \\ u \in E_3 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} (a, b, a) \\ (0, 0, c) \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

$$\Rightarrow u = (0, 0, 0) \Rightarrow E_1 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\},$$

ce qui implique que la somme est pas directe.

6.3 Application linéaire

Définition 6.3.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si et seulement si :

- ▷ $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y),$
- ▷ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\alpha x) = \alpha f(x).$

Ceci est équivalent à dire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

Exemple 6.3.1.

- L'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

est une application linéaire (à vérifier).

- L'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$g(x, y) = |x - y|$$

n'est pas linéaire car $g(X + Y) \neq g(X) + g(Y).$

Remarque 6.3.1.

- * Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F.$
- * Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ est dite **endomorphisme**.
- * Si f est bijective et linéaire de E dans F , elle est dite **isomorphisme**.
- * Si f est un endomorphisme bijectif alors c'est un **automorphisme**.

6.3.1 Noyau d'une application linéaire

Définition 6.3.2. Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Alors pour trouver le noyau de f , on résout l'équation $f(x) = 0_F$. Ainsi,

$$\ker f = \{x \in E, f(x) = 0_F\},$$

qui est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple 6.3.2. l'application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

est une application linéaire. Alors le noyau de f est :

$$\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} u \in \ker f &\iff f(u) = (0, 0) \iff (x - y, y + 2z) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{y}{2} \end{cases} \iff u = y(1, 1, -\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

et donc $\ker f$ est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 1, -\frac{1}{2})$ noté :

$$\ker f = \text{Vect}\{(1, 1, -\frac{1}{2})\}.$$

6.3.2 Image d'une application linéaire

Définition 6.3.3. Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . L'image de f est l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f . Ainsi,

$$\text{Im} f = \{f(u), u \in E\}.$$

De plus si (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E , alors $\text{Im} f = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ c'est à dire le sous-espace engendré par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$.

Exemple 6.3.3. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3, $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(\vec{i}) = -\vec{i} + \vec{k}, \quad f(\vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}, \quad f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}.$$

Alors l'image de f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Im} f &= \text{Vect}\{f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})\} \quad \text{mais } f(\vec{k}) = f(\vec{j}) - f(\vec{i}) \\ &= \text{Vect}\{f(\vec{i}), f(\vec{j})\} \\ &= \{x(-\vec{i} + \vec{k}) + y(\vec{j} + \vec{k}); x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

6.3.3 Rang d'une application linéaire

Définition 6.3.4. Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Le rang d'une application linéaire est la dimension de l'image de cette application. On a :

$$rgf = \dim(\text{Im}f),$$

de plus si E est de dimension finie, on a le théorème du rang :

$$\dim E = rgf + \dim(\ker f).$$

Exemple 6.3.4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}f &= \{f(x, y); x, y \in \mathbb{R}\} = \{(4x - 2y, 6x - 3y); x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x - y)(2, 3); x, y \in \mathbb{R}\} = \alpha(2, 3); x, y \in \mathbb{R} \\ &= \text{Vect}\{(2, 3)\}, \end{aligned}$$

le vecteur $(2, 3)$ est une base de $\text{Im}f$ et par suite $rgf = 1$.

6.3.4 Injectivité d'une application linéaire

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F . Notons que f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2), \text{ ou bien } f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Mais pour les applications linéaires, il suffit de montrer que : $\ker f = \{0_E\}$. En fait on a :

$$f \text{ est injective} \iff \ker f = \{0_E\}.$$

Exemple 6.3.5. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est injective car :

$$\begin{aligned} u &= (x, y) \in \ker f \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\iff (x - y, x + y) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0. \end{aligned}$$

donc $\ker f = \{(0, 0)\}$ et par suite f est injective.

6.3.5 Injectivité d'une application linéaire

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dira que f est un projecteur, si l'on a : $f \circ f = f$ ou bien : $Im f$ et $\ker f$ sont supplémentaires et que : $\forall x \in Im f, f(x) = x$, on dira que f est la projection sur $Im f$ parallèlement à $\ker f$.

Exemple 6.3.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(f \circ f)(u) &= f(f(u)) = f(x, y) = f(4x - 2y, 6x - 3y) \\ &= (4x - 2y, 6x - 3y) = f(u),\end{aligned}$$

et par suite f est un projecteur.

6.3.6 Symétrie

Soit f un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dira que f est une symétrie, si l'on a : $f \circ f = Id_E$ ou bien : $\ker(f - Id_E)$ et $\ker(f + Id_E)$ sont supplémentaires. On dira que f est la symétrie de E par rapport à $\ker(f - Id_E)$ et parallèlement à $\ker(f + Id_E)$.

Exemple 6.3.7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x, y) = (y, x)$. Alors on a :

$$(f \circ f)(u) = f(f(u)) = f(y, x) = (x, y),$$

et par suite f est une symétrie.

Bibliographie

- [1] K. Allab, *Eléments d'Analyse*, OPU, 1986.
- [2] Hitta Amara, *Cours Algèbre et Analyse I. (2008-2009)*.
- [3] J. Dixmier, *Cours de mathématiques du 1^{re} cycle*, Dunod, 2001.
- [4] Marc Hindry, *Cours mathématiques première année (L1)*.
- [5] *Cours et exercices de maths* exo7.emath.fr.
- [6] M. Mechab, *Cours d'algèbre LMD Sciences et Techniques*.