République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MUSTAPHA Stambouli Mascara

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

THESE de DOCTORAT de 3ème cycle

Spécialité : Géométrie et Analyse Mathématique

Option : Géométrie Différentielle

Intitulée

Géométrie des sous variétés dans la géométrie de Thurston F^4

Présentée par : BOUKHARI Halima

soutenue le 02/07/2018

Jury :

BENMERIEM Khaled	Professeur	Univ. de Mascara	Président
BELKHELFA Mohamed	Professeur	Univ. de Mascara	Directeur de thèse
MOHAMED CHERIF Ahmed	M.C.A	Univ. de Mascara	Examinateur
BELARBI Lakehal	M.C.A	Univ. de Mostaganem	Examinateur
DJAA Mustapha	Professeur	Centre Univ. Relizane	Examinateur
HASNI Abdelbasset	M.C.B	Univ. de Mascara	Invité

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à ceux qui ont contribué à l'élaboration de ma thèse. Je remercie

- Le directeur Professeur BELKHELFA Mohamed pour son intérêt, son soutient et sa grande disponibilité.

- Le président et les examinateurs Professeur BENMERIEM Khaled, Docteur MOHAMED CHERIF Ahmed, Docteur BELARBI Lakehal et Professeur DJAA Mustapha pour leur collaboration et leur aide à la réalisation de ce travail.

- Je souhaite particulièrement remercier Docteur HASNI Abdelbasset ; pour sa contribution essentielle, les informations qu'il ma transmis et les précieux conseils qui m'ont permis d'avancer dans cette recherche.

Enfin mes remerciements à celles et ceux qui me sont chers et que j'ai quelque peu delaissés pour achever cette thèse, leurs attentions et encouragements m'ont accompagnée au long de ces années. Je suis redevalle à mes parents et mon époux.

Résumé

Une géométrie de Thurston de dimension 4 est un couple (G, X) où X est une variété différentielle simplement connexe et G est un groupe de difféomorphismes de X maximal qui agit transitivement avec stabilisateurs compacts et il existe une variété de volume fini modelée sur (G, X). Il y'a une classification de la géométrie de Thurston de dimension 4 faite par Filipkiewicz (1983) et une étude des structures complexes sur ces espaces données par Wall (1985) et il a prouvé que F^4 est la seule géométrie de Thurston non symétrique qui admet une métrique Kählérienne. F^4 est un espace parmis les géométries de Thurston de dimension 4, Belkhelfa et Hasni (2011) ont prouvé que cet espace est holomorphiquement pseudo symétrique de type constant. On prend une hypersurface $\gamma \times H^2$ dans F^4 où γ est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ et H^2 est le plan hyperbolique et on étudie les propriétés géométriques de cette hypersurface c'est-à-dire on vois les conditions pour qu'elle soit minimale, on prouve qu'elle n'est ni totalement ombilicale ni pseudo-parallèle aussi on conclut qu'elle n'est ni semi-parallèle ni parallèle ni totalement géodésique. $\gamma \times H^2$ a une structure de contact, [5], on prouve qu'elle n'est pas Sasakienne.

Abstract

Thurston geometry of dimension 4 (model geometry) is a pair (G, X) where X is a smooth manifold and G is connected Lie group of diffeomorphisms of X such that X is connected and simply connected, G acts transitively on X, with compact point stabilizers, G is not contained in any larger group of diffeomorphisms of X with compact stabilizers of points and G contains a discrete subgroup Γ with $\Gamma \setminus X$ of finite volume. Filipkiewicz Classified 4 dimesion geometries and Wall studied the complex structures on 4-dimensional Thurston geometries Belkhelfa and Hasni proved that F^4 (4-dimensional Thurston geometry) is holomorphically pseudo symmetric of constant type, neither Ricci pseudo symmetric nor Weyl pseudo-symmetric. Our aim is to give the conditions for the hypersurface $\gamma \times H^2$ to be minimal in Thurston geometry F^4. In addition we show that $\gamma \times H^2$ is not totally umbilical neither pseudo-parallel nor Sasakian, where γ is a curve in $\mathbb{R}^2$ and H^2 is the hyperbolic plane.

Table des matières

Introduction

Une géométrie en sense de Thurston de dimension 4, [20], est un couple (G, X) où X est une variété différentielle et G est un groupe de difféomorphismes de X vérifiant les hypothèses suivantes :

(a) X est connexe et simplement connexe.

(b) L'action de G sur X est transitive avec stabilisateurs compacts.

(c) G est maximal parmis les groupes de difféomorphismes de X agissant avec stabilisateurs compacts.

(d) Il existe une variété de volume fini modelée [1] sur (G, X).

R. O. Filipkiewicz, [12], a classifié les géométries de Thurston de dimension quatre. Elle sont : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times E^2$, $S^2 \times H^2$, $E^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $S^3 \times E^1$, $H^3 \times E^1$, E^4, S^4, H^4, $P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$ qui sont des espaces symétriques et $Nil^3 \times E^1$, Nil^4, $Sol^4_{m,n}$, Sol^4_0, Sol^4_1, $\widetilde{Sl}_2(\mathbb{R}) \times E^1$ et F^4 qui ne sont pas symétriques. Parmis ces espaces on s'intéresse à la géométrie de Thurston F^4.
F^4 est définie par $X = \mathbb{R}^2 \times H^2$ et $G = \mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$ (le produit semi-direct de $\mathbb{R}$ et $Sl_2(\mathbb{R})$. On prend la paramétrisation suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \times H^2 \\ & (x, y, s, t) & \longrightarrow & (x, y, s + it) \end{array}$$

C. T. C. Wall, [22], [23], a prouvé que la géométrie de Thurston F^4 admette une unique structure complexe J compatible avec le groupe de difféomorphismes G.

Belkhelfa et Hasni, [1], ont prouvé que F^4 est holomorphiquement pseudo-symétrique de type constant et elle n'est ni Ricci pseudo-symétrique ni Weyl pseudo-symétrique. Une variété Kählérienne (M, g, J) est dite holomorphiquement pseudo-symétrique s'il existe une fonction f sur M telle que

$$R.R = f\ \widetilde{Q}(g, R),$$

avec

$$\widetilde{Q}(g, R) = (X \wedge_J Y)\, .R,$$

1. Une variété modelée sur (G, X) est un quotient de X par un sous groupe discret de G agissant librement sur X, [15].

et

$$X \wedge_J Y = X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY + 2g(X, JY)J.$$

où R est le tenseur de courbure de Riemann. La fonction f est appelée une fonction de structure. Si f est une constante la variété M (qui est pseudo symétrique holomorphe) est dite de type constant. Une variété Riemannienne M est dite Ricci pseudo-symétrique s'il existe une fonction L_S sur $U_S = \{x \in M | S - \frac{r}{n} g \neq 0 \text{ en } x\}$ telle que $R.S = L_S Q(g, S)$ sur U_S où S, r sont le tenseur de Ricci et la courbure scalaire, respectivement et elle est dite Weyl pseudo symétrique s'il existe une fonction L_C sur $U_C = \{x \in M | C \neq 0 \text{ en } x\}$ telle que $R.C = L_C\, Q(g, C)$ sur U_C. On dit que M, de dimension $n \geq 3$, est pseudo symétrique, au sens de Deszcz, s'il existe une fonction $L_R : M \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$R.R = L_R Q(g, \mathbb{R})$$

sur $U_R = \{x \in M | R - \frac{1}{n(n-1)}\, G \neq 0 \text{ en } x\}$ où $G(X, Y, Z, W) = g\left((Z \wedge W)\, Y, X\right)$. Une variété Riemannienne M est semi-symétrique si $R.R = 0$ et localement symétrique si son tenseur de courbure de Riemann R est parallèle i.e., $\nabla R = 0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M.

Les classes analogiques extrinsèques des variétés localement symétriques, des variétés semi-symétriques et des variétés pseudo-symétriques sont les sous variétés parallèles, les sous variétés semi-parallèles et les sous variétés pseudo-parallèles, respectivement. Soit $f : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{n+1}$ une immersion isométrique d'une variété Riemannienne M de dimension n à une variété Riemannienne $\widetilde{M}$ de dimension $n+1$ avec les métriques g, $\widetilde{g}$, respectivement. Une hypersurface totalement géodésique M^n dans $\widetilde{M}^{n+1}$ est une hypersurface avec $\alpha = 0$ (α est la seconde forme fondamentale). Une hypersurface M^n est minimale si trace$(\alpha) = 0$. Une hypersurface est appellée semi-parallèle si $\overline{R}.\alpha = 0$ avec

$$(\overline{R}.\alpha)(X, Y, Z, W) = -\alpha(R(X, Y)Z, W) - \alpha(Z, R(X, Y)W).$$

X, Y, Z et W sont des champs de vecteurs sur M^n et pseudo-parallèle si

$$\overline{R}.\alpha = L\ Q(g, \alpha), \tag{1}$$

pour quelques fonctions L différentielles à valeur réelle sur M, où $\overline{R}$ est un opérateur de courbure de la connexion de Van der Waerden-Bortolotti $\overline{\nabla}$ de f, $Q(g, \alpha)$ est un tenseur de type $(0, 4)$ agit sur les vecteurs tangents a les mêmes propriétés de la symétrie de $\overline{R}.\alpha$ donné par

$$Q(g, \alpha)(Z, W; X, Y) = -\alpha((X \wedge Y)Z, W) - \alpha(Z, (X \wedge Y)W),$$

et $X \wedge Y$ donné par

$$(X \wedge Y)Z = g(Y, Z)X - g(X, Z)Y.$$

Aussi, une hypersurface semi-parallèle est déterminée par $L = 0$ dans l'équation (1). On rappelle qu'une hypersurface parallèle est définie par $\overline{\nabla}\alpha = 0$. Par conséquent, les hypersurfaces pseudo-parallèles sont une généralisation des hypersurfaces semi-parallèles et ces derniers sont une généralisation des hypersurfaces parallèles qui sont eux mêmes une généralisation les hypersurfaces totalement géodésiques. Le vecteur de courbure moyenne de M est défini par $H = \frac{1}{n}\text{trace}(\alpha)$, une hypersurface est dite totalement ombilicale si $\alpha(X,Y) = g(X,Y)H$.

Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ (γ est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ et $H^2 = \{(v,w) \in \mathbb{C}, w > 0\}$ est le plan hyperbolique) une hypersurface de F^4. On peut prendre la paramétrisation suivante

$$\begin{array}{llll} f: & M^3 = \gamma \times H^2 & \longrightarrow & F^4 = \mathbb{R}^2 \times H^2 \\ \\ & (u,v,w) & \longrightarrow & ((\gamma 1)(u), (\gamma 2)(u), v, w) \end{array}$$

L'objectif de cette thèse est d'étudier les propriétés géométriques d'hypersurface M^3 dans F^4 .

On traite ce travail de la manière suivante : le premier chapitre est un rappel des propriétés et des définitions de bases des variétés Riemanniennes. Le second chapitre parle des géométries des sous variétés dans une variété Riemannienne, on cite les formules de Gauss et Weingarten, les équations de Gauss, Coddazzi et Ricci, également on présente les variétés totalement géodésique, parallèles, semi-parallèles et pseudo-parallèles, on donne leurs interprétation géométrique, [9], et on traite la pseudo symétrie au sens de Deszcz, [13]. Le troisième chapitre aborde les variétés Kählériennes, les variétés K-contacts et les variétés Sasakiennes. Quand au quatrième chapitre on définit la géométrie de Thurston F^4 et on donne sa métrique. On présente, la pseudo-symétrie et la pseudo symétrie holomorphe de F^4, voir [1]. Le dernier chapitre expose nos résultats sur l'hypersurface M^3 dans F^4, [4], on donne les conditions pour l'hypersurface soit minimale, on prouve que M^3 n'est pas totalement ombilicale ni pseudo-parallèle et on déduit qu'elle n'est pas semi-parallèle ni parallèle et ni totalement géodésique. Aussi on trouve que cette hypersurface a une structure de contact mais elle n'est pas Sasakienne.

Chapitre 1

Variétés Riemanniennes

Dans ce chapitre on rappel quelques propriétés et définitions des variétés Riemanniennes. Pour cela on utilise les références suivantes [10], [15], [16] et [24].

1.1 Variétés différentiables

1.1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1.1. *Une variété topologique de dimension n est un espace de Hausdorff M tel que pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ avec $p \in U$, voisinage ouvert $U' \subset \mathbb{R}^n$ et un homeomorphisme*

$$\varphi : U \longrightarrow U'$$

Les couples (U, φ) sont appelés des cartes, U ètant le domaine de la carte et φ l'application de coordonnées.

Définition 1.1.2. *Soit M une variété topologique de dimension n. Une famille $\mathcal{A}$ de cartes de M est appelée un atlas si pour tout $x \in M$ il existe une carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ telle que $x \in U$.*

Notons que si (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) sont deux cartes de M telles que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, alors l'application de changement de cartes

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1 (U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2 (U_1 \cap U_2) \tag{1.1}$$

est un homéomorphisme.

Définition 1.1.3. *Soit M une variété topologique. Deux cartes (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) de M sont compatibles si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée,*

- $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ *et l'application de changement de cartes (1.1) est un difféomorphisme,*
- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ *Un atlas $\mathcal{A}$ de M est diférentiable si toutes les cartes de $\mathcal{A}$ sont compatibles entre elles.*

Définition 1.1.4. *Une variété différentiable est un couple $(M, \mathcal{A})$ où M est une variété topologique et $\mathcal{A}$ est un atlas différentiable de M.*

Définition 1.1.5. *Soient M une variété différentiable et D un ouvert de M . Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en un point $p \in D$ s'il existe une carte (U, φ) de M avec $p \in U$ et $U \subset D$ tel que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable. La fonction f est différentiable dans D si f est différentiable en p pour tout $p \in D$.*

Définition 1.1.6. *Soient M, M' deux variétés différentiables et D un ouvert de M. Une application $f : D \longrightarrow M'$ est défférentiable en p s'il existe une carte (U, φ) de M avec $p \in U \in D$ et une carte (V, ψ) de M' avec $f(U) \in V$ telles que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \tag{1.2}$$

est différentiable. L'application f est différentiable dans D si f est différentiable en p pour tout $p \in D$.

Définition 1.1.7. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et M une variété différentiable. L'application différentiable $\alpha : I \longrightarrow M$ est une courbe différentiable.*

Définition 1.1.8. *Soient M une variété différentiable, $p \in M$, $\alpha : I \longrightarrow M$ une courbe différentiable avec $\alpha(0) = p$ et $\mathcal{D}$ un ensemble des fonctions différentiables sur M à p. Le vecteur tangent de α au point p est la fonction $\alpha'(0) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} |_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

L'ensemble des vecteurs tangents en p est noté par T_pM, c'est un espace vectoriel. On appelle T_pM l'espace tangent de M en p.

Exemple 1.1.1. *Soit (U, φ) une carte de M^n, $p \in M$ et $\overline{p} = \varphi(p)$. Pour $i = 1, ..., n$ on définit un vecteur tangent $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p \in T_pM$ en posant*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p[f] = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(\overline{p})}{\partial x_i}$$

Remarque 1.1.1. *Les vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$ forment une base de T_pM.*

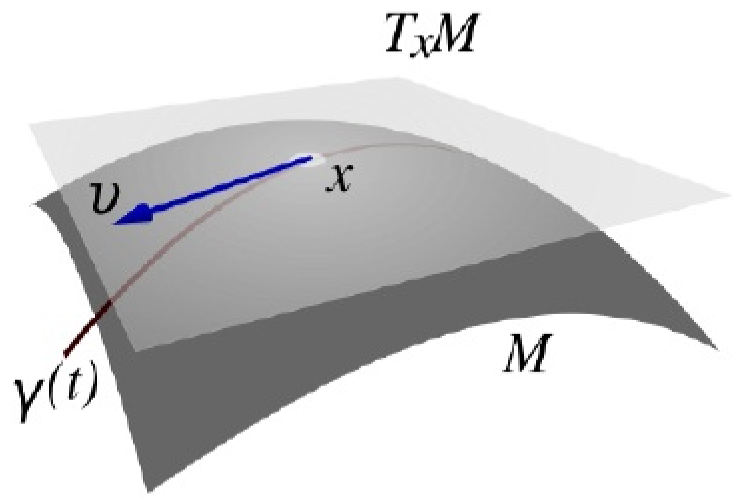

FIGURE 1.1 – Vecteur tangent

Définition 1.1.9. *Soit M une variété différentiable. On écrit*

$$\begin{aligned} TM &= \cup_{p\in M} T_pM \\ &= \{(p,v)/p \in M, v \in T_pM\} \\ &= \{v_p/p \in M, v_p \in T_pM\} \end{aligned}$$

On appelle TM le fibré tangent de M.

1.1.2 Champ de vecteurs

Définition 1.1.10. *Soit M une variété différentiable. L'application*

$$\begin{array}{rccc} X: & M & \longrightarrow & TM \\ & p & \longmapsto & X(p) \end{array}$$

est appellée champ de vecteurs. On dit que X est différentiable dans le voisinage de p si et seulement si l'application $X : M \longrightarrow TM$ est différentiable dans un voisinage de point p et on dit que X est différentiable sur M si et seulement si X est différentiable dans un voisinage de chaque point p.

L'ensemble des champs de vecteurs sur M est noté par $\mathfrak{X}(M)$.

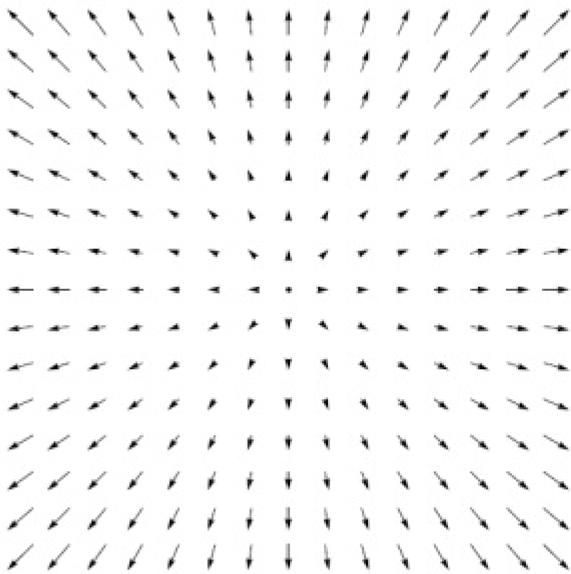

FIGURE 1.2 – Dessin d'un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.1.11. *Soit M une variété différentiable. Le crochet de Lie noté $[,]$ est défini par $[X,Y] = XY - YX$ pour tous X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ et vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$[,]$ est bilinéaire et antisymétrique.*

2. *$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ pour X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

1.1.3 Immersion et plongement

Définition 1.1.12. *Soient $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable, $p \in M$ et $\alpha : I \longrightarrow M$ une courbe telle que $\alpha(t_0) = p$ et $\alpha'(t_0) = v$ alors*

$$\begin{array}{rccc} df_p : & T_pM & \longrightarrow & T_{f(p)}M \\ & v & \longmapsto & df_p(v) \end{array}$$

est défini par $df_p(v) = (f \circ \alpha)'(t_0)$. On appelons df_p la différentielle de f au point p.

Définition 1.1.13. *Soient M et N deux variétés différentiables et $f : M \longrightarrow N$ une application différentiable. On dit*

(i) *f est une immersion si et seulement si df est injective.*

(ii) *f est un plongement si et seulement si f est une immersion et $f : M^n \longrightarrow f(M)$ est un homéomorphisme.*

(iii) *M est une sous variété si et seulement si $M \subset N$ et l'application inclusion est un plongement.*

1.1.4 Tenseurs

Définition 1.1.14. *Un tenseur T d'ordre r sur une variété est une application multi-linéaire*

$$T : \mathfrak{X}(M) \times ... \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$$

i.e., donné Y_1, ...,Y_r dans $\mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, ..., Y_r)$, est une fonction différentiable sur M et pour T est linéaire pour chaque argument i.e.,

$$T(Y_1, ..., fX + gY, ..., Y_r) = fT(Y_1, ..., X, ..., Y_r) + gT(Y_1, ..., Y, ..., Y_r)$$

pour tous X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, f, $g \in \mathcal{D}(M)$.

Définition 1.1.15. *Un champ de tenseurs de type (p, q) est une section de $T^{(p,q)}M$. L'ensemble des champs de tenseurs de type (p, q) est noté par $\mathfrak{T}^{(p,q)}M$.*

1.2 Variétés Riemanniennes

1.2.1 Métrique Riemannienne

Définition 1.2.1. *Soit M une variété différentiable. Une métrique Riemannienne g sur M est un tenseur de type (0,2); telle que pour tout $X \in M$ l'application g_x : $T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire, symétrique et définie positive.*

Une variété différentiable avec une métrique Riemannienne est une variété Riemannienne.

Remarque 1.2.1. *Dans un système de coordonées locales. Les composantes de g sont*

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Exemple 1.2.1. *$(\mathbb{R}^n, g_0)$ est une variété Riemannienne où g_0 est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.*

1.2.2 Connexion Riemannienne

Connexion linéaire

Définition 1.2.2. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

satisfait les conditions suivantes :

1. $\nabla_{fX+gY}(Z) = f\ \nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$

2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

3. $\nabla_X(fY) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y.$

Où X,Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ et f, $g \in \mathcal{D}$.

On dit que $\nabla_X Y$ est la dérivée covariante de Y en direction de X.

Définition 1.2.3. *Soit (U, φ) une carte sur la variété M de dimension n et $\{x_i\}$ les coordonnées associées pour les quelles on note $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Les symboles de Christoffel d'une connexion ∇ relativement aux coordonnées $\{x_i\}$ sont les fonctions $\Gamma_{ij}^k \in \mathcal{D}$ définie par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Lemme 1.2.1. *Localement, les symboles de Christoffel déterminent entrièment la connexion ∇. Plus précisément, pour $X = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ on a*

$$\nabla_X Y = \sum_k (\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k)) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Preuve. Soit ∇ une connexion, on a

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \nabla_X(y_j \partial x_j) \\
&= y_j \nabla_X \partial x_j + X(y_j)\partial x_j \\
&= y_j x_i \nabla_{\partial x_i} \partial x_j + X(y_j)\partial x_j \\
&= y_j x_i \Gamma_{ij}^k \partial x_k + X(y_k)\partial x_k \\
&= (X y_k + x_i y_j \Gamma_{ij}^k)\partial x_k
\end{aligned}$$

□

Connexion Riemannienne

Définition 1.2.4. *Soit M une variété Riemannienne. On dit que la connexion ∇ est compatible avec la métrique g si et seulement si*

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

pour X, Y et $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Définition 1.2.5. *Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire. On dit que ∇ est symétrique si*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y], \tag{1.3}$$

pour tout X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Remarque 1.2.2. *Dans un système de coordonées (U,φ), ∇ est symétrique implique*

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0,\ \ X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

pour i, $j \in \{1, ..., n\}$.

L'équation (1.4) est équivalent à la relation $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ pour tous i, j, k.

Théorème 1.2.1. *Soit M une variété Riemannienne, il existe une unique connexion ∇ sur M satisfait les conditions suivantes :*

1. *∇ est symétrique.*

2. *∇ est compatible avec la métrique Riemannienne.*

Dans ce cas, on appelle la connexion ∇ la connexion de Levi-Civita.

Preuve. Premièrement, on prouve que ∇ est unique. Supposons qu'elle est symétrique et compatible avec la métrique, alors on a

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

$$Yg(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X),$$

$$Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Additionner la première équation et la deuxième et soustraire la troisième équation dont on trouve

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) + g(\nabla_Y Z, X) \\ &\quad + g(Z, \nabla_Y X) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y). \end{aligned}$$

Comme ∇ est symétrique donc

$$Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y) = g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,[X,Z])+g(Z,\nabla_Y X)+g(X,[Y,Z]).$$

Ce qui précède peut encore être réécrit comme

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y) &= 2g(\nabla_X Y,Z)-g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,[X,Z])+g(Z,\nabla_Y X) \\ &\quad +g(X,[Y,Z]). \end{aligned}$$

Donc,

$$g(\nabla_X Y,Z)=\frac{1}{2}\left(Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)-g(Y,[X,Z])-g(X,[Y,Z])-g(Z,[Y,X])\right), \tag{1.5}$$

ce qu'implique l'unicité, aussi l'équation (1.5) prouve l'existence de ∇. □

Proposition 1.2.1. *Soient M une variété différentiable, $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ une variété Riemannienne avec la connexion de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$, $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ une immersion et X, Y deux champs de vecteurs sur M, alors*

$$\widetilde{\nabla}_X df(Y)-\widetilde{\nabla}_Y df(X)=df([X,Y]). \tag{1.6}$$

Proposition 1.2.2. *Dans un système de coordonnées locales ; les composantes Γ_{ij}^k de la connexion de Levi-Civita sont données par*

$$\Gamma_{ij}^k=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{2}g^{kl}(\frac{\partial}{\partial x_i}g_{jl}+\frac{\partial}{\partial x_j}g_{il}-\frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}), \tag{1.7}$$

avec (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}).

Torsion d'une connexion

Définition 1.2.6. *La torsion d'une connexion est le tenseur de type (1,2) définit par*

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

pour X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Définition 1.2.7. *Une connexion ∇ sur une M est dite sans torsion si $T=0$.*

1.2.3 Dérivée covariante d'un tenseur

Définition 1.2.8. *Soit T un tenseur d'ordre r. La dérivée covariante ∇T de T est un tenseur d'ordre $(r+1)$ donnée par*

$$\nabla T(Y_1,...,Y_r,Z) = Z(T(Y_1,...,Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1,...,Y_r) - ... - T(Y_1,...,Y_{r-1},\nabla_Z Y_r),$$

pour tout $Z \in \mathfrak{X}(M)$. La dérivée covariante $\nabla_Z T$ de T relativement à Z est un tenseur d'ordre r donnée par

$$\nabla_Z T(Y_1,...,Y_r) = \nabla T(Y_1,...,Y_r,Z)$$

1.2.4 Dérivée covariante le long d'une courbe

Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe dans M, un champ de vecteurs V sur γ est une application de I vers le fibré tangent de M, TM, qui associe à chaque $t \in I$ un vecteur $V \in T_{\gamma(t)}$.
Soit $t \in I$ et $(x_1,...,x_n)$ un système de coordonées local au point $\gamma(t)$. La dérivée covariante de V (avec $V_t = \sum_{i=1}^n V^i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma(t))$ le long de γ au point t est définie par

$$\frac{DV}{dt}(t) = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{dV^j}{dt}(t) + \sum_{i=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dU^i}{dt}(t)V^j(t)\right)\right] \frac{\partial}{\partial x_k}(\gamma(t)),$$

avec $\frac{d\gamma}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n U^i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(t)$ le vecteur tangent à γ au point t.

La dérivée covariante est la seule application linéaire sur les champs de vecteurs le long de une courbe γ vérifiant :

1. Pour tout fonction réel f sur I

$$\frac{D(fY)}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t)Y(t) + f(t)\frac{DY}{dt}(t)$$

2. S'il existe un voisinage de t_0 tel que le champ de vecteurs Y est la restriction à γ d'un champ de vecteurs X défini sur un voisinage W de $\gamma(t_0)$ alors

$$\frac{DY}{dt}(t_0) = \left(\nabla_{\dot\gamma(t_0)}X\right)_{\gamma(t_0)} \text{ où } \dot\gamma(t_0) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0)$$

1.2.5 Transport parallèle

Définition 1.2.9. *Un champ de vecteurs X le long de γ est dit parallèle si sa dérivée covariante le long de γ est nulle c'est-à-dire*

$$\frac{DX}{dt}(t) = 0, \ \ \forall\, t \in I.$$

Proposition 1.2.3. *Soit $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ une courbe, de classe $\mathcal{C}^1$, dans M et $t_0 \in I$. Pour tout $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, il existe un unique champ de vecteurs X le long de γ tel que $X(t_0) = v$.*

Définition 1.2.10. *Le transport parallèle de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$ le long d'une courbe γ dans M est l'application linéaire P_t de $T_{\gamma(0)}$ vers $T_{\gamma(t)}$ qui associe à chaque $v \in T_{\gamma(0)}M$ le vecteur $X_v(t)$ où X_v est le champ de vecteur parallèle le long de γ tel que $X_v(0) = v$.*

1.2.6 Courbure Riemannienne

Définition 1.2.11. *Le tenseur de courbure de Riemann R d'une variété Riemannienne (M, g) est le tenseur, de type $(1, 3)$, définit par*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

Où X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$ et ∇ est la connexion Riemannienne sur M.

Définition 1.2.12. *Une variété M est dite localement symétrique si et seulement si $\nabla R = 0$.*

Proposition 1.2.4. *Le tenseur de courbure R d'une variété Riemannienne a les propriétés suivantes :*

(i) R est bilinéaire sur $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, i.e.,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

f, $g \in C^\infty(M)$, X_1, $X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

(ii) Pour chaque X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, l'opérateur $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ est linéaire, i.e.,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$f \in C^\infty(M)$, Z, $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposition 1.2.5.

1. *$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$. (La première l'identité de Bianchi)*

2. *$(\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W = 0$. (La deuxième l'identité de Bianchi).*

$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

On peut considère le tenseur de courbure de Riemann comme un tenseur de type $(0,4)$ avec

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W).$$

Proposition 1.2.6.

(a) $R(X,Y,Z,T) + R(Y,Z,X,T) + R(Z,X,Y,T) = 0.$

(b) $R(X,Y,Z,T) = -R(Y,X,Z,T).$

(c) $R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z).$

(d) $R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y).$

La courbure en coordonnées

Soient $p \in M$ et $(x_1, ..., x_n)$ un système de coordonées locale au voisinage de p. Pour tout

$$X = \sum_i u^i X_i, \quad Y = \sum_j v^j X_j, \quad Z = \sum_k w^k X_k,$$

avec $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, on a

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R^l_{ijk} u^i v^j w^k X_l,$$

tel que

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk},$$

et

$$g(R(X_i,X_j)X_k,X_s) = \sum_l R^l_{ijk} g_{ls} = R_{ijks},$$

La courbure sectionnelle

Définition 1.2.13. *Soient (M,g) une variété Riemannienne et π un plan engendré par v et w. La courbure sectionnelle de π est défini par*

$$K(p) = \frac{g(R(v,w)w,v)}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}$$

Remarque 1.2.3. *La définition ci-dessus est indépendante du choix de la base du plan π.*

1.2.7 Courbure de Ricci, l'opérateur de Ricci, courbure scalaire et courbure de Weyl

Définition 1.2.14. *On appelle le tenseur de courbure de Ricci d'une variété Riemannienne (M^n, g) le tenseur S de type (0,2) donné par*

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= trace(Z \longrightarrow R(Z,X)Y) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g(R(X,e_i)e_i,y) \end{aligned}$$

Pour tout X,$Y \in \mathfrak{X}(M)$, où (e_i) est une base orthonormée.

Le tenseur de courbure de Ricci est symétrique, en effet,

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \textstyle\sum_{i}^{m} g(R(e_i,X)Y,e_i) \\ &= \textstyle\sum_{i}^{m} g(R(Y,e_i)e_i,X) \\ &= \textstyle\sum_{i}^{m} g(R(e_i,Y)X,e_i) \\ &= S(Y,X). \end{aligned}$$

Définition 1.2.15. *L'opérateur de Ricci $\widetilde{S}$ d'une variété Riemannienne (M^n, g) est défini par $S(X,Y) = g(X, \widetilde{S}Y)$ pour tout X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Définition 1.2.16. *Le tenseur de courbure de Weyl, noté C, d'une variété Riemannienne M de dimension $n > 3$ est défini par :*

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}\left(X \wedge_g \widetilde{S}Y + \widetilde{S}X \wedge gY - \frac{r}{n-1} X \wedge_g Y\right) Z,$$

avec

$$(X \wedge_g Y)\, Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y,$$

Le tenseur de courbure de Weyl peut être vu comme un tenseur de type $(0,4)$

$$C(X,Y,Z,W) = g(C(Z,W)Y,X),$$

1.2.8 Dérivée de Lie

Définition 1.2.17. *Soient M une variété différentiable et X un champ de vecteurs sur M. Le flot de X, noté $\phi_X : I \longrightarrow$ Diff$(M), t \longmapsto \phi_{X,t}, (0 \in I \subset \mathbb{R})$ est l'unique solution de l'équation différentielle de condition initiale*

$$\frac{d\phi_{X,t}}{dt}|_t = X_{\phi_{X,t(x)}}, \phi_{X,0}(x) = 0,\ \forall\, x \in M.$$

Définition 1.2.18. *Soient M une variété différentiable, X, Y deux champs de vecteurs sur M. La dérivée de Lie de Y par rapport à X est définie par*

$$(\mathcal{L}_X Y)_x = \frac{d}{dt}(\phi^*_{X,t} Y)(x)|_{t=0},$$

où ϕX est le flot de X et $\phi^*_{X,t}$ est son pull-back tel que

$$\phi^*_{X,t} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \ \phi^*_{X,t} Y = d\phi^{-1}_{X,t} \circ Y \circ \phi_{X,t}.$$

Proposition 1.2.7. *Pour tout X, Y de $\mathfrak{X}(M)$ on a*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Proposition 1.2.8. *Soit M une variété différentiable, alors :*

1. $\mathcal{L}_X f = X(f), \forall \ X \in \mathfrak{X}(M), \ \forall \ f \in \mathcal{D}(M)$.
2. $\mathcal{L}_X (fY) = f[X, Y] + X(f)Y, \forall \ \ X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \ f \in \mathcal{D}(M)$.
3. $(\mathcal{L}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]), \ \forall \ X, Y \in \mathfrak{X}(M), \ \forall \ \omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.
4. $\forall \ T \in \Gamma(\underbrace{TM \otimes ... \otimes TM}_{r\text{-fois}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes ... \otimes T^*M}_{s\text{-fois}})$, *on a*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X T)(\omega_1, ..., \omega_r, Y_1, ..., Y_s) &= X(T(\omega_1, ..., \omega_r, Y_1, ..., Y_s)) \\ &\quad -T(\mathcal{L}_X \omega_1, ..., \omega_r, Y_1, ..., Y_s) \\ &\quad -... - T(\omega_1, ..., \omega_r, Y_1, ..., \mathcal{L}_X Y_s)\end{aligned}$$

Corollaire 1.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne alors :*

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi), \ \forall \ \xi, X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Preuve. soient $\xi, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) &= \xi(g(X, Y) - g(\mathcal{L}_\xi X, Y) - g(X, \mathcal{L}_\xi Y)) \\ &= \xi(g(X, Y)) - g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]),\end{aligned}$$

On a

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

donc,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y) &= g(\nabla_\xi X,Y)+g(X,\nabla_\xi Y)-g([\xi,X],Y)-g(X,[\xi,Y]) \\ &= (g(\nabla_\xi X,Y)-g([\xi,X],Y))+(g(X,\nabla_\xi Y)-g(X,[\xi,Y]))\end{aligned}$$

∇ est symétrique alors, $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$, d'où,

$$(\mathcal{L}_\xi g)(X,Y)=g\left(\nabla_X \xi,Y\right)+g\left(X,\nabla_Y \xi\right).$$

□

Champ de Killing

Définition 1.2.19. *Soient (M,g) une variété Riemannienne et $\xi\in\mathfrak{X}(M)$. On dit que ξ est un champ de Killing si $\mathcal{L}_\xi g=0$, i.e.,*

$$g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi)=0,\ \forall\ \xi,X,Y\in\mathfrak{X}(M),$$

Chapitre 2

Géométrie des sous variétés dans les variétés Riemanniennes

On parle dans ce chapitre de la notion des sous variétés, on définit les formules de Gauss, Weingarten et les équations de Gauss, Codazzi et Ricci. On donne également l'interprétation géométrique des sous variétés totalement géodésiques, parallèles, semi-parallèles et pseudo-parallèles Voir [9], [17] et [24].

2.1 Formules de Gauss et Weingarten

Définition 2.1.1. *Soient M une variété différentiable, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ une variété Riemannienne et $f : M^n \to \widetilde{M}^m$ une immersion. Alors*

$$g(u, v)_p = \widetilde{g}((df)_p(u), (df)_p(v))_{f(p)}$$

définie une métrique Riemannienne sur M.

La métrique ci-dessus est appelée la métrique induite.

Remarque 2.1.1. *Dans ce cas on dit que f est une immersion isométrique.*

Définition 2.1.2. *un champ de vecteurs V le long du f est une application différentiable $V : M \to T\widetilde{M}$ telle que $V(p) \in T_{df(p)}\widetilde{M}$.*
On appelle V un champ de vecteurs tangent s'il existe un champ de vecteurs X sur M tel que

$$V = df(X),$$

On dit que V est un champ de vecteurs normale si et seulement si

$$\widetilde{g}(V, df(X)) = 0,$$

pour chaque champ de vecteurs X sur M.

Proposition 2.1.1. *Chaque champ de vecteurs le long du f s'écrit de manière unique comme la somme de champ de vecteurs tangent et champ de vecteurs normale.*

Définition 2.1.3. *(La formule de Gauss)*
Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M. Alors $df(Y)$ et $\widetilde{\nabla}_X df(Y)$ sont des champs de vecteurs le long du f et

$$\widetilde{\nabla}_X(df(Y)) = df(\nabla_X Y) + h(X,Y),$$

Où $\nabla_X Y$ est un champ de vecteurs tangent sur M et $h(X,Y)$ est champ de vecteurs normale le long de f.

Proposition 2.1.2.

(i) ∇ est la connexion de Levi-Civita de la métrique induite g de M.

(ii) h est symétrique et bilinéaire, on appelle h la deuxième forme fondamentale.

Preuve. Soient $\widetilde{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de $\widetilde{M}$, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$. On utilise les propriétés de la connexion $\widetilde{\nabla}$ et la formule de Gauss
d'une part on a

$$\widetilde{\nabla}_X(\beta df(Y_1) + \gamma df(Y_2)) = df(\nabla_X(\beta Y_1 + \gamma Y_2)) + h(X, \beta Y_1 + \gamma Y_2), \tag{2.1}$$

d'autre part, on a

$$\widetilde{\nabla}_X(\beta df(Y_1) + \gamma df(Y_2)) = X(\beta)df(Y_1) + X(\gamma)df(Y_2) + \beta\widetilde{\nabla}_X df(Y_1) + \gamma\widetilde{\nabla}_X df(Y_2).$$

Qui donne,

$$\widetilde{\nabla}_X(\beta df(Y_1)+\gamma df(Y_2)) = X(\beta)df(Y_1)+X(\gamma)df(Y_2)+\beta df\nabla_X Y_1+\gamma df\nabla_X Y_2+\beta h(X,Y_1)+\gamma h(X,Y_2). \tag{2.2}$$

Maintenant, on compare les composantes tangentes et normales des équations (2.1) et (2.2) on trouve

$$\nabla_X(\beta Y_1 + \gamma Y_2) = X(\beta Y_1) + X(\gamma Y_2) + \beta\nabla_X Y_1 + \gamma\nabla_X Y_2, \tag{2.3}$$

$$h(X, \beta Y_1 + \gamma Y_2) = \beta h(X, Y_1) + \gamma h(X, Y_2). \tag{2.4}$$

De même façon, on a

$$\widetilde{\nabla}_{\beta X_1+\gamma X_2} df(Y) = df(\nabla_{\beta X_1+\gamma X_2} Y) + h(\beta X_1 + \gamma X_2, Y). \tag{2.5}$$

D'autre part,

$$\widetilde{\nabla}_{\beta X_1+\gamma X_2} df(Y) = \beta df(\nabla_{X_1} Y) + \beta h(X_1, Y) + \gamma df(\nabla_{X_2} Y) + \gamma h(X_2, Y). \tag{2.6}$$

Aussi, on compare les composantes tangentes et normales des équations (2.5) et (2.6), on obtient

$$\nabla_{\beta X_1+\gamma X_2}Y = \beta\nabla_{X_1}Y + \gamma\nabla_{X_2}Y, \tag{2.7}$$

$$h(\beta X_1 + \gamma X_2, Y) = \beta h(X_1, Y) + \gamma h(X_2, Y), \tag{2.8}$$

D'après les équations (2.3), (2.4), (2.6) et (2.8) on déduit que h est bilinéaire et ∇ est définie une connexion sur M.

Maintenant, on utilise la formule de Gauss et récrire la propriété (1.6) qui donne

$$df(\nabla_X Y) - df(\nabla_Y X) + h(X, Y) - h(Y, X) = df([X, Y]).$$

On compare les composantes tangentes et normales on obtient

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

$$h(X, Y) = h(Y, X).$$

Donc h est symétrique et ∇ est une connexion affine symétrique.

Maintenant on prouve la comtabilité du connexion ∇ et la métrique induite g

$$\begin{aligned}
X(p)g(Y,Z) &= X(p)g\left(df(Y), df(Z)\right)\\
&= X(p)\left(\widetilde{g}(\overline{Y},\overline{Z})\circ f\right)\\
&= df(X_p)\widetilde{g}\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\\
&= \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_{df(X_p)}\overline{Y}, \overline{Z}(f(p))\right) + \widetilde{g}\left(\overline{Y}(f(p)), \widetilde{\nabla}_{df(X_p)}\overline{Z}\right)\\
&= \widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_{X_p}df(Y), df(Z)(p)\right) + \widetilde{g}\left(df(Y_p), \widetilde{\nabla}_{X_p}df(Z(p))\right)\\
&= \widetilde{g}\left(df(\nabla_{X(p)}Y), df(Z)(p)\right) + \widetilde{g}\left(df(Y_p), df(\nabla_{X(p)}Z(p))\right)\\
&= g\left(\nabla_{X(p)}Y, Z(p)\right) + g\left(Y(p), \nabla_{X(p)}Z(p)\right)
\end{aligned}$$

où $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ sont des extensions de $df(Y)$ et $df(Z)$. Donc ∇ compatible avec la métrique induite d'où ∇ est une connexion de Levi-Civita sur M. □

Définition 2.1.4. *(La formule de Weingarten)*
Soit η un champ de vecteurs normale le long de f. Alors

$$\widetilde{\nabla}_X\eta = -df(A_\eta X) + \nabla^\perp_X\eta,$$

où $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$ est l'opérateur de la forme (Shape operator) dans la direction de η et $\nabla^\perp$ est la connexion normale.

Proposition 2.1.3. *Soient X, X_1, X_2 champs de vecteurs tangents sur M et ξ, ξ_1, ξ_2 champs de vecteurs normaux sur M, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ on a*

$$g(A_\xi X_1, X_2) = \widetilde{g}(h(X_1, X_2), \xi) \tag{2.9}$$

$$A_{\beta\xi_1+\gamma\xi_2}X = \beta A_{\xi_1}X + \gamma A_{\xi_2}X \tag{2.10}$$

$$A_\xi(\beta X_1 + \gamma X_2) = \beta A_\xi X_1 + \gamma A_\xi X_2 \tag{2.11}$$

$$\nabla^\perp_X(\beta\xi_1 + \gamma\xi_2) = X(\beta)\xi_1 + X(\gamma)\xi_2 + \beta\nabla^\perp_X\xi_1 + \gamma\nabla^\perp_X\xi_2 \tag{2.12}$$

$$\nabla^\perp_{\beta X_1+\gamma X_2}\xi = \beta\nabla^\perp_{X_1}\xi + \gamma\nabla^\perp_{X_2}\xi \tag{2.13}$$

Remarque 2.1.2. *Puisque il n'y a pas une confusion on peut identifier M avec son image $f(M)$ et on a aussi une immersion est un plongement localement alors on identifie X avec $df(X)$.*

Conséquences 2.1.1. *Aprés la derniére remarque, les formules de Gauss et Weingarten deviennent*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{2.14}$$

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi. \tag{2.15}$$

Exemple 2.1.1. *Supposons que $f : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{n+1}$ est une immersion isométrique. Dans ce cas $f(M)$ est une hypersurface de $\widetilde{M}$. Localement il existe un champ de vecteurs normale unitaire N donc $h(X, Y) = \alpha(X, Y)N$. De plus, les formules de Gauss et Weingarten deviennent*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y)N, \tag{2.16}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X. \tag{2.17}$$

2.2 Les équations de Gauss, Codazzi et Ricci

Définition 2.2.1. *Soient ξ et η deux champs de vecteur normaux et X, Y deux champs de vecteurs tangents de M. On définit*

$$[A_\xi, A_\eta]X = A_\xi A_\eta X - A_\eta A_\xi X, \tag{2.18}$$

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla^\perp_X\nabla^\perp_Y\xi - \nabla^\perp_Y\nabla^\perp_X\xi - \nabla^\perp_{[X,Y]}\xi. \tag{2.19}$$

où $R^\perp$ est un tenseur de courbure normale.

Définition 2.2.2. *Soit $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ une immersion isométrique la dérivée covariante de deuxième forme fondamentale $\overline{\nabla} h$ est définie par*

$$(\overline{\nabla} h)(X,Y,Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{2.20}$$

avec X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Théorème 2.2.1. *Soient $\widetilde{R}$ le tenseur de courbure de $\widetilde{M}$, R le tenseur de courbure de M et $R^{\perp}$ le tenseur de courbure normale on a*

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) - g(R(X,Y)Z,W) = \widetilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) - \widetilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)), \tag{2.21}$$

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z), \tag{2.22}$$

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta) = \widetilde{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) - \widetilde{g}([A_\xi, A_\eta]X,Y), \tag{2.23}$$

Preuve. L'opérateur de courbure de Riemann de $\widetilde{M}$ donné par

$$\widetilde{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} - \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Z} - \widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z}.$$

Pour les champs de vecteurs tangents à $\widetilde{M}$. Soient X, Y et Z champs de vecteurs tangents à M. alors

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z. \tag{2.24}$$

On utilise la formule de Gauss dans l'équation (2.24) on obtient

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - h([X,Y],Z) + h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) + \widetilde{\nabla}_X h(Y,Z) - \widetilde{\nabla}_Y h(X,Z).$$

D'aprés l'équation de Weingarten on a

$$\widetilde{\nabla}_X h(Y,Z) = -A_{h(Y,Z)}X + \nabla^{\perp}_X h(Y,Z).$$

D'où,

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z &= (R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y) - h([X,Y],Z) + h(X,\nabla_Y Z) \\ &- h(Y,\nabla_X Z) + \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - \nabla^{\perp}_Y h(X,Z) \end{aligned} \tag{2.25}$$

On prend le produit scalaire de l'équation (2.25) avec le champ de vecteurs W tangent à M on trouve

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) - g(A_{h(Y,Z)}X,W) + g(A_{h(X,Z)}Y,W). \tag{2.26}$$

On utilise la propriété (2.9) les membres de droite de l'équation (2.26) deviennent

$$g(R(X,Y)Z,W) - \widetilde{g}(h(Y,Z),h(X,W)) + \widetilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)).$$

Donc l'équation (2.25) devient

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) - g(R(X,Y)Z,W) = \widetilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) - \widetilde{g}(h(Y,Z),h(X,W)).$$

C'est l'équation de Gauss.
On a d'aprés la définition 2.2.2

$$(\overline{\nabla}h)(X,Y,Z) = \nabla^{\perp}_{X}h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z).$$

On a aussi

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \nabla^{\perp}_{X}h(Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) - \nabla^{\perp}_{Y}h(X,Z) + h(X,\nabla_Y Z) - h([X,Y],Z).$$

On utilise la propriété $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ et on obtient

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}h)(X,Y,Z) - (\overline{\nabla}h)(Y,X,Z),$$

et c'est l'équation de Codazzi.
Soient ξ, η deux champs de vecteurs normaux sur M. Alors

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y\xi - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X\xi - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}\xi. \tag{2.27}$$

On utilise l'équation de Weingarten dans l'équation (2.27) on trouve

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = -\widetilde{\nabla}_X(A_\xi(Y)) + \widetilde{\nabla}_X\nabla^{\perp}_{Y}\xi + \widetilde{\nabla}_Y(A_\xi(X)) - \widetilde{\nabla}_Y\nabla^{\perp}_{X}\xi + A_\xi([X,Y]) - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi.$$

Equivalent à

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)\xi &= -h(X,A_\xi(Y)) + h(Y,A_\xi(X)) + \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi - \nabla_X A_\xi Y \\ &\quad - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}X + \nabla_Y A_\xi X + A_{\nabla^{\perp}_{X}\xi}Y + A_\xi[X,Y].\end{aligned}$$

On pose

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = (\nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y} - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X} - \nabla^{\perp}_{[X,Y]})\xi.$$

On prend le produit scalaire de dernière équation avec le champ de vecteur normale η, alors on a

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta) = \widetilde{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) + \widetilde{g}(A_\eta A_\xi(X),Y) - \widetilde{g}(A_\xi A_\eta(X),Y).$$

On a

$$[A_\xi,A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi.$$

D'où,

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,\eta) = \widetilde{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) - \widetilde{g}([A_\xi,A_\eta]X,Y)$$

et c'est l'équation de Ricci. □

2.3 Les sous variétés parallèles et l'interprétation géométrique

2.3.1 Les sous variétés minimales

Définition 2.3.1. *Soit M une sous variété de $\widetilde{M}$. Le vecteur de courbure moyenne donné par*

$$H = \frac{1}{n} trace(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i),$$

où $\{e_i\}$ est une base orthonormée de M.

Définition 2.3.2. *Soient M une sous variété de $\widetilde{M}$, H le vecteur de courbure moyenne. Si $H = 0$ alors M est une sous variété minimale dans $\widetilde{M}$.*

2.3.2 Les sous variétés totalement géodésiques

Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe dans la sous variété M de $\widetilde{M}$, avec $\gamma(0) = \gamma(\Delta t) = p$. Soit $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ un champ de vecteurs le long de γ avec $V_p = v \in T_pM$. Considérons deux champs de vecteurs V^* et $\widetilde{V}^*$ qui sont le résultat de transport parallèle de v le long de γ par rapport les connexions ∇ et $\widetilde{\nabla}$ respectivement. Alors, au point p on a

$$V_p^* = \sum_{i=1}^{n} V^{*i}(\Delta t)\partial_i = \sum_{i=1}^{n} V^i(0)\partial_i - \sum_{i=1}^{n} V^i(0) \left[\nabla_{\gamma'}\partial_i\right] \Delta t + \mathcal{O}^{\geqslant 2}(\Delta t)$$

Et

$$\widetilde{V_p^*} = \sum_{i=1}^{n} V^i(0)\partial_i - \sum_{i=1}^{n} V^i(0) \left[\widetilde{\nabla}_{\gamma'}\partial_i\right] \Delta t + \mathcal{O}^{\geq 2}(\Delta t).$$

On utilise la formule de Gauss (2.14), on trouve

$$V_p^* - \widetilde{V}_p^* = h(\gamma', V)_p \Delta t + \mathcal{O}^{\geq 2}(\Delta t).$$

Une sous variété est dite totalement géodésique si $h = 0$.

Proposition 2.3.1. *[9] Une sous variété M dans $\widetilde{M}$ est totalement géodésique si et seulement si le transport parallèle de vecteur tangent de M par rapport la connexion ∇ sur M et le transport parallèle de vecteur tangent par rapport $\widetilde{\nabla}$ sur $\widetilde{M}$ sont les mêmes.*

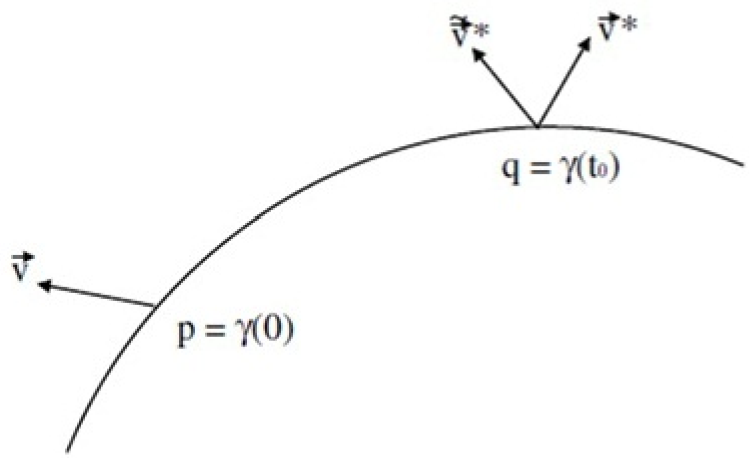

FIGURE 2.1 – Sous variété totalement géodésique

2.3.3 Les sous variétés parallèles

Soit γ une courbe sur M et u, v deux vecteurs tangents, avec $\gamma(0) = p$. Dans l'espace normale de M au point p, $T_p^{\perp}M$, on a le vecteur $h(u,v)$. Au point $\gamma(t_0) = q$, on considère deux vecteurs normaux. Le premier est le transport parallèle de $h(u,v)$ par $\nabla^{\perp}$ et le deuxième est le vecteur $h(u^*,v^*)$ qui est obtenu après le transport parallèle de u et v par ∇.
Une sous variété est dite parallèle si $\overline{\nabla}h = 0$.

Proposition 2.3.2. *[9] Une sous variété M de $\widetilde{M}$ est parallèle si et seulement si le transport parallèle de la seconde forme fondamentale avec la connexion $\nabla^{\perp}$ le long de chaque courbe dans M égale la seconde forme fondamentale agissant sur le transport parallèle des deux vecteurs tangents à M le long de la même courbe, c'est-à-dire $h(u,v)^{*\perp} = h(u^*,v^*)$.*

Preuve. Soient $p \in M$ et $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe dans M avec $\gamma(0) = p$. On considère deux champs de vecteurs U, $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ donc $U_p = u$, $V_p = v$ et $\nabla_{\gamma'}U = \nabla_{\gamma'}V = 0$.

Supposons que M est parallèle i.e. $\overline{\nabla}h = 0$. Car le transport parallèle définit un unique champ de vecteurs il suffit de prouver que $\nabla^{\perp}_{\gamma'}h(U,V) = 0$. En effet,

$$\nabla^{\perp}_{\gamma'}h(U,V) = h(\nabla_{\gamma'}U,V) + h(U,\nabla_{\gamma'}V) = 0.$$

Inversement, supposons que $h(u,v)^{*\perp} = h(u^*, v^*)$. Alors,

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla} h)(\gamma', U, V)|_p &= \left(\nabla^{\perp}_{\gamma'} h(U,V) - h(\nabla_{\gamma'} U, V) - h(U, \nabla_{\gamma'} V)\right)|_p \\ &= \nabla^{\perp}_{\gamma'} h(U,V)|_p = 0\end{aligned}$$

□

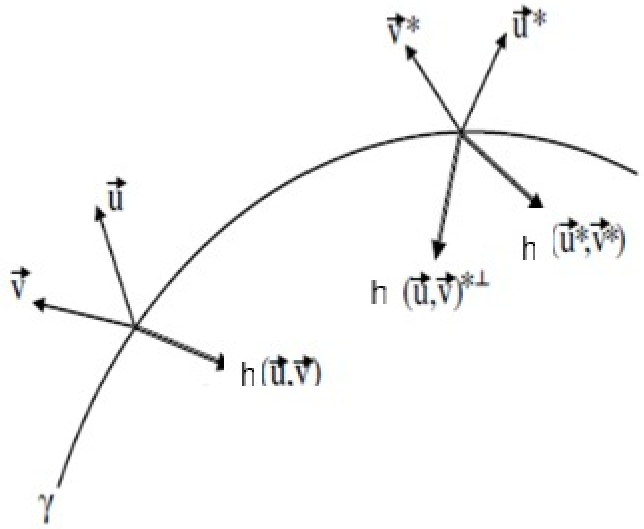

FIGURE 2.2 – Sous variété parallèle

2.4 Les sous variétés semi-parallèles et l'interprétation géométrique

Soit un parallélogramme infinitésimal coince à p, avec les vecteurs tangents x et y dans M, le transport parallèle de vecteur tangent $v \in T_pM$ par rapport la connexion ∇, est donné par

$$v^* = v - [R(x,y)v]\Delta x \Delta y + \mathcal{O}^{>2}(\Delta x, \Delta y).$$

Et le transport parallèle de vecteur normal ξ avec la connexion $\nabla^{\perp}$ est donné par

$$\xi^{*\perp} = \xi - [R^{\perp}(x,y)\xi]\Delta x \Delta y + \mathcal{O}^{>2}(\Delta x, \Delta y).$$

Le tenseur de courbure normale $R^{\perp}$ est défini par

$$R^{\perp}(u,v) = \nabla^{\perp}_u \nabla^{\perp}_v \xi - \nabla^{\perp}_v \nabla^{\perp}_u \xi - \nabla^{\perp}_{[u,v]} \xi.$$

pour tout $u, v \in T_pM$. Comme le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel est interprèté géométriquement comme une mesure de la déférence de deuxième ordre dans la direction d'un vecteur après le transport parallèle autour de parallélogramme infinitésimal et aussi le tenseur de courbure normale $R^\perp$ est interprété comme une mesure de la déférence de deuxième ordre dans la direction de vecteur normale après le transport parallèle avec la connexion normale $\nabla^\perp$ autour de parallélogramme infinitésimal dans la sous variété. Alors on peut considérer la deuxième forme fondamentale aprés le transport parallèle de u et v autour le parallélogramme

$$h(u^*, v^*) = h(u, v) - [h(R(x, y)u, v) + h(u, R(x, y)v)] \Delta x \Delta y + \mathcal{O}^{>2}(\Delta x, \Delta y). \tag{2.28}$$

Et le transport parallèle de la seconde forme fondamentale autour le parallélogramme par rapport la connexion $\nabla^\perp$

$$h(u, v)^{*\perp} = h(u, v) - \left[R^\perp(x, y)h(u, v)\right] \Delta x \Delta y + \mathcal{O}^{>2}(\Delta x, \Delta y). \tag{2.29}$$

La soustraction des expressions (2.28) et (2.29) à p donne

$$h(u^*, v^*) - h(u, v)^{*\perp} = (\overline{R}.h)(U, V; x, y)\Delta x \Delta y + \mathcal{O}^{>2}(\Delta x, \Delta y).$$

Où

$$(\overline{R}.h)(U, V) = R^\perp(X, Y)h(U, V) - h(R(X, Y)U, V) - h(U, R(X, Y)V). \tag{2.30}$$

avec $X, Y, U, V \in \mathfrak{X}(M)$.
Une sous variété est dite semi-parallèle si $\overline{R}.h = 0$.

Proposition 2.4.1. *[9] Une sous variété est semi-parallèle si et seulement si, $\forall\ p \in M$ et pour tout u, $v \in T_pM$, les deux vecteurs normaux $h(u^*, v^*)$ et $h(u, v)^{*\perp}$ coincident pour tout parallélograme dans M, à un deuxième ordre prés.*

Exemple 2.4.1. *Supposons que $f : M^n \longrightarrow \widetilde{M}^{n+1}$ est une immersion isométrique c'est-à-dire f est une hypersurface, l'équation (2.30) devient*

$$(\overline{R}.h)(X, Y, Z, W) = -h(R(X, Y)Z, W) - h(Z, R(X, Y)W). \tag{2.31}$$

2.5 Les sous variétés pseudo-parallèle

Le plus simple (0,4)-tenseur agissant sur les vecteurs tangents qui a les mêmes propriétés de symétrie comme $\overline{R}.h$ a donné par

$$Q(g, h)(U, V; X, Y) = -((X \wedge Y).h)(U, V).$$

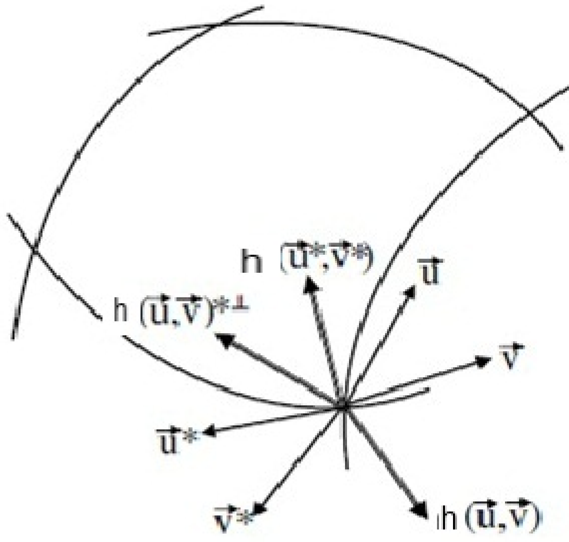

FIGURE 2.3 – Sous variété semi-parallèle

Avec

$$((X \wedge Y).h)(U,V) = -h((X \wedge Y)U,V) - h(U,(X \wedge Y)V). \tag{2.32}$$

Et

$$(X \wedge Y)U = g(Y,U)X - g(X,U)Y.$$

Pour tout $X,Y,U,V \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposition 2.5.1. *[9] Une sous variété M dans $\widetilde{M}$ est totalement ombilicale si et seulement si $Q(g,h) = 0$.*

Preuve. Supposons que $Q(g,h) = 0$. En particulier, si X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ sont des vecteurs orthonomales

$$Q(g,h)(X,X;X,Y) = 2h(X,Y) = 0$$

Donc M est totalement ombilicale. □

Maintenant on donne l'interprétation géométrique de vecteur $Q(g,h)(u,v;x,y)$, [9]. Soit $u,v,x,y \in T_pM$ et supposons que $\{x,y\}$ sont orthonormés. On étende ces vecteurs à une base orthonormée $\{x,y,e_3,...,e_n\}$ de T_pM. Les deux vecteurs u et v sont décomposés suivant cette base. Considérons les deux vecteurs $\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ qui obtenu aprés la rotation des composantes de u et v dans le plan qui défini par les vecteurs de base x et y d'un angle infinitésimal ε et on conserve les autres composantes fixés

$$\begin{aligned} \widehat{u} &= u + \varepsilon\{g(u,y)x - g(u,x)y\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= u - \varepsilon(x \wedge y)u + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

La même chose pour $\widehat{v}$. La seconde forme fondamentale est appliquée a les ces vecteurs donnés

$$\begin{aligned} h(\widehat{u},\widehat{v}) &= h(u,v) - \varepsilon\{h((x\wedge y)u,v) + h(u,(x\wedge y)v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\} \\ &= h(u,v) - \varepsilon Q(g,h)(u,v;x,y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On compare ce vecteur normale avec $\overline{R}.h$ on trouve le résultat suivant. Le tenseur $\overline{R}.h$ mesure la déférence de premier ordre dans la direction de deux seconde formes fondamentales obtenues aprés le transport parallèle de, le premier, deux vecteurs autour un parallélogramme infinitésimal, et le deuxième, le transport parallèle de la deuxième forme fondamentale lui-même autour le parallélogramme.

Le vecteur $Q(g,h)(u,v;x,y)$, une autre part, mesure la déférence de premier ordre dans la direction de la seconde forme fondamentale avec la seconde forme fondamentale qui obtenu aprés la rotation des vecteurs dans un plan particulier.

Il semble donc naturellement de considérer $Q(g,h)$ comme une sorte de normalisation de $\overline{R}.h$.

Définition 2.5.1. *Soit $p\in M$ et on considère une direction tangente d engendrée par le vecteur $u\in T_pM$ et le plan tangent π=span $\{x,y\}$ dans T_pM. Associé avec cette direction tangente d, le plan tangent π et la direction normale $\xi\in T_p^{\perp}M$. On définit le scalaire $L_\xi(p,d,\pi)$ comme suit*

$$L_\xi(p,d,\pi) = \frac{\widetilde{g}((\overline{R}.h)(u,u;x,y),\xi)}{\widetilde{g}(Q(g,h)(u,u;x,y),\xi)}.$$

Théorème 2.5.1. *[9] Soient $f: M \longrightarrow \widetilde{M}$ une immersion isométrique et $p\in M$. Si la fonction L est isotropique dans p, i.e, $L_\xi(p,d,\pi) = L(p)$, pour toute les directions tangentes d, les plans tangents et les directions normales $\xi\in T_p^{\perp}M$, alors*

$$\overline{R}.h = L(p)Q(g,h) \tag{2.33}$$

à p.

Preuve. A le point p, on définit le tenseur

$$S := \overline{R}.h - L(p)Q(g,h).$$

On a déjà $S(u,u;x,y) = 0$, pour tout $u,x,y\in T_pM$. On utilise la symétrie de le tenseur S, elle donne que $S(u,v,x,y) = 0$, pour tout $u,v,x,y\in T_pM$.

□

Définition 2.5.2. *Soit $f : M \longrightarrow \widetilde{M}$ une immersion isométrique. Le point p est dit pseudo-parallèle si (2.33) est vérifie à p. Une sous variété M est appelée pseudo-parallèle si chaque point de M est pseudo-parallèle i.e.*

$$\overline{R}(X,Y).h = L\ X \wedge_g Y.h. \tag{2.34}$$

Les classes analogiques intrinsèques des sous variétés parallèles, sous variétés semi-parallèles et sous variétés pseudo-parallèles sont les variétés symétriques, les variétés semi-symétriques et les variétés pseudo-symétriques, respectivement. Dans la prochaine section on parle sur ces classes, on travaille par [15].

2.6 La pseudo symétrie au sens de Deszcz

2.6.1 Les variétés localement symétriques

Le transport parallèle de deux vecteurs linéairement indépendants le long d'une courbe nous donne à chaque point de cette courbe deux vecteurs linéairement indépendants. Ainsi on peut définir le transport parallèle d'un plan le long d'une courbe, en fixons une base de plan de départ, et prenons son transport parallèle le plan engendré par les transport parallèle des vecteurs de la base.

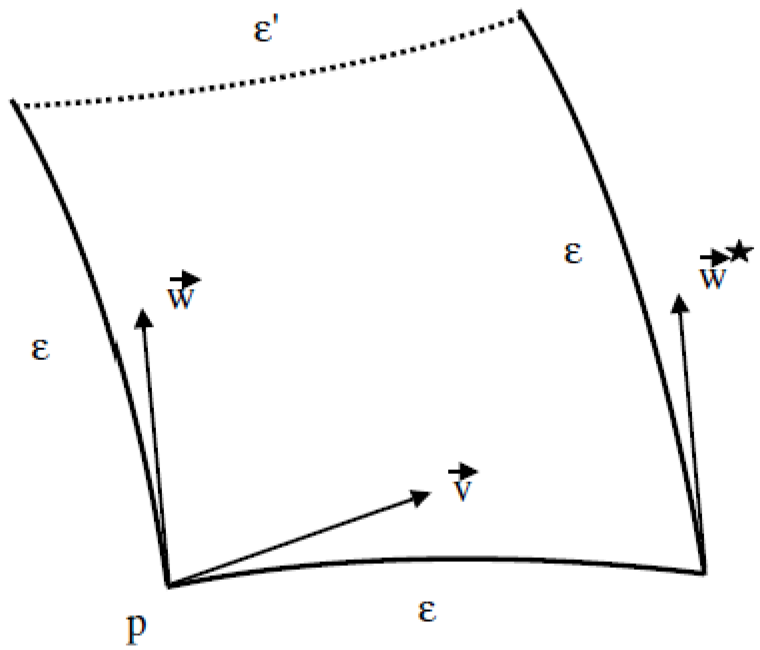

FIGURE 2.4 – Le carré de Levi-Civita

Théorème 2.6.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbure sectionnelle de tout plan π reste constante le long des courbes du flot d'un champ de vecteurs X quand ce plan π est transporté parallèlement le long des courbes du flot, est que $\nabla_X R = 0$.*

Définition 2.6.1. *Une variété M Riemannienne avec un tenseur de Riemann parallèle ($\nabla R = 0$) est dite localement symétrique.*

2.6.2 Les variétés semi-symétriques

Le tenseur $R.R$ de type $(0,6)$ est défini par

$$\begin{aligned}(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) &= (R(X,Y).R)(X_1, X_2, X_3, X_4) \\ &= -R(R(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - R(X_1, R(X,Y)X_2, X_3, X_4) \\ &\quad -R(X_1, X_2, R(X,Y)X_3, X_4) - R(X_1, X_2, X_3, R(X,Y)X_4).\end{aligned}$$

Définition 2.6.2. *Une variété Riemannienne (M,g) est dite semi-symétrique si $R.R = 0$.*

Proposition 2.6.1. *Le tenseur, de type $(0,6)$, $R.R$ vérifie les propriétés suivantes*

1. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = -(R.R)(X_2, X_1, X_3, X_4; X, Y)$
2. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) = (R.R)(X_3, X_4, X_1, X_2; X, Y)$
3. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) + (R.R)(X_1, X_3, X_4, X_2; X, Y) +$
   $(R.R)(X_1, X_4, X_2, X_3; X, Y) = 0$
4. $(R.R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) + (R.R)(X_3, X_4, X, Y; X_1, X_2) +$
   $(R.R)(X, Y, X_1, X_2; X_3, X_4) = 0$

2.6.3 Les variétés pseudo symétriques

Probablement le plus simple $(0, 6)$-tenseur de M, admettant les mêmes propriétés algébriques que R.R est le tenseur de Tachibana $Q(g, R)$, définit par

$$\begin{aligned} Q(g,R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y) &= ((X\wedge Y).R)(X_1,X_2,X_3,X_4) \\ &= -R((X\wedge Y)X_1,X_2,X_3,X_4) \\ &\quad -R(X_1,(X\wedge Y)X_2,X_3,X_4) \\ &\quad -R(X_1,X_2,(X\wedge Y)X_3,X_4) \\ &\quad -R(X_1,X_2,X_3,(X\wedge Y)X_4) \end{aligned}$$

Proposition 2.6.2. *Une variété Riemannienne M est à courbure constante si et seulement si $Q(g, R) = 0$.*

Définition 2.6.3. *[13], [15] Soit M une variété Riemannienne de dimension $n \geq 3$ qui n'est pas à courbure constante et notons U_R l'ensemble des points où le tenseur de Tachibana $Q(g, R)$ est non nul c'est-à-dire $U_R = \{x \in M|\ Q(g, R) \neq 0\}$. Alors en $p \in U_R$ un plan $\pi = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \subset T_pM$ est dit à courbure-dépendance avec le plan $\overline{\pi} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$ si $Q(g, R)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0$.*

Définition 2.6.4. *[13], [15] Pour $p \in U_R$, soient les deux plans $\pi = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$ et $\overline{\pi} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}$, tangent à M en p, à courbure-dépendance. Alors la courbure sectionnelle de Deszcz $L(p; \pi; \overline{\pi})$ du plan π respectivement à $\overline{\pi}$ est définie par*

$$L(p;\pi;\overline{\pi}) = \frac{(R.R)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}{Q(g,R)(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}; \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})}$$

Remarque 2.6.1. *Cette définition est indépendante du choix de la base de π et $\overline{\pi}$.*

Corollaire 2.6.1. *Les variétés semi-symétriques sont caractérisées par la nullité de la courbure sectionnelle de Deszcz.*

Définition 2.6.5. *Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geq 3$, est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, en un point $p \in U_R$ s'il existe un scalaire L_R telle que, en p, $R.R = L_R Q(g, R)$.*

Une variété Riemannienne M, de dimension $n \geq 3$, est dite pseudo symétrique, au sens de Deszcz, si elle est pseudo symétrique en tout ses points, c'est-à-dire s'il existe une fonction $L_R : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $R.R = L_R Q(g, R)$.

2.6.4 Ricci pseudo symétrie et Weyl pseudo symétrie

Définition 2.6.6. *Soit T un tenseur de type $(0, r)$ sur M. les deux tenseurs $R.T$ et $Q(g, T)$ de type $(0, r+2)$ sont définis par*

$$\begin{aligned}
(R.T)\,(X_1, X_2, ..., X_k; X, Y) &= (R(X,Y).T)\,(X_1, X_2, ..., X_k) \\
&= -T\,(R(X,Y))\,X_1, X_2, ..., X_k - ... \\
&\quad -T\,(X_1, X_2, ..., R(X,Y)X_k)\,. \\
Q(g,T)(X_1, X_2, ..., X_k; X, Y) &= ((X \wedge_g Y).T)\,(X_1, X_2, ..., X_k) \\
&= -T\,((X \wedge_g Y)X_1, X_2, ..., X_k) - ... \\
&\quad -T\,(X_1, X_2, ..., (X \wedge_g Y)X_k)\,.
\end{aligned}$$

Définition 2.6.7. *Une variété Riemannienne M est dite Ricci semi-symétrique si $R.S = 0$. Elle est dite Weyl semi-symétrique si $R.C = 0$.*

Définition 2.6.8. *Une variété Riemannienne M est dite Ricci pseudo-symétrique s'il existe une fonction L_S sur $U_S = \{x \in M|\ S - \frac{r}{n}g \neq 0$ en $x\}$ telle que $R.S = L_S Q(g, S)$ sur U_S et elle est dite Weyl pseudo symétrique s'il existe une fonction L_C sur $U_C = \{x \in M|C \neq 0$ en $x\}$ telle que $R.C = L_C\ Q(g, C)$ sur U_C.*

Remarque 2.6.2.

- *On a $U_S \subset U_R$. De plus tout variété pseudo symétrique est Ricci pseudo symétrique. Mais l'inverse n'est pas, en général, vrai.*
- *Toute variété Weyl semi-symétrique est Weyl pseudo symétrique et l'inverse n'est pas vrai.*
- *Toute variété pseudo symétrique est Weyl pseudo symétrique.*

Chapitre 3

Variétés Kählériennes, variétés K-contacts et variétés Sasakiennes

Ce chapitre aborde le thème des variétés Kählériennes, les variétés K-contacts et les variétés Sasakiennes. Pour mieux éclairer le concept des (Variétés Kählèriennes), il est important de passer par : les variétés presque complexes et les variétés Hermitiennes, on utilise les références suivantes : [15], [16] et [25]. Et pour définir les variétés K-contacts et les variétés Sasakiennes on passe par les variétés de contacts, structures presque de contacts et structures de contact métrique, pour plus de details voir [6].

3.1 Variétés Kählériennes

3.1.1 Variétés presque complexes

Définition 3.1.1. *Soit M une variété différentiable de dimension $2n$. Une structure presque complexe J sur M est un endomorphisme sur T_pM, pour tout $p \in M$ tel que $J^2 = -Id$. Si une telle structure J existe sur M alors (M, J) est dite une variété presque complexe.*

Remarque 3.1.1. *Pour tout variété presque complexe M il y a une façon naturel de définit une structure presque complexe J. Pour plus detailles voir [25] page 107.*

Définition 3.1.2. *[25] Soit M une variété presque complexe munie une structure presque complexe J. Le tenseur de torsion complexe (Nijenhuis) N est un tenseur de type $(1, 2)$ défini par :*

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y],$$

pour X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Théorème 3.1.1. *[16] Soit M une variété presque complexe avec la structure presque complexe J. M est dite une variété complexe si et seulement si $N \equiv 0$.*

Théorème 3.1.2. *[25] Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. M est une variété complexe si et seulement si M admet une connexion ∇ de torsion T telle que $\nabla J = 0$ et $T = 0$.*

Preuve.

1. Supposons qu'il existe une connexion ∇ de torsion T telle que $\nabla J = 0$ et $T = 0$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ alors on a

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad \nabla_X JY = J\nabla_X Y$$

$$\begin{aligned} N[X,Y] &= [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] - [X,Y] \\ &= \nabla_{JX}(JY) - \nabla_{JY}(JX) - J(\nabla_X(JY) - \nabla_{JY}X) - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y(JX)) \\ &\quad -(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X)) \\ &= J\nabla_{JX}Y - J\nabla_{JY}X - J\nabla_X JY + J\nabla_{JY}X - J\nabla_{JX}Y + J\nabla_Y JX - \nabla_X Y \\ &\quad +\nabla_Y X \\ &= J\nabla_{JX}Y - J\nabla_{JY}X + \nabla_X Y + J\nabla_{JY}X - J\nabla_{JX}Y - \nabla_Y X - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= 0. \end{aligned}$$

d'aprés le théorème 3.1.1, M est une variété complexe.

2. Inversement, soit M une variété complexe, alors $N \equiv 0$ et considérons ∇ une connexion sans torsion ($T = 0$). On pose

$$A(X,Y) = (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X.$$

Et

$$S(X,Y) = (\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X$$

et on définit la connexion linéaire ∇' par

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{4}\left[A(X,JY) - JS(X,Y)\right].$$

On va monter que $\nabla' J = 0$ et $T' = 0$

$$\begin{aligned}
(\nabla'_X J)Y &= \nabla'_X(JY) - J\nabla'_X Y \\
&= \nabla_X JY + \frac{1}{4}[A(X, J^2Y) - JS(X, JY)] - J\nabla_X Y - \frac{1}{4}[JA(X, JY) - J^2S(X, Y)] \\
&= \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y + \frac{1}{4}[(\nabla_X J(J^2Y) - (\nabla_{J^2Y} J)X - J(\nabla_X J)(JY) - J(\nabla_{JY} J)X \\
&\quad -J(\nabla_X J)(JY) + J(\nabla_{JY} J)X - (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X] \\
&= (\nabla_X J)Y + \frac{1}{4}[-(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)(JY) - J(\nabla_{JY} J)X \\
&\quad -J(\nabla_X J)(JY) + J(\nabla_{JY} J)X - (\nabla_X J)Y - (\nabla_Y J)X] \\
&= (\nabla_X J)Y + \frac{1}{4}[-2(\nabla_X J)Y - 2J(\nabla_X J)(JY)] \\
&= \frac{1}{2}[(\nabla_X J)Y - J(\nabla J)JY] \\
&= \frac{1}{2}[(\nabla_X J)Y - (\nabla_X J)Y] = 0.
\end{aligned}$$

Car,

$$\begin{aligned}
J(\nabla_X J)JY &= J\nabla J^2Y - J^2\nabla_X JY \\
&= -J\nabla_X Y - \nabla_X JY \\
&= (\nabla_X J)Y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T'(X,Y) &= \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y] \\
&= \nabla_X Y + \frac{1}{4}[A(X,JY) - JS(X,Y)] - \nabla_Y X - \frac{1}{4}[A(Y,JX) - JS(Y,X)] \\
&\quad -[X,Y] \\
&= T(X,Y) + \frac{1}{4}[A(X,JY) - A(Y,JX)] \\
&= \frac{1}{4}[A(X,JY) + A(JX,Y)] \\
&= \frac{1}{4}N[X,Y] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Car,

$$A(X,JY)+A(JX,Y) = -[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] = N(X,Y).$$

□

3.1.2 Variétés Hermitiennes

Définition 3.1.3. *Soit M une variété presque complexe avec la structure presque complexe J. Une métrique Hermitienne sur M est une métrique Riemannienne g telle que*

$$g(JX,JY) = g(X,Y),$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur M.

Proposition 3.1.1. *[25] Toute variété Riemannienne (M,g) admet une métrique Hermitienne.*

Preuve. Soit (M,g) une variété Riemannienne, on pose

$$h'(X,Y) = g(JX,JY) + g(X,Y),\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M),$$

alors,

$$h'(JX,JY) = g(-X,-Y) + g(JX,JY) = h'(X,Y),\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

donc h' est une métrique Hermitienne. □

Remarque 3.1.2. *Toute variété M presque complexe munie d'une métrique Hermitienne est une variété presque Hermitienne. De plus, si M est une variété complexe alors, elle est Hermitienne.*

Définition 3.1.4. *[25] Soit M une variété presque Hermitienne avec la structure presque complexe J et la métrique Hermitienne g. La 2-forme fondamentale Φ est définie par*

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY),$$

pour tous champs de vecteurs X et Y sur M.

Propriétés 3.1.1.

1. *La 2-forme fondamentale Φ est antisymétrique i.e., $\Phi(X, Y) = -\Phi(Y, X)$.*

2. $\Phi(JX, JY) = \Phi(X, Y)$.

Théorème 3.1.3. *[25] Soit M une variété presque complexe avec la structure presque complexe J et la métrique Hermitienne g. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) ∇J=0.

(b) $\nabla\Phi = 0$.

(c) La structure presque complexe J sans torsion et la 2-forme fondamentale Φ est fermé i.e., $N \equiv 0$ et $d\Phi = 0$.

3.1.3 Variétés Kählériennes

Définition 3.1.5. *Soit M une variété presque complexe munie d'une structure presque complexe J. La métrique Hermitienne g est dite métrique Kählérienne si la 2-forme fondamentale Φ est fermée i.e., $d\Phi = 0$.*

Définition 3.1.6. *Toute variété presque complexe M munie d'une métrique Kählérienne est dite variété presque Kählérienne.*

Remarque 3.1.3. *D'aprés le Théorème 3.1.3, toute variété Hermitienne est une variété Kählérienne si et seulement si $\nabla J = 0$.*

Proposition 3.1.2. *[25] Le tenseur de courbure R d'une variété Kählérienne M satisfait les propriétés suivantes :*
Pour tous X, Y et $Z \in \mathfrak{X}(M)$

(a) $R(X,Y)JZ = JR(X,Y)Z$.

(b) $R(JX,JY) = R(X,Y)$.

(c) $R(JX,Y) + R(X,JY) = 0$.

Proposition 3.1.3. *Soit M une variété Kählérienne de dimension $2n$ ($n > 1$). Si M à une courbure constante alors, M est plate.*

Preuve. Soit M une variété Kählérienne à courbure constante c. Donc,

$$R(X,Y)Z = c(g(Z,Y)X - g(X,Z)Y) = c(X \wedge Y)Z, \ \forall \ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Sachant que $R(JX,JY) = R(X,Y)$ et $X = X^i e_i$ avec e_i une base orthonormée, alors,

$$\begin{aligned} R(X,e_i)e_i &= c(g(e_i,e_i)X - g(X,e_i)e_i) \\ &= c(2n-1)X...(1) \\ R(JX,Je_i)e_i &= c(g(e_i,Je_i)JX - g(JX,e_i)Je_i \\ &= -c(0-(JX)^i Je_i \\ &= -cJ(JX)^i e_i \\ &= -cJJX \\ &= cX...(2) \end{aligned}$$

de (1) et (2) on a $c(2n-1)\ X = c\ X$, $\forall \ X \in \mathfrak{X}(M)$ et donc pour $n > 1$ on obtient $c = 0$.

□

Remarque 3.1.4. *La notion de courbure sectionnelle constante pour les variétés Kählériennes n'a pas un sens puisque toute variété Kählérienne de courbure sectionnelle constante de courbure nulle. Pour cela on a besoin de définir la courbure sectionnelle holomorphe.*

Définition 3.1.7. *Soient (M,g,J) une variété Kählérienne et R le tenseur de courbure de Riemann*

- *Pour tout plan π de l'espace tangent T_xM ($x \in M$) la courbure sectionnelle $K(x,\pi)$ est donnée par : $K(x,\pi) = g(R(X,Y)Y,X)$ avec $\{X,Y\}$ est une base orthonormée de π dans T_xM.*

– *Si π est invariant par J (i.e. $J\pi = \pi$) la courbure sectionnelle $K(x,\pi)$ est dite holomorphe et par conséquence $K(x,\pi) = g(R(X,JX)JX,X)$ pour tout vecteur unitaire $X \in \pi$.*

Théorème 3.1.4. *[25] Soit (M,g,J) une variété Kählérienne de dimension $2n$. Si $n > 1$ et $K(x,\pi) = c(x)$ pour tout plan π invariant par J dans T_xM alors M est à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

3.2 La pseudo symétrie holomorphe

Définition 3.2.1. *Une variété Kählérienne (M,g,J) est dite pseudo-symétrique holomorphe s'il existe une fonction f sur M telle que*

$$R.R\left(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y\right) = f\ \widetilde{Q}\left(g,R\right)\left(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y\right), \tag{3.1}$$

avec

$$\widetilde{Q}\left(g,R\right)\left(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y\right) = \left(\left(X \wedge_J Y\right).R\right)\left(X_1,X_2,X_3,X_4\right)$$

et

$$X \wedge_J Y = X \wedge_g Y + JX \wedge_g JY + 2g(X,JY)J.$$

La fonction f est appelée une fonction de structure. Si f est une constante alors la variété pseudo symétrique holomorphe M est dite de type constant.

Proposition 3.2.1. *[15] Toute variété Kählérienne pseudo symétrique est pseudo symétrique holomorphe.*

3.3 Variétés K-contacts et variétés Sasakiennes

3.3.1 Variétés de contacts

Définition 3.3.1. *Une variété différentiable M de dimension $2n+1$ est dite variété de contact si elle admet une 1-forme η telle que*

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0,$$

pour tout point dans M. On appelle η la forme de contact.

Propriétés 3.3.1. *Pour une forme de contact η il existe un champ de vecteurs ξ tel que*

$$\eta(\xi) = 1$$

et

$$d\eta(\xi,X) = 0,$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$.

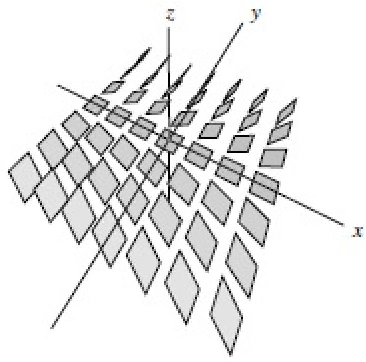

FIGURE 3.1 – Structure de contact standard sur $\mathbb{R}^3$

3.3.2 Structures presque contact

Définition 3.3.2 ((ϕ, ξ, η)- structure). *Une variété différentiable M^{2n+1} est dite a une (φ, ξ, η)-structure si elle admet un champ d'endomorphismes φ, un champ de vecteurs ξ et une 1-forme η tels que*

$$\eta(\xi) = 1 \tag{3.2}$$

et

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \tag{3.3}$$

$X \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposition 3.3.1. *Soit M^{2n+1} une variété différentiable avec (φ, ξ, η)-structure. Alors*

$$\varphi\xi = 0 \tag{3.4}$$

et

$$\eta \circ \varphi = 0. \tag{3.5}$$

De plus, l'endomorphisme φ a un rang égale $2n$.

Preuve. Supposons que (3.2) et (3.3) sont données. Dans (3.3) on remplace X par ξ donc on a

$$\begin{aligned}\varphi^2\xi &= -\xi + \eta(\xi)\xi \\ &= -\xi + \xi \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où $\varphi\xi = 0$ ou bien $\varphi\xi$ est un vecteur propore non nul associe à la valeur propre 0. Aussi par (3.3) on trouve

$$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi,$$

mais $\varphi^2(\varphi\xi) = \varphi(\varphi^2\xi)$ et $\varphi\xi = 0$, donc

$$0 = \varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta(\varphi\xi)\xi,$$

d'où,

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi.$$

Si $\varphi\xi$ est un vecteur propre non nul associe à la valeur propre 0 alors $\eta(\varphi\xi) \neq 0$.
On a

$$\varphi\xi = \eta(\varphi\xi)\xi,$$

alors,

$$\varphi(\varphi\xi) = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi,$$

donc,

$$0 = \varphi^2\xi = \eta(\varphi\xi)\varphi\xi,$$

d'où,

$$0 = \varphi^2\xi = (\eta(\varphi\xi))^2\xi \neq 0,$$

contradiction avec $\varphi\xi = 0$, donc $\varphi\xi = 0$.
Maintenant, on prouve que $\eta \circ \varphi = 0$, d'après la formule (3.3) on a

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi,$$

remplaçant X par φX alors,

$$\varphi^2(\varphi X) = -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi,$$

donc,

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi^2(\varphi X) + \varphi X, \tag{3.6}$$

l'équation (3.6) donne,

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi^3(X) + \varphi X,$$

mais,

$$\begin{aligned} \varphi^3(X) \quad = \quad \varphi(\varphi^2 X) \quad &= \quad \varphi(-X + \eta(X)\xi) \\ &= \quad -\varphi(X) + \varphi(\eta(X))\xi, \end{aligned}$$

l'équation (3.6) devient,

$$\eta(\varphi X)\xi = \varphi(\eta(X))\xi = \eta(X)\varphi\xi,$$

puisque $\varphi\xi = 0$ donc $\eta \circ \varphi = 0$. $\square$

Définition 3.3.3. *Soient M^{2n+1} une variété différentiable avec (φ, ξ, η) structure, g une métrique Riemannienne sur M^{2n+1} telle que*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{3.7}$$

pour tous X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. On dit que M^{2n+1} a (φ, ξ, η, g) structure ou une structure presque contact métrique, g est appellée une métrique compatibe.

Conséquence 3.3.1. *On pose $Y = \xi$ alors*

$$\eta(X) = g(\xi, X). \tag{3.8}$$

Proposition 3.3.2. *[6] Si M^{2n+1} est une variété avec une (φ, ξ, η)-structure, alors M^{2n+1} admet une métrique Riemannienne g telle que*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \tag{3.9}$$

Preuve. Soit h' une métrique Riemannienne sur M^{2n+1}. On définit h par

$$h(X, Y) = h'(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

On a

$$\begin{aligned} h(\xi, X) &= h'(\varphi^2 \xi, \varphi^2 X) + \eta(\xi)\eta(X) \\ &= \eta(X) \end{aligned}$$

Aussi h est une métrique Riemannienne. Maintenant on définit g par

$$g(X, Y) = \frac{1}{2}\left(h(X, Y) + h(\varphi X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)\right),$$

g est une métrique Riemannienne il reste de prouver qu'elle vérifie la condition (3.9)

$$\begin{aligned} g(\varphi X, \varphi Y) &= \tfrac{1}{2}\left(h(\varphi X, \varphi Y) + h(\varphi^2 X, \varphi^2 Y) + \eta(\varphi X)\eta(\varphi Y)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(h(\varphi X, \varphi Y) + h(-X + \eta(X)\xi, -Y + \eta(Y)\xi)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - h(X, \eta(Y)\xi) - h(Y, \eta(X)\xi) + \eta(X)\eta(Y)h(\xi, \xi)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - \eta(Y)\eta(X) - \eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(h(\varphi X, \varphi Y) + h(X, Y) - 2\eta(X)\eta(Y) + \eta(X)\eta(Y)\right) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y). \end{aligned}$$

Donc,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

. □

3.3.3 Structures contact métrique

Définition 3.3.4. *On dit qu'une variété différentiable M^{2n+1} a une structure presque contact si elle admet une 1-forme η et 2-forme Φ tels que*

$$\eta \wedge \Phi^n \neq 0,$$

pour tout point dans M.

Définition 3.3.5. *Soient M^{2n+1} une variété différentiable a une structure presque contact (φ, ξ, η), g une métrique compatible. Alors on définit la 2-forme Φ sur M^{2n+1} par*

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y).$$

On dit que Φ la 2-forme fondamentale de structure presque contact metrique (φ, ξ, η, g).

Définition 3.3.6. *Une variété M^{2n+1} avec la structure presque contact (φ, ξ, η) est une variété presque contact.*

Proposition 3.3.3. *[6] Soient M^{2n+1} une variété différentiable avec 1-forme η et 2-forme Φ tel que $\eta \wedge \Phi^n \neq 0$. Alors M^{2n+1} admet une structure presque contact. Si M^{2n+1} est une variété de contact avec la forme de contact η alors il existe une structure presque contact métrique (φ, ξ, η, g) telle que la 2-forme fondamentale Φ égale $d\eta$.*

Définition 3.3.7. *Une structure presque de contact métrique avec $\Phi = d\eta$ est appellée une structure presque de contact métrique associée.*

3.3.4 Structures presque contacts normales

Soit M^{2n+1} une variété presque de contact avec la structure presque de contact (φ, ξ, η), on considère la variété $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$. On note à un champ de vecteurs sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ par $(X, f\frac{d}{dt})$ où X est un champ de vecteurs sur M^{2n+1}, t est un système de coordonnées sur $\mathbb{R}$ et f est une fonction différentiable sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$. On définit une structure presque complexe sur $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ par

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}), \tag{3.10}$$

tel que $J^2=-I$, on vérifier que $J^2=-I$

$$\begin{aligned}
J^2(X, f\tfrac{d}{dt}) &= J(\varphi X - f\xi, \eta(X)\tfrac{d}{dt})\\
&= (\varphi(\varphi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\varphi X - f\xi)\tfrac{d}{dt})\\
&= (\varphi^2 X - f\varphi\xi - \eta(X)\xi, \eta\circ\varphi X\tfrac{d}{dt} - f\eta\xi\tfrac{d}{dt})\\
&= (\varphi^2 X - \eta(X)\xi, -f\tfrac{d}{dt})\\
&= (-X + \eta(X)\xi - \eta(X)\xi, -f\tfrac{d}{dt})\\
&= (-X, -f\tfrac{d}{dt})\\
&= -(X, f\tfrac{d}{dt}).
\end{aligned}$$

Définition 3.3.8. *On dit que J est intégrable si son tenseur de Nijenhuis :*

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] = 0,\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

et on dit dans ce cas que (φ,ξ,η) est normale.

Remarque 3.3.1. *La normalité de (φ,ξ,η) en fonction de N_φ est*

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y],\ \forall\ X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposition 3.3.4. *La structure presque de contact (φ,ξ,η) sur M est normale si et seulement si*

$$N_\varphi + 2d\eta\otimes\xi = 0.$$

On définit les quatres tenseurs suivants $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$ et $N^{(4)}$ par :

$$N^{(1)}(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi,$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)\,Y - (\mathcal{L}_{\varphi Y\eta})\,X,$$

$$N^{(3)}(X,Y) = (\mathcal{L}_\xi\varphi)\,X,$$

$$N^{(4)}(X,Y) = (\mathcal{L}_\xi\eta)$$

Lemme 3.3.1. *[6] Pour une structure presque contact métrique (φ, ξ, η, g) la dérivée covariante de φ est donnée par*

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\
&+g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \qquad (3.11) \\
&+2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y)
\end{aligned}$$

3.3.5 Variétés K-contact

Définition 3.3.9. *[6] Soit M^{2n+1} une variété de contact métrique avec la structure contact métrique (φ, ξ, η, g). Si le champ de vecteurs ξ est de Killing alors la structure de contact sur M est appellée une structure K-contact.*

Théorème 3.3.1. *[6] Une structure de contact métrique est K-contact si et seulement si*

$$\nabla_X\xi = -\varphi X.$$

Où ∇ est la connexion Riemannienne de g.

Preuve.

1. Supposons que M^{2n+1} est une variété K-contact et on montre que $\nabla_X\xi = -\varphi X$, on a

$$\begin{aligned}
g(X, \varphi Y) &= d\eta(X, Y) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(g(\nabla_X Y, \xi) + g(Y, \nabla_X\xi) - g(\nabla_Y X, \xi) - g(X, \nabla_Y\xi) - g([X, Y], \xi)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_Y\xi, X)\right).
\end{aligned}$$

Puique ξ est de Killing alors $(\mathcal{L}_\xi g)(X, Y) = 0$ donc

$$g(\nabla_X\xi, Y) + g(X, \nabla_Y\xi) = 0,$$

alors,

$$g(\nabla_X\xi, Y) = -g(X, \nabla_Y\xi),$$

d'où,

$$\begin{aligned}
g(X, \varphi Y) &= \tfrac{1}{2}g(\nabla_X\xi, Y) + \tfrac{1}{2}g(\nabla_X\xi, Y) \\
&= g(\nabla_X\xi, Y)
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.3.5. *[6] Soit M^{2n+1} une variété K-contact avec la structure (φ, ξ, η, g). Alors la courbure sectionnelle de toute section plate contenant ξ est égal 1.*

Preuve. Soient X un champ de vecteurs unitaire orthogonale à ξ et R le tenseur de courbure de M^{2n+1}. Alors

$$\begin{aligned}
R(\xi, X)\xi &= \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_{[\xi, X]} \xi \\
&= -\nabla_\xi \varphi X + \nabla_X \varphi \xi + \varphi[\xi, X] \\
&= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi[X, \xi] \text{ car } \varphi\xi = 0 \text{ donc } \nabla_X \varphi \xi = 0 \\
&= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi \nabla_\xi X - \varphi \nabla_X \xi \\
&= -\nabla_\xi \varphi X - \varphi \nabla_X \xi \\
&= -\varphi \nabla_X \xi \\
&= \varphi^2 X \\
&= -X + \eta(X)\xi.
\end{aligned}$$

Puisque $X \perp \xi$ alors $\eta(X)\xi = 0$.
Donc,

$$R(\xi, X)\xi = -X.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
K(\xi, X) &= -g(R(\xi, X)\xi, X) \\
&= -g(-X, X) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.2. *[6] Une variété contact métrique M^{2n+1} est une variété K-contact si et seulement si la courbure de Ricci dans la direction de champ de vecteurs ξ est égal $2n$.*

Preuve. On veux monter que

$$\text{K-contact} \Longleftrightarrow \widetilde{S}\xi = 2n\xi \text{ tel que } \widetilde{S} \text{ est l'opérateur de Ricci.}$$

1. Supposons que $\widetilde{S}\xi = 2n\xi$ et on prouve que M^{2n+1} est K-contact.
On a

$$2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) = g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y). \tag{3.12}$$

On pose $Y = \xi$ dans l'équation (3.12) on obtient

$$2g((\nabla_X\varphi)\xi, Z) = g(N^{(1)}(\xi, Z), \varphi X) - 2d\eta(\varphi Z, \xi), \tag{3.13}$$

on utilise la formule qui définit le tenseur $N^{(1)}$ et la formule $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ alors l'équation (3.13) devient

$$2g((\nabla_X\varphi)\xi, Z) = g([\varphi, \varphi](\xi, Z) + 2d\eta(\xi, Z)\xi, \varphi X) - 2g(\varphi Z, \varphi X), \tag{3.14}$$

de plus on utilise l'équation (3.13) et la formule $d\eta(\xi, X) = 0$ d'où l'équation (3.14) devient

$$2g((\nabla_X\varphi)\xi, Z) = g(\varphi^2[\xi, Z] - \varphi[\xi, \varphi Z], \varphi X) - 2g(\varphi Z, \varphi X), \tag{3.15}$$

a l'aide de la définition de la dérivée de Lie on trouve que

$$\varphi^2[\xi, Z] - \varphi[\xi, \varphi Z] = -\varphi((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z),$$

Aussi, on sait que

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

d'où (3.15) devient

$$2g((\nabla_X\varphi)\xi, Z) = -g(\varphi(\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, \varphi X) - 2g(Z, X) + 2\eta(Z)\eta(X), \tag{3.16}$$

mais,

$$g(\varphi(\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, \varphi X) = g((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, X) - \eta((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z)\eta(X)$$

où $\eta((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z) = 0$ car

$$\begin{aligned}
\eta((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z) &= g([\xi, \varphi Z], \xi) - g([\xi, Z], \varphi\xi) \\
&= g(\nabla_\xi\varphi Z, \xi) - g(\nabla_{\varphi Z}\xi, \xi) \\
&= \xi g(Z, \varphi\xi) - g(\varphi Z, \nabla_\xi\xi) - \tfrac{1}{2}\varphi Z g(\xi, \xi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc,

$$2g((\nabla_X\varphi)\xi, Z) = -g((\mathcal{L}_\xi\varphi)Z, X) - 2g(Z, X) + 2\eta(Z)\eta(X), \tag{3.17}$$

on utilise la symmétrie de $\mathcal{L}_\xi\varphi$ on trouve

$$2g((\nabla_X\varphi)\xi, Z) = -g((\mathcal{L}_\xi\varphi)X, Z) - 2g(X, Z) + 2g(\eta(X)\xi, Z),$$

ce qui donne

$$2(\nabla_X\varphi)\xi = -(\mathcal{L}_\xi\varphi)X - 2X + 2\eta(X)\xi,$$

et cela implique

$$-\varphi\nabla_X\xi = -\frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\varphi)X - X + \eta(X)\xi,$$

on applique φ sur dernière équation on trouve

$$\nabla_X\xi = -\frac{1}{2}\varphi(\mathcal{L}_\xi\varphi)X - \varphi X, \tag{3.18}$$

on définit h par $h = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi\varphi) = \frac{1}{2}N^{(3)}$ donc (3.18) devient

$$\nabla_X\xi = -\varphi X - \varphi hX, \tag{3.19}$$

on utilise (3.19) pour calculer $R(\xi, X)\xi$, on a

$$R(\xi, X)\xi = \nabla_\xi\nabla_X\xi - \nabla_X\nabla_\xi\xi - \nabla_{[\xi,X]}\xi$$

mais, $\nabla_\xi\xi = 0$ alors,

$$R(\xi, X)\xi = \nabla_\xi\nabla_X\xi - \nabla_{[\xi,X]}\xi,$$

d'où,

$$R(\xi, X)\xi = \frac{1}{2}\varphi\nabla_\xi\nabla_{\varphi X}\xi + \frac{1}{2}\nabla_\xi\nabla_X\xi - \frac{1}{2}\varphi\nabla_{\varphi[\xi,X]}\xi - \frac{1}{2}\nabla_{[\xi,X]}\xi - \varphi\nabla_X\xi,$$

équivalent à,

$$R(\xi, X)\xi - \frac{1}{2}\nabla_\xi\nabla_X\xi + \frac{1}{2}\nabla_{[\xi,X]}\xi = \frac{1}{2}\varphi\nabla_\xi\nabla_{\varphi X}\xi - \frac{1}{2}\varphi\nabla_{\varphi[\xi,X]}\xi - \varphi\nabla_X\xi,$$

la dernière équation devient

$$R(\xi, X)\xi - \frac{1}{2}R(\xi, X)\xi = \frac{1}{2}\varphi\nabla_\xi\nabla_{\varphi X}\xi - \frac{1}{2}\varphi\nabla_{[\xi,\varphi X]}\xi + \frac{1}{2}\varphi\nabla_{(\mathcal{L}_\xi\varphi)X}\xi - \varphi\nabla_X\xi,$$

, donc,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}R(\xi,X)\xi-\tfrac{1}{2}\varphi R(\xi,\varphi X)\xi &= \tfrac{1}{2}\varphi\nabla_{(\mathcal{L}_\xi\varphi)}X-\varphi\nabla_X\xi\\
&= \tfrac{1}{2}\varphi\left(-\tfrac{1}{2}\varphi(\mathcal{L}_\xi\varphi)^2X-\varphi(\mathcal{L}_\xi\varphi)X\right)-\varphi\left(-\tfrac{1}{2}\varphi(\mathcal{L}_\xi\varphi)X-\varphi X\right)\\
&= -\tfrac{1}{4}\varphi^2(\mathcal{L}_\xi\varphi)^2X-\tfrac{1}{2}\varphi^2(\mathcal{L}_\xi\varphi)X+\tfrac{1}{2}\varphi^2(\mathcal{L}_\xi\varphi)X+\varphi^2X\\
&= \tfrac{1}{4}\varphi^2(\mathcal{L}_\xi\varphi)^2X+\varphi^2X
\end{aligned}$$

d'où,

$$\frac{1}{2}R(\xi,X)\xi-\frac{1}{2}\varphi R(\xi,\varphi X)\xi=h^2X+\varphi^2X. \tag{3.20}$$

Soit $\{e_i\}_{i=1}^{2n+1}$ une base orthonormée

$$\begin{aligned}
trh^2 &= g(h^2e_i,e_i)\\
&= \tfrac{1}{2}g(R(\xi,e_i)\xi,e_i)-\tfrac{1}{2}g(\varphi R(\xi,\varphi e_i)\xi,e_i)-g(\varphi^2e_i,e_i)\\
&= -\tfrac{1}{2}g(R(\xi,e_i)e_i,\xi)-\tfrac{1}{2}g(R(\xi,\varphi e_i)\varphi e_i,\xi)-g(-e_i+\eta(e_i)\xi,e_i)\\
&= -\tfrac{1}{2}g(\widetilde{S}\xi,\xi)-\tfrac{1}{2}g(R(\xi,\varphi e_i)\varphi e_i,\xi)+(2n+1)-\eta(e_i)^2.
\end{aligned}$$

Soit φ-base $\{X_i,\xi\}_{i=1}^{2n}$ une base orthonormée

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}g(R(\xi,\varphi e_i)\varphi e_i,\xi) &= -\tfrac{1}{2}g(R(\xi,\varphi X_i)\varphi X_i,\xi)-\tfrac{1}{2}g(R(\xi,\varphi\xi)\varphi\xi,\xi)\\
&= -\tfrac{1}{2}g(\widetilde{S}\xi,\xi),
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
trh^2 &= -\tfrac{1}{2}g(\widetilde{S}\xi,\xi)-\tfrac{1}{2}g(\widetilde{S}\xi,\xi)+2n+1-1\\
&= -g(\widetilde{S}\xi,\xi)+2n
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse on a $\widetilde{S}\xi=2n\xi$ alors $trh^2=-2n+2n=0$ donc $trh^2=0$.
On a

$$\begin{aligned}
trh^2 &= \sum h_{ia}h_{ai}\\
&= \sum h_{ai}^2\\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où, $h_{ai}=0,\forall i,a$. Alors $h=0$. Et puisque $h=\frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi\varphi=0$ donc la structure métrique contact est K-contact sur M^{2n+1}.

2. Supposons que M^{2n+1} est K-contact et on prouve que $\widetilde{S}\xi = 2n\xi$.

$$
\begin{aligned}
M^{2n+1} \text{ est K-contact} &\iff \xi \text{ est de Killing}\\
&\iff \mathcal{L}_\xi g = 0\\
&\iff \mathcal{L}_\xi \nabla_X Y = \nabla_{\mathcal{L}_\xi X} Y + \nabla_X \mathcal{L}_\xi Y\\
&\iff [\xi, \nabla_X Y] = \nabla_{[\xi,X]} Y + \nabla_X [\xi, Y]\\
&\iff \nabla_\xi \nabla_X Y - \nabla_{\nabla_X Y}\xi = \nabla_{[\xi,X]} Y + \nabla_X \nabla_\xi Y - \nabla_X \nabla_Y \xi\\
&\iff \nabla_\xi \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_\xi Y - \nabla_{[\xi,X]} Y = \nabla_{\nabla_X Y}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi\\
&\iff R(\xi, X)Y = -\varphi \nabla_X Y + \nabla_X \varphi Y\\
&\iff R(\xi, X)Y = (\nabla_X \varphi)Y,
\end{aligned}
$$

on a,

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{S}\xi, \xi) &= g(R(\xi, e_i)e_i, \xi)\\
&= g((\nabla_{e_i}\varphi)e_i, \xi)\\
&= g(\nabla_{e_i}\varphi e_i, \xi) - g(\varphi \nabla_{e_i} e_i, \xi)\\
&= g(\nabla_{e_i}\varphi e_i, \xi) - g(\nabla_{e_i} e_i, \varphi\xi)
\end{aligned}
$$

et puisque,

$$e_i g(\varphi e_i, \xi) = g(\nabla_{e_i}\varphi e_i, \xi) + g(\varphi e_i, \nabla_{e_i}\xi)$$

alors,

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{e_i}\varphi e_i, \xi) &= e_i g(\varphi e_i, \xi) - g(\varphi e_i, \nabla_{e_i}\xi)\\
&= e_i g(\varphi e_i, \xi) - g(\varphi e_i, \nabla_{e_i}\xi),
\end{aligned}
$$

de plus,

$$\nabla_X \xi = -\varphi X - \varphi h X,$$

donc,

$$
\begin{aligned}
-g(\varphi e_i, \nabla_{e_i}\xi) &= -g(\varphi e_i, -\varphi e_i - \varphi h e_i)\\
&= g(\varphi e_i, \varphi e_i) + g(\varphi e_i, \varphi h e_i),
\end{aligned}
$$

on sait que,

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

alors,

$$g(\varphi e_i, \varphi e_i) + g(\varphi e_i, \varphi h e_i) = g(e_i, e_i) - \eta(e_i)\eta(e_i) + g(e_i, he_i) - \eta(e_i)\eta(he_i),$$

et puisque, $g(e_i, he_i) = trh = 0$ et $\eta(he_i) = 0$ d'où

$$\begin{aligned} g(\varphi e_i, \varphi e_i) + g(\varphi e_i, \varphi h e_i) &= g(e_i, e_i) - \eta(e_i)\eta(e_i) \\ &= 2n + 1 - 1 \\ &= 2n, \end{aligned}$$

donc $\widetilde{S}\xi = 2n\xi$.

□

3.3.6 Variétés Sasakiennes

Définition 3.3.10. *Soit M^{2n+1} une variété de contact métrique avec la structure de contact métrique (φ, ξ, η, g). Si la structute (φ, ξ, η, g) est normale on dit que M a une structure Sasakienne. On appelle M une variété Sasakienne.*

Théorème 3.3.3. *[6] Une structure presque contact métrique (φ, ξ, η, g) est Sasakienne si et seulement si*

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X. \tag{3.21}$$

Où ∇ est la connexion Riemannienne de g.

Preuve.

1. Supposons que (φ, ξ, η, g) est normale et on prouve que

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X,$$

d'aprés le Lemme 3.3.1 on a

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &\quad + g(N^{(1)}(Y, Z), \varphi X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y), \end{aligned}$$

puisque (φ, ξ, η, g) est une structure de contact métrique normale alors $\Phi = d\eta$, $N^{(1)} = 0$ et $N^{(2)} = 0$ donc

$$\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y) \\
&= 2g(\varphi Y, \varphi X)\eta(Z) - 2g(\varphi Z, \varphi X)\eta(Y) \\
&= 2(g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y))\eta(Z) - 2(g(Z, X) - \eta(Z)\eta(X))\eta(Y) \\
&= 2g(X, Y)\eta(Z) - 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z) - 2g(Z, X)\eta(Y) + 2\eta(Z)\eta(X)\eta(Y) \\
&= 2g(X, Y)\eta(Z) - 2g(Z, X)\eta(Y) \\
&= 2g(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, Z),
\end{aligned}$$

donc,

$$2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) = 2g(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, Z).$$

2. Maintenant, supposons que on a

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \tag{3.22}$$

et on montre que (φ, ξ, η, g) est une structure de contact métrique normale i.e.,

$$N_\varphi + d\eta \otimes \xi = 0.$$

On pose $Y = \xi$ dans l'équation (3.22) on trouve

$$(\nabla_X\varphi)\xi = g(X, \xi)\xi - \eta(\xi)X,$$

$\Longleftrightarrow$

$$\nabla_X\varphi\xi - \varphi\nabla_X\xi = \eta(X)\xi - X,$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\varphi\nabla_X\xi = \eta(X)\xi - X, \tag{3.23}$$

on applique φ sur (3.23) on obtient

$$\nabla_X\xi = \varphi X,$$

d'où ξ est de Killing. On commence par calculer $d\eta(X,Y)$

$$\begin{aligned}
d\eta(X,Y) &= \tfrac{1}{2}\left(X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(Xg(\xi,Y) - Yg(\xi,X) - \eta([X,Y])\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left(g(\nabla_X\xi,Y) + g(\xi,\nabla_X Y)\right) - \tfrac{1}{2}\left(g(\nabla_Y\xi,X) + g(\xi,\nabla_Y X)\right) - \tfrac{1}{2}\eta([X,Y])\\
&= \tfrac{1}{2}g\left(\xi,\nabla_X Y - \nabla_Y X\right) + \tfrac{1}{2}g(\nabla_X\xi,Y) - \tfrac{1}{2}g(\nabla_Y\xi,X) - \tfrac{1}{2}\eta([X,Y])\\
&= \tfrac{1}{2}\left(g(\nabla_X\xi,Y) - g(\nabla_Y\xi,X)\right),
\end{aligned}$$

puisque ξ est de Killing alors

$$-g(\nabla_Y\xi,X) = g(\nabla_X\xi,Y),$$

donc,

$$d\eta(X,Y) = g(\nabla_X\xi,Y) = -g(\varphi X,Y),$$

aprés ça on détermine $N_\varphi(X,Y)$

$$\begin{aligned}
N_\varphi(X,Y) &= (\varphi\nabla_X\varphi - \nabla_{\varphi Y}\varphi)X - (\varphi\nabla_X\varphi - \nabla_{\varphi X}\varphi)Y\\
&= \varphi(\nabla_Y\varphi)X - (\nabla_{\varphi Y}\varphi)X - \varphi(\nabla_X\varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y\\
&= \varphi(g(X,Y)\xi - \eta(X)Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X) - g(X,\varphi Y)\xi + \eta(X)\varphi Y\\
&+ g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\\
&= 2g(\varphi X,Y)\xi,
\end{aligned}$$

d'où

$$N_\varphi(X,Y) + 2d\eta\otimes\xi = 0,$$

alors $(\varphi,\xi,\eta,g) = 0$ est normale.

□

Chapitre 4

Géométrie de Thurston F^4

L'objectif de ce chapitre est de définir la géométrie de Thurston F^4, de donner sa métrique et on étudier la pseudo-symétrie et la pseudo-symétrie holomorphe de F^4. Voir les référenes suivantes [?], [12], [15], [18], [22] et [23].

4.1 Géométrie de Thurston

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1. *Une action de groupe de G sur X est la donnée d'une application*

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \to & g.x \end{array}$$

telle que

1. $\forall\ g,\ \ g' \in G$, $\forall\ x \in X$, $g.(g'.x) = (g.g').x$.

2. $\forall\ x \in X$, $1.x = x$.

Définition 4.1.2. *On dit que G apère transitevement sur X si*

$$\forall\ x, y \in X, \exists\ g \in G : g.x = y.$$

Définition 4.1.3. *on appelle stabilisateur de $x \in X$ et on note H_x, l'ensemble*

$$\{g \in G / g.x = x\}$$

Définition 4.1.4. *Un groupe de Lie est un groupe muni d'une structure de variété différentiable compatible avec sa structure de groupe, c'est-à-dire telle que l'application*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & G \times G & \to & G \\ & (x,y) & \to & xy^{-1} \end{array}$$

soit différentiable.

Produit semi-direct

L'ensemble $AutN$ des automorphismes de groupe de N est lui même un groupe pour la loi $\circ$.

Soient N et H deux groupes. Le produit direct $N \times H$ de N et H est le groupe dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble produit $N \times H$, avec la loi $(n,h).(n',h') = (nn',hh')$ pour tous $n,n' \in N$ et $h,h' \in H$.

Le produit semi-direct est une généralisation de cette notion. Soit $\varphi : H \longrightarrow AutN$ un morphisme de groupes, qui définit en particulier une action $h.n = \varphi(h)(n)$ de N sur H.

Proposition 4.1.1. *on définit une loi de groupes sur l'ensemble produit $N \times H$ en posant*

$$(n,h).(n',h') = (n(h.n'),hh')\,.$$

Ce groupe s'appelle le produit semi-direct de N par H relativement à l'action φ ; on note le $H \ltimes_{\varphi} N$ (ou simplement $H \ltimes N$).

4.1.2 Géométrie modèle

Définition 4.1.5. *Une géométrie modèle est un couple (G,X), X étant une variété différentielle et G est un groupe de difféomorphismes de X vérifiant les hypothèses (a) et (b) suivantes :*

(a) X est simplement connexe.

(b) L'action de G sur X est transitive, à stabilisateurs compacts.

Conséquences 4.1.1.

- *Si (G,X) est une géométrie modèle, alors il existe sur X une métrique riemannienne est g invarinte par G. Une telle métrique est forcément complète, car G agit transitivement. Mais elle n'est toujours unique à multiple scalaire prés : elle l'est si et seulement si le stabilisateur H_x d'un point x (donc tout point) agit irréductiblement sur l'espace tangent T_xX.*

- *Si (G, X) est une géométrie modèle, alors G est un groupe de Lie.*

On définit une variété modelée sur (G, X) comme un quotient de X par un sous groupe discret de G agissant librement sur X. Une variété modelée sur X hérite de toute métrique invariante sur X.

4.1.3 Géométrie de Thurston

Définition du géométrie de Thurston de dimension 3

Définition 4.1.6. *On dira qu'une géométrie modèle (G, X) est de Thurston de dimension 3 si elle vérifie les axiomes supplémentaires (c) et (d) suivantes :*

(c) G est maximal parmi les groupes de difféomorphismes de X agissant avec stabilisateurs compacts.

(d) Il existe une variété compacte modelée sur (G, X).

– Si (G, X) est une géométrie modèle vérifiant l'axiome (c), et si g est une métrique riemannienne invariante par G alors $G = Isom(X, g)$. En effet, on sait que $G \subset Isom(X, g)$; or le groupe de isométrie d'une variété riemannienne connexe agit toujours avec stabisateurs compacts donc par maximalité de G l'inclusion ci-dessus est une égalité. Ceci permet de voir que l'axiome (c) est équivalent au suivant : pour toute métrique g G-invariante sur X, $G = Isom(X, G)$.
– Si (G, X) est une géométrie modèle vérifiant l'axiome (d) alors G est un groupe de Lie unimodulaire.

Définition du géométrie de Thurston de dimension 4

Définition 4.1.7. *On dira qu'une géométrie modèle (G, X) est de Thurston de dimension 4 si elle vérifie les axiomes supplémentaires (c) et (d') suivantes :*

(c) G est maximal parmi les groupes de difféomorphismes de X agissant avec stabilisateurs compacts.

(d') Il existe une variété de volume fini modelée sur (G, X).

4.2 Énumération de la géométrie de Thurston

Théorème 4.2.1. *[?], [20]*
La seule géométrie modèle de Thurston de dimension 1 est $E^1 \simeq \mathcal{E}(1)/O(1)$.
Les géométries modèles de Thurston de dimension 2 sont le plan euclidien $E^2 \simeq \mathcal{E}(2)/O(2)$, la sphère $S^2 \simeq O(3)/O(2)$ et le plan hyperbolique $H^2 = PGL(2, R)/PO(2)$.

Théorème 4.2.2. *[?], [20]*
Il y a huit géométries modèles de Thurston (G, X) de dimension 3.

- *Si les stabilisateurs sont de dimension 3, X est l'espace euclidien E^3, la sphère euclidienne S^3 ou l'espace hyperbolique H^3 ; G est son groupe des isométries, soit $\mathcal{E}(3)$, $O(4)$ ou $PO(3,1)$.*

- *Si les stabilisateurs sont de dimension 1, alors un il y a un fibré naturel de X sur une géométrie modèle de dimension 2. Alors X soit un produit $S^2 \times E^1$ ou $H^2 \times E^1$ soit la " Nil-géométrie" $(NIL \rtimes O(2),\ NIL)$ (qui fibre sur E^2) soit la géométrie $(\widetilde{SL}(2,R) \rtimes O(2),\ \widetilde{SL}(2,R))$ (qui fibre sur H^2).*

- *Si les stabilisateurs sont finis, la seule géométrie possible est "Sol-géométrie" $(SOL \rtimes D_4,\ SOL)$, qui fibre naturellement sur E^1.*

R. Filipkiewicz a classifié les géométries de Thurston de dimension 4 et il a obtenu les géométries modèles suivantes :

1. les espaces produits : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times E^2$, $S^2 \times H^2$, E^4, $E^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $S^3 \times E^1$, $H^3 \times E^1$, $Sl_2(\mathbb{R}) \times E^1$, $Nil^3 \times E^1$.
2. Les espaces Riemanniennes symétriques irréductibles : S^4,H^4, $P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$.
3. Nil^4, $Sol^4_{m,n}$, Sol^4_0, Sol^4_1 et F^4, où

Le groupe de Lie nilpotent $Nil^4 = \mathbb{R}^3 \ltimes_U \mathbb{R}$ (produit semidirect de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$)

$$U(t) = exp(t\ L) \text{ et } L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(la loi du groupe Nil^4 est donnée par : $(V,t)(V',t') = (V + U(t)V', t+t')$ pour $V, V' \in \mathbb{R}^3$ et $t, t' \in \mathbb{R}$).
Le groupe de Lie résoluble $Sol^4_{m,n} = \mathbb{R}^3 \ltimes_{T_{m,n}} \mathbb{R}$ avec

$$T_{m,n} = exp(t\ C_{m,n}) \text{ et } C_{m,n} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

(la loi du groupe $Sol^4_{m,n}$ est donnée par : $(V,t)(V',t') = (V + T_{m,n}(t)V', t+t')$ pour $V, V' \in \mathbb{R}^3$ et $t, t' \in \mathbb{R}$) où $\alpha > \beta > \gamma$ sont des réels, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et e^α,e^β, e^γ

sont les racines distincts de $\lambda^3 - m\lambda^2 + n\lambda - 1 = 0$ avec m, n des entiers positifs.
Le groupe de Lie résoluble Sol_1^4 est le groupe de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ \\ 0 & \alpha & a \\ \\ 0 & 0 & 1 \\ \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \right\}$$

et F^4 qui est défini par $G = \mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$ (le produit semidirect est défini par l'action naturelle de $Sl_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$) et $X = \mathbb{R}^2 \times H^2$ ($H^2 = \{w \in \mathbb{C} | Im(w) > 0\}$ le plan hyperbolique). L'action de $\mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2 \times H^2$ est définie par :
pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $w \in H^2$ et $(V, A) \in \mathbb{R}^2 \ltimes Sl_2(\mathbb{R})$, $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(V, A).(x, y, w) = \left(v_1 + ax + by, v_2 + cx + dy, \frac{aw + b}{cw + d} \right).$$

Les stabilisateurs de ces géométries sont

Stabilisateur	Géométrie	Nature de la géométrie
SO_4	S^4, E^4, H^4	courbure constante
U_2 $SO_2 \times SO_2$ SO_3	$P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$ $S^2 \times S^2$, $S^2 \times E^2$, $S^2 \times H^2$, $E^2 \times H^2$, $E^2 \times H^2$ $S^3 \times E^1$, $H^3 \times E^1$	symétrique
SO_2 $\{1\}$	$\widetilde{Sl}_2(\mathbb{R}) \times E^1$, $Nil^3 \times E^1$, Sol_0^4, F^4 Nil^4, $Sol_{m,n}^4$, Sol_1^4	non symétrique

4.3 Métrique invariante par le groupe G dans la géométrie modèle de Thurston F^4

Hasni a éclairé la métrique invariante par le groupe G dans la géométrie modèle de Thurston F^4 au point $p = (x, y, s + it)$ par

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{-s}{t} & 0 & 0 \\ \\ \frac{-s}{t} & \frac{s^2+t^2}{t} & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \frac{1}{4t^2} & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4t^2} \end{pmatrix}.$$

Pour plus des tailles voir [15].

4.3.1 Structure complexe et géométrie de Thurston F^4

Compatibilité de la métrique avec la structure complexe

Les seules géométries de Thurston admettant une structure complexe sont : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times \mathbb{R}^2$, $S^2 \times H^2$, $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$, $S^3 \times \mathbb{R}$, F^4, $Nil^3 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{Sl}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, Sol_0^4 et Sol_1^4, voir [22].

Alors, la structure complexe J de F^4 est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{s}{t} & \frac{(s^2+t^2)}{t} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{t} & \frac{s}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3.2 La pseudo symétrie et les géométrie de Thurston F^4

L'objecrif principal de cette section est de montrer que la géométrie modèle de Thurston F^4 (qui n'est pas symétrique) n'est ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique et de monter que F^4 est holomorphiquement pseudo symétrique, voir [15].

Théorème 4.3.1. *[15] Toutes les géométries modèles de Thurston de dimension quatre qui ne sont pas symétrique ne sont ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique.*

Corollaire 4.3.1. *[15] La géométrie modèle de Thurston F^4 qui n'est pas symétrique n'est ni Ricci pseudo symétrique ni Weyl pseudo symétrique.*

Preuve. Soit (x, y, s, t) un système de coordonées tel que

$$e_1 = \partial x, \quad e_2 = \partial y, \quad e_3 = \partial s, \quad e_4 = \partial t$$

Pour la paramétrisation $\mathbb{R}^2 \times H^2$

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \times H^2 \\ & (x, y, s, t) & \longrightarrow & (x, y, s + it) \end{array}$$

on la métrique de F^4 est :

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{s}{t} & 0 & 0 \\ -\frac{s}{t} & \frac{t^2+s^2}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4t^2} \end{pmatrix},$$

cette métrique n'est pas Ricci pseudo symétrique. En effet

$$Q(g,S)(e_1,e_3,e_1,e_3) = \frac{-3}{2t^3}, \qquad (R.S)(e_1,e_3,e_1,e_3) = \frac{3}{2t^3},$$

et

$$Q(g,S)(e_1,e_3,e_2,e_4) = 0, \qquad (R.S)(e_1,e_3,e_2,e_4) = \frac{-3}{2t^2},$$

aussi on a

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_3,e_1,e_4) = \frac{-3}{4t^3}, \qquad R.C(e_1,e_2,e_1,e_3,e_1,e_4) = \frac{3}{4t^2}$$

et,

$$Q(g,C)(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = 0, \qquad R.C(e_1,e_2,e_1,e_3,e_2,e_3) = \frac{3}{4t^2}$$

donc g n'est pas Weyl pseudo symétrique. □

4.3.3 La pseudo symértie holomorphe de F^4

Wall a prouvé que : $S^2 \times S^2$, $S^2 \times E^2$, E^4, $E^2 \times H^2$, $H^2 \times H^2$, $P^2(\mathbb{C})$, $H^2(\mathbb{C})$ et F^4 sont les seules géométries modèles de Thurston de dimension 4 admettant une structure Kählérienne compatible avec le groupe des isométries maximal.

Théorème 4.3.2. *[1],[15] F^4 est holomorphiquement pseudo symétrique de type constant avec $R.R = -\widetilde{Q}(g,R)$.*

Chapitre 5

Géométrie des sous variétés $\gamma \times H^2$ dans la géométrie de Thurston F^4

Ce chapitre présente notre travail sur l'hypersurface $\gamma \times H^2$ dans la géométrie de Thurston F^4. On va donner les conditions pour que l'hypersurface $\gamma \times H^2$ soit minimale, on prouve qu'elle n'est pas totalement ombilicale ni pseudo-parallèle et on déduit qu'elle n'est pas semi-parallèle ni parallèle et ni totalement géodésique. De plus on trouve que cette hypersurface a une structure de contact mais elle n'est pas Sasakienne.

5.1 L'hpersurface $\gamma \times H^2$ dans F^4

Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface dans $F^4 = \mathbb{R}^2 \times H^2$ telle que

$$\begin{aligned} f: \quad M^3 = \gamma \times H^2 &\longrightarrow \qquad \mathbb{R}^2 \times H^2 \\ (u, v, w) \qquad &\longrightarrow \quad ((\gamma 1)(u), (\gamma 2)(u), v, w) \end{aligned}$$

est une immersion isométrique de $M^3 = \gamma \times H^2$ vers F^4, γ est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ et $H^2 = \{(v, w) \in \mathbb{C}/w > 0\}$ est le plan hyperbolique.

5.1.1 La métrique de $\gamma \times H^2$

Lemme 5.1.1. *Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, g est la métrique de M^3 au point $q(u,v,w)$ dans la base $\{\partial u(q), \partial v(q), \partial w(q)\}$ de l'espace tangent T_qM^3 alors*

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+\delta^2}{w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4w^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4w^2} \end{pmatrix}$$

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, $\{\partial u(q), \partial v(q), \partial w(q)\}$ est une base de T_qM^3 au point $q(u,v,w)$, $\{\partial x(p), \partial y(p), \partial s(p), \partial t(p)\}$ est une base de T_pF^4 au point $p(x,y,s,t)$, on va noter à le vecteur $V = a\partial x + b\partial y + c\partial s + d\partial t \in T_pF^4$ par

$$V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

On a

$$g_{ij} = (\partial u_i)^t.\widetilde{g}.(\partial u_j)$$

Où

$$\partial u_1 = \partial u, \quad \partial u_2 = \partial v, \quad \partial u_3 = \partial w$$

Aussi, on a

$$\partial u = (\gamma 1)_u \partial x + (\gamma 2)_u \partial y, \quad \partial v = \partial s, \quad \partial w = \partial t \tag{5.1}$$

Donc,

$$g_{11} = \frac{((\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u)^2 + w^2(\gamma 2)_u^2}{w}, \quad g_{12} = 0, \quad g_{13} = 0, \quad g_{22} = \frac{1}{4w^2}, \quad g_{23} = 0, \quad g_{33} = \frac{1}{4w^2}$$

On pose, $\lambda = (\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u$ et $\delta = w(\gamma 2)_u$, alors

$$g = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+\delta^2}{w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4w^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4w^2} \end{pmatrix}$$

□

Remarque 5.1.1. *On a $\lambda^2 + \delta^2 > 0$ car f est une immersion.*

5.1.2 La connexion de $\gamma \times H^2$

Lemme 5.1.2. *Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, ∇ et $\widetilde{\nabla}$ les connexions de Levi-Civita de M^3 et F^4, respectivement. Les symboles de Christoffel de $\widetilde{\nabla}$ et ∇ pour un point $p(u, v, w)$ de M^3 sont $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ et Γ_{ij}^k, respectivement. Les $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ qui ne sont pas nuls, pour $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$, sont :*

$$\begin{array}{llll} \widetilde{\Gamma}_{13}^1 = \frac{-v}{2w^2}, & \widetilde{\Gamma}_{14}^1 = \frac{-1}{2w}, & \widetilde{\Gamma}_{23}^1 = \frac{-w^2+v^2}{2w^2}, & \widetilde{\Gamma}_{24}^1 = \frac{v}{w}, \\ \widetilde{\Gamma}_{13}^2 = \frac{-1}{2w^2}, & \widetilde{\Gamma}_{23}^2 = \frac{v}{2w^2}, & \widetilde{\Gamma}_{24}^2 = \frac{1}{2w}, & \widetilde{\Gamma}_{12}^3 = 2w, \\ \widetilde{\Gamma}_{22}^3 = -4wv, & \widetilde{\Gamma}_{34}^3 = \frac{-1}{w}, & \widetilde{\Gamma}_{12}^4 = -2v, & \widetilde{\Gamma}_{11}^4 = 2, \\ \widetilde{\Gamma}_{22}^4 = 2v^2 - 2w^2, & \widetilde{\Gamma}_{33}^4 = \frac{1}{w}, & \widetilde{\Gamma}_{44}^4 = \frac{-1}{w}. & \end{array} \tag{5.2}$$

et les Γ_{ij}^k qui ne sont pas nuls, pour $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, sont :

$$\begin{array}{llll} \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_u\lambda+\delta_u\delta}{\lambda^2+\delta^2}, & \Gamma_{12}^1 = \frac{-\lambda\delta}{w(\lambda^2+\delta^2)}, & \Gamma_{13}^1 = \frac{\delta^2-\lambda^2}{2w(\lambda^2+\delta^2)}, & \Gamma_{11}^2 = 4\delta\lambda \\ \Gamma_{23}^2 = \frac{-1}{w}, & \Gamma_{11}^3 = 2(\lambda^2 - \delta^2), & \Gamma_{22}^3 = \frac{1}{w}, & \Gamma_{33}^3 = \frac{-1}{w} \end{array} \tag{5.3}$$

Preuve. Par un calcul direct en utilisant la formule des symboles

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_l (g^{kl}(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}))$$

On calcule $\widetilde{\Gamma}_{ij}^k$ et Γ_{ij}^k les symboles de christoffel de $\widetilde{\nabla}$ et ∇, respectivement. □

5.1.3 La seconde forme fondamentale de $\gamma \times H^2$

Lemme 5.1.3. *[4] Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4 le champ de vecteurs normale unitaire N sur M^3 est donné par*

$$N = \frac{\pm 1}{\sqrt{w(\delta^2 + \lambda^2)}} \begin{pmatrix} v\lambda - w\delta \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. Soient $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4 et N un champ de vecteurs normale unitaire donné par $N = \begin{pmatrix} \theta \\ \mu \\ \nu \\ \rho \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{cases} (\partial u)^t.\widetilde{g}.N = 0 \\ (\partial v)^t.\widetilde{g}.N = 0 \\ (\partial w)^t.\widetilde{g}.N = 0 \\ (N)^t.\widetilde{g}.N = 1 \end{cases}$$

Donc, $\theta = \frac{v(\gamma 1)_u - (v^2+w^2)(\gamma 2)_u}{(\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u}\mu$, $\mu = \pm\frac{(\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u}{\sqrt{w(w^2(\gamma 2)_u^2 + ((\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u)^2}}$, $\nu = 0$, $\rho = 0$.

D'où

$$N = \frac{\pm 1}{\sqrt{w(w^2(\gamma 2)_u^2 + ((\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u)^2)}} \begin{pmatrix} v(\gamma 1)_u - (v^2+w^2)(\gamma 2)_u \\ (\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On utilise $\lambda = (\gamma 1)_u - v(\gamma 2)_u$ et $\delta = w(\gamma 2)_u$, alors

$$N = \frac{\pm 1}{\sqrt{w(\delta^2 + \lambda^2)}} \begin{pmatrix} v\lambda - w\delta \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Pour la suite on utilise le champs de vecteurs normale unitaire

$$N = \frac{1}{\sqrt{w(\delta^2+\lambda^2)}} \begin{pmatrix} v\lambda - w\delta \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 5.1.4. *[4] Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Pour $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, les composantes non nulles de α_{ij}, α_{ij}=$\alpha(\partial u_i, \partial u_j)$, sont*

$$\alpha_{11} = \frac{\delta_u\lambda - \lambda_u\delta}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}, \quad \alpha_{12} = \frac{\delta^2-\lambda^2}{2w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}, \quad \alpha_{13} = \frac{\lambda\delta}{w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, on a

$$\alpha_{ij} = N^t.\widetilde{g}.\widetilde{\nabla}_{\partial u_i}\partial u_j$$

et, par l'équation (5.1) et le résultat (5.2) dans le Lemme 5.1.2 on obtient

$$\widetilde{\nabla}_{\partial u}\partial u = \begin{pmatrix} (\gamma 1)_{uu} \\ (\gamma 2)_{uu} \\ 4\lambda\delta \\ 2(\lambda^2-\delta^2) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\nabla}_{\partial u}\partial v = \begin{pmatrix} \frac{-v\lambda - w\delta}{2w^2} \\ \frac{-\lambda}{2w^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\nabla}_{\partial u}\partial w = \begin{pmatrix} \frac{-(\gamma 1)_u}{2w} + \frac{v(\gamma 2)_u}{w} \\ \frac{(\gamma 2)_u}{2w} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\alpha_{11} = N^t.\widetilde{g}.\widetilde{\nabla}_{\partial u}\partial u = \frac{\delta_u\lambda - \lambda_u\delta}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$, $\alpha_{12} = N^t.\widetilde{g}.\widetilde{\nabla}_{\partial u}\partial v = \frac{\delta^2-\lambda^2}{2w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$
et $\alpha_{13} = N^t.\widetilde{g}.\widetilde{\nabla}_{\partial u}\partial w = \frac{\lambda\delta}{w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$. □

Lemme 5.1.5. *Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4 l'opérateur de la forme (shape operator) de M^3 est donné par*

$$A_N = \begin{pmatrix} \frac{w^2(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}} & \frac{w(\delta^2-\lambda^2)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}} & \frac{w\delta\lambda}{(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{2w(\delta^2-\lambda^2)}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} & 0 & 0 \\ \frac{4w\lambda\delta}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, on sait que $g(A_N X, Y) = \widetilde{g}(h(X,Y)N, N)$ donc $A_N = (g^{-1})^t.\alpha^t$, d'où

$$A_N = \begin{pmatrix} \frac{w^2(\delta_u\lambda - \lambda_u\delta)}{(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}} & \frac{w(\delta^2-\lambda^2)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}} & \frac{w\delta\lambda}{(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{2w(\delta^2-\lambda^2)}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} & 0 & 0 \\ \frac{4w\lambda\delta}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

5.2 Les hypersurfaces minimales

Théorème 5.2.1. *[4] Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, $M^3 = \gamma \times H^2$ est minimale si et seulement si*

1. *$M^3 = H^2 \times_k \mathbb{R}$, le produit tordu, avec*

$$\begin{aligned} k : H^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longrightarrow \sqrt{\tfrac{1}{w}} \end{aligned}$$

2. *$M^3 = H^2 \times_k \mathbb{R}$, le produit tordu, avec*

$$\begin{aligned} k : H^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longrightarrow \sqrt{\tfrac{(c_1-v)^2+w^2}{w}} \end{aligned}$$

$c_1 \in \mathbb{R}$.

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. M^3 est une hypersurface minimale si $trace(\alpha) = 0$ i.e., $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$. Puisque $\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ alors la condition de minimalité devient $\alpha_{11} = 0$ i.e.,

$$(\gamma 2)_{uu}(\gamma 1)_u - (\gamma 2)_u(\gamma 1)_{uu} = 0 \tag{5.4}$$

Les solutions de l'équation (5.4) sont $(\gamma 2)(u) = constante$ ou $(\gamma 1)(u) = c_1(\gamma 2)(u) + c_2$ telle que c_1 , $c_2 \in \mathbb{R}$.

1. Si $(\gamma 2)(u) = constante$ alors

$$g = \begin{pmatrix} \frac{(\gamma 1)_u^2}{w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4w^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4w^2} \end{pmatrix}$$

d'où on peut voir M^3 comme le produit tordu $H^2 \times_k \mathbb{R}$ où H^2 a la métrique $g_1 = \frac{dv^2+dw^2}{4w^2}$ et $\mathbb{R}$ a la métrique $g_2 = (\gamma 1)_u^2 du^2$ et la fonction du produit tordu est

$$\begin{array}{rcl} k : H^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v,w) & \longrightarrow & \sqrt{\frac{1}{w}} \end{array}$$

2. Si $\gamma 1(u) = c_1 \gamma 2(u) + c_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$g = \begin{pmatrix} \frac{((c_1-v)^2+w^2)(\gamma 2)_u^2}{w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4w^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4w^2} \end{pmatrix}$$

Egalement dans ce cas on peut voir M^3 comme le produit tordu $H^2 \times_k \mathbb{R}$ où H^2 a la métrique $g_1 = \frac{dv^2+dw^2}{4w^2}$ et $\mathbb{R}$ a la métrique $g_2 = (\gamma 2)_u^2 du^2$ et la fonction de produit tordu est

$$\begin{array}{rcl} k : H^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (v,w) & \longrightarrow & \sqrt{\frac{(c_1-v)^2+w^2}{w}} \end{array}$$

□

Lemme 5.2.1. *1.* $M^3 = H^2 \times_k \mathbb{R}$ *avec* $k(v,w) = \sqrt{\frac{1}{w}}$

- *Les composantes* R_{ijk}^l *qui sont non nules de* M^3 *, pour* $i,j,k \in \{1,2,3\}$' *et* $i < j$ *sont :*

$$R_{121}^2 = -\frac{2(\gamma 1(u))_u}{w}, \quad R_{131}^3 = -\frac{(\gamma 1(u))_u}{w}, \quad R_{232}^3 = -\frac{1}{w^2}.$$

- *Le tenseur de Ricci de cette hypersurface est donné par*

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{3(\gamma 1(u))_u}{w} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2w^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4w^2} \end{pmatrix}.$$

- *L'opérateur de Ricci de M^3 est*

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

- *La courbure scalaire est*

$$r = -14.$$

2. $M^3 = H^2 \times_k \mathbb{R}$ *où* $k(v,w) = \sqrt{\frac{(c_1-v)^2+w^2}{w}}$, $c_1 \in \mathbb{R}$
   - *Les composantes R^l_{ijk} qui sont non nulles de M^3, pour $i,j,k \in \{1,2,3\}$ et $i<j$ sont :*

$$R^2_{121} = -\frac{2((\gamma 2(u))_u)^2(w^4+c_1^4-4c_1^3v+6c_1^2v^2-4c_1w^3+v^4)}{w(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)},$$

$$R^3_{121} = \frac{2(c_1-v)((\gamma 2(u))_u)^2(-w^2+c_1^2-2c_1v+v^2))}{c_1^2-2c_1v+v^2+w^2},$$

$$R^2_{131} = \frac{2(c_1-v)((\gamma 2(u))_u)^2(-w^2+c_1^2-2c_1v+v^2)}{c_1^2-2c_1v+v^2+w^2},$$

$$R^3_{131} = -\frac{((\gamma 2(u))_u)^2(6w^2c_1^2-12w^2c_1v+6w^2v^2+w^4+c_1^4-4c_1^3v+6c_1^2v^2-4c_1v^3+v^4)}{w(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)},$$

$$R^3_{232} = -\frac{1}{w^2}.$$

- *Le tenseur de Ricci de l'hypersurface M^3 est donné par*

$$S_{11} = -\frac{3((\gamma 2(u))_u)^2(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)}{w},$$
$$S_{12} = 0, S_{13} = 0, S_{21} = 0, S_{31} = 0,$$

$$S_{22} = -\frac{3w^4+3c_1^4-12c_1^3v+18c_1^2v^2-12c_1v^3+3v^4+4w^2c_1^2-8w^2c_1v+4w^2v^2}{2w^2(c_1^2-2c_1^2v+v^2+w^2)^2},$$

$$S_{23} = \frac{(-w^2+c_1^2-2c_1v+v^2)(c_1-v)}{2w(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)^2},$$

$$S_{32} = \frac{(-w^2+c_1^2-2c_1v+v^2)(c_1-v)}{2w(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)^2},$$

$$S_{33} = -\frac{14w^2c_1^2-28w^3c_1v+14w^2v^2+5w^4+5c_1^4-20c_1^3v+30c_1^2v^2-20c_1v^3+5v^4}{4w^2(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)^2}.$$

- *L'opérateur de Ricci de l'hypersurface M^3 est*

$$\widetilde{S}_{11} = -3, \widetilde{S}_{12} = 0, \widetilde{S}_{13} = 0, \widetilde{S}_{21} = 0, \widetilde{S}_{31} = 0,$$

$$\widetilde{S}_{22} = -\frac{2(3c_1^4-12c_1^3v+18c_1^2v^2+4w^2c_1^2-12c_1v^3-8w^2c_1v+3v^2+4w^2v^2+4w^4)}{(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)^2},$$

$$\widetilde{S}_{23} = \frac{2w(c_1-v)(-w^2+c_1^2-2c_1v+v^2)}{(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)^2},$$

$$\widetilde{S}_{32} = \frac{2w(c_1-v)(-w^2+c_1^2-2c_1v+v^2)}{(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)^2},$$

$$\widetilde{S}_{33} = -\frac{5c_1^4-20c_1^3v+30c_1^2v^2+14w^3c_1^2-20c_1w^3-28w^2c_1v+5v^4+14w^2v^2+5w^4}{(c_1^2-2c_1v+v^2+w^2)^2}.$$

- *La courbure scalaire est*

$$r = -14.$$

où $S(X,Y) = tr(V \longrightarrow R(V,X)Y)$, $S(X,Y) = g(\widetilde{S}X,Y)$, $r = \sum_{ik} S_{ik}g^{ik}$ *et* g^{ik} *sont les composantes inverse de la métrique* g *.*

5.3 Les hypersurfaces pseudo-parallèles et totalement ombilicales

5.3.1 Les hypersurfaces totalement ombilicales

Le Lemme suivant donné les composantes de tenseur $Q(g, \alpha)$.

Lemme 5.3.1. *[4] Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Pour $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, les composantes qui sont non nulles de $Q(g, \alpha)(\partial u_i, \partial u_j, \partial u_k, \partial u_l)$ sont :*

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial u, \partial u, \partial v) = \frac{\delta^4 - \lambda^4}{w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}, \quad Q(g,\alpha)(\partial u, \partial u, \partial u, \partial w) = \frac{2\lambda\delta(\lambda^2+\delta^2)}{w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial v, \partial u, \partial v) = \frac{\lambda_u\delta - \delta_u\lambda}{4w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}, \quad Q(g,\alpha)(\partial u, \partial v, \partial v, \partial w) = \frac{\lambda\delta}{4w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial w, \partial u, \partial w) = \frac{\lambda_u\delta - \delta_u\lambda}{4w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}, \quad Q(g,\alpha)(\partial u, \partial w, \partial v, \partial w) = \frac{\lambda^2 - \delta^2}{8w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial v, \partial v, \partial u, \partial v) = \frac{\lambda^2 - \delta^2}{4w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}, \quad Q(g,\alpha)(\partial v, \partial w, \partial u, \partial v) = \frac{-\lambda\delta}{4w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial v, \partial w, \partial u, \partial w) = \frac{\lambda^2 - \delta^2}{8w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}, \quad Q(g,\alpha)(\partial w, \partial w, \partial u, \partial w) = \frac{-\lambda\delta}{2w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Pour $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\begin{aligned} Q(g,\alpha)(\partial u_i, \partial u_j, \partial u_k, \partial u_l) &= g(\partial u_k, \partial u_i)\alpha(\partial u_l, \partial u_j) - g(\partial u_l, \partial u_i)\alpha(\partial u_k, \partial u_j) \\ &+ g(\partial u_k, \partial u_j)\alpha(\partial u_i, \partial u_l) - g(\partial u_l, \partial u_j)\alpha(\partial u_i, \partial u_k) \end{aligned} \tag{5.5}$$

D'aprés l'équation (5.5) on a

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial u, \partial u, \partial v) = 2g(\partial u, \partial u)\alpha(\partial v, \partial u) = \frac{\delta^4 - \lambda^4}{w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial u, \partial u, \partial w) = 2g(\partial u, \partial u)\alpha(\partial w, \partial u) = \frac{2\delta\lambda(\lambda^2+\delta^2)}{w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial v, \partial u, \partial v) = -g(\partial v, \partial v)\alpha(\partial u, \partial u) = \frac{\lambda_u\delta - \delta_u\lambda}{4w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial v, \partial v, \partial w) = g(\partial v, \partial v)\alpha(\partial u, \partial w) = \frac{\lambda\delta}{4w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial w, \partial u, \partial w) = -g(\partial w, \partial w)\alpha(\partial u, \partial u) = \frac{\lambda_u\delta - \delta_u\lambda}{4w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial w, \partial v, \partial w) = -g(\partial w, \partial w)\alpha(\partial u, \partial v) = \frac{\lambda^2 - \delta^2}{8w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial v, \partial v, \partial u, \partial v) = -2g(\partial v, \partial v)\alpha(\partial u, \partial v) = \frac{\lambda^2 - \delta^2}{4w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial v, \partial w, \partial u, \partial v) = -g(\partial v, \partial v)\alpha(\partial u, \partial w) = \frac{-\lambda\delta}{4w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial v, \partial w, \partial u, \partial w) = -g(\partial w, \partial w)\alpha(\partial u, \partial v) = \frac{\lambda^2-\delta^2}{8w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

$$Q(g,\alpha)(\partial w, \partial w, \partial u, \partial w) = -2g(\partial w, \partial w)\alpha(\partial w, \partial u) = \frac{-\lambda\delta}{2w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$$

□

Théorème 5.3.1. *[4] Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, alors M^3 n'est pas totalement ombilicale dans F^4.*

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. D'aprés la proposition 2.5.1, M^3 est totalement ombilicale si et seulement si $Q(g,\alpha) = 0$. Si $Q(g,\alpha) = 0$ alors

$$Q(g,\alpha)(\partial u, \partial u, \partial u, \partial v) = \frac{\delta^4 - \lambda^4}{w^2\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} = 0 \tag{5.6}$$

Et

$$Q(g,\alpha)(\partial w, \partial w, \partial u, \partial w) = \frac{-\lambda\delta}{2w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} = 0 \tag{5.7}$$

D'apés les équations (5.6) et (5.7) on a $\lambda = \delta = 0$ mais ça est impossibe car $\lambda^2+\delta^2 > 0$ donc $M^3 = \gamma \times H^2$ n'est pas totalement ombilicale dans F^4. □

5.3.2 Les hypersurfaces pseudo-parallèles

Théorème 5.3.2. *[4] Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Alors M^3 n'est pas pseudo-parallèle dans F^4.*

Pour la preuve, premièment on calcule $(\overline{R}.\alpha)(\partial u_i, \partial u_j, \partial u_k, \partial u_l)$ pour $i,j,k,l \in \{1,2,3\}$.

Lemme 5.3.2. *Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, pour $i,j,k,l \in \{1,2,3\}$*

les composantes $(\overline{R}.\alpha)(\partial u_i, \partial u_j, \partial u_k, \partial u_l)$ *que ne sont pas nulles sont :*

$(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial v, \partial u, \partial u) = \frac{2(\delta^2-\lambda^2)(\lambda^2+\delta^2)^2}{w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}}$, $(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial v, \partial u, \partial v) = \frac{-(\delta^4+\lambda^4)(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial v, \partial u, \partial w) = \frac{(\lambda^3\delta-\lambda\delta^3)(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial v, \partial v, \partial v) = \frac{(\lambda^4+\delta^4)(\lambda^2-\delta^2)}{2w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial v, \partial v, \partial w) = \frac{\lambda\delta(-3\delta^4-3\lambda^4+2\lambda^2\delta^2)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial v, \partial w, \partial w) = \frac{\lambda\delta(\lambda^3\delta-\delta^3\lambda)}{w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial w, \partial u, \partial u) = \frac{4\lambda\delta(\lambda^2+\delta^2)^2}{w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}}$, $(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial w, \partial u, \partial v) = \frac{(\lambda^3\delta-\lambda\delta^3)(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial w, \partial u, \partial w) = \frac{(\lambda^4+6\lambda^2\delta^2+\delta^4)(\lambda_u\delta-\delta_u\lambda)}{4(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial w, \partial v, \partial v) = \frac{(\lambda^3\delta-\lambda\delta^3)(\delta^2-\lambda^2)}{2w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial w, \partial v, \partial w) = \frac{(\lambda^2-\delta^2)(\lambda^4+10\lambda^2\delta^2+\delta^4)}{8w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial w, \partial w, \partial w) = \frac{-\lambda\delta(\lambda^4+6\lambda^2\delta^2+\delta^4)}{2w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$(\overline{R}.\alpha)(\partial v, \partial w, \partial w, \partial u) = \frac{\delta^2-\lambda^2}{2w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$.

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Pour $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ on a d'aprés l'équation (2.31) dans un système de coordonnées locales

$$(\overline{R}.\alpha)(\partial u_i, \partial u_j, \partial u_k, \partial u_l) = -\alpha(R(\partial u_i, \partial u_j)\partial u_k, \partial u_l) - \alpha(\partial u_k, R(\partial u_i, \partial u_j)\partial u_l) \tag{5.8}$$

Avec

$$R(\partial u_i, \partial u_j)\partial u_k = \Sigma_l R^l_{ijk}\partial u_l$$

Premièrement, on doit calculer R^s_{ijk} avec $i < j$ car ($R^l_{ijk} = -R^l_{jik}$) et on écrit seulement les composantes qui ne sont pas nulles.

$R^1_{122} = \frac{\lambda^4+\delta^4}{2w^2(\lambda^2+\delta^2)^2}, R^1_{123} = \frac{\lambda\delta^3-\delta\lambda^3}{2w^2(\lambda^2+\delta^2)^2}, R^1_{132} = \frac{\lambda\delta^3-\delta\lambda^3}{2w^2(\lambda^2+\delta^2)^2}, R^1_{133} = \frac{\lambda^4+6\lambda^2\delta^2+\delta^4}{4w^2(\lambda^2+\delta^2)^2},$

$R^2_{121} = \frac{-2(\lambda^4+\delta^4)}{w(\delta^2+\lambda^2)}, R^2_{131} = \frac{2(\lambda^3\delta-\delta^3\lambda)}{w(\lambda^2+\delta^2)}, R^2_{233} = \frac{1}{w^2},$

$R^3_{121} = \frac{2(\lambda^3\delta-\delta^3\lambda)}{w(\lambda^2+\delta^2)}, R^3_{131} = \frac{-(\lambda^4+6\lambda^2\delta^2+\delta^4)}{w(\lambda^2+\delta^2)}, R^3_{232} = \frac{-1}{w^2}.$

Ensuite, on calcule $\alpha(R(\partial u_i, \partial u_j)\partial u_k, \partial u_l)$ et $\alpha(\partial u_k, R(\partial u_i, \partial u_j)\partial u_l)$

$\alpha(R(\partial u,\partial v)\partial u,\partial u) = -\frac{(\delta^2+\lambda^2)(\delta^4-\lambda^4)}{w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}}$, $\alpha(\partial u,R(\partial u,\partial v)\partial u) = -\frac{(\delta^2+\lambda^2)(\delta^4-\lambda^4)}{w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}}$

$\alpha(\partial u,R(\partial u,\partial v)\partial v) = \frac{(\lambda^4+\delta^4)(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(R(\partial u,\partial v)\partial u,\partial v) = 0$

$\alpha(\partial u,R(\partial u,\partial v)\partial w) = \frac{(\lambda\delta^3-\lambda^3\delta)(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(R(\partial u,\partial v)\partial u,\partial w) = 0$

$\alpha(R(\partial u,\partial v)\partial v,\partial v) = \frac{-(\lambda^4+\delta^4)(\lambda^2-\delta^2)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(\partial v,R(\partial u,\partial v)\partial v) = \frac{-(\lambda^4+\delta^4)(\lambda^2-\delta^2)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$\alpha(R(\partial u,\partial v)\partial v,\partial w) = \frac{\lambda\delta(\lambda^4+\delta^4)}{2w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(\partial v,R(\partial u,\partial v)\partial w) = \frac{-(\lambda\delta^3-\lambda^3\delta)(\lambda^2-\delta^2)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$\alpha(R(\partial u,\partial v)\partial w,\partial w) = \frac{-\lambda\delta(\lambda^3\delta-\delta^3\lambda)}{2w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(\partial w,R(\partial u,\partial v)\partial w) = \frac{-\lambda\delta(\lambda^3\delta-\delta^3\lambda)}{2w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$\alpha(R(\partial u,\partial w)\partial u,\partial u) = \frac{-2\lambda\delta(\lambda^2+\delta^2)^2}{w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}}$, $\alpha(\partial u,R(\partial u,\partial w)\partial u) = \frac{-2\lambda\delta(\lambda^2+\delta^2)^2}{w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{3}{2}}}$

$\alpha(\partial u,R(\partial u,\partial w)\partial v) = \frac{-(\lambda^3\delta-\lambda\delta^3)(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{2(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(R(\partial u,\partial w)\partial u,\partial v) = 0$

$\alpha(\partial u,R(\partial u,\partial w)\partial w) = \frac{(\lambda^4+\lambda^2\delta^2+\delta^4)(\delta_u\lambda-\lambda_u\delta)}{4(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(R(\partial u,\partial w)\partial u,\partial w) = 0$

$\alpha(R(\partial u,\partial w)\partial v,\partial v) = \frac{-(\lambda^3\delta-\lambda\delta^3)(\delta^2-\lambda^2)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(\partial v,R(\partial u,\partial w)\partial v) = \frac{-(\lambda^3\delta-\lambda\delta^3)(\delta^2-\lambda^2)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$\alpha(\partial u,\partial w)\partial v,\partial w) = \frac{-\lambda\delta(\lambda^3\delta-\lambda\delta^3)}{2w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(\partial v,R(\partial u,\partial w)\partial w) = \frac{-(\lambda^2-\delta^2)(\lambda^4+6\lambda^2\delta^2+\delta^4))}{8w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$\alpha(\partial u,\partial w)\partial w,\partial w) = \frac{\lambda\delta(\lambda^4+6\lambda^2\delta^2+\delta^4)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$, $\alpha(\partial w,R(\partial u,\partial w)\partial w) = \frac{\lambda\delta(\lambda^4+6\lambda^2\delta^2+\delta^4)}{4w(w(\lambda^2+\delta^2))^{\frac{5}{2}}}$

$\alpha(R(\partial v,\partial w)\partial w,\partial u) = \frac{\delta^2-\lambda^2}{2w^3\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}$, $\alpha(\partial w,R(\partial v,\partial w)\partial u) = 0$

Et on obtient $(\overline{R}.\alpha)(\partial u_i,\partial u_j,\partial u_k,\partial u_l)$ par l'équation (5.8). □

Maintenant on donne la preuve de théorème 5.3.2.

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. On a

$$(\overline{R}.\alpha)(\partial u,\partial v,\partial u,\partial v) = \frac{-2(\lambda^4+\delta^4)}{(\lambda^2+\delta^2)^2}\,Q(g,\alpha)(\partial u,\partial v,\partial u,\partial v)$$

Et

$$(\overline{R}.\alpha)(\partial u, \partial w, \partial u, \partial w) = \frac{\lambda^4 + 6\lambda^2\delta^2 + \delta^4}{(\lambda^2+\delta^2)^2}\ Q(g,\alpha)(\partial u, \partial w, \partial u, \partial w)$$

Alors, M^3 n'est pas pseudo-parallèle dans F^4. □

Remarque 5.3.1. *Puisque $\gamma \times H^2$ n'est pas pseudo-parallèle dans F^4 alors elle n'est pas semi-parallèle ni parallèle et ni totalement géodésique dans F^4.*

5.4 Les hypersurfaces avec la structure de contact

Théorème 5.4.1. *[5] Soient $\widetilde{M}$ une variété Kählérienne de dimension complexe n et M une rélle hypersurface connexe et orienté de $\widetilde{M}$. L'hypersurface M a une structure presque de contact métrique donnée par*

1. *La métrique Riemannienne g sur M est la métrique induite de la métrique Kählérienne de $\widetilde{M}$.*
2. *Le champ de tenseurs φ est donné par la projection orthogonale de JX sur le fibré tangent TM.*
3. *Le champ de vecteurs unitaire ξ est donné par $\xi = -JN$.*
4. *La 1-forme η est définie par $\eta(X) = g(X,\xi)$ pour tout $X \in TM$.*

D'aprés le théorème précédant la structure Kählérienne sur F^4 induit une structure presque de contact métrique (φ, ξ, η, g) sur $M^3 = \gamma \times H^2$, le lemme suivant donné cette structure presque de contact métrique

Lemme 5.4.1. *[4] Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Alors*

1. *Le champ de tenseur φ donné par*

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *Le champ de vecteurs ξ est*

$$\xi = \frac{-w}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u$$

3. La 1-forme η est

$$\eta = \frac{-(\delta^2 + \lambda^2)}{\sqrt{w(\delta^2 + \lambda^2)}} du$$

Preuve.

1. On a

$$\varphi X = JX - \eta(X)N.$$

Alors

$$\widetilde{g}(\varphi \partial u_i, \partial u_j) = \widetilde{g}(J\partial u_i, \partial u_j) - \eta(\partial u_i)\widetilde{g}(N, \partial u_i). \tag{5.9}$$

Avec $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
Donc

$$\widetilde{g}(\varphi \partial u_i, \partial u_j) = B_{jb}.B_{ia}.J_{ca}.\widetilde{g}(\partial x_c, \partial x_b).$$

Tel que $b, a, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$B = \begin{pmatrix} (\gamma 1)_u & (\gamma 2)_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

par conséquence

$$\varphi_{li} g_{li} = B_{jb}.B_{ia}.J_{ca}.\widetilde{g}_{cb},$$

pour $l \in \{1, 2, 3\}$.
D'où

$$\varphi_{si} = B_{jb}.B_{ia}.J_{ca}.\widetilde{g}_{cb}.g^{js},$$

$s \in \{1, 2, 3\}$.
alors

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\xi = -JN.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{-1}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}.\begin{pmatrix} \frac{-v}{w} & \frac{v^2+w^2}{w} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{w} & \frac{v}{w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v\lambda - w\delta \\ \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}.\begin{pmatrix} v\delta + w\lambda \\ \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-w}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}.\begin{pmatrix} (\gamma 1)_u \\ (\gamma 2)_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-w}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u.
\end{aligned}$$

Donc

$$\xi = \frac{-w}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u.$$

3. soit $X = x_1\partial u + x_2\partial v + x_3\partial w$. On a

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= g(X, \xi) \\
&= X^t.g.\xi
\end{aligned}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\eta(X) &= \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2+\delta^2}{w} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4w^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4w^2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \frac{-w}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} \\
&= \frac{-(\lambda^2+\delta^2)}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} x_1
\end{aligned}$$

d'où $\eta(X) = \frac{-(\lambda^2+\delta^2)}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}} du.$

□

Lemme 5.4.2. *Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4, pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Les $(\nabla_{\partial u_i} \varphi)\partial u_j$ et $g(\partial u_i, \partial u_j)\xi - \eta(\partial u_j)\partial u_i$ sont*

$(\nabla_{\partial u} \varphi)\partial u = 2(\lambda^2 - \delta^2)\ \partial v - 4\lambda\delta\ \partial w,$ $\qquad g(\partial u, \partial u)\xi - \eta(\partial u)\partial u = 0$

$(\nabla_{\partial u} \varphi)\partial v = \frac{\delta^2-\lambda^2}{2w(\lambda^2+\delta^2)}\ \partial u,$ $\qquad g(\partial u, \partial v)\xi - \eta(\partial v)\partial u = 0$

$(\nabla_{\partial u} \varphi)\partial w = \frac{\lambda\delta}{w(\lambda^2+\delta^2)}\ \partial u,$ $\qquad g(\partial u, \partial w)\xi - \eta(\partial w)\partial u = 0$

$(\nabla_{\partial v} \varphi)\partial u = 0,$ $\qquad g(\partial v, \partial u)\xi - \eta(\partial u)\partial v = \frac{\lambda^2+\delta^2}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\ \partial v$

$(\nabla_{\partial v} \varphi)\partial v = 0,$ $\qquad g(\partial v, \partial v)\xi - \eta(\partial v)\partial v = \frac{-1}{4w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\ \partial u$

$(\nabla_{\partial v} \varphi)\partial w = 0,$ $\qquad g(\partial v, \partial w)\xi - \eta(\partial w)\partial v = 0$

$(\nabla_{\partial w} \varphi)\partial u = 0,$ $\qquad g(\partial w, \partial u)\xi - \eta(\partial u)\partial w = \frac{\lambda^2+\delta^2}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\ \partial w$

$\nabla_{\partial w} \varphi)\partial v = 0,$ $\qquad g(\partial w, \partial v)\xi - \eta(\partial v)\partial w = 0$

$(\nabla_{\partial w} \varphi)\partial w = 0,$ $\qquad g(\partial w, \partial w)\xi - \eta(\partial w)\partial w = \frac{-1}{4w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\ \partial u$

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$ on a

$$(\nabla_{\partial u_i} \varphi)\partial u_j = \nabla_{\partial u_i}(\varphi \partial u_j) - \varphi(\nabla_{\partial u_i} \partial u_j)$$

alors,

$(\nabla_{\partial u}\varphi)\partial u = -\varphi(\nabla_u u) = 2(\lambda^2 - \delta^2)\partial v - 4\lambda\delta\partial w,$ $(\nabla_{\partial u}\varphi)\partial v = \nabla_{\partial u}\partial w = \frac{\delta^2-\lambda^2}{2w(\lambda^2+\delta^2)}\partial u$

$(\nabla_{\partial u}\varphi)\partial w = -\nabla_{\partial u}\partial v = \frac{\lambda\delta}{w(\lambda^2+\delta^2)}\partial u,$ $(\nabla_{\partial v}\varphi)\partial u = 0 - 0 = 0$

$(\nabla_{\partial v}\varphi)\partial v = -\frac{1}{w}\partial v + \frac{1}{w}\partial v = 0,$ $(\nabla_{\partial v}\varphi)\partial w = -\frac{1}{w}\partial w + \frac{1}{w}\partial w = 0$

$(\nabla_{\partial w}\varphi)\partial u = 0 - 0 = 0,$ $(\nabla_{\partial w}\varphi)\partial v = -\frac{1}{w}\partial w + \frac{1}{w}\partial w = 0$

$(\nabla_{\partial w}\varphi)\partial w = \frac{1}{w}\partial v - \frac{1}{w}\partial v = 0$

Et on a

$$g(\partial u_i, \partial u_j)\xi - \eta(\partial u_j)\partial u_i = g(\partial u_i, \partial u_j)\xi - g(\xi, \partial u_j)\partial u_i$$

Alors,

$$g(\partial u, \partial u)\xi - \eta(\partial u)\partial u = -\frac{\lambda^2+\delta^2}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u + \frac{\lambda^2+\delta^2}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u = 0$$

$$g(\partial u, \partial v)\xi - \eta(\partial v)\partial u = 0 - 0 = 0$$

$$g(\partial u, \partial w)\xi - \eta(\partial w)\partial u = 0 - 0 = 0$$

$$g(\partial v, \partial u)\xi - \eta(\partial v)\partial u = 0 - \left(-\frac{(\lambda^2+\delta^2)}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial v\right) = \frac{(\lambda^2+\delta^2)}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial v$$

$$g(\partial v, \partial v)\xi - \eta(\partial v)\partial v = \frac{-1}{4w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u - 0 = \frac{-1}{4w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u$$

$$g(\partial v, \partial w)\xi - \eta(\partial w)\partial v = 0 - 0 = 0$$

$$g(\partial w, \partial u)\xi - \eta(\partial u)\partial w = \frac{\lambda^2+\delta^2}{\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial w$$

$$g(\partial w, \partial v)\xi - \eta(\partial v)\partial w = 0 - 0 = 0$$

$$g(\partial w, \partial w)\xi - \eta(\partial w)\partial w = \frac{-1}{4w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u - 0 = \frac{-1}{4w\sqrt{w(\lambda^2+\delta^2)}}\partial u.$$

□

Corollaire 5.4.1. *Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. Alors M^3 n'est pas Sasakienne.*

Preuve. Soit $M^3 = \gamma \times H^2$ une hypersurface de F^4. D'aprés le théorème 3.3.3 M^3 est Sasakienne si et seulement si $(\nabla_X\varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$ mais on a, par exemple, $(\nabla_{\partial u}\varphi)\partial u = 2(\lambda^2 - \delta^2)\ \partial v - 4\lambda\delta\ \partial w \neq g(\partial u, \partial u)\xi - \eta(\partial u)\partial u = 0$. Donc M^3 n'est pas Sasakienne. □

5.5 Conclusion

Notre étude s'articule autour de l'étude de l'hypersurface $\gamma \times H^2$ de la géométrie de Thurston F^4 (donne leurs propriétés géométriques), qui reste un exemple particulier parmis les hypersurfaces de cette géométrie. Nous souhaitons ouvrir une autre perspective de recherche qui traite l'étude des hypersurfaces pseudo-parallèles et des surfaces parallèles, semi-parallèles.

Bibliographie

[1] M. Belkhelfa, A. Hasni. Symmetric properties of Thurston geometry F^4, Proceedings of the Conference RIGA 2011, Mihia, Adela (ed.) et al., Riemannian Geometry and Applications, Bucharest, Romania, 2011 : 29-40.

[2] M. Belkhelfa. Pseudo-parallel submanifolds. Geometries et Dynamiques, Proceedings l'ècole CIMPA d'EL-Oued, Editeurs : K. Saddalah and A. Zeghib, Travaux en cours, Hermann, Paris 2008 ; 70 : 323-333.

[3] M. Belkhelfa, R. Deszcz, L.Verstraelen, Symmetry Properties of 3- dimentional D'Atri Spaces, kyungpook Math. J. 24, 2006, 367-376.

[4] M. Belkhelfa, H. Boukhari, A. Hasni, Geometry of hypersurface $\gamma \times H^2$ in the geometry of Thurston F^4, Beitr Algebra Geom (2018). https ://doi.org/10.1007/s13366-018-0381-y .

[5] J. Berndt, Y. J. Suh. Contact hypersurfaces in Kähler manifolds, Proceedings of the American Mathematical Society 2015 ; 143 : 2637-2649.

[6] D. E. Blair. Contact manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Math : Springer Berlin, 1976 .

[7] B.Y.Chen, Geometry of Submanifolds. Marcel Dekker, New York 1974.

[8] R. Deszcz, On pseudo-symmetric spaces, Bull. Soc. Math. Belg, 44, 1992, 1-34.

[9] F. Dillen and J. Fastenakels and S. Haesen and J. Van Der Veken, Submanifold theory and the parallel transport, Kragujevac Journal of Mathematics, 37, 33-43, 2013

[10] M. P. do Carmo, Riemannian Geometry, Boston, MA : Birkhäuser, 1993.

[11] E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier- Villars, Paris, 1963.

[12] R. O. Filipkiewicz, Four dimensional geometries, Ph. D thesis, University of warwick, 1983.

[13] S. Haesen, L. Verstraelen, Properties of scalar curvature invariant depending on two planes, manuscripta math. ; 122, 2007, 59-72.

[14] S. Haesen, L. Verstraelen, Curvature and symmetries of parallel transport, Differential Geometry and Topology, Discrete and Computational Geometry, M. Boucetta and J-M. Morvan (Eds), IOS Press, 2005, 197-238.

[15] A. Hasni, Les Geometries de Thurston et la pseudo symétrie d'aprés R. Deszsz, Université Abou Bakr Bekaid, Tlemcen, Algeria., 2014.

[16] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential geometry, Vol. I, Interscience Publishers, 1963.

[17] S. Kobayashi and Nomizu, foundations of Differential Geometry, Vol. II, Interscience and Wiley, New York, 1969.

[18] S. Maier, Conformal flatness and self-duality of Thurston-geometries, Proc. Am. Math. Soc., 4, 1998, 1165-1172.

[19] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Application to Relativity, Academic Press, 1983.

[20] W. M. Thurston, Three-dimensional Geometry and Topology I, Princeton, Math. Series, 35 (S. Levy ed.), 1997.

[21] L. Verstraelen,, Comments on the pseudo-symmetry in the sense of Deszcz, Geometry and Topology of Submanifolds, VI, eds. F. Dillen et al., World Sc. Publ. Co. Singapore, 1994, 119-209.

[22] C. T. C. Wall, Geometric structures on compact complex analytic surfaces, Topology, 25., no. 2., 119-153, 1986.

[23] C. T. C. Wall, geometries and gemetric structures in real dimension 4 and complex dimension 2, Lecture notes in math. 1167, Springer-Verlag, 1985, 268-292.

[24] T. J. Willmore, Riemannian geometry, The Claredon Press. New York, Oxford : Clarendon Press,, 1993.

[25] K. Yano, and M. Kon, Structures of Manifolds, Singapore : World Sci, 1984.

[26] S. Yaprak, Pseudosymmetry type curvature conditions on kähler hypersurface, Math. J. Toyama Univ., 18, 1995, 107-136.