

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE Mustapha Stambouli

Mascara



Faculté des Sciences et de Technologie  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

**THESE DE DOCTORAT 3ème Cycle**

Spécialité : Génie Civil

Option : Matériaux et durabilité

Présentée par

**TALEB Ouahiba**

Intitulé de la thèse

**Contribution à l'étude du comportement en vibration  
des structures non homogènes dans un environnement  
thermique**

Composition du jury :

<b>Président</b>	Mr. Ould Cheikh El Bahri	Pr	U de Mascara
<b>Directeur de thèse</b>	Mme. Bessaim Aicha	MCA	U de Mascara
<b>Co- Directeur de thèse</b>	Mr. Houari Mohammed sid Ahmed	Pr	U de Mascara
<b>Examineur</b>	Mr. BENYOUCEF Samir	Pr	U.D.L SBA
<b>Examineur</b>	Mr. KACI ABDELHAKIM	Pr	U de Saida
<b>Examineur</b>	Mr. YOUZERA Hadj	MCA	U de Mascara
<b>Invité</b>	Mr. TOUNSI Abdelouahed	Pr	U.D.L SBA

**Année universitaire 2019-2020**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# *Dédicace*

C'est avec profonde gratitude et sincères mots que je dédie ce modeste et humble travail de thèse à :

- ❖ A ma très chère mère : affable, honorable, aimable, l'exemple de l'amour maternel, tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse, l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi, puisses-tu trouver le modeste témoignage de mon profond amour et ma gratitude pour tous les sacrifices que tu t'es imposée. Puise Dieu tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et Bonheur.
- ❖ A mon cher père : l'épaule solide, l'œil attentif, compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect, ta passion du travail a été toujours une leçon pour moi. Je te dédie ce modeste travail en témoignage de tous les sacrifices dont tu avais toujours su me combler, que dieu te préserve et te procure santé et longue vie.
- ❖ A mon mari: tes sacrifices, ton soutien moral, ta gentillesse sans égale, ton aide et ton profond attachement m'ont permis de réussir mes études.
- ❖ A mes frères Samir et Nadir : les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement, l'amour et l'affection que je porte pour vous.
- ❖ A mes beaux-parents et mes belles sœurs Nihed et Inssaf : Vous m'avez accueilli les bras ouverts. Je vous dédie ce modeste travail en témoignage de mon grand respect et mon estime envers vous.
- ❖ A mes grands-parents : vous êtes toujours présents pour les bons conseils.
- ❖ A tous les membres de ma famille, veuillez trouver dans cet humble travail l'expression de mon affection.
- ❖ A ma belle-famille ; en témoignage de l'amour et l'affection que je porte pour vous, je vous dédie ce travail.
- ❖ A tous mes enseignants avec mes remerciements.
- ❖ A tous mes amis et mes camarades d'études.
  - ❖ A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

# *Remerciements*

En tout premier lieu, je remercie ALLAH, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens tout d'abord à remercier ma directrice de thèse Madame **Bessaim Aicha**, et mon co-directeur de thèse monsieur **Houari Mohamed Sid Ahmed**, pour la confiance qu'ils m'ont accordé en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour leurs multiples conseils et pour toutes les heures qu'ils ont consacré à diriger cette recherche. J'aimerais également leur dire à quel point j'ai apprécié leur grande disponibilité et leur respect sans faille. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à leurs qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je tiens à adresser mes profonds remerciements à Monsieur **Abdelouahed TOUNSI** pour la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ces années et pour tous ses conseils et remarques constructives. Il peut être assuré de mon sincère respect et de ma profonde gratitude.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **OULD CHIKH EL Bahri**, **BENYOUCEF Samir**, **KACI ABDELHAKIM**, **YOUZERA Hadj** de m'avoir fait l'honneur d'être les examinateurs de cette thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ma profonde gratitude.

Je souhaite exprimer ma gratitude envers l'ensemble de mes collègues du Laboratoire de Matériaux de l'Université de Mascara et laboratoire des Matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés.

A titre plus personnel, Je remercie chaleureusement mon mari Mr **SEKKAL Mohamed**, pour la grande patience, l'encouragement et la confiance qu'il m'a témoignée dont il a fait preuve à la relecture de mon manuscrit. Je tiens à le remercier surtout pour son soutien moral ininterrompu et ses nombreux conseils tout le long de ma thèse.

Je remercie de tout mon cœur ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études.

Merci à tous mes amis pour la motivation que leur amitié m'a apportée.

# Table des matières

Résumé

Abstract

المُلخَص

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des notations

<b>Introduction générale</b> .....	01
<b>Chapitre I: Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés et les théories des plaques</b>	
I.1.Introduction .....	06
I.2.Concept des matériaux FGM .....	06
I.3.Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés:.....	10
I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	12
I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :.....	12
I.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) .....	13
I.4.3. Compaction sèche des Poudres .....	14
I.4.4. Projection plasma .....	14
I.4.5. Frittage et Infiltration .....	14
I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés .....	15
I.6. Application de la technologie du FGM en génie civil :.....	16
I.6.1 Le Béton à gradient de propriétés.....	16
I.6.2 Autres matériaux à gradient de propriétés:.....	17
I.7. Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil :.....	19
I.7.1 Les chaussées rigides .....	19
I.7.2. Les chaussées souples.....	19
I.7.3. Les grands vitrages dans les zones chaudes :.....	19
I.7.4. Les tunnels (functionallygradedconcrete segment in tunnel):.....	19
I.7.5. Les joints dans la charpente métallique:.....	19
I.8.Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM .....	20
I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM .....	21
I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM .....	22
I.8.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM .....	23
I.9.Théorie des plaques en matériaux à gradient de propriétés.....	23
I.9.1. Les modèles analytiques des plaques FGM .....	24

# Table des matières

I.9.1.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) .....	24
I.9.1.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) .....	25
I.9.1.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) .....	27
I.9.2. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé .....	29
I.9.3. Solutions exactes des plaques.....	32
I.10.Conclusion .....	32

## Chapitre II: Aperçu sur la recherche bibliographique des différentes théories

II.1. Introduction .....	36
II.2. théories des plaques monocouches "ELS" .....	36
II.2.1. Modèle CPT .....	36
II.2.2. Modèle FSDT .....	39
II.2.3. Modèles HSDTs .....	41
II.2.3.1. Modèles basés sur une fonction polynomiale.....	41
II.2.3.2. Modèles basés sur une fonction non- polynomiale .....	42
II.3. Conclusion .....	44

## Chapitre III:Le modèle théorique et le développement analytique

III.1. Introduction .....	46
III.2. Formulation théorique.....	46
III.2.1. Configuration géométrique.....	46
III.2.2. Propriétés des matériaux .....	47
III.3. Modèle proposé « Théorie d'ordre élevé hyperbolique à quatre variables ».....	48
III.3.1. Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à quatre variables.....	48
III.4. Cinématique et équations constitutives .....	49
III.4.1. Équations gouvernantes.....	51
III.5. Champ de température.....	53
III.5.1. Température uniforme .....	53
III.5.2. Température linéaire.....	54
III.5.3. Température non linéaire.....	54
III.5.4. Température sinusoidale.....	55
III.6. Solution analytique pour une plaque en FGM simplement appuyée.....	55

# Table des matières

IV.4. Conclusion .....	56
<b>Chapitre IV:Analyse de la vibration libre des plaques FGM ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température en utilisant une théorie hyperbolique de déformation de cisaillement.</b>	
IV.1. Introduction .....	57
IV.2. Résultats du comportement thermique et mécanique des plaques en FGM.....	58
IV.3. Validation des résultats .....	63
IV.3.1. Résultats des plaques .....	63
IV.3.2. Résultats des plaques FGM carrées isotropes.....	64
IV.3.3. Résultats des plaques FGM( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ).....	65
IV.3. Résultats des plaques FGM( $Si_3N_4/SUS304$ ) .....	66
IV.3.5. Résultats des plaques FGM( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) et ( $Si_3N_4/SUS304$ ).....	67
IV.3.6. Comparaison des résultats des plaques FGM( $Si_3N_4/SUS304$ ).....	69
IV.3.7. Résultats numériques de la présente étude .....	70
IV.4. Conclusion .....	74
<b>Chapitre V : Analyse de la vibration en fonction de la température des plaques sandwiches FGM reposant sur la fondation Winkler / Pasternak</b>	
V.1. Introduction .....	77
V.2. Résultats.....	77
V.3 Conclusion.....	84
<b>Conclusion Générale et Perspectives.....</b>	<b>86</b>
<b>Référence bibliographiques</b>	

## Résumé

Dans ce travail, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique est développée pour l'analyse de vibration libre des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées dans un environnement thermique ayant des propriétés matérielles qui dépend de la température. La présente théorie contient seulement quatre inconnues et par conséquent, le nombre d'équations de mouvement est réduit, elle est variationnelle, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Le présent modèle a un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées.

Le principe d'Hamilton est utilisé pour déterminer les équations de mouvement ainsi les solutions analytiques de type Navier pour des plaques simplement appuyées sont comparées avec les solutions existantes afin de vérifier la validité de la théorie développée.

### **Mots-clés:**

Plaques FG; nouvelle théorie des plaques; vibration; modélisation analytique, environnement thermique.

## **Abstract**

In this work, a novel hyperbolic shear deformation theory is developed for free vibration analysis of simply supported functionally graded plates in thermal environment having material properties that depend on temperature. This theory has only four unknowns, which is less than the other shear deformation theories. The theory presented is variationally consistent, without the shear correction factor. The present one has a new displacement field which introduces undetermined integral variables. Equations of motion are obtained by using Hamilton's principles and solved via Navier's procedure. The convergence and the validation of the proposed theoretical model are performed to demonstrate the efficiency of the model.

**Keywords:** FG plates; new plate theory; vibration; analytical modeling, thermal environment.

## ملخص

في هذا العمل، تم تطوير نظرية جديدة تأخذ بعين الاعتبار تشوه القص القطعي لتحليل الاهتزازات الـ للصفائح المتدرجة وظيفياً المدعومة في بيئة حرارية مادية .

هذه النظرية على أربعة مجهيلمما يسمحبتقليد عدد معادلات الحركة. فهي بذلك متغير اللجوء لاستعمال معامل التصحيحالـ العلوية والسفلية للصفيد .

النموذج الجديد يعتم على حقل إزاحة والذي يدخل بدوره متغيرات متكاملة غير محددة.

بتطبيق هاميلتون معادلات الحركة الحلول التحليلية من نوع نافيه للصفائح المدعومة والتي تتم مقارنتها مع الحلول الحالية قصد التحقق من صحة النظرية المقترحة.

الكلمات الرئيسية: صفيحة, FG النظرية الجديدة للصفائح الاهتزازا , بيئة حرارية

# Liste des figures

## Chapitre I

<b>Figure I.1 :</b> Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées.....	08
<b>Figure I.2:</b> Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1991].....	09
<b>Figure I.3</b> La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].....	10
<b>Figure I.4:</b> Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Houari 2011].....	10
<b>Figure I.5:</b> Principe de la méthode coulage en bande.....	14
<b>Figure I.6:</b> Les principaux domaines d'application des FGM.....	16
<b>Figure I.7:</b> Structure d'une paroi à gradient de propriétés, source: ILEKI.....	18
<b>Figure I.8:</b> texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée, En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, source: ILEK.....	18
<b>Figure I.9:</b> Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK.....	19
<b>Figure I.10 :</b> transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, source: ILEK à âmes pleines.....	19
<b>Figure I.11 :</b> Géométrie d'une plaque en FGM .....	21
<b>Figure I.12 :</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.....	22
<b>Figure I.13 :</b> Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.....	23
<b>Figure I.14 :</b> Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.....	24
<b>Figure I.15 :</b> Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques .....	26
<b>Figure I.16 :</b> Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre.....	27
<b>Figure I.17 :</b> Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des Plaques.....	29

## Chapitre III

<b>Figure III.1:</b> La Géométrie d'une plaque à gradient fonctionnel dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.....	47
---	----

## Chapitre IV

<b>Figure IV.1:</b> Variation du module élastique en fonction de $z/h$ d'une plaque FGM dans un champ thermique uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel $p$ .....	59
<b>Figure IV.2:</b> Variation du module élastique en fonction de $z/h$ d'une plaque FG dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel $p$ .....	60
<b>Figure IV.3:</b> Variation du module élastique en fonction de $z/h$ d'une plaque FG dans un champ	60

# *Liste des figures*

thermique non linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel $p$ .....	61
<b>Figure IV.4:</b> Variation du module élastique en fonction de $z/h$ d'une plaque FG dans un champ thermique sinusoïdale pour différentes valeurs de l'indice matériel $p$ .....	61
<b>Figure IV.5:</b> Variation du module élastique en fonction de $z/h$ d'une plaque FG dans des champs thermiques : uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel $p$ .....	61
<b>Figure IV.6:</b> Convergence de maillage « S4R ».....	63
<b>Figure IV.7:</b> les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme d'une plaque FG ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ) simplement appuyée avec ( $a/h = 10$ , $a = 0.2$ , $p = 1$ ).....	72
<b>Figure IV.8:</b> les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire d'une plaque FG ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ) simplement appuyée avec ( $a/h = 10$ , $a = 0.2$ , $p = 1$ ).....	73
<b>Figure IV.9:</b> les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température non linéaire d'une plaque FG ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ) simplement appuyée avec ( $a/h = 10$ , $a = 0.2$ , $p = 1$ ) .....	73
<b>Figure IV.10:</b> les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdale d'une plaque FG ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ) simplement appuyée avec ( $a/h = 10$ , $a = 0.2$ , $p = 1$ ).....	74
<b>Chapitre V</b>	
<b>Figure V.1:</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwich (1-1-1) en fonction du fondation Winkler / Pasternak ( $k = 2$ , $T_b = 400$ K).....	83
<b>Figure V.2:</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwich (2-1-1) en fonction du fondation Winkler / Pasternak ( $k = 2$ , $T_b = 400$ K).....	83

# *Liste des tableaux*

## **Chapitre I**

<b>Tableau I.1:</b> comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	07
<b>Tableau I.2:</b> Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.....	11
<b>Tableau I.3 :</b> Différentes fonctions de cisaillement utilisé dans les théories des plaques isotropes et FGM.....	31

## **Chapitre IV**

<b>Tableau IV.1 :</b> les coefficients des propriétés matérielles qui dépendent de la température pour (ZrO <sub>2</sub> /Ti - 6Al - 4V) et (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> /SUS304).....	58
<b>Tableau IV.2 :</b> Le nombre d'éléments utilisés pour obtenir un maillage optimal pour les plaques rectangulaires isotropes « S4R».....	63
<b>Tableau IV.3 :</b> Les fréquences naturelles $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$ d'une plaque rectangulaire isotrope avec $\nu = 0.3$ , $a/h = 10$ et $b = \sqrt{2} a$ .....	65
<b>Tableau IV.4 :</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM (ZrO <sub>2</sub> /Ti - 6Al - 4V) simplement appuyée dans un environnement thermique.....	66
<b>Tableau IV.5 :</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> /SUS304) simplement appuyée dans un environnement thermique .....	67
<b>Tableau IV.6.</b> les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FGM (ZrO <sub>2</sub> /Ti - 6Al - 4V) simplement appuyée dans un environnement thermique ( $p = 2$ ).....	68
<b>Tableau IV.7 :</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> /SUS304) simplement appuyée dans un environnement thermique ( $p = 2$ ).....	68
<b>Tableau IV.8:</b> les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FGM (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> /SUS304) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel $p$ dans environnement thermique, Mode (1, 1).....	69
<b>Tableau IV.9 :</b> les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM (ZrO <sub>2</sub> /Ti - 6Al - 4V) simplement appuyée dans un environnement thermique, pour différents modes de vibration.....	70
<b>Tableau IV.10 :</b> les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> /SUS304) simplement appuyée dans un environnement thermique, pour différents modes de vibration.....	71

## **Chapitre V**

<b>Tableau V.1 :</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwich	
---	--

# *Liste des tableaux*

FGM( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée sous élévation de température constante.....	79
<b>Tableau V.2 :</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwichFGM( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée sous élévation linéaire de la température .....	80
<b>Tableau V.3:</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwichFGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée sous élévation non- linéaire de la température.....	81
<b>Tableau V.4:</b> Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwichFGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) reposant sur la fondation Winkler / Pasternak .....	82

# Liste des notations

$\{ \}$	Vecteur colonne
$[ ]$	Matrice
$P$	propriété matérielle
$\Delta T(z)$	variation de la température
$V(z)$	Fraction volumique
$h$	L'épaisseur de la plaque
$p$	L'indice de la puissance (la loi de puissance)
$E(z)$	Module de Young en fonction de l'épaisseur
$\rho(z)$	La masse volumique
$E_m$	Module Young (Métal)
$E_c$	Module Young (céramique)
$a$	La largeur de la plaque
$b$	La longueur de la plaque
$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	Les composants des contraintes
$(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	Les composants des déformations
$\varepsilon^0$	Champ des déformations en membrane
$k^b$	Champ des déformations en flexion
$k^s$	Champ des déformations en cisaillement
$\sigma_x^T, \sigma_y^T$	les contraintes thermiques
$i, j$	Nombre naturelle
$\nu$	Coefficient de poisson
$u$	Déplacement suivant x
$v$	Déplacement suivant y
$w$	Déplacement suivant z
$(u_0, v_0, w_0)$	Les déplacements au niveau du plan moyen ( $z=0$ )
$\phi_x, \int \theta(x, y, t) dx$	Rotation de la normale en plan médian par rapport à l'axe y
$\phi_y, \int \theta(x, y, t) dy$	Rotation de la normale en plan médian par rapport à l'axe x
$f(z)$	La fonction de forme (fonction de cisaillement)
$P_c$	modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux céramiques

# Liste des notations

$P_m$	modules de Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique de matériaux métalliques
$U_d$	l'énergie de contrainte due aux contraintes mécaniques
$U_T$	l'énergie de contrainte due aux contraintes thermique
$\int$	Intégrale indéterminée
$g(z)$	La première dérivée de la fonction de forme
$k_1, k_2$	Des coefficients dépendent de la géométrie
$A', B'$	Des coefficients dépendent de la solution utilisée (Navier)
$\delta$	Variation
$U$	L'énergie de déformation
$K$	L'énergie cinétique de la plaque
$V$	la variation du travail externe
$\partial/\partial x$	Dérivée partielle par rapport à x
$\partial/\partial y$	Dérivée partielle par rapport à y
$g'(z)$	La première dérivée de la fonction $g(z)$
$\alpha$	Nombre d'onde selon x
$\beta$	Nombre d'onde selon y
$T_0$	la température ambiante
$T_b$	Température au niveau de la surface inférieure de la plaque
$T_t$	Température au niveau de la surface supérieure de la plaque
$K(z)$	la conductivité thermique
$\alpha(z, T)$	Coefficient de dilatation thermique en fonction de l'épaisseur et la température
$C_{ij}$	Les coefficients de rigidité
$A$	la surface supérieure de la plaque
$(\ddot{\cdot})$	La dérivée seconde par rapport au temps
$N$	Composant de l'effort normal
$M$	Composant de moment fléchissant
$S, Q$	Les efforts d'ordre élevé
$\varepsilon$	Vecteur de déformation

# Liste des notations

$k^b$	Vecteur de courbure
$k^s$	Vecteur de rotation normal
$\gamma^0, \gamma^1$	Vecteur d'orde élevé
$i, j$	Nombre naturelle
$(N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0)$	Sont des charges appliquées dans le plan
$(I_0, I_1, I_2, J_1, J_1^{st}, J_2, K_2, K_2^{st})$	composants de moment d'inertie
$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s)$	composants de rigidité
$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s)$ et $(F_{55}^s, X_{55}^s, A_{55}^s)$	composants de rigidité
$(L, L^a, R, R^a)$	composants de rigidité (qausi-3d)
$d_{ij}, d_{ijl}, d_{ijlm}$	Les opérateurs différentiels
$\sum$	La somme
$m$	Nombre de mode selon x
$n$	Nombre de mode selon y
$(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn})$	Les paramètres arbitraires
$\omega$	Fréquence naturelle
$[a]$	La matrice de rigidité
$[M]$	La matrice de masse
$\varpi$	Fréquence adimensionnelle
$  $	Déterminant
$K_w$	Paramètre de Winkler
$K_p$	Paramètre de Pasternak

# **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

# Introduction générale :

## II.1. Introduction :

Les matériaux fonctionnalisés (FGM) ont été de plus en plus utilisés dans les différents domaines de l'ingénierie, notamment dans les applications à haute température telles que les chargements thermomécaniques, les engins spatiaux, revêtements d'avions et de plasma pour réacteurs de fusion (Li *et al.* 2008; Kar and Panda, 2015a), les avantages considérables offerts par les matériaux à gradient fonctionnel par rapport aux matériaux conventionnels éliminent les problèmes d'interface des matériaux composites conventionnels et la répartition des contraintes est atténuée. En faisant varier graduellement la fraction volumique des matériaux graduelles, leurs propriétés matérielles montrent un changement régulier et continu d'une surface à l'autre, sont ainsi capables de supporter un gradient intense de température élevée tout en préservant l'intégrité structural (Huang and Shen 2004). Les FGM ont d'abord été conçus comme matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion où il existe une température extrêmement élevée et un gradient thermique important (Ebrahimi 2013). Actuellement, les FGM sont explorés dans les applications d'ingénierie mécanique large, y compris, le nucléaire et le génie civil. Par conséquent, l'examen de leurs réponses sous différents types de chargement en utilisant des modèles précis de structures (plaques, poutres et coques) est extrêmement important. Par la suite, les analyses statiques, vibratoires, thermomécaniques et de flambement des structures stratifiées composites et fonctionnelles ont été réalisées par de nombreux chercheurs. (Ebrahimi and Dashti, 2015; Arani *et al.* 2016; Ebrahimi and Habibi, 2016; Mahapatra *et al.* 2016abc; Ebrahimi and Jafari, 2016; Sahoo *et al.* 2016; Kolahchi *et al.* 2017a,b; Sofiyev et Osmancelebioglu, 2017). Diverses théories des plaques ont été réalisées pour prédire et fournir plus précisément leurs réponses. Ces théories des plaques peuvent être divisées en trois groupes à savoir: théorie classique des plaques (CPT), théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) et théorie de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). Le premier groupe représente le classique (plaque mince) également connu sous le nom de la théorie de la plaque de Kirchhoff (Kirchhoff 1850) suppose un modèle de plaque non compressible et qui néglige l'effet de déformation du cisaillement transversal. La théorie de la plaque de déformation par cisaillement du premier ordre (Reissner 1945) surmonte ce problème en prenant en compte cet effet et la littérature associée à celle-ci est décrite dans le second groupe. . Le troisième groupe décrit les théories

raffinées de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, basées soit sur l'approche tridimensionnelle, soit sur l'approche bidimensionnelle avec une variation non linéaire de déplacement axial d'ordre élevé donnant une variation parabolique des déformations transversales à travers l'épaisseur de la plaque (Kant 1993 ). Par conséquent, cette théorie a été de plus en plus utilisée pour prédire le comportement de plaques composites avancées en donnant la possibilité d'augmenter la précision des évaluations numériques pour les plaques modérément épaisses et les plaques très épaisses (Kant et Swaminathan 2001; Wu et al. 2008).

Le but de cette thèse est d'étendre la théorie des plaques perfectionnée et robuste développée par Tounsi et ses collègues (Khetir et al. 2017; Chikh et al. 2017) à la vibration libre des plaques à gradations fonctionnelles en environnement thermique. En utilisant la théorie proposée, les deux analyses de vibration libre des plaques FG dans l'environnement thermique sont étudiées. Trois types de conditions environnementales, à savoir les charges thermiques uniformes, linéaires et non linéaires, sont imposées aux surfaces supérieure et inférieure pour les plaques FG simplement appuyées. Les propriétés du matériau des plaques à gradation fonctionnelle sont supposées dépendre de la température et varient progressivement dans le sens de l'épaisseur par un modèle de loi de puissance. Dans cette étude, les solutions analytiques de vibration sont obtenues pour les plaques à gradation fonctionnelle et la précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Les influences de certains paramètres, notamment l'indice de gradient, la géométrie de la plaque, le nombre de mode et la charge thermique sur les caractéristiques de vibration des plaques FG sont présentées. On peut en conclure que les théories actuelles sont non seulement précises, mais aussi simples à prédire les réponses vibratoires libres des plaques FG dépendantes de la température.

Le plan de la présente thèse est organisé en cinq chapitres répartis comme suit :

Après une introduction générale sur le thème des matériaux à gradient fonctionnel ainsi que la thématique développée dans le cadre de cette thèse ; le premier chapitre dédié à présenter le positionnement du problème. Une représentation générale sur les matériaux à gradient de propriétés « FGM », les différences entre ces matériaux et matériaux composites traditionnels sont ensuite abordées, puis nous définissons l'histoire de leurs développements, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication et leurs domaines d'application. Dans ce chapitre, nous rappelons ensuite les modèles de plaques utilisés pour l'analyse du comportement thermomécanique des structures en « FGM ».

Le deuxième chapitre est une tentative d'identifier et de mettre en évidence les sujets les plus pertinents pour les structures en matériaux à gradient de propriétés (FGM) et d'examiner les publications de revues représentatives qui sont liées à ces sujets, tout en mettant l'accent sur les travaux publiés récemment.

Pour analyser de la vibration libre des plaques FG simplement supportées ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température, une nouvelle théorie de déformation de cisaillement qui inclut des intégrales à variables indéterminées et contient seulement quatre inconnues est présentée dans le troisième chapitre ; à l'aide d'une méthode analytique.

Le quatrième chapitre est consacré à la validation des modèles proposés à travers quelques tests standards connus de la littérature et de présenter des résultats numériques Afin d'étudier l'influence du chargement thermique sur le comportement vibratoire des plaques FG tout en étudiant l'effet de la géométrie de la plaque, l'indice matériel et les composantes des matériaux.

Le cinquième et dernier chapitre est consacré à illustrer l'effet de la température constante, linéaire et non linéaire sur la vibration libre de plaques sandwichs à gradations fonctionnelles reposant sur différents types de fondations élastiques.

Enfin, ce manuscrit se termine par une conclusion générale permettant de mettre l'accent sur les différents résultats originaux de ce travail et des perspectives décrivant des voies d'amélioration à poursuivre.

## **CHAPITRE I**

# **GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS ET LES THÉORIES DES PLAQUES**

# Chapitre I : Généralités Sur Les Matériaux à Gradient De Propriétés et les théories des plaques

## I.1. Introduction :

Le développement des matériaux composites a permis de combiner des propriétés spécifiques de différents matériaux au sein d'une même pièce. L'optimisation de ces propriétés, par association d'un matériau de haute dureté à la surface d'un matériau tenace, par exemple, pose ainsi le problème de l'interface. Ce changement brutal dans la composition engendre localement une forte concentration des contraintes. Pour y remédier à ce problème il faut une transition continue des propriétés et d'adapter un gradient intentionnel de composition et / ou de microstructure dans le matériau afin d'obtenir les fonctions et les propriétés souhaitées, ce qui permet d'atténuer ce changement brutal et d'obtenir des matériaux à gradient de propriétés souhaités (en anglais : *Functionally Graded Material " F.G.M "*). Ces FGM ont un grand potentiel dans diverses applications et domaines tout en utilisant un gradient sur les propriétés chimiques, biochimiques, physiques et mécaniques.

Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) ; sont des matériaux composites obtenus en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur afin d'obtenir un profil bien déterminé. Parmi les avantages des FGM c'est de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles, de réduire les contraintes thermiques et de réaliser un ensemble de fonctions spécifiées avec des propriétés variables, notamment les propriétés chimiques, mécaniques, magnétiques, thermiques et électriques.

## I.2. Concept des matériaux FGM :

Le concept de « matériau à gradient fonctionnel », appliqué de manière générale, fait clairement référence à la réalisation de propriétés innovantes, ce qui n'est pas réalisable avec les matériaux conventionnels homogènes. Parmi les deux caractéristiques essentielles des FGM : La première caractéristique consiste à adapter la composition chimique et la microstructure de manière intentionnelle et artificielle sur la base de la prédiction quantitative du profil de la distribution des propriétés afin d'atteindre la fonction souhaitée et La deuxième caractéristique c'est la disponibilité des procédés de fabrication offrant une bonne reproductibilité. Ces processus doivent avoir la capacité de produire un profil de composition

chimique contrôlée avec précision et doivent pouvoir être fabriqués directement à partir des résultats de calculs effectués par les concepteurs de matériaux.

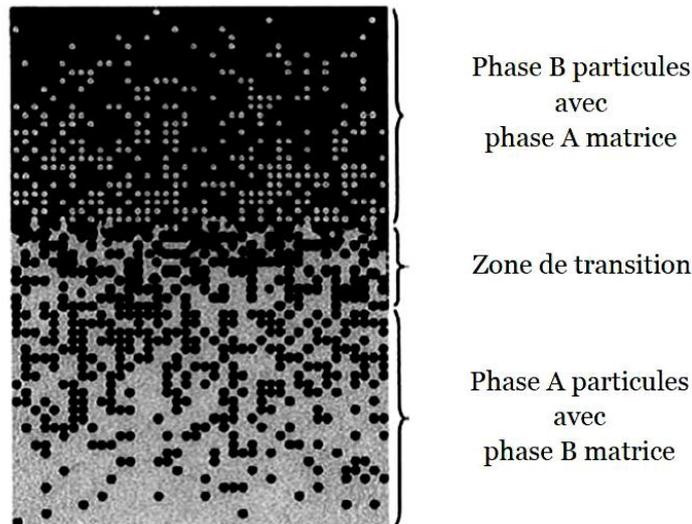
Les FGM sont le résultat d'une association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition parfaitement continue dans la composition, la structure et la distribution des porosités entre ces matériaux.

Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini et al. 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1.

**Tableau I.1:** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.



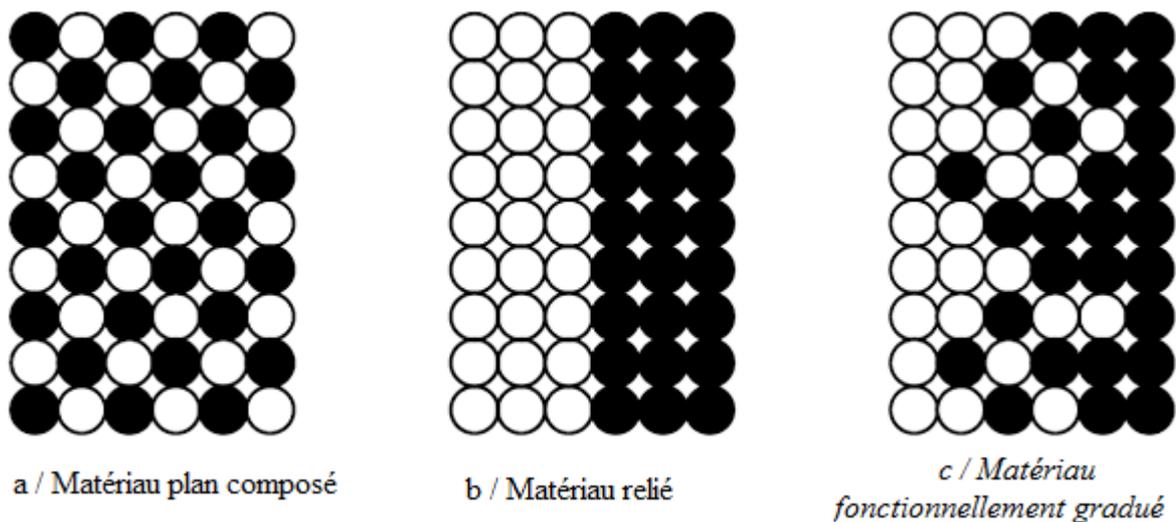
**Figure I.1 :** Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [Yin et al (2004).

Le changement continu dans la composition et dans la microstructure du matériau distingue les F.G.M des matériaux composites conventionnels comme illustré sur la (figure I.2) [Koizumi 1996]. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch et al. 1986]. Le concept FGM peut être appliqué dans divers domaines pour des usages structuraux et fonctionnels. Au Japon, plusieurs programmes ont été conduits au cours des années 80 et 90 afin de développer l'architecture des FGM, et d'étudier également ces matériaux pour les applications de hautes températures (par exemple, éléments pour navettes spatiales hypersoniques) ainsi que pour des applications fonctionnelles (par exemple, convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont conduit au développement de la conception architecturale des FGM et de ces perspectives.

<b>Propriétés</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>1 Résistance mécanique</li> <li>2 Conductivité thermique</li> </ul>		
<b>Structure</b>	<b>Eléments constitutants:</b> Céramique ○ Métal ● Microporosité ○ Fibre ◇		
<b>Matériaux</b>	<b>Exemple</b>	<b>FGM</b>	<b>NON-FGM</b>

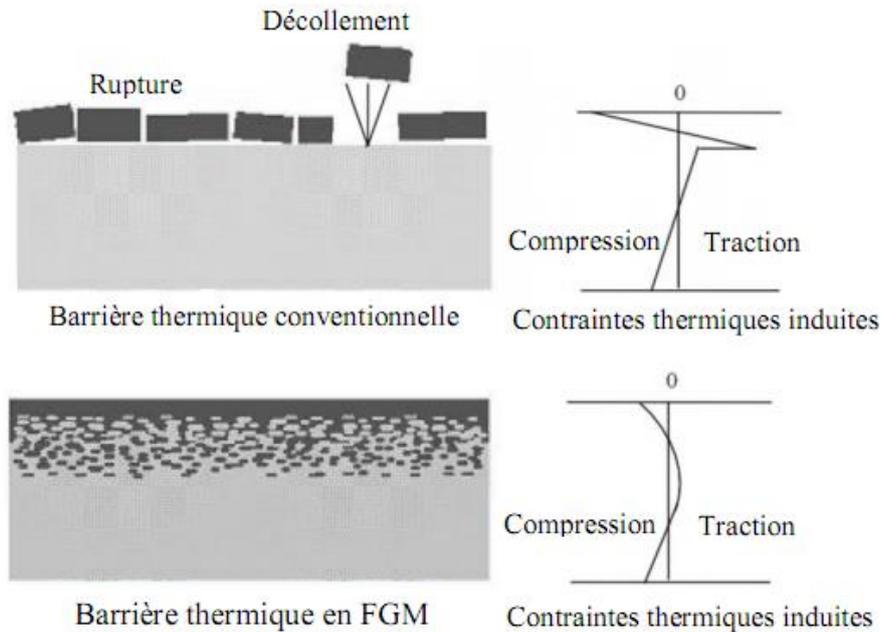
**Figure I.2** Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites conventionnels [Koizumi 1996]

[Yoshihisa 2004] a établi un modèle simple pour illustrer les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux rituels (figure I.3). Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composés et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu' ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, les FGM se composent du métal qui a comme caractéristique : la force métallique et de la céramique comme caractéristique : la conductivité thermique et la résistivité aux hautes températures.



**Figure I.3** La distribution composante des matériaux [Yoshihisa 2004].

La figure I.4 montre les concentrations des contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutal de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.



**Figure I.4:** Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Houari 2011].

### I.3. Histoire du développement des matériaux à gradient de propriétés:

Les matériaux à gradient de propriétés existent dans la nature et dans les différentes configurations. Nous citons à titre d'exemple le bois, le bambou, les os et les dents. Avec le progrès de l'industrie, cette classe de matériaux est élaborée par un groupe de chercheurs japonais à Sendai, Tokyo, notamment Dr Niino et al dans le laboratoire national d'Aerospace à Tokyo en 1984 [Koi1993], le but était de développer des matériaux qui résistent aux hautes températures et sont utilisés comme une barrière thermique dans les structures spatiales et aéronautiques où elles sont placées dans un environnement thermique extrême.

Vers la fin des années 80 et au début des années 90, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet de recherche sur ces matériaux intitulés : « *Fundamental Study on the Relaxation of Thermal Stress for High Temperature Materials by the Tailoring of Graded Structures* » ou bien « *la recherche sur la technologie de base pour le développement de matériaux à Gradient fonctionnel et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques* » avec un budget important, sous la direction de l'agence nationale des sciences et de la technologie. Leur objectif était le développement des matériaux à gradient de propriétés sous différentes architectures et configurations pour résister vis-à-vis des environnements à haute température, telle que les réacteurs de fusion, le lanceur des fusées et les structures aéronautiques. Avant cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de

telles sollicitations thermomécaniques. Trois caractéristiques sont à considérer pour la conception de tels matériaux :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Ensuite et en collaboration avec plusieurs laboratoires de recherches et universités, beaucoup de colloques et de séminaires internationaux ont été organisés dans le but de discuter les avantages, les techniques de la mise en œuvres, l'extension vers d'autres domaines d'applications et la modélisation des matériaux à gradient de propriétés. [Kiy 2001]

Dans le second temps, au début des années 90 ; après une évolution rapide de cette classe des matériaux, de nombreux travaux citent les différentes techniques d'élaboration des FGMs en utilisant des configurations compatibles, les matériaux souvent utilisés sont : les alliages de magnésium, aluminium, cuivre, titane, tungstène, acier, etc..., et les céramiques d'une structure avancée comme : zircon, alumine, silicium-carbure et tungstène-carbure. Le champ d'application de ces matériaux est élargi et tendu vers plusieurs domaines d'industrie notamment le domaine énergétique où plusieurs programmes de recherches ont été lancé sous le nom « Research on energy conversion materials with functionally gradient structure ». [Kiy 2001].

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau I.2 :

**Tableau I.2:** Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon.

<b>Année</b>	<b>Progrès de recherche de FGM</b>
<b>1984</b>	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
<b>1986</b>	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
<b>1987-1989</b>	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique. FGM partie I-phase (1).
<b>1988</b>	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 <sup>er</sup> Colloque sur FGM organisé par FGMF.
<b>1989</b>	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Köln, (Allemagne).

<b>1990</b>	1 <sup>er</sup> Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
<b>1990-1991</b>	FGM partie I-phase (2).
<b>1992</b>	étude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
<b>1993</b>	projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
<b>1994</b>	3 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
<b>1995</b>	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95), (Sendai).
<b>1996</b>	4 <sup>ème</sup> colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

#### **I.4. Méthodes d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés :**

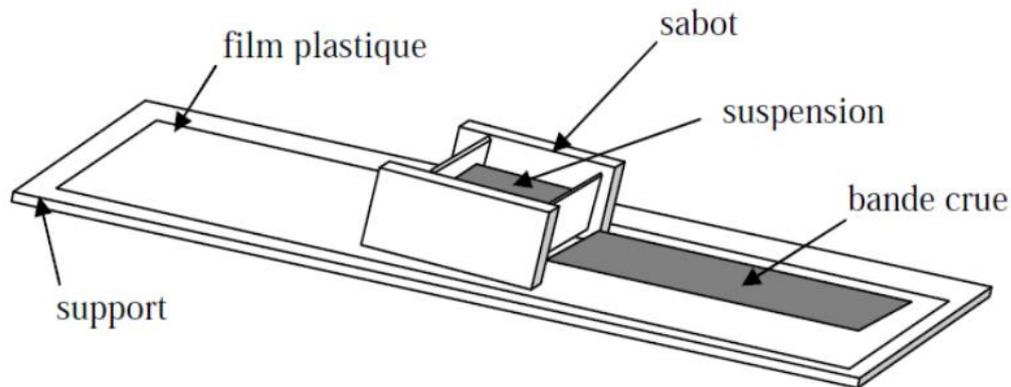
Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

##### ***I.4.1. Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade) :***

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot.

La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support (figure I.5), ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande [Lostec, 1997]. Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées

(25-1000  $\mu\text{m}$ ). Après un raffermisssement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés.



**Figure I.5:** Principe de la méthode coulage en bande [Lostec 1997]

Le procédé de coulage en bande est largement utilisé pour réaliser des matériaux composites laminaires suivant deux méthodes : soit par réalisation directe de bandes multicouches grâce à un système de lames multiples, c'est le cas des tri-couches élaborés par Mistler [Mistler, 1973]; soit par empilage de couches élaborés séparément, dont la cohésion est ensuite assurée par une étape de thermo-compression [Boch, 1986].

#### ***1.4.2. Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting) :***

Le coulage en barbotine (slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage se décompose en deux étapes essentielles:

- formation du tesson ou "prise".
- consolidation du tesson ou "raffermissement".

La filtration, c'est à dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine; Cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet:

- du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique [Moya, 1992]).
- ou d'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.

#### ***1.4.3. Compaction sèche des Poudres :***

Dans cette technique les poudres sont successivement versées dans un moule en acier. Chaque fois qu'une poudre est versée, une faible compression est exercée. Ensuite, la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi, généralement, par une pression isostatique. La densification sera enfin l'étape finale [Bishop, 1993].

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle

#### ***1.4.4. Projection plasma :***

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules de divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [Steffens, 1990].

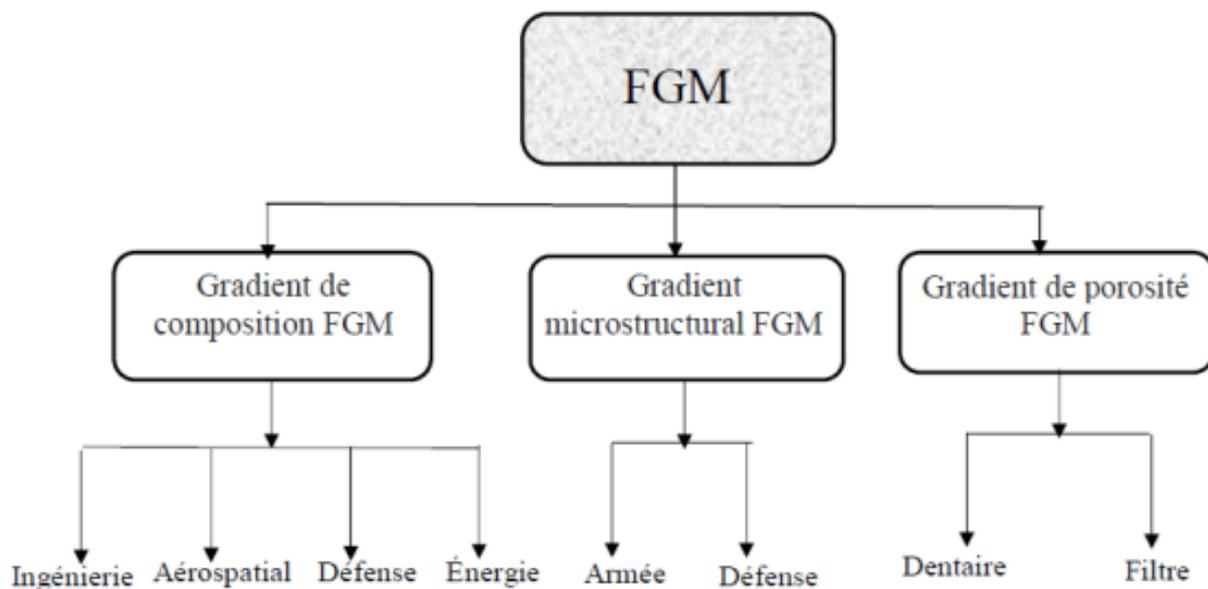
#### ***1.4.5. Frittage et Infiltration :***

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [Takahashi, 1990].

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.

### I.5. Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés :

Les caractéristiques importantes des matériaux fonctionnellement gradués ont en fait une société privilégiée dans presque tous les domaines d'activité humaine. Des matériaux de calibre fonctionnel sont actuellement appliqués dans un certain nombre d'industries, avec un potentiel énorme à utiliser dans d'autres applications à l'avenir. Les applications actuelles et les applications futuristes de la FGM sont présentées dans cette section. Les domaines d'applications actuels comprennent l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense, l'électricité / électronique, l'énergie, la marine, l'optoélectronique et la thermoélectronique.



**Figure I.6 :** Les principaux domaines d'application des FGM.

La figure I.6 présente les différents types de FGM et leurs domaines d'application. Les FGM offrent de grandes promesses dans des applications dans les applications où les conditions de fonctionnement sont difficiles, par exemple pour les revêtements résistants à l'usure destinés à la manutention de grosses particules de minerai abrasives lourdes dans l'industrie minière, pour les boucliers thermiques pour fusées, pour les composants de moteur thermique, pour les tubes d'échangeurs thermiques, pour les faces de plasma pour les réacteurs de fusion dans les centrales nucléaires, les générateurs thermoélectriques et les applications d'isolation électrique.

Les matériaux de calibre fonctionnel sont également idéaux pour réduire le déséquilibre dans les propriétés thermo-mécaniques lors du collage métal-céramique, ce qui aide à prévenir le

déliement. Les demandes futures de matériaux de calibre fonctionnel se trouvent dans de telles applications, où des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques extraordinaires sont requises, et qui doivent pouvoir supporter des environnements de travail difficiles. Ces futurs domaines d'application potentiels incluent des applications pour lesquelles les utilisations structurelles et techniques nécessitent une combinaison de fonctions incompatibles, telles que la dureté et la ténacité. Les futurs domaines d'application des matériaux de calibre fonctionnel vont également se développer, lorsque les coûts de production de ces matériaux d'ingénierie importants seront réduits.

Bien que certaines applications soient davantage intéressées par la fiabilité des FGM que par le coût de tels matériaux, ces industries de niche incluent l'aérospatiale et l'énergie nucléaire. D'autre part, le coût de production de matériaux de calibre fonctionnel est important dans certaines applications telles que les outils de coupe, les pièces de machine et les composants de moteur. L'utilisation de matériaux de qualité fonctionnelle est maintenant considérée comme l'un des matériaux les plus importants, les plus efficaces et les plus efficaces pour promouvoir le développement durable dans les industries.

### **I.6. Application de la technologie du FGM en génie civil :**

Sous les auspices des projets de recherche effectués à l'université de Stuttgart, différentes classes de matériaux de construction (béton, textile, bois, métaux et polymères), des méthodes de production et des domaines d'application (structure porteuse, enveloppe du bâtiment, technique de mélange) ont été étudiés et évalués pour certains éléments du bâtiment basés sur le concept du FGM.

L'objectif de ces projets est d'évaluer les nouvelles possibilités de conception offertes par les matériaux gradués, en les voyant aussi sous l'angle architectural, et d'élaborer des propositions pour leur utilisation dans divers domaines. Ci-dessous, nous passons en revue, quelques études relatives à l'utilisation du concept des matériaux à gradient de propriétés en génie civil.

#### ***I.6.1 Le Béton à gradient de propriétés :***

Werner Sobek a été le premier à formuler le concept des bétons à gradients de propriétés [sobek et al], Les travaux de développement ont lieu à *l'institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren* (ILEK, Institut de la conception et la construction de structures légères) de l'Université allemande de Stuttgart, dans le cadre des projets de recherche « Matériaux à gradient dans le bâtiment et le génie civil » et « planchers préfabriqués à gradient de

propriétés » [Heinz, P. et al. ; 2011]. La fabrication, l'automatisation, l'optimisation et la technologie du béton sont actuellement examinées à l'Université de Stuttgart.

L'optimisation des structures en béton suivant le concept du FGM est actuellement en étude et en développement dans plusieurs projets de recherche. Le but principal est de satisfaire un ajustement continu des propriétés du béton, telles que la densité, la porosité, la conductivité thermique et la résistance, à l'intérieur de l'élément conformément aux spécifications et profils des efforts déterminées pour l'élément (figure I.7).



**Figure I.7:** Structure d'une paroi à gradient de propriétés, source: ILEKI

Il est à noter que l'idée du béton à gradient de propriétés, a permis de réaliser des murs extérieurs moins épais par rapport aux systèmes composites d'isolation thermique comparable, avec une conductivité thermique bien inférieure à celle du polystyrène. Cette invention conduit à l'amélioration de la recyclabilité et la sauvegarde des ressources économiques.

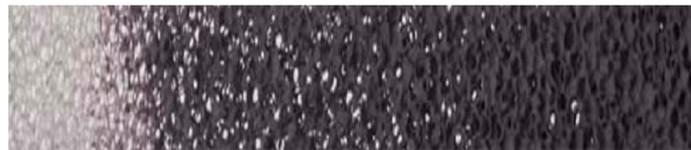
### ***1.6.2 Autres matériaux à gradient de propriétés:***

Les textiles avec des propriétés variables de couches superposées permettent de doter le matériau d'une perméabilité et d'une rigidité graduelle (figure II.8), ce qui peut augmenter l'efficacité des systèmes d'isolations vis-à-vis des effets de la chaleur et de l'humidité. En plus, la variation graduelle des propriétés de rigidité permettent de surmonter le changement brusque entre les composantes rigides et flexibles des éléments, ce qui pourrait complètement servir de base à des nouvelles solutions architecturales à l'avenir.



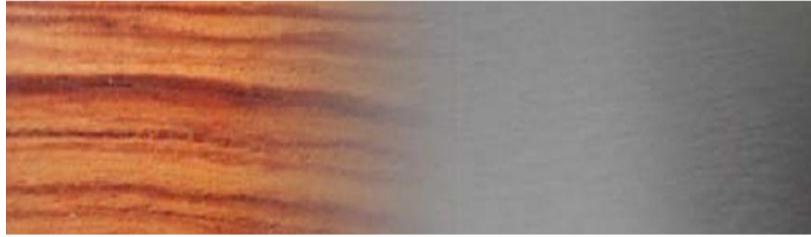
**Figure I.8:** En haut: texture en fibre de verre avec des éléments de silicium à perméabilité graduée, En bas: essai de l'étanchéité à l'eau, source: ILEK

À l'aide d'un processus progressif, il a été possible de produire des éléments de mousse à cellules ouvertes avec des motifs de porosité variable. Ces mousses peuvent ensuite être traitées pour fabriquer des composants avec une variation de distribution de rigidité afin répondre aux exigences de certains cas (Figure I.9).



**Figure I.9:** Infiltration graduelle de mousse de polyuréthane réticulée avec la colle de ciment en vue de la variation de rigidité, source: ILEK

Un autre aspect de cette technologie impliquant des matériaux à gradient de propriétés sert à rassembler des différents matériaux suivant une transition graduelle et continue (figure I.10). Cela représente une nouvelle approche dans la technique d'assemblage avant tout, même si cela signifie que la variation de dilatation thermique ne peut plus être définie de manière précise au niveau local en vue de la transition continue en cause, ou la transmission de charge évitée à certains endroits. Sous les auspices du projet, les investigations préliminaires sont effectuées dans le cadre de la construction des classes pertinentes de matériaux, des domaines potentiels d'application et des méthodes appropriées de production.



**Figure I.10:** transition matérielle continue (bois à l'aluminium), Photomontage, source: ILEK

## **I.7. Utilisation prévisionnelle des matériaux FGM dans le domaine du génie civil :**

### ***I.7.1 Les chaussées rigides (Functionally Graded Concrete Materials for Rigid Pavements):***

Les FGM peuvent être utilisés dans les chaussées rigides en béton avec une gradation obtenue par la variation de la fraction volumique de fibres, cette technique est utilisée dans les autoroutes et les routes à très fort trafic où l'utilisation d'une chaussée souple en béton bitumineux est déconseillée, les dallages industriels, les pistes des aéroports, car elles offrent une résistance et une durabilité élevées, le but est d'optimiser l'épaisseur de la chaussée afin d'avoir un matériaux rigide sur la surface de roulement et un matériau moins rigide sur la couche de fondation.

### ***I.7.2. Les chaussées souples :***

Les FGM peuvent être utilisé dans les chaussées souples pour supprimer les couches d'accrochage entre la couche de la Grave Bitume et la couche de roulement en Béton Bitumineux et éviter le glissement entre les deux couches et économiser les épaisseurs des couches tout en obtenant un comportement optimisé et augmentant la capacité portante de la chaussée et par la suite sa durabilité.

### ***I.7.3. Les grands vitrages dans les zones chaudes :***

Les vitres sont en FGM pour contrôler la température dans les zones chaudes et éviter les vitrages multiples.

### ***I.7.4. Les tunnels (functionally graded concrete segment in tunnel):***

Les parois intérieures des tunnels doivent être réalisées en matériau réfractaire et rigide dans la surface exposée et d'un matériau imperméable dans la surface en contact avec le sol et les roches. L'utilisation des FGM semble être une solution efficace.

### ***I.7.5. Les joints dans la charpente métallique:***

Dans certains cas de la charpente métallique, lors de l'assemblage des éléments, on est obligé de réaliser des soudures entre des éléments de poids et de nuances différentes comme l'acier/l'aluminium. Dans ce cas on utilise des joints ordinaires en acier. L'inconvénient de ce

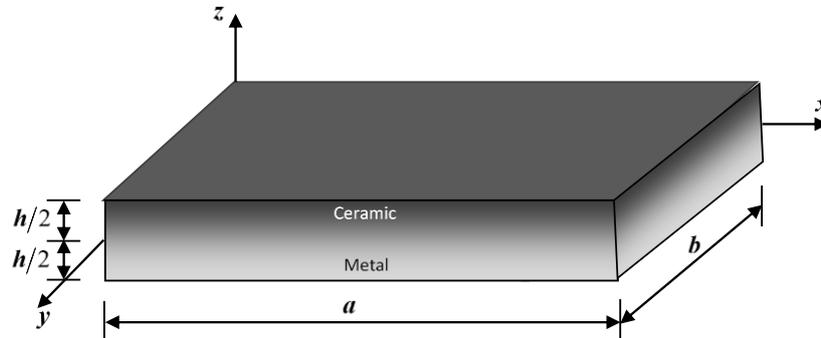
type de joint est qu'il subit une forte accumulation concentration de contraintes, et s'avère plus vulnérable en cas d'action cyclique. L'utilisation des joints en FGM représente une solution optimale.

### I.8. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM :

Les matériaux à gradient de propriétés « FGM » consistent en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non-uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume.

Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.



**Figure I.11:** La Géométrie d'une plaque à gradient fonctionnel dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires

Les coordonnées  $x$  et  $y$  définissent le plan de la plaque, tandis que l'axe  $z$  perpendiculaire à la surface moyenne de la plaque et dans la direction de l'épaisseur.

Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les surfaces supérieure et inférieure sont différentes mais sont déterminées selon les demandes d'exécution.

Toutefois le module de Young et le coefficient de Poisson varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur (l'axe  $z$ ) soit:  $E = E(z), \nu = \nu(z)$ . Le module de Young dans le sens de l'épaisseur de la plaque FGM varie en fonction de la loi de puissance (P-FGM) ou la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

### I.8.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM :

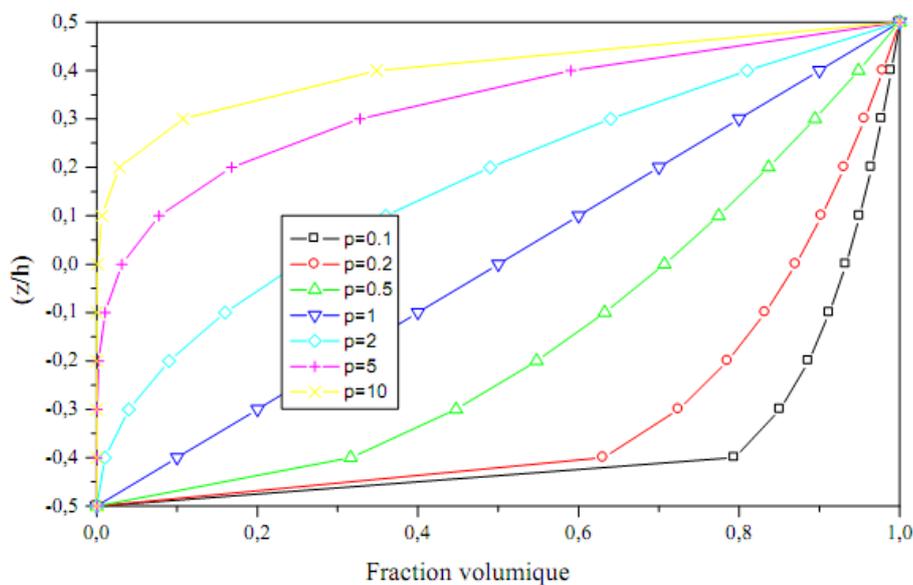
La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (\text{I.1})$$

Où  $p$  est un paramètre matériels et  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Une fois la fraction volumique locale  $V(z)$  à été définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges [Bao, 1995] :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad (\text{I.2})$$

Où  $E_m$  et  $E_c$  sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ( $z = -h/2$ ) et de la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque FGM, la variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la plaque P-FGM est représentée sur la figure I.12, il apparait clairement que la fraction volumique change rapidement près de la surface inférieure pour  $p < 1$ , et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour  $p > 1$ .



**Figure I.12 :** Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM.

### I.8.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajouter une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interface où le matériau est continu mais change rapidement [Bao, 1995]. Par conséquent, Chung et chi [Shyang-ho, 2003] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.3.a})$$

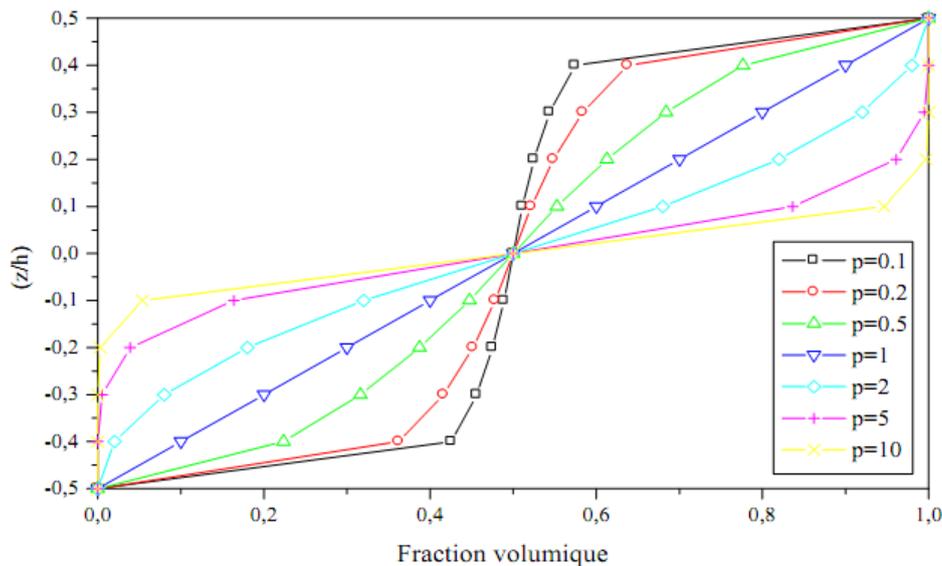
$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.3.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z) E_c + [1 - V_1(z)] E_m \text{ Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.4.a})$$

$$E(z) = V_2(z) E_c + [1 - V_2(z)] E_m \text{ Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.4.b})$$

La figure I.13 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.4.a) et (I.4.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM)



**Figure I.13:** Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM.

### I.8.3. Les propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

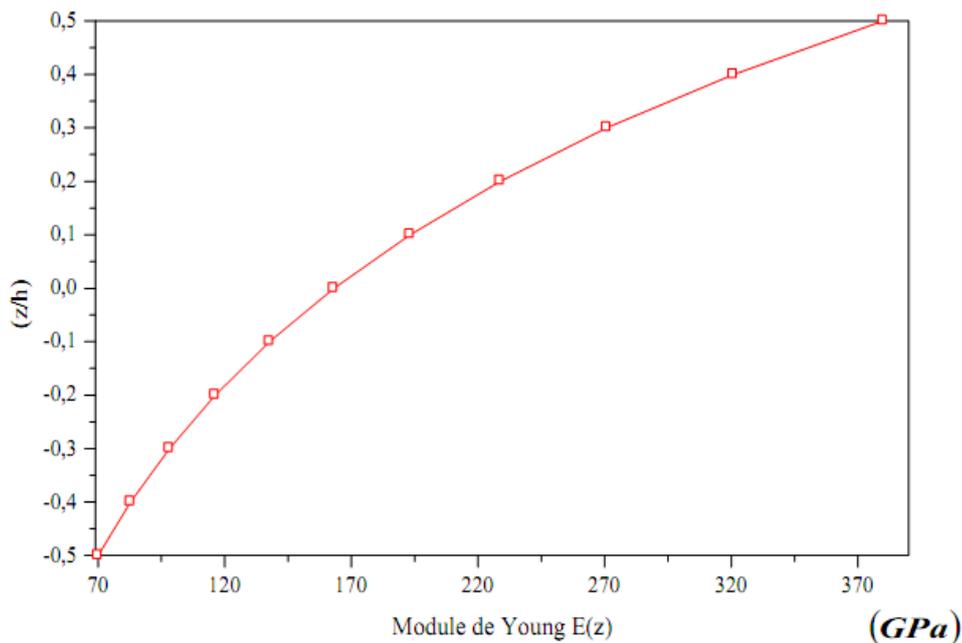
Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme, [Delale, 1983] :

$$E(z) = E_c e^{B(z+h/2)} \quad (I.5.a)$$

Avec

$$B = \frac{1}{h} \ln \left( \frac{E_m}{E_c} \right) \quad (I.5.b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.14.



**Figure I.14 :** Variation du module de Young dans une plaque E-FGM.

### I.9. Théorie des plaques en matériaux à gradient de propriétés

L'utilisation des matériaux composites est devenue de plus en plus fréquente et ce dans plusieurs domaines industriels tels que l'aéronautique, l'automobile, le nucléaire, et le génie civil.

Cette utilisation est due au fait que ces matériaux présentent plusieurs avantages, parmi lesquels on note la haute résistance et la grande rigidité par rapport à leur poids, des

caractéristiques supérieures de fatigue ainsi que la capacité de changer des orientations des fibres pour répondre à des exigences de conception. Puisque ces matériaux se composent de deux matériaux ou plus, ils posent beaucoup de problèmes au niveau des interfaces notamment le délaminage et la propagation des fissures entre les couches. Par conséquent, il est nécessaire d'avoir une bonne compréhension de leurs caractéristiques structurales telles que les déplacements, la distribution des contraintes à travers l'épaisseur, les fréquences naturelles, force de flambement et l'effet des états de frontière et des chargements externes. Du fait de l'importance de l'utilisation des plaques composites dans la conception des structures industrielles, nous avons besoin d'une théorie efficace pour prévoir exactement les caractéristiques structurales de ces plaques. En effet, plusieurs auteurs ont proposé des théories se basant sur des approches analytiques aux problèmes des plaques composites.

### **I.9.1. Les modèles analytiques des plaques FGM :**

#### ***I.9.1.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT) :***

La théorie des plaques minces, ou théorie d'Euler-Bernoulli (Classical plate theory CPT), est un modèle de base utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux. La paternité de la théorie des plaques est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard de Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation variait de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, le coefficient de proportionnalité étant la courbure, mais il ne put pas finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte. Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire.

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par [G.R. Kirchhoff 1850].

- 1) Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- 2) La contrainte normale  $\sigma_z$  est négligeable devant les autres composantes.
- 3) Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan moyen après la déformation.
- 4) L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

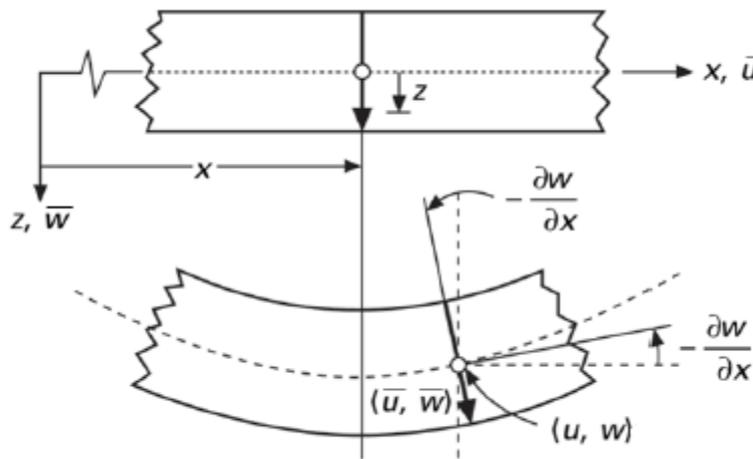
Considérons une plaque FGM de longueur « a » et de largeur « b », avec une épaisseur « h ». Le déplacement de la plaque s'écrit comme suit :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{I.6.a})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{I.6.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{I.6.c})$$

Avec  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ( $z = 0$ ).



**Figure I.15:** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des plaques

### ***1.9.1.2 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) :***

La troisième hypothèse de la théorie d'Euler-Bernoulli veut dire que la déformation due au cisaillement transversal est négligée. Les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation deviennent importants lorsque la plaque est relativement épaisse ou lorsque des solutions précises pour des modes plus élevés de vibration sont désirées. Il y a eu beaucoup de théories de plaques prenant en compte l'effet de cisaillement transversal avec un objectif implicite de minimiser l'erreur le plus possible. [E.Reissner1945] a proposé la théorie de plaque la plus simple en introduisant l'effet de cisaillement transversal par un complémentaire dans l'énergie principale [R.D.Midlin 1951] a présenté un travail différent de [E. Reissner1945], une théorie de premier ordre de plaques où il a expliqué la déformation de cisaillement en même temps qu'un facteur de correction de cisaillement. Dans cette théorie, les deux premières hypothèses de Kirchhoff sont maintenues.

Pour tenir compte de l'effet de cisaillement transversal, la théorie détend l'hypothèse de normalité de sorte que toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée. Cette hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle mène également à la violation statique de la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. En outre, Mindlin a modifié la quatrième hypothèse de sorte que l'effet de l'inertie rotation est incluse.

Dans la théorie du premier ordre des plaques, le champ de déplacement est exprimé sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{I.7.a})$$

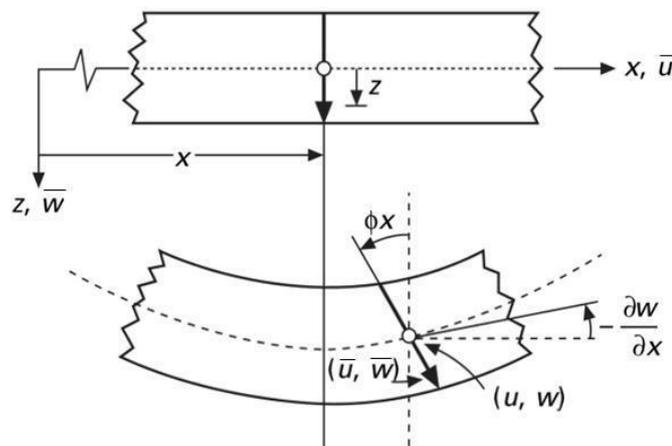
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{I.7.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{I.7.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des plaques décrite dans la dernière section par le remplacement  $\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$  ;

$$\phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}.$$



**Figure I.16:** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques du premier ordre

### 1.9.1.3 La théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs suivant l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée.

La cinématique des théories d'ordre supérieur sont basées sur le développement de série de Taylor, d'une manière générale, elles s'expriment :

$$u(x, z, t) = u(x, t) + z\phi^1(x, t) + z^2\phi^2(x, t) + z^3\phi^3(x, t) + z^4\phi^4(x, t) + \dots$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en troisième ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur  $\phi_i$  détermine la nature de la théorie. Ainsi la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant :  $\phi_i$  pour  $i=2, 3, 4, \dots$

En principe, les modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles de premier ordre. La précision augmente avec l'ordre de développement. C'est-à-dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions aux limites sur bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles classiques. Pour réduire le nombre de paramètre de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées. On impose souvent les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec  $\phi^2 = \phi^4 = 0$

Et pour la facilité d'écriture, Le champ de déplacement d'un point matériel dans la plaque basée sur la théorie d'ordre supérieur :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Psi(z) \phi_x(x, y) \quad (\text{I.8.a})$$

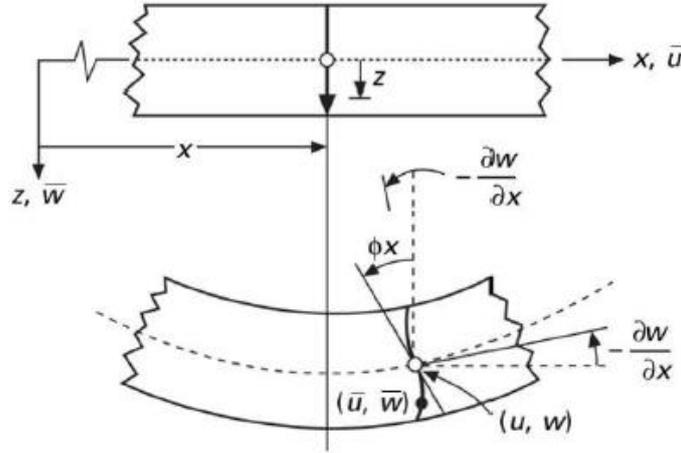
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Psi(z) \phi_y(x, y) \quad (\text{I.8.b})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{I.8.c})$$

Avec :  $(u_0, v_0, w_0)$  et  $(\phi_x, \phi_y)$  sont les déplacements en membrane et les rotations

autour des axes  $x$  et  $y$ , respectivement,  $\Psi(z)$  est une fonction de cisaillement transverse

caractérisant les théories correspondantes. En effet, les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) est obtenu en prenant  $\Psi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDT) peut être obtenue par  $\Psi(z) = z$ .



**Figure I.17:** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie d'ordre supérieur des Plaques.

Les déplacements de théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy (TSDT) [Reddy 1997], [Reddy 1999] sont obtenus par :

$$\Psi(z) = z \left( 1 - \frac{4}{3h^2} z^2 \right) \quad (\text{I.9})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

[Touratier 1991] propose le modèle sinus (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme ci-dessous :

$$\Psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) \quad (\text{I.10})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The exponential shear deformation plate theory ESDPT) développée par Karama et al.

[Pindera, 1994] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = ze^{-2(z/h)^2} \text{ Et } \varphi_z = 0 \quad (\text{I.11})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par [Ait Atmane 2010] est obtenue en prenant :

$$\Psi(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2)-1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh\left(\frac{\pi}{h} z\right)}{[\cosh(\pi/2)-1]} \text{ et } \varphi_z = 0 \quad (\text{I.12})$$

### I.9.2. Revue sur les différents modèles de la théorie d'ordre élevé :

Pour franchir les limites des théories du premier ordre, plusieurs auteurs ont proposé quelques contributions importantes pour le développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature par l'expression de la fonction de cisaillement  $f(z)$ . Les modèles sont basés sur une distribution non linéaire des champs de déplacement à travers l'épaisseur, et qui permettent de représenter le gauchissement de la section transversale dans la configuration déformée (Figure II.3) [Whitney 1973] ; [Nelson et al 1974] ; [Lo et al 1977]; [Touratier 1991]. Nous citons en particulier :

- L'approche d'Ambartsumyan [Ambartsumyan 1969] avec ;

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{I.13})$$

- L'approche de Reissner [Reissner 1945] avec ;

$$f(z) = \frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{I.14})$$

- L'approche de Levinson, Murthy [Murthy 1981] et Reddy Avec ;

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{I.15})$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $w$ , est constant [Reddy 1984]. Ce modèle donne une bonne

approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle dans le cas homogène.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur (elle doit être parabolique par couche pour un multicouche). Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites. Les résultats du modèle de Reddy sont également très proches des deux modèles d'ordre élevé proposés par [Kant et al 2002].

Touratier propose le modèle (sinus) qui est différent des autres modèles d'ordre élevés puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur [Touratier 1991]. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite:

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) = \frac{h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi z}{h}\right)^{(2n+1)}$$

$$= z \left( 1 - \frac{\pi^2}{3!} \frac{z^2}{h^2} + \frac{\pi^4}{5!} \frac{z^4}{h^4} - \frac{\pi^6}{7!} \frac{z^6}{h^6} + \dots \right) \quad (\text{I.16})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme cosinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de [Reddy 1984]. En se basant sur les travaux de Touratier, un élément fini triangulaire à six nœuds, est construit pour les structures multicouches non linéaires géométriques par [Polit et al 1997] et [Dau et al 2006].

Récemment, [Afaq 2003] proposent un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche. La fonction de distribution de cisaillement transverse est de la forme Suivante:

$$f(z) = z e^{-2(z/h)^2} \quad (\text{I.17})$$

Le choix de la fonction exponentielle permet un développement en puissance pair et impair de la variable  $z$ , alors que la fonction (sinus) de [Touratier 1991] ne permet qu'un développement en puissance impair.

Malgré le fait que les modèles d'ordre élevé assurent une continuité de déplacement et de déformation à l'interface, les contraintes de cisaillement Inter-laminaire et les contraintes d'interface, restent discontinues. Ceci présente un inconvénient lors de l'analyse locale de l'interface des structures multicouches dont les propriétés des couches sont très différentes. Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

**Tableau I.3 : Différentes fonctions de cisaillements utilisés dans les théories des plaques isotropes et FGM**

<b>Théorie</b>	<b>intitulé</b>	<b>Fonction de cisaillement</b> $f(z)$	<b>Distribution de <math>\gamma_{xz}</math> et <math>\gamma_{yz}</math> suivant z</b>	<b>Coefficient de correction de cisaillement</b>	<b>Domaine de validité</b>
<b>CPT.Kirchoff [Kirchoff 1850a] et [Kirchoff 1850b]</b>	Théorie classique des plaques	0	..... .	.....	Plaques minces
<b>FSDT Midlin [Midlin 1951]</b>	Théorie de déformation des plques du 1er ordre	$z$	constante	Requis	Plaques moyennement épaisses
<b>Ambartsumian [Ambartsumian, 1958]</b>	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratiques	Non Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
<b>Reissner [Reissner, 1975]</b>	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5}{4} z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>TSDPT, Touratier [Touratier, 1991]</b>	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>ESDPT Karama et al. [Karama et al 2003]</b>	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z e^{-2(z/h)^2}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>PSDPT Reddy [Reddy 1984]</b>	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>Aydogdu [Aydogd 2003]</b>	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>Elmeiche, Tounsi et al [Elmeiche et al 2011]</b>	Théorie raffinée des plaques	$\frac{(h/\pi) \sin(hz/\pi)}{\cosh(\pi/2) - 1}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>Aite atmane et al [Aite atmane et al 2010]</b>	Théorie raffinée des plaques	$f(z) = \frac{\cosh(\pi/2)}{[\cosh(\pi/2) - 1]} z - \frac{(h/\pi) \sinh(\pi z/h)}{[\cosh(\pi/2) - 1]}$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses
<b>Shimpi [Shimpi 2002]</b>	Théorie raffinée des plaques	$h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Paraboliques	Non Requis	Plaques minces et épaisses

### **I.9.3. Solutions exactes des plaques:**

Même si ces solutions ne satisfont pas la définition des modèles de plaque présentée ci-dessus (puisqu'elles n'admettent aucune approximation sur la description des variables au travers de l'épaisseur de la plaque), il convient de les mentionner puisqu'elles sont souvent utilisées avec les modèles de plaques à titre de comparaison. Par ailleurs, les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels". Même si ces solutions ne satisfont pas la définition des modèles de plaque présentée ci-dessus (puisqu'elles n'admettent aucune approximation sur la description des variables au travers de l'épaisseur de la plaque), il convient de les mentionner puisqu'elles sont souvent utilisées avec les modèles de plaques à titre de comparaison. Par ailleurs, les solutions exactes utilisées pour des plaques en flexion ne reflètent que très rarement les "cas réels".

Les premières solutions exactes furent données pour des plaques en flexion cylindrique composées de matériaux isotropes. Ainsi en 1877 [Lévy 1877] donne une solution exacte pour les plaques isotropes rectangulaires en flexion cylindrique. Pour les cas limités aux plaques multicouches rectangulaires simplement appuyées dont les axes d'orthotropie sont confondus avec le repère de la plaque, [Pagano 1969,1970] présente une solution pour le cas statique [Srinivas et al. 1970]. Ces solutions font partie des solutions les plus connues et les plus employées encore à ce jour dans la littérature. Par la suite une autre méthode permettant de simuler la flexion des plaques orthotropes avec un empilement de couches symétriques a été présentée par [Reddy et al. 1991] pour le cas statique [Noor et al. 1992] pour le cas dynamique. Pour ces modèles basés sur les équations d'équilibre de la mécanique, aucune approximation n'est effectuée pour l'estimation de la distribution des contraintes et des déformations.

### **II.10. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'application et les lois régissant la variation des propriétés matérielles des plaques FGM.

La variation spatiale et progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application à savoir les structures spéciales et de génie civil.

On a étalé aussi les différents modèles sur les théories des plaques développées dans la littérature pour améliorer l'évolution de la variation du champ des déplacements à travers l'épaisseur des plaques.

Parmi les modèles analytiques des plaques FGM on présentera : La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT), celle de la déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) ; la déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) d'une part.

## **CHAPITRE II**

# **REVUE DES RECHERCHES SUR LES STRUCTURES EN MATÉRIAUX À GRADIENT DE PROPRIÉTÉS**

# Chapitre II : Revue des Recherches sur les structures en matériaux à gradient de Propriétés

## II.1. Introduction :

Les matériaux composites multicouches sont largement utilisés dans l'aérospatiale, la mécanique, le génie civil, le nucléaire et l'automobile en raison de leurs fonctionnalités exceptionnelles telles qu'un ratio élevé de la rigidité, de la résistance de la masse et le faible coût de maintenance. Les matériaux composites stratifiés classiques présentent une disparité des propriétés mécaniques d'une interface à l'autre en raison de l'agrégation de deux matériaux distincts. En conséquence, la concentration des contraintes se produit habituellement à l'interface, ce qui conduit à un dommage sous la forme d'une délamination). Pour cette raison Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) ont été proposés afin de surmonter ces problèmes. Le FGM est le matériau composite avancé qui est constitué de deux ou plusieurs phases constituantes avec une variation continue des propriétés du matériau d'une surface à une autre, d'où l'élimination de la concentration des contraintes.

De même on essayera de fournir une documentation sur les théories existantes concernant la modélisation et l'analyse des plaques FGM tout en mettant l'accent sur les modèles ESL comme les théories CPT, HSDTs, TSDT, FSDT, les théories simplifiées et les théories mixtes. En outre, un examen détaillé de la documentation se rapportant à l'élaboration de solutions d'élasticité en 3D et une formulation unifiée est également signalée.

## II.2. théories sur les plaques monocouches ‘ESL’ :

### II.2.1. Modèle CPT :

La théorie classique des plaques CPT est fondée sur l'hypothèse de Love-Kirchhoff qui stipule que les lignes droites restent droites et perpendiculaires au panier intermédiaire après déformation. Ces hypothèses impliquent la disparition du cisaillement et négligent les effets de déformation par cisaillement. La CPT est le modèle le plus simple des théories ESL et il ne convient qu'aux plaques FGM minces où les effets du cisaillement et de la déformation normale sont négligeables.

[Feldman et al. 1997] ont étudié le flambement élastique des plaques FGM sous chargement en compression uni-axiale en utilisant une combinaison d'approches structurelles et micromécaniques. Les équations dérivées de la CPT ont été analytiquement résolues pour la charge de flambement des plaques FGM avec différentes conditions aux limites. [Javaheri et al. 2002a, 2002b] ont employé la CPT pour vérifier le flambement des plaques FGM et leur comportement dans le cadre des quatre types de charges thermiques [Javaheri et al. 2002a] et charges de compression [Javaheri et al. 2002b]. Basés sur le CPT, [Kiani et al. 2011] ont présenté des solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous trois différents types de charges thermiques. Cependant, la charge de flambement a été calculée en utilisant la méthode des éléments finis au lieu des solutions de Navier dans leurs travaux [Javaheri et al. 2002a].

La charge-déformation non linéaire et les réponses de l'après flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique dans le plan et les charges transversales ont été étudiées par [Yanga et al. 2003] en utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman. [Ghannadpour et al. 2009] ont également utilisé la CPT avec les hypothèses de Von-Karman pour étudier les réponses non linéaires de pression transversale des plaques FGM. Toutefois, ils ont utilisé le principe du minimum d'énergie potentielle pour obtenir les solutions analytiques des plaques avec appui simple.

[Woo et al. 2006] ont étudié la vibration non linéaire de plaques FGM dans un environnement thermique. Les équations non linéaires dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman étaient résolues pour les plaques FGM avec des conditions limites arbitraires à l'aide d'une série de méthodes. [Hu et al. 2011] ont également adopté la CPT avec les hypothèses de Von Karman pour effectuer des analyses de stabilité et de vibrations des plaques FGM sous excitation dans le plan. La vibration libre des plaques FGM avec différentes conditions aux limites reposant sur une fondation élastique a été étudiée par [Chakraverty et al. 2014] à l'aide de la CPT et de la méthode de Rayleigh-Ritz.

Les vibrations non linéaires forcées des coques doublement courbées peu profondes ont été étudiées par [Alijani et al. 2011] à l'aide de la CPT avec les hypothèses de Von Karman et la discrétisation de Galerkin multimodal. [Du et al. 2014] ont étudié la vibration non linéaire de coques cylindriques FGM sous excitation basée sur la CPT avec les hypothèses de Von Karman en combinaison avec une méthode multi - échelle. [Du et al. 2013] ont étudié la

vibration non linéaire et sa réponse pour les coques tubulaires en FGM dans les environnements thermiques qui suit une approche similaire. [Ebrahimi et al. 2014] ont étudié la vibration libre des coques cylindriques en utilisant la CPT en conjonction avec la quadrature de différentielle généralisée et les méthodes en quadrature intégrale généralisée.

Les deux pré-flambement non linéaires de déformation et imperfections géométriques initiaux ont été inclus dans l'analyse post flambement à l'aide d'une théorie des couches limites du flambement. Le chemin d'équilibre post flambement et la charge de flambement ou de la température ont été déterminés en utilisant une technique de perturbation singulière. [Woo et al. 2003] ont enquêté sur le comportement post flambement des plaques FGM et des coques cylindriques peu profondes sous charges mécaniques et thermiques utilisant la CPT et les hypothèses de Von Karman. Des solutions analytiques ont été obtenues à l'aide d'une de série des solutions mixtes.

[Woo et al. 2001] ont étudié la flexion non linéaire de plaques FGM minces sous charges transversales et chargement thermique. Les équations dérivées de la CPT avec les hypothèses de Von Karman étaient analytiquement résolues pour la flexion, et le moment de flexion d'une plaque FGM simplement appuyée en utilisant la méthode des séries de Fourier. [Nguyen et al. 2013a], [Nguyen et al. 2014a] et [Nguyen et al. 2014b] à l'aide de la CPT et la technique de raidisseur enduite de Lekhnitsky. [Nguyen et al. 2012], [Nguyen et al. 2013b] ont effectué l'analyse dynamique non linéaire de l'imperfection des plaques minces en FGM doublement courbées reposant sur une fondation élastique soumises aux charges mécaniques et thermiques utilisant la CPT avec les hypothèses de Von Karman.

Il est intéressant de noter que le couplage étirement- flexion existe en plaques FGM ceci est du à la variation des propriétés du matériau à travers l'épaisseur. Par conséquent, la surface neutre de la plaque FGM ne coïncide pas avec son milieu. Ce couplage pourrait être éliminé si les équations ont été calculées en se fondant sur la surface neutre. Ces observations ont été confirmées par [Zhang et al. 2015] En reformulant la CPT pour plaques FGM basée sur la surface neutre et par conséquent, obtenir les équations du mouvement sous forme de plaques isotropes. La surface neutre basée sur la CPT a été adoptée par [Bodaghi et al. 2011] Pour étudier le flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous compression non uniforme.

Depuis le couplage de flexion et d'étirement une plaque FGM soumise à des charges en compression dans le plan produit des déflexions transversales et des moments de flexion ,par conséquent, le flambement de type bifurcation ne se produira pas. Les conditions pour le flambement de type bifurcation prévues par l'action des charges de compression dans le plan ont été examinées par [Aydogdu 2008]. Il est observé que le flambement de type bifurcation survient lorsque la plaque est complètement serrée. Pour une plaque à bords mobiles, là, le flambement de type bifurcation survient lorsque les charges dans le plan sont appliquées à la surface neutre [Aydogdu 2008].

### **II.2.2. Modèle FSDT :**

La théorie sur la déformation par cisaillement du premier ordre FSDT a été développée par [Mindlin 1951] l'effet de déformation par cisaillement se produit par l'intermédiaire d'une variation linéaire du déplacement dans le plan à travers l'épaisseur. Il est à noter que la théorie développée par [Reissner 1945], [Reissner 1947] présente elle aussi l'effet de déformation par cisaillement. Toutefois, les deux théories ne sont pas similaires (Reissner avec la théorie de Mindlin). La différence majeure entre les deux théories a été établie par [Wang et al. 2001] En dérivant les relations de la flexion entre Mindlin et Reissner pour les problèmes généraux des plaques. Depuis la théorie de Reissner est fondée sur l'hypothèse d'une distribution des contraintes de déformation linéaire et une distribution des contraintes de cisaillement parabolique, sa formulation conduira inévitablement à la variation cylindrique et n'étant pas nécessairement linéaire à travers l'épaisseur de la plaque [Wang et al. 2001]. On outre , il serait erroné de se référer à la théorie de Reissner FSDT qui implique une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur. Une autre différence entre les deux théories est que la contrainte normale qui a été incluse dans la théorie Reissner a été omise dans la théorie de [Mindlin 1975].

[Chen 2005] a étudié la vibration non linéaire des plaques FGM soumises à une action combinée des résistances en compression dans le plan initial et de flexion à l'aide de l'FSDT avec les hypothèses de Von Karman. La fréquence non linéaire des plaques avec appui simple a été obtenue à l'aide de la méthode Galerkin en combinaison avec la procédure itérative de Runge-Kutta. La vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique a été étudiée par [Fallah et al. 2013] à l'aide de la FSDT et une approche semi-analytique qui est fondée sur une combinaison d'une série de puissances infinies et la méthode Kantorovich.

[Lanhe 2014] et [Bouazza et al. 2010] ont dérivé des solutions analytiques pour les températures de flambement des plaques FGM simplement appuyées sous deux types de charges thermiques utilisant la FSDT et la solution de Navier. [Yaghoobi et al. 2013a] ont étudié le flambement des plaques sandwich en FGM reposant sur une fondation élastique sous charges thermiques et mécaniques. La FSDT et la méthode des séries de puissances Frobenius ont été adoptées pour calculer la charge critique de flambement des plaques FGM sous différentes conditions aux limites.

Les solutions analytiques pour l'analyse des vibrations libres des plaques de type Levy reposant sur une fondation élastique ont été proposées par [Hosseini-Hashemi et al. 2010] à l'aide de la FSDT et les solutions de Levy. [Hosseini-Hashemi et al. 2011c] ont amélioré leurs travaux antérieurs [Hosseini-Hashemi et al. 2010] en tenant compte de l'effet du couplage entre l'étirement et les déplacements transversaux. [Yaghoobi et al. 2013b] ont également suivi une approche similaire pour dériver une solution de type prélèvement pour la charge de flambement des plaques FGM reposant sur une fondation élastique sous un chargement thermique.

En plus des recherches effectuées sur les plaques rectangulaires dans les travaux sus-mentionnés, la FSDT a été également appliquée aux plaques circulaires et plaques tubulaires. [Reddy et al. 1999] ont étudié la flexion avec l'effet d'étirement pour l'analyse des plaques tubulaires en FGM en utilisant la FSDT.

La FSDT était également utilisée pour les modèles des coques en FGM. [Reddy et al. 1998] ont étudié la réponse dynamique des cylindres et des plaques FGM soumises à deux différents types de charges thermiques utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis. [Shahsiah et al. 2003a], [Shahsiah et al. 2003b] ont dérivé des solutions analytiques pour le flambement thermique des coques cylindriques en FGM simplement appuyées et soumises à deux types de charges thermiques utilisant la FSDT et les solutions de Navier. Les solutions analytiques pour la température critique de flambement des plaques et coques en FGM sous différents types de charges thermiques ont été obtenues en se basant sur la FSDT. [Behjat et al. 2009] ont étudié la flexion statique, la vibration libre et les réponses transitoires des panneaux cylindriques piézoélectriques en FGM soumises à des charges mécaniques, thermiques et électriques en utilisant la FSDT et la méthode des éléments finis.

### II.2.3. Modèles HSDTs :

La théorie sur la déformation par cisaillement d'ordre élevé HSDT est modélisée pour les variations d'ordre supérieur des déplacements dans le plan ou de deux plans (déplacements transversaux) (c'est-à-dire la théorie quasi-3D) à travers l'épaisseur, et par conséquent on mesure les effets de déformation par cisaillement ou de cisaillement et de déformation normale. Les modèles HSDTs peuvent être développés à l'aide des fonctions sous forme polynomiale ou une fonction non-polynomiale.

#### II.2.3.1. Modèles basés sur une fonction polynomiale

[Qian et al. 2003], [Qian et al. 2004] et [Gilhooley et al. 2007] ont employé une méthode sans maillage local de Petrov et Galerkin et la méthode quasi-3D de [Batra et al. 2002] pour étudier la flexion et la vibration des plaques FGM. [Matsunaga 2008a], [Matsunaga 2008b] a développé une théorie quasi-3D pour l'analyse du flambement et de la vibration libre des plaques en FGM [Matsunaga 2008b] et les coquilles peu profondes [Matsunaga 2008a].

[Xiang et al. 2011] ont proposé une énième théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse des vibrations libres des FGM et plaques sandwich composites. Le champ de déplacement de leur théorie a été obtenu en modifiant la zone de déplacement de la TSDT pour tenir compte des valeurs polynomiales. La TSDT est donc déduite comme un cas spécifique. Cette théorie a été étendue aux problèmes de flexion des plaques FGM [Xiang et al. 2013a], aux problèmes de vibration libre des plaques isotropes [Xiang et al. 2013b], des plaques sandwich en FGM [Xiang et al. 2013c] et des plaques FGM reposant sur une fondation élastique [Xiang et al. 2014]. [Xiang et al. 2013a] ont évalué diverses théories de déformation par cisaillement à cinq inconnues pour la flexion des plaques FGM à l'aide d'une méthode sans maillage avec cannelure SobhyRBFs, tandis que [Sobhy 2013] ont évalué diverses théories de déformation par cisaillement à cinq inconnues pour le flambement et la vibration libre des plaques sandwich FGM reposant sur une fondation élastique avec différentes conditions aux limites en utilisant une série de méthodes. [Wattanasakulpong et al. 2013] ont utilisé la TSDT améliorée de [Shi 2007] et la méthode de Ritz pour l'analyse des vibrations libres et les problèmes de vibrations forcées des plaques serrées en FGM sous les charges thermiques.

Basée sur le champ de déplacement de [Lo et al. 1997] et [Lo et al. 2015], [Reddy 2011] a développé une HSDT généralisée avec la non linéarité géométrique de Von Karman pour l'analyse thermomécanique des plaques FGM.

### **II.2.3.2. Modèles basés sur une fonction non- polynomiale :**

La fonction non-polynomiale a été utilisée pour la première fois par [Levy 1877] avec une fonction sinusoïdale pour élaborer une théorie raffinée pour les plaques épaisses isotropes. La fonction sinusoïdale a été adoptée plus tard par [Stein M 1986] et [Tourati M 1991] pour développer une théorie de déformation par cisaillement sinusoïdale à cinq variables (SSDT) pour les plaques composites stratifiées et isotropes, respectivement. La SSDT a été largement utilisée pour l'étude de la courbure des plaques composites [Zenkour 2004a], [Zenkour 2004b] et [Ferreira 2005], le flambement des plaques composites [Zenkour 2004c], la flexion des plaques sandwich FG [Zenkour 2005a] et [Zenkour et al. 2010a], le flambement et la vibration des plaques sandwich en FGM [Zenkour 2005b] et [Zenkour et al. 2010b], les vibrations des plaques FGM [Zenkour 2005c], la flexion des plaques FG [Zenkour 2006], la flexion thermique des Plaques FGM reposant sur une fondation élastique [Zenkour 2009], le flambement thermique des plaques FGM reposant sur une fondation élastique. Pour les poutres en nano [Zenkour et al. 2011], [Thai et al. 2012] et les plaques en nano composites [Thai et al. 2014]. Les relations entre la SSDT flexion et la CPT quantités ont été dérivées par [Zenkour 2012] pour les plaques de type levy en FGM.

[Mouffoki et al. 2019] ont étudié la thermo-vibration des nanofibres fonctionnellement graduées (FG) soumises à une distribution de température linéaire et uniforme et la structure a été modélisée par une nouvelle théorie de poutre en tenant compte de l'effet de la déformation par cisaillement sans facteur de correction. Ils ont supposé que les propriétés matérielles de la nanostructure dépendent de la température et l'influence de l'échelle de taille est capturée à l'aide de la théorie d'Eringen sur l'élasticité non locale.

[B. Fahsi et al. 2019] ont développé une nouvelle théorie raffinée de la déformation par cisaillement quasi 3D pour les analyses de flexion, de flambement et de vibration libre d'une poutre poreuse en FGM reposant sur une fondation élastique avec seulement trois inconnues.

[Attia.B et al. 2019] ont enquêté sur le comportement thermodynamique des plaques FGM simplement appuyée reposant sur une fondation élastique et soumises à deux températures

différentes sur son épaisseur. Les équations dérivées de la HSDT avec un champ de déplacement qui contient des formes intégrales indéterminées et qui ne nécessite que quatre inconnues.

[Soldatos 1992] a d'abord employé une fonction hyperbolique afin de développer une théorie HSDT pour plaques composites stratifiées. [Akavci 2010] et [Akavci 2014] a proposé une nouvelle fonction HSDT hyperbolique pour développer une analyse pour la flexion de plaques composites [Akavci 2010] et l'analyse de vibration libre des plaques FGM reposant sur une fondation élastique [Akavci 2014].

[Tounsi et al. 2019] ont analysé le flambement des plaques sandwich simplement appuyées FGM avec l'application d'une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) qui tient compte à la fois des effets de déformation en cisaillement et d'étirement en épaisseur par une variation parabolique de tous les déplacements et satisfait aux conditions aux limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans nécessiter de facteur de correction de cisaillement, avec un nombre d'inconnues réduit . À la différence du HSDT conventionnel, le présent a un nouveau champ de déplacement qui introduit des variables intégrales indéterminées.

La fonction exponentielle a été utilisée pour la première fois par [Karama et al. 2003] pour l'élaboration d'une HSDT pour poutres composites. [Aydogdu 2009] a approfondi ses travaux antérieurs [Karama et al. 2003] des plaques composites. [Mantari et al. 2011] ont également recouru à la fonction exponentielle pour développer une HSDT pour les coques composites et sandwich. La HSDT de Mantari a été adoptée par [Mantari et al. 2014a] pour étudier le comportement de flexion des plaques FGM.

[Boukhatem et al. 2019] ont évalué la vibration libre de nano plaques, telles que les feuilles de graphène monocouche (SLGS), reposant sur un support élastique en appliquant un nouveau modèle mathématique de théorie des plaques raffiné incluant des effets à petite échelle. ils ont également utilisé un champ de déplacement à quatre inconnues qui introduit des variables intégrales indéterminées.

[H. Hellal et al. 2019] ont démontré les effets de l'environnement hygrothermique sur la dynamique et le flambement des différents types de plaques sandwich en matériau FGM sur

des fondations élastiques de «Winkler – Pasternak» en employant la théorie de la HSDT à quatre variables.

une théorie efficace du cisaillement d'ordre élevé et de la déformation normale est présentée par [M. Khiloun et al. 2019] pour l'analyse des vibrations statiques et libres de plaques FGM avec un nombre réduit d'inconnues et d'équations régissant la théorie actuelle.

[M. Mekerbi et al. 2019] ont étudié le comportement thermodynamique des plaques sandwich FGM reposant sur des fondations Winkler / Pasternak / Kerr et dans diverses conditions aux limites, en utilisant une théorie 2D raffinée des plaques. La plaque est considérée comme soumise à un champ de température sinusoïdal harmonique dans le temps.

La distribution non linéaire de la température pour des vibrations libres des plaques sandwichs FGM simplement appuyées reposant sur un support élastique Winkler, Pasternak ou Kerr. est présentée par [A. Daikh et al. 2019] en utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement du troisième ordre du principe de Reddy et Hamilton qui inclut les effets thermiques des charges uniformes, linéaires et non linéaires dans l'épaisseur.

En outre, les fonctions non-polynomiales ont également été employées pour développer des théories quasi-3D sur l'effet du cisaillement et de la déformation. Par exemple, [Zenkour 2007] a employé la fonction sinusoïdale pour développer une théorie quasi-3D pour plaques FGM. [Mantari et al. 2012] ont présenté une formulation généralisée dans laquelle de nombreuses théories quasi-3D peuvent être déduites en utilisant des polynômes ou des hybrides ou des fonctions trigonométriques. [Mantari et al. 2014b] ont optimisé la théorie quasi-3D sinusoïdale pour l'analyse de la flexion des coques en FGM. [Mantari et al. 2013] ont amélioré leurs travaux antérieurs [Thai et al. 2014] en incluant l'effet d'étirement de l'épaisseur des plaques FGM.

### **II.3. Conclusion :**

L'élaboration de divers modèles pour la modélisation et l'analyse des plaques FGM a été systématiquement examinée et discutée dans ce chapitre. De même les modèles ELS, la théorie d'élasticité 3D et la formulation unifiée ainsi qu'un grand nombre de modèles de calcul ont été proposés pour prédire la réponse du comportement des plaques FGM sous charges mécaniques et thermiques.

Il est à noter que la plupart des études actuelles sur l'analyse 3D des plaques FGM sont limitées à des approches analytiques pour le flambement, la déformation linéaire et les problèmes de vibration libre.

## **CHAPITRE III**

# **LE MODÈLE THÉORIQUE ET LE DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE**

## Chapitre III : Le modèle théorique et le développement analytique

### III.1. Introduction

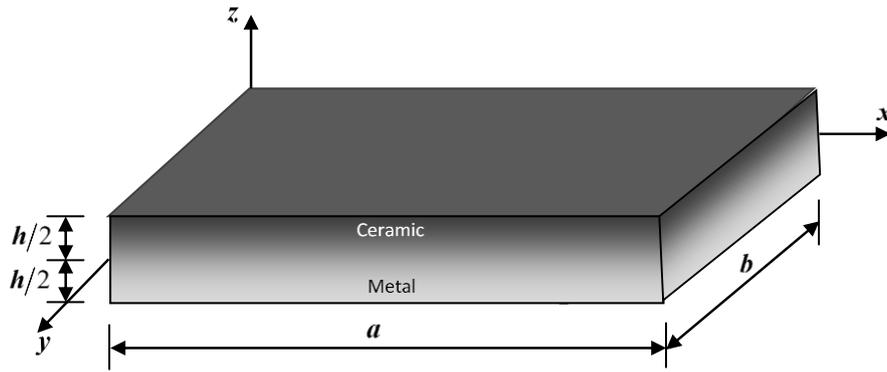
Toute proposition d'un problème de mécanique des milieux continus, devra s'inspirer d'un calcul approximatif des grandeurs généralisées sur la base du système des équations d'équilibre, de compatibilité et des conditions aux limites relatives à la structure, associée à la mise en place d'une loi de comportement reliant les contraintes et les déformations généralisées.

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la vibration libre des plaques fonctionnellement graduées simplement appuyées en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique dans un environnement Thermique ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température. La présente théorie utilise seulement quatre inconnues et par conséquent, le nombre d'équations du mouvement est réduit, ce qui est différent des autres théories de déformation de cisaillement qui utilisent cinq ou plusieurs inconnues de déformation de cisaillement., La théorie présentée est de forme compatible et fortement similaire à la théorie classique des plaques dans plusieurs approches. Elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne lieu à des variations paraboliques des contraintes de cisaillement transversal à travers l'épaisseur pour satisfaire les conditions des contraintes de cisaillement nulles dans les faces supérieure et inférieure de la plaque. Le point culminant de la présente théorie proposée c'est qu'elle utilise des termes intégrés indéterminés dans le champ de déplacement et implique un plus petit nombre de variables et d'équations gouvernantes que d'autres théories.

### III.2. Formulation théorique

#### III.2.1. Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur uniforme  $h$ , simplement appuyée, dans la configuration de référence sans contrainte. Le système de coordonnées pour les plaques FGM est illustré dans la Figure III.1. La formulation est limitée au comportement élastique linéaire. Les propriétés matérielles varient doucement à travers l'épaisseur de la plaque.



**Figure III.1:** La Géométrie d'une plaque à gradient fonctionnel dans le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires.

### III.2.2. Propriétés des matériaux :

La plaque FGM est constituée d'un matériau élastique et isotrope à gradient fonctionnel dont les propriétés matérielles varient progressivement dans le sens de l'épaisseur uniquement. Les propriétés matérielles effectives de la plaque FGM tels que le module d'Young  $E(z)$ , la conductivité thermique  $k(z)$ , la dilatation thermique  $\alpha(z)$  et la masse volumique  $\rho(z)$  basées sur la fonction de puissance des fractions volumiques des constituants et peuvent être exprimées comme suit:

$$P_{eff}(z) = P_m + (P_c - P_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad (III-1)$$

Pour prédire plus précisément le comportement des FGM à haute température, il est nécessaire de tenir compte de la dépendance à la température des propriétés du matériau. L'équation non linéaire des propriétés des matériaux thermoélastiques en fonction de la température  $T(K)$  peut être exprimée comme suit (Shahrjerdi et al. 2011; Attia et al. 2015; Kar et al. 2017):

$$P(z, T) = P_0 \left( P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (III-2)$$

où  $P(z)$  désigne la propriété matérielle et  $T = T_0 + \Delta T(z)$  indique la température a ;  $T_0 = 300(K)$  est la température ambiante  $P_{-1}$ ,  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  les coefficients des propriétés des matériaux dépendant de la température sont-ils uniques aux matériaux constitutifs visibles

dans le tableau des propriétés des matériaux (Tableau IV.1) pour FGM ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ) et ( $Si_3N_4/SUS304$ ) (Kim 2005; Shahrjerdi et al. 2011; Attia et al. 2015), et l'élévation de température  $\Delta T(z)$  se fait uniquement dans le sens de l'épaisseur, tandis que la conductivité thermique est indépendante de la température.

### III.3. Modèle proposé « Théorie d'ordre élevé hyperbolique à quatre variables »

Contrairement aux autres théories d'ordre supérieur, le nombre d'inconnues dans la présente théorie d'ordre élevé est seulement de quatre. La présente théorie est variationnelle et n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition des contraintes de cisaillement nulles sur les bords libres.

#### III.3.1. Hypothèses de la présente théorie d'ordre élevé à quatre variables

- (i) Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur  $h$  de la plaque et par conséquent, les déformations considérées sont infinitésimales.
- (ii) Les composantes des déplacements  $u$  et  $v$  dans les directions  $(x)$  et  $(y)$  respectivement peuvent être dissociées en trois termes :

$$u = u_0 + u_b + u_s, v = v_0 + v_b + v_s$$

Tels que :  $u_0$  et  $v_0$  représentent les déplacements en membrane, ils sont donnés par :  $u_0(x, y, t)$  et  $v_0(x, y, t)$  respectivement.

$u_b$  et  $v_b$ , sont les composantes de la flèche similaires aux déplacements donnés par la théorie classique des plaques, elles sont données par :  $z \partial w_0 / \partial x$  et  $z \partial w_0 / \partial y$

$u_s$  et  $v_s$  sont les composantes de cisaillement, elles sont données par :  $k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx$  et  $k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy$  respectivement.

- (iii) Le déplacement transversal  $w(x, y, z, t)$  est composé seulement d'un seul terme qui est  $w_0(x, y, t)$  et il représente la partie de la flèche de la plaque, tel que la dérivée de cette composante est égale numériquement à la rotation de la section transversale

### III.4. Cinématique et équations constitutives :

Pour les FGMs élastiques et isotropes, les relations de comportement linéaire peuvent être écrites comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ Et } \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-3})$$

où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$  sont respectivement les composantes de contrainte et de déformation. Utilisation des propriétés du matériau définies dans l'équation.III.3 les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  peuvent être exprimés comme suit:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z,T)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z,T)}{1-\nu^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z,T)}{2(1+\nu)}, \quad (\text{III-4})$$

En basant sur la théorie de la plaque épaisse, les hypothèses de base pour le champ de déplacement de la plaque peuvent être décrites comme :

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  dépend de la géométrie, la théorie proposée dans cette étude présente une fonction hyperbolique (Nguyen 2015):

$$f(z) = \sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) - z \frac{6}{h\sqrt{13}} \quad (\text{III-6})$$

On peut observer que la cinématique en équation III.5 utilise seulement quatre inconnues ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  et  $\theta$ ). Les expressions de déplacement de contraintes, basées sur cette formulation, sont données comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_z = 0 \quad (\text{III-7})$$

Où

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_1 \theta \\ k_2 \theta \\ k_1 \frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx + k_2 \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy \end{Bmatrix}, \quad (\text{III-8a})$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_2 \int \theta dy + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} \\ k_1 \int \theta dx + \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-8b})$$

Et

$$g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III-8c})$$

On peut observer d'après l'équation.III.7 que les déformations transversales ( $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ) sont nulles aux surfaces supérieure ( $z = h/2$ ) et inférieure ( $z = -h/2$ ) de la plaque. Un coefficient de correction de cisaillement n'est donc pas requis. Les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus doivent être résolues par une procédure de type Navier et peuvent être exprimées comme suit:

$$\frac{\partial}{\partial y} \int \theta dx = A' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \int \theta dy = B' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}, \quad \int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \int \theta dy = B' \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{III-9})$$

Où les coefficients  $A'$  et  $B'$  sont considérés selon le type de solution utilisé, dans ce cas par la méthode de Navier. Par conséquent  $A'$ ,  $B'$ ,  $k_1$  et  $k_2$  sont exprimés comme suit:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (\text{III-10})$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis dans l'équation III.28

### III.4.1. Équations gouvernantes

Les équations du mouvement pour la vibration libre de la plaque FGM peuvent être dérivées du principe de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U) dt = 0 \quad (\text{III-11})$$

Où :

$t$  est le temps,  $t_1$  et  $t_2$  sont les temps initial et de fin, respectivement,  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique et  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation totale. L'énergie de déformation totale du faisceau peut être représentée comme :

$$U = U_d + U_T \quad (\text{III-12})$$

Où :

$U_d$  se trouve l'énergie de contrainte due aux contraintes mécaniques et  $U_T$  est l'énergie de contrainte provoquée par les contraintes initiales dues à l'élévation de température. Les énergies de déformation  $U_d$  et  $U_T$  sont données par (Shahrjerdi et al. 2011; Li et al. 2009; Kim, 2005).

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (\text{III-13})$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x^T d_{11} + \sigma_y^T d_{22}] dV \quad (\text{III-14})$$

Où :

$d_{ij}$ , ( $i, j = 1, 2$ ) où est la relation non-linéaire contrainte-déplacement (Shahrjerdi et al. 2011).

En substituant  $d_{ij}$  en équation .III.14 l'équation suivante est obtenue :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V \left[ \sigma_x^T \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_y^T \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \right] dV \quad (\text{III-15})$$

En équation (III-15), les contraintes thermiques  $\sigma_x^T$  et  $\sigma_y^T$  sont données par :

$$\sigma_x^T = -(C_{11} + C_{12})\alpha(z, T)\Delta T(z) \text{ et } \sigma_y^T = -(C_{21} + C_{22})\alpha(z, T)\Delta T(z) \quad (\text{III-16})$$

L'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z, T) (\dot{u} + \dot{v} + \dot{w}) dV \quad (\text{III-17})$$

En substituant les équations. III.12 et III.17, dans l'équation. III.11 et intégrant par parties, les équations du mouvement en termes de composantes de déplacement de la plaque FGM sont obtenues comme suit:

$$\begin{aligned} & (A_{11} + A_{11}^T) d_{111} u_0 + (A_{66} + A_{22}^T) d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - (B_{11} + B_{11}^T) d_{111} w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T) d_{122} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_2 B' + B_{22}^{sT} k_1 A') d_{122} \theta \\ & + (B_{11}^s + B_{11}^{sT}) k_1 A' d_{111} \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + k_1 A' J_1 d_1 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III-18a})$$

$$\begin{aligned} & (A_{22} + A_{22}^T) d_{22} v_0 + (A_{66} + A_{11}^T) d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - (B_{22} + B_{22}^T) d_{222} w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A' + B_{11}^{sT} k_2 B') d_{112} \theta \\ & + (B_{22}^s + B_{22}^{sT}) k_2 B' d_{222} \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + k_2 B' J_1 d_2 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{III-18b})$$

$$\begin{aligned} & (B_{11} + B_{11}^T) d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) d_{112} v_0 + (B_{22} + B_{22}^T) d_{222} v_0 \\ & - (D_{11} + D_{11}^T) d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - (D_{22} + D_{22}^T) d_{2222} w_0 + (D_{11}^s + D_{11}^{sT}) k_1 A' d_{1111} \theta \\ & + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s) (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} \theta + (D_{22}^s + D_{22}^{sT}) k_2 B' d_{2222} \theta + (D_{11}^{sT} k_2 B' + D_{22}^{sT} k_1 A') d_{1122} \theta \\ & - (D_{11}^T + D_{22}^T) d_{1122} w_0 + A_{11}^T d_{11} w_0 + A_{22}^T d_{11} w_0 = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) \\ & + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{III-18c})$$

$$\begin{aligned} & - (B_{11}^s + B_{11}^{sT}) k_1 A' d_{1111} u_0 - (B_{12}^s k_2 B' + B_{22}^{sT} k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1222} u_0 \\ & - (B_{12}^s k_1 A' + B_{11}^{sT} k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} v_0 - (B_{22}^s + B_{22}^{sT}) k_2 B' d_{2222} v_0 \\ & + (D_{11}^s + D_{11}^{sT}) k_1 A' d_{1111} w_0 + ((D_{12}^s + 2D_{66}^s) (k_1 A' + k_2 B')) d_{1122} w_0 + (D_{22}^s + D_{22}^{sT}) k_2 B' d_{2222} w_0 \\ & - (H_{11}^s + H_{11}^{sT}) (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - (H_{22}^s + H_{22}^{sT}) (k_2 B')^2 d_{2222} \theta - (2H_{12}^s k_1 k_2 A' B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s) d_{1122} \theta \\ & + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta + (D_{11}^{sT} k_2 B' + D_{22}^{sT} k_1 A') d_{1122} w_0 \\ & - (H_{11}^{sT} (k_2 B')^2 + H_{22}^{sT} (k_1 A')^2) d_{1122} \theta = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) \\ & - K_2 ((k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{III-18d})$$

Où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{III-19})$$

Et les composants de rigidité sont calculés comme

$$\begin{Bmatrix} A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \\ A_{12}, B_{12}, D_{12}, B_{12}^s, D_{12}^s, H_{12}^s \\ A_{66}, B_{66}, D_{66}, B_{66}^s, D_{66}^s, H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III-20a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{III-20b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g^2(z)] dz \quad (\text{III-20c})$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^T, B_{11}^T, D_{11}^T, B_{11}^{sT}, D_{11}^{sT}, H_{11}^{sT} \\ A_{22}^T, B_{22}^T, D_{22}^T, B_{22}^{sT}, D_{22}^{sT}, H_{22}^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III-20d})$$

Les inerties sont également définies comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1, z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z) \right) \rho(z) dz \quad (\text{III-20e})$$

### III.5. Champ de température

Dans cette étude, quatre cas de distribution de température unidimensionnelle à travers l'épaisseur sont considérés, avec  $T = T(z)$ .

#### III.5.1. Température uniforme :

Dans le cas de température uniforme, le champ utilisé est donné comme suit :

$$T(z) = T_0 + \Delta T(z) \quad (\text{III-21})$$

Où

$\Delta T(z)$  indique le changement de température et  $T_0 = 300K$  est la température ambiante.

### III.5.2. Température linéaire :

Pour une plaque à gradation fonctionnelle, en supposant des températures  $T_b$  et  $T_t$  en imposant en bas et en haut de la plaque, le champ de température sous élévation linéaire de la température le long de l'épaisseur peut être obtenu comme suit:

$$T(z) = T_0 + \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{III-22})$$

### III.5.3. Température non linéaire :

L'élévation de la température non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque est déterminée en résolvant l'équation de conduction thermique unidimensionnelle. L'équation unidimensionnelle de conduction de chaleur en régime permanent dans la direction  $z$  est donnée par :

$$T(z) = -\frac{d}{dz} \left( k(z) \frac{dT}{dz} \right) \quad (\text{III-23})$$

avec la condition aux limites  $T(h/2) = T_t$  et  $T(-h/2) = T_b = T_0$ . Ici, un état sans stress est supposé existé à  $T_0 = 300 K$ . Le coefficient de conductivité thermique  $k(z)$  est supposé ici obéir à la relation de puissance en équation III.5. La solution analytique à l'équation III.16 est :

$$T(z) = T_b - (T_t - T_b) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z)} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(z)} dz} \quad (\text{III-24})$$

Dans le cas de la plaque FGM en loi de puissance, la solution de l'équation. III.16 peut également être exprimée au moyen d'une série polynomiale (Shahrjerdi et al. 2011, Attia et al. 2015; Mahapatra et al. 2017)

$$T(z) = T_b + \frac{(T_t - T_b)}{C_{tb}} \left[ \left( \frac{2z+h}{2h} \right) - \frac{k_{tb}}{(p+1)k_b} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{p+1} + \frac{k_{tb}^2}{(2p+1)k_b^2} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{2p+1} \right. \\ \left. - \frac{k_{tb}^3}{(4p+1)k_b^3} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{3p+1} + \frac{k_{tb}^4}{(4p+1)k_b^4} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{4p+1} - \frac{k_{tb}^5}{(5p+1)k_b^5} \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^{5p+1} \right] \quad (\text{III-25})$$

Avec :

$$C_{tb} = 1 - \frac{k_{tb}}{(p+1)k_b} + \frac{k_{tb}^2}{(2p+1)k_b^2} + \frac{k_{tb}^3}{(3p+1)k_b^3} + \frac{k_{tb}^4}{(4p+1)k_b^4} + \frac{k_{tb}^5}{(5p+1)k_b^5} \quad (\text{III-26})$$

où,  $k_{tb} = k_t - k_b$  avec  $k_t$  et  $k_b$  sont la conductivité thermique des faces supérieure et inférieure de la plaque, respectivement.

### III.5.4. Température sinusoïdale :

Le champ de température sous une évolution sinusoïdale à travers l'épaisseur est donné comme [Shahrjerdi, 2011; Bouazza, 2009]:

$$T(z) = (T_t - T_b) \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + T_b$$

### III.6. Solution analytique pour une plaque en FGM simplement appuyée:

Dans ce travail, nous nous intéressons aux solutions exactes de l'équation (III.20.a) pour une nano-plaque simplement appuyée. À l'aide de la procédure de solution Navier, les expressions suivantes de déplacements ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , et  $\theta$ ) sont prises:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

$$\alpha = m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b \quad (\text{III-28})$$

où  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha = m\pi / a$ ,  $\beta = n\pi / b$ ,  $\omega$  est la fréquence naturelle et  $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn})$  les coefficients de déplacement maximum inconnus.

En substituant les équations (III-27) dans l'équation (III-18), les solutions analytiques peuvent être déterminées par

$$\left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & M_{14} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-29})$$

Où  $a_{ij}$  et  $M_{ij}$  sont donnés en annexe.

### III.7. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons proposé une solution générale du comportement vibratoire des plaques FGM en utilisant une théorie hyperbolique d'ordre élevé. Le nombre d'inconnues dans la présente théorie est seulement de quatre par opposition à d'autres théories de déformation de cisaillement qui utilisent cinq inconnues et plus. La théorie présentée a une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, et n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les études paramétriques qui seront présentées dans le chapitre suivant permettront d'apprécier clairement l'apport de cette théorie en comparant les résultats obtenus avec ceux de la littérature.

## **CHAPITRE IV**

# **ANALYSE DE LA VIBRATION LIBRE DES PLAQUES FGM DÉPENDANTES DE LA TEMPÉRATURE**

## **Chapitre IV : Analyse de la vibration libre des plaques FGM dépendantes de la température**

### **IV.1. Introduction :**

Afin de préserver les structures en matériaux à gradient de propriétés contre la fatigue et la rupture, il est indispensable de déterminer et de vérifier leur comportement statique et vibratoire, dont l'ampleur de ses amplitudes et les charges mécaniques importantes appliquées peuvent causer une fatigue structurale qui elle-même cause une rupture. Les matériaux à gradient de propriétés sont des matériaux composites avancés, produits en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ces types de matériaux, ont suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. Les FGM ont trouvés beaucoup d'applications dans les domaines de hautes technologies : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, l'automobile, etc. Le concept des Matériaux à gradient de propriétés a été proposé vers la fin des années 80 par un groupe de scientifiques au Japon [Bessaim .A ,2014]

Dans ce présent chapitre, nous nous concentrons sur la présentation des résultats numériques de l'analyse du comportement en vibration libre des plaques à gradient de propriétés FGM dépendantes de la température. Le modèle choisit dans ce chapitre est basé sur le modèle hyperbolique de déformation de cisaillement et le nombre de fonctions inconnues impliquées dans cette théorie n'est que de quatre, au lieu de cinq dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement. La théorie présentée est variationnelle, et n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. Les propriétés du matériau des plaques à graduation fonctionnelle sont supposées dépendantes de la température et varient progressivement dans le sens de l'épaisseur par un modèle de loi de puissance.

## IV.2. Résultats du comportement thermique et mécanique des plaques en FGM

L'analyse du comportement thermique et mécanique des plaques FGM obtenues par les combinaisons de Métal et de Céramique. Deux types de plaque FGM sont considérés : plaque en (ZrO<sub>2</sub>/Ti-6Al-4V) et plaque en (Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>/SUS304). Les propriétés des matériaux des plaques FGM sont données dans le Tableau IV.1.

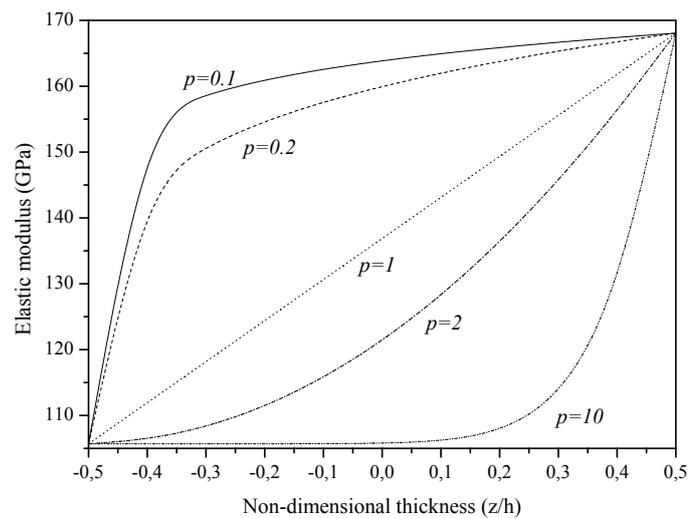
**Tableau IV. 1** les coefficients des propriétés matérielles dépendant de la température pour (ZrO<sub>2</sub>/Ti-6Al-4V) et (Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>/SUS304)

Matériel	Propriétés	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub>	$E(\text{GPa})$	348.43	0	$-3.070 \times 10^{-4}$	$2.160 \times 10^{-7}$	$-8.946 \times 10^{-}$
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	$5.8723 \times 10^{-6}$	0	$9.095 \times 10^{-6}$	0	0
	$\rho(\text{Kg}/\text{m}^3)$	2370	0	0	0	0
	$\nu$	0.24	0	0	0	0
	$k$	9.19	0	0	0	0
SUS304	$E(\text{GPa})$	201.04	0	$3.079 \times 10^{-4}$	$-6.534 \times 10^{-}$	0
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	$12.330 \times 10^{-6}$	0	$8.086 \times 10^{-4}$	0	0
	$\rho(\text{Kg}/\text{m}^3)$	8166	0	0	0	0
	$\nu$	0.3262	0	$-2.002 \times 10^{-4}$	$3.797 \times 10^{-7}$	0
	$k$	12.04	0	0	0	0
ZrO <sub>2</sub>	$E(\text{GPa})$	244.27	0	$-1.371 \times 10^{-3}$	$1.214 \times 10^{-6}$	$-3.681 \times 10^{-}$
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	$12.766 \times 10^{-6}$	0	$-1.491 \times 10^{-3}$	$1.006 \times 10^{-5}$	$-6.788 \times 10^{-}$
	$\rho(\text{Kg}/\text{m}^3)$	3000	0	0	0	0
	$\nu$	0.3330	0	0	0	0
	$k$	1.80	0	0	0	0
Ti - 6Al - 4V	$E(\text{GPa})$	122.56	0	$-4.586 \times 10^{-4}$	0	0
	$\alpha(\text{K}^{-1})$	$7.75788 \times 10^{-6}$	0	$6.638 \times 10^{-4}$	$-3.147 \times 10^{-}$	0
	$\rho(\text{Kg}/\text{m}^3)$	4429	0	0	0	0
	$\nu$	0.2888	0	$1.108 \times 10^{-4}$	0	0
	$k$	7.82	0	0	0	0

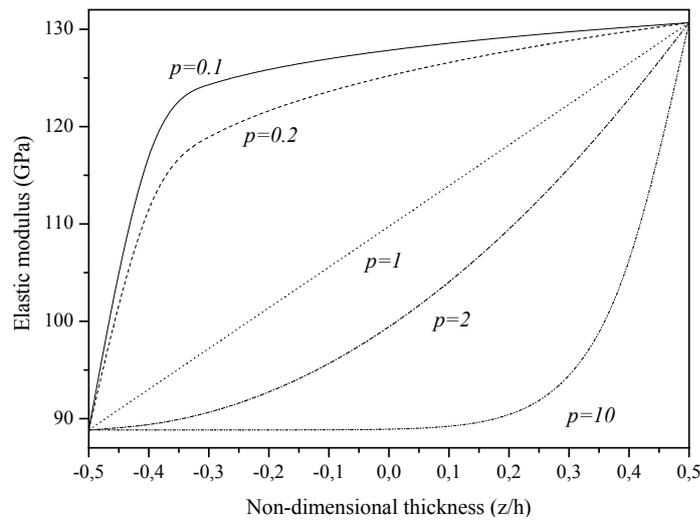
Selon la littérature (Shahrjerdi et al. 2011; Attia et al. 2015; Kar et al. 2017), la distribution de la température a une influence significative sur le comportement de la plaque FGM. Les propriétés thermiques et mécaniques des FGM soumises à une température de fonctionnement élevée ont été affectées de manière importante par les variations de température. Par exemple, le module de Young de l'acier inoxydable, du nickel Ti-6Al-4V et de la zircone est réduit respectivement de 37%, 21%, 34% et 31% lorsque la température augmente jusqu'à la température ambiante de 300–1000 (K) (Yang et Shen 2003). La réponse structurelle réelle

de la plaque à gradation fonctionnelle devait tenir compte de la dépendance en température des propriétés du matériau et de la distribution de la température à travers l'épaisseur de la plaque. La variation du module de Young dans les plaques FGM à travers l'épaisseur de la température ambiante, les conditions thermiques uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdales sont présentées dans les Figures IV.1 -IV. 5, respectivement. La température ambiante  $T_0 = 300(K)$  est définie pour toutes les conditions thermiques. L'augmentation de température en température linéaire est  $T_b = T_t = 600(K)$ , les conditions thermiques non linéaires sont  $T_b = 0(K)$  et  $T_t = 600(K)$  et les conditions thermiques sinusoïdales sont  $T_b = 300(K)$  et  $T_t = 300(K)$ .

Les figures IV. 1 et IV. 2 montrent la variation du module élastique de Young des plaques à gradation fonctionnelle sur la température ambiante et la variation linéaire de la température avec l'indice de fraction volumique.



**Figure IV. 1:** Variation du module élastique en fonction de  $z/h$  d'une plaque FGM dans un champ thermique uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel  $p$



**Figure IV. 2:** Variation du module élastique en fonction de  $z/h$  d'une plaque FG dans un champ thermique linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel  $p$

On voit d'après ces figures que le module de Young est similaire pour les conditions avec la température ambiante et la température uniforme, mais les graphiques se déplacent vers des valeurs plus petites avec l'élévation de la température uniforme. Il est à remarquer que le module de Young diminue avec l'augmentation de l'indice de puissance.

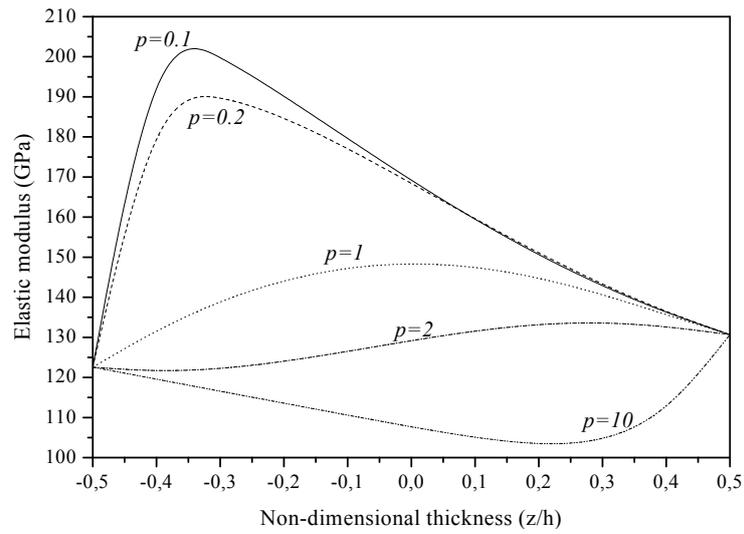


Figure IV. 3: Variation du module élastique en fonction de  $z/h$  d'une plaque FG dans un champ thermique non linéaire pour différentes valeurs de l'indice matériel  $p$

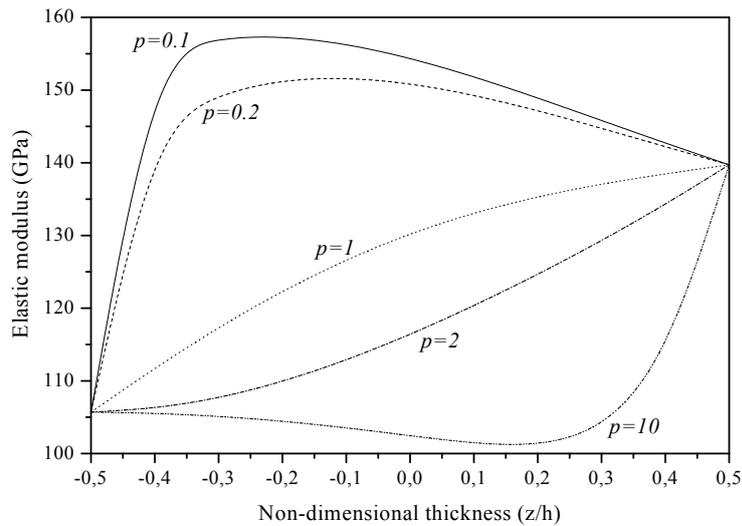
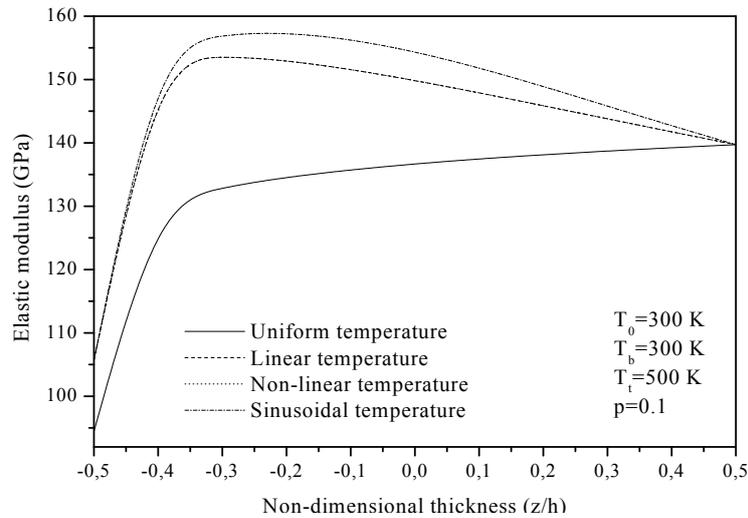


Figure IV. 4: Variation du module élastique en fonction de  $z/h$  d'une plaque FG dans un champ thermique sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel  $p$



**Figure IV. 5:** Variation du module élastique en fonction de  $z/h$  d'une plaque FG dans des champs thermiques : uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdal pour différentes valeurs de l'indice matériel  $p$

Il est illustré sur les Figures IV. 3, IV. 4 et IV. 5 que le comportement du module de Young dans les charges thermiques non linéaires et sinusoïdales est complètement différent de celui des cas de température ambiante et linéaire. Comme on peut le constater, la valeur du module de Young augmente près de la surface inférieure, puis diminue lorsque  $p < 1$ , et le module diminue lorsque  $1 \leq p < 10$ . Cependant, le module de Young diminue, puis augmente près de la surface supérieure pour la grande valeur de l'indice de classement ( $p > 10$ ) dans des conditions thermiques non linéaires et sinusoïdales. On peut conclure que le type de conditions environnementales a un effet considérable sur le module de Young. Une étude comparative du module de Young est réalisée pour des conditions thermiques uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdales sur la Figure IV. 5.

### IV.3. Validation des résultats :

Dans cette partie, la solution analytique compare la précision de la théorie de la plaque hyperbolique raffinée présentée (RSDT) avec seulement quatre inconnues pour la vibration libre des plaques rectangulaires isotropes simplement appuyées par la solution analytique avec celles des autres résultats disponibles dans la littérature et par le modèle des éléments finis utilisant le logiciel Abacus. En outre, les plaques FGM dépendantes de la température sont également démontrées en comparant la solution actuelle avec celles d'autres résultats disponibles dans la littérature des théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (Shahrjerdi et al. 2011, Huang et Shen 2004) avec plusieurs inconnues. Ainsi, les divers paramètres d'influence tels que le paramètre d'indice de la loi de puissance  $p$ , la déformation par cisaillement, la distribution de la température sur la réponse aux vibrations de la plaque à graduation fonctionnelle ont été étudiés. Le paramètre de fréquence non dimensionnelle est pris de la même façon que (Shahrjerdi et al. 2011, Huang et Shen 2004). Deux types de plaque en FGM sont considérés: ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ) et ( $Si_3N_4/SUS304$ ). La description des propriétés des matériaux utilisées dans l'analyse est présentée dans le tableau IV. 1.

#### IV.3.1. Résultats des plaques :

la validation de la solution du modèle des plaques hyperboliques raffinées proposé est effectuée en comparant les résultats obtenus avec ceux calculés par le modèle d'éléments finis par l'utilisation du logiciel Abacus en considérant l'étude de convergence du maillage pour optimiser les résultats. La solution FEM du logiciel Abacus est obtenue en utilisant des éléments shell «S4R».

**Tableau IV. 2** : Le nombre d'éléments utilisés pour obtenir un maillage optimal pour les plaques rectangulaires isotropes « S4R»

Taille globale approximative	Nombre de mailles	Fréquence $\hat{\omega}_{11} = \omega_{11} h \sqrt{\rho/G}$
$1 \times \sqrt{2}$	10 x 10	0.069079
$0.5 \times \sqrt{2}/2$	20 x 20	0.068438
$0.25 \times \sqrt{2}/4$	40 x 40	0.068266
$0.1 \times \sqrt{2}/10$	100 x 100	0.068218
$0.05 \times \sqrt{2}/20$	200 x 200	0.0682101

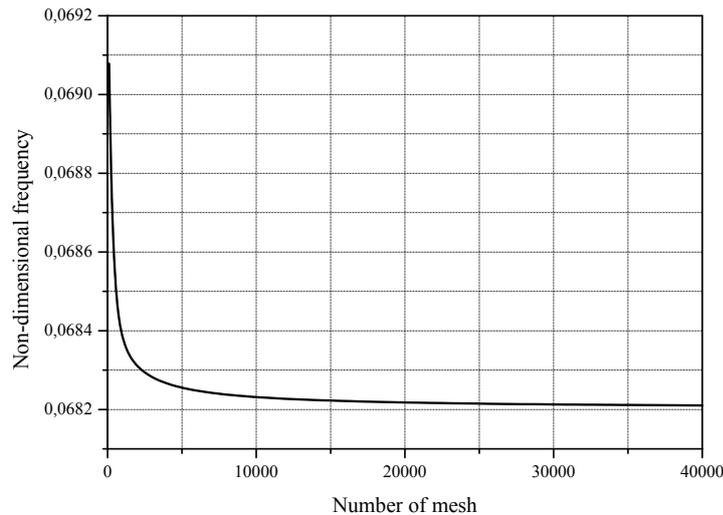


Figure. IV. 6 : Convergence de maillage « S4R »

L'analyse d'un logiciel FEM en utilisant Abacus a été effectuée et les résultats ont été obtenus comme indiqué dans le tableau IV. 2 et représentés sur la figure IV. 6. Les paramètres suivants sont utilisés pour les calculs numériques:  $a = 10 h$ ,  $b = \sqrt{2} a$ ,  $E = 1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 1$  D'après le tableau IV. 2 et la figure IV. 6, la convergence commence à 10 x 10 mailles avec la plus faible fréquence non dimensionnelle 0,069079 et converge complètement à 200 x 200 avec la plus faible fréquence non dimensionnelle 0,0682101, mais 100 x 100 mailles avec la plus faible la fréquence non dimensionnelle 0.068218 a été choisie pour la comparaison, afin de réduire le nombre de nœuds et d'éléments dans les analyses.

### IV.3.2. Résultats des plaques FGM isotropes

Le tableau IV. 3 présente les paramètres de fréquence naturelle non dimensionnels actuels  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  pour différents modes de vibration en utilisant : la présente théorie, le modèle à éléments finis par le logiciel Abacus, les solutions exactes de la théorie de l'élasticité en trois dimensions (Srinivas et al. 1970) et la théorie des plaques de déformation en cisaillement (Reddy, 1984) pour les plaques rectangulaires isotropes.

Tableau IV. 3 : Les fréquences naturelles  $\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho/G}$  d'une plaque rectangulaire isotrope avec  $\nu = 0.3$ ,  $a/h = 10$  et  $b = \sqrt{2} a$

$(m, n)$	Présent	(Reddy 1984) (TSDT)	Srinivas et al. (1970) 3-D	Abaqus coque
(1,1)	0.0704	0.0704	0.0704	0.06822
(1,2)	0.1374	0.1374	0.1376	0.1333
(2,1)	0.2015	0.2041	0.2018	0.1988
(2,2)	0.2630	0.2628	0.2634	0.2554

D'après le tableau IV.3, on peut voir que la présente théorie des plaques hyperboliques raffinées (RSdT) donne d'excellentes valeurs des fréquences pour tous les modes de vibration, comparées à celles des solutions exactes de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle (Srinivas et al. 1970), la troisième théorie des plaques de déformation par cisaillement (Reddy, 1984) et les résultats des éléments finis en utilisant le logiciel Abacus.

#### IV.3.3. Résultats des plaques FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) :

Dans le tableau IV. 4, une comparaison des premiers paramètres de fréquence naturelle non dimensionnelle est réalisée pour une plaque FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) dans des environnements thermiques. La plaque FGM est constituée d'alliage de titane ( $Ti - 6Al - 4V$ ) sur sa surface inférieure et d'oxyde de zirconium ( $ZrO_2$ ) sur sa surface supérieure.

Concernant la géométrie de la plaque FGM on prend pour :  $h = 0.0025 m$ ,  $a = b = 0.2 m$ . Et on suppose que le coefficient de poisson est constant en tout point de la plaque  $\nu = 0.3$ .

La validation du modèle de plaque hyperbolique raffiné proposé est effectuée en comparant les résultats obtenus avec ceux calculés par la théorie de la plaque de déformation par cisaillement du second ordre (SSDT) développée par Shahrjerdi et al. (2011) et la théorie de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) développée par Huang et Shen (2004).

Tableau IV. 4: Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée dans un environnement thermique

Les fréquences naturelles		$T_b = 300$ (K)				
		$T_t = 300$ (K)	$T_t = 400$ (K)		$T_t = 600$ (K)	
			Température-dépendent	Température-Independent	Température-dépendent	Température-Independent
$ZrO_2$	SSDT(a)	8.333	7.614	7.892	5.469	6.924
	TSDT(b)	8.273	7.886	8.122	6.685	7.686
	Présent	8.288	7.818	8.070	6.547	7.613
$p = 0.5$	SSDT(a)	7.156	6.651	6.844	5.255	6.175
	TSDT(b)	7.139	6.876	7.154	6.123	6.776
	Présent	7.120	6.791	6.968	5.941	6.656
$p = 1$	SSDT(a)	6.700	6.281	6.446	5.167	5.904
	TSDT(b)	6.657	6.435	6.592	5.819	6.362
	Présent	6.665	6.383	6.537	5.675	6.275
$p = 2$	SSDT(a)	6.333	5.992	6.131	5.139	5.711
	TSDT(b)	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	Présent	6.294	6.055	6.189	5.476	5.974
Ti - 6Al - 4V	SSDT(a)	5.439	5.103	5.333	4.836	5.115
	TSDT(b)	5.400	5.322	5.389	5.118	5.284
	Présent	5.410	5.290	5.357	5.097	5.250

Le tableau IV. 4 montre clairement que les résultats de la théorie des plaques (SSDT) développée par Shahrjerdi et al. (2011) et la théorie des plaques (HSDT) élaborée par Huang et Shen (2004) concordent bien avec les résultats de la présente théorie des plaques hyperboliques raffinées (RSdT) pour toutes les valeurs de l'indice de loi de puissance  $p$  et pour des plaques FGM dépendantes de la température et indépendantes de la température.

On constate ainsi que les fréquences fondamentales non dimensionnelles de la plaque FGM diminuent avec l'augmentation de l'indice de puissance  $p$  et que l'élévation de température diminue les fréquences fondamentales non dimensionnelles.

#### IV.3.4. Résultats des plaques FGM ( $Si_3N_4/SUS304$ )

Le tableau IV. 5 présente les fréquences fondamentales non dimensionnelles d'une plaque FGM de type ( $Si_3N_4/SUS304$ ) pour différentes valeurs d'indice de puissance  $p$ . Pour ces matériaux, le coefficient de Poisson est  $\nu = 0.28$ . Les résultats obtenus par la présente théorie des plaques hyperboliques raffinées (RSdT) sont comparées aux résultats de Shahrjerdi et al. (2011) et Huang et Shen (2004).

Tableau IV. 5 : Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ ) simplement appuyée dans un environnement thermique

Les fréquences naturelles		$T_b = 300$ (K)				
		$T_t = 300$ (K)	$T_t = 400$ (K)		$T_t = 600$ (K)	
			Température dépendent	Température-Independent	Température-dépendent	Température-Independent
$\text{Si}_3\text{N}_4$	SSDT(a)	12.506	12.175	12.248	11.461	11.716
	TSDT(b)	12.495	13.397	12.382	11.984	12.213
	Présente	12.519	12.319	12.389	11.899	12.126
$p = 0.5$	SSDT(a)	8.652	8.361	8.405	7.708	7.887
	TSDT(b)	8.675	8.615	8.641	8.269	8.425
	Présente	8.617	8.461	8.507	8.127	8.281
$p = 1$	SSDT(a)	7.584	7.306	7.342	6.674	6.834
	TSDT(b)	7.555	7.474	7.514	7.171	7.305
	Présente	7.551	7.406	7.444	7.090	7.225
$p = 2$	SSDT(a)	6.811	6.545	6.575	5.929	6.077
	TSDT(b)	6.777	6.693	6.728	6.398	6.523
	Présente	6.777	6.638	6.670	6.330	6.454
SUS304	SSDT(a)	5.410	5.161	5.178	4.526	4.682
	TSDT(b)	5.405	5.311	5.335	4.971	5.104
	Présente	5.415	5.278	5.300	4.929	5.061

On peut voir que les résultats des valeurs des fréquences fondamentales calculées à partir du présent modèle sont conformes aux résultats obtenus par Shahrjerdi et al. (2011) et Huang et Shen (2004).

#### IV.3.5. Résultats des plaques FGM ( $\text{ZrO}_2/\text{Ti} - 6\text{Al} - 4\text{V}$ ) et ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ )

La comparaison est effectuée pour les plaques FGM ( $\text{ZrO}_2/\text{Ti} - 6\text{Al} - 4\text{V}$ ) et ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ ). Cet exemple vise à vérifier les résultats obtenus avec (SSDT) de Shahrjerdi et al. (2011) et (HSDT) de Huang and Shen (2004). Les fréquences fondamentales non dimensionnelles sont données dans le tableau IV. 6 et IV. 7 pour différents modes  $(m, n)$ . On observe que la présente théorie des plaques hyperboliques raffinées concorde bien avec les résultats de (Shahrjerdi et al. 2011, Huang et Shen 2004) pour différents modes.

On peut voir à partir de ces deux tableaux que les fréquences non dimensionnelles augmentent avec l'élévation du nombre de modes et on remarque aussi que les fréquences non dimensionnelles de la plaque FG dans le cas où les propriétés matérielles ne dépendent pas de la température sont supérieures à celles calculées dans le cas où les propriétés matérielles dépendent de la température.

Tableau IV.6: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée dans un environnement thermique ( $p = 2$ ).

Les fréquences naturelles		$T_b = 300$ (K)				
		$T_t = 300$ (K)	$T_t = 400$ (K)		$T_t = 600$ (K)	
			Température-Dépendent	Température-Independent	Température-dépendent	Température-Independent
(1,1)	SSDT(a)	6.333	5.992	6.132	5.139	5.711
	TSDT(b)	6.286	6.101	6.238	5.612	6.056
	Présente	6.294	6.055	6.189	5.476	5.974
(1,2)	SSDT(a)	14.896	14.383	14.684	13.260	14.253
	TSDT(b)	14.625	14.372	14.655	13.611	14.474
	Présente	14.699	14.301	14.588	13.453	14.363
(2,2)	SSDT(a)	22.608	21.942	22.386	20.557	21.935
	TSDT(b)	21.978	21.653	22.078	20.652	21.896
	Présente	22.197	21.663	22.082	20.581	21.849
(1,3)	SSDT(a)	27.392	26.630	27.163	25.077	26.700
	TSDT(b)	26.454	26.113	26.605	24.961	26.435
	Présente	26.811	26.190	26.689	24.954	26.446
(2,3)	SSDT(a)	34.106	33.211	33.867	31.425	33.384
	TSDT(b)	32.659	32.239	32.840	30.904	32.664
	Présente	33.271	32.540	33.148	31.118	32.904

 Tableau IV. 7 : Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ( $Si_3N_4/SUS304$ ) simplement appuyée dans un environnement thermique ( $p = 2$ )

Les fréquences naturelles		$T_b = 300$ (K)				
		$T_t = 300$ (K)	$T_t = 400$ (K)		$T_t = 600$ (K)	
			Température-dépendent	Température-Independent	Température-dépendent	Température-Independent
(1,1)	SSDT(a)	6.811	6.445	6.575	5.929	6.077
	TSDT(b)	6.777	6.693	6.728	6.398	6.523
	Présente	6.777	6.638	6.670	6.330	6.454
(1,2)	SSDT(a)	16.017	15.708	15.769	15.002	15.262
	TSDT(b)	15.809	15.762	15.836	15.384	15.632
	Présente	15.844	15.662	15.733	15.265	15.508
(2,2)	SSDT(a)	24.307	23.958	24.047	23.154	23.517
	TSDT(b)	23.806	23.786	23.893	23.327	23.685
	Présente	23.947	23.728	23.832	23.251	23.599
(1,3)	SSDT(a)	29.446	29.071	29.177	28.204	28.632
	TSDT(b)	28.687	28.686	28.819	28.185	28.609
	Présente	28.938	28.693	28.817	28.162	28.575
(2,3)	SSDT(a)	36.657	36.247	36.376	35.290	35.809
	TSDT(b)	35.466	35.491	35.648	34.918	35.436
	Présente	35.932	35.659	35.810	35.062	35.564

<sup>(a)</sup> Shahrjerdi *et al.* (2011)

<sup>(b)</sup> Huang and Shen (2004)

### IV.3.6. Comparaison des résultats des plaques FGM ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ )

Afin de vérifier l'exactitude de la présente théorie pour une grande valeur d'indice de fraction volumique  $p$  et différentes valeurs de charges thermiques, une plaque FGM ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ ) est maintenant examinée. Les fréquences non dimensionnelles pour les plaques FGM ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ ) prédites par Shahrjerdi et al. (2011) utilisant la théorie de la déformation par cisaillement du second ordre (SSDT) et la présente théorie sont présentées dans le tableau IV. 8.

Tableau IV. 8: les fréquences non dimensionnelles d'une plaque FGM ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ ) dont les propriétés matérielles dépendent de la température pour différentes valeurs de l'indice matériel  $p$  dans environnement thermique, Mode (1, 1).

Charge thermique $T_0 = 300 \text{ (K)}, b = a = 0.2, h = 0.025$		$T_b = 300 \text{ (K)}$ $T_t = 300 \text{ (K)}$	$T_b = 300 \text{ (K)}$ $T_t = 400 \text{ (K)}$	$T_b = 300 \text{ (K)}$ $T_t = 600 \text{ (K)}$
$\text{Si}_3\text{N}_4$	SSDT(a)	12.506	12.175	11.461
	Présent	12.519	12.319	11.899
$p = 0.5$	SSDT(a)	8.652	8.361	7.708
	Présent	8.617	8.461	8.127
$p = 10$	SSDT(a)	5.907	5.645	5.031
	Présent	5.868	5.731	5.412
$p = 20$	SSDT(a)	5.711	5.450	4.825
	Présent	5.676	5.540	5.210
$p = 40$	SSDT(a)	5.591	5.329	4.694
	Présent	5.558	5.420	5.083
SUS304	SSDT(a)	5.410	5.161	4.526
	Présent	5.415	5.278	4.929

Un excellent accord entre les résultats prédits par (SSDT) de Shahrjerdi et al. (2011) et la présente théorie est observé. Il convient de noter que la présente théorie contient quatre inconnues contre sept dans le cas de (SSDT) de Shahrjerdi et al. (2011). On peut conclure que la présente théorie est non seulement précise, mais aussi efficace et simple pour prédire les réponses vibratoires libres des plaques FGM en environnement thermique.

### IV.3.7. Résultats numériques de la présente étude :

Le tableau IV. 9 et IV. 10 indique les valeurs des fréquences non dimensionnelles dans les plaques FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) et ( $Si_3N_4/SUS304$ ) respectivement pour différentes charges thermiques. Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnel est défini comme suit  $\bar{\omega} = \omega(a^2/h)\sqrt{\rho_b(1-\nu^2)/E_b}$ , où  $E_b$  et  $\rho_b$  à  $T_0 = 300(K)$  (Shahrjerdi et al. 2011). Pour voir l'effet de l'indice de puissance sur les fréquences, les mêmes valeurs de la charge thermique et du mode de forme sont considérées.

Tableau IV. 9: les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée dans un environnement thermique, pour différents modes de vibration.

Les fréquences naturelles		$T_b = 300 (K)$				
		$T_t = 300 (K)$	$T_t = 400 (K)$		$T_t = 600 (K)$	
			Température-dépendent	Température-Independent	Température-dépendent	Température-Independent
$ZrO_2$	(1,1)	8.288	7.818	8.070	6.547	7.613
	(1,2)	19.388	18.623	19.157	16.895	18.686
	(2,2)	29.312	28.285	29.072	26.125	28.586
	(1,3)	35.427	34.231	35.176	31.779	34.669
	(2,3)	43.996	42.579	43.742	39.766	43.229
$p = 0.5$	(1,1)	7.120	6.791	6.968	5.941	6.656
	(1,2)	16.668	16.131	16.509	14.945	16.185
	(2,2)	25.217	24.498	25.051	23.0609	24.717
	(1,3)	30.488	29.654	30.315	27.960	29.966
	(2,3)	37.881	36.896	37.706	34.954	37.355
$p = 1$	(1,1)	6.665	6.383	6.537	5.675	6.275
	(1,2)	15.593	15.131	15.458	14.125	15.185
	(2,2)	23.579	22.961	23.440	21.691	23.158
	(1,3)	28.501	27.784	28.355	26.337	28.061
	(2,3)	35.402	34.557	35.255	32.896	34.958
$p = 2$	(1,1)	6.294	6.055	6.189	5.476	5.974
	(1,2)	14.699	14.301	14.588	13.453	14.363
	(2,2)	22.197	21.663	22.082	20.581	21.849
	(1,3)	26.811	26.190	26.689	24.954	26.446
	(2,3)	33.271	32.540	33.148	31.118	32.904
$Ti - 6Al - 4V$	(1,1)	5.410	5.290	5.357	5.097	5.250
	(1,2)	12.654	12.435	12.598	12.034	12.485
	(2,2)	19.132	18.823	19.073	18.239	18.956
	(1,3)	23.122	22.757	28.654	22.060	22.939
	(2,3)	28.716	28.274	28.654	27.420	28.530

Tableau IV. 10: les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque FGM ( $\text{Si}_3\text{N}_4/\text{SUS304}$ ) simplement appuyée dans un environnement thermique, pour différents modes de vibration.

Les fréquences naturelles		$T_b = 300 \text{ (K)}$				
		$T_t = 300 \text{ (K)}$	$T_t = 400 \text{ (K)}$		$T_t = 600 \text{ (K)}$	
			Température-dépendent	Température-Independent	Température-dépendent	Température-Independent
$\text{Si}_3\text{N}_4$	(1,1)	12.519	12.319	12.389	11.899	12.126
	(1,2)	29.318	29.023	29.181	28.432	28.904
	(2,2)	44.365	43.985	44.223	43.243	43.936
	(1,3)	53.646	53.212	53.498	52.368	53.198
	(2,3)	66.664	66.159	66.513	65.189	66.211
$p = 0.5$	(1,1)	8.617	8.461	8.507	8.127	8.281
	(1,2)	20.176	19.961	20.06	19.515	19.825
	(2,2)	30.526	30.259	30.405	29.714	30.163
	(1,3)	36.909	36.608	36.784	35.997	36.532
	(2,3)	45.862	45.519	45.735	44.827	45.481
$p = 1$	(1,1)	7.551	7.406	7.444	7.090	7.225
	(1,2)	17.676	17.48	17.563	17.066	17.335
	(2,2)	26.738	26.499	26.621	25.999	26.386
	(1,3)	32.325	32.058	32.203	31.498	31.959
	(2,3)	40.161	39.859	40.038	39.23	39.791
$p = 2$	(1,1)	6.777	6.638	6.670	6.330	6.454
	(1,2)	15.844	15.662	15.733	15.265	15.508
	(2,2)	23.947	23.728	23.832	23.251	23.599
	(1,3)	28.938	28.693	28.817	28.162	28.575
	(2,3)	35.932	35.659	35.810	35.062	35.564
SUS304	(1,1)	5.415	5.278	5.300	4.929	5.061
	(1,2)	12.682	12.515	12.561	12.055	12.313
	(2,2)	19.191	18.998	19.065	18.439	18.809
	(1,3)	23.207	22.994	23.074	22.369	22.807
	(2,3)	28.838	28.606	28.704	27.903	28.434

Lorsque le module de Young augmente du métal pur à la céramique pure, les fréquences deviennent plus importantes.

En outre, les fréquences diminuent en augmentant la différence de température entre les surfaces supérieure et inférieure pour la même valeur d'indice de loi de puissance et du mode de forme.

Les fréquences pour les plaques FGM indépendantes sont plus importantes que celles des plaques dépendantes de la température

La variation des quatre premières fréquences en fonction des champs de température uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdaux dans une plaque FGM simplement appuyée est représentée sur les Figures IV. 7- IV. 10.

Le paramètre de fréquence naturelle non dimensionnel est défini comme  $\bar{\omega} = \omega \left( \frac{b^2}{\pi^2} \right) \sqrt{I_0 / D_0}$ , où  $I_0 = \rho h$  et  $D_0 = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  et il est noté que  $\rho$ ,  $\nu$  et  $E$  sont choisis pour être les valeurs de (ZrO<sub>2</sub>/Ti - 6Al - 4V) évalués à une température ambiante.

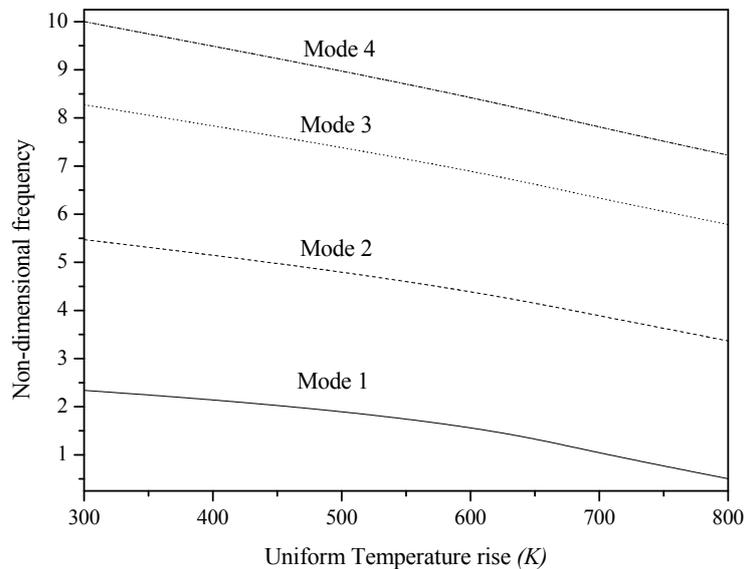


Figure IV.7: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température uniforme d'une plaque FGM (ZrO<sub>2</sub>/Ti - 6Al - 4V) simplement appuyée avec  $(a/h = 10, a = 0.2, p = 1)$ .

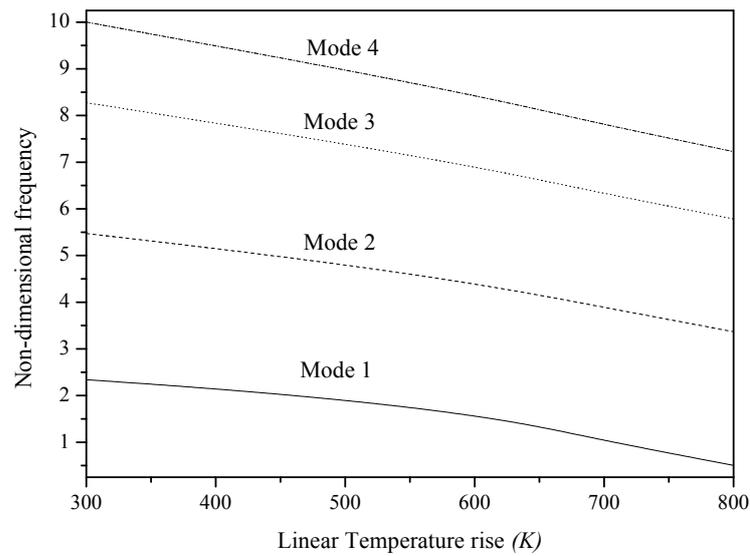


Figure IV.8: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température linéaire d'une plaque FG ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée avec ( $a/h = 10$ ,  $a = 0.2$ ,  $p = 1$ ).

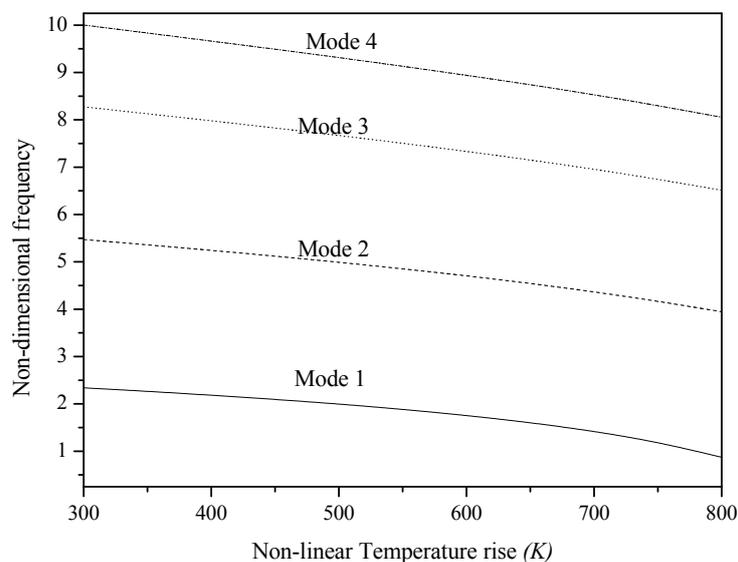


Figure IV.9: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température non linéaire d'une plaque FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée avec ( $a/h = 10$ ,  $a = 0.2$ ,  $p = 1$ ).

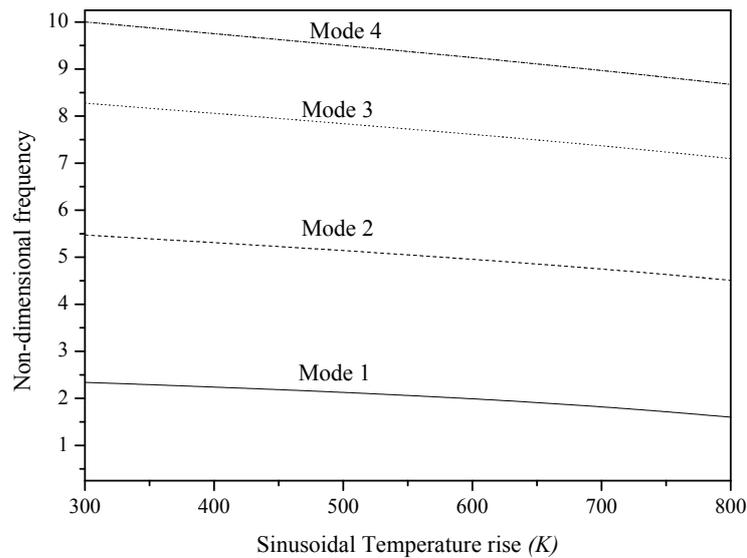


Figure IV.10: les quatre premières fréquences non dimensionnelles en fonction d'un champ de température sinusoïdale d'une plaque FGM ( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée avec ( $a/h = 10$ ,  $a = 0.2$ ,  $p = 1$ ).

Comme prévu, les fréquences sont réduites avec l'augmentation de la température, ce qui est dû à la diminution du module de Young avec l'augmentation des températures. On peut voir que la pente décroissante des fréquences dans les modes inférieurs est plus faible que dans les modes supérieurs. A la même température, on constate que la différence entre deux modes inférieurs consécutifs est supérieure à celle de deux modes supérieurs consécutifs.

#### IV.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, des résultats numériques et leurs interprétations sont présentés à partir de l'analyse de la vibration libre des plaques FGM ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température. Les propriétés matérielles proposées sont variationnelles et reposent sur le principe des puissances. Cette théorie n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur qui est beaucoup plus proche de la réalité tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres de la plaque. Les conditions thermiques uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdales sont imposées aux surfaces supérieure et inférieure d'une plaque FGM simplement appuyée. Le principal avantage de la théorie proposée par rapport aux théories existantes de déformation de cisaillement d'ordre supérieur est que la présente implique moins d'inconnues. Cela indique que les hypothèses de la théorie proposée

peuvent conduire à des résultats précis et peuvent ainsi améliorer le coût de calcul dans les problèmes de géométrie complexe des structures en FGM, en raison de la réduction du nombre d'inconnues.

Au vu des sections précédentes, on peut voir que la théorie proposée fournit des résultats en bon accord avec la théorie des plaques de déformation par cisaillement du second ordre (SSDT) développée par Shahrjerdi et al. (2011) et la théorie de la plaque de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) développée par Huang et Shen (2004) de la plaque FGM vibrée en environnement thermique. Dans cet exemple, les effets des différents paramètres tels que l'indice de la loi de puissance  $p$ , les nombres de mode et les champs de température sur les réponses de vibration libres des plaques FGM sont étudiés ici. Tous les résultats prédits sont réalisés à l'aide de la théorie de la plaque hyperbolique raffinée (RSDT).

En conclusion, nous pouvons dire que toutes les études comparatives ont démontré que la présente théorie proposée est non seulement précise, mais aussi efficace pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM ayant des propriétés matérielles dépendantes de la température.

## **CHAPITRE V**

**ANALYSE DE LA VIBRATION EN FONCTION DE LA  
TEMPÉRATURE DES PLAQUES SANDWICHES FGM  
REPOSANT SUR LA FONDATION WINKLER /  
PASTERNAK**

## Chapitre V : Analyse de la vibration en fonction de la température des plaques sandwiches FGM reposant sur la fondation Winkler / Pasternak

### V.1. Introduction :

Le but de cette étude est de présenter les résultats numériques issus de l'analyse de la vibration libre des plaques sandwichs simplement appuyées reposant sur un sol élastique. Les propriétés des matériaux et le coefficient de dilatation thermique des couches de FGM sont supposés dépendre de la température et varient continuellement à travers l'épaisseur selon une simple distribution de la loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants. Cette analyse repose sur une nouvelle théorie dite théorie de distribution de cisaillement à ordre élevé qui contient seulement quatre variables.

Les charges thermiques sont supposées être uniformes, linéaires et non linéaires dans l'épaisseur. La fondation élastique est modélisée comme la fondation Winkler et Pasternak. Différents résultats numériques, y compris l'effet des conditions de charge thermique, de l'indice de gradient, des paramètres de fondation et de la forme du mode sur la fréquence non dimensionnelle des plaques sandwich FGM sont présentés.

Dans ce chapitre, des résultats numériques sont présentés pour illustrer l'effet de la température sur la vibration libre de plaques sandwichs à gradations fonctionnelles reposant sur différents types de fondations élastiques en utilisant la théorie des plaques de déformation au cisaillement du troisième ordre. Les conditions aux limites considérées sont simplement prises en charge.

### V.2. Résultats :

Le matériau choisi dans cette étude est un mélange d'alliage de titane (Ti – 6Al – 4V) et de zirconium (ZrO<sub>2</sub>) (tableau IV. 1). La couche centrale est entièrement en céramique (ZrO<sub>2</sub>). Les résultats ont été obtenus en considérant les valeurs d'épaisseur  $h = 0,025$  et  $a = 0,2$ .

Pour des raisons de simplicité, la fréquence propre non dimensionnelle et les paramètres de base sont définis comme suit:

$$\bar{\omega} = \omega \left( \frac{a^2}{h} \right) \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_0}{E_0}},$$

$$K_w = \frac{k_w a^4}{D}, \tag{V-1}$$

$$K_p = \frac{k_p a^2}{D},$$

$$D = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)}$$

La fréquence fondamentale non dimensionnelle des plaques sandwich FGM sous élévation de température constante, linéaire et non linéaire est illustrée dans les tableaux V.1, V.2, V.3 et V.4, respectivement.

**Tableau V. 1:** Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwich FGM (ZrO<sub>2</sub>/Ti - 6Al - 4V) simplement appuyée sous élévation de température constante

Température	p	Mode						
			1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
T <sub>0</sub> =T <sub>b</sub> =T <sub>t</sub> =300k	ZrO <sub>2</sub>	(1,1)	8.2882	8.2882	8.2882	8.2882	8.2882	8.2882
		(1,2)	19.3879	19.3879	19.3879	19.3879	19.3879	19.3879
		(2,2)	29.3121	29.3121	29.3121	29.3121	29.3121	29.3121
		(1,3)	35.4266	35.4266	35.4266	35.4266	35.4266	35.4266
		(2,3)	43.9961	43.9961	43.9961	43.9961	43.9961	43.9961
	0.5	(1,1)	6.9082	7.2317	7.4343	7.0912	7.3257	7.1627
		(1,2)	16.2336	16.9854	17.4459	16.6624	17.1964	16.8202
		(2,2)	24.6284	25.7586	26.4391	25.2771	26.0675	25.5046
		(1,3)	29.8223	31.1839	31.9956	30.6067	31.5503	30.8740
		(2,3)	37.1251	38.8089	39.7995	38.0995	39.2528	38.4195
	1	(1,1)	6.3639	6.7770	7.0509	6.5937	6.9059	6.6909
		(1,2)	14.9834	15.9509	16.5745	15.5277	16.2401	15.7411
		(2,2)	22.7657	24.2290	25.1511	23.5961	24.6515	23.9022
		(1,3)	27.5897	29.3583	30.4586	28.5982	29.8591	28.9570
		(2,3)	34.3823	36.5786	37.9218	35.6426	37.1844	36.0701
	2	(1,1)	5.9318	6.3839	6.7051	6.1786	6.5390	6.2941
		(1,2)	13.9808	15.0562	15.7894	14.5780	15.4032	14.8296
		(2,2)	21.2600	22.9063	23.9923	22.1863	23.4121	22.5444
		(1,3)	25.7772	27.7802	29.0772	26.9123	28.3786	27.3300
		(2,3)	32.1435	34.6520	36.2369	33.5782	35.3742	34.0723
T <sub>0</sub> =T <sub>b</sub> =T <sub>t</sub> =400k	ZrO <sub>2</sub>	(1,1)	7.8747	7.8747	7.8747	7.8747	7.8747	7.8747
		(1,2)	18.3978	18.3978	18.3978	18.3978	18.3978	18.3978
		(2,2)	27.7857	27.7857	27.7857	27.7857	27.7857	27.7857
		(1,3)	33.5602	33.5602	33.5602	33.5602	33.5602	33.5602
		(2,3)	41.6408	41.6408	41.6408	41.6408	41.6408	41.6408
	0.5	(1,1)	6.6255	6.9221	7.1068	6.7934	7.0073	6.8586
		(1,2)	15.5418	16.2335	16.6559	15.9359	16.4256	16.0814
		(2,2)	23.5453	24.5883	25.2153	24.1426	24.8702	24.3543
		(1,3)	28.4875	29.7460	30.4959	29.2102	30.0809	29.4604
		(2,3)	35.4248	36.9842	37.9027	36.3236	37.3908	36.6253
	1	(1,1)	6.1328	6.5126	6.7625	6.3444	6.6296	6.4331
		(1,2)	14.4079	15.3010	15.8741	14.9098	15.5648	15.1076
		(2,2)	21.8531	23.2086	24.0614	22.6201	23.5957	22.9074
		(1,3)	26.4574	28.0991	29.1202	27.3898	28.5588	27.7292
		(2,3)	32.9281	34.9720	36.2245	34.0946	35.5300	34.5032
	2	(1,1)	5.7395	6.1578	6.4517	5.9684	6.2989	6.0743
		(1,2)	13.4916	14.4906	15.1680	14.0454	14.8087	14.2813
		(2,2)	20.4727	22.0071	23.0186	21.3319	22.4737	21.6739
		(1,3)	24.7925	26.6632	27.8768	25.8458	27.2174	26.2492
		(2,3)	30.8663	33.2152	34.7077	32.1981	33.8876	32.6831

**Tableau V. 2:** Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwichFGM( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) simplement appuyée sous élévation linéaire de la température

Température	P	Mode						
			1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
Tb=300k Tb=400k	ZrO <sub>2</sub>	(1,1)	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182
		(1,2)	18.6226	18.6226	18.6226	18.6226	18.6226	18.6226
		(2,2)	28.2846	28.2846	28.2846	28.2846	28.2846	28.2846
		(1,3)	34.2310	34.2310	34.2310	34.2310	34.2310	34.2310
		(2,3)	42.5792	42.5792	42.5792	42.5792	42.5792	42.5792
	0.5	(1,1)	6.5881	6.8684	7.0470	6.7458	6.9368	6.7941
		(1,2)	15.7104	16.3984	16.8218	16.1023	16.5735	16.2286
		(2,2)	23.9198	24.9683	25.6007	24.5214	25.2330	24.7107
		(1,3)	28.9949	30.2631	31.0197	29.7254	30.5800	29.9502
		(2,3)	36.1358	37.7113	38.6385	37.0476	38.1000	37.3205
	1	(1,1)	6.1067	6.4603	6.7005	6.3020	6.5544	6.3687
		(1,2)	14.5605	15.4424	16.0142	15.0560	15.6829	15.2281
		(2,2)	22.1893	23.5437	24.3989	22.9577	23.9064	23.2139
		(1,3)	26.9146	28.5593	29.5831	27.8526	28.9930	28.1558
		(2,3)	33.5709	35.6234	36.8785	34.7490	36.1542	35.1148
	2	(1,1)	5.7296	6.1099	6.3891	5.9351	6.2238	6.0162
		(1,2)	13.6422	14.6182	15.2882	14.1833	14.9083	14.3894
		(2,2)	20.7937	22.3147	23.3197	21.6494	22.7510	21.9529
		(1,3)	25.2284	27.0895	28.2941	26.2835	27.6102	26.6405
		(2,3)	31.4794	33.8233	35.3018	32.8208	34.4587	33.2476
Tb=300k Tb=600k	ZrO <sub>2</sub>	(1,1)	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467
		(1,2)	16.8947	16.8947	16.8947	16.8947	16.8947	16.8947
		(2,2)	26.1255	26.1255	26.1255	26.1255	26.1255	26.1255
		(1,3)	31.7786	31.7786	31.7786	31.7786	31.7786	31.7786
		(2,3)	39.7661	39.7661	39.7661	39.7661	39.7661	39.7661
	0.5	(1,1)	5.7895	5.9296	6.0315	5.8652	5.9006	5.8220
		(1,2)	14.5665	15.0903	15.4209	14.8630	15.1615	14.8936
		(2,2)	22.4501	23.3084	23.8324	22.9412	23.4608	23.0286
		(1,3)	27.3115	28.3707	29.0075	27.9207	28.5671	28.0371
		(2,3)	34.1687	35.5138	36.3099	34.9465	35.7773	35.1076
	1	(1,1)	5.4976	5.6605	5.7935	5.5821	5.6237	5.5303
		(1,2)	13.6526	14.3124	14.7549	14.0199	14.4131	14.0681
		(2,2)	20.9996	22.0975	22.8019	21.6202	22.3093	21.7445
		(1,3)	25.5424	26.9063	27.7637	26.3187	27.1785	26.4820
		(2,3)	31.9493	33.6917	34.7643	32.9483	34.0543	33.1697
	2	(1,1)	5.2851	5.4364	5.5823	5.3588	5.3954	5.3069
		(1,2)	12.9371	13.6489	14.1595	13.3271	13.7746	13.3943
		(2,2)	19.8434	21.0610	21.8808	20.5258	21.3204	20.6820
		(1,3)	24.1210	25.6511	26.6524	24.9871	25.9834	25.1886
		(2,3)	30.1526	32.1303	33.3857	31.2839	32.5693	31.5500

**Tableau V. 3:** Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwich FGM (ZrO<sub>2</sub>/Ti - 6Al - 4V) simplement appuyée sous élévation non- linéaire de la température

Température	P	Mode	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
Tb=300k Tb=400k	ZrO <sub>2</sub>	(1,1)	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182
		(1,2)	18.6226	18.6226	18.6226	18.6226	18.6226	18.6226
		(2,2)	28.2846	28.2846	28.2846	28.2846	28.2846	28.2846
		(1,3)	34.2310	34.2310	34.2310	34.2310	34.2310	34.2310
		(2,3)	42.5792	42.5792	42.5792	42.5792	42.5792	42.5792
	1	(1,1)	6.1057	6.4581	6.6982	6.3002	6.5769	6.3906
		(1,2)	14.5597	15.4406	16.0124	15.0544	15.7166	15.2609
		(2,2)	22.1886	23.5422	24.3976	22.9564	23.9530	23.2598
		(1,3)	26.9140	28.5581	29.5820	27.8515	29.0485	28.2109
		(2,3)	33.5705	35.6226	36.8778	34.7482	36.2232	35.1841
	2	(1,1)	5.7293	6.1080	6.3868	5.9337	6.2465	6.0373
		(1,2)	13.6418	14.6164	15.2862	14.1820	14.9419	14.4205
		(2,2)	20.7933	22.3131	23.3181	21.6482	22.7973	21.9967
		(1,3)	25.2280	27.0881	28.2927	26.2824	27.6656	26.6934
		(2,3)	31.4791	33.8222	35.3008	32.8200	34.5280	33.3147
Tb=300k Tb=600k	ZrO <sub>2</sub>	(1,1)	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467
		(1,2)	16.8947	16.8947	16.8947	16.8947	16.8947	16.8947
		(2,2)	26.1255	26.1255	26.1255	26.1255	26.1255	26.1255
		(1,3)	31.7786	31.7786	31.7786	31.7786	31.7786	31.7786
		(2,3)	39.7661	39.7661	39.7661	39.7661	39.7661	39.7661
	1	(1,1)	5.4824	5.6263	5.7570	5.5538	5.7047	5.6115
		(1,2)	13.6391	14.2835	14.7254	13.9955	14.5227	14.1766
		(2,2)	20.9877	22.0724	22.7770	21.5987	22.4542	21.8888
		(1,3)	25.5314	26.8829	27.7408	26.2988	27.3480	26.6517
		(2,3)	31.9402	33.6723	34.7457	32.9317	34.2612	33.3785
	2	(1,1)	5.2798	5.4071	5.5467	5.3387	5.4795	5.3869
		(1,2)	12.9313	13.6225	14.1292	13.3081	13.8853	13.4992
		(2,2)	19.8377	21.0368	21.8540	20.5080	21.4660	20.8213
		(1,3)	24.1156	25.6281	26.6272	24.9702	26.1539	25.3528
		(2,3)	30.1477	32.1100	33.3640	31.2690	32.7782	31.7534

À partir de ces tableaux, nous pouvons constater que la fréquence non dimensionnelle est similaire pour les plaques sandwich FGM sous élévation linéaire de la température et élévation non linéaire de la température, en particulier dans les plaques sandwich FGM symétriques. Nous pouvons remarquer aussi que les fréquences fondamentales augmentent avec le nombre du mode et diminuent avec l'augmentation de l'indice matériel.

Le tableau 6 présente l'effet des fondations de Winkler / Pasternak sur la réponse en vibration libre des plaques sandwich FGM sous élévation de température non linéaire.

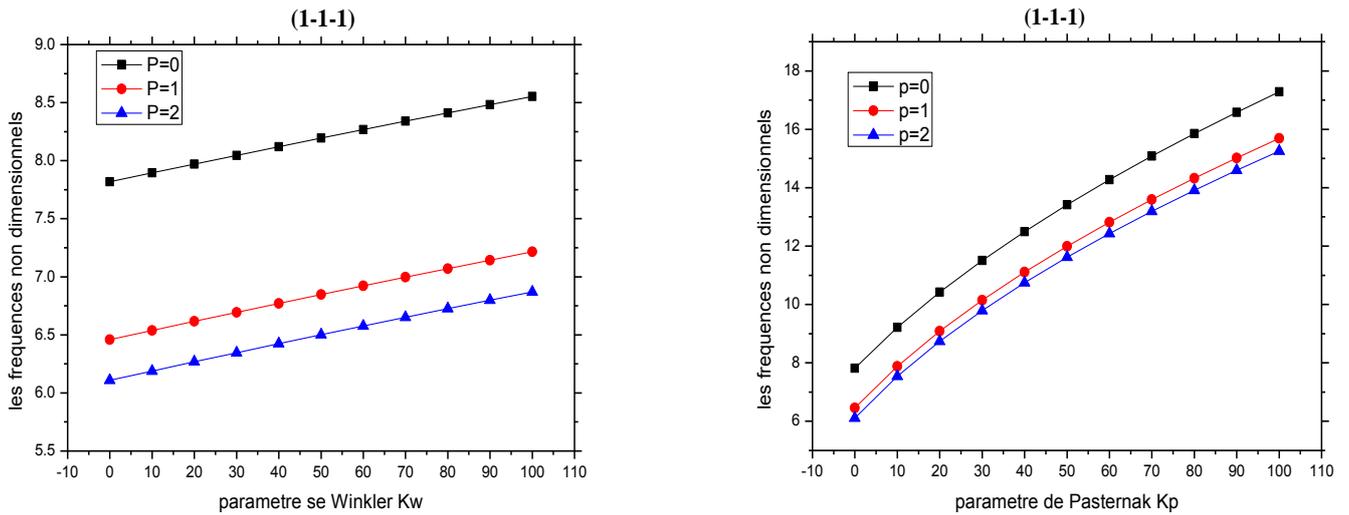
**Tableau V. 4:** Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque

Sandwich FGM( $ZrO_2/Ti - 6Al - 4V$ ) reposant sur la fondation Winkler / Pasternak

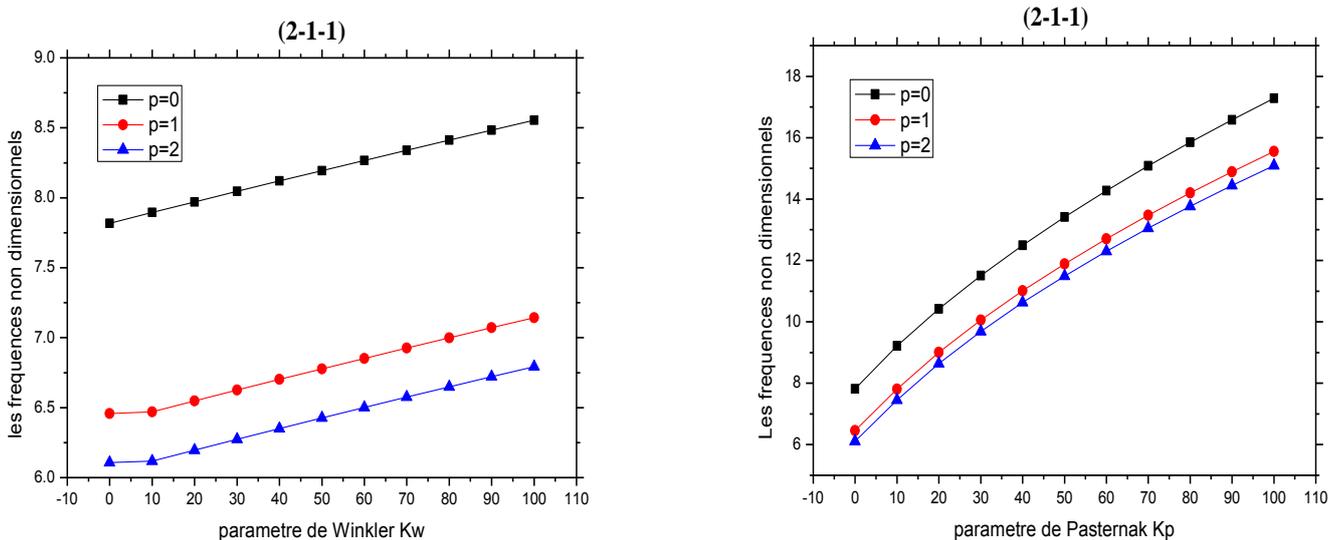
	Kw	Kp	p	Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles					
				1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2	2-2-1	2-1-1
Tb=300k Tb=400k	0	0	0	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182	7.8182
			1	6.1057	6.4581	6.6982	6.3002	6.5769	6.3906
			2	5.7293	6.1080	6.3868	5.9337	6.2465	6.0373
	100	0	0	8.5536	8.5536	8.5536	8.5536	8.5536	8.5536
			1	6.8539	7.2154	7.4558	7.0549	7.3319	7.1430
			2	6.4760	6.8706	7.1513	6.6915	7.0068	6.7927
	0	100	0	17.2838	17.2838	17.2838	17.2838	17.2838	17.2838
			1	15.1209	15.6862	16.0154	15.4472	15.8268	15.5503
			2	14.5841	15.2527	15.6537	14.9673	15.4227	15.0900
	100	100	0	17.6286	17.6286	17.6286	17.6286	17.6286	17.6286
			1	15.4381	16.0127	16.3466	15.7700	16.1550	15.8742
			2	14.8932	15.5737	15.9807	15.2834	15.7458	15.4076
Tb=300k Tb=600k	0	0	0	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467	6.5467
			1	5.4824	5.6263	5.7570	5.5538	5.7047	5.6115
			2	5.2798	5.4071	5.5467	5.3387	5.4795	5.3869
	100	0	0	7.4093	7.4093	7.4093	7.4093	7.4093	7.4093
			1	6.3050	6.4814	6.6231	6.3972	6.5609	6.4554
			2	6.0820	6.2558	6.4121	6.1699	6.3326	6.2219
	0	100	0	16.7462	16.7462	16.7462	16.7462	16.7462	16.7462
			1	14.8798	15.3619	15.6445	15.1577	15.4853	15.2473
			2	14.4132	14.9854	15.3297	14.7412	15.1292	14.8427
	100	100	0	17.1017	17.1017	17.1017	17.1017	17.1017	17.1017
			1	15.2020	15.6952	15.9834	15.4864	15.8206	15.5775
			2	14.7258	15.3120	15.6634	15.0620	15.4586	15.1655

À partir de ce tableau, nous pouvons constater que la fréquence non dimensionnelle diminue avec l'élévation de la température et elle devient plus importante avec l'existence des paramètres de fondation élastique. On remarque aussi que Le paramètre de fondation Pasternak a plus d'influence sur l'accroissement de la fréquence non dimensionnelle que le paramètre de Winkler.

Les figures 5 et 6 montrent l'effet des paramètres de fondation de Winkler Kw et de Pasternak Kp sur la fréquence non dimensionnelle de la plaque sandwich FGM (1-1-1) et (2-1-1) respectivement avec diverses valeurs du paramètre d'homogénéité p.



**Figure V. 1:** Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwich(1-1-1) en fonction du fondation Winkler / Pasternak( $k = 2$ ,  $T_b = 400$  K).



**Figure V. 2:** Les paramètres non dimensionnels des fréquences naturelles d'une plaque sandwich(2-1-1) en fonction du fondation Winkler / Pasternak( $k = 2$ ,  $T_b = 400$  K).

Il est clair qu'avec l'augmentation des paramètres de base  $K_w$  et  $K_p$ , la fréquence non dimensionnelle augmente pour les deux cas de plaques. Le paramètre de fondation Pasternak a plus d'effet sur l'augmentation de la fréquence non dimensionnelle que le paramètre de Winkler.

### **V.3. Conclusion :**

Dans ce chapitre, la théorie des plaques de déformation par cisaillement d'ordre élevé est utilisée pour étudier la vibration libre, dépendant de la température, des plaques sandwich fonctionnellement graduées avec des conditions aux limites simplement appuyées reposant sur les fondations de Winkler, Pasternak. On suppose que les propriétés matérielles des couches de FGM varient continuellement dans l'épaisseur selon une simple distribution de la loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants. Les équations de mouvement sont dérivées du principe de Hamilton. Une étude paramétrique complète est réalisée pour évaluer l'effet de la température non linéaire, des paramètres de fondation, de l'indice de la loi de puissance, de la forme du mode et du schéma de plaque sandwich sur la fréquence non dimensionnelle.

Les résultats numériques montrent que les fréquences non dimensionnelles des plaques sandwich FGM sont réduites en augmentant la température et le paramètre d'inhomogénéité. La fréquence non dimensionnelle est élevée dans le sandwich (1-2-1). Les résultats confirment également que les paramètres de fondations élastiques ont un effet significatif sur la réponse en vibration libre des plaques de FGM.

# **CONCLUSION GÉNÉRALE**

## Conclusion générale :

Une nouvelle théorie des plaques de déformation par cisaillement hyperbolique est développée pour les vibrations libres dépendant de la température soumises à des champs de température uniformes, linéaires, non linéaires et sinusoïdaux. Les propriétés matérielles des plaques FGM sont supposées dépendre de la température et classées dans l'épaisseur selon une distribution de puissance en termes de fractions volumiques des constituants. En envisageant de simplifier davantage les suppositions des théories existantes, avec l'incorporation d'un terme intégral indéterminé, la théorie actuelle n'a que quatre inconnues par rapport aux autres théories de la déformation par cisaillement. L'équation du mouvement de la structure vibrante obtenue par le principe classique d'Hamilton est résolue par les solutions de Navier. Les points principaux suivants peuvent être obtenus par la présente étude:

1. La précision de ce travail a été vérifiée en le comparant aux théories existantes de la déformation par cisaillement (HSDT) .
2. La fréquence diminue lors de l'augmentation de la température dans tous les types de champs de température.
3. La présente théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique est précise, et simple à prédire l'analyse vibratoire des plaques FGM en environnement thermique.

Enfin, la formulation se prête particulièrement bien à l'étude de plusieurs problèmes liés à la déformation hydro-thermomécanique des structures laminées et FGM (Bouderba *et al.* 2016; Beldjelili *et al.* 2016; Bousahla *et al.* 2016), également en utilisant le modèle de gradient de contrainte non local pour l'analyse du comportement mécanique des nanostructures renforcées avec des nanoparticules et des nanotubes de carbone (Bessaim *et al.* 2015; Kolahchi and Bidgoli, 2016; Arani and Kolahchi, 2016; Zamanian *et al.* 2017; Shokravi, 2017; Hajmohammad *et al.* 2018; Amnieh *et al.* 2018), et qui sera examiné dans un avenir proche. Les calculs actuels fournissent également une base de référence solide pour la vérification des éléments finis et d'autres simulations numériques de la mécanique des nanomatériaux par les FGM.

# *Références bibliographique*

- [Abualnour, M et al. 2018] Abualnour, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., AddaBedia, E.A., Mahmoud, S.R. , "A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates", *Composite Structures.*, 184, 688–697. 2018.
- [Afaq. K.S 2003] Afaq. K.S : Développement d'ONU nouveau modèle verser les structures composites multicouches et sandwichs Avec prix en Compte du cisaillement transversal et des Effets de bord. PhD thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [Ahmed Amine Daikh. 2019] Ahmed Amine Daikh, Temperature dependent vibration analysis of functionally graded sandwich plates resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation, *Materials Research Express*, Volume 6, Number 6, 2019.
- [Ahmed, A 2014] Ahmed, A. , “Post buckling analysis of sandwich beams with functionally graded faces using a consistent higher order theory”, *Int. J. Civil, Struct. Environ.*, 4(2), 59-64. 2014.
- [Ait Atmane, H et al. 2010] Ait Atmane, H ., Tounsi, A ., Mechab,I., Adda ,B. E. A : Analyse des vibrations libres des plaques en FGM posées sur appuis élastiques en utilisant une nouvelle fonction de cisaillement. *Int. J. Mech and Mater inDesign.* 6 (2), 113-121, 2010.
- [Akavci, S.S 2014] Akavci SS. An efficient shear deformation theory for free vibration of functionally graded thick rectangular plates on elastic foundation. *Compos Struct*; 108:667–76, 2014.
- [Akavci, S.S 2016] Akavci, S.S, “Mechanical behavior of functionally graded sandwich plates on elastic foundation”, *Composites Part B*, 96, 136 – 152, 2016.
- [Akbaş, Ş.D 2015] Akbaş, Ş.D., “Wave propagation of a functionally graded beam in thermal environments”, *Steel and Composite Structures.*, 19(6), 1421-1447. 2015.
- [Alijani F et al. 2011] Alijani F, Amabili M, Karagiozis K, Bakhtiari-Nejad F. Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. *J Sound Vib*; 330(7):1432–54, 2011.
- [Alijani, F et al. 2011] Alijani, F., Bakhtiari-Nejad, F., Amabili, M., "Nonlinear vibrations of FGM rectangular plates in thermal environments", *Nonlinear Dynamics.*, 66(3), 251-270. 2011.

# *Références bibliographique*

- [Allahverdizadeh, A et al. 2008] Allahverdizadeh, A., Naei, M. H., Bahrami, M. N., "Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates", *Journal of sound and vibration.*, 310(4), 966-984. 2008.
- [Ambartsumian S.A 1969] Ambartsumian S.A: *Théorie des plaques anisotrope*. Technomic Publishing Co, 1969.
- [Amnieh, H. B et al. 2018] Amnieh, H. B., Zamzam, M. S., Kolahchi, R., "Dynamic analysis of non-homogeneous concrete blocks mixed by SiO<sub>2</sub> nanoparticles subjected to blast load experimentally and theoretically", *Construction and Building Materials.*, 174, 633-644. 2018.
- [Arani, A. G et al. 2016] Arani, A. G., Cheraghbak, A., Kolahchi, R., "Dynamic buckling of FGM viscoelastic nano-plates resting on orthotropic elastic medium based on sinusoidal shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics.*, 60(3), 489-505. 2016.
- [Arani, A. J et al. 2016] Arani, A. J., Kolahchi, R., "Buckling analysis of embedded concrete columns armed with carbon nanotubes", *Computers and Concrete.*, 17(5), 567-578. 2016.
- [Attia Bachiri et al. 2018] Attia Bachiri., Mohamed Bourada., Abdelkader Mahmoudi., Samir Benyoucef and Abdelouahed Tounsi: Thermodynamic effect on the bending response of elastic foundation FG plate by using a novel four variable refined plate theory, *JOURNAL OF THERMAL STRESSES* , VOL. 41, NO. 8, 1042–1062, 2018.
- [Attia, A et al. 2015] Attia, A., Tounsi, A., Bedia, E. A., Mahmoud, S. R., "Free vibration analysis of functionally graded plates with temperature-dependent properties using various four variable refined plate theories", *Steel and composite structures.*, 18(1), 187-212. 2015.
- [Aydogdu M et al. 2008] Aydogdu M. Conditions for functionally graded plates to remain flat under inplane loads by classical plate theory. *Compos Struct*;82(1):155–7, 2008.
- [Aydogdu M et al. 2009] Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Compos Struct*; 89(1):94–101, 2009.

# *Références bibliographique*

- [B. Fahsi et al. 2019] B. Fahsi., R. Bachir Bouiadjra., A. Mahmoudi., S. Benyoucef., A. Tounsi: ASSESSING THE EFFECTS OF POROSITY ON THE BENDING, BUCKLING, AND VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADED BEAMS RESTING ON AN ELASTIC FOUNDATION BY USING A NEW REFINED QUASI-3D THEORY, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 55, No. 2, May, 2019.
- [Bao G et al. 1995] Bao G., Wang L., Multiple cracking in functionally graded ceramic/metal coatings, *Int. J. Solids Structures*; 32 (19): 2853–2871, 1995.
- [Batra RC et al. 2002] Batra RC, Vidoli S. Higher-order piezoelectric plate theory derived from a three-dimensional variational principle. *AIAA J*; 40(1):91–104, 2002.
- [Behjat B et al. 2009] Behjat B, Sadighi M, Armin A, Abbasi M, Salehi M. Static, Dynamic and free vibration analysis of functionally graded piezoelectric panels using finite element method. *J Intell Mater Syst Struct*; 20(13):1635–46, 2009.
- [Behravan Rad, A 2015] Behravan Rad, A., "Thermo-elastic analysis of functionally graded circular plates resting on a gradient hybrid foundation", *Applied Mathematics and Computation*, 256, 276-298. 2015.
- [Beldjelili, Y et al. 2016] Beldjelili, Y., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., "Hygro-thermo-mechanical bending of S-FGM plates resting on variable elastic foundations using a four-variable trigonometric plate theory", *Smart Structures and Systems.*, 18(4), 755-786. 2016.
- [Bessaim, A et al. 2015] Bessaim, A., Houari, M. S. A., Bernard, F., Tounsi, A., "A nonlocal quasi-3D trigonometric plate model for free vibration behaviour of micro/nanoscale plates", *Structural Engineering and Mechanics.*, 56(2), 223-240. 2015.
- [Bessaim.A 2014] Bessaim.A :Etude de l'influence de cisaillement transverse et de la déformation normale sur le comportement statique et dynamique des structures FGM. [hdl.handle.net/123456789/1512](http://hdl.handle.net/123456789/1512). these de doctorat :chapitre 4,2014
- [Bishop A et al. 1993] Bishop A., Lin C.Y., Navaratnam M., Rawlings R.D., McShane H.B., A functionally gradient material produced by a powder metallurgical process, *Journal of Materials Science Letters*; 12 (19) :1516-18, 1993.

# *Références bibliographique*

- [Boch P et al. 1986] Boch P., Chartier T., Huttepain M., Tape casting of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ZrO<sub>2</sub> laminated Composites, *J. Am. Ceram. Soc*; 69 (8):191-192, 1986.
- [Bodaghi M et al. 2011] Bodaghi M, Saidi AR. Stability analysis of functionally graded rectangular plates under nonlinearly varying in-plane loading resting on elastic foundation. *Arch Appl Mech*; 81(6):765–80, 2011.
- [Bouazza M et al. 2010] Bouazza M, Tounsi A, Adda-Bedia EA, Megueni A. Thermoelastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach. *Comput Mater Sci*;49(4):865–70, 2010.
- [Bouderba, B et al. 2016] Bouderba, B., Houari, M. S. A., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., "Thermal stability of functionally graded sandwich plates using a simple shear deformation theory", *Structural Engineering and Mechanics*, 58(3), 397-422. 2016.
- [Bousahla, A. A et al. 2016] Bousahla, A. A., Benyoucef, S., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., "On thermal stability of plates with functionally graded coefficient of thermal expansion", *Structural Engineering and Mechanics.*, 60(2), 313-335. 2016.
- [Chakraverty S et al. 2014] Chakraverty S, Pradhan KK. Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz method. *Int J Appl Mech* ;6(4):1450043, 2014.
- [Chakraverty, S et al. 2014] Chakraverty, S., Pradhan, K. K., "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions", *Aerospace Science and Technology.*, 36, 132-156. 2014.
- [Chen CS 2005] Chen CS. Nonlinear vibration of a shear deformable functionally graded plate. *Compos Struct*;68(3):295–302, 2005.
- [Chikh, A et al. 2017] Chikh, A., Tounsi, A., Hebali, H., Mahmoud, S. R., "Thermal buckling analysis of cross-ply laminated plates using a simplified HSDT", *Smart Structures and Systems.*, 19(3), 289-297. 2017.
- [Cui, D et al. 2016] Cui, D., Hu, H., "Thermal buckling and natural vibration of a rectangular thin plate with in-plane stick-slip-stop boundaries", *Journal of Vibration and Control.*, 22(7), 1950-1966. 2016.
- [Darilmaz, K 2015] Darilmaz, K., "Vibration analysis of functionally graded material (FGM) grid systems", *Steel and Composite Structures.*, 18(2), 395-408. 2015.

# *Références bibliographique*

- [Darilmaz, K et al. 2015] Darilmaz, K., Aksoylu, M. G., Durgun, Y., "Buckling analysis of functionally graded material grid systems", *Structural Engineering and Mechanics.*, 54(5), 877-890. 2015.
- [Dau. F, O et al. 2006] Dau. F, O. Polit, and M. Touratier: Plaque de C1 et shell éléments finis pour l'analyse géométriquement non linéaire de structures multicouche. *Computers and Structures*, 84:1264-1274, 2006.
- [Delale F et al. 1983] Delale F., Erdogan F., The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics*; 50 (3): 609-614, 1983.
- [DinhDuc, N et al. 2015] DinhDuc, N., Hong Cong, P., "Nonlinear vibration of thick FGM plates on elastic foundation subjected to thermal and mechanical loads using the first-order shear deformation plate theory", *Cogent engineering.*, 2(1), 1045222. 2015.
- [Du C et al. 2013] Du C, Li Y. Nonlinear resonance behavior of functionally graded cylindrical shells in thermal environments. *Compos Struct*; 102:164–74, 2013.
- [Du C et al. 2014] Du C, Li Y, Jin X. Nonlinear forced vibration of functionally graded cylindrical thin shells. *Thin-Walled Struct*; 78:26–36, 2014.
- [Ebrahimi MJ et al. 2014] Ebrahimi MJ, Najafizadeh MM. Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells. *Appl Math Model*;38(1):308–24, 2014.
- [Ebrahimi, F et al. 2013] Ebrahimi, F., "Analytical investigation on vibrations and dynamic response of functionally graded plate integrated with piezoelectric layers in thermal environment", *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, 20(10), 854-870. 2013.
- [Ebrahimi, F et al. 2015] Ebrahimi, F., Dashti, S., "Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam", *Steel and Composite Structures.*, 19(5), 1279-1298. 2015.
- [Ebrahimi, F et al. 2016a] Ebrahimi, F., Jafari, A., "Thermo-mechanical vibration analysis of temperature-dependent porous FG beams based on Timoshenko beam theory", *Struct. Eng. Mech.*, 59(2), 343-371. 2016.

# *Références bibliographique*

- [Ebrahimi, F et al. 2016b] Ebrahimi, F., Habibi, S., "Deflection and vibration analysis of higher-order shear deformable compositionally graded porous plate", *Steel and Composite Structures.*, 20(1), 205-225. 2016.
- [Fallah A et al. 2013] Fallah A, Aghdam MM, Kargarnovin MH. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method. *Arch Appl Mech*;83(2):177–91, 2013.
- [Fatima Boukhatem et al. 2019] Fatima Boukhatem., Aicha Bessaim., Abdelhakim Kaci., Abderrahmane Mouffoki., Mohammed Sid Ahmed Houari., Abdelouahed Tounsi., Houari Heireche., Abdelmoumen Anis Bousahla: A Novel Refined Plate Theory for Free Vibration Analyses of Single-Layered graphene Sheets Lying on Winkler-Pasternak Elastic Foundations , *Journal of Nano Research ISSN: 1661-9897, Vol. 58, pp 151-164,2019.*
- [Feldman, E et al. 1997] Feldman, E, Aboudi, J, "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading", *Compos Struct*, 38, 29–36, 1997.
- [Feldman, E et al. 1997] Shi G. A new simple third-order shear deformation theory of plates. *Int JSolids Struct*;44(13):4399–417, 2007.
- [Ferreira A et al. 2005] Ferreira A, Roque C, Jorge R. Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Comput Struct*; 83(27):2225–37, 2005.
- [Ferreira, A. J. M et al. 2009] Ferreira, A. J. M., Castro, L. M., Bertoluzza, S., "A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory", *Composite Structures.*, 89(3), 424-432. 2009.
- [Ghannadpour SAM et al. 2009] Ghannadpour SAM ,Alinia MM. Nonlinear analysis of pressure loaded FGM plates. *Compos Struct*; 88(3):354–9, 2009.
- [Gilhooley DF et al. 2007] Gilhooley DF, Batra RC, Xiao JR, McCarthy MA, Gillespie Jr JW. Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions. *Compos Struct*; 80(4):539–52, 2007.

# *Références bibliographique*

- [Hadjira Hellal et al. 2019] Hadjira Hellal., Mohamed Bourada., Habib Hebali., Fouad Bourada., Abdelouahed Tounsi., Abdelmoumen A Bousahla., SR Mahmoud: Dynamic and stability analysis of functionally graded material sandwich plates in hygro-thermal environment using a simple higher shear deformation theory, *Journal of Sandwich Structures & Materials* 0(0) 1–38.2019.
- [Hajmohammad, M. H et al. 2017a] Hajmohammad, M. H., Zarei, M. S., Nouri, A., Kolahchi, R., "Dynamic buckling of sensor/functionally graded-carbon nanotube-reinforced laminated plates/actuator based on sinusoidal-visco-piezoelectricity theories", *Journal of Sandwich Structures & Materials.*, 1099636217720373. 2017.
- [Hajmohammad, M. H et al. 2017b] Hachemi, H., Kaci, A., Houari, M. S. A., Bourada, M., Tounsi, A., Mahmoud, S. R., "A new simple three-unknown shear deformation theory for bending analysis of FG plates resting on elastic foundations", *Steel and Composite Structures.*, 25(6), 717-726. 2017
- [Hajmohammad, M. H et al. 2018] Hajmohammad, M. H., Maleki, M., Kolahchi, R., "Seismic response of underwater concrete pipes conveying fluid covered with nano-fiber reinforced polymer layer", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.*, 110, 18-27. 2018.
- [Heinz P et al. 2011] Heinz P., Herrmann M., Sobek W., "Herstellungsverfahren und Anwendungsbereiche für funktional gradierte Bauteile im Bauwesen", *Abschlussbericht Forschungsinitiative Zukunft Bau (1/2011)*, Stuttgart, ILEK, 2011.
- [Hirwani, C. K et al. 2017] Hirwani, C. K., Panda, S. K., Mahapatra, T. R., Mahapatra, S. S., "Numerical study and experimental validation of dynamic characteristics of delaminated composite flat and curved shallow shell structure", *Journal of Aerospace Engineering.*, 30(5), 04017045. 2017.
- [Hirwani, C. K et al. 2018] Hirwani, C. K., Panda, S. K., "Numerical nonlinear frequency analysis of pre-damaged curved layered composite structure using higher-order finite element method", *International Journal of Non-Linear Mechanics.*, 102, 14-24. 2018.

# *Références bibliographique*

- [Hirwani, C. K et al. 2018a] Hirwani, C. K., Panda, S. K., Mahapatra, T. R., “Thermomechanical deflection and stress responses of delaminated shallow shell structure using higher-order theories”, *Composite Structures.*, 184, 135-145. 2018a.
- [Hirwani, C. K et al. 2018b] Hirwani, C. K., Panda, S. K., Mahapatra, T. R., “Nonlinear Finite Element Analysis of Transient Behavior of Delaminated Composite Plate”, *Journal of Vibration and Acoustics.*, 140(2), 021001. 2018b.
- [Hirwani, C. K et al. 2018c] Hirwani, C. K., Biswash, S., Mehar, K., Panda, S. K., “Numerical Flexural Strength Analysis of Thermally Stressed Delaminated Composite Structure under Sinusoidal Loading”, In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*,22(1), 012019. 2018c.
- [Hosseini-Hashemi et al. 2010] Hosseini-Hashemi S, Rokni Damavandi Taher H, Akhavan H, Omidi M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Appl Math Model*;34(5):1276–91, 2010.
- [Hosseini-Hashemi et al. 2011c] Hosseini-Hashemi, S, Fadaee, M, Atashipour, SR, “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates”, *Int J Mech Sci*, 53, 11–22, 2011c.
- [Houari MSA 2011] Houari MSA, *Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances.* Thèse de Doctorat, Université de DjilalliLiabès Sidi Bel Abbes, Algérie, 2011.
- [Houari, M. S. A et al. 2016] Houari, M. S. A., Tounsi, A., Bessaim, A., Mahmoud, S. R., “A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates”, *Steel and Composite Structures.*, 22(2), 257-276. 2016.
- [Hu Y et al. 2011] Hu Y, Zhang X. Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate. *Mech Based Des Struct Mach* ;39(3):367–77, 2011.
- [Huang, X. L et al. 2004] Huang, X. L., Shen, H. S. , "Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments". *International Journal of Solids and Structures.*, 41(9), 2403-2427. 2004.
- [J.N. Reddy 1984] J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*; 51 (4): 745-752, 1984.
- [J.N. Reddy 1997] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composites Plates: Theory and Analysis.* CRC Press, Boca Raton, 1997.

# *Références bibliographique*

- [Javaheri R et al. 2002a] Javaheri R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded plates. *AIAA J*; 40(1):162–9, 2002a.
- [Javaheri R et al. 2002b] Javaheri R, Eslami MR. Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading. *ZAMM – J Appl Math Mech*; 82(4):277–83, 2002b.
- [Joshi, P. V et al. 2016] Joshi, P. V., Jain, N. K., Ramtekkar, G. D., Viridi, G. S. , "Vibration and buckling analysis of partially cracked thin orthotropic rectangular plates in thermal environment", *Thin-Walled Structures.*, 109, 143-158. 2016.
- [Joshi, P. V et al. 2017] Joshi, P. V., Gupta, A., Jain, N. K., Salhotra, R., Rawani, A. M., Ramtekkar, G. D., "Effect of thermal environment on free vibration and buckling of partially cracked isotropic and FGM micro plates based on a non classical Kirchhoff's plate theory: An analytical approach", *International Journal of Mechanical Sciences.*, 131, 155-170. 2017.
- [Kant, T . 1993] Kant, T., "A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches", *Composite structures.*, 23(4), 293-312. 1993.
- [Kant, T et al. 2001] Kant, T., Swaminathan, K., "Free vibration of isotropic, orthotropic, and multilayer plates based on higher order refined theories", *Journal of Sound and Vibration.*, 241(2), 319-327. 2001.
- [Kant.T et al. 2002] Kant.T, Swaminathan.K, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite. Structure*; 56 (4): 329-344, 2002.
- [Kar, V. R et al. 2014] Kar, V.R., Panda, S.K., "Large deformation bending analysis of functionally graded spherical shell using FEM", *Structural Engineering Mechanics.*, 53(4), 661 - 679. 2014.
- [Kar, V. R et al. 2015a] Kar, V.R. and Panda, S.K., "Nonlinear flexural vibration of shear deformable functionally graded spherical shell panel", *Steel Compos. Struct., Int. J.*, 18(3), 693-709. 2015a.
- [Kar, V. R et al. 2015b] Kar, V. R., Panda, S. K., "Free vibration responses of temperature dependent functionally graded curved panels under thermal environment", *Latin American Journal of Solids and Structures.*, 12(11), 2006-2024. 2015b.

# *Références bibliographique*

- [Kar, V. R et al. 2017] Kar, V. R., Mahapatra, T. R., Panda, S. K., "Effect of different temperature load on thermal postbuckling behaviour of functionally graded shallow curved shell panels", *Composite Structures.*, 160, 1236-1247. 2017.
- [Karama. M et al. 2003] Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou: Comportement mécanique de la poutre composite stratifiée par le nouveau modèle de structures composites multicouches stratifiés avec cisaillement transversal de stress continuité. *Int. J. Solids Structures*; 40 (6): 1525-1546, 2003.
- [Khetir, H et al. 2017] Khetir, H., BachirBouiadjra, M., Houari, M.S.A., Tounsi, A., S.R. Mahmoud,, "A new nonlocal trigonometric shear deformation theory for thermal buckling analysis of embedded nanosize FG plates", *Struct. Eng. Mech.*, 64(4), 391-402. 2017.
- [Kiani Y et al. 2011] Kiani Y, Bagherizadeh E, Eslami MR. Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions). *ZAMM – J Appl Math Mech/Z Angew Math Mech*; 91(7):581–93, 2011.
- [Kim, Y. W 2005] Kim, Y. W., "Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration.*, 284(3), 531-549. 2005.
- [Kirchhoff, G. R 1850] Kirchhoff, G. R., "Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe". 1850.
- [Kirchhoff, G.R et al. 1850a] Kirchhoff, G.R: Sur la balance et le mouvement d'un disque élastique. *J. Reine Angew. Math. (Crelle)*, 40, 51-88, 1850a.
- [Kirchhoff, G.R et al. 1850b] Kirchhoff, G.R: À propos des vibrations d'une plaque élastique circulaire. *Poggendorffs Annalen*, 81, 258–264, 1850b.
- [Koizumi 1997] Koizumi M . FGM activities in Japan. *Compos B Eng* 1997;28(1):1–4, 1997.
- [Koizumi. M et al. 1991] Koizumi. M, FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry. Ryukoku University, Ohtsu Japan 520-21, 1991.
- [Kokini K et al. 1990] Kokini K., Takeuchi Y., Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36, 1990.

# *Références bibliographique*

- [Kolahchi, R et al. 2016] Kolahchi, R., Bidgoli, A. M., "Size-dependent sinusoidal beam model for dynamic instability of single-walled carbon nanotubes", *Applied Mathematics and Mechanics.*, 37(2), 265-274. 2016.
- [Kolahchi, R et al. 2016a] Kolahchi, R., Safari, M., Esmailpour, M., "Dynamic stability analysis of temperature-dependent functionally graded CNT-reinforced visco-plates resting on orthotropic elastomeric medium", *Composite Structures.*, 150, 255-265. 2016a.
- [Kolahchi, R et al. 2017a] Kolahchi, R., Zarei, M. S., Hajmohammad, M. H., Nouri, A., "Wave propagation of embedded viscoelastic FG-CNT-reinforced sandwich plates integrated with sensor and actuator based on refined zigzag theory", *International Journal of Mechanical Sciences.*, 130, 534-545. 2017a.
- [Kolahchi, R et al. 2017b] Kolahchi, R., Zarei, M. S., Hajmohammad, M. H., Oskouei, A. N., "Visco-nonlocal-refined Zigzag theories for dynamic buckling of laminated nanoplates using differential cubature-Bolotin methods", *Thin-Walled Structures.*, 113, 162-169. 2017b.
- [Lanhe W 2014] Lanhe W. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Compos Struct*; 64(2):211–8, 2014.
- [Lei, Z. X et al. 2013] Lei, Z. X., Liew, K. M., Yu, J. L., "Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment", *Composite Structures.*, 106, 128-138. 2013.
- [Lévy Maurice 1877] Lévy Maurice. « Memoire sur la theorie des plaques elastique planes ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées 3.3* , p. 219–306, 1877.
- [Lévy Maurice 1877] Lévy Maurice. « Memoire sur la theorie des plaques elastique planes ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées 3.3* , p. 219–306, 1877.
- [Li, Q et al. 2008] Li, Q., Iu, V. P., Kou, K. P., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates", *Journal of Sound and Vibration.*, 311(1), 498-515. 2008.
- [Li, Q et al. 2009] Li, Q., Iu, V. P., Kou, K. P., "Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment", *Journal of Sound and Vibration.*, 324(3), 733-750. 2009.

# *Références bibliographique*

- [Li, S. R et al. 2009] Li, S. R., Cheng, C. J., "Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment", *Applied Mathematics and Mechanics.*, 30(8), 969-982. 2009.
- [Lim, C. W et al. 2009] Lim, C. W., Yang, Q., Lü, C. F., "Two-dimensional elasticity solutions for temperature-dependent in-plane vibration of FGM circular arches", *Composite Structures.*, 90(3), 323-329. 2009.
- [Lim, T. K et al. 2017] Lim, T. K., Kim, J. H.. "Thermo-Micromechanical Vibration Behaviors of FGM Structures with Neutral Surface", *Applied Mechanics and Materials.*, 864, 162-166. 2017.
- [Lo KH et al. 1997] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A high-order theory of plate deformation part 2: laminated plates. *J Appl Mech*; 44(4):669–76, 1997.
- [Lo KH et al. 2015] Lo KH, Christensen RM, Wu EM. A high-order theory of plate deformation part 1: homogeneous plates. *J Appl Mech* 1977;44(4):663–8. 82 H.-T. Thai, S.-E. Kim / *Composite Structures* 128; 70–86, 2015.
- [Lo. K.H et al. 1977] Lo. K.H & R.M. Christensen: Une théorie d'ordre supérieur de la déformation de la plaque. Partie 1: plates homogène, Vol.44, N° 4, pages 669-676, 1977.
- [Lostec L 1997] Lostec L., *Elaboration par coulage en bande et caractérisation microstructurale et mécanique de composite SiC/MAS-L*, Thèse de l'université de Limoges, 1997.
- [Madani, H et al. 2016] Madani, H., Hosseini, H., Shokravi, M., "Differential cubature method for vibration analysis of embedded FG-CNT-reinforced piezoelectric cylindrical shells subjected to uniform and non-uniform temperature distributions", *Steel and Composite Structures.*, 22(4), 889-913. 2016.
- [Mahapatra, T. R et al. 2015] Mahapatra, T. R., Kar, V. R., Panda, S. K., "Nonlinear free vibration analysis of laminated composite doubly curved shell panel in hygrothermal environment", *Journal of Sandwich Structures & Materials.*, 17(5), 511-545. 2015.
- [Mahapatra, T. R et al. 2015] Mahapatra, T. R., Panda, S. K., "Thermoelastic vibration analysis of laminated doubly curved shallow panels using non-linear FEM", *Journal of Thermal Stresses.*, 38(1), 39-68. 2015.

# *Références bibliographique*

- [Mahapatra, T. R et al. 2016] Mahapatra, T. R., Panda, S. K., “Nonlinear free vibration analysis of laminated composite spherical shell panel under elevated hygrothermal environment: A micromechanical approach”, *Aerospace Science and Technology.*, 49, 276-288. 2016.
- [Mahapatra, T. R et al. 2016a] Mahapatra, T. R., Kar, V. R., Panda, S. K.. “Large amplitude vibration analysis of laminated composite spherical panels under hygrothermal environment”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics.*, 16(03), 1450105. 2016a.
- [Mahapatra, T. R et al. 2016c] Mahapatra, T. R., Panda, S. K., Kar, V. R., “Nonlinear flexural analysis of laminated composite panel under hygro-thermo-mechanical loading—A micromechanical approach”. *International Journal of Computational Methods.*, 13(03), 1650015. 2016c.
- [Mahapatra, T. R et al. 2016c] Mahapatra, T. R., Panda, S. K., Kar, V. R., “Nonlinear hygro-thermo-elastic vibration analysis of doubly curved composite shell panel using finite element micromechanical model”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures.*, 23(11), 1343-1359. 2016b.
- [Mahapatra, T. R et al. 2017] Mahapatra, T. R., Kar, V. R., Panda, S. K., Mehar, K., “Nonlinear thermoelastic deflection of temperature-dependent FGM curved shallow shell under nonlinear thermal loading”, *Journal of Thermal Stresses.*, 40(9), 1184-1199. 2017.
- [Mahi, A et al. 2015] Mahi, A., AddaBedia, E.A. and Tounsi, A. , “A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates”, *Appl. Math. Model.*, 39, 2489-2508. 2015.
- [Malekzadeh, P et al. 2010] Malekzadeh, P., Shahpari, S. A., Ziaee, H. R., "Three-dimensional free vibration of thick functionally graded annular plates in thermal environment", *Journal of Sound and Vibration.*, 329(4), 425-442. 2010.
- [Malekzadeh, P et al. 2012] Malekzadeh, P., Heydarpour, Y., "Free vibration analysis of rotating functionally graded cylindrical shells in thermal environment", *Composite Structures.*, 94(9), 2971-2981. *Structures.*, 23(3), 248-258. 2012.

# *Références bibliographique*

- [Malekzadeh, P et al. 2016] Malekzadeh, P., Monajjemzadeh, S. M., "Dynamic response of functionally graded beams in a thermal environment under a moving load", *Mechanics of Advanced Materials and* 2016.
- [Mantari JL et al. 2011] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higherorder shear deformation theory. *Compos Struct*;94(1):37–49, 2011.
- [Mantari JL et al. 2012] Mantari JL, Guedes Soares C. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates. *Compos Struct*;94(8):2561–75, 2012.
- [Mantari JL et al. 2013] Mantari JL, Guedes Soares C. A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates. *Compos B Eng*;45(1):268–81, 2013.
- [Mantari JL et al. 2014a] Mantari JL, Guedes Soares C. Static response of advanced composite plates by a new non-polynomial higher-order shear deformation theory. *Int J Mech Sci*; 78:60–71, 2014a.
- [Mantari JL et al. 2014b] Mantari JL, Guedes Soares C. Optimized sinusoidal higher order shear deformation theory for the analysis of functionally graded plates and shells. *Compos B Eng*; 56:126–36, 2014b.
- [Matsunaga H 2008a] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory. *Compos Struct*;84(2):132–46, 2008a.
- [Matsunaga H 2008b] Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Compos Struct*;82(4):499–512, 2008b.
- [Mehtar, K et al. 2016] Mehar, K., Panda, S. K., Dehengia, A., Kar, V. R., "Vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate in thermal environment", *Journal of Sandwich Structures & Materials.*, 18(2), 151-173. 2016.
- [Mehtar, K et al. 2017a] Mehar, K., Panda, S. K., Mahapatra, T. R., "Thermoelastic nonlinear frequency analysis of CNT reinforced functionally graded sandwich structure", *European Journal of Mechanics-A/Solids.*, 65, 384-396. 2017a.

# *Références bibliographique*

- [Mehtar, K et al. 2017b] Mehtar, K., Panda, S. K., Bui, T. Q., Mahapatra, T. R., “Nonlinear thermoelastic frequency analysis of functionally graded CNT-reinforced single/doubly curved shallow shell panels by FEM”. *Journal of Thermal Stresses.*, 40(7), 899-916. 2017b.
- [Mindlin. R.D 1951] Mindlin. R.D: Influence de l'inertie de rotation et de cisaillement sur les motions de flexion, plaques élastiques isotropes. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mindlin. R.D 1951] Mindlin. R.D: Influence de l'inertie de rotation et de cisaillement sur les motions de flexion, plaques élastiques isotropes. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38, 1951.
- [Mistler R.E 1973] Mistler R.E., High strength alumina substrates produced by a multiple layer casting technique, *Am. Ceram. Soc. Bull*; 52 (11): 850-854, 1973.
- [Mohamed Mekerbi et al. 2019] Mohamed Mekerbi., Samir Benyoucef., Abdelkader Mahmoudi., Abdelouahed Tounsi., Abdelmoumen A Bousahla and SR Mahmoud: Thermodynamic behavior of functionally graded sandwich plates resting on different elastic foundation and with various boundary conditions: *Journal of Sandwich Structures & Materials* 0(0) 1–30, 2019.
- [Mokhtar Khiloun et al. 2019] Mokhtar Khiloun., Abdelmoumen Anis Bousahla., Abdelhakim Kaci., Aicha Bessaim., Abdelouahed Tounsi., S. R. Mahmoud: Analytical modeling of bending and vibration of thick advanced composite plates using a four-variable quasi 3D HSDT, 2019.
- [Mouffoki Abderrahmane et al. 2019] Mouffoki Abderrahmane., Aicha Bessaim and Houari Mohammed Sid Ahmed: Thermo-mechanical vibration analysis of non-local refined trigonometric shear deformable FG beams, *Int. J. Hydromechatronics*, Vol. 2, No. 1, 2019.
- [Mouffoki, A et al. 2017] Mouffoki, A., AddaBedia, E.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A., Mahmoud, S.R., “Vibration analysis of nonlocal advanced nanobeams in hygro-thermal environment using a new two-unknown trigonometric shear deformation beam theory”, *Smart Structures Systems.*, 20(3), 369-383. 2017.
- [Moya J.S et al. 1992] Moya J.S., Sanchez-Herencia A.J., Requena J., MORENO R., Functionally gradient ceramics by sequential slip casting, *Materials Letters*; 14 (5-6): 333-35, 1992.

# *Références bibliographique*

- [Nelson. R.B et al. 1974] Nelson. R.B&D.R.Lorch: Une théorie raffinée pour plates orthotrope stratifié. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pages 177-183, 1974.
- [Nguyen DD et al. 2012] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear stability analysis of double-curved shallow FGM panels on elastic foundations in thermal environments. Mech Compos Mater;48(4):435–48, 2012.
- [Nguyen DD et al. 2013a] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear postbuckling of imperfect eccentrically stiffened P-FGM double curved thin shallow shells on elastic foundations in thermal environments. Compos Struct; 106:590–600,2013a.
- [Nguyen DD et al. 2013b] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear dynamic analysis of imperfect functionally graded material double curved thin shallow shells with temperaturedependent properties on elastic foundation. J Vib Control. 2013b.
- [Nguyen DD et al. 2014a] Nguyen DD, Tran QQ. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened FGM cylindrical panels on elastic foundation subjected to mechanical loads. Eur J Mech A Solids; 46:60–71, 2014a.
- [Nguyen DD et al. 2014b] Nguyen DD, Pham TT. Nonlinear response of imperfect eccentrically stiffened ceramic–metal–ceramic FGM thin circular cylindrical shells surrounded on elastic foundations and subjected to axial compression. Compos Struct; 110:200–6, 2014b.
- [Nguyen, T. K 2015] Nguyen, T. K., "A higher-order hyperbolic shear deformation plate model for analysis of functionally graded materials", International Journal of Mechanics and Materials in Design., 11(2), 203-219. 2015.
- [Noor Ahmed K et al. 1992] Noor Ahmed K., Burton W. Scott. « Three-Dimensional Solutions for the Free Vibrations and Buckling of Thermally Stressed Multilayered Angle-Ply Composite Plates ». In : Journal of Applied Mechanics 59.4 , p. 868. ISSN : 00218936, 1992.
- [Pagano N. J 1970] Pagano N. J. « Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates ». en. In : Journal of Composite Materials 4.1, p. 20–34. ISSN : 0021-9983, 1530-793X, 1970.

# *Références bibliographique*

- [Panda, S et al. 2014] Panda, S. K., Mahapatra, T. R., "Nonlinear finite element analysis of laminated composite spherical shell vibration under uniform thermal loading", *Meccanica.*, 49(1), 191-213. 2014.
- [Pandey, S et al. 2015] Pandey, S., Pradyumna, S., "Free vibration of functionally graded sandwich plates in thermal environment using a layerwise theory", *European Journal of Mechanics-A/Solids.*, 51, 55-66. 2015.
- [Parandvar, H et al. 2016] Parandvar, H., Farid, M., "Nonlinear dynamic response of functionally graded shallow shells under harmonic excitation in thermal environment using finite element method", *Composite Structures.*, 149, 351-361. 2016.
- [Polit. O et al. 1997] Polit. O and M. Touratier: Un nouvel élément triangulaire Interface fini laminé pour assurer la continuité des déplacements et stresses. *Composite Structures*, 38(1-4):37-44, 1997.
- [Praveen, G et al. 1998] Praveen, G. N., Reddy, J. N., "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates", *International Journal of Solids and Structures.*, 35(33), 4457-4476. 1998.
- [Qian LF et al. 2003] Qian LF, Batra RC, Chen LM. Free and forced vibrations of thick rectangular plates using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless Petrov–Galerkin (MLPG) method. *Comp Model Eng Sci*;4(5):519–34, 2003.
- [Qian LF et al. 2004] Qian LF, Batra RC, Chen LM. Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method. *Compos B Eng*;35(6):685–97, 2004.
- [Reddy JN 2011] Reddy JN. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *Int J Aerosp Lightweight Struct*;1(1):1–21, 2011.
- [Reddy JN et al. 1999] Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Eur J Mech A Solids*;18(2):185–99, 1999.
- [Reddy JN et al. 1998] Reddy JN, Chin CD. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. *J Therm Stresses*;21(6):593–626, 1998.

# *Références bibliographique*

- [Reddy JN et al. 1999] Reddy JN, Wang CM, Kitipornchai S. Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates. *Eur J Mech A Solids*;18(2):185–99, 1999.
- [Reddy, J. N 1984] Reddy, J. N., "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *Journal of applied mechanics.*, 51(4), 745-752. 1984.
- [Reissner.E 1945] Reissner.E : Une théorie simple d'ordre supérieur pour platesl composite stratifiée. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [Reissner.E 1945] Reissner.E : Une théorie simple d'ordre supérieur pour platesl composite stratifiée. *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pages 69/77, 1945.
- [Reissner.E 1947] Reissner E. On bending of elastic plates. *Q Appl Math*;5(1):55–68, 1947.
- [Sahoo, S et al. 2016] Sahoo, S. S., Panda, S. K., Mahapatra, T. R., “Static, free vibration and transient response of laminated composite curved shallow panel—an experimental approach”, *European Journal of Mechanics-A/Solids.*, 59, 95-113. 2016.
- [Sahoo, S et al. 2017] Sahoo, S. S., Hirwani, C. K., Panda, S. K., Sen, D., “Numerical analysis of vibration and transient behaviour of laminated composite curved shallow shell structure: an experimental validation”, *ScientiaIranica*. 2017.
- [Setoodeh, A. R et al. 2012] Setoodeh, A. R., Ghorbanzadeh, M., Malekzadeh, P., "A two-dimensional free vibration analysis of functionally graded sandwich beams under thermal environment", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.*, 226(12), 2860-2873. 2012.
- [Shahrjerdi, A et al. 2011] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M. and Majid, D.L.A., “Free vibration analysis of solar functionally graded plates with temperature-dependent material properties using second order shear deformation theory”, *J. Mech. Sci. Techol.*, 25(9), 2195-2209. 2011.
- [Shahsiah R et al. 2003a] Shahsiah R, Eslami MR. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell. *J Therm Stresses*; 26(3):277–94, 2003a.
- [Shahsiah R et al. 2003b] Shahsiah R, Eslami MR. Functionally graded cylindrical shell thermal instability based on improved Donnell equations. *AIAA J*; 41(9):1819–26, 2003b.

# *Références bibliographique*

- [Shi G 1991] Touratier. M: Un efficace theoryll de plaque standard. Engng Sci, vol. 29, no 8, pages 901-916, 1991.
- [Shi, G 2007] Shi, G., "A new simple third-order shear deformation theory of plates", International Journal of Solids and Structures., 44(13), 4399-4417. 2007.
- [Shokravi, M 2017] Shokravi, M., "Buckling of sandwich plates with FG-CNT-reinforced layers resting on orthotropic elastic medium using Reddy plate theory", Steel And Composite Structures., 23(6), 623-631. 2017.
- [Shyang-ho et al. 2003] Shyang-ho. Chung Yen-Ling, Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [Sobek W et al ] Sobek W., Herrmann M., Haase W., "Gradientenbetone. Beton- und Stahlbetonbau", (zur Veröffentlichung angenommen).
- [Sobhy, M 2013] Sobhy, M, "Buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions", Compos Struct, 99, 76–87, 2013.
- [Sofiyev, A et al. 2017] Sofiyev, A. H., Osmancelebioglu, E., "The free vibration of sandwich truncated conical shells containing functionally graded layers within the shear deformation theory", Composites Part B: Engineering., 120, 197-211. 2017.
- [Sofiyev, A.H et al. 2015] Sofiyev, A.H. and Kuruoglu, N., "Buckling of non-homogeneous orthotropic conical shells subjected to combined load", Steel Compos. Struct.,19(1), 1-19. 2015.
- [Soldatos KP 1992] Soldatos KP. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. Acta Mech;94(3):195–220, 1992.
- [Srinivas, S et al. 1970] Srinivas, S., Rao, C. J., Rao, A. K., "An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates", Journal of sound and vibration., 12(2), 187-199. 1970.
- [Steffens H.D et al. 1990] Steffens H.D., Dvorak M., Wewel M., Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials FGM'90-Sendai-Japan; 139-43, 1990.

# *Références bibliographique*

- [Stein M 1986] Stein M. Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing. *AIAA J*; 24(9):1537–44, 1986.
- [Sundararajan, N et al. 2005] Sundararajan, N., Prakash, T., Ganapathi, M., "Nonlinear free flexural vibrations of functionally graded rectangular and skew plates under thermal environments", *Finite Elements in Analysis and Design.*, 42(2), 152-168. 2005.
- [Takahashi M et al. 1990] Takahashi M., Itoh Y., Kashiwaya H., Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 129-34, 1990.
- [Thai CH et al. 2014] Thai CH, Kulasegaram S, Tran LV, Nguyen-Xuan H. Generalized shear deformation theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric approach. *Comput Struct*; 141:94–112, 2014.
- [Thai HT et al. 2012] Thai HT, Vo TP. A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int J Eng Sci*; 54:58–66, 2012.
- [Tounsi Abdelouahed et al. 2019] Abdelouahed Tounsi., Hassen Ait Atmane., Mokhtar Khiloun., Mohamed Sekkal., Ouahiba Taleb and Abdelmoumen Anis Bousahla: On buckling behavior of thick advanced composite sandwich plates, *Composite Materials and Engineering*, Vol. 1, No. 1 ,1-19,2019.
- [Tounsi, A et al. 2016] Tounsi, A., Houari, M. S. A., Bessaim, A., "A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *Structural Engineering and Mechanics.*, 60(4), 547-565. 2016.
- [Touratier. M et al. 1991] Touratier. M: Un efficace theory de plaque standard. *EngngSci*, vol. 29, no 8, pages 901-916, 1991.
- [Wang CM et al. 2001] Wang CM, Lim GT, Reddy JN, Lee KH. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. *Eng Struct*;23(7):838–49, 2001.

# *Références bibliographique*

- [Wattanasakulpong N et al. 2013] Wattanasakulpong N, Prusty GB, Kelly DW. Free and forced vibration analysis using improved third order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading. *J Sandwich Struct Mater*; 15(5):583–606, 2013.
- [Wattanasakulpong, N et al. 2013] Wattanasakulpong, N., Prusty, G. B., Kelly, D. W., "Free and forced vibration analysis using improved third-order shear deformation theory for functionally graded plates under high temperature loading", *Journal of Sandwich Structures & Materials* 15(5), 583-606. 2013.
- [Whitney. J.M 1973] Whitney. J.M: Facteurs de correction de cisaillement pour les stratifiés orthotropes sous loads statique. *Mécanique J.Applied*, Vol.40, pages 302-304, 1973.
- [Woo J et al. 2001] Woo J, Meguid SA. Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells. *Int J Solids Struct*;38(42):7409–21, 2001.
- [Woo J et al. 2003] Woo J, Meguid SA, Liew KM. Thermomechanical postbuckling analysis of functionally graded plates and shallow cylindrical shells. *Acta Mech*; 165(1–2):99–115, 2003.
- [Woo J et al. 2006] Woo J, Meguid SA, Ong LS. Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates. *J Sound Vib*; 289(3):595–611, 2006.
- [Woo, J et al. 2006] Woo, J., Meguid, S. A., Ong, L. S., "Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates", *Journal of Sound and Vibration.*, 289(3), 595-611. 2006.
- [Wu, Z et al. 2008] Wu, Z., Cheung, Y. K., Lo, S. H., Chen, W., "Effects of higher-order global–local shear deformations on bending, vibration and buckling of multilayered plates", *Composite Structures.*, 82(2), 277-289. 2008.
- [Xiang S et al. 2011] Xiang S, Jin YX, Bi ZY, Jiang SX, Yang MS. A nth-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates. *Compos Struct*; 93(11):2826–32, 2011.
- [Xiang S et al. 2013a] Xiang S, Kang G. Static analysis of functionally graded plates by the various shear deformation theory. *Compos Struct*; 99:224–30, 2013a.
- [Xiang S et al. 2013b] Xiang S, Kang G. A nth-order shear deformation theory for the bending analysis on the functionally graded plates. *Eur J Mech A Solids*;37:336–43, 2013b.

# *Références bibliographique*

- [Xiang S et al. 2013c] Xiang S, Kang G, Yang M, Zhao Y. Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core. *Compos Struct*;96:226–31, 2013c.
- [Xiang S et al. 2014] Xiang S, Kang G, Liu Y. A nth-order shear deformation theory for natural frequency of the functionally graded plates on elastic foundations. *Compos Struct*;111:224–31, 2014.
- [Xiao, J. R et al. 2007] Xiao, J. R., Batra, R. C., Gilhooley, D. F., Gillespie, J. W., McCarthy, M. A., "Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.*, 196(4), 979-987. 2007.
- [Yaghoobi H et al. 2013a] Yaghoobi H, Yaghoobi P. Buckling analysis of sandwich plates with FGM face sheets resting on elastic foundation with various boundary conditions: an analytical approach. *Meccanica*;48(8):2019–35, 2013a.
- [Yaghoobi H et al. 2013b] Yaghoobi H, Torabi M. Exact solution for thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations with various boundary conditions. *J Therm Stresses*;36(9):869–94, 2013b.
- [Yaghoobi, H et al. 2004c] Yaghoobi, H., Valipour, M.S., Fereidoon, A. and Khoshnevisrad, P., "Analytical study on post buckling and nonlinear free vibration analysis of FG beams resting on nonlinear elastic foundation under thermo-mechanical loading using VIM", *Steel Compos. Struct.*,17(5), 753-776. 2014.
- [Yang, J et al. 2002] Yang, J., Shen, H. S., "Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments", *Journal of Sound and Vibration.*, 255(3), 579-602. 2002.
- [Yang, J et al. 2003] Yang, J., Shen, H. S. , "Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions", *Composites Part B: Engineering.*, 34(2), 103-115. 2003.
- [Yanga J et al. 2003] Yanga J, Shen HS. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads. *Int J Non-Linear Mech*;38(4):467–82, 2003.

# *Références bibliographique*

- [Yin, S et al. 2004] Yin, S., Hale, J.S., Yu, T., Bui, T.Q. and Bordas, S.P.A., "Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates", *Compos. Struct.*, 118, 121-138, 2004.
- [Yoshihisa Uchida 2004] Yoshihisa Uchida. Properties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications, 39-51-B, Vol. 39-B, 2004.
- [Zamanian et al. 2017] Zamanian, M., Kolahchi, R., Bidgoli, M. R., "Agglomeration effects on the buckling behaviour of embedded concrete columns reinforced with SiO<sub>2</sub> nano-particles", *Wind Struct.*, 24(1), 43-57. 2017.
- [Zenkour AM 2004c] Zenkour AM. Buckling of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using various plate theories. *J Eng Math*; 50(1):75–93, 2004c.
- [Zenkour AM et al. 2004a] Zenkour AM. Thermal effects on the bending response of fiber-reinforced viscoelastic composite plates using a sinusoidal shear deformation theory. *Acta Mech*; 171(3–4):171–87, 2004a.
- [Zenkour AM et al. 2004b] Zenkour AM. Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading. *Compos Struct*; 65(3):367–79, 2004b.
- [Zenkour AM et al. 2011] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of functionally graded plates resting on elastic foundations using the trigonometric theory. *J Therm Stresses*; 34(11):1119–38, 2011.
- [Zenkour AM. 2005a] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 1-deflection and stresses. *Int J Solids Struct*; 42(18–19):5224–42, 2005a.
- [Zenkour AM. 2005b] Zenkour AM. A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: part 2-buckling and free vibration. *Int J Solids Struct*; 42(18–19):5243–58, 2005b.
- [Zenkour AM. 2005c] Zenkour AM. On vibration of functionally graded plates according to a refined trigonometric plate theory. *Int J Struct Stab Dyn*; 5(02):279–97, 2005c.
- [Zenkour AM. 2006] Zenkour AM. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model*; 30(1):67–84, 2006.

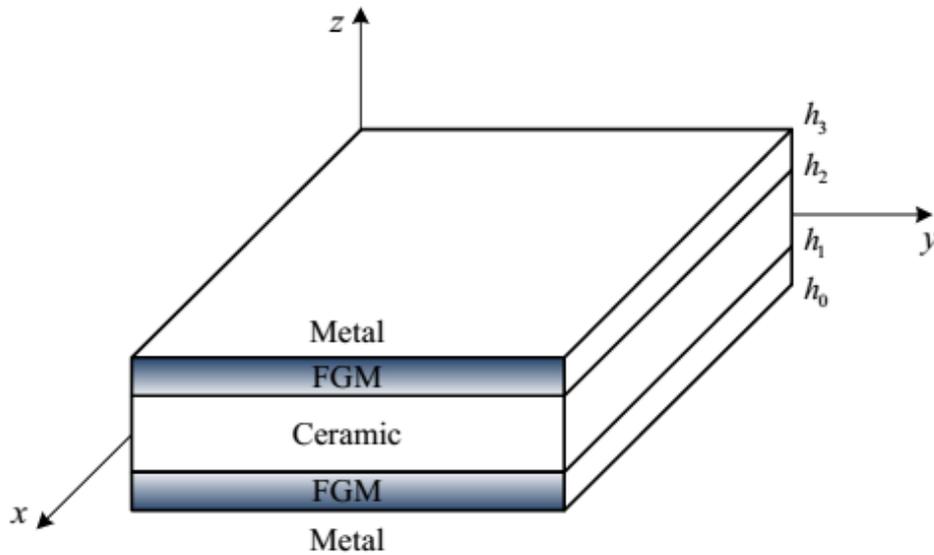
# *Références bibliographique*

- [Zenkour AM. 2007] Zenkour AM. Benchmark trigonometric and 3-D elasticity solutions for an exponentially graded thick rectangular plate. *Arch Appl Mech*;77(4):197–214, 2007.
- [Zenkour AM. 2009] Zenkour AM. The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int J Mech Sci*; 51(11–12):869–80, 2009.
- [Zenkour AM. 2010a] Zenkour AM, Alghamdi NA. Bending analysis of functionally graded sandwich plates under the effect of mechanical and thermal loads. *Mech Adv Mater Struct*;17(6):419–32, 2010a.
- [Zenkour AM. 2010b] Zenkour AM, Sobhy M. Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Compos Struct*; 93(1):93–102, 2010b.
- [Zenkour AM. 2012] Zenkour AM. Exact relationships between classical and sinusoidal theories for FGM plates. *Mech Adv Mater Struct*;19(7):551–67, 2012.
- [Zhang DG et al. 2015] Zhang DG, Zhou YH. A theoretical analysis of FGM thin plates based on physical neutral surface. *Comput Mater Sci* 2008;44(2):716–20. 80 H.-T. Thai, S.-E. Kim / *Composite Structures* 128 70–86, 2015.

# **ANNEXE**

## ANNEXE

Considérons une plaque sandwich FG rectangulaire avec une épaisseur uniforme  $h$ , de longueur  $a$  et de largeur  $b$ . Le système de coordonnées cartésiennes  $xyz$  est considéré de telle sorte que  $xy$  est le plan ( $z=0$ ) coïncide avec le milieu de la surface de la plaque sandwich. La couche 1, 2, 3 représentent respectivement la partie inférieure, couche médiane et supérieure. Le noyau de sandwich est isotrope (entièrement céramique) et les peaux sont fonctionnellement graduées à travers l'épaisseur. La peau de la face inférieure varie du métal pure ( $z=h_0$ ) vers céramique pure tandis que la variation de la peau supérieure est du entièrement céramique vers entièrement métallique ( $z=h_3$ ), la géométrie de la plaque sandwich en FGM est présenté dans la Figure A.1.



**Figure A.1:** La géométrie d'une plaque sandwich avec des peaux en FGM et un noyau homogène.

Il n'y a pas d'interface entre le noyau et les peaux. La fraction volumique de la plaque sandwich est exprimée comme suit:

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \left( \frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^p & \text{for } z \in [h_0, h_1] \\ V^{(2)}(z) = 1 & \text{for } z \in [h_1, h_2] \\ V^{(3)}(z) = \left( \frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^p & \text{for } z \in [h_2, h_3] \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

Où  $V^{(n)}$  est la fraction de volume de la n-ième couche et  $p$  est un paramètre qui indique l'indice de puissance et prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Les propriétés matérielles effectives de la couche n, le module de Young  $E^{(n)}$ , le coefficient de Poisson  $\nu^{(n)}$  et la densité de masse  $\rho^{(n)}$  en un point peuvent être obtenus par la règle linéaire du mélange comme :

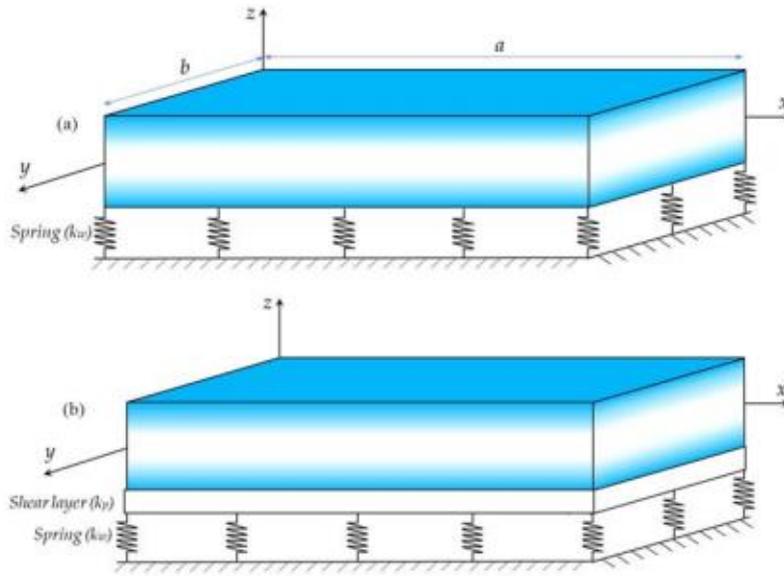
$$P^{(n)}(z) = (P_1 - P_2)V^{(n)}(z) + P_2 \quad (\text{A-2})$$

Où  $P^{(n)}$  est la propriété matérielle effective de la couche n de la plaque sandwich en FGM.  $P_1$  et  $P_2$  sont les propriétés des faces supérieure et inférieure de la couche 1, respectivement, et vice versa pour la couche 3 en fonction de la fraction de volume  $V^{(n)}$ , ( $n = 1, 2, 3$ ).

Pour prédire plus précisément le comportement des FGM à haute température, il est nécessaire de tenir compte de la dépendance à la température des propriétés du matériau. L'équation non linéaire des propriétés des matériaux thermoélastiques en fonction de la température  $T(K)$  peut être exprimée comme suit:

$$P(z) = P_0 \left( P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (\text{A-3})$$

où  $P(z)$  désigne la propriété matérielle et  $T = T_0 + \Delta T(z)$  indique la température ambiante ;  $T_0 = 300(K)$  est la température ambiante  $P_{-1}$ ,  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  les coefficients des propriétés des matériaux dépendant de la température sont-ils uniques aux matériaux constitutifs visibles dans le tableau des propriétés des matériaux (Tableau IV.1) pour FG ( $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ ) et ( $Si_3N_4/SUS304$ ), et l'élévation de température  $\Delta T(z)$  se fait uniquement dans le sens de l'épaisseur, tandis que la conductivité thermique est indépendante de la température.



**Figure A.2:**Géométrie et coordonnées de la plaque rectangulaire reposant sur une fondation élastique: (a) fondation de Winkler, (b) fondation de Pasternak.

### III.5. Champ de température

Dans cette étude, trois cas de distribution de température unidimensionnelle à travers l'épaisseur sont considérés, avec  $T = T(z)$ .

#### III.5.1. Température uniforme :

Dans le cas de température uniforme, le champ utilisé est donné comme suit :

$$T(z) = T_0 + \Delta T(z) \quad (\text{A-4})$$

Où  $\Delta T(z)$  indique le changement de température et  $T_0 = 300K$  est la température ambiante.

#### III.5.2. Température linéaire :

Pour une plaque à gradation fonctionnelle, en supposant des températures  $T_b$  et  $T_t$  en imposant en bas et en haut de la plaque, le champ de température sous élévation linéaire de la température le long de l'épaisseur peut être obtenu comme suit:

$$T(z) = T_0 + \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{A-5})$$

### III.5.3. Température non linéaire :

L'élévation de la température non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque est déterminée en résolvant l'équation de conduction thermique unidimensionnelle. L'équation unidimensionnelle de conduction de chaleur en régime permanent dans la direction  $z$  est donnée par :

$$T(z) = -\frac{d}{dz} \left( k(z) \frac{dT}{dz} \right) \quad (\text{A-6})$$

En utilisant les conditions aux limites  $T = T_m$  a  $z = -h/2$  et  $T = T_p$  a  $z = h/2$  La distribution de température peut être écrite comme:

$$T(z) = T_b + (T_t - T_b) \Theta^{(n)}$$

Ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta^{(1)} = \frac{\int_{h_0}^z \frac{1}{k^1(z)} dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{1}{k^n(z)} dz}, \quad h_0 < z < h_1 \\ \Theta^{(2)} = \frac{\int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{k^1(z)} dz + \int_{h_1}^z \frac{1}{k^2(z)} dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{1}{k^n(z)} dz}, \quad h_1 < z < h_2 \\ \Theta^{(3)} = \frac{\int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{k^1(z)} dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{k^2(z)} dz + \int_{h_2}^z \frac{1}{k^2(z)} dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{1}{k^n(z)} dz}, \quad h_2 < z < h_3 \end{array} \right. \quad (\text{A-7})$$

La solution de cette équation, peut aussi être exprimée au moyen de la série polynomiale

$$\left\{ \begin{array}{l} T^1(z) = T_b + \frac{(T_1 - T_b)}{C} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{ik+1} \left( \frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i \left( \frac{z-h_0}{h_1-h_0} \right)^{ik+1} \\ T^2(z) = T_1 + (T_2 - T_1) \left( \frac{z-h_1}{h_2-h_1} \right) \\ T^3(z) = T_t + \frac{(T_2 - T_t)}{C} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{ik+1} \left( \frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i \left( \frac{z-h_3}{h_2-h_3} \right)^{ik+1} \end{array} \right. \quad (\text{A-8})$$

Avec :

$$C = \frac{(-1)^i}{ik+1} \left( \frac{k_{cm}}{k_m} \right)^i. \quad (\text{A-9})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = T_m + (T_p - T_m) \frac{\int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{k^1(z)} dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{1}{k^n(z)} dz} \\ T_2 = T_m + (T_p - T_m) \frac{\int_{h_0}^{h_1} \frac{1}{k^1(z)} dz + \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{k^2(z)} dz}{\sum_{n=1}^3 \int_{h_{n-1}}^{h_n} \frac{1}{k^n(z)} dz} \end{array} \right. \quad (\text{A-10})$$

### III.4.1. Équations gouvernantes

Les équations du mouvement pour la vibration libre de la plaque FG peuvent être dérivées du principe de Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U - \delta F) dt = 0 \quad (\text{A-11})$$

où  $t$  est le temps,  $t_1$  et  $t_2$  sont les temps initial et de fin, respectivement,  $\delta K$  est la variation de l'énergie cinétique et  $\delta U$  est la variation de l'énergie de déformation totale  $\delta U$  est la variation de fondation élastique. L'énergie de déformation totale du faisceau peut être représentée comme :

$$U = U_d + U_T \quad (\text{A-12})$$

où  $U_d$  se trouve l'énergie de contrainte due aux contraintes mécaniques et  $U_T$  est l'énergie de contrainte provoquée par les contraintes initiales dues à l'élévation de température. Les énergies de déformation  $U_d$  et  $U_T$  sont données par:

$$U_d = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}] dV \quad (\text{A-13})$$

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x^T d_{11} + \sigma_y^T d_{22}] dV \quad (\text{A-14})$$

Où  $d_{ij}$ , ( $i, j=1,2$ ) où est la relation non-linéaire contrainte-déplacement . En substituant  $d_{ij}$  en équation .III.14 l'équation suivante est obtenue :

$$U_T = \frac{1}{2} \int_V \left[ \sigma_x^T \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \sigma_y^T \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \right] dV \quad (\text{A-15})$$

En Eq. (15), les contraintes thermiques  $\sigma_x^T$  et  $\sigma_y^T$  sont données par :

$$\sigma_x^T = -(C_{11} + C_{12})\alpha(z, T)\Delta T(z) \text{ et } \sigma_y^T = -(C_{21} + C_{22})\alpha(z, T)\Delta T(z) \quad (\text{A-16})$$

L'énergie cinétique de la plaque peut être exprimée comme

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho(z, T)(\dot{u} + \dot{v} + \dot{w}) dV \quad (\text{A-17})$$

L'énergie de contrainte induite par les fondations élastiques peut être définie:

$$F = \frac{1}{2} \int_V (U_w + U_p) dV \quad (\text{A-18})$$

$$F = \frac{1}{2} (q_w + q_p) \quad (\text{A-19})$$

La charge répartie dans le cas de la fondation Winkler peut être exprimée comme suit:

$$q_w = K_w w_0 \quad (\text{A-20})$$

La fondation Pasternak est un modèle élastique à deux paramètres, un paramètre de couche de cisaillement  $K_p$  et un paramètre de Winkler  $K_w$ . La charge répartie de la fondation Pasternak peut donc être définie par:

$$q_p = K_w w_0 - K_p \left[ \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (\text{A-21})$$

En substituant les équations. A.21 et A.17 et A.15, dans l'équation. A.13 et intégrant par parties, les équations du mouvement en termes de composantes de déplacement de la plaque FG sont obtenues comme suit:

$$\begin{aligned} & (A_{11} + A_{11}^T) d_{11} u_0 + (A_{66} + A_{22}^T) d_{22} u_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} v_0 - (B_{11} + B_{11}^T) d_{111} w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T) d_{122} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_2 B' + B_{22}^{sT} k_1 A') d_{122} \theta \\ & + (B_{11}^s + B_{11}^{sT}) k_1 A' d_{111} \theta = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 d_1 \ddot{w}_0 + k_1 A' J_1 d_1 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A-22a})$$

$$\begin{aligned} & (A_{22} + A_{22}^T) d_{22} v_0 + (A_{66} + A_{11}^T) d_{11} v_0 + (A_{12} + A_{66}) d_{12} u_0 - (B_{22} + B_{22}^T) d_{222} w_0 \\ & - (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) d_{112} w_0 + (B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B') + B_{12}^s k_1 A' + B_{11}^{sT} k_2 B') d_{112} \theta \\ & + (B_{22}^s + B_{22}^{sT}) k_2 B' d_{222} \theta = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 d_2 \ddot{w}_0 + k_2 B' J_1 d_2 \ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A-22b})$$

$$\begin{aligned} & (B_{11} + B_{11}^T) d_{111} u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T) d_{122} u_0 + (B_{12} + 2B_{66} + B_{11}^T) d_{112} v_0 + (B_{22} + B_{22}^T) d_{222} v_0 \\ & - (D_{11} + D_{11}^T) d_{1111} w_0 - 2(D_{12} + 2D_{66}) d_{1122} w_0 - (D_{22} + D_{22}^T) d_{2222} w_0 + (D_{11}^s + D_{11}^{sT}) k_1 A' d_{1111} \theta \\ & + \left( (D_{12}^s + 2D_{66}^s) (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{1122} \theta + (D_{22}^s + D_{22}^{sT}) k_2 B' d_{2222} \theta + (D_{11}^{sT} k_2 B' + D_{22}^{sT} k_1 A') d_{1122} \theta \\ & - (D_{11}^T + D_{22}^T) d_{1122} w_0 + A_{11}^T d_{11} w_0 + A_{22}^T d_{11} w_0 - (q_w \theta - q_p (d_{11} \theta + d_{22} \theta)) - (q_w w_0 - q_p (d_{11} w_0 + d_{22} w_0)) = \\ & I_0 \ddot{w}_0 + I_1 (d_1 \ddot{u}_0 + d_2 \ddot{v}_0) - I_2 (d_{11} \ddot{w}_0 + d_{22} \ddot{w}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{\theta} + k_2 B' d_{22} \ddot{\theta}) \end{aligned} \quad (\text{A-22c})$$

$$\begin{aligned} & - (B_{11}^s + B_{11}^{sT}) k_1 A' d_{111} u_0 - (B_{12}^s k_2 B' + B_{22}^{sT} k_1 A' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{122} u_0 - (q_w \theta - q_p (d_{11} \theta + d_{22} \theta)) \\ & - (B_{12}^s k_1 A' + B_{11}^{sT} k_2 B' + B_{66}^s (k_1 A' + k_2 B')) d_{112} v_0 - (B_{22}^s + B_{22}^{sT}) k_2 B' d_{222} v_0 - (q_w w_0 - q_p (d_{11} w_0 + d_{22} w_0)) \\ & + (D_{11}^s + D_{11}^{sT}) k_1 A' d_{1111} w_0 + \left( (D_{12}^s + 2D_{66}^s) (k_1 A' + k_2 B') \right) d_{1122} w_0 + (D_{22}^s + D_{22}^{sT}) k_2 B' d_{2222} w_0 \quad (\text{A-22d}) \\ & - (H_{11}^s + H_{11}^{sT}) (k_1 A')^2 d_{1111} \theta - (H_{22}^s + H_{22}^{sT}) (k_2 B')^2 d_{2222} \theta - \left( 2H_{12}^s k_1 k_2 A' B' + (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \right) d_{1122} \theta \\ & + A_{44}^s (k_2 B')^2 d_{22} \theta + A_{55}^s (k_1 A')^2 d_{11} \theta + (D_{11}^{sT} k_2 B' + D_{22}^{sT} k_1 A') d_{1122} w_0 - (q_w - q_p (d_{11} w_0 + d_{22} w_0)) \\ & - \left( H_{11}^{sT} (k_2 B')^2 + H_{22}^{sT} (k_1 A')^2 \right) d_{1122} \theta = -J_1 (k_1 A' d_1 \ddot{u}_0 + k_2 B' d_2 \ddot{v}_0) + J_2 (k_1 A' d_{11} \ddot{w}_0 + k_2 B' d_{22} \ddot{w}_0) \\ & - K_2 \left( (k_1 A')^2 d_{11} \ddot{\theta} + (k_2 B')^2 d_{22} \ddot{\theta} \right) \end{aligned}$$

où  $d_{ij}$ ,  $d_{ijl}$  et  $d_{ijlm}$  sont les opérateurs différentiels suivants:

$$d_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad d_{ijl} = \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \quad d_{ijlm} = \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l \partial x_m}, \quad d_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j, l, m = 1, 2). \quad (\text{A-23})$$

Et les composants de rigidité sont calculés comme

$$\begin{Bmatrix} A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s \\ A_{12}, B_{12}, D_{12}, B_{12}^s, D_{12}^s, H_{12}^s \\ A_{66}, B_{66}, D_{66}, B_{66}^s, D_{66}^s, H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} C_{11} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{A-24a})$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) \quad (\text{A-24b})$$

$$A_{44}^s = A_{55}^s \int_{-h/2}^{h/2} C_{44} [g^2(z)] dz \quad (\text{A-24c})$$

$$\begin{Bmatrix} A_{11}^T, B_{11}^T, D_{11}^T, B_{11}^{sT}, D_{11}^{sT}, H_{11}^{sT} \\ A_{22}^T, B_{22}^T, D_{22}^T, B_{22}^{sT}, D_{22}^{sT}, H_{22}^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1, z, z^2, f(z), z f(z), f^2(z) \right) \begin{Bmatrix} \sigma_x^T \\ \sigma_y^T \end{Bmatrix} dz \quad (\text{A-24d})$$

Les inerties sont également définies comme :

$$(I_0, I_1, J_1, I_2, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1, z, f(z), z^2, z f(z), f^2(z) \right) \rho(z) dz \quad (\text{A-25})$$

### III.6. Solution analytique pour une plaque en FGM simplement appuyée:

Dans ce travail, nous nous intéressons aux solutions exactes de l'équation (A.22) pour une nano-plaque simplement appuyée. À l'aide de la procédure de solution Navier, les expressions suivantes de déplacements ( $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , et  $\theta$ ) sont prises:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ W_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \\ X_{mn} e^{i\omega t} \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{Bmatrix} \quad (\text{A-26})$$

$$\alpha = m\pi / a, \quad \beta = n\pi / b \quad (\text{A-26})$$

où  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\alpha = m\pi / a$ ,  $\beta = n\pi / b$ ,  $\omega$  est la fréquence naturelle et  $(U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn})$  les coefficients de déplacement maximum inconnus.

En substituant les équations (A.26) dans l'équation (A.22), les solutions analytiques peuvent être déterminées par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & M_{13} & M_{14} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-27})$$

où

$$\begin{aligned} a_{11} &= -(\alpha^2(A_{11} + A_{11}^T) + \beta^2(A_{22}^T + A_{66})), \\ a_{12} &= -\alpha\beta(A_{12} + A_{66}), \\ a_{13} &= \alpha^3(B_{11} + B_{11}^T) + \alpha\beta^2(B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T), \\ a_{14} &= \alpha(k_1 B_{11}^s + k_2 B_{12}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \beta^2) - k_1 A' (\alpha^3 B_{11}^{sT} + \alpha\beta^2 B_{22}^{sT}) \\ a_{22} &= -(\alpha^2(A_{66} + A_{11}^T) + \beta^2(A_{22}^T + A_{22})), \quad a_{23} = \beta^3(B_{11} + B_{11}^T) + \alpha^2\beta(B_{12} + 2B_{66} + B_{22}^T), \\ a_{24} &= \beta(k_1 B_{12}^s + k_2 B_{22}^s - (k_1 A' + k_2 B') B_{66}^s \alpha^2) - k_2 B' (\alpha^2\beta B_{11}^{sT} + \beta^3 B_{22}^{sT}) \quad (\text{A-28}) \\ a_{33} &= -(\alpha^4(D_{11} + D_{11}^T) + 2\alpha^2\beta^2(D_{12} + 2D_{66}) + \alpha^2\beta^2(D_{11}^T + D_{22}^T) + \beta^4(D_{22} + D_{22}^T)) - k_w - k_p(\alpha^2 + \beta^2) \\ a_{34} &= -k_1(D_{11}^s \alpha^2 + D_{12}^s \beta^2) + 2(k_1 A' + k_2 B') D_{66}^s \alpha^2 \beta^2 - k_2(D_{22}^s \beta^2 + D_{12}^s \alpha^2) + k_1 A' \alpha^4 D_{11}^{sT} + k_2 B' \beta^4 D_{22}^{sT} \\ &\quad + (k_1 A' D_{22}^{sT} + k_2 B' D_{11}^{sT}) \alpha^2 \beta^2 - k_w - k_p(\alpha^2 + \beta^2) \\ a_{44} &= -k_1((H_{11}^s + H_{11}^{sT})k_1 + H_{12}^s k_2) - k_1 k_2 (H_{11}^{sT} + H_{22}^{sT}) - (k_1 A' + k_2 B')^2 H_{66}^s \alpha^2 \beta^2 \\ &\quad - k_2(H_{12}^s k_1 + (H_{22}^s + H_{22}^{sT})k_2) - (k_1 A')^2 A_{55}^s \alpha^2 - (k_2 B')^2 A_{44}^s \beta^2 - k_w - k_p(\alpha^2 + \beta^2) \\ M_{11} &= -I_0, \quad M_{13} = \alpha I_1, \quad M_{14} = -k_1 J_1 A' \alpha, \quad M_{22} = -I_0, \quad M_{23} = \beta I_1, \quad M_{24} = -k_2 B' \beta J_1 \\ M_{33} &= -I_0 - I_2(\alpha^2 + \beta^2), \quad M_{34} = J_2(k_1 A' \alpha^2 + k_2 B' \beta^2), \quad M_{44} = -K_2((k_1 A')^2 \alpha^2 + (k_2 B')^2 \beta^2) \end{aligned}$$