

Université Mustapha Stambouli Mascara



جامعة مصطفى سطنبولى
معسكر

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Département de Génie civil

Laboratoire d'Etude des Structures et de Mécanique des Matériaux

THESE de DOCTORAT

Spécialité : Génie Civil

**Contribution à l'étude du comportement mécanique et
vibratoire des matériaux composites avancés avec la prise en
compte de l'effet d'échelle**

Présentée par : M^r MOKHEFI Djillali
Le : 03 / 06 / 2026

Devant le jury :

M ^r . SADOUN Mohamed	Prof.	Président	UMS Mascara
M ^r . HOUARI Mohammed Sid Ahmed	Prof.	Directeur de thèse	UMS Mascara
M ^r . YOUZERA Hadj	Prof.	Co-Directeur de thèse	UMS Mascara
M ^r . BAKOURA Ahmed	MCA	Examineur	USTO Oran
M ^r . BOURADA Mohamed	Prof.	Examineur	UDL SBA
M ^r . BENYOUCEF Samir	Prof.	Examineur	UDL SBA

Année Universitaire : 2025 -2026

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciement

Entreprendre ce doctorat a été une expérience qui a véritablement changé ma vie et je n'aurais pas pu le faire sans le soutien et les conseils que j'ai reçus de nombreuses personnes.

Tout d'abord, je suis extrêmement reconnaissant à mon superviseur, le Prof. **HOUARI Mohammed Sid Ahmed**, pour ses précieux conseils, son soutien continu et sa patience durant mon étude de doctorat. Ses immenses connaissances et son abondante expérience m'ont encouragé à chaque instant de ma recherche universitaire et de ma vie quotidienne.

Je tenais à exprimer ma profonde gratitude à **YOUZERA Hadj**, avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler. Je le remercie pour les conseils scientifiques et techniques qu'il m'a apportés pour mener à bien ce travail.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur : **BAKOURA Ahmed** de l'Université USTO Oran, **BOURADA Mohamed** et **BENYOUCEF Samir** de l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes d'avoir accepté de juger mon travail. Je tiens à exprimer avec fierté ma gratitude à Monsieur **SADOUN Mohamed** de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde gratitude à ma chère mère et à mon père bien-aimé, «*رحمة الله عليه*», pour leurs encouragements constants dans la poursuite de mes rêves, pour le rôle important qu'ils ont joué dans ma vie et pour leurs grands sacrifices pour moi et mes frères et sœurs.

UN grand merci à ma mère, ma femme et mes filles pour leur soutien et pour m'avoir épaulé dans les moments difficiles.

Merci



Dédicace

الى من قال فيهما الله سبحانه و تعالى :

«وَإخْفِضْ لَهُمَا جَنَاحَ الذُّلِّ مِنَ الرَّحْمَةِ وَقُلْ رَبِّ ارْحَمْهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا»

[سورة الإسراء:24]

الى والدتي الكريمة حفظها الله تعالى

الى والدي رحمه الله تعالى رحمة الابرار واسكنه فسيح جناته

الى زوجتي وبناتي و كل عائلتي حفظهم الله

ملخص

يقترح هذا البحث للدكتوراه نهجًا موحدًا لميكانيكا المواد المتقدمة، يجمع بين دراسة المواد المركبة، والمواد ذات التدرج الوظيفي، والنمذجة متعددة المقاييس غير المحلية.

استجابةً للقيود الهيكلية للمواد المركبة الرقائقية التقليدية، والتي غالبًا ما تتميز بانقطاعات حرجة بين السطوح، يُبرز هذا العمل التفوق المفاهيمي للمواد ذات التدرج الوظيفي. تتميز هذه المواد بتباين تدريجي في خصائصها الفيزيائية والكيميائية، مما يُعزز مرونتها في مواجهة التدرجات الحرارية الشديدة والإجهادات الميكانيكية المعقدة. في الوقت نفسه، يُظهر التحليل المتعمق للمواد شبه الهشة، مثل الخرسانة، الحاجة الماسة إلى إطار عمل متعدد المقاييس. ولا يُتيح دمج النظريات غير المحلية عالية المستوى سوى الرصد الدقيق لتأثيرات التشقق والحجم، والتي تخضع في جوهرها لتباين البنية المجهرية.

ثم توسع الدراسة نطاقها ليشمل نمذجة الانبعاج في العوارض النانوية المركبة المقواة بأنايبب الكربون النانوية، مما يُثبت صحة المناهج النظرية المثلثية ونظرية تدرج الانفعال لهذه الهياكل النانومترية.

وإلى جانب صرامتها التقنية، تدافع هذه الأطروحة عن رؤية إنسانية واستشرافية لعلم المواد. فهي تدعونا إلى تصور المادة ليس ككيان ثابت، بل كبنية حية ومتطورة، يُعد إتقانها أمرًا أساسيًا لمواجهة التحديات التكنولوجية المستدامة والمتعلقة بالسلامة في مجتمعنا المعاصر.

الكلمات المفتاحية: العوارض النانوية المركبة المقواة بأنايبب الكربون النانوية ؛ المواد ذات التدرج الوظيفي ؛ النمذجة متعددة المقاييس؛ الانبعاج المرن؛ طريقة جاليركين؛ نظرية تدرج الانفعال غير الموضعي من الدرجة الأعلى؛ نظرية شعاع تشوه القص.

Résumé

Cette recherche doctorale propose une approche unifiée de la mécanique des matériaux avancés, articulant l'étude des composites, des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) et des modélisations multi-échelles non locales.

En réponse aux limites structurelles des composites stratifiés classiques, souvent marqués par des discontinuités interfaciales critiques, ce travail met en exergue la supériorité conceptuelle des FGM. Ces matériaux, caractérisés par une variation graduelle de leurs propriétés physico-chimiques, offrent une résilience accrue face aux gradients thermiques sévères et aux sollicitations mécaniques complexes. Parallèlement, l'analyse approfondie des matériaux quasi-fragiles, tels que le béton, démontre l'impérieuse nécessité d'un cadre multi-échelle. Seule l'intégration de théories non locales d'ordre supérieur permet de capturer fidèlement les phénomènes de fissuration et d'effet d'échelle, intrinsèquement régis par l'hétérogénéité m i c r o s t r u c t u r a l e .

L'étude étend ensuite son champ d'application à la modélisation du flambage des nanopoutres composites renforcées par nanotubes de carbone (CNTRC), validant des approches théoriques trigonométriques et de gradient de déformation pour ces structures nanométriques.

Au-delà de la rigueur technique, cette thèse défend une vision humaniste et prospective de la science des matériaux. Elle invite à concevoir la matière non plus comme une entité statique, mais comme une architecture évolutive et vivante, dont la maîtrise est essentielle pour relever les défis technologiques durables et sécuritaires de notre société contemporaine.

Mots-clés : Poutres CNTRC ; FGM ; Modélisation multi-échelle ; flambement élastique ; méthode de Galerkin ; théorie de gradient de déformation non local d'ordre supérieur; théorie des poutres à déformation de cisaillement

Abstract

This doctoral research proposes a unified approach to the mechanics of advanced materials, combining the study of composites, functionally gradient materials (FGMs), and non-local multiscale modeling.

In response to the structural limitations of conventional laminated composites, often characterized by critical interfacial discontinuities, this work highlights the conceptual superiority of FGMs. These materials, characterized by a gradual variation in their physicochemical properties, offer increased resilience to severe thermal gradients and complex mechanical constraints. Simultaneously, the in-depth analysis of quasi-brittle materials, such as concrete, demonstrates the critical need for a multiscale framework. Only the integration of higher-order non-local theories allows for the accurate capture of cracking and scale effects, which are intrinsically governed by microstructural heterogeneity.

The study then extends its scope to the modeling of buckling in carbon nanotube-reinforced composite nanobeams (CNTRCs), validating trigonometric and strain gradient theoretical approaches for these nanometric structures.

Beyond its technical rigor, this thesis defends a humanistic and forward-looking vision of materials science. It invites us to conceive of matter not as a static entity, but as an evolving and living architecture, the mastery of which is essential to meeting the sustainable and safety-related technological challenges of our contemporary society.

Keywords: CNTRC beams; FGM; Multiscale modeling; Elastic buckling; Galerkin method; Higher-order nonlocal strain gradient theory; Shear deformation beam theory

Table des Matières

Remerciement	1
Dédicace	2
ملخص	3
Résumé	4
Abstract	5
Table des matières	6
Liste des Figures	10
Liste des Tableaux	12
Liste des Notations	13
Introduction générale	15
Chapitre I : Les matériaux composites et les matériaux à gradient fonctionnel	
I.1 Introduction.....	18
I.2. Définition des matériaux composites	20
I.3. Classification des composites	20
I.3.1 Classification selon la nature de la matrice.....	21
I.3.1.1. Matrices organiques (polymères)	21
I.3.1.2. Matrices céramique(CMC)s	23
I.3.1.3. Matrice métallique (MMC)	23
I.3.1.4. Matrice carbone(CMC)	24
I.3.2 Classification selon le renfort	24
I.3.2.1. Renforcement par particules	25
I.3.2.2. Renforcements par fibres	26
I.3.3 L'interface	31
I.4. Architecture des matériaux composites	31
I.4.1. Monocouches	31
I.4.2. Stratifiés	32
I.4.3. Sandwichs	32
I.5. Avantages et inconvénients des matériaux composites.....	33
I.6 Emergence des matériaux à gradient de propriétés	35
I.7 Définition des matériaux à gradient de propriétés (FGMs)	36
I.8 Comparaison entre les matériaux à gradient de propriétés et les matériaux composites.....	37
I.9 Concept et architecture des matériaux FGMs.....	39

I.10 Propriétés effectives des FGMs.....	41
I.10.1 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM.....	42
I.10.2 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM.....	42
I.10.3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	43
I.11 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés	44
I.12 Stratégies d'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel (FGM)	45
I.12.1. La métallurgie des poudres : maîtrise granulaire du gradient.....	46
I.12.2 Le frittage par infiltration : gestion des disparités thermiques.....	47
I.12.3 La coulée centrifuge : ségrégation par forces inertielles.....	47
I.13 Dynamique et chronologie de la recherche sur les FGM : une décennie d'investigation	48
I.14 Horizons et perspectives de recherche.....	50
I.15 Conclusion.....	50

Chapitre II : Approches Multi-échelle et Effet Non Local

II. Introduction	53
II.1 L'approche multiéchelle dans l'étude du béton	54
II.1.1 Échelle macroscopique : la perspective de l'ingénieur	54
II.1.2 Échelle microscopique : caractérisation des hétérogénéités.....	54
II.1.3 Échelle nanoscopique : fondements atomiques	55
II.1.4 Intégration des échelles	55
II.2 L'effet d'échelle et la zone de processus de fissuration (FPZ)	56
II.2.1 Définition et rôle de la FPZ	56
II.2.2 Effet d'échelle	57
II.2.3 Effet d'échelle dans les structures en béton	58
II.2.4 Origine physique de l'effet d'échelle	60
II.2.5 Conséquences pratiques.....	61
II.3 Approches théoriques avancées pour modéliser l'effet d'échelle	61
II.3.1 Théorie du contrainte du couple modifiée	66
II.3.1.1. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur l'EBT	67
II.3.1.2. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur le TBT.....	67
II.3.1.3. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur le RBT.....	71
II.3.1.4. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur les HSDT	72
II.3.2. Théorie du gradient de déformation modifiée	73
II.3.2.1. Modèles de gradient de déformation basés sur l'EBT	74
II.3.2.2. Modèles de gradient de déformation basés sur le TBT	77
II.3.2.3. Modèles de gradient de déformation basés sur les RBT et HSDT	78
II.3.3 Théorie de l'élasticité non locale.....	80

II.3.3.1 Modèles non locaux basés sur l'EBT	83
II.3.3.2 Modèles non locaux basés sur le TBT	83
II.3.3.3 Modèles non locaux basés sur le RBT	83
II.3.3.4. Modèles non locaux basés sur les HSDT	84
II.3.4 Remarques finales et recommandations pour les études futures	85
II.4 Applications et perspectives.....	86
II.4.1 Bétons à ultra-hautes performances.....	86
II.4.2. Bétons intelligents et multifonctionnels.....	87
II.4.3. Bétons écoperformants et durabilité	87
II.4.4. Perspectives futures.....	87
II.5 Conclusion	88

Chapitre III : Formulation théorique

III. Introduction	92
III.1 Formulation mathématique	95
III.2 Théorie du gradient de déformation non local	97
III.3 Théorie de l'élasticité non locale	99
III.4 Théorie du gradient de déformation.....	99
III.5 Équation de gouvernance pour les nanopoutres dépendantes de la taille.....	100
III.6 Solution analytique	104

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1 Introduction	107
IV.2 Stratégie d'Investigation et Méthodologie Numérique.....	107
IV.2.1 Évaluation de la Précision et Validation du Modèle.....	107
IV.2.2 Configuration Matérielle et Paramètres d'Entrée	108
IV.2.3 Propriétés Matériaux Utilisées	108
IV.3 Résultats Numériques et Analyse Comparative.....	109
IV.3.1 Validation du Modèle Théorique.....	109
IV.3.2 Influence des Fractions Volumiques et des Motifs de Renforcement.....	110
IV.3.3 Effets des Conditions aux Limites et de l'Élancement.....	111
IV.3.4 Effets Non Locaux et de Gradient de Déformation.....	112
IV.3.5 Compétition Entre Effets Non Locaux et Gradient de Déformation.....	114
IV.4 Synthèse des Conclusions et Implications Scientifiques.....	116
IV.4.1 Principales Constatations.....	116

IV.4.2 Implications pour la Conception d'Ingénierie.....	117
IV.4.3 Portée et Limitations de l'Étude.....	117
IV.5 Perspectives et Directions Futures.....	118
Chapitre V : Analyse des vibrations libres des nanocoques	
V.1 Introduction	120
V.2. Formulation théorique.....	121
V.2.1. Nanocoquilles à double courbure en matériaux à gradient fonctionnel.....	121
V.2.2. Théorie de déformation par cisaillement du premier ordre.....	123
V.2.2.1. Cinématique.....	123
V.2.2.2. Relations constitutives non locales.....	124
V.2.3. Équations du mouvement.....	125
V.3. Solution analytique.....	128
V.4. Résultats numériques et discussion.....	130
V.4.1. Étude de vérification.....	130
V.4.2. Étude paramétrique.....	133
V.5. Conclusions.....	141
Conclusion générale et perspectives.....	142
Références Bibliographiques	143

Liste des Figures

Figure I.1: L'application de composites comme matériau structurel Dans le Boeing787 "Dreamliner". ET Total des matériaux utilisés.(Burrige, 2009)	19
Figure I.2: Exemple d'un matériau composite. (Gebrehiwet et al.,2023)	20
Figure I.3 : Classification des composites selon la matrice.....	24
Figure I.4 : Différentes formes de renforts dans les matériaux composites (Boufaïda, 2015).....	25
Figure I.5 : Classification des composite selon la forme des renforts.....	25
Figure I.6 : Répartition des fibres selon leurs origines.....	27
Figure I.7- Ensemble de Fibres de Verre.....	28
Figure I.8 : Tissu de Fibre de Carbone.....	29
Figure I.9 : Fibres d'Aramide.	29
Figure I.10 : Tissu en fibre de céramique.....	30
Figure I.11 : fibre de bore.....	30
Figure I.12: Couche de composite d'orientation unidirectionnelle des fibres (Liu et al., 2012).....	31
Figure I.13 : Structure d'un stratifié en composite à fibres de carbone.(Senghor,2017)	32
Figure I.14 : Schéma montrant d'un plaque sandwich.(Berkia, 2022)	33
FigureI.115: Différents types d'âmes pour structures composites sandwichs.(Djemai,2017)......	33
Figure I.16 : Mécanismes de rupture d'un matériau composite (Berthelot, J. M. 1992).....	34
Figure I.17 : type d'un matériau FGM en céramique et métal.....	37
Figure I.18: Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites (Koizumi et al 1996)	38
Figure I.19: La distribution composante des matériaux. (Yoshihisa, 2004)	38
Figure I.20: concept des matériaux a gradient de propriétés.....	40
Figure I.21: Protection thermique.....	40
Figure I.22: Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM.....	41
Figure I.23: La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre E-FGM.....	42
Figure I.24 : La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM.....	43
Figure I.25 : La variation du module de Young d'une poutre S-FGM.....	44
Figure I.26 : Les principaux domaines d'application des FGMs.....	45
Figure I.27: Le procédé de Métallurgie des poudres pour les FGM.(Sam et al., 2021)	47
Figure I.28 : (a) Dispositif de coulée centrifuge horizontale (El-Galy et al., 2019) et (b) Phénoménologie de la ségrégation particulière dans l'élaboration des FGM (Jamian et al., 2019).....	48
Figure I.29: Chronologie des publications sur les FGM au décennie de progrès. (Mallick et al.,2023).....	49
Figure II.1 Comportements non linéaires et types de zones de fracturation.....	56
Figure II.2: Géométries des éprouvettes prismatiques.....	58

Figure II.3: Réponses contrainte-déformation en compression pour les différentes géométries (Vonk,1993)	59
Figure II.4 : Effet d'échelle sur poutres en flexion trois points.....	60
Figure II.5 : Illustration schématique de différentes formes de CNTs.....	65
Figure II.6 : Nanomatériaux à base de graphène.....	65
Figure II.7 : Effet du coefficient de Poisson sur une micropoutre en porte-à-faux.....	70
Figure II.8 : Comparaison entre le modèle de gradient de contrainte et le modèle de contrainte de couple pour les micropoutres.....	76
Figure II.9 : Fréquences fondamentales des poutres serrées (CC) et en porte-à-faux (CF)	81
Figure III.1 : Configuration, chargement et système de coordonnées d'une poutre CNTRC (a) et sections transversales de différents modèles de renforcement (b).	95
Figure IV.1 : Charge critique de flambement sans dimension d'une poutre en V avec différents rapports d'épaisseur (a) Poutre SS et (b) poutre CC.	111
Figure IV.2 : Effet des paramètres d'échelle non locale et de longueur sur la charge de flambement sans dimension de la poutre en V ($V_{crit}^* = 0.28$): (a) poutre simplement appuyée, (b) poutre serrée.....	115
Figure V.1 : La géométrie des nanocoquilles peu profondes à double courbure FG.....	121
Figure V.2 : Quatre types de coques FG à double courbure.....	122
Figure V.3 : La variation du module de Young effectif et de la densité massique à travers l'épaisseur des nanocoquilles FG.....	133
Figure V.4 : La variation du paramètre non local effectif à travers l'épaisseur des nanocoquilles FG.....	133
Figure V.5 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoquilles doublement incurvées FG en fonction de l'indice de loi de puissance.....	136
Figure V.6 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoques FG à double courbure en fonction du rapport côté/épaisseur.....	137
Figure V.7 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoquilles FG à double courbure en fonction du rapport rayon/côté.....	138
Figure V.8 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoquilles FG à double courbure en fonction du rapport d'aspect.....	139
Figure V.9 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoques à double courbure FG en fonction de la variation des paramètres non locaux.....	140
Figure V.10 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoquilles FG à double courbure en fonction du rapport des rayons.....	141

Liste des Tableaux

Tableau I. 1: Fibres de verre principales (Hsissou, et al 2021)	28
Tableau I. 2: Propriétés physiques de différentes classes de fibres de verre (Prashanth, et al 2017).	28
Tableau I.3 : Les Propriétés Mécaniques de Différentes Fibres (Bahlouli, 1993).....	30
Tableau I.4 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.....	39
Tableau II.1 : Champ de déplacement des HSDT.....	89
Tableau II.2 : Champ de déplacement des théories quasi-3D.....	90
Tableau III.1 : Paramètres d'efficacité des CNT.	97
Tableau IV.1 : Comparaisons de la charge critique de flambement sans dimension pour les poutres SS.	109
Tableau IV.2 : Comparaisons de la charge critique de flambement sans dimension pour une poutre CC.	110
Tableau IV.3 : Effet des paramètres non locaux et d'échelle de longueur sur la charge de flambement critique de la poutre CNTRC ($L/h = 10, V_{cnt}^* = 0.12$).....	112
Tableau IV.4 : Effet des paramètres d'échelle non locaux et de longueur sur la charge de flambage critique de la poutre CNTRC ($L/h = 10, V_{cnt}^* = 0.17$).....	113
Tableau IV.5 : Effet des paramètres d'échelle non locaux et de longueur sur la charge de flambage critique de la poutre CNTRC ($L/h = 10, V_{cnt}^* = 0.28$).....	114
Tableau V.1 : Comparaison des fréquences des couches SP homogènes isotropes.....	131
Tableau V.2 : Comparaison des fréquences adimensionnelles des coques FG à double courbure.....	131
Tableau V.3 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des nanoplaques FG.....	132
Tableau V.4 : La fréquence fondamentale adimensionnelle des nanocoquilles FG à double courbure.....	134
Tableau V.5 : Les six premières fréquences adimensionnelles des nanocoquilles doublement incurvées FG.....	134

Liste des Notations

k	paramètre matériel
h	hauteur de la poutre
E_1	modules de Young de la surface supérieure
E_2	modules de Young de la surface inférieure
m_{ij}	composantes de la partie déviatoire du tenseur de contrainte du couple symétrique
x_{ij}	composantes du tenseur de courbure
θ	vecteur de rotation
γ	gradient de dilatation
η	gradient d'étirement déviatorique
x_{ij}	courbure symétrique
η_{ijk}	tenseur de gradient d'étirement déviatorique
ℓ	paramètre d'échelle de longueur du matériau
σ_{ij}	tenseur de contrainte non local
σ_{ij}^l	tenseur de contrainte local
e_0	constante matérielle
a	longueur caractéristique interne
∇^2	opérateur laplacien
ε_{ij}	composantes du tenseur de déformation
ν	coefficient de Poisson
G_{12}	module de cisaillement
V_{cnt}	fractions volumiques pour le nanotube de carbone
V_p	fractions volumiques pour la matrice polymère
$\mu = (e_0 a_0)^2$	Le paramètre non local
ρ	La masse volumique
V_{cnt}^*	la fraction massique des CNT
ρ^{cnt}	la densité massique des CNT
ρ^m	la densité massique de la matrice polymère
$\lambda = \ell^2$	Le gradient de déformation
$u_0(x)$	le déplacement axial

$w_0(x)$	le déplacement transversal
$\varphi_x(x)$	la rotation d'une section transversale
$f(z)$	La fonction de la déformation par cisaillement
δU	la variation virtuelle de l'énergie de déformation
δV	la variation du travail effectué par les forces extérieures
δK	la variation virtuelle de l'énergie cinétique

Introduction Générale

L'ingénierie moderne s'oriente aujourd'hui vers une transformation profonde des approches de conception et de modélisation des matériaux. Cette transformation est guidée par les besoins croissants de performance, de durabilité et de sécurité dans les infrastructures, les transports, l'aéronautique, l'énergie et les technologies émergentes. Pour répondre à ces exigences, la science des matériaux s'appuie sur une compréhension rigoureuse de la matière à différentes échelles, ainsi que sur le développement de matériaux avancés tels que les composites, les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) et les systèmes architecturés.

Le présent travail s'inscrit dans cette dynamique en explorant les concepts fondamentaux, les avancées récentes et les approches de modélisation permettant d'appréhender les matériaux modernes de manière complète et cohérente. L'objectif principal est de relier la microstructure des matériaux, leurs comportements multi-échelles et les théories mécaniques avancées pour une meilleure prédiction du comportement et de la durabilité des structures.

Le premier chapitre constitue le socle matériel et conceptuel de ce travail. Il débute par une présentation approfondie des matériaux composites, mettant en évidence leur structure, leurs modes de renforcement, leurs architectures (monocouches, stratifiés, sandwichs) ainsi que leurs avantages et limitations. La discussion met en lumière le rôle fondamental de l'interface fibre-matrice et les principaux mécanismes d'endommagement tels que le délaminage, la rupture de fibre ou la fissuration matricielle.

La seconde partie du chapitre introduit les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs), une innovation majeure conçue pour surmonter les limitations des composites classiques. Leur variation continue des propriétés physiques et mécaniques permet une réduction importante des concentrations de contraintes, notamment sous gradients thermiques sévères. Le chapitre décrit les modèles de distribution des propriétés (E-FGM, P-FGM, S-FGM), les applications variées dans les domaines aéronautique, énergétique, biomédical et mécanique, ainsi que les procédés d'élaboration tels que la métallurgie des poudres, le frittage et la coulée centrifuge. Ce chapitre offre ainsi une vision complète de l'évolution des matériaux avancés.

Le second chapitre traite de la compréhension du comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles, en particulier du béton, en introduisant l'approche multi-échelles. Le matériau

est analysé successivement à l'échelle macroscopique (comportement global), microscopique (rôle de l'ITZ, des pores, de la microfissuration) et nanoscopique (structure des C-S-H et organisation atomique).

Le chapitre met également en évidence l'effet d'échelle, phénomène majeur dans les matériaux quasi-fragiles : la résistance apparente diminue lorsque les dimensions de la structure augmentent. Ce comportement, lié à la zone de processus de fissuration (FPZ), nécessite l'utilisation de modèles non locaux ou d'ordre supérieur pour être correctement prédit. Ce chapitre établit ainsi le lien entre microstructure, mécanismes d'endommagement et comportement global.

Le troisième chapitre approfondit les modèles théoriques permettant de dépasser les limitations de la mécanique classique du continuum. Les théories non locales, la mécanique des gradients de déformation et les modèles du type Cosserat sont présentés comme réponses nécessaires pour capturer les phénomènes de localisation de déformation, de microfissuration et d'effet d'échelle. Ces modèles introduisent des longueurs internes caractéristiques, essentielles pour décrire correctement les matériaux quasi-fragiles et les structures composites. Le chapitre III constitue le fondement mathématique et mécanique des analyses avancées menées dans ce travail.

Le quatrième chapitre représente l'application concrète des concepts développés précédemment. Il s'intéresse à la modélisation et à l'analyse de structures constituées de matériaux composites ou à gradient fonctionnel, ainsi qu'aux comportements non linéaires associés à la fissuration. Le chapitre explore la réponse des poutres, plaques ou coques FGMs sous sollicitations thermomécaniques, en intégrant les théories non locales ou d'ordre supérieur. Il présente également des études numériques, des validations et des comparaisons avec des résultats expérimentaux issus de la littérature.

Ainsi, cette introduction générale situe le présent travail dans un cadre à la fois théorique, scientifique et applicatif, en montrant comment les matériaux avancés, les approches multi-échelles et les modèles non locaux convergent pour construire une vision moderne et cohérente de l'ingénierie des structures. Les quatre chapitres s'articulent de manière progressive et logique, garantissant une compréhension approfondie des matériaux et des outils de modélisation mobilisés dans ce mémoire.

Chapitre I : Les
matériaux composites et
les matériaux à gradient
fonctionnel

I.1 Introduction :

La révolution scientifique et technologique contemporaine a profondément transformé notre compréhension de la matière et nos approches de conception structurale. Les secteurs industriels critiques - aéronautique, énergie, transports, biomédical et génie civil - imposent aujourd'hui des exigences de performance sans précédent. Ces domaines réclament des matériaux combinant simultanément légèreté, résistance mécanique, durabilité fonctionnelle, tenue dans des environnements sévères et adaptabilité à des applications diversifiées. Or, les matériaux conventionnels, limités par leurs propriétés intrinsèques, se révèlent progressivement inadéquats face à la complexité des sollicitations modernes.

Face à ces défis, l'ingénierie des matériaux a opéré une réorientation stratégique vers la conception de matériaux avancés, une catégorie regroupant les composites architecturés, les matériaux à gradient fonctionnel (FGMs), les structures hybrides, les nano-architectures et les systèmes multi-échelles. Ces matériaux résultent d'une conception délibérément structurée, où la composition, la microstructure et la distribution spatiale des phases sont optimisées pour transcender les limitations des matériaux traditionnels.

Les matériaux composites constituent l'une des avancées majeures de cette transition. Élaborés par l'association cohérente de matrices (polymères, métalliques ou céramiques) avec des renforts variés (fibres, particules, nanostructures), ils offrent un excellent rapport résistance-masse, une rigidité ajustable et une grande liberté de conception. Leur intégration croissante dans les secteurs de pointe atteste de leur maturité industrielle. Cependant, malgré leurs performances remarquables, ces matériaux à interfaces discrètes présentent des limitations : discontinuités abruptes entre phases, concentrations localisées de contraintes, amorçage de fissures interfaciales et comportement dégradé en environnements thermomécaniques extrêmes.

Pour surmonter ces limitations, une nouvelle classe de matériaux avancés a émergé : les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials - FGMs). Caractérisés par une variation progressive, continue et contrôlée de leurs propriétés physico-mécaniques dans le volume, ils éliminent les ruptures interfaciales abruptes, optimisent la distribution des contraintes, renforcent la résistance aux chocs thermiques et permettent de conjuguer des propriétés apparemment incompatibles - tel que l'allie la dureté céramique à la ténacité métallique.

Illustration exemplaire : le Boeing 787 Dreamliner :

L'adoption stratégique des matériaux avancés trouve une illustration particulièrement significative dans le Boeing 787 Dreamliner (**Figure I.1**), aéronef de nouvelle génération dont

plus de 50% de la masse structurale est constituée de matériaux composites, principalement des composites à matrice polymère renforcée de fibres de carbone (CFRP). Cette orientation technologique répond à plusieurs objectifs convergents : il utilise 126,5 tonnes de composites en moins, ce qui permet une économie de 98 tonnes de poids brut. Cette réduction de masse favorise une consommation de carburant diminuée de 20%, ainsi qu'une baisse d'environ 30% des émissions de dioxyde de carbone et une réduction du niveau sonore de 60% par rapport à des appareils de taille similaire. .

- Amélioration de la tolérance aux endommagements : résistance accrue à la fatigue, à la corrosion et aux microfissurations.
- Optimisation de la performance structurale : orientation directionnelle des fibres selon les lignes d'effort, maximisant portance et rigidité alaire.
- Comportement amélioré sous gradients thermiques et vibrations complexes.

Cet exemple paradigmatique démontre l'incontournabilité des matériaux avancés comme solutions industrielles contemporaines.

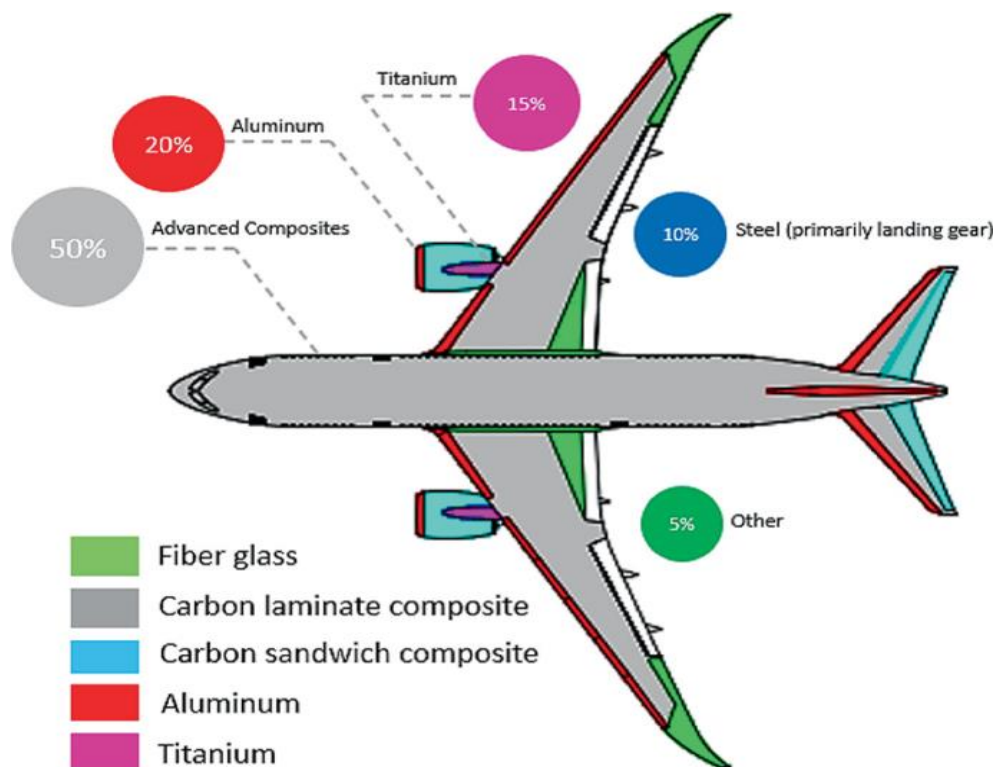


Figure I.1: L'application de composites comme matériau structurel Dans le Boeing787 "Dreamliner". ET Total des matériaux utilisés.(Burrige, 2009)

I.2. Définition des matériaux composites :

Les matériaux composites (MCs) sont des matériaux hétérogènes composés d'au moins deux constituants distincts aux propriétés complémentaires, associés dans le but d'obtenir un matériau final aux performances supérieures à celles de chaque composant pris séparément (Berthelot, 2005). Un matériau composite rassemble plusieurs éléments complémentaires qui, une fois combinés, offrent des caractéristiques meilleures que celles de chaque constituant isolé. Comme illustré à la **Figure I.2**, ces éléments essentiels sont le renfort, généralement sous forme de fibres, et la matrice, souvent un polymère thermodurcissable ou thermoplastique. Les fibres apportent une résistance mécanique élevée au composite, tandis que la matrice assure la cohésion en enveloppant et en maintenant les renforts, facilitant ainsi la transmission des efforts. La synergie des propriétés des deux composants confère au matériau composite des performances supérieures, notamment en termes de résistance, de légèreté et de durabilité, par rapport aux matériaux traditionnels.

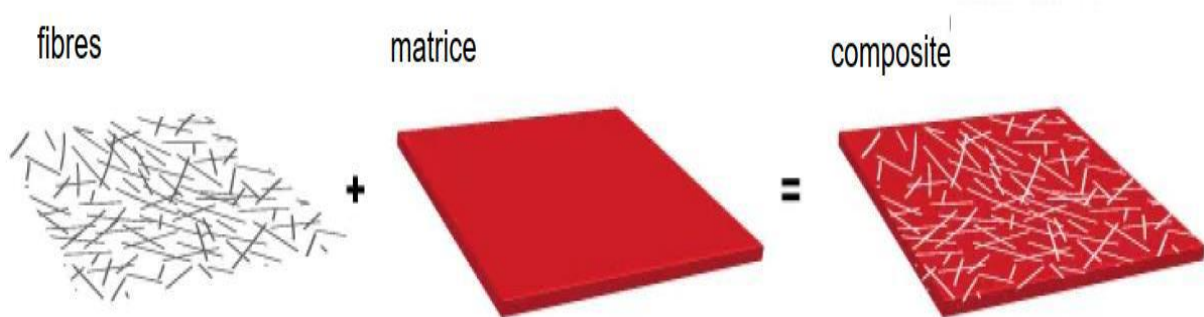


Figure I.2: Exemple d'un matériau composite. (Gebrehiwet et al.,2023)

I.3. Classification des composites :

La matrice, élément central du matériau composite, incarne bien plus qu'un simple liant : elle se fait le socle sur lequel les renforts s'organisent et s'unissent en une entité cohérente et solide. Son premier rôle, fondamental, est d'assurer l'agencement compact des renforts, de leur offrir une stabilité spatiale et de conférer à l'ouvrage la forme souhaitée par l'ingénieur ou le créateur. La matrice protège également les fibres, véritables « nerfs » du composite, des agressions de leur environnement - abrasion, chocs, agents chimiques -, préserve la qualité de leur surface et garantit, avec finesse, la transmission des efforts et des charges entre les différents constituants. Selon ses origines, la matrice peut puiser sa nature dans la richesse du monde organique ou l'austérité du domaine minéral (Jérémy, 2009). (**Figure I.3**).

I.3.1 Classification selon la nature de la matrice

La diversité des matériaux composites découle d'abord de la nature chimique de leur matrice : le regard du scientifique s'attache à distinguer trois grandes familles - métalliques, céramiques, polymériques -, chacune porteuse de propriétés singulières.

- **Composites à matrice métallique (MMC)**

Dans ces matériaux, la matrice, façonnée à partir de métaux tels que l'aluminium, le magnésium, le fer, le cobalt ou le cuivre, accueille des renforts céramiques (oxydes, carbures) ou métalliques (plomb, tungstène, molybdène). Cette rencontre subtile offre des équilibres remarquables entre rigidité, résistance mécanique et propriétés spécifiques, au service de l'industrie moderne.

- **Composites à matrice céramique (CMC)**

Ici, la matrice céramique, souvent combinée à des fibres de nature identique, confère au composite une aptitude exceptionnelle aux températures extrêmes et aux environnements corrosifs. Ces matériaux, fruits du progrès, voient leurs applications se déployer des laboratoires de recherche aux systèmes propulsifs les plus avancés, là où l'exigence est poussée à son comble.

- **Composites à matrice polymère (PMC)**

Les polymères, qu'ils soient thermodurcissables ou thermoplastiques, servent de matrices à des composites où s'incorporent le verre, le carbone, l'acier ou le Kevlar. L'infinie variation des combinaisons permet d'élaborer des matériaux répondant à des cahiers des charges spécifiques, mariant légèreté, flexibilité, efficacité mécanique et durabilité.

I.3.1.1. Matrices organiques (polymères)

La quête de performance a orienté la recherche vers des matrices organiques - résines époxy, phénoliques - associées à des fibres de carbone, de verre ou d'aramide. Le résultat est double : une élévation significative de la résistance et une diminution de la masse. Cette excellence, alliée à la résistance à la corrosion et à la durabilité, ouvre la voie à des usages innovants, y compris dans le domaine biomédical, tant pour les implants que pour les systèmes de délivrance médicamenteuse. La richesse des matrices polymères s'exprime à travers deux

visages : thermoplastiques et thermodurcissables.

a) Matrice thermoplastique

Les matrices thermoplastiques illustrent la capacité de l'ingénierie à conjuguer endurance chimique et résistance à la chaleur. Polyamide (PA), polypropylène (PP), polyétheréthercétone (PEEK) sont les piliers de cette catégorie. Leur aptitude à la résilience - face à la fatigue, aux impacts et aux fissures - se double d'une grande facilité de mise en forme (injection, moulage), d'un recyclage aisé et d'une résistance marquée aux solvants, à l'humidité et aux hautes températures.

Parmi, ces matrices on peut citer les suivantes :

Les résines polyamides

Les polyamides, utilisés comme matrices, déploient une belle synergie entre propriétés mécaniques, stabilité thermique, et résistance chimique. Ce sont les matériaux de choix pour les composites renforcés de fibres. Leur adhérence fiable aux renforts, leur stabilité dimensionnelle et leur souplesse d'usinage compensent partiellement leur coût élevé et leur sensibilité à l'hydrolyse.

b) Matrices thermodurcissables

La spécificité des matrices thermodurcissables réside dans leur irréversibilité : sous l'effet de la température, leur réseau tridimensionnel, solidaire et stable, s'installe de façon définitive. Elles se distinguent par leur ténacité, leur résistance à la température, à la corrosion et aux solvants, ainsi que par leur capacité d'adhésion aux fibres et à la fatigue.

- **Résine époxy** : Matériau aux multiples facettes, l'époxy brille par sa durabilité, sa résistance thermique et chimique, et son exceptionnelle polyvalence ; attention toutefois à ses risques toxicologiques lors de sa manipulation.
- **Résine polyester** : Plébiscitée pour sa robustesse chimique et mécanique, la résine polyester est omniprésente dans l'industrie, offrant un compromis séduisant entre performance et accessibilité.
- **Résine phénolique** : La résine phénolique, gage de résistance à la chaleur, aux agents chimiques et à l'humidité, est le matériau du durable. Sa fragilité aux basses

températures ainsi que la rigidité de ses structures imposent des contraintes dans la mise en œuvre.

c) Matrices élastomères

Les matrices élastomères invitent à une autre vision du composite, où l'accent est mis sur l'élasticité, la résilience et la souplesse. Par leur nature même, ces matériaux absorbent et dissipent les chocs et les vibrations, tout en restant économiques et résistants à la corrosion. La silicone, modèle d'élasticité, trouve ses usages dans la reproduction de formes complexes, tandis que le polyuréthane élargit encore le champ des possibles dans les applications industrielles les plus variées.

I.3.1.2. Matrices céramique(CMC)s :

Les matrices céramiques, dans leur rigueur minérale, forgent des composites capables de supporter des contraintes thermiques et mécaniques extrêmes. Ils servent de base aux composites céramiques et sont souvent constitués d'oxyde d'aluminium (Al_2O_3), de carbure de silicium (SiC), de nitrure de silicium (Si_3N_4), d'oxyde de zirconium (ZrO_2) ou de carbure de bore (B_4C), enrichis de fibres adaptées, ces composés conjuguent faible conductivité thermique, résistance à la chaleur et à la corrosion. Hautement plébiscités pour les turbines à gaz et moteurs d'avant-garde, ils subissent toutefois les limites imposées par leur coût et leur fragilité.

I.3.1.3. Matrice métallique (MMC) :

La matrice métallique, vibrante de potentialités, permet l'assemblage de fibres hétérogènes, qu'elles soient métalliques, céramiques ou polymériques. Aluminium, titane, magnésium, cuivre et nickel sont sélectionnés pour leurs vertus - légèreté, résistance à la corrosion, conductivité - et adaptés aux contextes les plus exigeants, de l'industrie aéronautique à l'énergie. La performance d'un MMC s'évalue à l'aune des qualités intrinsèques de la matrice, qu'il s'agisse de support thermique, de résistance ou de longévité.

I.3.1.4. Matrice carbone(CMC) :

Enfin, la matrice carbone se distingue par une alliance rare de résistance et de légèreté. Employant fibres de carbone pour leur excellence mécanique, fibres de verre pour leur accessibilité, fibres d'aramide contre les impacts ou fibres de basalte face à la chaleur, ces composites incarnent une synthèse remarquable des sciences des matériaux. Ce sont les champions des applications de très haute performance, fruit d'un dialogue constant entre ingénierie, créativité et exigence du réel.

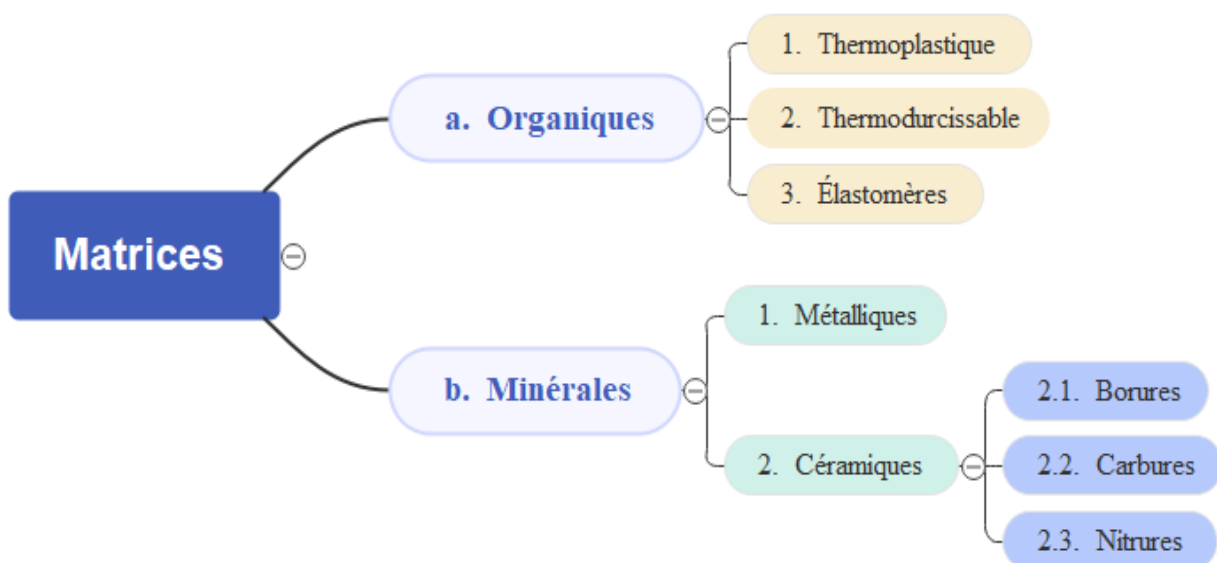


Figure I.3 : Classification des composites selon la matrice

I.3.2 Classification selon le renfort :

Dans l'univers fascinant des matériaux composites, les renforts jouent un rôle fondamental en conférant solidité, légèreté et fonctionnalité au matériau final. Ces renforts prennent des formes diverses, témoignant de la richesse des solutions offertes par la nature et l'innovation humaine. Parmi les plus courantes, on distingue tridimensionnellement les fibres, les particules et les poudres. Les fibres, polymorphes par nature, se déclinent en tailles et formes variées, souvent s'enroulant ou se tissant pour former des architectures robustes. Parmi elles, les fibres de verre, de carbone et d'aramide dominent les usages industriels, symbole d'un équilibre réussi entre performance mécanique et adaptabilité.

I.3.2.1. Renforcement par particules :

Les particules, petites sphères solides, s'intègrent délicatement dans la matrice composite, renforçant la résistance globale. Leurs cousins plus fins, les poudres, agissent quant à eux comme des agents d'amélioration de la rigidité et de la résistance. Les microbilles de verre et les microsphères céramiques illustrent bien les particules industrielles tandis que les poudres de silice, d'alumine et de carbure de silicium enrichissent la matrice en la dotant de propriétés exceptionnelles.

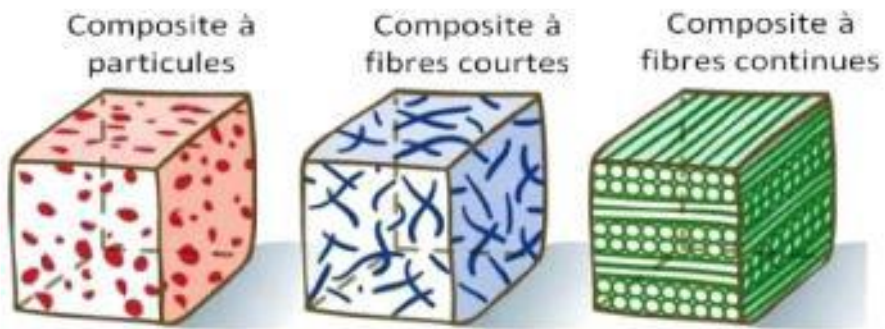


Figure I.4 : Différentes formes de renforts dans les matériaux composites (Boufaïda, 2015)

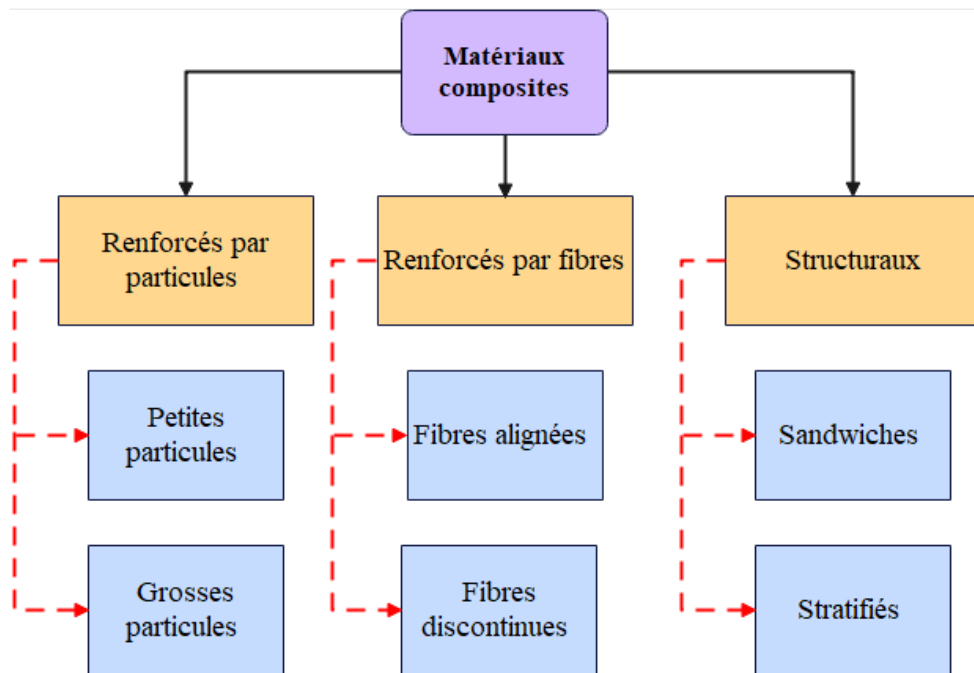


Figure I.5 : Classification des composite selon la forme des renforts

I.3.2.2. Renforcements par fibres :

La forme des renforts fibreux, vecteurs principaux des performances mécaniques, répond à la nature même du composite et aux exigences mécaniques souhaitées. Tandis que les fibres assurent la robustesse des composites hautes performances, les particules et poudres s'invitent dans des solutions plus simples et économiques. Parmi les fibres, celles dites avancées incarnent le summum de la technologie : synthétiques, elles surpassent les fibres classiques par une rigidité et une résistance spécifiques élevées. Citons notamment les fibres de carbone haute performance, les fibres d'aramide (notamment le Kevlar), ainsi que des fibres de verre à

h a u t e p e r f o r m a n c e .

LES TYPES DE FIBRES

Les fibres employées pour le renforcement composite se répartissent en deux grandes familles, témoignant de la diversité naturelle et technologique.

- **Fibres naturelles**

Ces fibres offrent un éventail riche et respectueux de l'environnement :

- *Fibres animales* : Soie, laine, soie d'araignée, tendon, poil de chameau...
- *Fibres végétales* : Coton (graine), jute, chanvre, sisal, ramie, bambou, canne à sucre, kapok, abaca, lin, raphia et d'autres encore, chacune portant en elle une histoire et un usage spécifiques.
- *Fibres minérales* : Amiante, basalte, laine minérale et laine de verre s'inscrivent ici comme fibres d'origine géologique ou minérale.

- **Fibres avancées**

Par définition, ces fibres se distinguent par une rigidité spécifique élevée et une résistance spécifique exceptionnelle. Elles sont produites à partir de matériaux remarquables tels que le carbone, le graphite, la fibre de verre, l'alumine, l'aramide, le carbure de silicium et même le saphir.

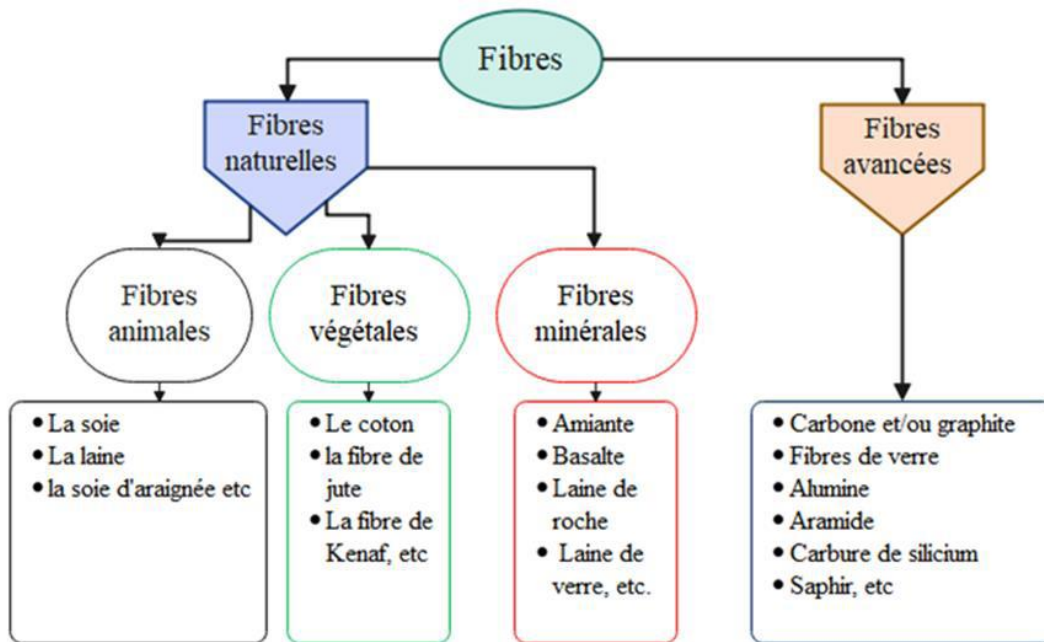


Figure I.6 : Répartition des fibres selon leurs origines

Parmi les fibres citées ci-dessus, on peut décrire quelques-unes :

- **Fibre de soie**

La soie, fibre protéique naturelle obtenue à partir des cocons d'insectes, allie douceur et résistance, avec une texture lisse non glissante, contrastant avec la rugosité de nombreuses fibres synthétiques. Sa résistance baisse d'environ 20% lorsqu'elle est mouillée, mais elle conserve une bonne capacité à réguler l'humidité.

- **Fibre de jute**

Le jute, fibre végétale longue et brillante, se distingue par la solidité de ses fils grossiers extraits par le rouissage : immersion prolongée en eau froide pour libérer la fibre au sein de la tige, un procédé ancestral qui révèle la délicatesse de ce matériau. Sa composition riche en cellulose assure une bonne résistance mécanique, largement exploitée dans les biocomposites.

- **Fibre de verre**

Dominantes dans la sphère industrielle, les fibres de verre sont le pilier du renforcement composite, notamment la variété « verre E » pour usage électrique et courant, ainsi que les variantes A, C, R, D et S, chacune adaptée à des besoins

spécifiques allant de la résistance chimique à la haute performance mécanique (**T a b l e a u I . 2**) (P r a s h a n t h , e t a l 2 0 1 7) .



Figure: I.7 :Ensemble de Fibres de Verre

Tableau I. 1: Fibres de verre principales (Hsissou, et al 2021)

Principaux constituants en %	types de verres		
	E	D	R
Oxyde de silice (SiO ₂)	53-54	70	60
Oxyde d'alumine(Al ₂ O ₃)	14-15	-	25
Oxyde de magnésie(MgO)	20-24	0.5	9
Oxyde de bore(B ₂ O ₃)	6-9	22	6

Tableau I. 2: Propriétés physiques de différentes classes de fibres de verre (Prashanth, et al 2017).

Classes de fibres de Verre	Propriétés physiques
verre A	Durabilité, résistance et résistivité électrique élevées
verre C	Haute résistance à la corrosion
verre D	Faible constante diélectrique
verre E	Résistance et résistivité électrique plus élevées
verre AR	Résistance aux alcalis
verre R	Résistance supérieure et résistance à la corrosion acide
verre S	Résistance à la traction plus élevée

- **Fibre de carbone**

Plébiscitée pour ses caractéristiques mécaniques remarquables - résistance mécanique élevée, faible masse volumique, et conductivité - la fibre de carbone est prisée en aéronautique et sports haut de gamme. Ses limites résident dans une faible allongement à la rupture et un coût élevé, restreignant son emploi à des applications ciblées.

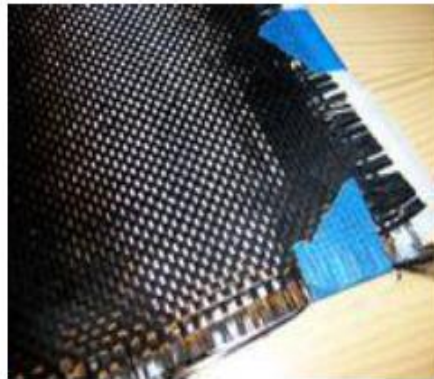


Figure: I.8 : Tissu de Fibre de Carbone.

- **Fibre d'aramide (Kevlar)**

Cette famille de polyamides aromatiques excelle en résistance au choc et à la fatigue malgré une tenue médiocre en compression. Souvent associée aux équipements balistiques tels que les gilets pare-balles, l'interface avec la matrice joue un rôle crucial dans la transmission des contraintes.



Figure I.9 : Fibres d'Aramide.

- **Fibres céramiques**

Fabriquées par dépôt chimique en phase vapeur sur un support filiforme, ces fibres conservent leurs propriétés jusqu'à 1 000 °C. Les principales incluent les fibres de bore, de carbure de silicium et les composés bor-carbure de silicium (BorSiC). Leur emploi vise des applications très exigeantes telles que les aubes de compresseur et turbines, justifiant un coût élevé.



Figure I.10 : Tissu en fibre de céramique



Figure I.11 : fibre de bore

Le tableau suivant regroupe les propriétés mécaniques des différentes fibres:

Tableau:I.3 : Les Propriétés Mécaniques de Différentes Fibres (Bahlouli, 1993).

Fibre	Densité gr/cm ³	Résistance à la rupture en traction (MPa)	Résistance à la rupture en compression (MPa)	Allonge ment à la rupture en %	Module d'élasticité longitudinal (MPa)	Diamètre de filament élémentaire (mm)	Prix indicatif (Eu/kg)
Verre E	2.54	3400	1200	4.8	73000	3-30	1.83
Verre R	2.48	4400	1300	5.4	86000	3-30	7.62
Aramide	1.44	3600	500	4.0	83000	12	22.87
BM 29	1.45	3600-4100	500	2.8	131000	12	30.50
Aramide	1.47	3400	500	2.0	186000	12	---
HM 49							
Aramide							
UHM149							
Carbone	1.78	2800	1800	0.5	200000	8	45/152
HT	1.80	2200	1300		400000	8	45/152
Carbone							
HM							
Bore	2.63	3500	3500	0.8	400000	100-200	450

I.3.3 L'interface :

La zone de contact entre les deux phases constitutives - notamment les fibres et la matrice - constitue ce que l'on désigne sous le terme d'interface. Cette région, dont l'épaisseur varie de quelques nanomètres à plusieurs micromètres, voire davantage dans certains cas exceptionnels, possède des propriétés physico-chimiques et mécaniques distinctes et souvent supérieures à celles des matériaux adjacents. L'interface joue un rôle prépondérant dans le transfert des contraintes mécaniques entre la matrice et le renfort solide, agissant comme vecteur essentiel d'harmonisation des propriétés composites transmission des propriétés mécaniques depuis la matrice vers le renfort solide. Sa qualité conditionne fortement la performance mécanique globale, la résistance à la fatigue et la durabilité du composite (Baptiste Paul Revol. 2017).

I.4 Architecture des matériaux composites :

I.4.1 Monocouches :

La monocouche représente l'unité élémentaire fondamentale de la structure composite (**Figure I.12**). Celles-ci se distinguent par la nature et l'orientation du renfort. Parmi les principaux types figurent les monocouches à fibres longues, qu'elles soient unidirectionnelles (UD) ou réparties aléatoirement, ainsi que celles constituées de fibres tissées ou courtes, offrant diverses architectures structurales adaptées à des besoins techniques spécifiques.

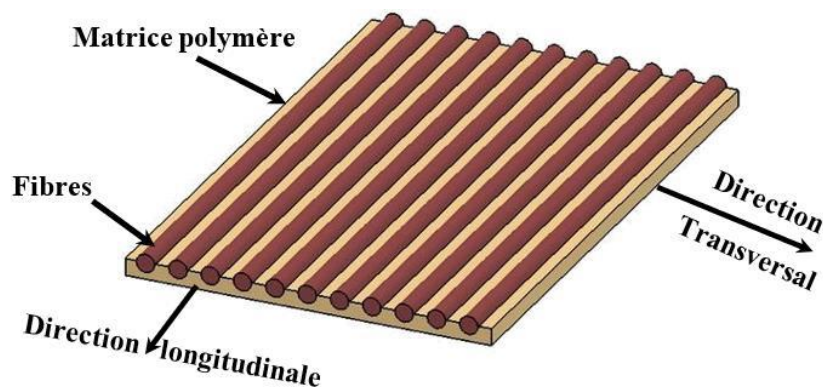


Figure I.12: Couche de composite d'orientation unidirectionnelle des fibres.
(Liu et al., 2012)

I.4.2 Stratifiés :

Les stratifiés sont obtenus par un empilement ordonné de monocouches dont l'orientation respective est soigneusement définie suivant un référentiel commun. Cette superposition confère au stratifié une anisotropie contrôlée et une robustesse accrue grâce à une optimisation dans la distribution des fibres et des contraintes mécaniques (**Figure I.13**).

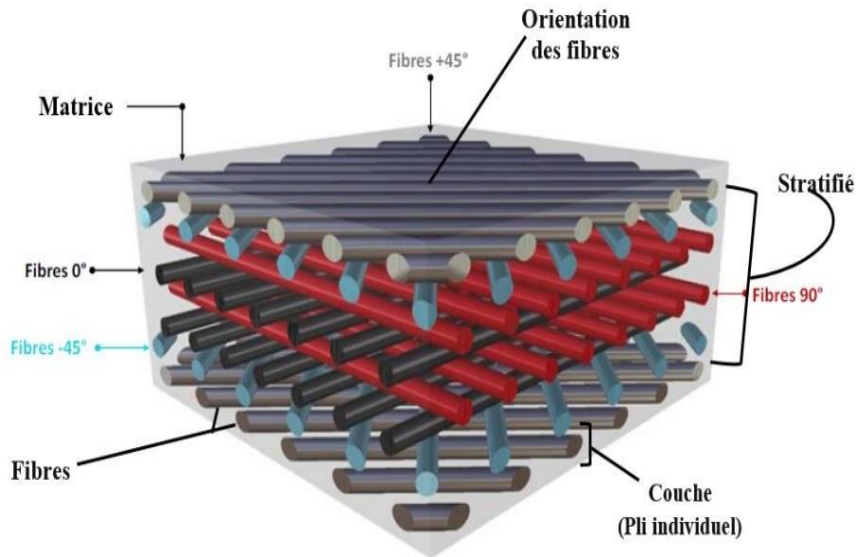


Figure I.13 : Structure d'un stratifié en composite à fibres de carbone.(Senghor,2017)

I.4.3 Sandwichs :

Les composites de type sandwich se composent d'un système trilaminaire (**Figure I.14**), formé par deux peaux extérieures minces rigides et résistantes, encadrant une âme intérieure épaisse et légère généralement constituée d'un matériau de densité inférieure. La liaison collée entre les peaux et l'âme assure un transfert efficace des efforts mécaniques tout en maintenant un poids global réduit. Cette architecture multicouche permet d'atteindre des niveaux de performances mécaniques élevés, particulièrement recherchés dans les secteurs aérospatial, naval et automobile. L'âme peut prendre différentes formes, comme illustré sur la Figure I.15.

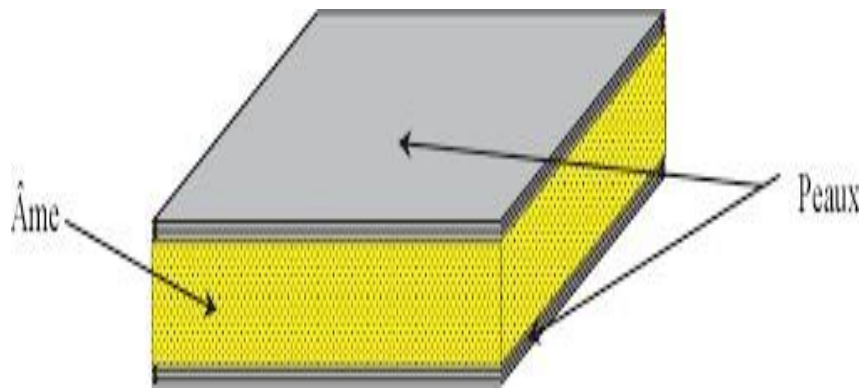


Figure I.14 : Schéma montrant d'une plaque sandwich.(Berkia, 2022)

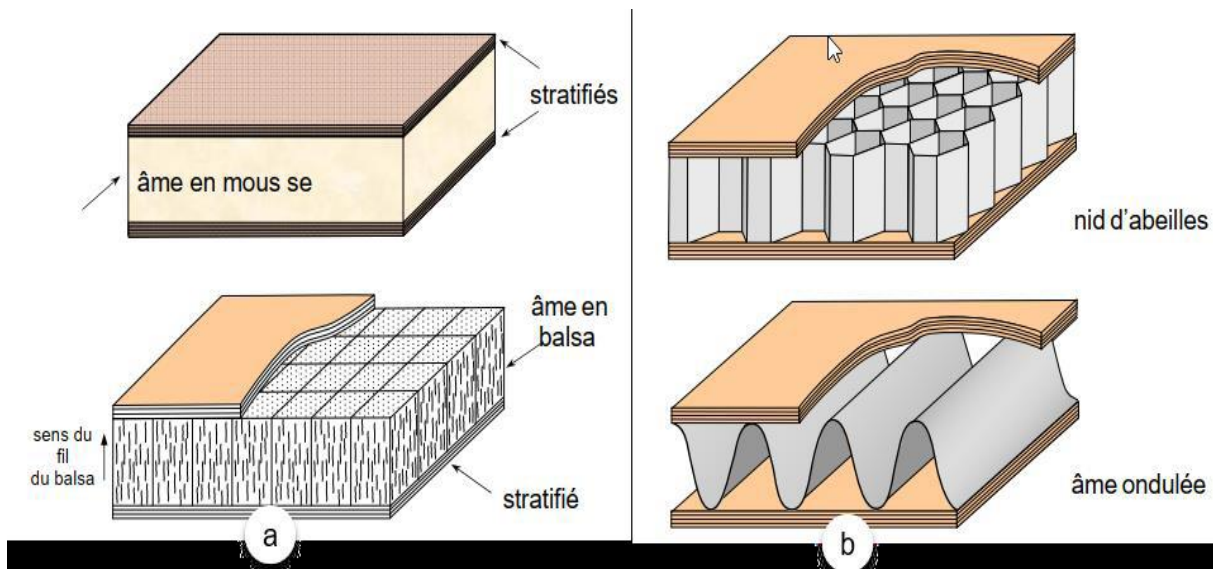


Figure I.115: Différents types d'âmes pour structures composites sandwichs.(Djemai,2017)

I.5 Avantages et inconvénients des matériaux composites:

L'emploi des matériaux composites, en comparaison aux matériaux conventionnels, se distingue par un ensemble d'avantages significatifs. Ces derniers s'imposent dans de multiples domaines par leur légèreté assurant un gain de masse majeur, leur remarquable tenue à la pression hydrostatique ainsi que leur durabilité en fatigue. L'excellente résistance à la corrosion, la facilité d'adoption de formes complexes favorisant des rendus esthétiques et le confort accru lié à l'atténuation des vibrations et des émissions sonores complètent ce profil avantageux. Néanmoins, certains inconvénients persistent, freins à leur adoption généralisée : faible résistance au feu et aux hautes températures, coûts plus élevés en raison de la volatilité des matières premières et procédés, difficultés de recyclage des thermodurcissables, et complexité intrinsèque liée à l'hétérogénéité du matériau (**Figure I.16**).

Parmi les mécanismes principaux d'endommagement et de rupture, on distingue :

- la rupture des fibres,
- la rupture transversale ou longitudinale des matrices,
- la rupture de l'interface fibre-matrice,
- le délaminage inter-plis propre aux stratifiés.

Il est important de souligner que ces mécanismes coexistent souvent et interagissent, influencés par la nature des matériaux et les sollicitations mécaniques imposées Mécanismes de rupture d'un matériau composite (Berthelot, J. M. 1992).

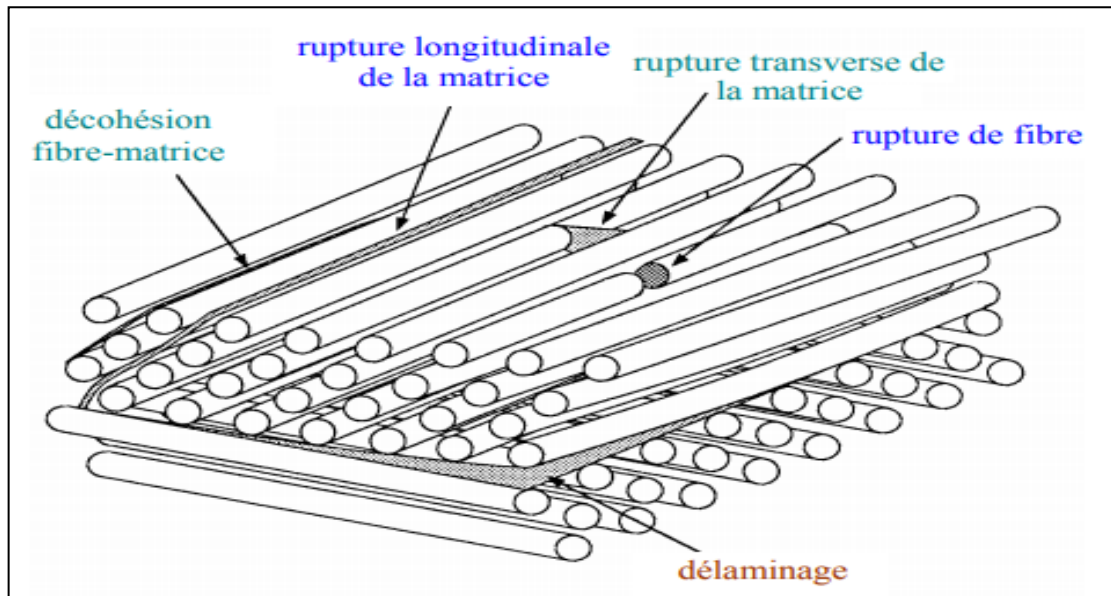


Figure I.16 : Mécanismes de rupture d'un matériau composite (Berthelot, J. M. 1992).

I.6 Emergence des matériaux à gradient de propriétés :

Les matériaux composites ont catalysé des transformations technologiques considérables dans de nombreux domaines industriels, depuis l'aéronautique jusqu'aux énergies renouvelables. Cependant, leur architecture stratifiée révèle un paradoxe constitutif : la juxtaposition d'éléments distincts, aussi sophistiquée soit-elle, génère des discontinuités matérielles qui deviennent autant de lieux de vulnérabilité structurelle. Le délaminage - phénomène résultant d'une rupture brusque des propriétés mécaniques au niveau des interfaces - demeure le mode d'endommagement prédominant, particulièrement sous l'action de gradients thermiques sévères.

Émergence des matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials, FGMs). Ces matériaux incarnent une philosophie radicalement différente : plutôt que de superposer des phases distinctes, ils introduisent une transition progressive et rigoureusement contrôlée des propriétés matérielles selon la profondeur spatiale. Cette gradation continue atténue considérablement les concentrations de contraintes qui se cristallisent habituellement aux interfaces des composites conventionnels, transformant les points de rupture potentielle en zones de transition énergétiquement favorables.

Cette approche ne représente pas une simple optimisation technique parmi d'autres. Elle traduit, en réalité, une conception profondément renouvelée de l'ingénierie matérielle : une vision où la continuité remplace la discontinuité, où l'harmonie matérielle devient un principe organisateur fondamental, et où la durabilité émerge comme conséquence naturelle d'une architecture résolument cohérente. Les FGMs reflètent ainsi une certaine sensibilité humaniste envers la conception des structures, reconnaissant que l'excellence technique et la pérennité systémique résident dans l'intégration graduée plutôt que dans l'assemblage rigide.

L'intérêt croissant accordé aux FGMs s'aligne précisément sur l'évolution des exigences industrielles et sociétales du XXI^e siècle. Les secteurs clés - aéronautique, énergie, génie civil, technologies spatiales, biomédical - convergent vers une demande commune : des solutions matérielles simultanément plus robustes, plus performantes et économiquement viables. Les FGMs répondent à cette quête multidimensionnelle en offrant la capacité à moduler localement les performances mécaniques, thermiques et chimiques en fonction des sollicitations environnementales réelles. Cette adaptabilité contextuelle permet de réconcilier des objectifs apparemment antagonistes : légèreté structurelle et résistance mécanique élevée,

performance énergétique et longévité opérationnelle, innovation technologique et responsabilité économique.

La trajectoire logique du présent travail conduit naturellement vers une exploration approfondie de ces matériaux de nouvelle génération. Après avoir établi les limitations fondamentales inhérentes aux composites stratifiés conventionnels et les enjeux systémiques auxquels ils se heurtent, une analyse rigoureuse et documentée s'impose : celle des principes constitutifs des FGMs, des mécanismes physiques qui les gouvernent, et des potentialités transformatrices qu'ils offrent pour l'ingénierie contemporaine et future. Cette progression matérialise un passage conceptuel des architectures segmentées vers des configurations graduelles véritablement intégrées, mouvement qui transcende la simple innovation technique pour incarner une évolution scientifique plus profonde - une approche plus cohérente, plus sensible et délibérément durable de la matière et de sa mise en forme.

I.7 Définition des matériaux à gradient de propriétés (FGMs) :

Proposés pour la première fois au Japon en 1984, les matériaux fonctionnellement gradués représentent une source d'inspiration majeure pour la recherche internationale. Généralement confectionnés à partir d'un assemblage graduel de métal et de céramique, les FGMs se distinguent par une variation continue des fractions volumiques des constituants le long d'une direction donnée, le plus souvent celle de l'épaisseur. Ce procédé permet d'alléger les zones soumises aux plus fortes sollicitations, conduisant ainsi à des solutions optimisées tant sur le plan économique que mécanique.

L'objectif primordial de ces matériaux innovants est de satisfaire les besoins d'applications exigeantes : améliorer la résistance à l'usure et à l'oxydation, réaliser des structures de blindage à la fois légères et dotées d'une efficacité balistique élevée, et garantir des performances fiables à très haute température. En cela, les matériaux à gradient de propriétés constituent un vecteur de progrès au service de l'ingénierie des matériaux de demain.

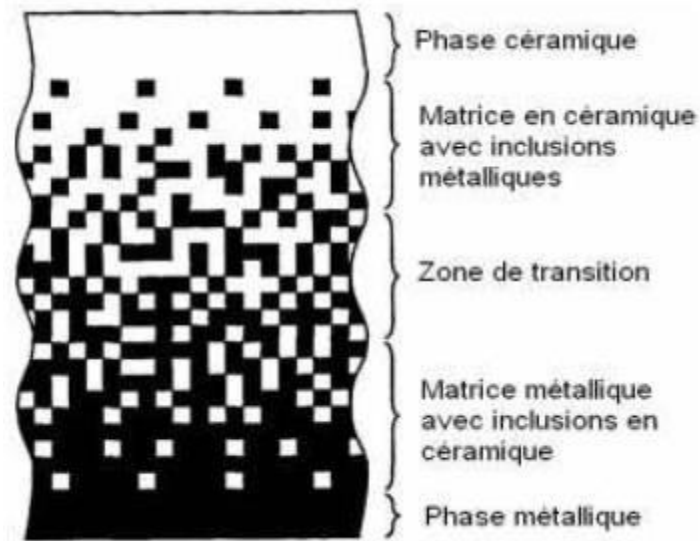


Figure I.17 : type d'un matériau FGM en céramique et métal

I.8 Comparaison entre les matériaux à gradient de propriétés et les matériaux composites

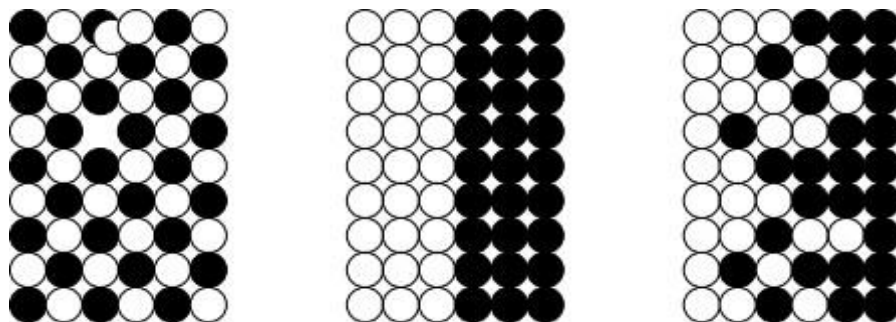
Les variations continues de la microstructure au sein des matériaux fonctionnellement gradués constituent leur signature distinctive vis-à-vis des matériaux composites conventionnels. Cette différence structurale fondamentale engendre des gradients prononcés dans les propriétés des FGMs, lesquels permettent une adaptation progressive aux conditions d'utilisation.

Les disparités de microstructure et de propriétés entre FGMs et matériaux composites se manifestent de manière éloquentes par comparaison schématique **figure I.18**

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Éléments constitutifs:</p> <p>Céramique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ○</p> <p>Fibre ◇*</p>		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

Figure I.18: Caractéristiques des matériaux FGM en comparaison avec les matériaux composites (Koizumi et al 1996)

Yoshihisa (2004) a proposé un modèle illustratif mettant en lumière ces distinctions : alors que les matériaux composites plans présentent une structure couche par couche avec une démarcation nette aux interfaces (**figure I.19**), et que les matériaux reliés se caractérisent par une transition abrupte entre leurs constituants, les FGMs démontrent des caractéristiques de performance qui les placent résolument au-delà des deux cas précédents. Cette supériorité en matière de continuité fonctionnelle explique l'intérêt croissant que suscitent les matériaux à gradient de propriétés auprès des secteurs industriels et de la communauté scientifique.



Matériau plan composé

Matériau relié

Matériau FGM

Figure I.19: La distribution composante des matériaux. (Yoshihisa, 2004)

I.9 Concept et architecture des matériaux FGMs

Les matériaux à gradient de propriétés (FGMs) incarnent une rupture technologique majeure, caractérisés par une évolution ininterrompue de leurs propriétés résultant d'une variation continue de leur composition chimique et de leur morphologie cristalline. Cette approche ouvre des perspectives novatrices dans une multitude de domaines applicatifs : barrières thermiques pour moteurs en céramique, turbines à gaz, revêtements optiques minces, et bien d'autres.

Architecturalement, les FGMs se composent de plusieurs couches contenant des constituants variables, principalement des céramiques et des métaux, auxquels peuvent s'ajouter des phases de vides considérées elles aussi comme composantes constitutives. Il en résulte un matériau composite présentant une hétérogénéité macroscopique programmée. La majorité des FGMs repose sur l'association de céramiques et de métaux, dont les propriétés mécaniques respectives offrent des profils contrastés et complémentaires. Dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le **t a b l e a u I . 4 .**

Tableau I.4 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	- Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

C'est précisément le changement continu dans la composition, et par voie de conséquence dans la microstructure, qui différencie les FGMs des matériaux composites classiques (**figure I.20**) (KOIZ, 1996). Ce gradient de composition détermine l'architecture fonctionnelle du matériau et ses performances. Remarquablement, certains FGMs peuvent être élaborés à partir d'un matériau unique présentant une microstructure volontairement variable (BOCH, 1986), situation qui souligne que le gradient ne réside pas nécessairement dans la composition chimique mais peut résider dans la morphologie structurale interne.

Les FGMs constitués du couple métal-céramique incarnent particulièrement bien cette dualité fonctionnelle : la couche métallique apporte conductivité thermique et résilience mécanique,

tandis que la phase céramique assure une protection exceptionnelle à haute température et une résistance thermique supérieure.

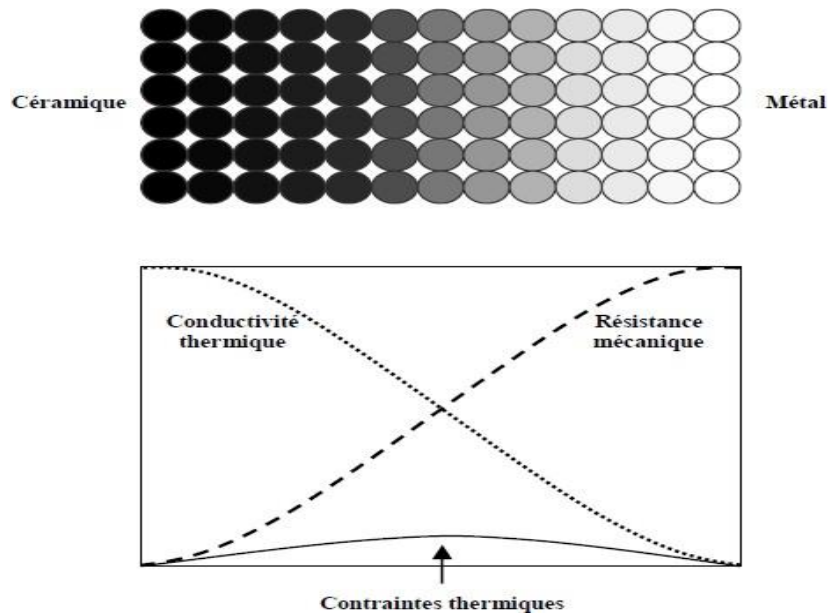


Figure I.20: concept des matériaux a gradient de propriétés

La **figure I.21** révèle l'avantage décisif des FGMs : alors que les panneaux de protection thermique conventionnels subissent d'importantes concentrations de contraintes au niveau des interfaces, zone d'une transition brusque de composition, les matériaux à gradient de propriétés dissipent ces concentrations par une variation progressive et graduelle des propriétés matérielles. Cet ajustement continu permet de conserver la performance thermique requise des barrières de protection tout en éliminant les singularités mécaniques qui fragilisent les designs conventionnels.

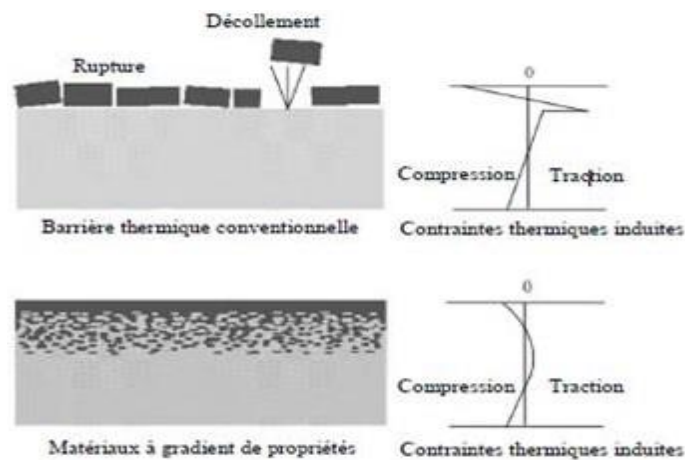


Figure I.21: Protection thermique

I.10 Propriétés effectives des FGMs

Les matériaux à gradient fonctionnel <<FGM>> consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Pour les modèles FGM nous avons deux approches:

- Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c'est-à-dire une couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I.22-a)
- Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.22-b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnée suivant l'épaisseur (z).

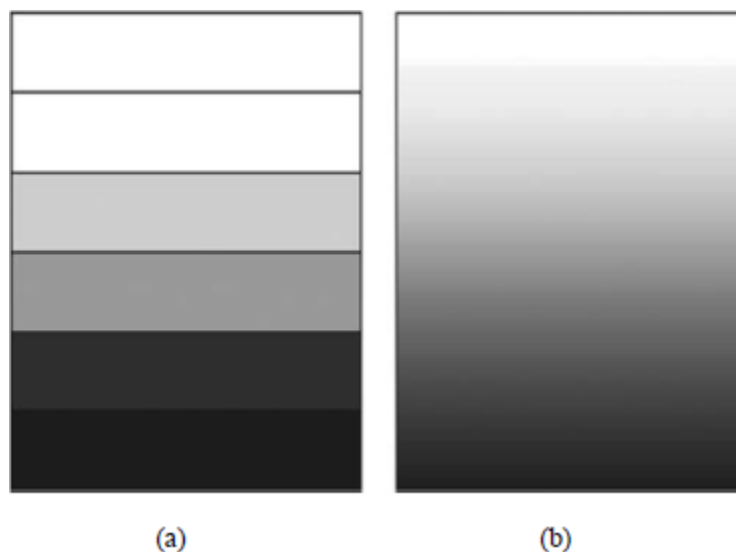


Figure I.22: Modèle analytique pour une couche d'un matériau FGM

La variation continue des propriétés trouve son application lorsque, par exemple, la face supérieure est exposée à une haute température alors que la face inférieure est exposée à une basse température. Dans ce cas, la face supérieure est à 100% céramique et la face inférieure est à 100% métal, avec une transition graduelle entre les deux.

I.10.1 Les propriétés matérielles de la poutre E-FGM:

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme :

$$E(z) = E_0 e^{\beta(z + \frac{h}{2})} \tag{I-1}$$

Avec

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \\ E_0 &= \sqrt{E_1 E_2} \end{aligned} \tag{I-2}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée dans la **figure I.23**.

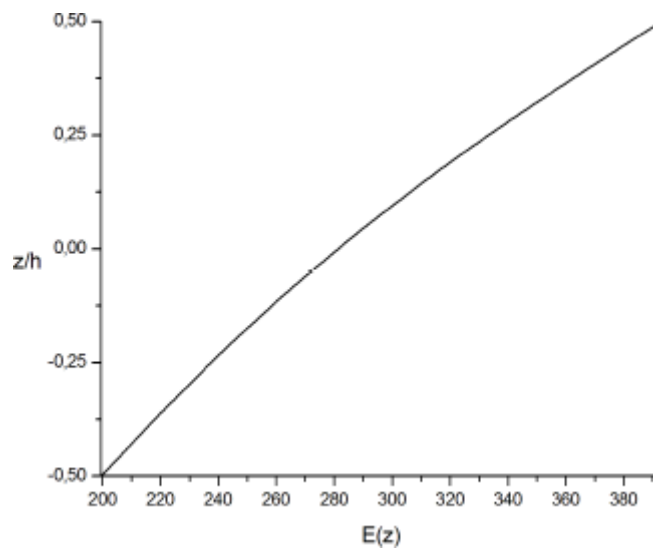


Figure I.23: La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre E-FGM

I.10. 2 Propriétés matérielles de la poutre P-FGM:

La fraction volumique des matériaux de type P-FGM est de la forme :

$$v(z) = \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{h} \right)^k \tag{I-3}$$

k : est un paramètre matériel.

h : est la hauteur de la poutre.

Après avoir défini la fraction volumique on peut représenter les propriétés matérielles de la poutre en utilisant la loi du mélange

$$E(z) = E_1 + (E_1 - E_2)v(z) \tag{I-4}$$

où E_1 et E_2 sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure ($z = h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la poutre FGM, La variation du module de Young dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la **figure I.24** (pour différentes valeurs de n).

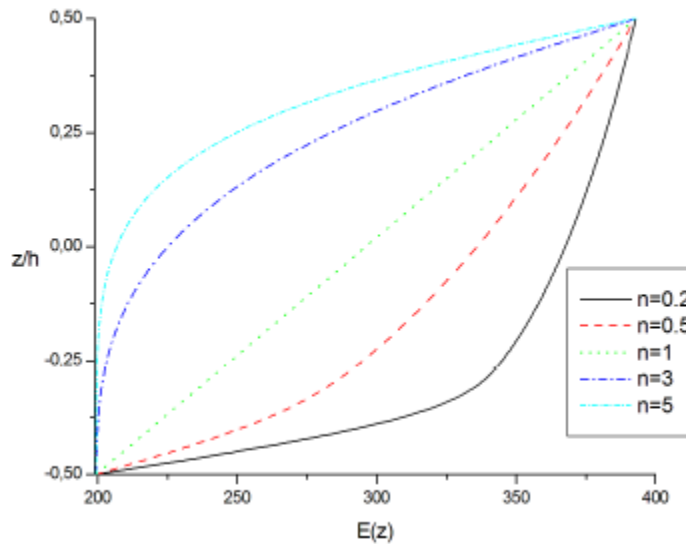


Figure I.24 : La variation du module de Young à travers l'épaisseur d'une poutre P-FGM

I .10. 3 Propriétés matérielles de la poutre S-FGM:

Pour le type S-FGM la fraction volumique prend une autre forme, en utilisant deux fonctions à travers l'épaisseur :

$$v_1(z) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h}{2} + z \right) / \frac{h}{2} \right)^n \quad \text{pour } -\frac{h}{2} < z < 0 \tag{I-5}$$

$$v_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{h}{2} - z \right) / \frac{h}{2} \right)^n \quad \text{pour } 0 < z < \frac{h}{2} \tag{I-6}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par:

$E(z) = \nu_1(z)E_1 + [1 - \nu_1(z)]E_2$	pour $-\frac{h}{2} < z < 0$	(I-7a)
$E(z) = \nu_2(z)E_1 + [1 - \nu_2(z)]E_2$	pour $0 < z < \frac{h}{2}$	(I-7b)

La **figure (I-25)** montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.7.a) et (I.7.b) représente les distributions sigmoïdites, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM)

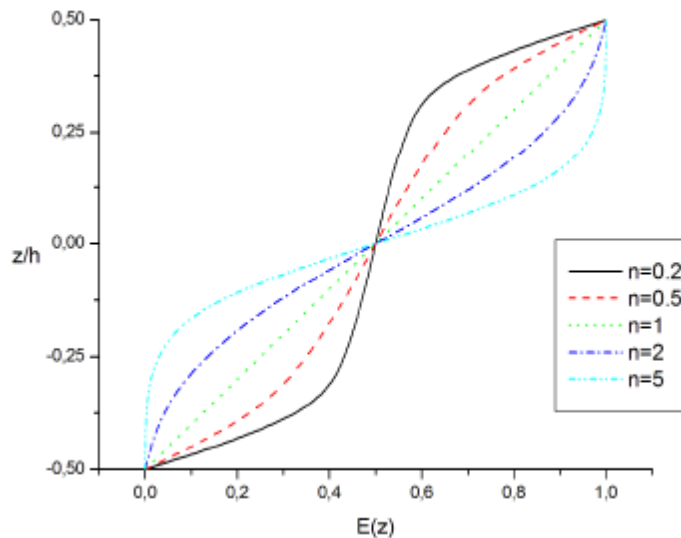


Figure I.25 : La variation du module de Young d’une poutre S-FGM

I.11 Domaines d’applications des matériaux à gradient de propriétés :

Le concept des matériaux à gradient de propriétés est applicable dans de nombreux domaines, comme il est illustré dans la **figure I.26** Il a été initialement conçu pour l’industrie de l’aéronautique, où les FGMs ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et l’isolation thermique dans un matériau. Actuellement, elles permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d’énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

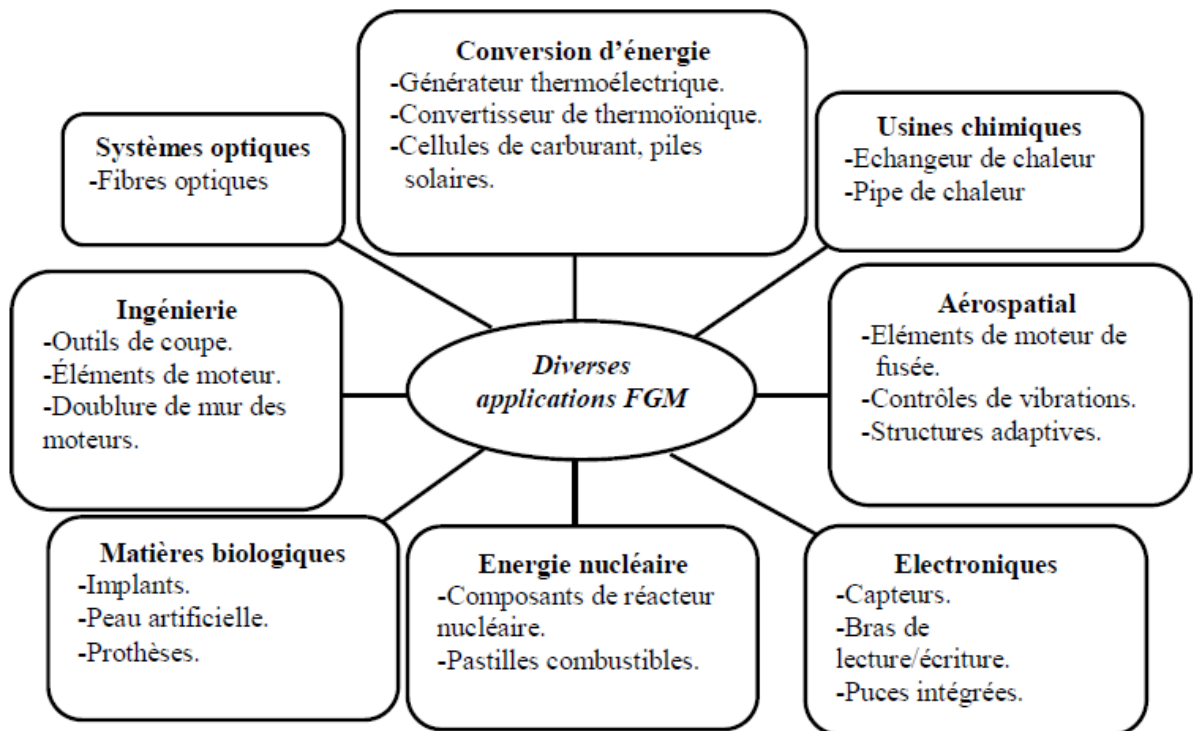


Figure I.26 : Les principaux domaines d'application des FGMs

I.12 Stratégies d'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

L'élaboration des matériaux à gradient fonctionnel constitue une problématique centrale de la science des matériaux contemporaine. L'ingénierie de ces structures hétérogènes repose majoritairement sur l'adaptation et l'hybridation de procédés conventionnels, que l'on peut classer selon l'état thermodynamique de la matière lors de la mise en forme. Trois voies principales se distinguent :

- **La voie solide :** Elle regroupe la métallurgie des poudres, le frittage et la fabrication additive. Ces procédés procèdent par la consolidation d'un mélange granulaire dont la composition évolue spatialement, suivie d'une densification thermique.
- **La voie liquide :** Elle inclut la coulée centrifuge et la sédimentation gravitaire. Ces techniques exploitent la dynamique des fluides et les différentiels de densité ou de viscosité pour induire une ségrégation contrôlée des phases.
- **La voie par dépôt :** Elle rassemble les dépôts physiques (PVD) ou chimiques (CVD) en phase vapeur, ainsi que la projection plasma. Ces méthodes reposent sur la

croissance séquentielle de couches aux stœchiométries variables par condensation ou
r é a c t i o n d e s u r f a c e .

Le choix du procédé est régi par une analyse multicritère arbitrant entre la complexité géométrique, la finesse du gradient souhaitée, la maîtrise des contraintes résiduelles et les impératifs technico-économiques (bilan énergétique et coût). Les sections suivantes détaillent certaines de ces approches méthodologiques emblématiques.

I.12.1. La métallurgie des poudres : maîtrise granulaire du gradient

La métallurgie des poudres s'impose comme une technique de prédilection pour la synthèse des FGM, conjuguant sobriété énergétique, maîtrise des coûts et flexibilité d'approvisionnement. Ce procédé repose sur l'architecture contrôlée de l'empilement : des poudres, préalablement préparées par voie chimique, électrolytique ou mécanique pour garantir une granulométrie idoine, sont disposées en strates successives (généralement de 0,2 à 1 mm). La variation progressive des proportions du mélange permet d'instaurer le gradient fonctionnel.

La qualité du matériau final dépend intrinsèquement de la précision du dosage et de l'homogénéité de la dispersion lors de la mise en forme. L'étape ultime de frittage, opérée à haute température et pression atmosphérique, assure la consolidation métallurgique de l'ensemble. Cette voie offre ainsi un contrôle rigoureux de la microstructure et de la composition chimique locale (**Figure I.27**).

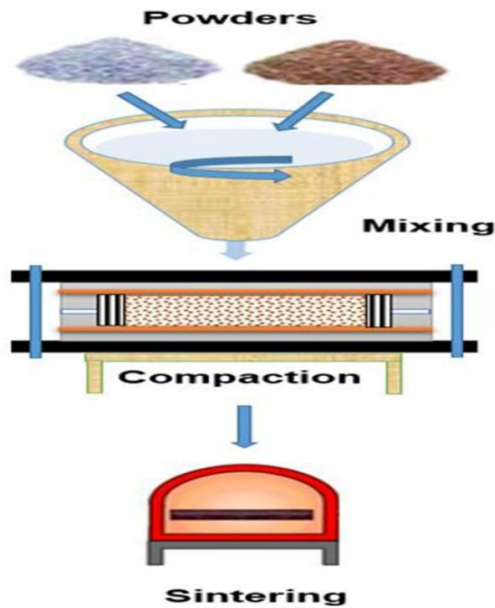


Figure I.27: Le procédé de Métallurgie des poudres pour les FGM.(Sam et al., 2021)

I.12.2 Le frittage par infiltration : gestion des disparités thermiques

Particulièrement adapté aux systèmes composites binaires présentant un écart significatif de température de fusion (réfractarité), le frittage par infiltration se déploie en deux phases distinctes (Takahashi et al., 1990). La première étape consiste à élaborer le squelette du matériau : une matrice poreuse est formée à partir du constituant possédant la température de fusion la plus élevée, en y intégrant un gradient de porosité préprogrammé.

Lors de la seconde étape, le matériau à bas point de fusion est infiltré à l'état liquide au sein de ce réseau poreux. Cette dissociation temporelle de la mise en œuvre des constituants permet une excellente gestion des contraintes thermiques inhérentes aux différences de dilatation, aboutissant à une structure composite dense et cohérente.

I.12.3 La coulée centrifuge : ségrégation par forces inertielles

La coulée centrifuge, qu'elle soit configurée verticalement ou horizontalement, constitue une méthode de choix pour l'élaboration de FGM à matrice métallique (notamment les alliages d'aluminium ou de cuivre). Ce procédé exploite les forces inertielles pour orchestrer la distribution des constituants au sein de la matière en fusion.

Sous l'effet de la centrifugation, une ségrégation radiale s'opère : les éléments les plus denses migrent vers la périphérie (paroi du moule), tandis que les phases plus légères se concentrent

vers l'axe de rotation. Cette technique permet ainsi de générer, de manière économique et *in situ*, un gradient microstructural continu de renforts (particules céramiques), avec des concentrations pouvant varier typiquement de 10-20% au cœur jusqu'à 40% en périphérie.

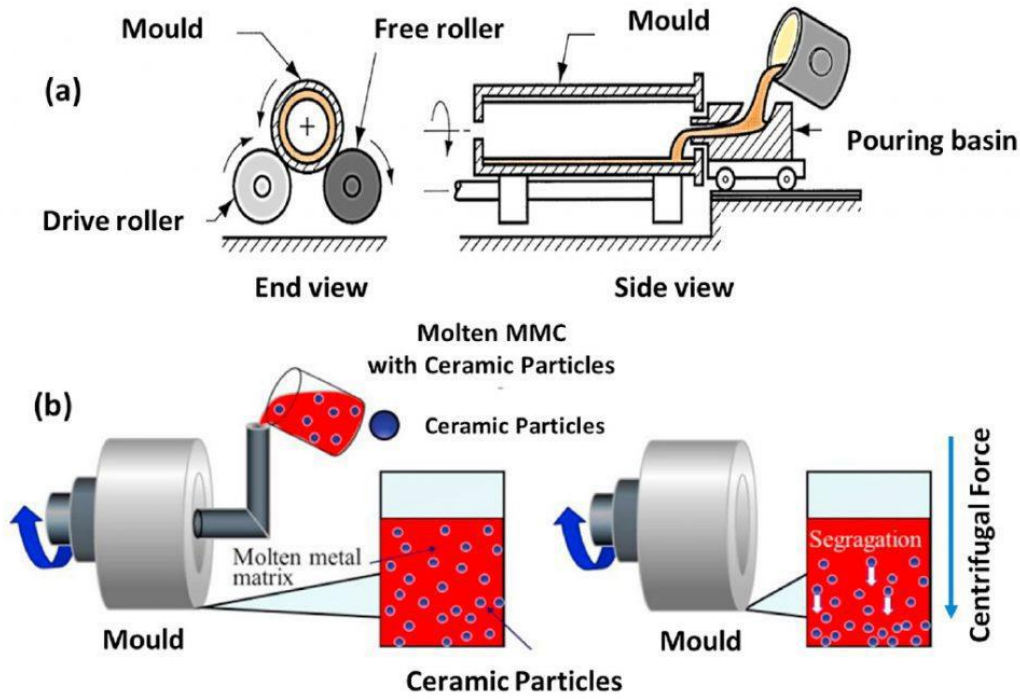


Figure I.28 : (a) Dispositif de coulée centrifuge horizontale (El-Galy et al., 2019) et (b) Phénoménologie de la ségrégation particulaire dans l'élaboration des FGM (Jamian et al., 2019).

I.13 Dynamique et chronologie de la recherche sur les FGM : une décennie d'investigation :

L'analyse diachronique de la production scientifique, telle qu'illustrée par la **Figure I.29**, offre une perspective éclairante sur l'évolution des centres d'intérêt de la communauté académique au cours de la dernière décennie. S'appuyant sur un corpus bibliographique exhaustif - incluant des travaux de référence tels que ceux de Gasik ou Sai Charan - cette cartographie thématique met en exergue une prédominance des recherches axées sur la maîtrise des procédés d'élaboration et la caractérisation physico-mécanique (résistance structurelle, comportement tribologique).

Toutefois, le spectre de la recherche s'est considérablement élargi. On observe l'émergence notable d'études dédiées aux applications biomédicales, ainsi qu'une sophistication accrue des outils de modélisation analytique et numérique. Parallèlement, l'intérêt croissant pour les revêtements fonctionnels souligne l'importance critique de l'ingénierie de surface pour répondre aux sollicitations sévères (usure, friction).

Cette trajectoire éditoriale témoigne d'un changement de paradigme dans la conception des matériaux : nous passons d'une approche statique, fondée sur des substances homogènes, à une conception dynamique et proactive. Dans cette nouvelle approche, l'architecture à gradient est spécifiquement conçue pour apporter une réponse locale et adaptée aux contraintes thermiques et mécaniques, une nécessité absolue pour garantir la fiabilité et la durabilité dans les applications industrielles de pointe.

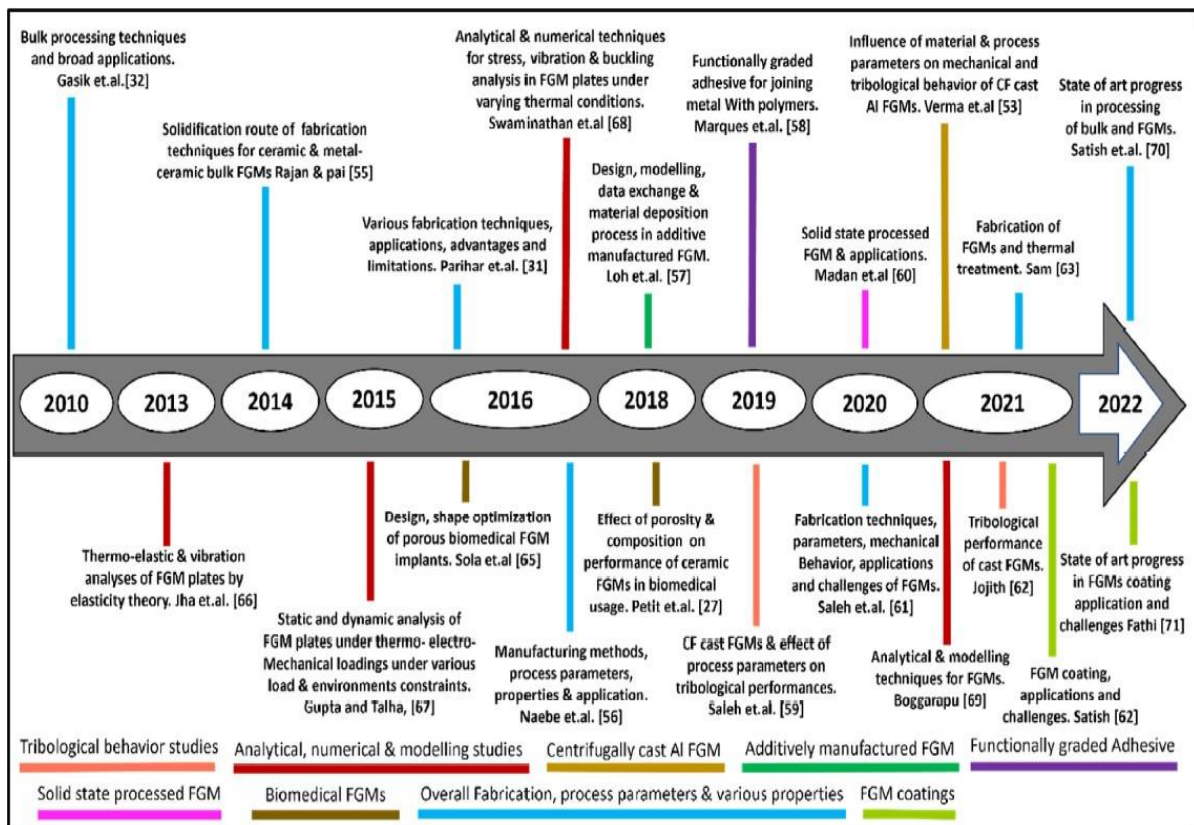


Figure I.29: Chronologie des publications sur les FGM au décennie de progrès.

(Mallick et al.,2023)

I.14 Horizons et perspectives de recherche

Nonobstant les avancées substantielles réalisées ces dernières années, le domaine des matériaux à gradient fonctionnel demeure un champ d'investigation fertile. Comme le soulignent Mallick et al. (2023), plusieurs verrous scientifiques et technologiques invitent à poursuivre l'exploration selon des axes stratégiques :

- **Modélisation prédictive** : Le perfectionnement des algorithmes de simulation pour anticiper les propriétés effectives des FGM dès la phase de conception (*design in silico*).
- **Innovation procédurale** : L'optimisation des procédés existants et le développement de nouvelles voies de synthèse pour accroître la robustesse et la répétabilité de la fabrication.
- **Exploration matérielle** : La recherche de combinaisons inédites de matériaux et de nouvelles architectures de renforcement pour repousser les limites de performance.
- **Durabilité et éco-conception** : L'intégration des impératifs environnementaux, notamment l'analyse du cycle de vie et les stratégies de recyclage des structures à gradient.
- **Fiabilité en conditions extrêmes** : L'approfondissement des connaissances sur les mécanismes de dégradation à long terme, tels que la fatigue, la rupture et la corrosion.
- **Hybridation technologique** : La convergence synergique des FGM avec les technologies de rupture, notamment les nanotechnologies et la fabrication additive (impression 3D).


I.15 Conclusion

Ce chapitre introductif s'est attaché à définir le cadre conceptuel des matériaux composites et, plus spécifiquement, des matériaux à gradient fonctionnel (FGM). Ces derniers se distinguent par une rupture avec l'homogénéité traditionnelle, privilégiant une variation continue de la composition et de la microstructure pour optimiser les propriétés locales.

Si les bénéfices théoriques et performanciers des FGM sont indéniables - permettant notamment la cohabitation de fonctions antagonistes comme la résistance thermique et la ténacité mécanique - leur déploiement industriel demeure pour l'heure circonscrit. La

complexité inhérente aux lois de gradation et les défis techniques associés à leur élaboration engendrent des coûts de production élevés.

En conséquence, les FGM occupent aujourd'hui une place de choix dans les secteurs à haute valeur ajoutée, où l'exigence de performance justifie l'investissement technologique, là où les matériaux conventionnels atteignent leurs limites intrinsèques.



**Chapitre II : Approches
Multi-échelle et Effet
Non Local**

II. Introduction générale :

Depuis plus d'un siècle (Neville, 2011), le béton constitue le matériau fondamental de l'ingénierie moderne. Il sert de socle à la majorité des infrastructures stratégiques telles que les fondations d'habitations, les barrages hydrauliques, les ponts monumentaux, les gratte-ciel, les tunnels et les voies routières. Sa diffusion mondiale s'explique par un ensemble de propriétés remarquables : abondance des matières premières, coût de production réduit, malléabilité à l'état frais, haute résistance mécanique à l'état durci, ainsi qu'une compatibilité optimale avec l'acier dans les structures armées.

Cependant, cette apparente simplicité masque une complexité structurelle notable (Mehta & Monteiro, 2014). Bien que le béton semble homogène et compact à l'observation macroscopique, il s'agit en réalité d'un matériau composite, hétérogène, poreux et dynamique. Chacun de ses constituants - pâte cimentaire, granulats, pores, hydrates - influence significativement son comportement mécanique et sa durabilité (Shen et al., 2020).

Ainsi, une fissure macroscopique observable (Bažant & Planas, 1998) dans une poutre est la conséquence d'une succession de phénomènes invisibles se manifestant à l'échelle microstructurale, voire à l'échelle atomique des hydrates. Cette complexité a conduit à l'émergence d'une approche multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024) qui considère les interactions entre les niveaux nano, micro et macro.

Par ailleurs, l'ingénierie des matériaux a mis en lumière l'effet d'échelle (Abbas et al., 2023 ; Bažant & Oh, 1983 ; Mazars, 1991), selon lequel la résistance d'une structure en béton ne dépend pas uniquement de ses propriétés intrinsèques. Pour des géométries similaires, une structure de grande dimension affiche souvent une fragilité supérieure à celle d'une éprouvette de petite taille. Ce paradoxe est lié à l'existence d'une zone de processus de fissuration (Vonk, 1993) (FPZ) et représente un enjeu crucial pour la modélisation et la sécurité structurelle.

L'objectif de ce chapitre est donc de concilier ces deux perspectives - la démarche multiéchelle et l'effet d'échelle afin de proposer une compréhension globale et cohérente du comportement du béton.

II.1 L'approche multiéchelle dans l'étude du béton :

II.1.1 Échelle macroscopique : la perspective de l'ingénieur :

À l'échelle macroscopique, le béton est considéré comme un matériau homogène, dont les propriétés sont évaluées à travers des essais normalisés. Les paramètres clés incluent :

- La résistance à la compression, référence emblématique du béton, mesurée sur éprouvettes standardisées.
- La résistance en traction, nettement inférieure, évaluée indirectement par des méthodes telles que l'essai brésilien ou la flexion.
- Le module d'élasticité, caractérisant la rigidité du matériau.
- Le comportement différé, incluant le fluage et le retrait.
- La durabilité globale, définie par la capacité du béton à résister aux agressions chimiques et physiques.

Cette vision demeure indispensable pour le dimensionnement des structures, mais elle s'avère insuffisante pour expliquer certains phénomènes tels que la propagation imprévisible des fissures, la variabilité de la durabilité entre bétons de résistances similaires, ou la vulnérabilité de certains bétons à haute performance.

II.1.2 Échelle microscopique : caractérisation des hétérogénéités :

Au niveau micrométrique, le béton révèle sa nature composite. La pâte cimentaire hydratée se compose principalement de C-S-H, de portlandite et d'hydrates secondaires. Les granulats assurent la rigidité et la stabilité dimensionnelle, tout en pouvant être le site de réactions délétères telles que la réaction alcali-silice (RAS). La zone de transition interfaciale (ITZ) entre la pâte et les granulats constitue souvent le maillon faible, caractérisé par une porosité et une fragilité accrues. Le réseau poreux influence directement la perméabilité et la durabilité.

Les microfissures apparaissent fréquemment dans l'ITZ ou à proximité des pores et se propagent sous l'effet des sollicitations mécaniques ou chimiques, initiant ainsi la formation des fissures macroscopiques.

II.1.3 Échelle nanoscopique : fondements atomiques :

À l'échelle nanométrique, les constituants du béton sont perçus comme des ensembles de particules et de liaisons atomiques. Les C-S-H forment une matrice fibreuse, dont la compacité détermine la résistance et la durabilité. La nanoporosité régule la circulation des fluides, avec des effets bénéfiques quand elle est contrôlée, ou délétères lorsqu'elle est excessive.

Le développement des nanotechnologies (nanoparticules de silice, nanotubes de carbone, graphène) a conduit à l'élaboration de bétons à propriétés innovantes, tels que les bétons auto-cicatrisants (Zhang et al., 2022 ; Huang et al., 2016), conducteurs ou dépolluants. Cette échelle constitue le fondement ultime où la structuration atomique influence directement la performance des ouvrages de grande envergure.

II.1.4 Intégration des échelles :

Un défi majeur dans la recherche concerne l'articulation des différentes échelles. Les phénomènes à l'échelle nanoscopique (densité des C-S-H) impactent la microstructure (porosité, fissuration locale), qui à son tour contrôle les propriétés macroscopiques (résistance, durabilité).

Les modèles multiéchelles, qu'ils soient ascendants (bottom-up) ou descendants (top-down), permettent formellement de relier ces niveaux, offrant ainsi des outils prédictifs puissants pour concevoir des bétons adaptés à des environnements spécifiques.

II.2 L'effet d'échelle et la zone de processus de fissuration (FPZ) :

II.2.1 Classification des matériaux selon leur comportement mécanique :

Les matériaux ne réagissent pas tous de la même façon lorsqu'ils sont soumis à une force ou une contrainte. La manière dont ils se cassent dépend de la forme et de la taille de la zone où la rupture commence. C'est pourquoi on peut les classer en plusieurs catégories distinctes.

La zone de processus de fissuration (ZPF, ou FPZ en anglais pour *Fracture Process Zone*) est la région où le comportement du matériau devient non linéaire. Dans cette zone, on observe un adoucissement : la contrainte diminue alors que la déformation augmente. Autour de cette zone d'adoucissement existe une autre région non linéaire, mais différente : elle ne s'adoucit pas. Au contraire, le matériau durcit - par exemple par plasticité - et la contrainte reste stable ou augmente même si la déformation grandit. Ces deux zones ensemble forment une seule région de comportement non linéaire. C'est en comparant la taille de ces deux zones que l'on peut classer les matériaux en trois grandes catégories : fragiles, ductiles ou quasi-fragiles, comme le montre la figure II.1. Les diagrammes du bas illustrent comment la contrainte varie le long de la ligne de fissure.

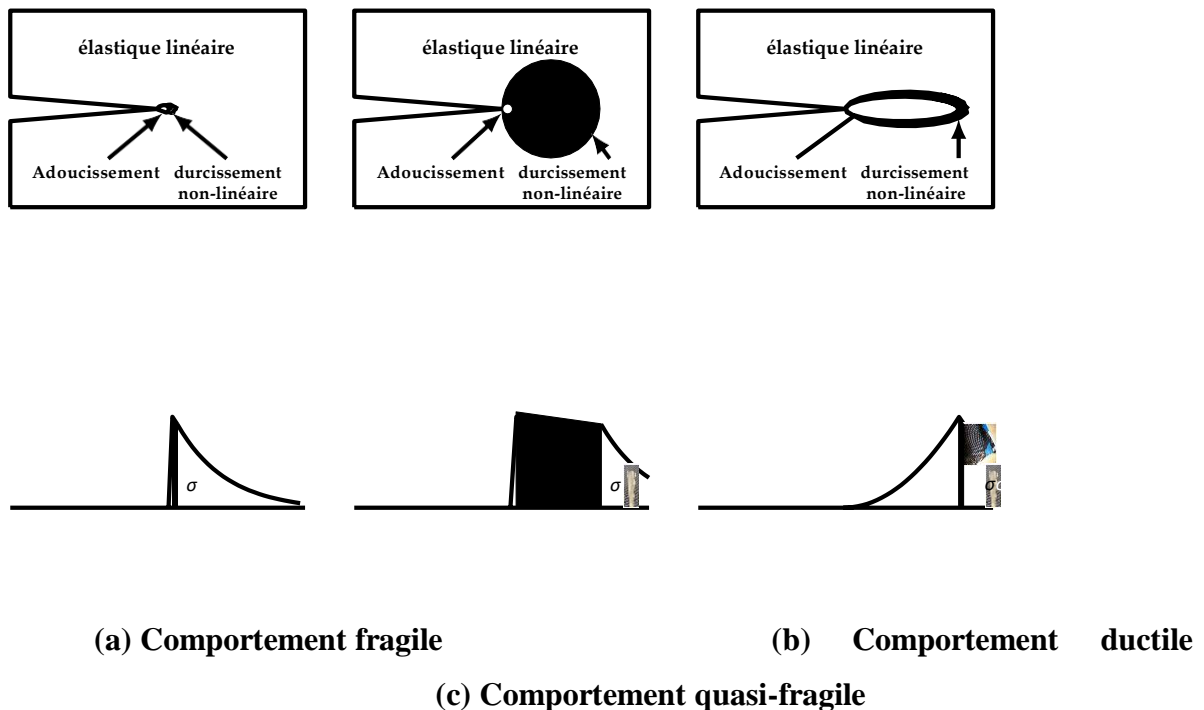


Figure II.1 Comportements non linéaires et types de zones de fracturation

Matériaux fragiles : (figure II.1.a) La zone non linéaire est très petite par rapport à la structure. Presque tout le matériau reste élastique, sauf près de la pointe de la fissure. On peut alors utiliser la mécanique linéaire de la rupture (LEFM) pour l'étudier. C'est le cas du verre, du plexiglas et des céramiques.

Matériaux ductiles : (figures II.1.b et II.1.c). La zone non linéaire devient trop grande pour que la LEFM s'applique correctement. Les zones où le matériau durcit par plasticité sont beaucoup plus étendues que les zones où il se casse. On trouve dans cette catégorie la plupart des métaux et des alliages. Pour les étudier, il faut utiliser la mécanique élastoplastique de la rupture, ce qui n'est pas l'objet de ce travail.

Matériaux quasi-fragiles : C'est le cas qui nous intéresse particulièrement ici. Presque toute la zone non linéaire subit un endommagement progressif et un adoucissement dû à la formation de petites fissures qui interagissent entre elles. La zone de durcissement y est souvent très petite, et le passage entre le comportement élastique et l'endommagement est rapide. On observe ce comportement dans les roches, la glace, les sables cimentés, certaines céramiques, les composites et surtout le béton. On les appelle quasi-fragiles parce que la ZPF est assez grande pour influencer fortement comment la structure se casse. La LEFM ne s'applique pas ici.

Ce travail se concentre sur l'étude des matériaux quasi-fragiles, en accordant une attention particulière au béton, considéré comme le matériau modèle pour comprendre ce type de comportement.

II.2.2 Effet d'échelle :

Le phénomène connu comme effet d'échelle est une caractéristique propre aux matériaux quasi fragiles liée notamment aux particularités de taille et de forme de la FPZ. Pour des structures géométriquement similaires et de tailles différentes, le fait que la zone d'élaboration en pointe de fissure ne change pas de taille d'une structure à l'autre, fait que le rapport ($taille_{FPZ}/taille_{structure}$) n'est pas constant. Ceci entraîne une décroissance de la résistance apparente de la structure avec l'augmentation de sa taille : plus la structure est grande, moins elle est résistante. L'effet d'échelle constitue un élément fondamental de validation de modèles car, pour décrire correctement le comportement des matériaux quasi-fragiles, un modèle doit être capable de reproduire ce phénomène.

II.2.3 Effet d'échelle dans les structures en béton :

On pourrait penser que la connaissance des caractéristiques du béton au niveau des essais de laboratoire sur des éprouvettes de tailles relativement faibles par rapport aux tailles réelles, mènerait à une bonne évaluation du comportement des ouvrages. Or il se trouve que certaines caractéristiques mécaniques des structures en béton changent quand les tailles de ces structures changent. Ceci est notamment le cas pour la contrainte nominale maximale. C'est "l'effet d'échelle".

La contrainte nominale maximale d'une structure en béton est la contrainte maximale dans cette structure calculée en supposant un comportement élastique linéaire. Elle est évaluée à partir de la charge maximale pouvant être supportée par la structure.

L'effet d'échelle est mis en évidence par divers types de sollicitations sur des éprouvettes et des structures en béton, que ce soit sous sollicitations uniaxiales ou sous sollicitations multiaxiales.

Lors d'essais uniaxiaux sur des éprouvettes en béton, il apparaît que la contrainte maximale supportée diminue quand la taille de l'éprouvette augmente (Vonk. 1993). Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont uniformes dans toutes les éprouvettes, est aussi appelé effet de volume.

A titre d'exemple, la figure II.2 représente des géométries d'éprouvettes prismatiques soumises à des compressions uniaxiales. Les résultats de ces essais sont donnés sur la figure II.3 (Vonk, 1993).

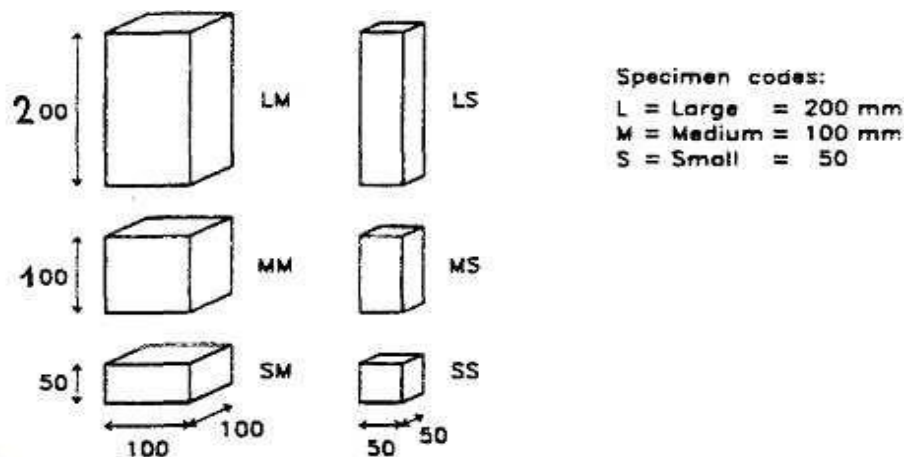


Figure II.2: Géométries des éprouvettes prismatiques

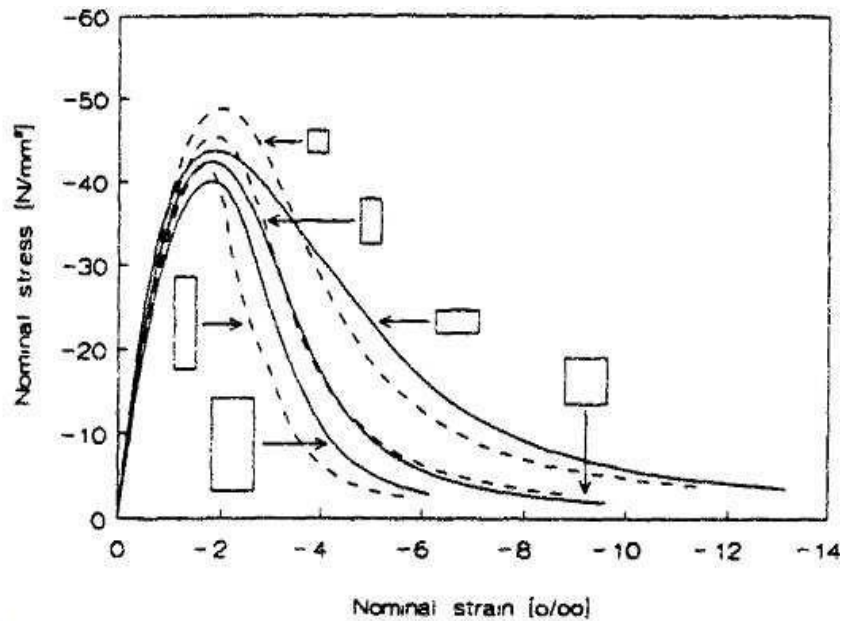


Figure II.3: Réponses contrainte-déformation en compression pour les différentes géométries (Vonk,1993)

Aussi, lors de sollicitations multiaxiales sur des structures de géométries similaires, mais de tailles différentes, les mêmes observations sont notées. La contrainte nominale maximale d'une structure diminue lorsque la taille de celle-ci augmente.

Ce cas particulier d'effet d'échelle, où les sollicitations sont multiaxiales, est aussi appelé effet d'échelle de structures.

Plusieurs auteurs ont mis en évidence ces observations (Bazant et Oh, 1983; Mazars *et al.*, 1991; Planas et Elices, 1988; Biolzi et al., 1994).

La figure II.4 montre la variation de la contrainte nominale maximale avec la taille de structures soumises à des flexions trois points (Mazars et al.,1991).

L'effet d'échelle peut être expliqué de la façon suivante. Le béton n'est pas un matériau parfaitement homogène. En effet, à l'échelle des granulats, l'hétérogénéité du matériau se manifeste par la présence de microdéfauts, de microfissures et de microvides d'orientations quelconques. Sous l'effet d'un chargement, les déformations se localisent rapidement dans les zones où il y a ces défauts. Plus les dimensions d'une structure sont grandes, plus il est probable d'avoir la présence d'une importante proportion de défauts.

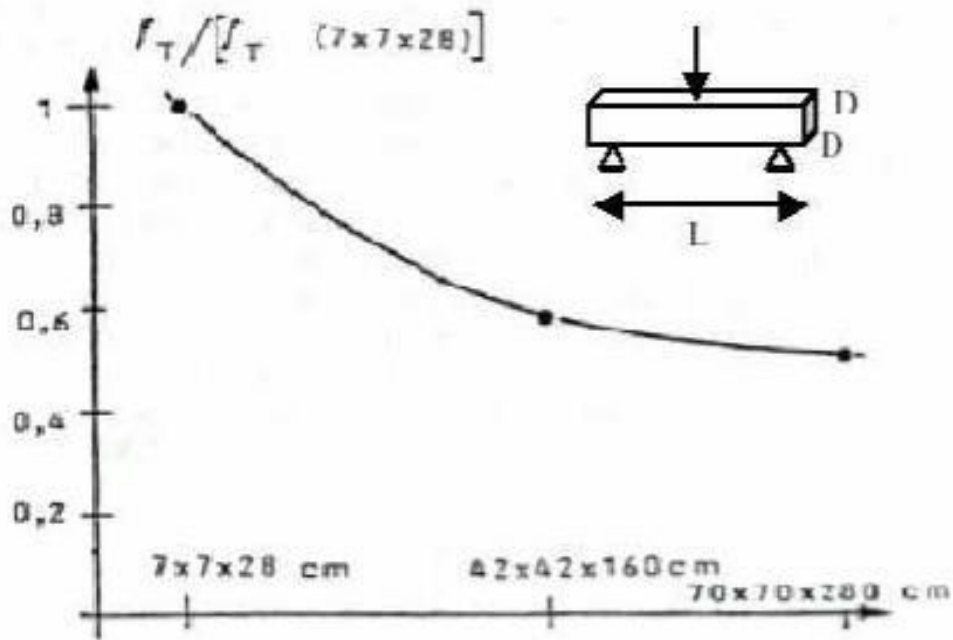


Figure II.4 : Effet d'échelle sur poutres en flexion trois points

II.2.4 Origine physique de l'effet d'échelle :

L'explication de ce phénomène réside dans la compétition entre deux paramètres :

1. **La zone de processus de fissuration** (Vonk, 1993) (FPZ) : pour des petites structures, la FPZ occupe une proportion importante de la zone sollicitée, ce qui accroît la résistance apparente (dissipation énergétique plus efficace).
2. **La taille globale de la structure** : plus une structure est grande, plus la probabilité de contenir un défaut critique augmente, ce qui réduit sa résistance.

Ainsi, la FPZ joue le rôle de « régulateur » de la rupture : elle confère au béton une résistance apparente dépendante de la taille, contrairement aux matériaux strictement fragiles ou parfaitement ductiles.

II.2.5 Conséquences pratiques

L'effet d'échelle a des conséquences directes sur la conception et la modélisation des ouvrages :

- * Les résistances mesurées sur éprouvettes de laboratoire ne peuvent pas être extrapolées directement à des structures réelles sans correction.
- * Les codes de calcul doivent intégrer cet effet pour éviter les surévaluations de résistance.
- * Les modèles mécaniques doivent inclure une **longueur interne caractéristique**, liée à la FPZ, pour prédire correctement la propagation des fissures.

En résumé, l'effet d'échelle est une propriété intrinsèque du béton : il rappelle que la taille compte, et que le comportement macroscopique est indissociable des mécanismes microscopiques et mésoscopiques de fissuration.

II.3 Approches théoriques avancées pour modéliser l'effet d'échelle :

Les éléments structurels à petite échelle tels que les poutres, les plaques et les coques sont couramment utilisés comme composants dans les systèmes micro- et nano-électromécaniques (MEMS et NEMS), les capteurs, les actionneurs et les microscopes à force atomique. Dans ces applications, des effets de taille ont été observés expérimentalement dans les propriétés mécaniques (Stolken et Evans, 1998 ; Nix, 1989 ; Ma et Clarke, 1995 ; Fleck et al., 1994 ; Chong et Lam, 1999). Ces effets de taille peuvent être capturés à l'aide de simulations de dynamique moléculaire (DM) ou de la mécanique du continuum d'ordre supérieur. Bien que la méthode DM puisse fournir des prédictions précises, elle est trop coûteuse sur le plan informatique. Par conséquent, l'approche de la mécanique du continuum d'ordre supérieur a été largement utilisée dans la modélisation des structures à petite échelle.

Le développement des théories du continuum d'ordre supérieur remonte aux premiers travaux de Piola sur le 19ème siècle, comme le démontrent (Dell'Isola et al., 2015 ; Dell'Isola et al., 2016) et les travaux de Cosserat et Cosserat en 1909 (Cosserat E. et Cosserat F.,1909).

Cependant, jusqu'aux années 1960, l'idée des frères Cosserat a reçu une attention considérable de la part des chercheurs, et un grand nombre de théories de continuum d'ordre supérieur ont été développées. En général, ces théories peuvent être classées en trois classes différentes à savoir la famille des gradients de déformation, les théories du microcontinuum et de l'élasticité non locale. La famille des gradients de déformation est composée de la théorie des contraintes de couple, de la première et de la seconde théorie des gradients de déformation, de la théorie des contraintes de couple modifiées et de la théorie des gradients de déformation modifiés. Dans la famille des gradients de déformation, les déformations et le gradient des déformations sont pris en compte dans l'énergie de déformation, et donc l'effet de taille est pris en compte en utilisant les paramètres d'échelle de longueur du matériau. Dans la théorie des contraintes de couple initiée par Toupin (Toupin, 1962), Mindlin et Tiersten (Mindlin et Tiersten, 1962) et Koiter (Koiter, 1964), seul le vecteur gradient de rotation est pris en compte dans l'énergie de déformation, et donc seuls deux paramètres d'échelle de longueur de matériau sont nécessaires. La théorie du contrainte de couple modifiée a été proposée par Yang et al. (Yang et al., 2002) sur la base de la modification de la théorie du contrainte de couple. En introduisant une condition d'équilibre des moments de couples pour forcer le tenseur de contrainte de couple à être symétrique, le nombre de paramètres d'échelle de longueur de matériau de la théorie de contrainte de couple modifiée est réduit de deux à un. La première théorie du gradient de déformation initiée par Mindlin (Mindlin, 1964) ne considère que le premier gradient de déformation. Un an plus tard, Mindlin (Mindlin, 1965) a dérivé la deuxième théorie du gradient de déformation qui est considérée comme la forme la plus générale de la théorie du gradient de déformation tenant compte à la fois du premier et du deuxième gradients de déformations. Lam et al. (Lam et al., 2003) ont proposé la théorie du gradient de déformation modifié avec seulement trois paramètres d'échelle de longueur de matériau en modifiant la théorie de Mindlin en utilisant une approche similaire de Yang et al.

(Yang et al., 2002). La théorie de l'élasticité non locale a été proposée à l'origine par Kroner (Kroner, 1967) et améliorée par Eringen (Eringen, 1972 ; Eringen, 1972) et Eringen et Edelen (Eringen et Edelen, 1972). Dans cette théorie, la contrainte à un point de référence dans un continuum dépend des contraintes à tous les points du corps, et donc l'effet de taille est capturé au moyen d'équations constitutives utilisant un paramètre non local. La théorie de l'élasticité non locale a été initialement formulée sous une forme intégrale, puis reformulée par Eringen (Eringen, 1983) sous une forme différentielle en considérant une fonction spécifique du noyau. Par rapport au modèle intégral, le modèle différentiel est largement utilisé pour les nanostructures en raison de sa simplicité. En outre, une autre classe de théorie d'ordre supérieur appelée théorie du gradient de déformation non local a été récemment proposée sur la base d'une combinaison de la théorie de l'élasticité non locale et de la théorie du gradient de déformation. Le lecteur intéressé peut se référer à (Aifantis, 2011 ; Lim et al., 2015 ; Narendar et Gopalakrishnan, 2010) pour plus de détails sur cette théorie.

Les modèles dépendant de la taille ont été largement utilisés pour prédire le comportement global des nanostructures en forme de poutre et de plaque telles que les nanotubes de carbone (CNT) et les feuilles de graphène. Les NTC ont été découverts par Iijima (Iijima, 1991) en laminant des feuilles de graphène. Sur la base de la voie de synthèse et des paramètres de réaction, divers types de NTC tels que les nanotubes de carbone à paroi unique (SWCNT), les nanotubes de carbone à double paroi (DWCNT) et les nanotubes de carbone à parois multiples (MWCNT) peuvent être obtenus (voir Figure II.5) en laminant des feuilles de graphène monocouche (SLGS), des feuilles de graphène à double couche (DLGS) et des feuilles de graphène multicouche (MLGS) (voir Figure II.6). Le nanotube est une nanostructure clé et a un large éventail d'applications dans tous les domaines de la nanotechnologie.

Un grand nombre de modèles dépendant de la taille ont été proposés sur la base de diverses théories de la poutre et de la plaque. Les modèles les plus simples étaient basés sur la théorie de la poutre d'Euler-Bernoulli (EBT) et la théorie classique des plaques (CPT). Ces modèles ne sont appropriés que pour la modélisation de poutres minces et de plaques minces car ils ignorent l'effet de déformation par cisaillement. Pour surmonter la limitation de l'EBT et du CPT, un certain nombre de théories de déformation par cisaillement ont été proposées. Les modèles de déformation par cisaillement de premier ordre étaient basés sur la théorie de la poutre de Timoshenko (TBT) et la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre (FSDT). Étant donné que les déplacements dans le plan varient linéairement à travers l'épaisseur dans ces modèles, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire. Afin d'éliminer l'utilisation du facteur de correction du cisaillement et d'obtenir une meilleure prédiction des réponses des poutres et des plaques épaisses, plusieurs théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) ont été proposées, notamment la théorie de la poutre de Reddy (RBT) et la théorie de la déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) de Reddy (Reddy, 1984). Un examen complet des théories de la plaque peut être trouvé dans les travaux de Thai et Kim (Thai et Kim, 2015).

Les équations gouvernantes dérivées des modèles dépendants de la taille susmentionnés peuvent être résolues à l'aide de méthodes analytiques ou d'approches numériques. Cependant, l'application des méthodes analytiques est limitée à une nanostructure particulière avec une géométrie, un chargement et des conditions aux limites (BC) simples. Par exemple, la méthode Navier n'est appliquée que pour les plaques rectangulaires avec des BC simplement soutenus, tandis que la méthode Levy n'est appliquée que pour les plaques rectangulaires dans lesquelles deux bords opposés sont simplement soutenus et les deux bords restants peuvent avoir des BC arbitraires. Pour les problèmes pratiques de géométrie générale, de chargement et de BC, la recherche de leurs solutions analytiques est impossible en raison de la complexité mathématique des modèles dépendants de la taille par rapport aux modèles classiques. Par conséquent, les approches numériques telles que la méthode des éléments finis, la méthode de

quadrature différentielle, la méthode sans maille, la méthode de Ritz, la méthode de Galerkin, etc. deviennent les plus appropriées pour résoudre de tels problèmes. Bien que des recherches approfondies sur les poutres, plaques et coques à petite échelle aient été effectuées au cours de la dernière décennie,

le développement de modèles pour capturer l'effet de taille dans ces structures n'a pas été examiné. Par conséquent, Dans ce chapitre, le but principal est de présenter un examen complet sur le développement de modèles dépendants de la taille pour prédire le comportement des structures de type poutre à petite échelle. La revue se concentre principalement sur les modèles de poutre, qui ont été développés sur la base de la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen (Eringen, 1983), de la théorie de la contrainte de couple modifiée de Yang et al. (Yang et al., 2002) et de la théorie du gradient de déformation modifié de Lam et al. (Lam et al., 2003).

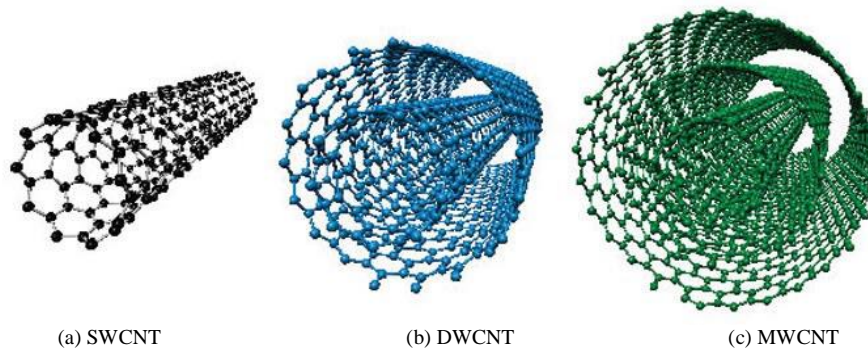


Figure II.5 : Illustration schématique de différentes formes de CNTs

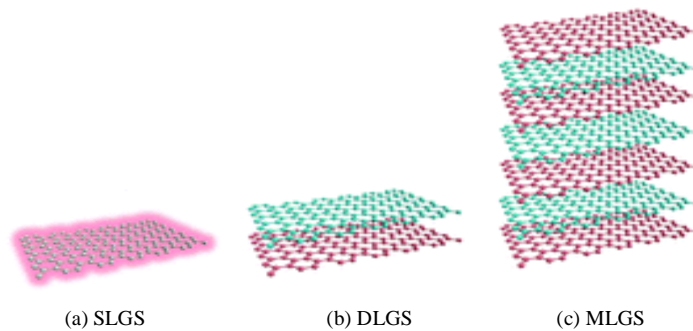


Figure II.6 : Nanomatériaux à base de graphène

II.3.1 Théorie du contrainte du couple modifiée :

La théorie modifiée du contrainte de couple a été proposée par Yang et al. (Yang et al., 2002) en modifiant la théorie classique du contrainte de couple de Toupin (Toupin, 1962), Mindlin et Tiersten (Mindlin & Tiersten, 1962) et Koiter (Koiter, 1964). En introduisant une condition d'équilibre supplémentaire des moments des couples pour forcer le tenseur de contrainte de couple à être symétrique, le nombre de paramètres d'échelle de longueur de matériau supplémentaires dans la théorie de contrainte de couple modifiée est réduit de deux à un. Cela rend la théorie de la contrainte de couple modifiée plus avantageuse car la détermination des paramètres matériels est une tâche difficile. L'énergie de déformation U est une fonction à la fois de la déformation et de la courbure comme (Yang et al., 2002)

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (\text{II-1})$$

où m_{ij} sont les composantes de la partie déviatoire du tenseur de contrainte du couple symétrique ; et χ_{ij} sont les composantes du tenseur de courbure symétrique défini par

$$\begin{aligned} \chi_{xx} &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \chi_{yy} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \chi_{zz} &= \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \\ \chi_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \chi_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial z} + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right) \\ \chi_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial z} + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

où le vecteur de rotation θ est défini en fonction du champ de déplacement (u_x, u_y, u_z) comme

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \theta_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

Pour un matériau élastique linéaire, m_{ij} sont donnés comme

$$m_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \ell^2 \chi_{ij} \quad (\text{II-4})$$

où ℓ est le paramètre d'échelle de longueur du matériau. L'évaluation et l'étalonnage de peuvent être trouvés dans les références. (Dehrouyeh-Semnani et Nikkhah-Bahrami, 2015 ; Khajueenejad et Ghanbari, 2015)

II.3.1.1. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur l'EBT :

Le premier modèle de contrainte de couple modifié EBT a été développé par Park et Gao (Park et Gao, 2006) pour les micropoutres isotropes. Ils ont utilisé leur modèle pour étudier l'effet du paramètre d'échelle de longueur du matériau sur la déflexion et la rigidité à la flexion d'une poutre époxy en porte-à-faux soumise à une charge concentrée à l'extrémité libre. Il a été constaté que l'inclusion du paramètre d'échelle de longueur du matériau conduit à une augmentation de la rigidité à la flexion de la micropoutre en porte-à-faux. Cet effet devient significatif lorsque l'épaisseur de la poutre est faible, mais il est négligeable lorsque l'épaisseur de la poutre augmente. Cette observation concorde bien avec les données expérimentales. Le modèle de contrainte de couple modifié EBT a été étendu par Kong et al. (Kong et al., 2008 ; Kong et al., 2009) aux problèmes de vibration libre (Kong et al., 2008) et de flambage (Kong et al., 2009) des micropoutres isotropes.

II.3.1.2. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur le TBT :

Ma et al. (Ma et al., 2008) ont d'abord développé le modèle TBT de contrainte de couple modifié en étendant le modèle EBT de Park et Gao (Park et Gao, 2006) pour tenir compte de l'effet de déformation par cisaillement. Le modèle a été utilisé pour étudier les effets du paramètre d'échelle de longueur du matériau et de la déformation par cisaillement sur les déflexions et les fréquences naturelles de micropoutre isotropes simplement supportés. Les solutions de forme fermée du modèle TBT ont été dérivées par Asghari et al. (Asghari et al., 2011) pour la réponse en flexion des poutres sous divers BC, tandis que les solutions approximatives du modèle TBT ont été dérivées par Dos Santos et Reddy (Dos et Reddy, 2012) pour les charges de flambement et les fréquences naturelles des poutres avec divers BC en utilisant la méthode Ritz. Dehrouyeh-Semnani et Nikkhah-Bahrami (Dehrouyeh-Semnani et Nikkhah-Bahrami, 2015) ont utilisé à la fois des modèles EBT et TBT pour examiner l'effet

Poisson dans les microfaisceaux isotropes. En comparant les rigidités en flexion et les déflexions des microfaisceaux en porte-à-faux époxy sous des charges concentrées prédites par les modèles de contraintes de couple modifiés et les tests expérimentaux, il a été constaté que l'inclusion de l'effet Poisson dans les modèles de contraintes de couple modifiés conduit à sous-estimer la déflexion du microfaisceau en porte-à-faux époxy comme le montre la (Figure II.7) Liu et Reddy (Liu & Reddy, 2011) ont développé un modèle TBT de contrainte de couple modifié pour les micropoutres courbes isotropes, et l'ont appliqué aux problèmes de flexion et de vibration libre des poutres courbes simplement supportées. Taati et al. (Taati et al., 2014) ont également développé un modèle TBT pour étudier les effets thermiques dans les microfaisceaux isotropes. Asghari et al. (Asghari et al., 2010) ont présenté un modèle TBT non linéaire pour les analyses de flexion et de vibration libre des microfaisceaux isotropes. Ghayesh et al. (Ghayesh et al., 2013 ; Ghayesh et al., 2013) ont également présenté un modèle TBT non linéaire pour les problèmes de résonance non linéaire des microfaisceaux isotropes.

Le modèle TBT a également été appliqué à des micropoutres en FG et matériaux composites stratifiés. Reddy (Reddy, 2011) a développé des modèles EBT et TBT pour les micropoutres FG en tenant compte de la non-linéarité géométrique. Des expressions de forme fermée pour les déflexions, les charges de flambement et les fréquences naturelles de microfaisceaux simplement supportés ont également été données. Ke et al. (Ke et al., 2012) ont développé un modèle TBT non linéaire pour examiner l'effet de la taille sur les caractéristiques de vibration non linéaire des microfaisceaux de FG. Asghari et al. (Asghari et al., 2011) ont développé un modèle TBT pour étudier l'effet de la taille sur les déflexions et les rotations des faisceaux FG en porte-à-faux ainsi que sur les fréquences naturelles des faisceaux FG simplement supportés. Cependant, la non-linéarité géométrique a été ignorée dans leur modèle. Ke et Wang (Ke et Wang, 2011) a utilisé le modèle TBT pour étudier les vibrations libres, le flambage statique et les comportements de stabilité dynamique des microfaisceaux FG sous différents BC en utilisant la méthode DQ. Les réponses au flambage et aux vibrations libres des microfaisceaux de FG à température élevée ont été étudiées par Nateghi et Salamat-talab [156] en utilisant le modèle TBT de contrainte de couple modifié. La méthode DQ a été

utilisée pour obtenir des charges de flambement critiques et des fréquences naturelles de microfaisceaux FG avec divers BC. Les résultats numériques ont indiqué que l'effet de la température devient plus significatif à des valeurs plus élevées du rapport entre l'épaisseur du faisceau et le paramètre de l'échelle de longueur du matériau. Simsek et al. (Simsek et al., 2013) ont adopté le modèle TBT pour étudier l'effet de la taille sur les déflexions de microfaisceaux de FG simplement supportés soumis à des charges uniformes et concentrées. L'application du modèle TBT a été étendue par Chen et al. (Chen et al., 2011), Chen et Li (Chen et Li, 2013), Roque et al. (Roque et al., 2013) et Mohammad-Abadi et Daneshmehr (Mohammad-Abadi et Daneshmehr, 2014) à la flexion statique (Chen et al., 2011 ; Roque et al., 2013), à la vibration libre (Chen et Li, 2013) et au flambage (Mohammad-Abadi et Daneshmehr, 2014) des micropoutres composites stratifiées. Thai et al. (Thai et al., 2015) ont également étendu l'application du modèle TBT aux problèmes de flexion statique, de flambage et de vibrations libres des micropoutres sandwich FG. Récemment, Krysko et al. (Krysko et al., 2017) ont développé un modèle TBT pour les analyses de flexion statique et de vibration libre de microfaisceau à trois couches basées sur la théorie de Grigolyuk-Chulkov.

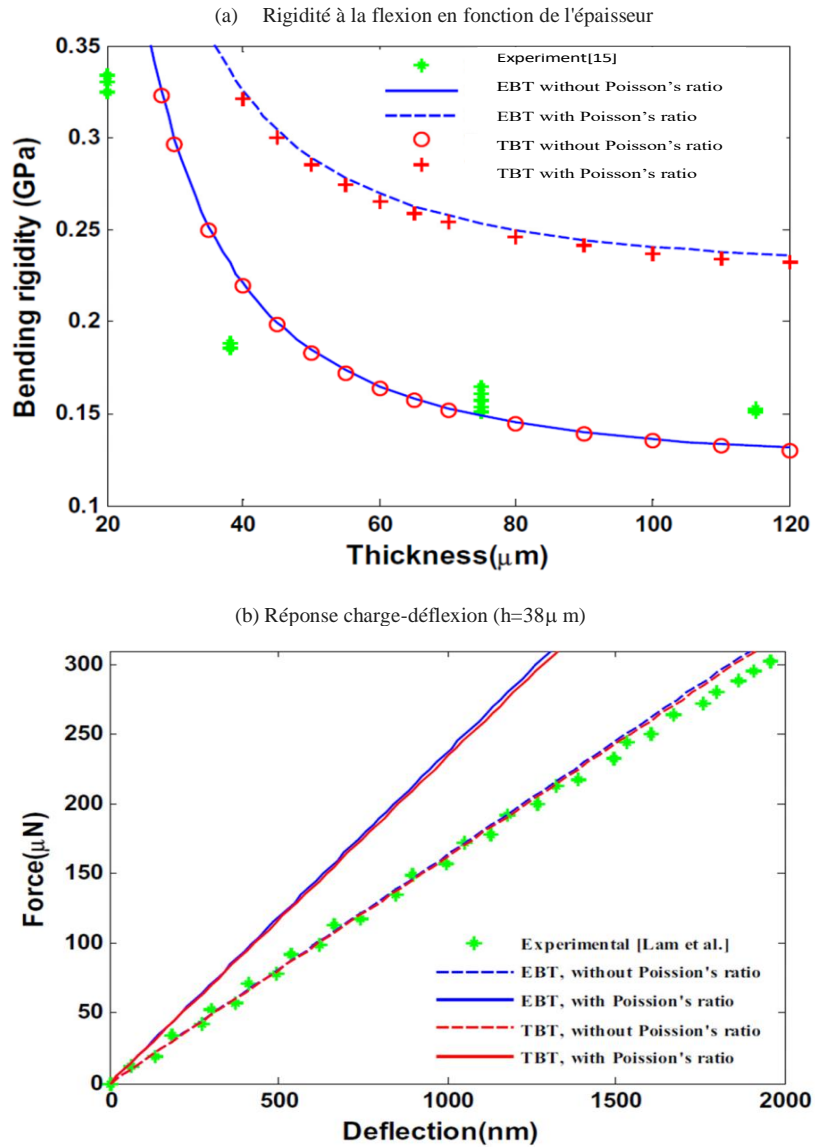


Figure II.7 : Effet du coefficient de Poisson sur une micropoutre en porte-à-faux

II.3.1.3. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur le RBT

Le modèle de contrainte de couple modifié RBT a d'abord été proposé par Ma et al. (Ma et al., 2010) pour les microfaisceaux isotropes. Il a été utilisé pour examiner l'effet de la taille sur la flexion statique et les réponses aux vibrations libres de microfaisceaux simplement supportés. L'application du modèle RBT a été étendue par Mohammad-Abadi et Daneshmehr (Mohammad-Abadi & Daneshmehr, 2014) pour étudier l'effet de taille sur le comportement au flambement des microfaisceaux isotropes. Les modèles EBT et TBT ont également été inclus dans leurs travaux. Des solutions analytiques pour des poutres simplement supportées ont également été fournies à des fins de comparaison.

Salamat-talab et al. (Salamat-talab et al., 2012) ont étendu l'application du modèle RBT aux microfaisceaux FG et ont dérivé des solutions de forme fermée pour les déflexions et les fréquences naturelles des microfaisceaux simplement supportés. Nateghi et al. (Nateghi et al., 2012) et Aghazadeh et al. (Aghazadeh et al., 2014) ont présenté un modèle unifié pour le flambement (Nateghi et al., 2012), la flexion et les vibrations libres (Aghazadeh et al., 2014) de microfaisceaux FG. Le modèle unifié couvre trois théories de faisceau différentes de l'EBT, FBT et TBT. La méthode de la solution DQ est utilisée pour résoudre les charges de flambement, les déflexions et les fréquences naturelles des microfaisceaux FG sous différents BC. Chen et al. (Chen et al., 2012) ont développé un modèle RBT pour les microfaisceaux composites stratifiés basé sur une nouvelle relation constitutive pour les matériaux anisotropes. Le modèle a été utilisé pour examiner l'effet de la taille sur les déflexions des micropoutres à couches croisées simplement supportées sous des charges uniformes. Mohammad-Abadi et Daneshmehr (Mohammad-Abadi et Daneshmehr, 2015) et Mohammad-Abadi et al. (Mohammad-Abadi et al., 2015) ont étendu leur modèle isotrope (Mohammad-Abadi et Daneshmehr, 2014) pour étudier la vibration libre (Mohammad-Abadi et Daneshmehr, 2015) et le flambage thermique (Mohammad-Abadi et al., 2015) des microfaisceaux composites stratifiés sous divers BC.

II.3.1.4. Modèles de contrainte de couple modifiés basés sur les HSDT :

Darijani et Mohammad abadi (Darijani & Mohammadabadi, 2014) ont proposé un modèle HSDT de contrainte de couple modifié pour les microfaisceaux isotropes en séparant les déplacements axiaux et transversaux dans les parties de cisaillement et de flexion. La fonction de forme de la pièce de cisaillement comme indiqué dans le tableau II.1 a été déterminée sur la base de la condition que la contrainte de cisaillement transversal et la contrainte de couple disparaissent sur les surfaces supérieure et inférieure de la section transversale. Récemment, Noori et al. (Noori et al., 2016) ont présenté un modèle HSDT pour la vibration libre des micropoutre isotropes basé sur une variation de cinquième ordre du déplacement axial à travers l'épaisseur. La méthode de la solution DQ a été utilisée pour résoudre les fréquences naturelles des microfaisceaux sous divers BC. Simsek et Reddy (Simsek et Reddy, 2013) ont développé un modèle HSDT unifié pour les micropoutres FG couvrant sept théories de faisceau différentes, y compris EBT, TBT, RBT, théorie sinusoïdale de Touratier (Touratier, 1991), théorie exponentielle de Karama et al. (Karama et al., 2003) et théorie exponentielle générale d'Aydogdu (Aydogdu, 2009). Le modèle a été appliqué aux problèmes de flexion et de vibration libre des microfaisceaux FG simplement supportés. Le modèle a également été étendu par Simsek et Reddy (Simsek et Reddy, 2013) et Akbarzadeh Khorshidi et al. (Akbarzadeh et al., 2016) aux problèmes de flambement des microfaisceaux incorporés de FG (Simsek et Reddy, 2013) et aux problèmes de post flambement des microfaisceaux de FG avec BC généraux (Akbarzadeh et al., 2016). Trinh et al. (Trinh et al., 2016) ont également présenté un modèle de contrainte de couple modifié unifié pour les microfaisceaux FG composé à la fois des théories HSDT et quasi-3D des faisceaux. Le champ de déplacement de leur modèle était basé sur celui proposé par Thai et al. (Thai et al., 2014) dans lequel les déplacements transversaux sont divisés en composants de flexion, de cisaillement et d'étirement d'épaisseur comme indiqué dans le tableau II.2.

Basé sur la théorie sinusoïdale de Touratier (Touratier, 1991), Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2014) ont développé un modèle sinusoïdal de contrainte de couple modifié pour étudier les caractéristiques thermo-mécaniques de flambement de FG simplement supporté

micropoutres intégrés. Les résultats ont indiqué que l'effet d'une température élevée sur les charges de flambement des microfaisceaux de FG devient significatif lorsque le rapport entre le paramètre d'échelle épaisseur et longueur du matériau augmente (Akgoz et Civalek, 2014). Al-Basyouni et al. (Al-Basyouni et al., 2015) ont également présenté un modèle sinusoïdal de contrainte de couple modifié pour les microfaisceaux de FG. Cependant, il était basé sur la théorie sinusoïdale simple proposée par Thai et Vo (Sadatshojaei et al., 2016), et incluait la surface neutre physique des microfaisceaux FG.

II.3.2. Théorie du gradient de déformation modifiée :

Dans cette théorie (Lam et al., 2003), l'énergie de déformation contient deux parties de gradient supplémentaires, le gradient de dilatation γ et le gradient d'étirement déviatorique η en plus de la courbure symétrique x_{ij} . Par conséquent, la déformation l'énergie s'écrit comme (Lam et al., 2003)

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk} \eta_{ijk} + m_{ij} x_{ij}) dV \quad (\text{II-5})$$

où le tenseur de courbure symétrique x_{ij} est défini dans l'équation (II-2). Le vecteur de gradient de dilatation γ_i et le tenseur de gradient d'étirement déviatorique η_{ijk} sont respectivement définis dans les équations (II-6) et (II-7) comme

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial x} \\ \gamma_y &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial y} \\ \gamma_z &= \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{II-6})$$

$\eta_{xxx} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{5} \left[\gamma_x + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} \right) \right]$ $\eta_{yyy} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} - \frac{1}{5} \left[\gamma_y + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} \right) \right]$ $\eta_{zzz} = \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} - \frac{1}{5} \left[\gamma_z + 2 \left(\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial z} \right) \right]$ $\eta_{yyx} = \eta_{yxy} = \eta_{xyy} = \frac{1}{3} \left[\eta_{xxx} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx})}{\partial x} \right]$ $\eta_{zzx} = \eta_{zxx} = \eta_{xzz} = \frac{1}{3} \left[\eta_{xxx} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx})}{\partial x} \right]$ $\eta_{zzy} = \eta_{zyz} = \eta_{yzz} = \frac{1}{3} \left[\eta_{yyy} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy})}{\partial y} \right]$ $\eta_{xxz} = \eta_{xzx} = \eta_{zxx} = \frac{1}{3} \left[\eta_{zzz} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})}{\partial z} \right]$ $\eta_{yyz} = \eta_{yzy} = \eta_{zyy} = \frac{1}{3} \left[\eta_{zzz} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})}{\partial z} \right]$ $\eta_{xyz} = \eta_{yzx} = \eta_{zxy} = \eta_{xzy} = \eta_{zyx} = \eta_{yxz} = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right]$	(II-7)
---	--------

Pour un matériau élastique linéaire, les contraintes d'ordre supérieur $(p_i, \tau_{ijk}, m_{ij})$ sont données comme

$p_i = \frac{E}{1+\nu} \ell_0^2 \gamma_i$ $\tau_{ijk} = \frac{E}{1+\nu} \ell_1^2 \eta_{ijk}$ $m_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \ell_2^2 x_{ij}$	(II-8)
---	--------

où ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_2 sont les paramètres de l'échelle de longueur du matériau associés au gradient de dilatation, gradient d'étirement déviatoire et gradient de courbure symétrique, respectivement.

II.3.2.1. Modèles de gradient de déformation basés sur l'EBT :

L'un des premiers modèles EBT à gradient de déformation a été proposé par Kong et al. (Kong et al., 2009) pour étudier l'effet de taille sur les déflexions et les fréquences naturelles des microfaisceaux cantilever isotropes. La précision de la théorie du gradient de déformation a également été comparée à celle de la théorie du couple modifié et de la théorie classique comme le montre la (Figure II.8) Les résultats de la comparaison ont indiqué que le modèle de gradient de déformation prédit mieux l'effet de taille que le modèle de contrainte de couple modifié puisqu'il considère un tenseur de gradient de dilatation supplémentaire et un tenseur de gradient d'étirement déviatoire en plus du tenseur de gradient de rotation. Akgoz et Civalek (Akgoz & Civalek, 2011) ont étendu le modèle EBT du gradient de déformation à l'analyse du

flambement des microfaisceaux isotrope avec des BC en porte-à-faux et simplement supportés. Akgoz et Civalek (Akgoz & Civalek, 2011 ; Akgoz & Civalek, 2012 ; Akgoz & Civalek, 2013 ; Akgoz & Civalek, 2014) ont également utilisé le modèle EBT à gradient de déformation pour étudier les effets de la taille sur le flambement des SWCNT (Kong et al., 2009), la flexion statique des SWCNT (Akgoz et Civalek, 2012), le flambement des micropoutres linéairement coniques (Akgoz et Civalek, 2013) et vibration longitudinale des microfaisceaux (Akgoz et Civalek, 2014).

Zhao et al. (Zhao et al., 2012) ont développé un modèle EBT à gradient de déformation non linéaire pour l'analyse de la flexion non linéaire, du post-flambement et des vibrations libres non linéaires des microfaisceaux isotropes. Ils ont souligné l'importance d'inclure la non-linéarité géométrique et les effets de taille dans la bonne conception des microfaisceaux. Rajabi et Ramezani (Rajabi & Ramezani, 2013) a également développé un modèle EBT à gradient de contrainte non linéaire pour les microfaisceaux isotropes, mais l'a appliqué à la flexion statique et aux problèmes de vibrations libres. Le modèle EBT à gradient de déformation non linéaire a été étendu par Mohammadi et Mahzoon (Mohammadi et Mahzoon, 2013) pour inclure les effets de la température sur le post-bouclage des microfaisceaux isotropes. Des solutions analytiques ont également été obtenues pour des microfaisceaux avec différents BC. Vatankhah et al. (Vatankhah et al., 2013) ont utilisé le modèle EBT à gradient de déformation non linéaire pour examiner la vibration forcée non linéaire des microfaisceaux isotropes.

Kahrobaiyan et al. (Kahrobaiyan et al., 2012) ont étendu l'application du modèle EBT à gradient de déformation à l'analyse de la flexion et des vibrations libres des microfaisceaux FG. L'extension de ce modèle aux problèmes de flambement des micropoutres FG a été réalisée par Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2013). Des solutions de forme fermée pour les charges critiques de flambement ont également été obtenues

pour les microfaisceaux FG sous divers BC. Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2013) ont adopté le modèle EBT à gradient de déformation pour examiner la vibration libre longitudinale des microfaisceaux FG. La technique de solution de Rayleigh-Ritz a été utilisée

pour résoudre les fréquences naturelles des microfaisceaux de FG avec des BC serrés et serrés et libres. Rahaeifard et al. (Rahaeifard et al., 2013) ont développé un modèle EBT à gradient de déformation non linéaire pour étudier les influences de la non linéarité géométrique et des paramètres d'échelle de longueur de matériau sur les déflexions et les fréquences naturelles des microfaisceaux simplement supportés par FG.

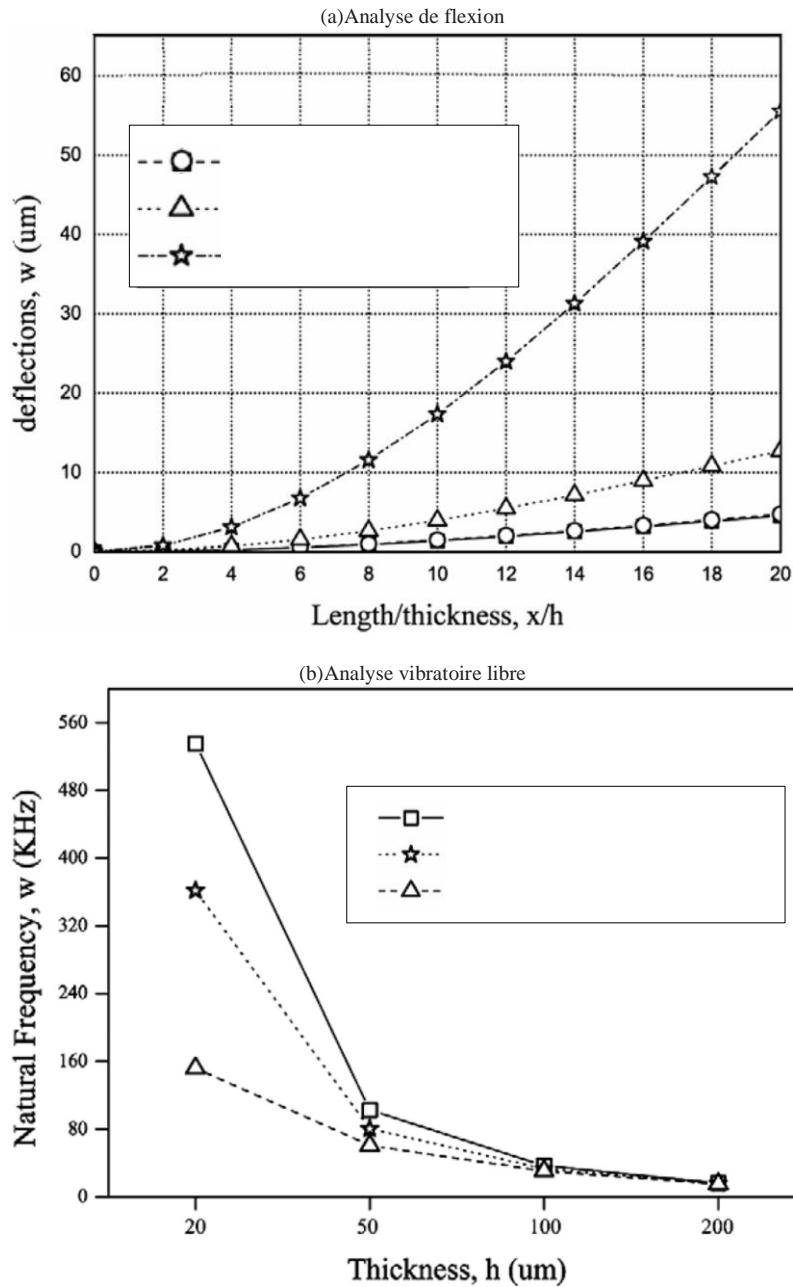


Figure II.8 : Comparaison entre le modèle de gradient de contrainte et le modèle de contrainte de couple pour les micropoutres

II.3.2.2. Modèles de gradient de déformation basés sur le TBT :

Wang et al. (Wang et al., 2010) ont d'abord présenté un modèle TBT à gradient de déformation pour les analyses de flexion statique et de vibration libre de microfaisceaux isotropes simplement supportés. Les modèles TBT à gradient de déformation non linéaire ont été développés par Ansari et al. (Ansari et al., 2012) et Asghari et al. (Asghari et al., 2012) pour des microfaisceaux isotropes utilisant la non linéarité de von Karman. Il convient de noter qu'Ansari et al. (Ansari et al., 2012) ont appliqué leur modèle pour les problèmes de vibrations libres non linéaires, tandis qu'Asghari et al. (Asghari et al., 2012) ont pris en compte à la fois les problèmes de flexion non linéaire et de vibrations libres non linéaires dans leur modèle.

Ansari et al. (Ansari et al., 2011) ont étendu le modèle TBT à gradient de souche aux microfaisceaux FG. Des solutions de forme fermée pour les fréquences naturelles de microfaisceaux simplement supportés ont été dérivées pour étudier les effets de l'indice de gradient de matériau et à petite échelle sur la réponse aux vibrations libres des faisceaux FG. Ansari et al. (Ansari et al., 2013) ont également étendu leur travail (Ansari et al., 2011) à la vibration libre des microfaisceaux FG incurvés. Ansari et al. (Ansari et al., 2013) ont développé un modèle TBT à gradient de déformation pour le flambage thermique de microfaisceaux de FG avec divers BC. Récemment, Ansari et al. (Ansari et al., 2017) ont étendu le modèle TBT à gradient de déformation pour étudier les vibrations linéaires et non linéaires des poutres viscoélastiques fractionnées. Il convient de noter que Gholami et al. (Gholami et al., 2015) ont développé un modèle TBT à gradient de déformation pour examiner la stabilité d'attraction non linéaire et les vibrations des micro-commutateurs FG, mais il était basé sur la forme la plus générale de la théorie du gradient de déformation de Mindlin (Mindlin, 1965) qui n'est pas couverte dans cette revue. L'effet des distributions de température sur les caractéristiques de flambement des microfaisceaux de FG a également été étudié. Xie et al. (Xie et al., 2015) ont utilisé l'approche de collocation de la fonction de base radiale indirecte pour résoudre les modèles EBT et TBT pour les déflexions, les charges de flambement et les fréquences naturelles des microfaisceaux de FG sous divers BC. Il est à

noter que dans les travaux précédents traitant des micropoutres FG, les paramètres de l'échelle de longueur du matériau ont été supposés constants sur toute l'épaisseur. Par conséquent, Tajalli et al. (Tajalli et al., 2013) ont amélioré le modèle TBT à gradient de déformation précédent en tenant compte de la variation du paramètre d'échelle de longueur du matériau sur l'épaisseur de la poutre. Les études de cas sur les problèmes de flexion statique et de vibration libre ont confirmé que l'hypothèse susmentionnée de paramètres d'échelle de longueur de matériau constante semble être inexacte (Tajalli et al., 2013).

Le modèle TBT à gradient de déformation non linéaire a été développé par Ansari et al. (Ansari et al., 2012) pour étudier les influences des paramètres de l'échelle de longueur du matériau et des imperfections géométriques initiales sur la réponse post-bouclage du FG microfaisceaux. Des solutions approximatives pour le flambage des charges de microfaisceaux de FG sous divers BC ont également été présentées en utilisant la méthode DQ. Ansari et al. (Ansari et al., 2013) ont étendu leurs travaux antérieurs (Ansari et al., 2012) pour tenir compte des effets thermiques.

II.3.2.3. Modèles de gradient de déformation basés sur les RBT et HSDT :

Basé sur la théorie du gradient de déformation de Lam et al. (Lam et al., 2003), Wang et al. (Wang et al., 2014) ont reformulé le modèle RBT pour tenir compte de l'effet de taille sur la flexion statique et les réponses aux vibrations libres des microfaisceaux isotropes. Sahmani et Ansari (Sahmani et Ansari, 2013) ont amélioré le modèle RBT à gradient de déformation pour inclure les effets thermiques et le comportement non homogène des matériaux FG sur le flambement des microfaisceaux FG. Le modèle RBT à gradient de déformation a été utilisé par Ansari et al. (Ansari et al., 2014) pour explorer l'effet de taille sur la vibration libre des microfaisceaux de FG simplement supportés. Zhang et al. (Zhang et al., 2014) ont développé un modèle RBT pour les microfaisceaux intégrés de FG basé sur le RBT amélioré de Shi (Shi, 2007). Sahmani et al. (Sahmani et al., 2014) ont développé un modèle RBT à gradient de déformation non linéaire pour la vibration libre non linéaire des microfaisceaux de FG.

En plus du modèle RBT, les modèles HSDT ont également été proposés pour les microfaisceaux à gradient de contrainte basés sur divers HSDT de faisceaux tels que la théorie

sinusoïdale de Touratier (Touratier, 1991), la théorie hyperbolique de Soldatos (Soldatos, 1992) et la théorie de déformation par cisaillement d'ordre n de Xiang et al. (Xiang et al., 2011) (voir le tableau 1 pour le champ de déplacement de ces théories). Par exemple, Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2013) et Lei et al. (Lei et al., 2013) ont proposé des modèles sinusoïdaux de gradient de déformation pour les analyses de flexion et de vibration libre des micropoutres en matériaux isotropes (Akgoz et Civalek, 2013) et des matériaux FG (Lei et al., 2013) basés sur la théorie sinusoïdale de Touratier (Touratier, 1991). Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2014) ont étendu leurs travaux antérieurs (Akgoz et Civalek, 2013) aux problèmes de flambement des microfaisceaux isotropes. Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2014) ont également développé un modèle sinusoïdal de gradient de déformation pour les microfaisceaux de FG comme dans les travaux de Lei et al. (Lei et al., 2013) Ils ont également proposé une nouvelle équation pour calculer le facteur de correction de cisaillement du modèle TBT. Dans leur équation, le facteur de correction de cisaillement est une fonction des paramètres de l'échelle de longueur du matériau. Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2015) ont étendu leurs travaux antérieurs (Akgoz et Civalek, 2014) pour rendre compte de l'interaction entre le micropoutre FG et un milieu élastique. Basé sur la théorie hyperbolique de Soldatos (Soldatos, 1992), Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2015) ont proposé un modèle hyperbolique de gradient de déformation pour les analyses de flexion et de flambement des microfaisceaux isotropes intégrés. Akgoz et Civalek (Akgoz et Civalek, 2016) ont présenté un modèle HSDT unifié pour l'analyse de la flexion des NTC intégrés simplement supportés. Le champ de déplacement du modèle était basé sur Simsek et Reddy (Simsek et Reddy, 2013) qui couvre sept théories de faisceau, y compris l'EBT, le TBT, le RBT, la théorie sinusoïdale de Touratier (Touratier, 1991), la théorie hyperbolique de Soldatos (Soldatos, 1992), la théorie exponentielle de Karama et al. (Karama et al., 2003) et la théorie exponentielle générale d'Aydogdu (Aydogdu, 2009). Zhang et al. (Zhang et al., 2013) ont proposé un modèle HSDT pour les analyses de flexion et de vibration libre des microfaisceaux incurvés FG sur la base de la théorie de déformation par cisaillement d'ordre n de Xiang et al. (Xiang et al., 2011)

II.3.3 Théorie de l'élasticité non locale

La théorie de l'élasticité non locale a été initialement formulée par Eringen (Eringen, 1972 ; Eringen, 1972) et Eringen et Edelen (Eringen & Edelen, 1972) par moyens de l'équation constitutive intégrale comme

$$\sigma_{ij} = \int_x k(|x-\bar{x}, k|) \sigma_{ij}^L dx \quad (\text{II-9})$$

où σ_{ij} et σ_{ij}^L sont les composantes des tenseurs de contrainte non locaux et locaux, respectivement, et k est la fonction noyau déterminée en fonction du paramètre non local k et de la distance de voisinage $|x-\bar{x}|$ dans

laquelle $k = e_0 a$ et e_0 et a sont la constante matérielle et la longueur caractéristique interne, respectivement, c'est-à-dire le paramètre de réseau, la taille granulaire ou le diamètre moléculaire. La valeur de e_0 peut être déterminée soit à partir des expériences ou des simulations. La valeur de e_0 a été calibrée par Huang et al. (Huang et al., 2012) pour la flexion statique analyse des SLGS. Arash et Ansari (Arash & Ansari, 2010) ont également évalué la valeur du paramètre non local pour la vibration libre des SWCNT en comparant les prédictions du modèle de coque FSDT non local avec des simulations DM comme le montre la (figure II.9) Duan et al. (Duan et al., 2013) ont proposé un modèle de la poutre microstructuré pour étalonner le valeur de e_0 pour l'analyse des vibrations libres de poutres non locales. Des expressions analytiques de e_0 ont été obtenues en fonction des propriétés géométriques et des modes de vibration. Zhang et al. (Zhang et al., 2014 ; Zhang et al., 2014 ; Zhang et al., 2015) ont proposé une poutre microstructuré-modèle de grille pour déterminer la valeur de e_0 pour la vibration libre des poutres non locales (Zhang et al., 2014) et flambage et libre vibration des plaques non locales (Zhang et al., 2014). Il a été constaté que la valeur de e_0 varie en fonction de la contrainte initiale, de la rotation inertie, forme du mode et rapport d'aspect des plaques rectangulaires. En général, une estimation prudente de la paramètre pour les SWCNT est $e_0 a < 2,0$ nm (Wang Q, Wang CM, 2007).

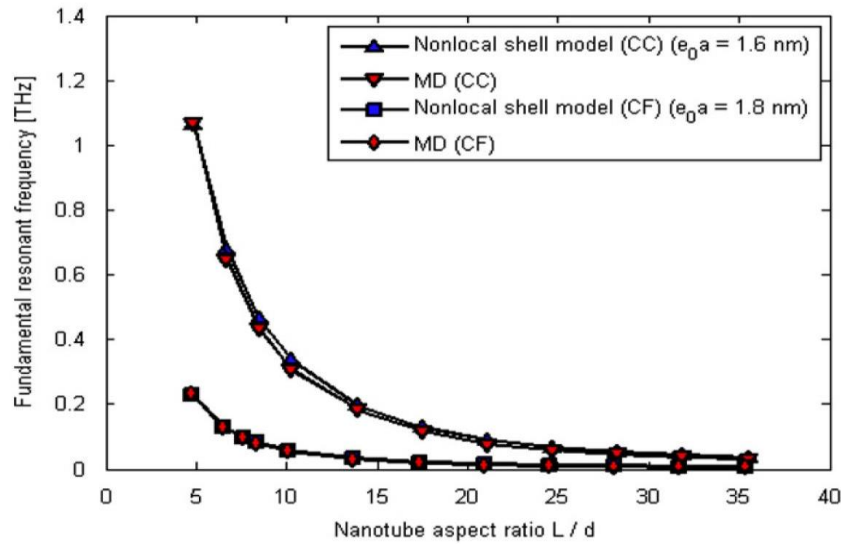


Figure II.9 : Fréquences fondamentales des poutres serrées (CC) et en porte-à-faux (CF)

En considérant une fonction noyau spécifique k , Eringen (Eringen, 1983) a reformulé l'équation constitutive non locale sous forme différentielle comme

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^L \quad \text{(II-10)}$$

où $\mu = k^2$ et ∇^2 est l'opérateur laplacien. La forme explicite de l'Eq. (II-10) peut être écrite pour trois problèmes avec les matériaux isotropes comme suit.

Pour les problèmes unidimensionnels (1D) :

$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx}$ $\sigma_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xz}$	(II-11)
---	---------

Pour les problèmes (2D) :

$\sigma_{xx} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} \right) = \frac{E}{1+\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$ $\sigma_{yy} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) = \frac{E}{1+\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$ $\sigma_{xy} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} \right) = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$ $\sigma_{xz} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y^2} \right) = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xz}$ $\sigma_{yz} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} \right) = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz}$	(II-12)
---	---------

Pour les problèmes (3D) :

$\sigma_{xx} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial z^2} \right) = \frac{E}{1+\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{zz})$ $\sigma_{yy} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial z^2} \right) = \frac{E}{1+\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{zz})$ $\sigma_{zz} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} \right) = \frac{E}{1+\nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$ $\sigma_{xy} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} \right) = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$ $\sigma_{xz} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial z^2} \right) = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xz}$ $\sigma_{yz} - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} \right) = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{yz}$	(II-13)
---	---------

où ε_{ij} sont les composantes du tenseur de déformation ; et E et ν sont le module de Young et Poisson rapport des matériaux, respectivement.

Par rapport au modèle intégral, le modèle différentiel est largement utilisé pour les nanostructures en raison de sa simplicité. Cependant, le modèle différentiel peut donner des résultats paradoxaux dans certains cas, par exemple des problèmes de flexion et de vibration des poutres en porte-à-faux. Plus d'informations sur le comportement paradoxal du modèle différentiel peuvent être trouvées dans (Norouzzadeh et al., 2017 ; Norouzzadeh et Ansari, 2017 ; Fernandez-Saez et al., 2016 ; Challamel et Wang, 2008).

II.3.3.1 Modèles non locaux basés sur l'EBT

Les premiers modèles de poutre non locaux basés sur l'EBT ont été développés par Peddieson et al. (Peddieson et al., 2003) et Sudak (Sudak, 2003). Peddieson et al. (Peddieson et al., 2003) ont appliqué leur modèle pour explorer l'effet de la taille sur le comportement en flexion des nanobalises isotropes, tandis que Sudak (Sudak, 2003) a appliqué son modèle pour étudier le flambement des MWCNT. Depuis les premiers travaux de Peddieson et al. (Peddieson et al., 2003) et Sudak (Sudak, 2003), il y a eu un grand nombre d'articles consacrés à la modélisation des nanopoutres et des NTC à l'aide du modèle EBT non local.

II.3.3.2 Modèles non locaux basés sur le TBT :

Le premier modèle TBT non local a été développé par Wang (Wang, 2005) pour étudier la propagation des ondes dans les NTC. Le modèle tient compte de l'effet de déformation par cisaillement qui devient important dans les CNT courts et trapus. Wang et Varadan (Wang et Varadan, 2006) ont également développé un modèle TBT non local, mais il a été appliqué pour étudier la vibration libre des SWCNT et des DWCNT.

Le modèle TBT non local cohérent a été largement utilisé pour étudier l'effet non local dans les NTC.

II.3.3.3 Modèles non locaux basés sur le RBT

Sur la base des relations constitutives non locales d'Eringen, Reddy (Reddy, 2007) a reformulé la théorie des poutres EBT, TBT, RBT et Levinson pour inclure l'effet non local. Des déclarations variationnelles de quatre modèles ont également été dérivées pour faciliter le développement de modèles EF non locaux. Des solutions de forme fermée pour les fléchissements, les charges de flambement et les fréquences naturelles ont été obtenues pour des poutres simplement supportées.

II.3.3.4. Modèles non locaux basés sur les HSDT :

L'un des premiers modèles HSDT non locaux a été développé par Aydogdu (Aydogdu, 2009) pour les nanobalises isotropes sur la base de la théorie générale de la déformation exponentielle par cisaillement d'Aydogdu (Aydogdu, 2009). Cette théorie est une forme générale de la théorie de la déformation exponentielle par cisaillement de Karama et al. (Karama et al., 2003) (voir le tableau II.1 pour le champ de déplacement). Thai (Thai, 2012) a également proposé un modèle HSDT non local pour les nanobalises isotropes, mais il était basé sur la théorie des plaques raffinée de Shimpi (Shimpi, 2002). Le champ de déplacement de cette théorie est dérivé en divisant les déplacements en parties de cisaillement et de flexion. Tounsi et al. (Tounsi et al., 2013) et Zemri et al. (Zemri et al., 2015) ont étendu le modèle HSDT non local du thaï (Thai, 2012) pour inclure les effets thermiques (Tounsi et al., 2013) et le comportement non homogène des matériaux FG (Zemri et al., 2015).

Thai et Vo (Thai et Vo, 2012) ont développé un modèle HSDT non local pour les nanopoutres isotropes basé sur la théorie de la déformation par cisaillement sinusoïdal de Touratier (Touratier, 1991), tandis que Tounsi et al. (Tounsi et al., 2013) ont proposé un modèle quasi-3D non local pour les nanopoutres isotropes basé sur la théorie sinusoïdale quasi-3D de Thai et Kim (Thai et Kim, 2013) (voir tableau II.2). Il convient de noter que contrairement au modèle HSDT, le modèle quasi-3D est capable de capturer l'effet d'étirement de l'épaisseur qui est significatif dans les membres très épais ou trapus. L'extension du modèle sinusoïdal de Thai et Vo (Thai et Vo, 2012) et du modèle sinusoïdal quasi-3D de Tounsi et al. (Tounsi et al., 2013) aux nanofaisceaux de FG a été faite respectivement par Ahouel et al. (Ahouel et al., 2016) et Chaht et al. (Chaht et al., 2015). Le modèle de Thai et Vo (Thai et Vo, 2012) a également été utilisé par Pour et al. (Pour et al., 2015) et Sadatshojaei et Sadatshojaie (Sadatshojaei et al., 2016) pour prédire les réponses vibratoires non linéaires des SWCNT intégrées dans un milieu élastique.

Berrabah et al. (Berrabah et al., 2013) ont comparé la précision de divers modèles HSDT non locaux dans la prédiction des déflexions, des charges de flambement et des fréquences naturelles des nanopoutres isotropes. Les champs de déplacement de ces modèles HSDT

non locaux ont été tirés du HSDT simple proposé par Thai et Choi (Thai et Choi, 2013) dans lequel les déplacements dans le plan et transversaux sont divisés en composantes de flexion et de cisaillement comme indiqué dans le tableau II.1. Ebrahimi et Barati (Ebrahimi et Barati, 2016) ont développé un modèle HSDT non local unifié pour les nanobalises intégrées FG basé sur le HSDT simple de Thai et Choi (Thai et Choi, 2013). Le modèle a été utilisé pour étudier les influences de l'humidité et de la température sur les caractéristiques de vibration libre des nanofaisceaux incorporés de FG. Mashat et al. (Mashat et al., 2016) ont étudié la vibration et le flambage thermique des nanobalises intégrées sous divers BC à l'aide d'un modèle HSDT non local unifié couvrant l'EBT, le TBT, le RBT et la théorie sinusoïdale. Récemment, Thai et al. (Thai et al., 2017) ont présenté un modèle HSDT non local simple pour les nanobalises isotropes qui n'implique qu'une seule inconnue. Des solutions de forme fermée pour les déflexions et les fréquences naturelles ont également été obtenues pour les nanofaisceaux sous divers BC. Les résultats numériques ont indiqué que la précision de la présente théorie est comparable au modèle TBT non local bien qu'elle n'en ait qu'une inconnue comme dans le cas du modèle EBT non local.

II.3.4 Remarques finales et recommandations pour les études futures :

Le développement de modèles dépendant de la taille pour prédire les effets de la taille sur les réponses globales des structures de poutre à petite échelle a été examiné et discuté de manière approfondie dans cet chapitre, de grands efforts ont été consacrés au développement de modèles dépendants de la taille basés sur une approche de la mécanique du continuum d'ordre supérieur. Cette revue se concentre principalement sur les modèles de poutre dépendant de la taille développés sur la base de la théorie de l'élasticité non locale, de la théorie des contraintes de couple modifiées et de la théorie des gradients de déformation en raison de leur utilisation commun dans la prédiction du comportement global des structures à petite échelle.

L'examen indique que la plupart des modèles dépendant de la taille ont été développés au cours des dernières années. Le nombre de modèles de gradient de déformation est faible par rapport au nombre de modèles développés sur la base de la théorie de l'élasticité non locale et

de la théorie du contrainte de couple modifié. Les modèles des poutres non locaux sont largement utilisés pour analyser des nanostructures telles que les NTC et les feuilles de graphène, tandis que les modèles modifiés de contrainte de couple et de gradient de contrainte sont appliqués aux microstructures.

II.4 Applications et perspectives

L'union entre l'approche multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024) et la prise en compte de l'effet d'échelle (Abbas et al., 2023) (Bažant & Oh, 1983; Mazars, 1991) n'est pas uniquement une démarche théorique. Elle a conduit à des innovations majeures dans le domaine des matériaux cimentaires et des structures en béton. Grâce à ces outils conceptuels et numériques, les chercheurs et ingénieurs peuvent désormais concevoir des bétons aux propriétés adaptées à des besoins spécifiques, tout en tenant compte des contraintes de durabilité (Shen et al., 2020) et d'impact environnemental.

II.4.1 Bétons à ultra-hautes performances (UHPC (Kuder & Roh, 2021) (Richard & Cheyrezy, 1995))

Les UHPC (Kuder & Roh, 2021) (Richard & Cheyrezy, 1995) constituent un exemple emblématique de l'application des connaissances multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024)s.

* **Nano** : optimisation de la densité des C-S-H et réduction de la porosité grâce à des ajouts ultrafins (fumées de silice, nano-silices).

* **Micro** : contrôle de l'ITZ par un choix judicieux des granulats et l'utilisation de superplastifiants.

* **Macro** : conception d'ouvrages minces et légers, à haute résistance mécanique et grande durabilité (Shen et al., 2020).

Les UHPC (Kuder & Roh, 2021) (Richard & Cheyrezy, 1995) atteignent des résistances en compression supérieures à 150 MPa et permettent de réaliser des structures élancées avec une consommation de matériaux réduite.

II.4.2. Bétons intelligents et multifonctionnels

L'approche multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024) a ouvert la voie à une nouvelle génération de bétons dits « intelligents » :

* **Bétons auto-cicatrisants** : grâce à des capsules de bactéries calcifiantes ou des additifs chimiques qui réparent les microfissures.

* **Bétons conducteurs** : intégrant du graphite, des fibres métalliques ou du graphène, capables de chauffer (dégivrage) ou de capter des signaux.

* **Bétons dépolluants** : additionnés de dioxyde de titane (TiO₂), qui catalysent la dégradation des polluants atmosphériques.

Ces innovations répondent à de nouveaux besoins en matière de durabilité (Shen et al., 2020), de maintenance et d'intégration des infrastructures dans un environnement intelligent.

II.4.3. Bétons écopreformants (Scrivener et al., 2018) et durabilité (Shen et al., 2020)

L'effet multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024) permet également de comprendre et d'améliorer la durabilité (Shen et al., 2020) du béton.

* Contrôle de la porosité et de la diffusion ionique à l'échelle nano et micro.

* Optimisation des mélanges pour limiter la perméabilité et accroître la résistance aux environnements agressifs (chlorures, sulfates, cycles gel/dégel).

* Intégration de matériaux recyclés (granulats de démolition, fillers industriels) sans compromettre les performances mécaniques.

Ces approches contribuent à la réduction de l'empreinte carbone du béton, un enjeu majeur dans la lutte contre le changement climatique.

II.4.4. Perspectives futures

À l'avenir, l'intégration des approches multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024)s et non locales pourrait encore transformer la construction :

* **Numérisation et modélisation prédictive** : utilisation de jumeaux numériques intégrant les modèles multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024)s et non locaux pour suivre l'évolution des structures en temps réel.

* **Optimisation topologique** : conception de structures en béton allégées grâce à des calculs

avancés prenant en compte les effets d'échelle.

* **Matériaux bio-inspirés** : développement de bétons imitant les structures naturelles hiérarchiques (os, nacre, bambou).

Ces perspectives montrent que le béton, matériau millénaire, reste au cœur de la recherche scientifique et de l'innovation.

II.5 Conclusion :

L'étude du béton à travers le prisme des approches multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024) et des effets d'échelle met en évidence une réalité fondamentale : le béton n'est pas un matériau homogène et simple, mais un système complexe, hiérarchisé, où chaque niveau structurel – nano, micro, macro – influe sur le comportement global.

L'approche multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024) a permis de comprendre que les performances macroscopiques (résistance, durabilité (Shen et al., 2020), fissuration) dépendent directement de mécanismes initiés aux échelles inférieures : densité des C-S-H au niveau nanométrique, distribution des pores et microfissures au niveau microscopique, interactions entre granulats et pâte cimentaire. Ce dialogue permanent entre échelles conditionne l'évolution mécanique et la longévité des ouvrages.

Parallèlement, l'effet d'échelle (Abbas et al., 2023) (Bažant & Oh, 1983; Mazars, 1991) rappelle que la taille des structures n'est pas neutre : plus une structure est grande, plus sa résistance apparente diminue, en raison de l'influence relative de la zone de processus de fissuration (Vonk, 1993) (FPZ). Ce phénomène, confirmé expérimentalement et théoriquement, impose aux ingénieurs de tenir compte d'une longueur interne caractéristique dans leurs modèles.

Les **approches théoriques avancées**, qu'il s'agisse des modèles de gradient, de l'élasticité non locale ou des formulations mixtes, fournissent aujourd'hui des outils robustes pour intégrer ces phénomènes dans la modélisation numérique. Elles constituent un lien entre les observations expérimentales et les prédictions des logiciels de calcul.

Les applications sont considérables : conception de bétons à ultra-haute performance, développement de bétons intelligents et multifonctionnels, amélioration de la durabilité (Shen

et al., 2020) et réduction de l’empreinte environnementale. L’avenir s’annonce encore plus prometteur avec la perspective de jumeaux numériques, d’optimisation topologique et de matériaux bio-inspirés.

En définitive, l’étude multiéchelle (Kumar & Sahoo, 2024) et l’analyse des effets d’échelle ne sont pas de simples raffinements théoriques : elles transforment la manière de concevoir, de modéliser et de construire avec le béton. Elles ouvrent la voie à une ingénierie plus précise, plus durable et plus responsable, capable de relever les défis du XXI^e siècle.

Tableau II.1 : Champ de déplacement des HSDT

Référence	Champ de déplacement	Fonction de forme	Inconnu
Aydogdu (Aydogdu, 2009) Karamaetal. (Karama et al., 2003) Touratier (Touratier, 1991) Soldatos (Soldatos, 1992)	$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y, t)$ $u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y, t)$ $u_z(x, y, z, t) = w(x, y, t)$	$f(z) = z\alpha^{-\ln\alpha}, \text{ with } \dots \alpha > 0 \dots \dots \dots (\text{Aydogdu}, 2009)$ $f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \dots \dots \dots (\text{Karamaet al.}, 2003)$ $f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \dots \dots \dots (\text{Touratier}, 1991)$ $f(z) = h \sin\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh \frac{1}{2} \dots \dots \dots (\text{Soldatos}, 1992)$	$u, v, w, \varphi_x, \varphi_y$
Shimpi (Shimpi, 2002) Thai et Choi (Thai et Choi, 2013) Darijani et Mohammadabadi (Darijani et Mohammadabadi, 2014)	$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$ $u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}$ $u_z(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t)$	$f(z) = \left[\frac{5}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] z \dots \dots \dots (\text{Shimpi}, 2002)$ $f(z) = \frac{4z^3}{3h^2} \dots \dots \dots (\text{Thaïet Choi}, 2013)$ $f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \dots \dots \dots (\text{Thaïet Choi}, 2013)$ $f(z) = z - h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh \frac{1}{2} \dots \dots \dots (\text{Thaïet Choi}, 2013)$ $f(z) = z - ze^{-2(z/h)^2} \dots \dots \dots (\text{Thaïet Choi}, 2013)$ $f(z) = \frac{z^3}{20h^4} - \frac{z^3}{24h^2} - \frac{63z}{64} + \alpha \dots \dots \dots (\text{Darijaniet Mohammadabadi}, 2014)$	u, v, w_b, w_s
Xiang et al. (Xiang et al., 2011)	$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) - f(z) \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$ $u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) - f(z) \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ $u_z(x, y, z, t) = w(x, y, t)$	$f(z) = \frac{1}{n} \left(\frac{z}{h} \right)^{n-1} z^n, \dots \text{with } \dots n = 3, 5, 7, \dots (\text{Xiang et al.}, 2011)$	$u, v, w, \varphi_x, \varphi_y$

Tableau II.2 : Champ de déplacement des théories quasi-3D

Référence	Champ de déplacement	Fonction de forme	Inconnu
Thai et Kim (Thai et Kim, 2013) Thai et al. (Thai et al., 2014)	$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}$ $u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y}$ $u_z(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) + g(z)w_z(x, y, t)$	$f(z) = z - \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \dots \dots \dots (\text{Thai et Kim, 2013})$ $f(z) = z - h \sin\left(\frac{z}{h}\right) + z \cosh \frac{1}{2} \dots \dots \dots (\text{Thai et al., 2014})$ $g(z) = 1 - f'(z)$	u, v, w_b, w_s, w_z

Remarque : h est l'épaisseur. Pour le modèle de poutre, le déplacement u_y est égal à zéro et tous les déplacements généralisés non nuls sont indépendants de la coordonnée y.

Chapitre III :
Formulation théorique

III. Introduction :

Depuis leur découverte, les nanotubes de carbone (NTC) sont largement reconnus pour leurs qualités exceptionnelles, qui comprennent un module d'élasticité élevé, une résistance à la traction, une faible densité, une résistance et une résistance à la corrosion extraordinaires, et des composites structurels et multifonctionnels à haute performance (Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2013, Daikh et al. 2020a, Alazwari et al. 2021). L'idée initiale des nanotubes de carbone (NTC) en tant que type de nouveau matériau avec d'excellentes propriétés a été proposée par Iijima (Iijima, 1991). L'une des applications importantes des NTC est la conception de nanocapteurs en raison de leurs propriétés mécaniques exceptionnelles, qui conduisent à une gamme de fréquences ultra-élevées atteignable jusqu'à l'ordre du térahertz et à une sensibilité ultra-élevée possible. Les nanotubes de carbone qui peuvent fournir de bonnes liaisons interfaciales ont été utilisés à la place des fibres traditionnelles pour renforcer les phases matricielles dans les composites polymères. Par convention, les composites polymères renforcés par des fibres de carbone, d'aramide, de verre ou de basalte ont de vastes applications dans les conceptions structurelles des composites structurels civils, mécaniques, marins, aérospatiaux et de bien d'autres industries modernes (Yamamoto et al., 2012). Le défi fondamental de la production de composites à base de nanotubes de carbone (CNTRC) est d'améliorer la dispersion et l'alignement des CNT dans une matrice polymère. Cependant, des lacunes existent également. Tout d'abord, ce type de composite renforcé par des fibres est souvent fabriqué sous forme de composites stratifiés avec des orientations de fibres variables dans différentes couches, et des qualités de matériaux inégales peuvent entraîner une délamination. Deuxièmement, le décollement ou les défauts microscopiques entre les fibres et la matrice sont fréquents en raison de leur fraction volumique relativement élevée de charges. En conséquence, la performance globale des éléments structurels est dégradée (Okamoto, 2006).

Les composites renforcés par des charges nanométriques sont devenus une option pour les nouvelles générations de matériaux composites avancés en raison de l'avancement rapide de la technologie des nanomatériaux développés. Contrairement à leurs équivalents à l'échelle du micron, les caractéristiques physiques des nanocomposites peuvent être modifiées à des pourcentages de poids de nanocharge extrêmement faibles. Alors que les zones d'interface entre les nanoparticules et la matrice sont remarquablement plus importantes pour un pourcentage de volume donné. Incorporé dans la matrice, un réseau de CNT aligné, des films minces ou des fils améliorent non seulement les propriétés mécaniques le long de la direction d'alignement, mais affectent également la conductivité thermique et électrique des

nanocomposites dans une direction spécifique. Shen (2009) a incorporé des matériaux à gradient fonctionnel (FGM) dans les nanocomposites en faisant varier la fraction volumique de CNT alignés le long de la direction de l'épaisseur des plaques. Qui peut prévoir que l'élément structurel final aura des propriétés uniques qui peuvent s'adapter en termes de contrôle des vibrations, de durabilité et de conductivités électrique et thermique. Plusieurs méthodes expérimentales et théoriques, telles que la règle de mélange (Alibeigloo, 2014 ; Lin et Xiang, 2014 ; Shen et Xiang, 2012), l'élément de volume représentatif (EVR) et des expériences (King et al. , 2012 ; Salem et al. , 2015 ; Sagar et al., 2015), ont été fournies pour étudier le comportement mécanique des composites renforcés par des CNT et simuler leurs caractéristiques matérielles effectives.

Au cours du vicennal actuel, de nombreuses demandes ont été formulées pour la production de systèmes micro- et nanoélectromécaniques multicouches (MEMS et NEMS) aux propriétés variables qui sont utilisés dans l'environnement thermique (Witvrouw et Mehta, 2005). Par conséquent, plusieurs études se sont concentrées sur les propriétés thermiques (Daikh et al. 2021, Zhao et al. 2022) et mécaniques (Daikh *et al.* 2022, Khadir *et al.* 2021, Bachiri *et al.* 2022, Gia Phi *et al.* 2022, Draï *et al.* 2023, Gholami *et al.* 2023, Tlidji *et al.* 2022, Alazwari *et al.* 2022, Eyvazian *et al.* 2021, Ghandourah *et al.* 2021, Zhao *et al.* 2022, Khadir *et al.* 2021, Esmailzadeh *et al.* 2021, Bouafia *et al.* 2021, Gholami *et al.* 2023, Draï *et al.* 2023) .

En utilisant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et la non-linéarité géométrique de von Kármán,(Rafiee et al. 2013) ont étudié la vibration libre non linéaire de poutres composites renforcées par des nanotubes de carbone avec une couche piézoélectrique sur la surface soumise à un effet combiné de chaleur et de charge électrique. En se basant sur la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT), (Ke et al. 2013) ont étudié l'instabilité dynamique d'une poutre FG-CNTRC monocouche. Ils ont évalué les propriétés matérielles de la poutre FG-CNTRC à l'aide d'une règle de mélange étendue.

Daikh et al. (2022) ont étudié les réponses mécaniques d'une nanopoutre multicouche à support simple renforcée par des CNT sous divers profils de charge en utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement hyperbolique des poutres et une théorie du gradient de contrainte non local. Zhao et al. (2022) ont mis en œuvre la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre pour analyser les caractéristiques de vibration des doubles poutres composites renforcées par des nanotubes de carbone FG dans des environnements thermiques. Chen et al. (2021) ont étudié l'analyse des vibrations d'un tube de transport de fluide renforcé par des nanotubes de carbone à gradient fonctionnel dans un environnement thermique. ont introduit un modèle de nanotube à gradient fonctionnel (FG) transportant un

fluide noyé dans un milieu élastique basé sur la théorie du gradient de contrainte non local en conjonction avec la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Shen et Yang (2013) ont utilisé la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour analyser les vibrations libres, la flexion non linéaire et les poutres post-flambage constituées de composites renforcés par FG-CNTRC sur une fondation élastique. Gia et al. (2022) ont révélé le comportement vibratoire libre non linéaire de micropoutres renforcées avec des couches piézoélectriques. Wu et al. (2017) ont utilisé le FSDT pour étudier le post-flambage thermique de poutres FG-CNTRC dépendantes de la température avec diverses imperfections géométriques. Yas et Samadi (2012) ont étudié les vibrations libres et le flambage des poutres FG-CNTRC Timoshenko en utilisant la méthode de quadrature différentielle étendue (DQM). À la connaissance des auteurs, il n'existe actuellement aucune publication disponible expliquant les comportements de flambage des nanopoutres FG-CNTRC dans diverses conditions aux limites en utilisant une solution analytique basée sur la nouvelle théorie de la déformation par cisaillement et la théorie du gradient de contrainte non local.

La principale contribution de l'étude actuelle est de développer des solutions exactes de flambage dépendant de la taille des nanopoutres composites renforcées par des nanotubes de carbone FG dans le cadre de la théorie de l'élasticité à gradient de contrainte non local. Les propriétés matérielles des FG-CNTRC sont supposées être graduées dans le sens de l'épaisseur et calculées via la règle de mélange étendue. Les équations régissant le problème sont dérivées sur la base du principe de l'énergie potentielle totale. La théorie proposée représente avec précision la distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale sur l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure sans nécessiter de facteurs de correction de cisaillement. Les modèles mathématiques présentés dans ce travail sont validés numériquement en les comparant à la littérature existante pour évaluer leur précision et leur fiabilité. Les analyses de flambage des nanopoutres CNTRC sont menées en tenant compte de divers facteurs tels que les types de poutres, le paramètre d'échelle de longueur non local, le paramètre d'échelle de microstructure à gradient de contrainte, la géométrie, la fraction volumique des nanotubes de carbone et les conditions limites. De plus, de nouveaux résultats sont rapportés dans cette étude, qui peuvent servir de référence pour les recherches futures.

III.1 Formulation mathématique :

Considérons une poutre composite uniforme renforcée par des nanotubes de carbone d'épaisseur h , longueur L , et largeur b fabriqué en mélangeant deux matériaux distincts (SWCNT et une matrice polymère isotrope).

Le système de coordonnées pour une poutre composite renforcée par des nanotubes de carbone est illustré à la Figure III.1a. Les poutres sont supposées avoir quatre modèles de renforcement distincts sur les sections transversales, comme illustré à la Figure III.1b.

Les propriétés matérielles effectives des poutres composites renforcées par des nanotubes de carbone peuvent être estimées à l'aide de la règle du mélange.

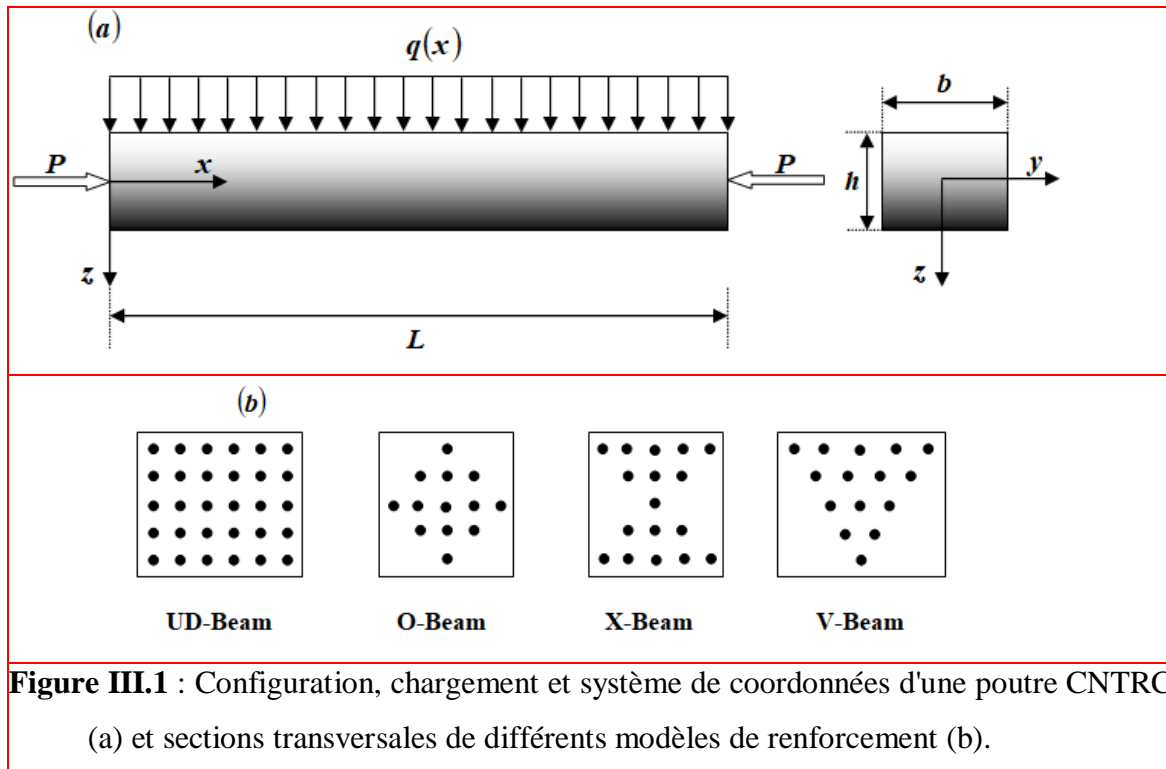


Figure III.1 : Configuration, chargement et système de coordonnées d'une poutre CNTRC (a) et sections transversales de différents modèles de renforcement (b).

Les expressions du module de Young effectif du module de poutre et du module de cisaillement du composite renforcé par des nanotubes de carbone sont donc les suivantes (Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2013) :

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \eta_1 V_{cnt} E_{11}^{cnt} + V_p E^p \\
 \frac{\eta_2}{E_{22}} &= \frac{V_{cnt}}{E_{22}^{cnt}} + \frac{V_p}{E^p} \\
 \frac{\eta_3}{G_{12}} &= \frac{V_{cnt}}{G_{12}^{cnt}} + \frac{V_p}{G^p}
 \end{aligned}
 \tag{III-1}$$

Ici, E_{11} , E_{22} et G_{12} sont respectivement les modules de Young dans la direction x, les modules de Young dans la direction z et le module de cisaillement de la poutre CNTRC, où les indices supérieurs p et cnt se réfèrent aux propriétés de la matrice et des CNT. De plus, V_{cnt} et V_p sont les fractions volumiques pour le nanotube de carbone et la matrice polymère, respectivement, avec la relation de $V_{cnt} + V_p = 1$.

Les paramètres de performance du CNT η_i ($i=1,2,3$) sont introduits pour considérer les propriétés matérielles dépendantes de la taille des SWCNT. Ils peuvent être calculés en comparant les modules élastiques composites renforcés par des nanotubes de carbone estimés par la simulation MD aux résultats numériques estimés par la règle de mélange Wattanasakulpong et Ungbhakorn 2013. En appliquant la même loi, le coefficient de Poisson (ν) et la masse volumique (ρ) des poutres CNTRC s'écrivent comme :

$$\nu = V_{cnt} \nu^{cnt} + V_p \nu^p, \rho = V_{cnt} \rho^{cnt} + V_p \rho^p
 \tag{III-2}$$

où ν^{cnt} , ν^p et ρ^{cnt} , ρ^p sont les coefficients de Poisson et les densités des CNT et de la matrice polymère respectivement. Pour différents motifs de renforcement en nanotubes de carbone répartis sur les sections transversales des poutres comme indiqué sur la figure 1b, les fonctions mathématiques continues utilisées pour décrire les distributions des composants du matériau sont données ci-dessous : Les fractions volumiques de CNT V_{cnt} de divers types des poutres FG-CNTRC tels que représentés sur la Figure II.1b peuvent être exprimés comme suit :

$$V_{cnt}^* = \begin{cases} V_{cnt}^* & \text{UD CNTRC} \\ 4 \frac{|z|}{h} V_{cnt}^* & \text{FG - X CNTRC} \\ 2 \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) V_{cnt}^* & \text{FG - O CNTRC} \\ \left(1 - \frac{2z}{h} \right) V_{cnt}^* & \text{FG - V CNTRC} \end{cases} \quad \text{(III-3)}$$

où FG-V CNTRC, FG-O CNTRC et FG-X CNTRC indiquent les distributions fonctionnellement graduées non uniformes, et UD CNTRC indique la distribution uniforme V_{cnt}^* est la fraction volumique totale des CNT, qui peut être calculée à partir de l'équation suivante Yas et Samadi 2012 :

$$V_{cnt}^* = \frac{W_{cnt}}{W_{cnt} + (\rho^{cnt} / \rho^m)(1 - W_{cnt})} \quad \text{(III-4)}$$

où V_{cnt}^* , ρ^{cnt} et ρ^m sont respectivement la fraction massique des CNT, la densité massique des CNT et la densité massique de la matrice polymère.

Dans cette étude, les paramètres d'efficacité du CNT η_i associé à la fraction volumique donnée V_{cnt}^* sont (Tableau III.1):

Tableau III.1 : Paramètres d'efficacité des CNT.			
V_{cnt}^*	η_1	η_2	η_3
0.12	1.2833	1.0556	1.0556
0.17	1.3414	1.7101	1.7101
0.28	1.3238	1.7380	1.7380

Les paramètres η_i ($i = 1,2,3$) sont les paramètres d'efficacité des CNT.

III.2 Théorie du gradient de déformation non local :

Les théories non locales du gradient de déformation reposent sur la mécanique des milieux continus dépendant de la taille, qui prend en compte les effets d'échelle dans les équations constitutives. Dans le cas des nanostructures, l'effet de la dépendance à la taille ne peut être négligé lors de l'analyse. L'élasticité non locale du gradient de déformation proposée par Lim et al. (2015) donne l'expression du tenseur des contraintes total en fonction du tenseur des contraintes non local standard et du tenseur des contraintes du gradient de déformation :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial x} \quad \text{(III-5)}$$

Où la contrainte $\sigma_{ij}^{(0)}$ correspond à la déformation ε_{kl} et la contrainte d'ordre supérieur $\sigma_{ij}^{(1)}$ correspond au gradient de la déformation $\varepsilon_{kl,x}$ et sont définies par :

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \int_0^L C_{ijkl} \alpha_0(x, x', e_0 a) \varepsilon_{kl}'(x') dx' \quad \text{(III-6a)}$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = l^2 \int_0^L C_{ijkl} \alpha_1(x, x', e_1 a) \varepsilon_{kl,x}'(x') dx' \quad \text{(III-6b)}$$

Dans lequel C_{ijkl} sont les constantes élastiques et $e_0 a$ et $e_1 a$ Considérons les influences du champ de contraintes non local, et l désigne le paramètre d'échelle de longueur du matériau et capture les effets du champ de contraintes du gradient de déformation d'ordre supérieur. Lorsque les fonctions non locales satisfont aux conditions établies par Eringen (1972 ; 1983), la relation constitutive pour une nanopoutre peut être énoncée comme suit :

$$\left(1 - (e_1 a)^2 \nabla^2\right) \left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(1 - (e_1 a)^2 \nabla^2\right) \varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \left(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\right) \nabla^2 \varepsilon_{kl} \quad \text{(III-6c)}$$

Dans lequel ∇^2 désigne l'opérateur laplacien. En supposant $e_1 = e_0 = e$ et en éliminant les termes d'ordre $O\nabla^2$, la relation constitutive générale de l'équation (III-6c) peut être réécrite comme (Eringen 1972 ; Eringen 1983) :

$$\left(1 - (ea)^2 \nabla^2\right) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(1 - (l)^2 \nabla^2\right) \varepsilon_{kl} \quad \text{(III-7)}$$

où $\mu = (ea)^2$ et $\lambda = l^2$

Par ailleurs, les relations constitutives pour un sandwich nanopoutre déformable CNTRC en cisaillement peuvent s'écrire comme

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= C_{11} \left(\varepsilon_{xx} - \lambda \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} &= C_{55} \left(\gamma_{xz} - \lambda \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\tag{III-8}$$

Il est intéressant de noter que l'équation (8) peut être simplifiée pour certains cas intéressants.

III.3 Théorie de l'élasticité non locale :

L'équation constitutive de la théorie de l'élasticité non locale peut être facilement obtenue en posant $\lambda=0$ dans l'équation constitutive du gradient de déformation non locale (8) comme :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= C_{11} \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xz} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} &= C_{55} \gamma_{xz}\end{aligned}\tag{III-9}$$

qui sont identiques à Eringen Eringen (1972b) ; Eringen et Edelen (1972) ; Eringen (1983b).

III.4 Théorie du gradient de déformation

L'équation constitutive de la théorie du gradient de déformation peut être facilement obtenue en posant $\mu=0$ dans l'équation (III-8), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= C_{11} \left(\varepsilon_{xx} - \lambda \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} \right) \\ \sigma_{xz} &= C_{55} \left(\gamma_{xz} - \lambda \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\tag{10}$$

Lequel sont identiques à Aifantis et Willis (2005) ; Aifantis (1992). Il est démontré que l'équation constitutive générale (8) peut expliquer de manière raisonnable les phénomènes dépendant de la taille et qu'il existe un bon accord entre les simulations de dynamique moléculaire et la théorie non locale du gradient de déformation Lim et al. (2015).

III.5 Équation de gouvernance pour les nanopoutres dépendantes de la taille :

Cette étude adopte une théorie de poutre quasi-bidimensionnelle parabolique à déformation de cisaillement pour une nanopoutre CNTRC prenant en compte les déformations de cisaillement transversales. Le champ de déplacement de la théorie proposée est défini sur la base des hypothèses suivantes :

- (1) Le déplacement axial se compose de composantes d'extension, de flexion et de cisaillement ;
- (2) La composante de flexion du déplacement axial est similaire à celle donnée par la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli ;
- (3) La composante de cisaillement du déplacement axial donne lieu à la variation parabolique de la déformation de cisaillement et donc à la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre de telle sorte que la contrainte de cisaillement s'annule sur les surfaces supérieure et inférieure.

Cinématique

Sur la base des hypothèses formulées ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie actuelle peut être obtenu comme suit :

$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x)$ $w(x) = w_0(x)$	(III-11)
--	----------

où $u_0(x)$ représente le déplacement axial ; $w_0(x)$ représente le déplacement transversal d'un point médian de la poutre ; $\varphi_x(x)$ représente la rotation d'une section transversale de la poutre au niveau de l'axe neutre due à une déformation de cisaillement transversal.

La fonction qui illustre la déformation par cisaillement dans le sens de l'épaisseur est présentée à l'étape suivante :

$f(z) = z \left(\frac{\pi + 2 \cos(\pi z/h)}{\pi + 2} \right)$	(III-12)
---	----------

Les composantes de déformation cinématique associées aux déplacements sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + z\varepsilon_{xx}^{(1)} + f(z)\varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \gamma_{xz} &= g(z)\gamma_{xz}^{(0)}\end{aligned}\quad \text{(III-13)}$$

où

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{xx}^{(2)} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xz}^{(0)} = \varphi_x \quad \text{(III-14a)}$$

La fonction $g(z)$ est donné comme suit :

$$g(z) = f'(z) \quad \text{(III-14b)}$$

Énoncés variationnels

Les équations régissant le mouvement en termes de déplacements sont dérivées à l'aide du principe de Hamilton. La version dynamique du principe de déplacement virtuel prend la forme suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad \text{(III-15)}$$

où t représente le temps ; t_1 et t_2 représentent respectivement le temps initial et le temps final ; δU représente la variation virtuelle de l'énergie de déformation ; δV représente la variation du travail effectué par les forces extérieures ; et δK représente la variation virtuelle de l'énergie cinétique.

La variation de l'énergie de déformation de la poutre peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}^{(0)} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}^{(0)} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{xx}^{(1)} \nabla \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}^{(1)} \nabla \delta \gamma_{xz}) dz dx \\ &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} ((\sigma_{xx}^{(0)} - \nabla \sigma_{xx}^{(1)}) \delta \varepsilon_{xx} + (\sigma_{xz}^{(0)} - \nabla \sigma_{xz}^{(1)}) \delta \gamma_{xz}) dz dx + \left[\int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}^{(1)} \nabla \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}^{(1)} \nabla \delta \gamma_{xz}) dz dx \right]_0^L \\ &= \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz} \delta \gamma_{xz}) dz dx + \left[\int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}^{(1)} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xz}^{(1)} \delta \gamma_{xz}) dz dx \right]_0^L\end{aligned}\quad \text{(III-16)}$$

Ici, les champs de force et de moment sont définis à partir des composantes de contrainte comme suit :

$$[N_x, M_x, S_x] = \int_{-h/2}^{h/2} [1, z, f(z)] \sigma_x dz, \quad Q_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \tau_{xz} dz \quad (\text{III-17a})$$

$$[N_x^{(1)}, M_x^{(1)}, S_x^{(1)}] = \int_{-h/2}^{h/2} [1, z, f(z)] \sigma_x^{(1)} dz, \quad Q_{xz}^{(1)} = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \tau_{xz}^{(1)} dz \quad (\text{III-17b})$$

L'énergie de déformation virtuelle peut donc être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L \left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + S_x \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + Q_{xz} \delta \phi_x \right) dx \\ + \left[N_x^{(1)} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^{(1)} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + S_x^{(1)} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + Q_{xz}^{(1)} \delta \phi_x \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

En suivant la même approche pour la variation de l'énergie cinétique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta K = \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz dx \\ = \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \left[\left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + \Psi(z) \dot{\phi}_x \right) \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \Psi(z) \delta \dot{\phi}_x \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx \\ = \int_0^L \left\{ \left(I_0 \dot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + J_1 \dot{\phi}_x \right) \delta \dot{u}_0 \right. \\ \left. + \left(I_0 \dot{w}_0 \right) \delta \dot{w}_0 - \left(I_1 \dot{u}_0 - I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + J_2 \dot{\phi}_x \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \left(J_1 \dot{u}_0 - J_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + K_2 \dot{\phi}_x \right) \delta \dot{\phi}_x \right\} dx \end{aligned} \quad (\text{III-19})$$

où la convention de l'exposant pointé indique la dérivée par rapport à la variable temps t ; et (I_i, J_i, K_i) sont des inerties de masse définies comme

$$(I_0, I_1, I_2, J_0, J_1, J_2, K_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, z^2, \Psi', \Psi, z \Psi, \Psi^2 \right) \rho(z) dz \quad (\text{III-20})$$

La première variation du travail effectué par les forces extérieures réparties q agissant sur la surface supérieure ($z = h/2$) dans la direction normale et la force de compression axiale est donnée par

$$\delta V = \int_0^L q \delta w_0 dx + \int_0^L N_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \delta w dx \quad (\text{III-21})$$

Les équations de base suivantes sont dérivées du principe de variation Eq. (III-15) en introduisant les Eqs [III-(18, 19, 21)] et en procédant à quelques intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 \ddot{\phi}_x \\ \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + q - N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= -I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_0 \ddot{w}_0 + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} \\ \delta \phi_x : \frac{\partial S_x}{\partial x} - Q_{xz} &= J_1 \ddot{u}_0 - J_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + K_2 \ddot{\phi}_x \end{aligned} \quad (\text{III-22})$$

Pour prendre en compte l'effet d'échelle de longueur et de microstructure de la nanobarre, la substitution de l'équation (III-22) dans l'équation constitutive non locale du gradient de déformation décrite par l'équation (III-8) donne :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \left(1 - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + B_{11}^s \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} \right) &= \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + J_1 \ddot{\phi}_x \right] \\ \delta w_0 : \left(1 - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{11}^s \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} \right) &+ \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(q - N_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ &= \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[-I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + I_0 \ddot{w}_0 + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} - J_2 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} \right] \\ \delta \phi_x : \left(1 - \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(B_{11}^s \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - D_{11}^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + H_{11}^s \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - A_{55}^s \phi_x \right) &= \left(1 - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left[J_1 \ddot{u}_0 - J_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} + K_2 \ddot{\phi}_x \right] \end{aligned} \quad (\text{III-23})$$

où les rigidités transversales sont exprimées comme :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z) (1, z, z^2, f(z), z f(z), f(z)^2) dz \quad (\text{III-24a})$$

$$A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55}(z) g(z)^2 dz \quad (\text{III-24b})$$

III.6 Solution analytique :

La solution analytique des équations (III-23) peut être obtenue par la méthode de Galerkin pour les poutres rectangulaires soumises à diverses conditions aux limites. Les expressions des déplacements généralisés peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \frac{\partial X_m}{\partial x} \\ W_m X_m \\ \Psi_{xm} \frac{\partial X_m}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{(III-25)}$$

avec U_m , W_m et Ψ_{xm} être de la paramètres arbitraire. Les fonctions $X_m(x)$ qui satisfont aux conditions aux limites sélectionnées sont définies comme

Pour poutre SS

$$X_m = \sin(\beta x), \beta = \frac{m\pi}{L} \quad \text{(III-26)}$$

Pour poutre CC

$$X_m = 1 - \cos(\beta x), \beta = \frac{2m\pi}{L} \quad \text{(III-27)}$$

Pour poutre CS

$$X_m = [\sin(\beta x)\cos(\beta x) - 1], \beta = \frac{m\pi}{L} \quad \text{(III-28)}$$

En substituant l'équation (III-23) dans l'équation (III-28), on obtient

$$[K_{ij}] \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \Psi_{xm} \end{Bmatrix} = 0, i, j = 1:3 \quad \text{(III-29)}$$

Où

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= A_{11} \left(\int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^5 X_m}{\partial x^5} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \right), K_{12} = -B_{11} \left(\int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^5 X_m}{\partial x^5} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \right) \\
 K_{13} &= B_{11}^s \left(\int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^5 X_m}{\partial x^5} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \right) K_{21} = B_{11} \left(\int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^6 X_m}{\partial x^6} X_m dx \right) \\
 K_{22} &= -F_{11} \left(\int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^6 X_m}{\partial x^6} X_m dx \right) + \bar{N}_x \left(\int_0^L \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} X_m dx - \mu \int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx \right) \\
 K_{23} &= F_{11}^s \left(\int_0^L \frac{\partial^4 X_m}{\partial x^4} X_m dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^6 X_m}{\partial x^6} X_m dx \right) K_{31} = B_{11}^s \left(\int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^5 X_m}{\partial x^5} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \right) \\
 K_{32} &= -F_{11}^s \left(\int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^5 X_m}{\partial x^5} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \right) \\
 K_{33} &= H_{11}^s \left(\int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^5 X_m}{\partial x^5} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \right) - K_{33}^s \left(\int_0^L \left(\frac{\partial X_m}{\partial x} \right)^2 dx - \lambda \int_0^L \frac{\partial^3 X_m}{\partial x^3} \frac{\partial X_m}{\partial x} dx \right)
 \end{aligned} \tag{III-30}$$

Dans la section suivante, la solution théorique proposée est examinée en profondeur pour évaluer sa précision. Cette évaluation fait partie d'une étude complète et systématique qui vise à déterminer la sensibilité de la réponse au flambage. Il est important de noter que le modèle proposé est actuellement limité aux nanopoutres FG-CNTRC à section transversale uniforme. L'analyse considère deux types de conditions aux limites : appui simple (SS) et encastrement double (CC). De plus, le modèle suppose une variation linéaire de la température sur l'épaisseur de la poutre.

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1 Introduction

Les matériaux composites renforcés de nanotubes de carbone à gradient de propriétés (FG-CNTRC) ont émergé ces deux dernières décennies comme une classe de matériaux d'exception, combinant les propriétés exceptionnelles des nanotubes de carbone avec la flexibilité de conception des structures hétérogènes. À l'échelle nanométrique, le comportement mécanique de ces structures révèle des phénomènes complexes qui dépassent les prédictions offertes par la mécanique des milieux continus classique. Le flambement, l'un des modes de défaillance les plus critiques en structures minces et élancées, présente un intérêt particulier pour la conception d'applications nanotechnologiques en aérospatiale, électronique et biotechnologie.

La présente étude s'inscrit dans une démarche interdisciplinaire visant à développer une théorie prédictive robuste pour l'analyse du flambement dépendant de la taille de nanobarreaux composites symétriques et asymétriques. Cette analyse s'appuie sur la théorie du gradient de déformation non local, combinée à une nouvelle théorie trigonométrique des poutres à déformation de cisaillement. L'objectif fondamental est de fournir aux ingénieurs et aux chercheurs un cadre théorique et numérique fiable permettant de prédire avec précision le comportement critique de ces structures avant rupture.

IV.2 Stratégie d'Investigation et Méthodologie Numérique

IV.2.1 Évaluation de la Précision et Validation du Modèle

Cette section présente une série d'exemples numériques systématiquement développés pour évaluer la précision d'une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) quasi-bidimensionnelle appliquée à la résolution du problème de flambement des poutres droites en composite FG-CNTRC. L'approche adoptée repose sur trois piliers méthodologiques

- (i) une comparaison rigoureuse avec les solutions analytiques et numériques existantes dans la littérature ;
- (ii) une analyse paramétrique complète examinant l'influence de divers paramètres matériaux et géométriques sur la réponse structurelle ;
- (iii) une investigation des effets d'échelle, particulièrement importants à l'échelle nanométrique.

L'importance scientifique de cette investigation réside dans le fait que les structures en composite FG-CNTRC, lorsqu'elles sont réduites à l'échelle nanométrique, présentent un intérêt majeur pour les applications d'ingénierie contemporaines, notamment en conception de nanodispositifs et structures légères haute performance.

IV.2.2 Configuration Matérielle et Paramètres d'Entrée :

Les résultats numériques présentés dans cette étude ont été systématiquement générés pour des poutres composées de nanotubes de carbone à paroi unique (SWCNT) de type « fauteuil » (10,10) en tant que phase renforçante, incorporés dans une matrice polymère. Cette configuration a été sélectionnée car elle représente un cas d'étude représentatif et bien étudié dans la littérature scientifique contemporaine.

La charge de flambage critique et les paramètres de fondation élastique sont présentés sous la forme non dimensionnelle suivante :

$$\bar{N}_{x0} = \frac{N_{x0}}{A_{110}}$$

où le coefficient A_{110} est une poutre constituée d'un matériau de matrice pur à température ambiante $T = 300 \text{ K}$.

IV.2.3 Propriétés Matériaux Utilisées :

L'intégralité des études paramétriques présentées ultérieurement a été réalisée en utilisant le polyméthacrylate de méthyle (PMMA) comme phase matricielle, sélectionné pour ses propriétés bien documentées et sa utilisation courante en recherche académique. Les propriétés élastiques du PMMA retenus pour cette analyse sont les suivantes :

Module d'Young de la matrice : $E^P = 2,5 \text{ GPa}$

Coefficient de Poisson de la matrice : $\nu^P = 0,3$

Les renforts, constitués de nanotubes de carbone à paroi simple du type « fauteuil » (10,10), présentent les propriétés matériaux suivantes :

Module d'Young du CNT : $E_{11}^{cnt} = 600 \text{ GPa}$

Module de cisaillement du CNT : $G_{12}^{cnt} = 17,2 \text{ GPa}$

Coefficient de Poisson du CNT : $\nu^{cnt} = 0,19$

Coefficient d'élasticité additionnel : $E_{22}^{cnt} = 10 \text{ GPa}$

La sélection de cette configuration matérielle permet une comparaison directe avec les résultats publiés dans la littérature, assurant ainsi la validité et la reproductibilité de l'investigation présente.

IV.3 Résultats Numériques et Analyse Comparative

IV.3.1 Validation du Modèle Théorique

Conformément aux principes de rigueur scientifique, l'étude débute par une phase de validation comparative. Les résultats numériques de la charge critique de flambement adimensionnelle de la poutre FG-CNTRC, obtenus par l'implémentation des deux théories de poutre raffinées et résolus via la méthode de Galerkin, ont été systématiquement comparés avec les résultats issus des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé antérieurement développées par Daikh et al. (2020b). Cette comparaison révèle un accord remarquable entre les différentes approches, comme l'illustre le Tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Comparaisons de la charge critique de flambement sans dimension pour les poutres SS.

V_{crit}^*	L/h	Configuration du faisceau FG-CNTRC							
		UD		FG-X		FG-O		FG-V	
		Daikh et al. (2020b) [41]	Présent	Daikh et al. (2020b) [41]	Présent	Daikh et al. (2020b) [41]	Présent	Daikh et al. (2020b) [41]	Présent
0,12	10	0,1649	0,1649	0,2016	0,2016	0,1050	0,1050	0,2219	0,2222
	15	0,0986	0,0986	0,1294	0,1294	0,0574	0,0574	0,1450	0,1450
	20	0,0632	0,0632	0,0864	0,0864	0,0351	0,0351	0,0979	0,0980
0,17	10	0,2585	0,2585	0,3170	0,3170	0,1621	0,1621	0,3580	0,3581
	15	0,1504	0,1504	0,1985	0,1985	0,0862	0,0862	0,2263	0,2263
	20	0,0949	0,0949	0,1305	0,1305	0,0520	0,0520	0,1498	0,1498
0,28	10	0,3571	0,3571	0,4113	0,4113	0,2412	0,2412	0,4940	0,4940
	15	0,2201	0,2201	0,2763	0,2763	0,1323	0,1323	0,3282	0,3282
	20	0,1435	0,1435	0,1901	0,1901	0,0811	0,0811	0,2242	0,2242

Cet excellent accord témoigne de manière convaincante de la fiabilité et de la cohérence des méthodes proposées pour prédire de façon précise le comportement au flambement des poutres FG-CNTRC. Il valide également la formulation théorique développée dans le cadre de cette thèse et justifie son utilisation pour les analyses paramétriques ultérieures.

IV.3.2 Influence des Fractions Volumiques et des Motifs de Renforcement

Le Tableau IV.2 présente une analyse systématique de la charge critique de flambement en fonction de la variation du rapport d'épaisseur L/h , en considérant trois fractions volumiques de nanotubes de carbone distinctes et différents modèles de renforcement [distributions (uniforme, FG-X, FG-O et FG-V)].

V_{cnt}^*	L/h	Tableau IV.2 : Comparaisons de la charge critique de flambement sans dimension pour une poutre CC.							
		UD		FG-X		FG-O		FG-V	
		Daikh et al. (2020b)	présent	Daikh et al. (2020b)	présent	Daikh et al. (2020b)	présent	Daikh et al. (2020b)	présent
0,12	10	0,2850	0,2850	0,3154	0,3154	0,2113	0,2112	0,3422	0,3424
	15	0,2168	0,2168	0,2524	0,2524	0,1481	0,1481	0,2751	0,2752
	20	0,1649	0,1649	0,2016	0,2016	0,1050	0,1050	0,2219	0,2218
0,17	10	0,4663	0,4663	0,5114	0,5113	0,3468	0,3468	0,5729	0,5730
	15	0,3470	0,3470	0,4034	0,4034	0,2346	0,2346	0,4529	0,4529
	20	0,2585	0,2585	0,3170	0,3170	0,1621	0,1621	0,3580	0,3581
0,28	10	0,5913	0,5913	0,6127	0,6127	0,4817	0,4817	0,7488	0,7488
	15	0,4596	0,4596	0,5011	0,5011	0,3393	0,3393	0,6064	0,6065
	20	0,3571	0,3571	0,4113	0,4113	0,2412	0,2412	0,4940	0,4941

Les résultats comparatifs qui en découlent révèlent une amélioration progressive et généralisée de la charge critique de flambement pour l'ensemble des configurations géométriques étudiées de poutres FG-CNTRC. Cependant, cette amélioration n'est pas uniformément distribuée. On observe que :

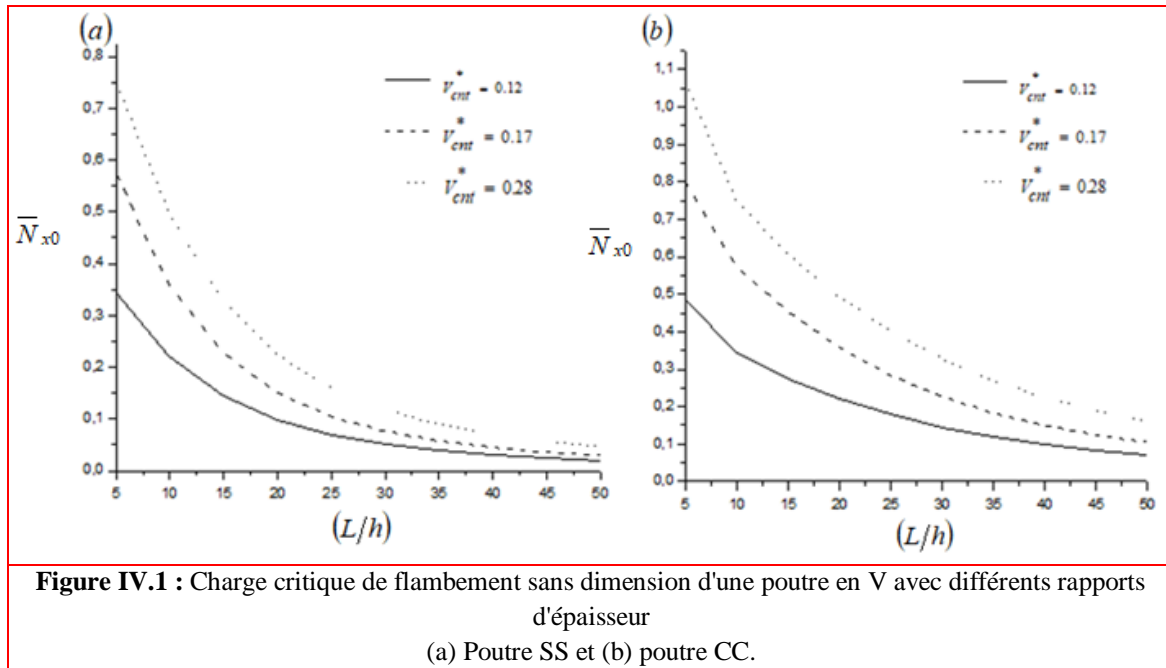
Les charges critiques les plus élevées sont systématiquement observées pour une fraction volumique donnée $V_{cnt}^* = 0.28$, tandis que les valeurs les plus faibles correspondent à une fraction volumique de $V_{cnt}^* = 0.17$

Entre ces extrêmes, une variation quasi-monotone est observée, suggérant une relation fonctionnelle claire entre le taux de renforcement et la résistance au flambement.

D'un point de vue des motifs d'architecture matérielle, les profils de renforcement FG-V présentent les charges critiques de flambement maximales, révélant l'efficacité supérieure d'une distribution volumétrique du renfort. En contraste, la plus faible réaction est observée dans le cas des motifs FG-O, mettant en lumière l'importance cruciale de l'architecture spatiale du renforcement pour la performance structurelle.

IV.3.3 Effets des Conditions aux Limites et de l'Élancement

La Figure IV.1 illustre graphiquement la relation complexe entre la charge critique de flambement adimensionnelle et le rapport d'élancement (L/h), en variant les conditions aux limites (simplement appuyée versus encastree-encastree) et les fractions volumiques de renfort.



Une distinction nette émerge de cette analyse comparative : les résultats numériques obtenus pour une poutre en configuration simplement appuyée sont systématiquement inférieurs à ceux d'une poutre encastree-encastree. Cette observation, parfaitement en accord avec la physique des structures élancées, reflète l'effet bénéfique des conditions d'encastrement dans la retenue des déplacements latéraux.

Les charges maximales demeurent associées à une fraction volumique de $V_{cnt}^* = 0.28$, tandis que les valeurs minimales correspondent à $V_{cnt}^* = 0.17$, corroborant ainsi les conclusions établies au travers du Tableau IV.2.

IV.3.4 Effets Non Locaux et de Gradient de Déformation

Les Tableaux IV.3, IV.4 et IV.5 approfondissent l'analyse en examinant les effets subtils mais significatifs des propriétés non locales et de l'échelle de longueur sur les charges critiques de flambement des nanopoutres FG-CNTRC, en considérant diverses conditions aux limites. Ces investigations révèlent que :

Les nanopoutres encastres-encastres avec une distribution FG-V présentent les valeurs les plus élevées de résistance au flambement, confirmant à l'échelle nanométrique la supériorité de cette architecture.

La charge de flambement augmente monotoniquement avec l'échelle de longueur λ (paramètre d'échelle de longueur du matériau).

Inversement, la charge de flambement diminue avec l'accroissement du paramètre non local μ , reflétant l'effet d'adoucissement induit par les interactions non locales aux échelles réduites.

Tableau IV.3 : Effet des paramètres non locaux et d'échelle de longueur sur la charge de flambement critique de la poutre CNTRC ($L/h = 10, V_{cnt}^* = 0.12$)

μ	λ	SS				CC			
		UD	FG-X	FG-O	FG-V	UD	FG-X	FG-O	FG-V
0	0	0,1649	0,2016	0,1050	0,2222	0,2850	0,3154	0,2112	0,3424
	0,5	0,1730	0,2115	0,1101	0,2332	0,3412	0,3771	0,2530	0,4118
	1	0,1812	0,2215	0,1153	0,2442	0,3975	0,4400	0,2946	0,4809
	1,5	0,1893	0,2314	0,1205	0,2549	0,4537	0,5019	0,3364	0,5470
	2	0,1975	0,2414	0,1257	0,2661	0,5100	0,5640	0,3780	0,6152
0,5	0	0,1572	0,1921	0,1000	0,2116	0,2380	0,2633	0,1764	0,2872
	0,5	0,1649	0,2016	0,1050	0,2222	0,2850	0,3152	0,2112	0,3424
	1	0,1727	0,2111	0,1099	0,2324	0,3319	0,3672	0,2461	0,3995
	1,5	0,1804	0,2206	0,1148	0,2432	0,3789	0,4191	0,2811	0,4552
	2	0,1882	0,2301	0,1198	0,2536	0,4259	0,4714	0,3157	0,5125
1	0	0,1501	0,1835	0,0955	0,2021	0,2043	0,2260	0,1514	0,2449
	0,5	0,1575	0,1926	0,1002	0,2120	0,2446	0,2707	0,1814	0,2951
	1	0,1649	0,2016	0,1050	0,2222	0,2850	0,3152	0,2112	0,3424
	1,5	0,1723	0,2107	0,1097	0,2322	0,3253	0,3599	0,2412	0,3911
	2	0,1797	0,2197	0,1144	0,2421	0,3656	0,4045	0,2711	0,4409
1,5	0	0,1436	0,1756	0,0914	0,1936	0,1790	0,1981	0,1327	0,2151
	0,5	0,1507	0,1842	0,0959	0,2029	0,2143	0,2371	0,1588	0,2586
	1	0,1578	0,1929	0,1004	0,2127	0,2496	0,2764	0,1851	0,3009
	1,5	0,1649	0,2016	0,1050	0,2222	0,2850	0,3154	0,2112	0,3424
	2	0,1720	0,2103	0,1095	0,2318	0,3203	0,3544	0,2375	0,3860
2	0	0,1377	0,1684	0,0876	0,1856	0,1592	0,1760	0,1180	0,1913
	0,5	0,1445	0,1767	0,0920	0,1946	0,1906	0,2109	0,1413	0,2287
	1	0,1513	0,1850	0,0963	0,2037	0,2221	0,2458	0,1647	0,2673
	1,5	0,1581	0,1933	0,1006	0,2131	0,2535	0,2806	0,1879	0,3041
	2	0,1649	0,2016	0,1050	0,2222	0,2850	0,3152	0,2112	0,3424

Tableau IV.4 : Effet des paramètres d'échelle non locaux et de longueur sur la charge de flambage critique de la poutre CNTRC ($L/h = 10, V_{crit}^* = 0.17$)

μ	λ	SS				CC			
		UD	FG-X	FG-O	FG-V	UD	FG-X	FG-O	FG-V
0	0	0,2585	0,3170	0,1621	0,3581	0,4663	0,5113	0,3468	0,5730
	0,5	0,2713	0,3327	0,1701	0,3758	0,5584	0,6123	0,4152	0,6863
	1	0,2841	0,3483	0,1781	0,3934	0,6505	0,7132	0,4836	0,8005
	1,5	0,2968	0,3640	0,1861	0,4111	0,7425	0,8141	0,5521	0,9131
	2	0,3096	0,3796	0,1941	0,4287	0,8346	0,9151	0,6206	1,0249
0,5	0	0,2464	0,3021	0,1545	0,3413	0,3895	0,4270	0,2896	0,4793
	0,5	0,2585	0,3170	0,1621	0,3581	0,4663	0,5113	0,3468	0,5730
	1	0,2707	0,3319	0,1697	0,3748	0,5432	0,5956	0,4039	0,6673
	1,5	0,2829	0,3469	0,1773	0,3917	0,6201	0,6799	0,4611	0,7616
	2	0,2950	0,3618	0,1849	0,4086	0,6970	0,7642	0,5183	0,8570
1	0	0,2353	0,2886	0,1475	0,3260	0,3343	0,3666	0,2486	0,4113
	0,5	0,2469	0,3028	0,1548	0,3419	0,4003	0,4390	0,2977	0,4920
	1	0,2585	0,3170	0,1621	0,3581	0,4663	0,5113	0,3468	0,5730
	1,5	0,2702	0,3313	0,1694	0,3742	0,5323	0,5837	0,3958	0,6537
	2	0,2818	0,3455	0,1766	0,3902	0,5984	0,6561	0,4449	0,7352
1,5	0	0,2252	0,2761	0,1412	0,3119	0,2929	0,3211	0,2178	0,3601
	0,5	0,2363	0,2898	0,1481	0,3272	0,3507	0,3845	0,2608	0,4309
	1	0,2474	0,3034	0,1551	0,3427	0,4085	0,4479	0,3038	0,5020
	1,5	0,2585	0,3170	0,1621	0,3581	0,4663	0,5113	0,3468	0,5730
	2	0,2697	0,3307	0,1690	0,3734	0,5242	0,5747	0,3898	0,6449
2	0	0,2159	0,2648	0,1354	0,2991	0,2606	0,2857	0,1937	0,3201
	0,5	0,2266	0,2778	0,1420	0,3138	0,3120	0,3421	0,2320	0,3835
	1	0,2372	0,2909	0,1487	0,3285	0,3635	0,3985	0,2703	0,4468
	1,5	0,2479	0,3040	0,1554	0,3433	0,4149	0,4549	0,3085	0,5100
	2	0,2585	0,3170	0,1621	0,3581	0,4663	0,5113	0,3468	0,5730

Tableau IV.5 : Effet des paramètres d'échelle non locaux et de longueur sur la charge de flambage critique de la poutre CNTRC ($L/h = 10, V_{crit}^* = 0.28$)

μ	λ	SS				CC			
		UD	FG-X	FG-O	FG-V	UD	FG-X	FG-O	FG-V
0	0	0,3571	0,4113	0,2412	0,4940	0,5913	0,6127	0,4817	0,7488
	0,5	0,3747	0,4316	0,2531	0,5183	0,7080	0,7336	0,5768	0,8966
	1	0,3924	0,4519	0,2650	0,5428	0,8247	0,8546	0,6719	1,0445
	1,5	0,4100	0,4722	0,2769	0,5672	0,9415	0,9755	0,7670	1,1925
	2	0,4276	0,4925	0,2888	0,5915	1,0582	1,0965	0,8621	1,3399
0,5	0	0,3403	0,3920	0,2298	0,4707	0,4938	0,5117	0,4023	0,6248
	0,5	0,3571	0,4113	0,2412	0,4940	0,5913	0,6127	0,4817	0,7488
	1	0,3739	0,4307	0,2525	0,5172	0,6888	0,7137	0,5612	0,8724
	1,5	0,3907	0,4500	0,2639	0,5404	0,7863	0,8147	0,6406	0,9950
	2	0,4075	0,4694	0,2752	0,5637	0,8837	0,9157	0,7200	1,1193
1	0	0,3250	0,3744	0,2195	0,4497	0,4239	0,4393	0,3454	0,5364
	0,5	0,3411	0,3928	0,2303	0,4718	0,5076	0,5260	0,4136	0,6423
	1	0,3571	0,4113	0,2412	0,4940	0,5913	0,6127	0,4817	0,7488
	1,5	0,3732	0,4298	0,2520	0,5162	0,6750	0,6994	0,5499	0,8549
	2	0,3892	0,4483	0,2628	0,5383	0,7587	0,7861	0,6181	0,9608
1,5	0	0,3111	0,3583	0,2101	0,4303	0,3714	0,3848	0,3026	0,4703
	0,5	0,3264	0,3760	0,2204	0,4516	0,4447	0,4608	0,3623	0,5632
	1	0,3418	0,3936	0,2308	0,4727	0,5180	0,5367	0,4220	0,6554
	1,5	0,3571	0,4113	0,2412	0,4940	0,5913	0,6127	0,4817	0,7488
	2	0,3725	0,4290	0,2515	0,5152	0,6646	0,6886	0,5415	0,8412
2	0	0,2982	0,3435	0,2014	0,4125	0,3304	0,3423	0,2692	0,4184
	0,5	0,3130	0,3605	0,2113	0,4329	0,3956	0,4099	0,3223	0,5006
	1	0,3277	0,3774	0,2213	0,4533	0,4608	0,4775	0,3755	0,5836
	1,5	0,3424	0,3944	0,2312	0,4737	0,5261	0,5451	0,4286	0,6664
	2	0,3571	0,4113	0,2412	0,4940	0,5913	0,6127	0,4817	0,7488

IV.3.5 Compétition Entre Effets Non Locaux et Gradient de Déformation

La Figure IV.2 constitue une contribution graphique majeure à la compréhension des phénomènes physiques dominants. Elle illustre systématiquement l'influence du rapport d'épaisseur (L/h) entre une nanopoutre simplement appuyée et une poutre FG-V encastree, en faisant varier les paramètres non locaux (μ) et de gradient de déformation (λ).

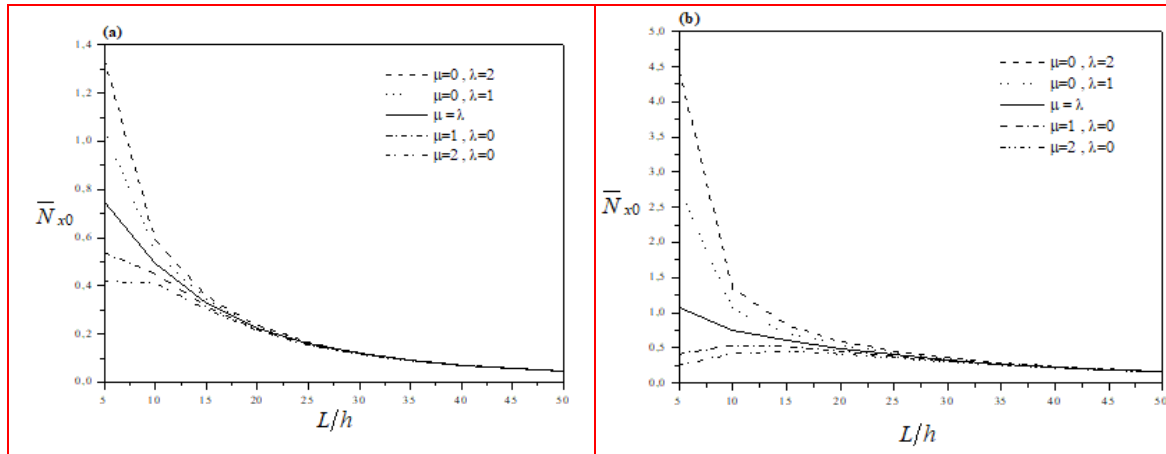


Figure IV.2 : Effet des paramètres d'échelle non locale et de longueur sur la charge de flambement sans dimension de la poutre en V ($V_{crit}^* = 0.28$): (a) poutre simplement appuyée, (b) poutre serrée-serrée.

Cette analyse révèle une compétition fondamentale et nuancée entre deux mécanismes physiques antagonistes :

Régime d'adoucissement par effet non local (lorsque $\mu > \lambda$) :

Lorsque l'effet non local est prédominant, les charges de flambement adimensionnelles obtenues sont inférieures à celles prédites par la théorie classique du milieu continu. Physiquement, cet effet traduit une diminution de la rigidité effective de la structure : la nanopoutre est progressivement « adoucie » et se déforme plus facilement. Cette transition vers un comportement plus compliant reflète l'émergence de phénomènes quantiques et de couplage interatomique aux très petites échelles.

Régime de durcissement par gradient de déformation (lorsque $\lambda > \mu$) :

À l'inverse, lorsque l'effet du gradient de déformation devient prédominant, le flambement critique est supérieur à celui prédit par la théorie classique, induisant un durcissement apparent de la structure. La nanopoutre devient plus rigide et résiste mieux à la flambement, requérant des charges externes supérieures pour initier l'instabilité.

Dépendance en fonction du rapport d'élancement :

De façon remarquable, avec l'augmentation du rapport d'élancement (géométrie plus mince et plus élancée), la charge de flambement adimensionnelle diminue lorsque $\mu > \lambda$ (régime non local) et augmente lorsque $\lambda > \mu$ (régime de gradient), un comportement contraire à la réponse au flambement observée en mécanique classique. Cette inversion de tendance constitue une signature caractéristique des phénomènes d'échelle nanométrique.

Convergence asymptotique :

L'analyse quantitative révèle également que les différences quantitatives entre les résultats prédits par la théorie classique du continu et ceux issus de la théorie du gradient de déformation non local sont particulièrement significatives pour les faibles valeurs du rapport d'élanement. Cependant, ces écarts diminuent progressivement et convergent vers les prédictions classiques avec l'augmentation de ce rapport, manifestant la transition progressive des phénomènes d'échelle vers le régime classique macroscopique.

Des investigations parallèles concernant la réponse dynamique, basées sur la même théorie du gradient de déformation non local (Lu et al., 2017), ont conduit à des conclusions phénoménologiques similaires, confortant ainsi la robustesse et l'universalité des mécanismes physiques identifiés.

IV.4 Synthèse des Conclusions et Implications Scientifiques

IV.4.1 Principales Constatations

À l'issue de cette investigation systématique et multifacette de l'analyse du flambement dépendant de la taille de nanopoutre composites renforcés par des nanotubes de carbone (CNTRC), plusieurs conclusions essentielles émergent :

1. Validation et Fiabilité du Modèle Théorique

La formulation théorique développée dans le cadre de cette thèse, fondée sur la théorie du gradient de déformation non local associée à une théorie trigonométrique de déformation de cisaillement, démontre un excellent accord avec les résultats analytiques disponibles dans la littérature scientifique. Cette concordance valide de façon rigoureuse l'approche méthodologique adoptée et justifie l'application de ce modèle à des configurations structurelles complexes.

2. Dépendance Paramétrique Multifactorielle

La réponse de flambement de la nanopoutre FG-CNTRC dépend largement et de façon non-linéaire du paramètre non local μ , du paramètre de gradient de déformation λ , et du rapport d'élanement structurel. Crucialement, cette dépendance est suffisamment prononcée pour induire des changements qualitatifs dans le comportement de la structure, dépassant les variations quantitatives usuelles observées en mécanique classique.

3. Mécanismes d'Adoucissement Dépendant de l'Échelle

Lorsque la valeur du paramètre non local μ augmente progressivement, on observe une escalade systématique de la déflexion adimensionnelle, tandis que simultanément la charge critique de flambement adimensionnelle et la fréquence propre de vibration diminuent. Cet ensemble de phénomènes couplés reflète un mécanisme d'adoucissement structural dépendant de l'échelle nanométrique.

4. Dualité Rigidité : Adoucissement versus Durcissement

La structure nanométrique peut présenter soit un effet d'adoucissement de la rigidité, soit un effet de durcissement de la rigidité, selon les magnitudes relatives du paramètre non local et du paramètre d'échelle de longueur du matériau. Cette dualité mécanique constitue une signature distinctive des phénomènes d'échelle nanométrique et démontre l'inadéquation de la mécanique classique pour ces régimes.

IV.4.2 Implications pour la Conception d'Ingénierie

Les résultats établis au cours de cette investigation portent des implications substantielles pour la conception d'applications nanotechnologiques :

Sélection d'Architecture Matérielle : La supériorité démontrée des distributions FG-V par rapport aux autres motifs de renforcement (particulièrement FG-O) fournit une orientation claire pour les ingénieurs dans la sélection des architectures matérielles optimales.

Optimisation de Fractions Volumiques : L'identification d'une fraction volumique optimale (V_{cnt}^*) offre un point de départ quantitatif pour les stratégies d'optimisation matérielle.

Prédiction de Seuils Critiques : La théorie novatrice développée permet une prédiction précise des seuils critiques de flambement, essentielle pour éviter les défaillances catastrophiques en service.

IV.4.3 Portée et Limitations de l'Étude

La présente théorie novatrice s'avère non seulement précise mais également élégamment simple pour prédire l'analyse du flambement dépendant de la taille de nanobarreaux composites symétriques et asymétriques renforcés de nanotubes de carbone (CNTRC). Cependant, les chercheurs et ingénieurs doivent demeurer conscients que :

L'applicabilité directe se limite à des géométries quasi-unidimensionnelles (poutres et barreaux).

Les effets de température, bien que considérés en paramètres de référence, ne sont pas systématiquement explorés dans les analyses paramétriques.

Les régimes non linéaires de grande déformation demeurent en dehors du cadre théorique actuel.

Ces limitations constituent autant de perspectives futures pour l'approfondissement et l'extension du présent cadre théorique.

IV.5 Perspectives et Directions Futures

Les investigations menées dans ce chapitre ouvrent plusieurs directions prometteuses pour la recherche future :

Extension aux Structures Bidimensionnelles et Tridimensionnelles : Transposer la théorie développée à des plaques et coques composites FG-CNTRC.

Intégration des Effets Thermiques : Développer une analyse couplée thermo-mécanique considérant les variations de propriétés matériaux en fonction de la température.

Investigation Expérimentale : Conduire des essais expérimentaux de flambement sur des nanostructures FG-CNTRC pour valider les prédictions théoriques.

Optimisation Structurelle Multiphysique : Exploiter le cadre théorique pour développer des stratégies d'optimisation intégrant flambement, vibration, et dissipation énergétique.

Chapitre V :
Analyse des vibrations
libres des nanocoques

**Analyse des vibrations libres des nanocoques à double courbure à gradient fonctionnel
basée sur la théorie de déformation par cisaillement non locale du premier ordre à
paramètres non locaux variables**

V.1. Introduction

Les poutres, plaques et coques constituent des éléments structurels fondamentaux largement utilisés dans de nombreux domaines de l'ingénierie et de l'industrie. Une compréhension approfondie de leur comportement mécanique et thermique demeure ainsi un enjeu scientifique majeur. Ces structures ont été analysées à l'aide de différentes théories de déformation par cisaillement, incluant la théorie classique, la théorie du premier ordre, la théorie du troisième ordre, ainsi que diverses théories d'ordre supérieur et quasi-tridimensionnelles. Par ailleurs, des approches analytiques et numériques ont été largement mises en œuvre pour résoudre les équations régissant leur comportement dynamique.

Traditionnellement, les structures mécaniques sont fabriquées à partir de matériaux conventionnels tels que le bois ou le métal. Cependant, au cours des dernières décennies, de nouveaux matériaux, notamment les composites, les matériaux à gradient fonctionnel et les matériaux hybrides, ont été développés afin de réduire la dépendance aux ressources naturelles tout en améliorant les performances mécaniques. Parmi ces matériaux avancés, les matériaux à gradient fonctionnel occupent une place particulière.

Introduits initialement par des chercheurs japonais dans les années 1980, les matériaux à gradient fonctionnel se caractérisent par une variation continue de leurs propriétés mécaniques selon une ou plusieurs directions, en fonction des fractions volumiques de leurs constituants. Cette particularité confère à ces matériaux un rapport résistance/poids supérieur à celui des composites conventionnels. De nombreux travaux ont ainsi été consacrés à l'analyse du comportement statique et dynamique des poutres, plaques et coques en matériaux à gradient fonctionnel.

Avec le développement des micro- et nanotechnologies, les matériaux à gradient fonctionnel sont désormais employés dans des structures de très petite taille, telles que les systèmes micro- et nano-électromécaniques ainsi que les films minces utilisés dans le domaine biomédical. À ces échelles, les effets de taille deviennent prépondérants et ne peuvent être négligés. De ce fait, plusieurs théories constitutives dépendantes de la taille ont été proposées, parmi lesquelles la théorie des contraintes de couple, la théorie de l'élasticité non locale, la théorie du gradient de déformation et la mécanique des doublets.

Parmi ces approches, la théorie de l'élasticité non locale a suscité un intérêt considérable en raison de sa capacité à capturer les effets de taille à l'échelle nano. Toutefois, la majorité des travaux existants repose sur l'hypothèse d'un paramètre non local constant, ce qui peut conduire à des résultats imprécis dans le cas des structures à gradient fonctionnel, dont les propriétés matérielles varient à travers l'épaisseur. Il apparaît ainsi nécessaire de développer une formulation non locale modifiée prenant en compte la variation des paramètres non locaux. C'est dans cette perspective que s'inscrit la présente étude, consacrée à l'analyse des vibrations libres des nanocoques à double courbure en matériaux à gradient fonctionnel.

V.2. Formulation théorique

V.2.1. Nanocoques à double courbure en matériaux à gradient fonctionnel

On considère une nanocoque peu profonde à double courbure constituée d'un matériau à gradient fonctionnel résultant du mélange continu de phases céramique et métallique. La géométrie de la structure est définie par deux rayons principaux de courbure associés aux directions longitudinales. (figure V.1).

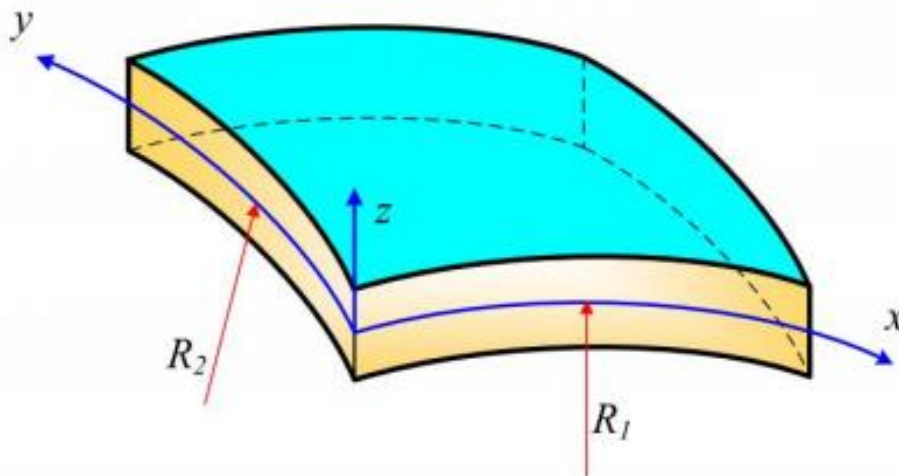


Figure V.1 : La géométrie des nanocoques peu profondes à double courbure FG

En modifiant les composantes de la courbure des coques, on peut obtenir différents types de structures de coques :

Pour $R_1 = R_2 \rightarrow \infty$: la coque devient une plaque plane (plaque FL) ;

Pour $R_1 = R_2$: la coque devient une coque sphérique (coque SP) ;

Pour $R_1 = -R_2$: la coque devient une coque parabolique hyperbolique (coque HP).

Pour $R_2 \rightarrow \infty$: la coque devient cylindrique (coque CY).

Ces quatre types de structures de coque sont illustrés sur la figure V.2.

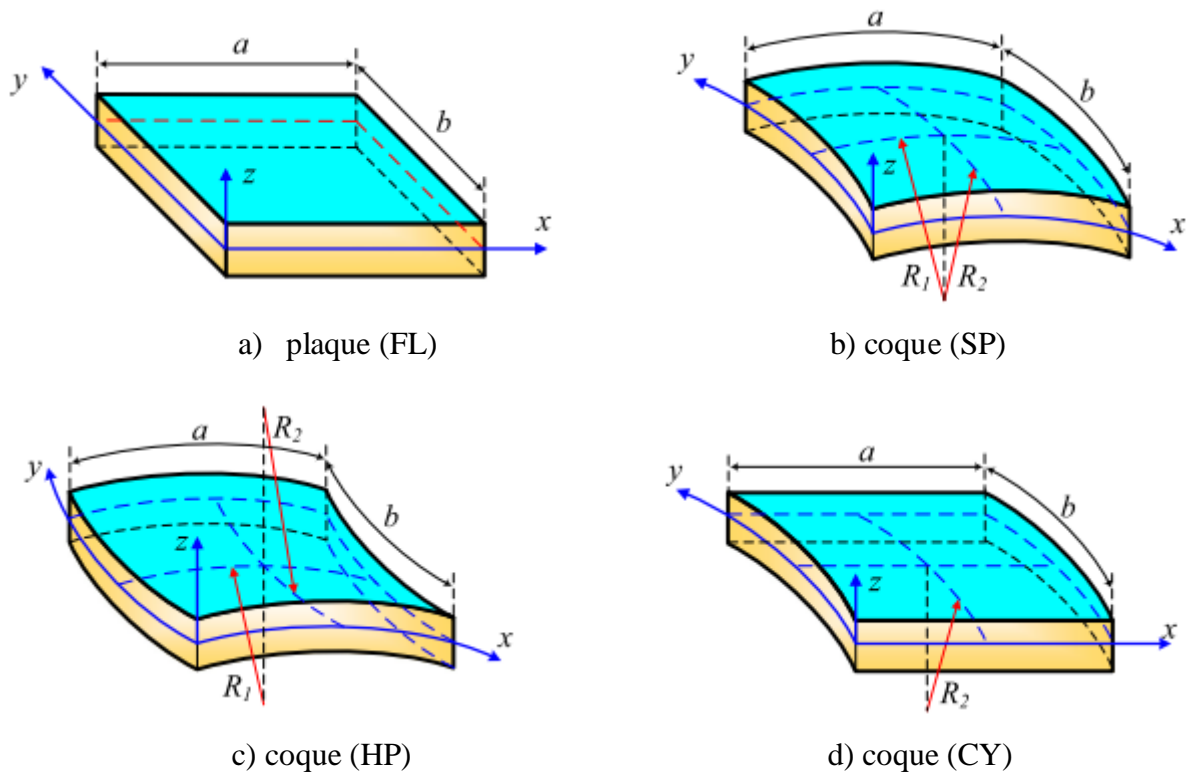


Figure V.2 : Quatre types de coques FG à double courbure.

En fonction des valeurs de ces rayons, la structure peut se réduire à différents cas particuliers, tels qu'une plaque plane, une coque sphérique, une coque parabolique hyperbolique ou une coque cylindrique.

Le matériau à gradient fonctionnel est supposé continu à travers l'épaisseur de la nanocoque, avec une évolution progressive de la microstructure depuis la phase céramique jusqu'à la phase métallique. Les propriétés effectives du matériau, notamment le module de Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson, varient ainsi graduellement selon l'épaisseur en fonction de la fraction volumique des constituants.

Conformément à la règle des mélanges, les propriétés effectives du matériau sont évaluées à partir des fractions volumiques des phases céramique et métallique, lesquelles sont définies par une loi de puissance dépendant d'un indice non négatif caractérisant le profil de variation du matériau à gradient fonctionnel.

$$\begin{aligned}
 E(z) &= E_c V_c(z) + E_m V_m(z) \\
 \rho(z) &= \rho_c V_c(z) + \rho_m V_m(z) \\
 \nu(z) &= \nu_c V_c(z) + \nu_m V_m(z)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

où V_c et V_m représentent les fractions volumiques des composants céramiques et métalliques, calculées comme suit

$$\begin{aligned}
 V_c(z) &= \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \\
 V_m(z) &= 1 - V_c(z)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

où k est un facteur non négatif et définit le profil de variation du matériau FG selon l'épaisseur.

V.2.2. Théorie de déformation par cisaillement du premier ordre

V.2.2.1. Cinématique

Le champ de déplacements des nanocoquilles est décrit à l'aide de la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre. Cette approche permet de prendre en compte les effets de cisaillement transversal, tout en conservant une formulation cinématique relativement simple.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Dans le cas des coques peu profondes, les composantes de la courbure sont intégrées explicitement dans l'expression des déformations.

Les champs de déformation résultants sont ensuite exprimés sous une forme compacte, facilitant l'établissement des relations constitutives et des équations du mouvement.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R_1} + \varphi_x \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R_2} + \varphi_y
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Sous forme abrégée

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Dans lequel

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_1} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{u}{R_1} + \varphi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{v}{R_2} + \varphi_y \end{Bmatrix}$$

V.2.2.2. Relations constitutives non locales

À l'échelle micro- et nanométrique, les effets de taille jouent un rôle déterminant dans le comportement mécanique des structures. Afin de modéliser ces effets, la théorie de l'élasticité non locale, initialement proposée par Eringen, est adoptée. Cette théorie établit une relation entre les contraintes locales et non locales à l'aide d'un paramètre non local et d'un opérateur différentiel.

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = t_{ij} \quad (7)$$

Dans sa formulation classique, la théorie de l'élasticité non locale dérivée repose sur l'hypothèse d'un paramètre non local constant, ce qui la rend principalement adaptée aux matériaux isotropes et homogènes. Toutefois, dans le cas des nanocoquilles en matériaux à gradient fonctionnel, les propriétés matérielles, y compris le paramètre non local, varient selon l'épaisseur.

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} = (1 - \mu(z) \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} t_{yz} \\ t_{xz} \end{Bmatrix} = (1 - \mu(z) \nabla^2) \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Où

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} = \Lambda_{22} &= \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \nu(z)\Lambda_{11}, \\ \Lambda_{44} = \Lambda_{55} = \Lambda_{66} &= \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]} \end{aligned} \quad (10)$$

Dans cette étude, il est supposé que le paramètre non local varie à travers l'épaisseur de la nanocoquille de manière similaire aux autres propriétés du matériau. Un paramètre non local effectif est ainsi défini à partir d'une expression intégrale pondérée par les propriétés locales du matériau. Cette approche constitue l'élément novateur du présent travail.

$$\mu(z) = \mu_c V_c(z) + \mu_m V_m(z) \quad (11)$$

Lorsque le paramètre non local est supposé constant ($\mu(z) = \mu_m = \mu_c = \mu = \text{const}$), la formulation proposée se réduit à la théorie classique de l'élasticité non locale. Il est également montré que le paramètre non local effectif dépend de l'indice de loi de puissance, soulignant l'influence directe de la distribution des phases matérielles sur les effets de taille.

V.2.3. Équations du mouvement

La formulation des équations du mouvement régissant le système est établie à partir de la forme variationnelle du principe de Hamilton. Ce principe s'écrit sous la forme générale suivante, où la variation de l'énergie totale du système est nulle.

$$0 = \int_0^T (\delta U - \delta K) dt \quad (12)$$

Dans cette formulation, (δU) représente la variation de l'énergie de déformation, tandis que (δK) désigne la variation de l'énergie cinétique associée au mouvement de la coque.

L'expression analytique de la variation de l'énergie de déformation de la nanocoquille est donnée par la relation suivante, qui prend en compte les contributions des efforts membranaires, des moments de flexion et des efforts tranchants.

$$\delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dz dA \quad (13)$$

De manière analogue, la variation de l'énergie cinétique de la nanocoquille est exprimée à partir des champs de déplacements et de leurs dérivées temporelles, conformément à la formulation dynamique adoptée.

$$\delta K = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}) \rho(z) dz dA \quad (14)$$

En substituant l'expression du champ de déplacements donnée par l'équation (4) dans la variation de l'énergie de déformation (équation (13)), puis en introduisant l'expression correspondante dans la variation de l'énergie cinétique (équation (14)), et en tenant compte des relations constitutives non locales définies par les équations (8) et (9), les équations différentielles régissant le mouvement des nanocoques sont déduites à partir de l'équation variationnelle (12).

$$\begin{aligned} \delta u : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{Q_x}{R_1} &= I_0 \ddot{u} + I_1 \ddot{\phi}_x - \nabla^2 (J_0 \ddot{u} + J_1 \ddot{\phi}_x) \\ \delta v : \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{Q_y}{R_2} &= I_0 \ddot{v} + I_1 \ddot{\phi}_y - \nabla^2 (J_0 \ddot{v} + J_1 \ddot{\phi}_y) \\ \delta w : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_x}{R_1} - \frac{N_y}{R_2} &= I_0 \ddot{w} - \nabla^2 (J_0 \ddot{w}) \\ \delta \varphi_x : \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_1 \ddot{u} + I_2 \ddot{\phi}_x - \nabla^2 (J_1 \ddot{u} + J_2 \ddot{\phi}_x) \\ \delta \varphi_y : \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= I_1 \ddot{v} + I_2 \ddot{\phi}_y - \nabla^2 (J_1 \ddot{v} + J_2 \ddot{\phi}_y) \end{aligned} \quad (15)$$

Les équations du mouvement obtenues prennent la forme d'un système d'équations couplées, dans lesquelles apparaissent explicitement les effets de la non-localité ainsi que les contributions liées aux efforts internes de la nanocoque.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \\ \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} t_{xz} \\ t_{yz} \end{Bmatrix} dz \end{aligned} \quad (16)$$

Dans ces équations, (N_i) , (M_i) et (Q_i) représentent respectivement les résultantes locales des efforts membranaires, des moments de flexion et des efforts tranchants. Ces grandeurs sont définies à partir des champs de contraintes correspondants et sont calculées selon les relations usuelles de la théorie des coques.

En substituant les relations constitutives non locales données par les équations (8) et (9) dans l'expression des résultantes (équation (16)), puis en intégrant sur l'épaisseur de la

nanocoquille, on obtient les expressions explicites des résultantes généralisées.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{55} & 0 \\ 0 & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Où

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{22}, \Lambda_{66}) dz \\ (B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{22}, \Lambda_{66}) z dz \\ (D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, \Lambda_{22}, \Lambda_{66}) z^2 dz \\ (S_{44}, S_{55}) &= \int_{-h/2}^{h/2} K_s (\Lambda_{44}, \Lambda_{55}) dz \end{aligned} \quad (19)$$

Les expressions obtenues font intervenir des coefficients intégrés notés I_0, I_1, I_2 et J_0, J_1, J_2 , qui dépendent à la fois des propriétés matérielles et de la variation spatiale du paramètre non local à travers l'épaisseur.

$$\begin{aligned} (I_0, I_1, I_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz \\ (J_0, J_1, J_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \mu(z)\rho(z) (1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (20)$$

Étant donné que le paramètre non local effectif est supposé varier de manière continue selon la coordonnée d'épaisseur dans le cas des nanocoquilles FG, ces coefficients sont calculés à l'aide des expressions intégrales correspondantes.

Il est à noter que lorsque le paramètre non local est supposé constant à travers l'épaisseur,

c'est-à-dire lorsque $(z) = \mu m = \mu c = \mu = \text{const}$, les coefficients précédents se simplifient et prennent la forme donnée par l'équation (21).

$$(J_0, J_1, J_2) = \mu (I_0, I_1, I_2) \quad (21)$$

Dans ce cas particulier, les équations du mouvement obtenues à partir de l'équation (15) se réduisent aux équations classiques régissant le comportement dynamique des nanocoques FG conventionnelles, caractérisées par un paramètre non local constant.

V.3. Solution analytique

Plusieurs méthodes analytiques permettent de résoudre les équations du mouvement des nanocoques à gradient fonctionnel. Dans la présente étude, une nanococque simplement appuyée est considérée, ce qui permet l'utilisation de la méthode de résolution de Navier.

La méthode de Navier est appliquée pour résoudre les équations du mouvement des nanocoques FG à double courbure sous conditions aux limites simplement appuyées. Pour d'autres types de conditions aux limites, des méthodes alternatives peuvent être employées, comme indiqué dans les travaux de (H. Li et al. 2019 ; 2021)

Les fonctions de déplacement inconnues de la nanococque sont supposées être exprimées sous forme de séries trigonométriques satisfaisant automatiquement les conditions aux limites imposées.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \sin \beta y \\ \varphi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} e^{i\omega t} \cos \alpha x \sin \beta y \\ \varphi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} e^{i\omega t} \sin \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \quad (22)$$

Dans ces expressions $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ et $\beta = \frac{n\pi}{b}$, $i = \sqrt{-1}$, $q = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}\}^T$,

les coefficients inconnus constituent un vecteur de constantes à déterminer, tandis que (ω) représente la fréquence propre associée aux vibrations libres des nanocoques FG à double courbure.

En substituant les expressions supposées des déplacements (équation (22)) dans la relation du champ de déplacements (équation (4)), puis dans les équations du mouvement (équation (15)), on obtient un système d'équations algébriques linéaires.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Ce système peut être mis sous la forme d'un problème classique aux valeurs propres, exprimé par l'équation matricielle (23), dans laquelle $(\mathbf{K}$ et $\mathbf{M})$ désignent respectivement la matrice de rigidité et la matrice de masse.

Les éléments des matrices $(\mathbf{K}$ et $\mathbf{M})$ sont symétriques, tels que $(k_{ij} = k_{ji}, m_{ij} = m_{ji}, i, j = 1, 5)$, et sont calculés à partir des expressions analytiques correspondantes.

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11}\alpha^2 + \beta^2 A_{66} + \frac{S_{55}}{R_1^2}; k_{12} = \beta\alpha A_{12} + \beta\alpha A_{66}; \\ k_{13} &= -\frac{\alpha A_{11}}{R_1} - \frac{\alpha A_{12}}{R_2} - \frac{\alpha S_{55}}{R_1}; k_{14} = B_{11}\alpha^2 + \beta^2 B_{66} - \frac{S_{55}}{R_1}; \\ k_{15} &= \beta\alpha B_{12} + \beta\alpha B_{66}; k_{22} = A_{22}\beta^2 + \alpha^2 A_{66} + \frac{S_{44}}{R_2^2}; \\ k_{23} &= -\frac{A_{12}\beta}{R_1} - \frac{\beta A_{22}}{R_2} - \frac{\beta S_{44}}{R_2}; k_{24} = \beta\alpha B_{12} + \beta\alpha B_{66}; \\ k_{25} &= B_{22}\beta^2 + \alpha^2 B_{66} - \frac{S_{44}}{R_2}; \\ k_{33} &= \beta^2 S_{44} + \alpha^2 S_{55} + \frac{A_{11}}{R_1^2} + \frac{2A_{12}}{R_1 R_2} + \frac{A_{22}}{R_2^2} \\ k_{34} &= S_{55}\alpha - \frac{B_{11}\alpha}{R_1} - \frac{B_{12}\alpha}{R_2}; k_{35} = S_{44}\beta - \frac{B_{12}\beta}{R_1} - \frac{B_{22}\beta}{R_2}; \end{aligned}$$

$$k_{44} = D_{11}\alpha^2 + \beta^2 D_{66} + S_{55}; k_{45} = \beta\alpha D_{12} + \beta\alpha D_{66};$$

$$k_{55} = D_{22}\beta^2 + D_{66}\alpha^2 + S_{44}; \quad (24)$$

$$m_{11} = (\alpha^2 + \beta^2) J_0 + I_0; m_{12} = 0; m_{13} = 0;$$

$$m_{14} = (\alpha^2 + \beta^2) J_1 + I_1; m_{15} = 0;$$

$$m_{22} = (\alpha^2 + \beta^2) J_0 + I_0; m_{23} = 0; m_{24} = 0;$$

$$m_{25} = (\alpha^2 + \beta^2) J_1 + I_1; \quad (25)$$

$$m_{33} = (\alpha^2 + \beta^2) J_0 + I_0; m_{34} = 0; m_{35} = 0;$$

$$m_{44} = (\alpha^2 + \beta^2) J_2 + I_2; m_{45} = 0;$$

$$m_{55} = (\alpha^2 + \beta^2) J_2 + I_2;$$

La résolution de l'équation aux valeurs propres (23) permet de déterminer les fréquences propres ainsi que les vecteurs propres associés à la réponse dynamique des nanocoques FG à double courbure.

V.4. Résultats numériques et discussion

V.4.1. Étude de vérification

Dans un premier temps, l'analyse des vibrations libres de coques sphériques isotropes homogènes, simplement appuyées sur l'ensemble de leurs bords, est réalisée afin de valider la précision et l'exactitude des formulations proposées. Les dimensions géométriques considérées sont : ($a = b = 1.0118$ m, $h = 0.0191$ m, $R_1 = R_2 = R = 1.91$ m). Les propriétés du matériau sont définies par un module d'Young ($E = 1$ Pa) et une masse volumique ($\rho = 1$ kg/m³). Les coques sont supposées simplement appuyées sur tous les bords.

Les fréquences propres obtenues à l'aide de la formulation actuelle sont comparées à celles rapportées par (Khare et al. 2004), qui utilisent une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur combinée à la méthode des éléments finis, par (Jouneghani et al. 2017), basées sur la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre et la solution de Navier, ainsi que par (Fadaee et al. 2013), utilisant également la FSDT associée à une solution de type Lévy. Les résultats correspondants sont présentés dans le Tableau V.1. L'examen de ce tableau montre que les fréquences calculées dans la présente étude sont en très bon accord avec les solutions publiées.

Tableau V.1 : Comparaison des fréquences des couches SP homogènes isotropes

Méthode	Mode (m, n)							
	(1, 1)	(2, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 1)	(1, 3)	(3, 2)	(2, 3)
Khare et al. [30]	0,50211	0,56247	0,56248	0,65706	0,73915	0,74035	0,86359	0,86360
Jouneghani et al. [31]	0,52692	0,58120	0,58120	0,66757	0,73173	0,73173	0,87284	0,87284
Fadaee et al. [33]	0,52864	0,58954	0,58954	0,68370	0,75974	0,75974	0,88680	0,88680
Présent	0,52830	0,58853	0,58853	0,68231	0,75818	0,75818	0,88507	0,88507

Vérification sur les coques FG à double courbure

Dans un second temps, l'exactitude et la fiabilité de l'algorithme proposé sont évaluées à travers la comparaison des fréquences des coques à gradient fonctionnel à double courbure. Les coques étudiées sont constituées d'un composite Al/Al_2O_3 . Les propriétés mécaniques de la phase céramique Al_2O_3 sont ($E_c = 380$ GPa, $\rho_c = 3800$ kg/m³, $\nu_c = 0.3$), tandis que celles de la phase métallique sont ($E_m = 70$ GPa, $\rho_m = 2702$ kg/m³, $\nu_m = 0.3$). Les dimensions géométriques des structures sont définies par ($a = b = 1$ m, $h = 0.1$ m). Les plaques planes correspondent au cas ($R_1 = R_2 = \infty$), les coques sphériques à ($R_1 = R_2 = 2$ m), les coques paraboliques hyperboliques à ($R_1 = -R_2 = 2$ m) et les coques cylindriques à ($R_1 = 2$ m, $R_2 = \infty$). Les fréquences adimensionnelles sont calculées selon l'expression définie précédemment. Le Tableau V.2 présente une comparaison entre les résultats actuels et ceux rapportés par (Wattanasakulpong et al. 2015), (Matsunaga 2008) et (Alijani et al. 2011). Il apparaît clairement que les résultats obtenus à l'aide de la formulation proposée sont en très bon accord avec les données de la littérature.

$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{(\rho_c/E_c)}$$

Tableau V.2 : Comparaison des fréquences adimensionnelles des coques FG à double courbure.

Types	Méthode	$k = 0$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$
plaques FL	Wattanasakulpong et al. [36]	0,0577	0,0490	0,0442	0,0382	0,0366
	Matsunaga [37]	0,0577	0,0492	0,0443	0,0381	0,0364
	Présent	0,0577	0,0490	0,0442	0,0382	0,0366
obus SP	Wattanasakulpong et al. [36]	0,0746	0,0646	0,0588	0,0491	0,0455
	Matsunaga [37]	0,0751	0,0657	0,0600	0,0503	0,0464
	Présent	0,0746	0,0646	0,0588	0,0491	0,0455
Coques HP	Wattanasakulpong et al. [36]	0,0548	0,0465	0,0420	0,0363	0,0347
	Alijani et al. [38]	0,0563	0,0479	0,0432	0,0372	0,0355
	Présent	0,0548	0,0465	0,0420	0,0363	0,0347
Coquilles CY	Wattanasakulpong et al. [36]	0,0617	0,0527	0,0477	0,0407	0,0385
	Matsunaga [37]	0,0622	0,0535	0,0485	0,0413	0,0390
	Présent	0,0617	0,0527	0,0477	0,0407	0,0385

Validation sur les nanoplaques FG

La précision de la théorie de l'élasticité non locale modifiée est ensuite examinée à travers l'étude des vibrations libres des nanoplaques à gradient fonctionnel, qui constituent un cas particulier des nanocoques à double courbure lorsque ($R1 = R2 = \infty$).

Les résultats numériques obtenus pour les nanoplaques FG, en utilisant la théorie non locale modifiée, sont comparés à ceux rapportés par (Sobhy et al. 2017) dans le cas de paramètres non locaux constants. Les nanoplaques considérées sont constituées d'un matériau FG Si3N4/SUS304, avec des dimensions ($a = b = 10$ nm).

Les propriétés mécaniques des matériaux sont définies par ($E_c = 348.43$ GPa, $\rho_c = 2370$ kg/m³, $\nu_c = 0.24$) pour la phase céramique Si3N4, et par ($E_m = 201.04$ GPa, $\rho_m = 8166$ kg/m³, $\nu_m = 0.3$) pour la phase métallique SUS304.

Les fréquences fondamentales adimensionnelles sont calculées selon l'expression définie précédemment. Le Tableau V.3 montre que les résultats obtenus dans la présente étude sont très proches de ceux rapportés par (Sobhy et al.2017), confirmant ainsi la validité de la formulation proposée. $\bar{\omega} = 10\omega h \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$

Tableau V.3 : Comparaison des fréquences fondamentales adimensionnelles des nanoplaques FG.

a/h	k	Théorie	$\mu = 0$	$\mu = 0,25$	$\mu = 1$	$\mu = 2,25$	$\mu = 4$
5	0	Sobhy et al. [66]	5.10702	4,98549	4,66713	4,24976	3,81763
		Présent	5.10591	4,98440	4,66611	4,24883	3,81680
	1	Sobhy et al. [66]	3,01860	2,94677	2,75859	2,51190	2,25648
		Présent	3,01875	2,94691	2,75873	2,51202	2,25659
	5	Sobhy et al. [66]	2,42443	2,36674	2,21560	2,01747	1,81232
		Présent	2,43359	2,37568	2,22397	2,02509	1,81917
	Métal	Sobhy et al. [66]	2.11261	2,06234	1,93064	1,75799	1,57923
		Présent	2.11212	2,06186	1,93019	1,75758	1,57886
20	0	Sobhy et al. [66]	0,35558	0,34712	0,32495	0,29589	0,26581
		Présent	0,35558	0,34712	0,32496	0,29590	0,26581
	1	Sobhy et al. [66]	0,21083	0,20581	0,19267	0,17544	0,15760
		Présent	0,21098	0,20596	0,19281	0,17556	0,15771
	5	Sobhy et al. [66]	0,17077	0,16671	0,15606	0,14210	0,12765
		Présent	0,17092	0,16685	0,15620	0,14223	0,12777
	Métal	Sobhy et al. [66]	0,14799	0,14447	0,13524	0,12315	0,11063
		Présent	0,14800	0,14448	0,13525	0,12316	0,11063

V.4.2. Étude paramétrique

Dans cette section, une étude paramétrique est menée sur des nanocoques FG à double courbure constituées d'un matériau Al/Al₂O₃. La surface est fixée à ($S = a.b = 100 \text{ nm}^2$). Les propriétés mécaniques de l'aluminium sont ($E_m = 70 \text{ GPa}$, $\rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3$, $\nu_m = 0.3$), tandis que celles de l'alumine sont ($E_c = 380 \text{ GPa}$, $\rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3$, $\nu_c = 0.3$).

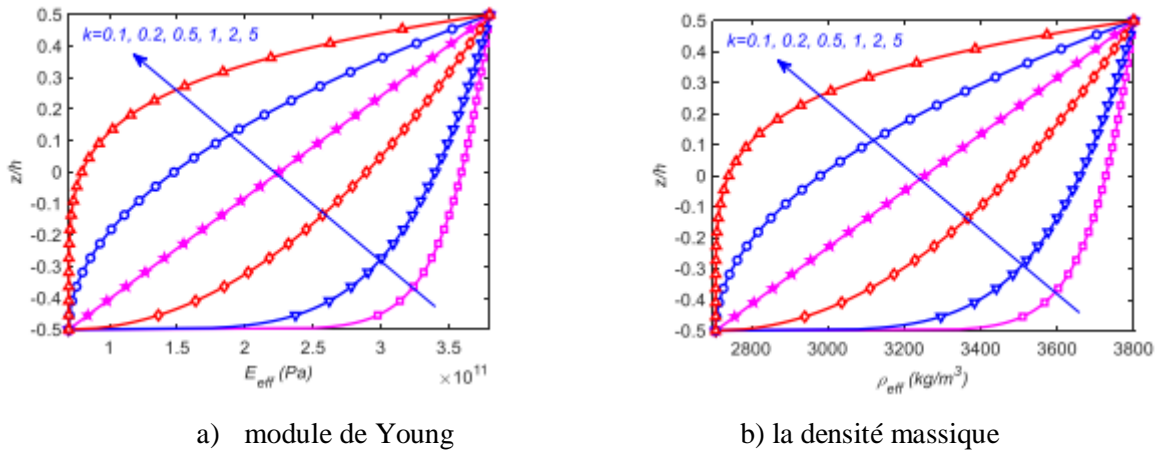


Figure V.3 : La variation du module de Young effectif et de la densité massique à travers l'épaisseur des nanocoques FG.

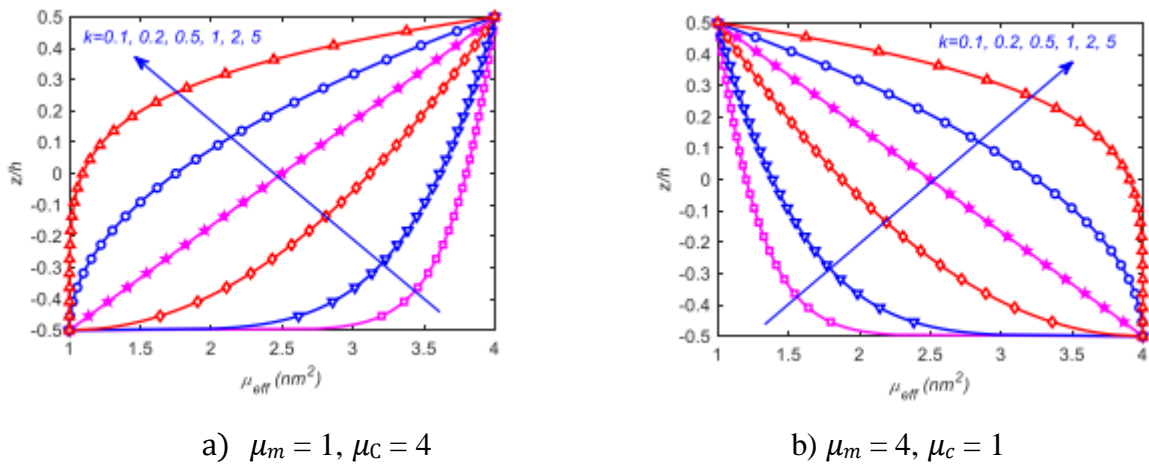


Figure V.4 : La variation du paramètre non local effectif à travers l'épaisseur des nanocoques FG.

La Figure V.3 illustre la variation du module d'Young effectif et de la densité massique à travers l'épaisseur des nanocoques FG. La Figure V.4 présente l'évolution du paramètre non local effectif pour deux configurations distinctes des paramètres non locaux des phases métallique et céramique.

Tableau V.4 : La fréquence fondamentale adimensionnelle des nanocoquilles FG à double courbure.

μ_m	μ_c	plaques FL		Coques SP		Coques HP		Coques CY	
		$k = 1$	$k = 5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 1$	$k = 5$	$k = 1$	$k = 5$
0	0	0,71484	0,61524	1,46783	1,17056	0,67954	0,58482	0,95408	0,78576
	1	0,68032	0,60401	1,39758	1,14963	0,64672	0,57414	0,90821	0,77156
	2	0,65036	0,59337	1,33654	1,12979	0,61824	0,56403	0,86837	0,75811
	3	0,62404	0,58328	1,28285	1,11094	0,59321	0,55443	0,83336	0,74533
	4	0,60068	0,57368	1,23516	1,09300	0,57100	0,54531	0,80226	0,73318
1	1	0,65327	0,56225	1,34140	1,06973	0,62101	0,53445	0,87190	0,71808
	2	0,62661	0,55364	1,28715	1,05369	0,59566	0,52626	0,83647	0,70720
	3	0,60297	0,54541	1,23899	1,03835	0,57318	0,51844	0,80504	0,69679
	4	0,58181	0,53754	1,19586	1,02366	0,55307	0,51096	0,77691	0,68683
2	1	0,62921	0,52810	1,29149	1,00447	0,59814	0,50199	0,83962	0,67437
	2	0,60528	0,52095	1,24286	0,99115	0,57539	0,49519	0,80785	0,66533
	3	0,58389	0,51408	1,19934	0,97835	0,55506	0,48866	0,77943	0,65665
	4	0,56462	0,50747	1,16009	0,96603	0,53673	0,48237	0,75381	0,64829
3	1	0,60762	0,49950	1,24676	0,94986	0,57763	0,47481	0,81069	0,63778
	2	0,58599	0,49344	1,20285	0,93857	0,55706	0,46904	0,78198	0,63012
	3	0,56652	0,48759	1,16327	0,92768	0,53855	0,46348	0,75612	0,62272
	4	0,54887	0,48194	1,12735	0,91716	0,52176	0,45811	0,73266	0,61559
4	1	0,58812	0,47510	1,20639	0,90328	0,55909	0,45162	0,78455	0,60657
	2	0,56844	0,46987	1,16647	0,89356	0,54038	0,44664	0,75844	0,59996
	3	0,55061	0,46481	1,13027	0,88415	0,52343	0,44183	0,73478	0,59357
	4	0,53436	0,45991	1,09724	0,87502	0,50798	0,43717	0,71320	0,58738

Tableau V.5 : Les six premières fréquences adimensionnelles des nanocoquilles doublement incurvées FG.

Types	μ_m	μ_c	Mode (1, 1)	Mode (2, 2)	Mode (3, 3)	Mode (4, 4)	Mode (5, 5)	Mode (6, 6)
plaques FL	0	0	0,71484	2,79386	6,06597	10,31094	15,31095	20,87895
	1	1	0,65327	2,08848	3,64040	5,05640	6,28491	7,33335
		4	0,58181	1,60424	2,57302	3,42334	4,15682	4,78482
	4	1	0,58812	1,63642	2,62859	3,49109	4,22722	4,85191
		4	0,53436	1,37009	2,13056	2,79255	3,36206	3,84906
Coques SP	0	0	1,46783	3,04978	6,15343	10,32394	15,27951	20,81617
	1	1	1,34140	2,27979	3,69289	5,06278	6,27200	7,31130
		4	1,19586	1,75463	2,61614	3,43578	4,15793	4,78108
	4	1	1,20639	1,78268	2,66011	3,48693	4,20848	4,82631
		4	1,09724	1,49559	2,16128	2,79607	3,35516	3,83748
Coques HP	0	0	0,67954	2,75791	6,03004	10,27509	15,27510	20,84298
	1	1	0,62101	2,06161	3,61884	5,03883	6,27019	7,32071
		4	0,55307	1,58353	2,55766	3,41127	4,14689	4,77636
	4	1	0,55909	1,61542	2,61315	3,47913	4,21753	4,84377
		4	0,50798	1,35246	2,11794	2,78284	3,35419	3,84243
Coques CY	0	0	0,95408	2,84777	6,07139	10,29300	15,27724	20,83299
	1	1	0,87190	2,12878	3,64365	5,04761	6,27107	7,31721
		4	0,77691	1,63678	2,57827	3,42141	4,15246	4,77958
	4	1	0,78455	1,66630	2,62780	3,48077	4,21290	4,83574
		4	0,71320	1,39652	2,13246	2,78769	3,35466	3,84058

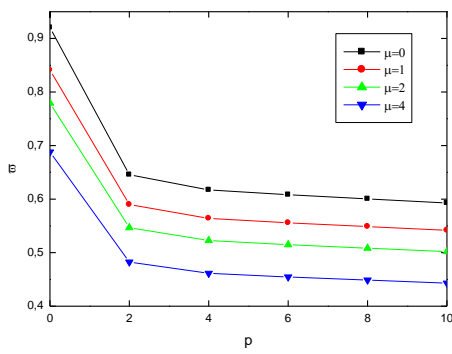
Les fréquences fondamentales adimensionnelles des nanoplaques planes, des nanocoquilles sphériques, paraboliques hyperboliques et cylindriques sont présentées dans les Tableaux V.4 et V.5, pour différentes valeurs des paramètres non locaux et de l'indice de la loi de puissance.

L'analyse du Tableau V.4 montre que, pour des paramètres non locaux identiques, les fréquences fondamentales des nanocoquilles sphériques sont les plus élevées, tandis que celles des nanocoquilles paraboliques hyperboliques sont les plus faibles. De plus, l'augmentation des paramètres non locaux entraîne une diminution des fréquences, traduisant l'effet d'adoucissement associé aux effets non locaux.

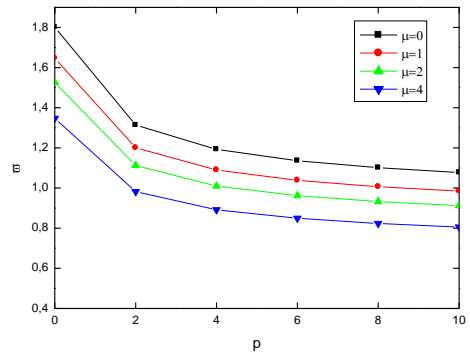
Le Tableau V.5 présente les six premières fréquences adimensionnelles des nanocoquilles FG à double courbure. Il est observé que les effets non locaux sont plus marqués pour les modes de vibration élevés que pour les modes fondamentaux. Les fréquences élevées des différentes géométries tendent à devenir similaires, tandis que des différences plus importantes subsistent pour les fréquences basses.

Influence de l'indice de loi de puissance

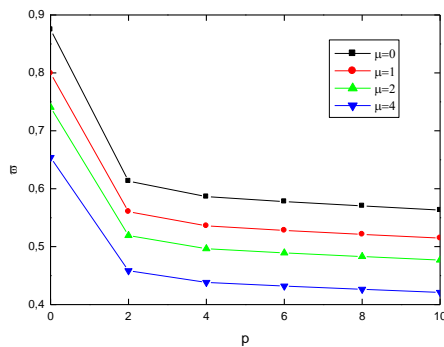
Dans cette sous-section, l'influence de l'indice de la loi de puissance (k) sur le comportement vibratoire libre des nanocoquilles FG à double courbure est étudiée. Les dimensions des structures sont fixées à ($a = b = 10$ nm), avec une épaisseur ($h = 0,5$ nm). Les géométries considérées correspondent aux nanoplaques planes ($R_1 = R_2 = \infty$), aux nanocoquilles sphériques ($R_1 = R_2 = 20$ nm), paraboliques hyperboliques ($R_1 = -R_2 = 20$ nm) et cylindriques ($R_1 = 20$ nm, $R_2 = \infty$).



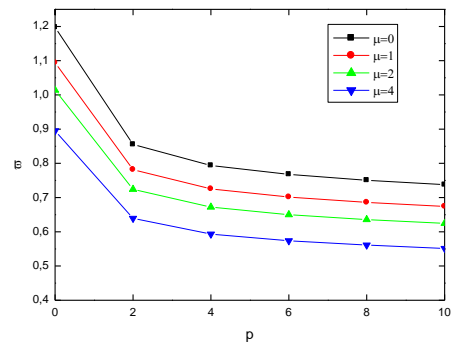
a) nanoplaques (FL)



b) nanocoilles (SP)



c) nanocoilles (HP)



d) nanocoilles (CY)

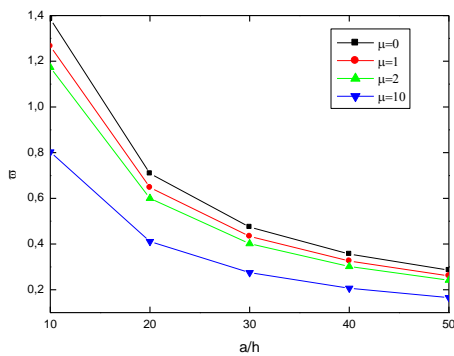
Figure V.5 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoilles doublement incurvées FG en fonction de l'indice de loi de puissance.

La Figure V.5 illustre la variation des fréquences adimensionnelles des nanocoilles FG à double courbure en fonction de l'indice de la loi de puissance, lequel varie de 0 à 10. Il est observé que l'augmentation de l'indice de la loi de puissance entraîne une diminution progressive des fréquences pour les quatre types de structures étudiées.

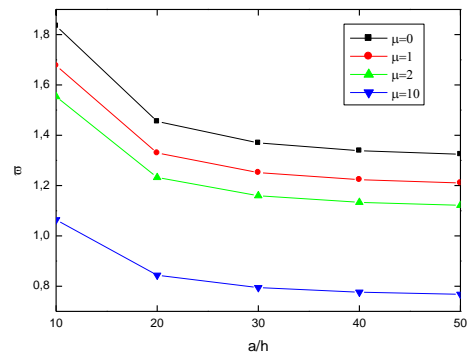
Lorsque l'indice de la loi de puissance varie de 0, correspondant à un matériau entièrement céramique, à 2, les fréquences diminuent rapidement. En revanche, lorsque l'indice varie de 2 à 10, la diminution des fréquences devient plus progressive. Cette tendance est liée à l'augmentation de la fraction volumique de la phase métallique, caractérisée par une rigidité plus faible.

Influence du rapport côté/épaisseur (a/h)

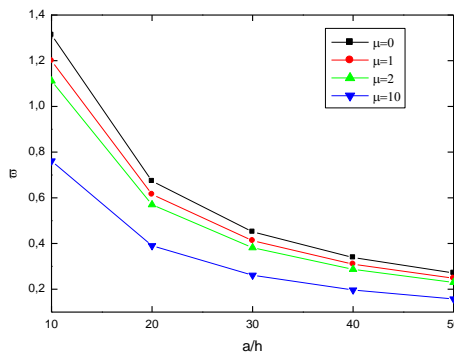
L'influence du rapport côté/épaisseur (a/h) sur les fréquences adimensionnelles des nanocoques FG est ensuite examinée. Les dimensions géométriques sont fixées à ($a = b = 10$ nm), Le rapport (a/h) varie de 10 à 50.



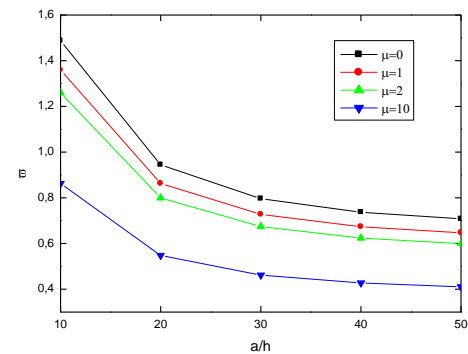
a) nanoplaques (FL)



b) nanocoques (SP)



c) nanocoques (HP)



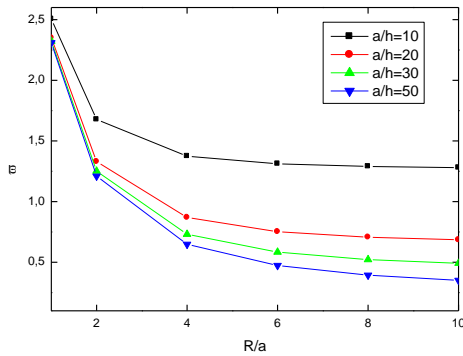
d) nanocoques (CY)

Figure V.6 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoques FG à double courbure en fonction du rapport côté/épaisseur.

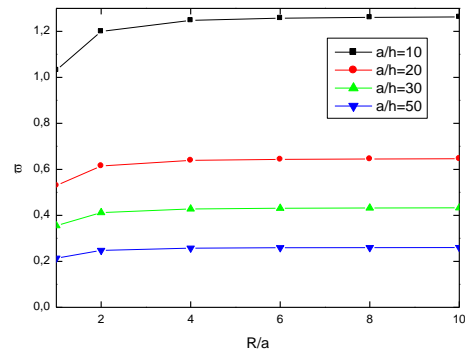
La Figure V.6 présente la variation des fréquences fondamentales adimensionnelles des nanocoques FG en fonction du rapport côté/épaisseur. Il apparaît que l'augmentation du rapport (a/h), correspondant à une diminution de l'épaisseur, entraîne une baisse des fréquences, traduisant une diminution de la rigidité globale des structures.

L'influence du rapport côté/épaisseur est plus marquée pour les nanoplaques planes et les nanocoques paraboliques hyperboliques que pour les nanocoques sphériques et cylindriques.

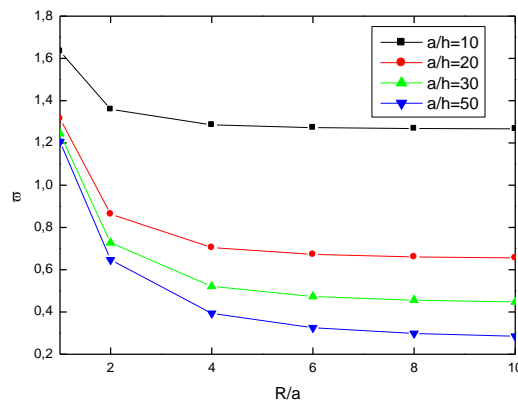
Influence du rapport rayon/côté (R/a)



a) nanocoques SP



b) nanocoques HP



c) nanocoques CY

Figure V.7 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoques FG à double courbure en fonction du rapport rayon/côté.

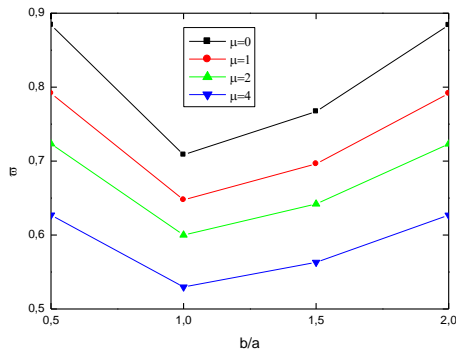
La Figure V.7 illustre la variation des fréquences adimensionnelles des nanocoques FG à double courbure en fonction du rapport rayon/côté (R/a). Les dimensions sont fixées à ($a = b = 10$ nm), avec un indice de loi de puissance ($k = 1$) et des paramètres non locaux ($\mu = 1$).

Lorsque le rapport (R/a) augmente, les fréquences des nanocoques sphériques et cylindriques diminuent, tandis que celles des nanocoques paraboliques hyperboliques augmentent. Lorsque ($R_1 = R_2 \rightarrow \infty$), les fréquences des nanocoques tendent vers celles des nanoplaques planes.

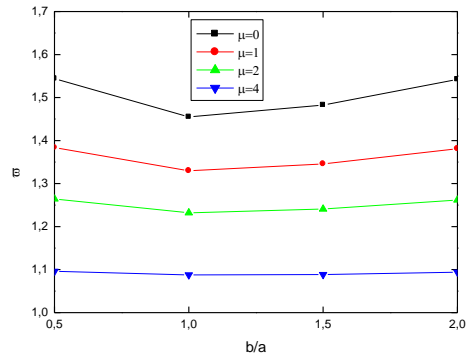
Il est également observé que les fréquences augmentent lorsque le rapport (a/R) diminue, ce qui s'explique par l'augmentation effective de l'épaisseur relative et, par conséquent, de la rigidité des nanocoques.

Influence du rapport d'aspect (b/a)

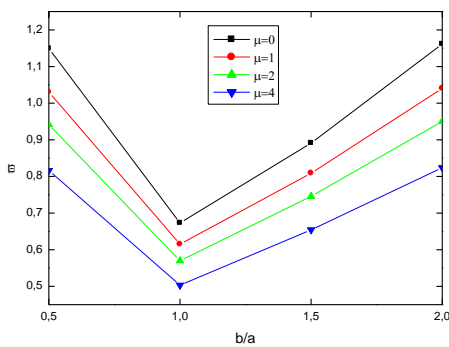
Dans cette sous-section, la dépendance des fréquences fondamentales adimensionnelles vis-à-vis du rapport d'aspect est étudiée. La surface est fixée à ($S = ab = 100 \text{ nm}^2$), l'épaisseur à ($h = 0,5 \text{ nm}$), et le rapport d'aspect (b/a) varie de 0,5 à 2.



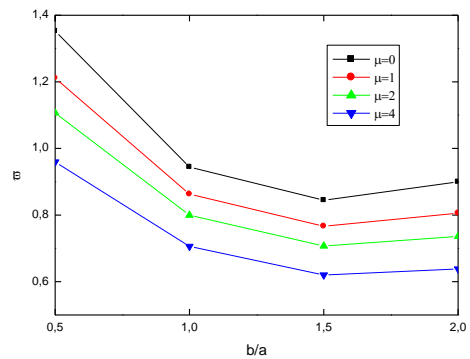
a) nanoplques (FL)



b) nanocoquilles (SP)



c) nanocoquilles (HP)



d) nanocoquilles (CY)

Figure V.8 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoquilles FG à double courbure en fonction du rapport d'aspect.

La Figure V.8 montre que, pour les nanoplques planes ainsi que pour les nanocoquilles sphériques et paraboliques hyperboliques, les fréquences diminuent lorsque le rapport d'aspect augmente de 0,5 à 1, puis augmentent lorsque ce rapport varie de 1 à 2. Les fréquences minimales sont atteintes pour ($b/a = 1$).

(cas des coques cylindriques)

Dans le cas des nanocoquilles cylindriques, les fréquences diminuent lorsque le rapport d'aspect varie de 0,5 à 1,5, puis augmentent pour des valeurs comprises entre 1,5 et 2. Les fréquences minimales apparaissent pour ($b/a = 1,5$).

Effet de la variation spatiale des paramètres non locaux

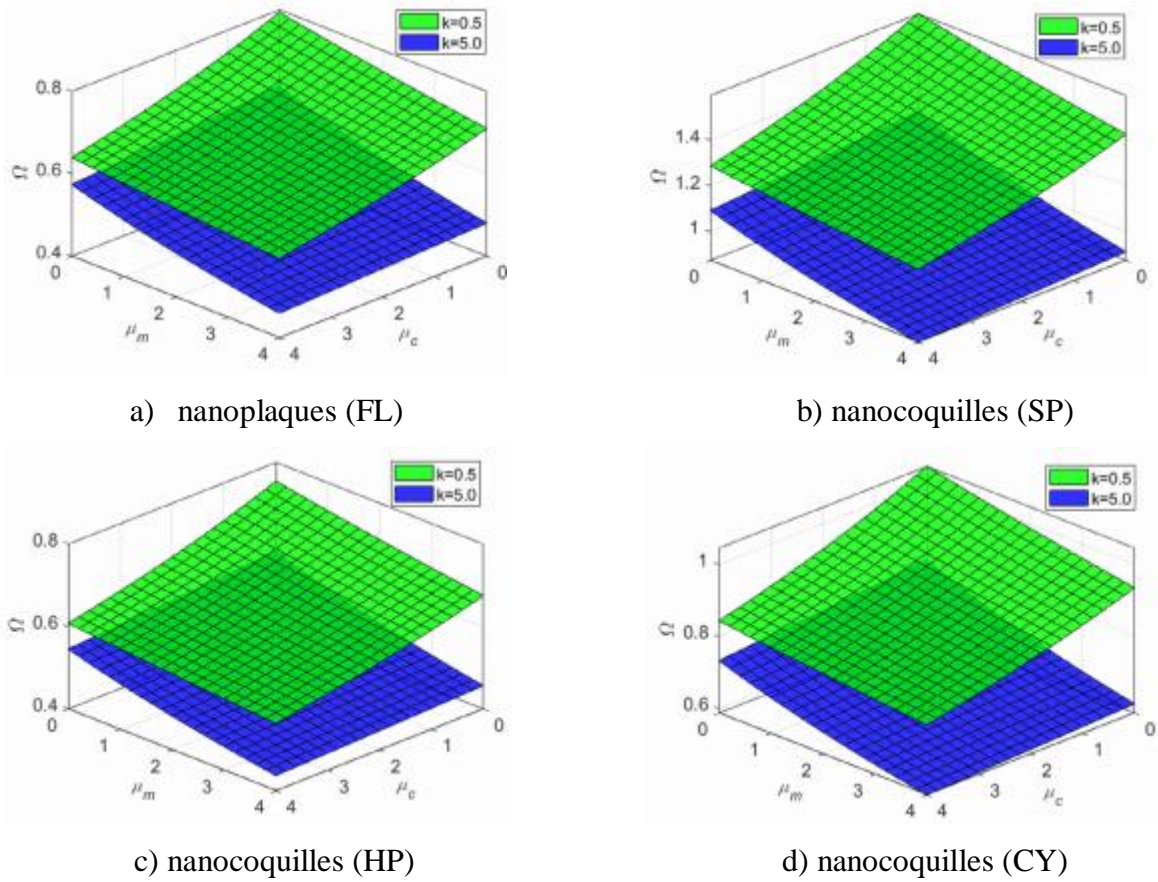


Figure V.9 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoques à double courbure FG en fonction de la variation des paramètres non locaux.

La Figure V.9 présente la variation des fréquences adimensionnelles des nanocoquilles FG à double courbure en fonction de la variation spatiale des paramètres non locaux. Les dimensions géométriques sont identiques à celles considérées précédemment.

D'une manière générale, la prise en compte des paramètres non locaux entraîne une réduction des fréquences fondamentales adimensionnelles des nanocoquilles FG. Lorsque l'indice de la loi de puissance est égal à 0,5, les effets des paramètres non locaux de la phase céramique sont plus prononcés que ceux de la phase métallique.

En revanche, lorsque l'indice de la loi de puissance est égal à 5, les effets des paramètres non locaux de la phase métallique deviennent dominants. Ce comportement est lié à la variation des fractions volumiques des phases céramique et métallique à travers l'épaisseur.

Ce phénomène met en évidence l'importance de considérer les paramètres non locaux comme des propriétés dépendantes du matériau, et non comme des constantes uniformes, dans l'analyse vibratoire des structures à gradient fonctionnel.

Influence du rapport des rayons de courbure

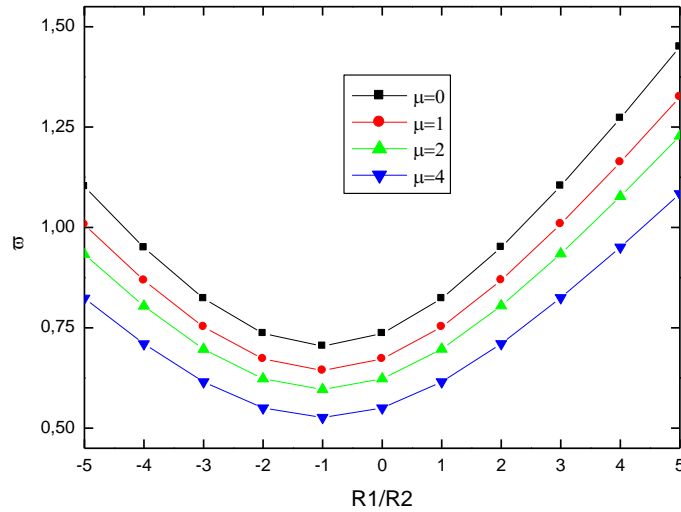


Figure V.10 : La variation des fréquences adimensionnelles des nanocoques FG à double courbure en fonction du rapport des rayons.

Dans cette section, l'influence du rapport des rayons de courbure sur les fréquences adimensionnelles des nanocoques FG est étudiée. Les dimensions sont fixées à ($a = b = 10$ nm, l'épaisseur $a = 0,5$ nm), avec ($R_1 = 60$ nm et l'indice de la loi de puissance $k = 1$).

Lorsque le rapport des rayons augmente de -5 à -1, les fréquences fondamentales diminuent. En revanche, lorsque ce rapport varie de -1 à 5, les fréquences augmentent rapidement. Les nanocoques paraboliques hyperboliques ($R_1/R_2 = -1$) présentent les fréquences les plus faibles.

V.5. Conclusions

Les vibrations libres de nanocoques à gradient fonctionnel à double courbure ont été étudiées en tenant compte de paramètres non locaux variables à travers l'épaisseur. Une formulation basée sur la théorie de l'élasticité non locale modifiée, couplée à la théorie de déformation par cisaillement du premier ordre, a permis d'établir les équations gouvernant le mouvement. Les résultats numériques obtenus montrent un bon accord avec les données de la littérature, confirmant la fiabilité de la formulation proposée. L'étude paramétrique a mis en évidence l'influence significative de la géométrie, des propriétés des matériaux, de l'indice de la loi de puissance et de la variation des paramètres non locaux sur le comportement vibratoire des nanocoques FG à double courbure.

Conclusion Générale

Cette recherche a établi une synthèse comprehensive des fondements théoriques et applicatifs régissant trois piliers interdépendants de la science des matériaux : les matériaux composites, les matériaux à gradient fonctionnel et les approches multi-échelles couplées aux formalismes non locaux. Cette articulation conceptuelle s'avère indispensable pour élucider les mécanismes de déformation et de rupture des matériaux quasi-fragiles, dont le béton constitue le paradigme fondamental.

Les matériaux composites représentent une innovation majeure dans le domaine de l'ingénierie structurale, en proposant une optimisation remarquable du compromis performance-légèreté-rigidité. Néanmoins, les limitations intrinsèques liées aux discontinuités interfaciales ont catalysé l'émergence des matériaux à gradient fonctionnel. Ces systèmes matériels incarnent une nouvelle classe de matériaux d'ingénierie, caractérisés par une modulation progressive et continue de leurs propriétés physiques et mécaniques. Cette continuité fonctionnelle améliore sensiblement la tenue au choc thermique, la durabilité en environnements sévères et la performance mécanique globale des structures.

Parallèlement, l'intégration des approches multi-échelles et l'analyse systématique des effets d'échelle ont révélé le rôle prépondérant des phénomènes microscopiques dans la détermination du comportement macroscopique des structures matérielles. Les matériaux quasi-fragiles, notamment le béton, exigent des modèles constitutifs incorporant explicitement la zone de processus de fissuration, les hétérogénéités microstructurales et les effets de non-localité. Ces dimensions analytiques demeurent essentielles pour développer des modèles prédictifs robustes, fidèles aux observations expérimentales et capables de reproduire authentiquement les mécanismes physiques sous-jacents.

À terme, cette démarche intégrative combinant matériaux avancés et formalismes multi-échelles inaugure une nouvelle génération de solutions en ingénierie structurale et matériaux. Au-delà de l'amélioration des critères classiques (sécurité, durabilité, efficacité), elle offre un cadre conceptuel et méthodologique pour l'élaboration de réponses innovantes aux défis scientifiques, techniques et sociétaux caractéristiques du XXI^e siècle. L'avancement futur de ces domaines reposera sur une synergie dynamique entre démarches expérimentales, approches numériques et développements théoriques, en vue de concevoir des matériaux toujours plus performants, fonctionnels et alignés avec les exigences évolutives et durables de la société contemporaine.

Références bibliographiques

- Aghazadeh R**, Cigeroglu E, Dag S",2014,"Static and free vibration analyses of small-scale functionally graded beams possessing a variable length scale parameter using different beam theories","Eur J Mech A Solids",**46**,1-11,
- Ahouel M**, Houari MSA, Bedia EAA, Tounsi A",2016,"Size-dependent mechanical behavior of functionally graded trigonometric shear deformable nanobeams including neutral surface position concept","Steel Compos Struct",**20**,963-81,
- Aifantis EC**",2011,"On the gradient approach -- Relation to Eringen's nonlocal theory","Int J Eng Sci",**49**,1367-77,
- Akbarzadeh Khorshidi M**, Shariati M, Emam SA",2016,"Postbuckling of functionally graded nanobeams based on modified couple contrainte theory under general beam theory","Int J Mech Sci",**110**,160-9,
- Akgoz B**, Civalek O",2011,"Buckling analysis of cantilever carbon nanotubes using the strain gradient elasticity and modified couple contrainte theories","J Comput Theor Nanosci",**8**,1821-7,
- Akgoz B**, Civalek O",2011,"Strain gradient elasticity and modified couple contrainte models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams","Int J Eng Sci",**49**,1268-80,
- Akgoz B**, Civalek O",2012,"Investigation of size effects on static response of single-walled carbon nanotubes based on strain gradient elasticity","Int J Comput Methods",**9**,1240032-19,
- Akgoz B**, Civalek O",2013,"A size-dependent shear deformation beam model based on the strain gradient elasticity theory","Int J Eng Sci",**70**,1-14,
- Akgoz B**, Civalek O",2013,"Buckling analysis of functionally graded microbeams based on the strain gradient theory","Acta Mech",**224**,2185-201,
- Akgoz B**, Civalek O",2013,"Buckling analysis of linearly tapered micro-Columns based on strain gradient elasticity","Struct Eng Mech",**48**,195-205,
- Akgoz B**, Civalek O",2013,"Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli-Euler microbeams based on the modified couple contrainte theory","Compos Struct",**98**,314-22,
- Akgoz B**, Civalek O",2013,"Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM)","Compos B Eng",**55**,263-8,
- Akgoz B**, Civalek O",2014,"A new trigonometric beam model for buckling of strain gradient microbeams","Int J Mech Sci",**81**,88-94,
- Akgoz B**, Civalek O",2014,"Longitudinal vibration analysis for microbars based on strain gradient elasticity theory","J Vib Control",**20**,606-16,
- Akgoz B**, Civalek O",2014,"Shear deformation beam models for functionally graded microbeams with new shear correction factors","Compos Struct",**112**,214-25,
- Akgoz B**, Civalek O",2014,"Thermo-mechanical buckling behavior of functionally graded microbeams

- embedded in elastic medium", *Int J Eng Sci*, **85**,90-104,
- Akgoz B**, Civalek O",**2015**,"A novel microstructure-dependent shear deformable beam model", *Int J Mech Sci*, **99**,10-20,
- Akgoz B**, Civalek O",**2015**,"Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity", *Compos Struct*, **134**,294-301,
- Akgoz B**, Civalek O",**2016**,"Bending analysis of embedded carbon nanotubes resting on an elastic foundation using strain gradient theory", *Acta Astronaut*, **119**,1-12,
- Alazwari, M.A., Daikh, A.A. and Eltahir, M.A. (2022a), "Novel quasi 3D theory for mechanical responses of FG-CNTs reinforced composite nanoplates", *Adv. Nano Res.*, 12(2), 117. <https://doi.org/10.12989/anr.2022.12.2.117>.
- Alazwari, M.A., Daikh, A.A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Eltahir, M.A. (2021), "On static buckling of multilayered carbon nanotubes reinforced composite nanobeams supported on non-linear elastic foundations", *Steel Compos. Struct.*, 40(3), 389-404. <http://doi.org/10.12989/scs.2021.40.3.389>.
- Alazwari**, M.A., Esen, I., Abdelrahman, A.A., Abdraboh, A.M. and Eltahir, M.A. (**2022b**), "Dynamic analysis of functionally graded (FG) nonlocal strain gradient nanobeams under thermo-magnetic fields and moving load", *Adv. Nano Res.*, **12**, 231-251. .
- Alazwari, M.A., Esen, I., Abdelrahman, A.A., Abdraboh, A.M. and Eltahir, M.A. (2022b), "Dynamic analysis of functionally graded (FG) nonlocal strain gradient nanobeams under thermo-magnetic fields and moving load", *Adv. Nano Res.*, 12, 231-251. <https://doi.org/10.12989/anr.2022.12.3.231>.
- Al-Basyouni KS**, Tounsi A, Mahmoud SR",**2015**,"Size dependent bending and vibration analysis of functionally graded micro beams based on modified couple contrainte theory and neutral surface position", *Compos Struct*, **125**,621-30,
- Alibeigloo, A. (2014), "Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity", *Eur. J. Mech.-A/Solid.*, 44, 104-115. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.10.002>.
- Altenbach H**, Eremeyev VA",**2014**,"Strain rate tensors and constitutive equations of inelastic micropolar materials", *International Journal of Plasticity*, **63**,3-17,
- Amirian B**, Hosseini-Ara R, Moosavi H",**2012**,"Thermal vibration analysis of carbon nanotubes embedded in two-parameter elastic foundation based on nonlocal Timoshenko's beam theory", *Arch Mech*, **64**,581-602,
- Ansari R**, Ashrafi MA, Arjangpay A",**2015**,"An exact solution for vibrations of postbuckled microscale beams based on the modified couple contrainte theory", *Appl Math Model*, **39**,3050-62,
- Ansari R**, Bazdid-Vahdati M, Shakouri A, Norouzzadeh A, Rouhi H",**2016**,"Micromorphic first-order shear deformable plate element", *Meccanica*, **51**,1797-809,
- Ansari R**, Bazdid-Vahdati M, Shakouri A, Norouzzadeh A, Rouhi H",**2016**,"Micromorphic prism element", *Mathematics and Mechanics of Solids*, **10**.1177/1081286516637115.
- Ansari R**, Faghieh Shojaei M, Gholami R, Mohammadi V, Darabi MA",**2013**,"Thermal postbuckling

behavior of size-dependent functionally graded Timoshenko microbeams", "Int J Non-Linear Mech", **50**,127-35,

Ansari R, Faraji Oskouie M, Rouhi H",**2017**,"Studying linear and nonlinear vibrations of fractional viscoelastic Timoshenko micro-/nano-beams using the strain gradient theory", "Nonlinear Dyn", **87**,695-711,

Ansari R, Gholami R, Darabi MA",**2011**,"Thermal buckling analysis of embedded single-walled carbon nanotubes with arbitrary boundary conditions using the nonlocal timoshenko beam theory", "J Therm Contraintees", **34**,1271-81,

Ansari R, Gholami R, Darabi MA",**2012**,"A nonlinear Timoshenko beam formulation based on strain gradient theory", "J Mech Mater Struct", **7**,195-211,

Ansari R, Gholami R, Faghieh Shojaei M, Mohammadi V, Sahmani S",**2013**,"Buckling of FGM Timoshenko microbeams under in-plane thermal loading based on the modified strain gradient theory", "Int J Multiscale Comput Eng", **11**,389-405,

Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A",**2016**,"Size-dependent thermo-mechanical vibration and instability of conveying fluid functionally graded nanoshells based on Mindlin's strain gradient theory", "Thin Wall Struct", **105**,172-84,

Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A, Darabi M",**2015**,"Surface contrainte effect on the vibration and instability of nanoscale pipes conveying fluid based on a size-dependent Timoshenko beam model", "Acta Mechanica Sinica", **31**,708-19,

Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A, Darabi MA",**2016**,"Wave characteristics of nanotubes conveying fluid based on the non-classical Timoshenko beam model incorporating surface energies", "Arab J Sci Eng", **41**,4359-69,

Ansari R, Gholami R, Norouzzadeh A, Sahmani S",**2015**,"Size-dependent vibration and instability of fluid-conveying functionally graded microshells based on the modified couple contrainte theory", "Microfluid Nanofluid", **19**,509-22,

Ansari R, Gholami R, Rouhi H",**2015**,"Size-dependent nonlinear forced vibration analysis of magneto-electrothermo-elastic Timoshenko nanobeams based upon the nonlocal elasticity theory", "Compos Struct", **126**,216-26,

Ansari R, Gholami R, Sahmani S",**2011**,"Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory", "Compos Struct", **94**,221-8,

Ansari R, Gholami R, Sahmani S",**2013**,"Size-dependent vibration of functionally graded curved microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory", "Arch Appl Mech", **83**,1439-49,

Ansari R, Gholami R, Sahmani S",**2014**,"Free vibration of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient reddy beam theory", "Int J Comput Methods Eng Sci Mech", **15**,401-12,

Ansari R, Gholami R, Sahmani S, Norouzzadeh A, Bazdid-Vahdati M",**2015**,"Dynamic stability analysis of embedded multi-walled carbon nanotubes in thermal environment", "Acta Mech Solida

Sin",**28**,659-67,

Ansari R, Norouzzadeh A, Gholami R, Faghieh Shojaei M, Darabi MA",**2016**,"Geometrically nonlinear free vibration and instability of fluid-conveying nanoscale pipes including surface constraint effects",*"Microfluid Nanofluid"*,**20**,28-42,

Ansari R, Norouzzadeh A, Gholami R, Shojaei MF, Hosseinzadeh M",**2014**,"Size-dependent nonlinear vibration and instability of embedded fluid-conveying SWBNNTs in thermal environment",*"Phys E"*,**61**,148-57,

Ansari R, Ramezannezhad H, Gholami R",**2012**,"Nonlocal beam theory for nonlinear vibrations of embedded multiwalled carbon nanotubes in thermal environment",*"Nonlinear Dyn"*,**67**,2241-54,

Ansari R, Shakouri AH, Bazdid-Vahdati M, Norouzzadeh A, Rouhi H",**2016**,"A nonclassical finite element approach for the nonlinear analysis of micropolar plates",*"J Comput Nonlinear Dyn"*,**12**,011019-12,

Ansari R, Shojaei MF, Mohammadi V, Gholami R, Darabi MA",**2012**,"Buckling and postbuckling behavior of functionally graded Timoshenko microbeams based on the strain gradient theory",*"J Mech Mater Struct"*,**7**,931-49,

Arash B, Ansari R",**2010**,"Evaluation of nonlocal parameter in the vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial strain",*"Phys E"*,**42**,2058-64,

Asghari M, Ahmadian MT, Kahrobaiyan MH, Rahaeifard M",**2010**,"On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams",*"Mater Des"*,**31**,2324-9,

Asghari M, Kahrobaiyan MH, Ahmadian MT",**2010**,"A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple constraint theory",*"Int J Eng Sci"*,**48**,1749-61,

Asghari M, Kahrobaiyan MH, Nikfar M, Ahmadian MT",**2012**,"A size-dependent nonlinear Timoshenko microbeam model based on the strain gradient theory",*"Acta Mech"*,**223**,1233-49,

Asghari M, Kahrobaiyan MH, Rahaeifard M, Ahmadian MT",**2011**,"Investigation of the size effects in Timoshenko beams based on the couple constraint theory",*"Arch Appl Mech"*,**81**,863-74,

Asghari M, Rahaeifard M, Kahrobaiyan MH, Ahmadian MT",**2011**,"The modified couple constraint functionally graded Timoshenko beam formulation",*"Mater Des"*,**32**,1435-43,

Aydogdu M",**2009**,"A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration",*"Phys E"*,**41**,1651-5,

Aydogdu M",**2009**,"A new shear deformation theory for laminated composite plates",*"Compos Struct"*,**89**,94-101,

Aydogdu M",**2009**,"Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model",*"Phys E"*,**41**,861-4,

Bachiri, A., Daikh, A.A. and Tounsi, A. (2022), "On the thermo-elastic response of FG-CNTRC cross-ply laminated plates under temperature loading using a new HSDT", *J. Appl. Comput. Mech.*, **8**(4), 1370-1386. .

Bachiri, A., Daikh, A.A. and Tounsi, A. (2022), "On the thermo-elastic response of FG-CNTRC cross-

ply laminated plates under temperature loading using a new HSDT”, *J. Appl. Comput. Mech.*, 8(4), 1370-1386. <https://doi.org/10.22055/JACM.2022.40148.3529>.

Bagdatli SM, 2015, "Non-linear vibration of nanobeams with various boundary condition based on nonlocal elasticity theory", *Compos B Eng*, **80**, 43-52,

Bahlouli, (1993) N. Bahlouli "Cours Composites sur le site Internet " <http://www-ipst.u-strasbg.fr/cours/matériaux-composites> "

Baptiste Paul Revol. (2017). Caractérisation de l'interface dans des composites polyamides-6 - viscosité haute ténacité obtenus par injection réactive. Thèses doctorat. Université de Haute Alsace – Mulhouse.

Belarbi, M.O., Houari, M.S.A., Hirane, H., Daikh, A.A. and Bordas, S.P.A. (2022), “On the finite element analysis of functionally graded sandwich curved beams via a new refined higher order shear deformation theory”, *Compos. Struct.*, 279, 114715. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114715>.

Berkia, A. (2022). Etude du flambement statique des structures en fgm. (Thèse de Doctorat). Université Djillali Liabes de SBA. ,

Berrabah HM, Tounsi AL, Semmah A, Adda Bedia EA", 2013, "Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams", *Struct Eng Mech*, **48**, 351-65,

Berthelot, J. M. (1992). Matériaux composites comportement mécanique et analyse des structures. Paris. Masson. **615** p.

Berthelot, J.-M. (2005). Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures: Editions Tec & Doc.

Boch, (1986) Boch, P., Chartier, T. & Huttepain, M, «Tape Casting of Al₂O₃/ZrO₂ Laminated Composites», *J. Am. Ceram. Soc.*, Volume 69, pages: 191- 192.

Bouafia, H., Chikh, A., Bousahla, A.A., Bourada, F., Heireche, H., Tounsi, A., ... & Hussain, M. (2021), “Natural frequencies of FGM nanoplates embedded in an elastic medium”, *Adv. Nano Res.*, 11(3), 239-249. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.11.3.239>.

Boufaida, Z. (2015). Analyse des propriétés mécaniques de composites taffetas verre/matrice acrylique en relation avec les propriétés d'adhésion des fibres sur la matrice. (Thèse de doctorat). École doctorale Énergie Mécanique et Matériaux

Burridge, E. (2009). Boeing's **787** dreamliner has some impressive environmental credentials. *ICIS Chem Bus*.

Chaht FL, Kaci A, Houari MSA, Tounsi A, Bég OA, Mahmoud SR", 2015, "Bending and buckling analyses of functionally graded material (FGM) size-dependent nanoscale beams including the thickness stretching effect", *Steel Compos Struct*, **18**, 425-42,

Challamel N, Wang CM", 2008, "The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved", *Nanotechnology*, **19**, 345703-7,

Chen W, Chen W, Sze KY", 2012, "A model of composite laminated Reddy beam based on a modified couple-constraint theory", *Compos Struct*, **94**, 2599-609,

- Chen W**, Li L, Xu M",**2011**,"A modified couple constraint model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation", "*Compos Struct*",**93**,2723-32,
- Chen WJ**, Li XP",**2013**,"Size-dependent free vibration analysis of composite laminated Timoshenko beam based on new modified couple constraint theory", "*Arch Appl Mech*",**83**,431-44,
- Chen Y**, Lee JD",**2003**,"Determining material constants in micromorphic theory through phonon dispersion relations", "*Int J Eng Sci*",**41**,871-86,
- Chen, X., Zhao, J.L., She, G.L., Jing, Y., Pu, H. and Luo, J. (2021), "Nonlinear vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced fluid-conveying tube in thermal environment", *Steel Compos. Struct.*, 45(5), 641. <https://doi.org/10.12989/scs.2022.45.5.641>.
- Chong ACM**, Lam DCC",**1999**,"Strain gradient plasticity effect in indentation hardness of polymers", "*Journal of Materials Research*",**14**,4103-10,
- Civalek O**, Demir C",**2011**,"Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler-Bernoulli beam theory", "*Appl Math Model*",**35**,2053-67,
- Cosserat E**, Cosserat F",**1909**,"Théorie des corps déformables: Paris: Hermann et Fils,","Théorie des corps déformables: Paris: Hermann et Fils,",,
- Daikh, A.A., Bensaid, I., Bachiri, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. and Merzouki, T. (2020a), "On static bending of multilayered carbon nanotube-reinforced composite plates", *Comput. Concrete*, 26(2), 137-150. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.26.2.137>.
- Daikh, A.A., Draï, A., Houari, M.S.A. and Eltaher, M.A. (2020b), "Static analysis of multilayer nonlocal strain gradient nanobeam reinforced by carbon nanotubes", *Steel Compos. Struct.*, 36(6), 643-656. <https://doi.org/10.12989/scs.2020.36.6.643>.
- Daikh, A.A., Houari, M.S.A., Belarbi, M.O., Mohamed, S.A. and Eltaher, M.A. (2022), "Static and dynamic stability responses of multilayer functionally graded carbon nanotubes reinforced composite nanoplates via quasi 3D nonlocal strain gradient theory", *Def. Technol.*, 18(10), 1778-1809. <https://doi.org/10.1016/j.dt.2021.09.011>.
- Daikh, A.A., Houari, M.S.A., Karami, B., Eltaher, M.A., Dimitri, R. and Tornabene, F. (2021), "Buckling analysis of CNTRC curved sandwich nanobeams in thermal environment", *Appl. Sci.*, 11(7), 3250. <https://doi.org/10.3390/app11073250>.
- Darjani H**, Mohammadabadi H",**2014**,"A new deformation beam theory for static and dynamic analysis of microbeams", "*Int J Mech Sci*",**89**,31-9,
- De Borbón, F., Ambrosini, D. and Curadelli, O. (2014), "Damping response of composites beams with carbon nanotubes", *Compos. Part B: Eng.*, 60, 106-110. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.12.041>.
- Dehrouyeh-Semnani AM**, Mostafaei H, Nikkhah-Bahrami M",**2016**,"Free flexural vibration of geometrically imperfect functionally graded microbeams", "*Int J Eng Sci*",**105**,56-79,
- Dehrouyeh-Semnani AM**, Nikkhah-Bahrami M",**2015**,"A discussion on evaluation of material length scale parameter based on micro-cantilever test", "*Compos Struct*",**122**,425-9,

- Dehrouyeh-Semnani AM, Nikkhah-Bahrami M",2015,"A discussion on incorporating the Poisson effect in microbeam models based on modified couple contrainte theory", "Int J Eng Sci",**86**,20-5,**
- Dell'Isola F, Andraus U, Placidi L",2015,"At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola", "Mathematics and Mechanics of Solids",**20**,887-928,**
- Dell'Isola F, Della Corte A, Esposito R, Russo L",2016,"Some cases of unrecognized transmission of scientific knowledge: From antiquity to Gabrio Piola's peridynamics and generalized continuum theories", "Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials: Springer**
- Djemai, H. (2017). Contribution à l'étude de l'endommagement dans les**
- Dobrilla, S., Matthies, H.G. and Ibrahimbegovic, A. (2023), "Considerations on the identifiability of fracture and bond properties of reinforced concrete", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 124(17), 3662-3686. <https://doi.org/10.1002/nme.7289>.
- Dos Santos JVA, Reddy JN",2012,"Free vibration and buckling analysis of beams with a modified couple-contrainte theory", "Int J Appl Mech",**4**,1250026-28,**
- Drai, A., Daikh, A.A., Belarbi, M.O., Houari, M.S.A., Aour, B., Hamdi, A. and Eltaher, M.A. (2023), "Bending of axially functionally graded carbon nanotubes reinforced composite nanobeams", *Adv. Nano Res.*, 14(3), 211-224. <https://doi.org/10.12989/anr.2023.14.3.211>
- Duan WH, Challamel N, Wang CM, Ding Z",2013,"Development of analytical vibration solutions for microstructured beam model to calibrate length scale coefficient in nonlocal Timoshenko beams", "J Appl Phys",**114**,104312-11,**
- Ebrahimi F, Barati MR",2016,"A unified formulation for dynamic analysis of nonlocal heterogeneous nanobeams in hygro-thermal environment", "Applied Physics A",**122**,792-806,**
- Ebrahimi F, Reza Barati M",2016,"Vibration analysis of nonlocal beams made of functionally graded material in thermal environment", "Eur Phys J Plus",**131**,279-301,**
- Ebrahimi F, Salari E",2015,"Nonlocal thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environment", "Acta Astronaut",**113**,29-50,**
- Ebrahimi F, Salari E",2015,"Thermal buckling and free vibration analysis of size dependent Timoshenko FG nanobeams in thermal environments", "Compos Struct",**128**,363-80,**
- Ebrahimi F, Salari E",2015,"Thermo-mechanical vibration analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on higher-order shear deformation beam theory", "J Mech Sci Technol",**29**,3797-803,**
- Ebrahimi F, Salari E",2015,"Thermo-mechanical vibration analysis of nonlocal temperature-dependent FG nanobeams with various boundary conditions", "Compos B Eng",**78**,272-90,**
- Ebrahimi F, Salari E",2016,"Effect of various thermal loadings on buckling and vibrational characteristics of nonlocal temperature-dependent functionally graded nanobeams", "Mech Adv Mater Struct",**23**,1379-97,**
- El-Borgi S, Fernandes R, Reddy JN",2015,"Non-local free and forced vibrations of graded nanobeams**

- resting on a non-linear elastic foundation", *Int J Non-Linear Mech*, **77**,348-63,
- El-Galy, I. M., Saleh, B. I., et al. (2019)**. Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, **1**, 1-23.
- Emam SA",2013**, "A general nonlocal nonlinear model for buckling of nanobeams", *Appl Math Model*, **37**,6929-39,
- Eringen AC",1964**, "Simple microfluids", *Int J Eng Sci*, **2**,205-17,
- Eringen AC",1966**, "Linear theory of micropolar elasticity", *Journal of Mathematics and Mechanics*, **15**,909-23,
- Eringen AC",1969**, "Micropolar fluids with stretch", *Int J Eng Sci*, **7**,115-27,
- Eringen AC",1972**, "Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves", *Int J Eng Sci*, **10**,425-35,
- Eringen AC",1972**, "Nonlocal polar elastic continua", *Int J Eng Sci*, **10**,1-16,
- Eringen AC",1983**, "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J Appl Phys*, **54**,4703-10,
- Eringen AC",1999**, "Microcontinuum field theories: I", *Foundations and solids* ,,,
- Eringen AC",2001**, "Microcontinuum field theories: II", *Fluent media: Springer* ,,,
- Eringen AC, Edelen DGB",1972**, "On nonlocal elasticity", *Int J Eng Sci*, **10**,233-48,
- Eringen, A.C. (1972), "Nonlocal polar elastic continua", *Int. J. Eng. Sci.*, 10(1), 1-16. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90070-5](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90070-5).
- Eringen, A.C. (1983), "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J. Appl. Phys.*, 54(9), 4703-4710. <https://doi.org/10.1063/1.332803>
- Esmaeilzadeh, M., Esmail Golmakani, M., Kadkhodayan, M., Amoozgar, M. and Bodaghi, M. (2021), "Geometrically nonlinear thermo-mechanical analysis of graphene-reinforced moving polymer nanoplates", *Adv. Nano Res.*, 10(2), 151-163. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.10.2.151>.
- Eyvazian, A., Zhang, C., Musharavati, F., Khan, A. and Mohamed, A.M. (2021), "Elastic wave phenomenon of nanobeams including thickness stretching effect", *Adv. Nano Res.*, 10(3), 271. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.10.3.271>.
- Fang B, Zhen YX, Zhang CP, Tang Y",2013**, "Nonlinear vibration analysis of double-walled carbon nanotubes based on nonlocal elasticity theory", *Appl Math Model*, **37**,1096-107,
- Farokhi H, Ghayesh MH, Amabili M",2013**, "Nonlinear dynamics of a geometrically imperfect microbeam based on the modified couple contrainte theory", *Int J Eng Sci*, **68**,11-23,
- F. Alijani, M. Amabili, F. Bakhtiari-Nejad, (2011)** Thermal effects on nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shells using higher order shear deformation theory, *Compos. Struct.* **93** 2541–2553, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.016>.
- Fernandez-Saez J, Zaera R, Loya JA, Reddy JN",2016**, "Bending of Euler-Bernoulli beams using Eringen's integral formulation: A paradox resolved", *Int J Eng Sci*, **99**,107-16,
- Fleck NA, Muller GM, Ashby MF, Hutchinson JW",1994**, "Strain gradient plasticity: Theory and

experiment", *Acta Metall Mater*, **42**, 475-87,

F.Z. Jouneghani, R. Dimitri, M. Baccocchi, F. Tornabene, (2017) Free vibration analysis of functionally graded porous doubly-curved shells based on the first-order shear deformation theory, *Appl. Sci.* **7** <http://dx.doi.org/10.3390/app7121252>.

Gebrehiwet, L., Abate, E., et al. (2023). Application of composite materials in aerospace & automotive industry. *International Journal of Advances in Engineering and Management (IJAEM)*, **5**(3), 697-723.

Ghandourah, E.E., Ahmed, H.M., Eltahir, M.A., Attia, M.A. and Abdraboh, A.M. (2021), "Free vibration of porous FG nonlocal modified couple nanobeams via a modified porosity model", *Adv. Nano Res.*, **11**(4), 405. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.11.4.405>.

Ghannadpour SAM, Mohammadi B, Fazilati J", **2013**, "Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method", *Compos Struct*, **96**, 584-9,

Ghayesh MH, Amabili M, Farokhi H", **2013**, "Three-dimensional nonlinear size-dependent behaviour of Timoshenko microbeams", *Int J Eng Sci*, **71**, 1-14,

Ghayesh MH, Farokhi H, Amabili M", **2013**, "Nonlinear dynamics of a microscale beam based on the modified couple contrainte theory", *Compos B Eng*, **50**, 318-24,

Gholami R, Ansari R, Rouhi H", **2015**, "Studying the effects of small scale and Casimir force on the non-linear pull-in instability and vibrations of FGM microswitches under electrostatic actuation", *Int J Non-Linear Mech*, **77**, 193-207,

Gholami, M., Azandariani, M.G., Ahmed, A.N. and Abdolmaleki, H. (2023), "Proposing a dynamic stiffness method for the free vibration of bi-directional functionally-graded Timoshenko nanobeams", *Adv. Nano Res.*, **14**(2), 127-139. <https://doi.org/10.12989/.2023.14.2.127>.

Gia Phi, B., Van Hieu, D., Sedighi, H.M. and Sofiyev, A.H. (2022), "Size-dependent nonlinear vibration of functionally graded composite micro-beams reinforced by carbon nanotubes with piezoelectric layers in thermal environments", *Acta Mechanica*, **233**(6), 2249-2270. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03224-4>.

Hajdo, E., Mejia-Nava, R.A., Imamovic, I. and Ibrahimbegovic, A. (2021), "Linearized instability analysis of frame structures under nonconservative loads: Static and dynamic approach", *Couple. Syst. Mech.*, **10**(1), 79-102. <https://doi.org/10.12989/csm.2021.10.1.079>.

H. Li, F. Pang, Y. Ren, X. Miao, K. Ye, (2019) Free vibration characteristics of functionally graded porous spherical shell with general boundary conditions by using first-order shear deformation theory, *Thin-Walled Struct.* **144** - 106331, <http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2019.106331>.

H. Li, F. Pang, H. Chen, Y. Du, (2019) Vibration analysis of functionally graded porous cylindrical shell with arbitrary boundary restraints by using a semi analytical method, *Composites B* **164** – 249 264, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.11.046>.

H. Li, F. Pang, H. Chen, Y. Shan, (2021) Free vibration analysis of combined composite laminated cylindrical and spherical shells with arbitrary boundary conditions, *Mech. Adv. Mater. Struct.* **28** 182–

199, <http://dx.doi.org/10.1080/15376494.2018.1553258>.

H. Li, F. Pang, Q. Gong, Y. Teng, (2019) Free vibration analysis of axisymmetric functionally graded doubly-curved shells with un-uniform thickness distribution based on Ritz method, *Compos. Struct.* **225** -111145, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111145>.

H. Matsunaga, (2008) Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory, *Compos. Struct.* **84** 132–146, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.07.006>.

Hsissou, R., Seghiri, R., Benzekri, Z., Hilali, M., Rafik, M., & Elharfi, A. (2021). Polymer composite materials: A comprehensive review. *Composite structures*, **262**, 113640.

Huang LY, Han Q, Liang YJ",2012,"Calibration of nonlocal scale effect parameter for bending single-layered graphene sheet under molecular dynamics",*"Nano"*,**7**,125003-8,

Ibrahimbegovic, A. and Nava, R.A.M. (2021), “Heterogeneities and material-scales providing physically-based damping to replace Rayleigh damping for any structure size”, *Couple. Syst. Mech.*, 10(3), 201-216. <https://doi.org/10.12989/csm.2021.10.3.201>.

Ibrahimbegovic, A., Mejia-Nava, R.A., Hajdo, E. and Linnios, N. (2022), “Instability of (Heterogeneous) Euler beam: Deterministic vs. stochastic reduced model approach”, *Couple. Syst. Mech.*, 11(2), 167-198. <https://doi.org/10.12989/csm.2022.11.2.167>.

Ibrahimbegovic, A., Rukavina, I. and Suljevic, S. (2022), “Multiscale model with embedded discontinuity discrete approximation capable of representing full set of 3D failure modes for heterogeneous materials with no scale separation”, *Int. J. Multisc. Comput. Eng.*, 20(1), 1-32. <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2021038378>.

Iijima S",1991,"Helical microtubules of graphitic carbon",*"Nature"*,**354**,56-8,

Iijima, S. (1991), “Helical microtubules of graphitic carbon”, *Nature*, **354**(6348), 56-58.

Iijima, S. (1991), “Helical microtubules of graphitic carbon”, *Nature*, 354(6348), 56-58.

Jamian, S., Watanabe, Y., et al. (2019). Formation of compositional gradient in al/sic fgms fabricated under huge centrifugal forces using solid-particle and mixed-powder methods. *Ceramics International*, **45**(7), 9444-9453.

Jérémié Aucher. (2009).Etude comparative des comportements composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable. Autre. INSA de Rouen. Français. ffNNT : 2009ISAM0012ff.

Jin, Q., Yuan, F.G. and Ren, Y. (2022), “Resonance interaction of flow-conveying nanotubes under forced vibration”, *Acta Mechanica*, 1-21. <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03425-x>.

Kahrobaiyan MH, Rahaeifard M, Tajalli SA, Ahmadian MT",2012,"A strain gradient functionally graded Euler-Bernoulli beam formulation",*"Int J Eng Sci"*,**52**,65-76,

Karama M, Afaq KS, Mistou S",2003,"Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multilayered laminated composite structures model with transverse shear contrainte continuity",*"Int J Solids Struct"*,**40**,1525-46,

Ke LL, Wang YS",2011,"Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on

- a modified couple contrainte theory", *Compos Struct*, **93**,342-50,
- Ke LL**, Wang YS, Yang J, Kitipornchai S",**2012**,"Nonlinear free vibration of size-dependent functionally graded microbeams", *Int J Eng Sci*, **50**,256-67,
- Ke, L.L., Yang, J. and Kitipornchai, S. (2013), "Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams", *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 20(1), 28-37. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.581412>.
- Khadir, A. I., Daikh, A.A. and Eltaher, M.A. (2021), "Novel four-unknowns quasi 3D theory for bending, buckling and free vibration of functionally graded carbon nanotubes reinforced composite laminated nanoplates", *Adv. Nano Res.*, 11(6), 621-640. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.11.6.621>.
- Khajueenejad F**, Ghanbari J",**2015**,"Internal length parameter and buckling analysis of carbon nanotubes using modified couple contrainte theory and Timoshenko beam model", *Materials Research Express*,**2**,105009-10,
- King, J.A., Via, M.D., Mills, O.P., Alpers, D.S., Sutherland, J.W. and Bogucki, G.R. (2012), "Effects of multiple carbon fillers on the electrical and thermal conductivity and tensile and flexural modulus of polycarbonate-based resins", *J. Compos. Mater.*, 46(3), 331-350. <https://doi.org/10.1177/0021998311422750>.
- Koiter WT**",**1964**,"Couple contraintes in the theory of elasticity, I and II", *Nederl Akad Wetensch Proc Ser B*",**67**,17-44,
- Koizumi. M (1996)** , "FGM activities in Japan, Department of Materials Chemistry", Ryukoku University Japan, Ohtsu 520-21.
- Kong S**, Zhou S, Nie Z, Wang K",**2008**,"The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler microbeams", *Int J Eng Sci*,**46**,427-37,
- Kong S**, Zhou S, Nie Z, Wang K",**2009**,"Size effect on the buckling loads of slender columns based on a modified couple contrainte theory", *Journal of Mechanical Strength*",**31**,136-9,
- Kong S**, Zhou S, Nie Z, Wang K",**2009**,"Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory", *Int J Eng Sci*",**47**,487-98,
- Kroner E**",**1967**,"Elasticity theory of materials with long range cohesive forces", *Int J Solids Struct*",**3**,731-42,
- Krysko AV**, Awrejcewicz J, Pavlov SP, Zhigalov MV, Krysko VA",**2017**,"Mathematical model of a three-layer micro- and nano-beams based on the hypotheses of the Grigolyuk-Chulkov and the modified couple contrainte theory", *Int J Solids Struct*",**117**,39-50,
- Lam DCC**, Yang F, Chong ACM, Wang J, Tong P",**2003**,"Experiments and theory in strain gradient elasticity", *J Mech Phys Solids*",**51**,1477-508,
- Lei J**, He Y, Zhang B, Gan Z, Zeng P",**2013**,"Bending and vibration of functionally graded sinusoidal microbeams based on the strain gradient elasticity theory", *Int J Eng Sci*",**72**,36-52,
- Li C**, Lim CW, Yu JL, Zeng QC",**2011**,"Analytical solutions for vibration of simply supported nonlocal nanobeams with an axial force", *Int J Struct Stab Dyn*",**11**,257-71,

- Lim C**, Zhang G, Reddy J",**2015**,"A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation",*J Mech Phys Solids*,"**78**,298-313,
- Lim, C.W., Zhang, G. and Reddy, J. (2015), "A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation", *J. Mech. Phys. Solid.*, 78, 298-313. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2015.02.001>.
- Lin, F. and Xiang, Y. (2014), "Vibration of carbon nanotube reinforced composite beams based on the first and third order beam theories", *Appl. Math. Model.*, 38(15-16), 3741-3754. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.02.008>.
- Liu YP**, Reddy JN",**2011**,"A nonlocal curved beam model based on a modified couple contrainte theory",*Int J Struct Stab Dyn*,"**11**,495-512,
- Liu**, D., Tang, Y., et al. (**2012**). A review of mechanical drilling for composite laminates. *Composite Structures*, **94**(4), 1265-1279.
- Lu P**, Lee HP, Lu C, Zhang PQ",**2007**,"Application of nonlocal beam models for carbon nanotubes",*Int J Solids Struct*,"**44**,5289-300,
- Lu**, L., Guo, X. and Zhao, J. (**2017**), "A unified nonlocal strain gradient model for nanobeams and the importance of higher order terms", *Int. J. Eng. Sci.*, **119**, 265-277. .
- Lu, L., Guo, X. and Zhao, J. (2017), "A unified nonlocal strain gradient model for nanobeams and the importance of higher order terms", *Int. J. Eng. Sci.*, 119, 265-277. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.06.024>.
- Ma HM**, Gao XL, Reddy JN",**2008**,"A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple contrainte theory",*J Mech Phys Solids*,"**56**,3379-91,
- Ma HM**, Gao XL, Reddy JN",**2010**,"A nonclassical Reddy-Levinson beam model based on a modified couple contrainte theory",*Int J Multiscale Comput Eng*,"**8**,167-80,
- Ma Q**, Clarke DR",**1995**,"Size dependent hardness of silver single crystals",*Journal of Materials Research*,"**10**,853-63,
- Mallick et al. (2023). Centrifugally cast functionally graded materials: Fabrication and challenges for probable automotive cylinder liner application. Ceramics International**, 49(6), 8649-8682.
- Mashat D**, Zenkour A, Sobhy M",**2016**,"Investigation of vibration and thermal buckling of nanobeams embedded in an elastic medium under various boundary conditions",*J Mech*,"**32**,277-87,
- matériaux composites sandwichés. (Thèse de Doctorat). Université Mohamed Khider – Biskra**,
- Mindlin RD"**,**1964**,"Micro-structure in linear elasticity",*Archive for Rational Mechanics and Analysis*,"**16**,51-78,
- Mindlin RD"**,**1965**,"Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity",*Int J Solids Struct*,"**1**,417-38,
- Mindlin RD**, Tiersten HF",**1962**,"Effects of couple-contraintees in linear elasticity",*Archive for Rational Mechanics and Analysis*,"**11**,415-48,

- Mohammad-Abadi M, Daneshmehr AR**,2014,"An investigation of modified couple contrainte theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler-Bernoulli and Timoshenko beams","Int J Eng Sci",**75**,40-53,
- Mohammad-Abadi M, Daneshmehr AR**,2014,"Size dependent buckling analysis of microbeams based on modified couple contrainte theory with high order theories and general boundary conditions","Int J Eng Sci",**74**,1-14,
- Mohammad-Abadi M, Daneshmehr AR**,2015,"Modified couple contrainte theory applied to dynamic analysis of composite laminated beams by considering different beam theories","Int J Eng Sci",**87**,83-102,
- Mohammad-Abadi M, Daneshmehr AR, Homayounfard M**,2015,"Size-dependent thermal buckling analysis of micro composite laminated beams using modified couple contrainte theory","Int J Eng Sci",**92**,47-62,
- Mohammadi H, Mahzoon M**,2013,"Thermal effects on postbuckling of nonlinear microbeams based on the modified strain gradient theory","Compos Struct",**106**,764-76,
- Moreno-Navarro, P., Ibrahimbegovic, A. and Damjanovic, D. (2021)**, "Multi-scale model for coupled piezoelectric-inelastic behavior", *Couple. Syst. Mech.*, 10(6), 521-544. <https://doi.org/10.12989/csm.2021.10.6.521>.
- M. Fadaee, S.R. Atashipour, S. Hosseini-Hashemi**, (2013) Free vibration analysis of Lévy-type functionally graded spherical shell panel using a new exact closedform solution, *Int. J. Mech. Sci.* **77** 227–238, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.10.008>.
- M. Sobhy, A.F. Radwan**, (2017) A new quasi 3D nonlocal plate theory for vibration and buckling of FGM nanoplates, *Int. J. Appl. Mech.* 9 <http://dx.doi.org/10.1142/S1758825117500089>.
- Murmu T, Pradhan SC**,2009,"Buckling analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM","Phys E",**41**,1232-9,
- Murmu T, Pradhan SC**,2009,"Thermo-mechanical vibration of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity theory","Comput Mater Sci",**46**,854-9,
- Mustapha KB, Zhong ZW**,2010,"Free transverse vibration of an axially loaded non-prismatic single-walled carbon nanotube embedded in a two-parameter elastic medium","Comput Mater Sci",**50**,742-51,
- Narendar S, Gopalakrishnan S**,2010,"Ultrasonic wave characteristics of nanorods via nonlocal strain gradient models","J Appl Phys",**107**,084312-8,
- Nateghi A, Salamat-talab M**,2013,"Thermal effect on size dependent behavior of functionally graded microbeams based on modified couple contrainte theory","Compos Struct",**96**,97-110,
- Nateghi A, Salamat-talab M, Rezapour J, Daneshian B**,2012,"Size dependent buckling analysis of functionally graded micro beams based on modified couple contrainte theory","Appl Math Model",**36**,4971-87,
- Nazemnezhad R, Hosseini-Hashemi S**,2014,"Nonlocal nonlinear free vibration of functionally graded

- nanobeams", "Compos Struct", **110**,192-9,
- Nejad MZ**, Hadi A",**2016**,"Eringen's non-local elasticity theory for bending analysis of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams", "Int J Eng Sci", **106**,1-9,
- Nejad MZ**, Hadi A, Rastgoo A",**2016**,"Buckling analysis of arbitrary two-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams based on nonlocal elasticity theory", "Int J Eng Sci", **103**,1-10,
- Nguyen NT**, Kim NI, Lee J",**2014**,"Analytical solutions for bending of transversely or axially FG nonlocal beams", "Steel Compos Struct", **17**,639-63,
- Nguyen, C.U., Hoang, T.V., Hadzalic, E., Dobrilla, S., Matthies, H.G. and Ibrahimbegovic, A. (2022), "Viscoplasticity model stochastic parameter identification: Multi-scale approach and Bayesian inference", *Couple. Syst. Mech.*, 11(5), 411-438. <https://doi.org/10.12989/csm.2022.11.5.411>
- Niknam H**, Aghdam MM",**2014**,"A semi analytical approach for large amplitude free vibration and buckling of nonlocal FG beams resting on elastic foundation", "Compos Struct", **119**,452-62,
- Nix WD**",**1989**,"Mechanical properties of thin films", "Metallurgical Transactions A", **20**,2217-45,
- Noori J**, Fariborz SJ, Vafa JP",**2016**,"A higher-order micro-beam model with application to free vibration", "Mech Adv Mater Struct", **23**,443-50,
- Norouzzadeh A**, Ansari R",**2017**,"Finite element analysis of nano-scale Timoshenko beams using the integral model of nonlocal elasticity", "Phys E", **88**,194-200,
- Norouzzadeh A**, Ansari R, Rouhi H",**2017**,"Pre-buckling responses of Timoshenko nanobeams based on the integral and differential models of nonlocal elasticity: an isogeometric approach", "Applied Physics A", **123**,330-41,
- N. Wattanasakulpong**, A. Chaikittiratana, (2015) An analytical investigation on free vibration of FGM doubly curved shallow shells with stiffeners under thermal environment, *Aerosp. Sci. Technol.* **40** 181–190, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2014.11.006>.
- Okamoto, M. (2006), "Recent advances in polymer/layered silicate nanocomposites: An overview from science to technology", *Mater. Sci. Technol.*, 22(7), 756-779. <https://doi.org/10.1179/174328406X101319>.
- Park SK**, Gao XL",**2006**,"Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple contrainte theory", "J Micromech Microengineering", **16**,2355-9,
- Peddieson J**, Buchanan GR, McNitt RP",**2003**,"Application of nonlocal continuum models to nanotechnology", "Int J Eng Sci", **41**,305-12,
- Pour HR**, Vossough H, Heydari MM, Beygipoor G, Azimzadeh A",**2015**,"Nonlinear vibration analysis of a nonlocal sinusoidal shear deformation carbon nanotube using differential quadrature method", "Struct Eng Mech", **54**,1061-73,
- Pradhan SC**, Murmu T",**2009**,"Small-scale effect on vibration analysis of single-walled carbon nanotubes embedded in an elastic medium using nonlocal elasticity theory", "J Appl Phys", **105**,124306-9,
- Prashanth**, S., Subbaya, K. M., Nithin, K., & Sachhidananda, S. (2017). Fiber reinforced composites-a

- review. *J. Mater. Sci. Eng.*, **6**(03), 2-6.
- Rafiee, M., Yang, J. and Kitipornchai, S. (2013), "Large amplitude vibration of carbon nanotube reinforced functionally graded composite beams with piezoelectric layers", *Compos. Struct.*, **96**, 716-725. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.10.005>.
- Rahaeifard M**, Kahrobaiyan MH, Ahmadian MT, Firoozbakhsh K",**2013**, "Strain gradient formulation of functionally graded nonlinear beams", *Int J Eng Sci*",**65**,49-63,
- Rahmani O**, Jandaghian AA",**2015**, "Buckling analysis of functionally graded nanobeams based on a nonlocal third-order shear deformation theory", *Applied Physics A*",**119**,1019-32,
- Rahmani O**, Pedram O",**2014**, "Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory", *Int J Eng Sci*",**77**,55-70,
- Rajabi F**, Ramezani S",**2013**, "A nonlinear microbeam model based on strain gradient elasticity theory", *Acta Mech Solida Sin*",**26**,21-34,
- Reddy JN**",**1984**, "A simple higher-order theory for laminated composite plates", *J Appl Mech Trans ASME*",**51**,745-52,
- Reddy JN**",**2007**, "Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams", *Int J Eng Sci*",**45**,288-307,
- Reddy JN**",**2011**, "Microstructure-dependent couple contrainte theories of functionally graded beams", *J Mech Phys Solids*",**59**,2382-99,
- Reddy JN**, Pang SD",**2008**, "Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes", *J Appl Phys*",**103**,023511-16,
- R.K. Khare**, T. Kant, A.K. Garg, (2004) Free vibration of composite and sandwich laminates with a higher-order facet shell element, *Compos. Struct.* **65** 405–418, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.12.003>.
- Roque CMC**, Ferreira AJM, Reddy JN",**2011**, "Analysis of Timoshenko nanobeams with a nonlocal formulation and meshless method", *Int J Eng Sci*",**49**,976-84,
- Roque CMC**, Fidalgo DS, Ferreira AJM, Reddy JN",**2013**, "A study of a microstructure-dependent composite laminated Timoshenko beam using a modified couple contrainte theory and a meshless method", *Compos Struct*",**96**,532-7,
- Sadatshojaei E**, Sadatshojaie A, Fakhar MH",**2016**, "Differential quadrature method for nonlocal nonlinear vibration analysis of a boron nitride nanotube using sinusoidal shear deformation theory", *Mech Adv Mater Struct*",**23**,1278-83,
- Sagar, S., Iqbal, N., Maqsood, A., Shahid, M., Shah, N.A., Jamil, T. and Bassyouni, M.I. (2015), "Fabrication and thermal characteristics of functionalized carbon nanotubes impregnated polydimethylsiloxane nanocomposites", *J. Compos. Mater.*, **49**(8), 995-1006. <https://doi.org/10.1177/0021998314528733>.
- Sahmani S**, Ansari R",**2013**, "Size-dependent buckling analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams including thermal environment effect", *Appl Math Model*",**37**,9499-515,

- Sahmani S**, Bahrami M, Ansari R",2014,"Nonlinear free vibration analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams based on the modified strain gradient elasticity theory",*Compos Struct*",**110**,219-30,
- Salamat-talab M**, Nateghi A, Torabi J",2012,"Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple contrainte theory",*Int J Mech Sci*",**57**,63-73,
- Salem, K.S., Lubna, M.M., Rahman, A.M., NurNabi, M., Islam, R. and Khan, M.A. (2015), "The effect of multiwall carbon nanotube additions on the thermo-mechanical, electrical, and morphological properties of gelatin–polyvinyl alcohol blend nanocomposite", *J. Compos. Mater.*, 49(11), 1379-1391. <https://doi.org/10.1177/0021998314534704>.
- Sam**, M., Jojith, R., et al. (2021). Progression in manufacturing of functionally graded materials and impact of thermal treatment—a critical review. *Journal of Manufacturing Processes*, **68**, 1339-1377.
- Senghor**, F. D. (2017). Identification des propriétés anisotropes des matériaux complexes: Application aux matériaux composites stratifiés. Nantes,
- Shafiei N**, Kazemi M, Ghadiri M",2016,"Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams",*Int J Eng Sci*",**102**,12-26,
- Shafiei N**, Kazemi M, Safi M, Ghadiri M",2016,"Nonlinear vibration of axially functionally graded nonuniform nanobeams",*Int J Eng Sci*",**106**,77-94,
- Shen, H.S. (2009), "Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments", *Compos. Struct.*, 91(1), 9-19. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.04.026>.
- Shen, H.S. and Xiang, Y. (2012), "Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 213, 196-205. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.11.025>.
- Shen, H.S. and Xiang, Y. (2013), "Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments", *Eng. Struct.*, 56, 698-708. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.06.002>.
- Shi G**",2007,"A new simple third-order shear deformation theory of plates",*Int J Solids Struct*",**44**,4399-417,
- Shimpi RP**",2002,"Refined plate theory and its variants",*AIAA Journal*",**40**,137-46,
- Simsek M**",2012,"Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods",*Comput Mater Sci*",**61**,257-65,
- Simsek M**",2014,"Large amplitude free vibration of nanobeams with various boundary conditions based on the nonlocal elasticity theory",*Compos B Eng*",**56**,621-8,
- Simsek M**",2014,"Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple contrainte theory and He's variational method",*Compos Struct*",**112**,264-72,
- Simsek M**",2015,"Size dependent nonlinear free vibration of an axially functionally graded (AFG)

- microbeam using He's variational method", *Compos Struct*, **131**,207-14,
- Simsek M**, Kocaturk T, Akbas SD",**2013**, "Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple contrainte theory", *Compos Struct*, **95**,740-7,
- Simsek M**, Reddy JN",**2013**, "A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple contrainte theory", *Compos Struct*, **101**,47-58,
- Simsek M**, Reddy JN",**2013**, "Bending and vibration of functionally graded microbeams using a new higher order beam theory and the modified couple contrainte theory", *Int J Eng Sci*, **64**,37-53,
- Simsek M**, Yurtcu HH",**2013**, "Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory", *Compos Struct*, **97**,378-86,
- Soldatos KP**",**1992**, "A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates", *Acta Mech*, **94**,195-220,
- Stolken JS**, Evans AG",**1998**, "A microbend test method for measuring the plasticity length scale", *Acta Mater*, **46**,5109-15,
- Sudak LJ**",**2003**, "Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics", *J Appl Phys*, **94**,7281-7,
- Suljevic, S., Ibrahimbegovic, A., Karavelic, E. and Dolarevic, S. (2022), "Meso-scale based parameter identification for 3D concrete plasticity model", *Couple. Syst. Mech.*, 11(1), 55-78. <https://doi.org/10.12989/csm.2022.11.1.055>.
- Taati E**, Molaei Najafabadi M, Basirat Tabrizi H",**2014**, "Size-dependent generalized thermoelasticity model for Timoshenko microbeams", *Acta Mech*, **225**,1823-42,
- Tajalli SA**, Rahaeifard M, Kahrobaiyan MH, Movahhedy MR, Akbari J, Ahmadian MT",**2013**, "Mechanical behavior analysis of size-dependent micro-scaled functionally graded Timoshenko beams by strain gradient elasticity theory", *Compos Struct*, **102**,72-80,
- Takahashi, M.**, Itoh, Y., et al. (1990). Fabrication and evaluation of w/cu gradient material by sintering and infiltration technique. Paper presented at the Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM.
- Thai HT**",**2012**, "A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams", *Int J Eng Sci*, **52**,56-64,
- Thai HT**, Choi DH",**2013**, "Efficient higher-order shear deformation theories for bending and free vibration analyses of functionally graded plates", *Arch Appl Mech*, **83**,1755-71,
- Thai HT**, Kim SE",**2013**, "A simple quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates", *Compos Struct*, **99**,172-80,
- Thai HT**, Kim SE",**2015**, "A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells", *Compos Struct*, **128**,70-86,
- Thai HT**, Vo TP",**2012**, "A nonlocal sinusoidal shear deformation beam theory with application to bending, buckling, and vibration of nanobeams", *Int J Eng Sci*, **54**,58-66,

- Thai HT**, Vo TP, Bui TQ, Nguyen TK",**2014**,"A quasi-3D hyperbolic shear deformation theory for functionally graded plates",*"Acta Mech"*,**225**,951-64,
- Thai HT**, Vo TP, Nguyen TK, Lee J",**2015**,"Size-dependent behavior of functionally graded sandwich microbeams based on the modified couple contrainte theory",*"Compos Struct"*,**123**,337-49,
- Thai S**, Thai HT, Vo TP, Patel VI",**2017**,"A simple shear deformation theory for nonlocal beams",*"Compos Struct"*,**10**.1016/j.compstruct.2017.03.022.
- Tlidji, Y., Benferhat, R., Daouadji, T.H., Tounsi, A. and Trinh, L.C. (2022), "Free vibration analysis of FGP nanobeams with classical and non-classical boundary conditions using State-space approach", *Adv. Nano Res.*, 13(5), 453-463. <https://doi.org/10.12989/anr.2022.13.5.453>.
- Togun N**, Bagdatli SM",**2016**,"Size dependent nonlinear vibration of the tensioned nanobeam based on the modified couple contrainte theory",*"Compos B Eng"*,**97**,255-62,
- Tojaga, V., Gasser, T.C., Kulachenko, A., Östlund, S. and Ibrahimbegovic, A. (2023), "Geometrically exact beam theory with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in structures. Part I: Formulation and finite element implementation", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 410, 116013. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116013>.
- Tounsi A**, Benguediab S, Houari MSA, Semmah A",**2013**,"A new nonlocal beam theory with thickness stretching effect for nanobeams",*"Int J Nanosci"*,**12**,1350025-8,
- Tounsi A**, Semmah A, Bousahla AA",**2013**,"Thermal buckling behavior of nanobeams using an efficient higher-order nonlocal beam theory",*"J Nanomech Micromech"*,**3**,37-42,
- Toupin RA**",**1962**,"Elastic materials with couple-contraintees",*"Archive for Rational Mechanics and Analysis"*,**11**,385-414,
- Touratier M**",**1991**,"An efficient standard plate theory",*"Int J Eng Sci"*,**29**,901-16,
- Trinh LC**, Nguyen HX, Vo TP, Nguyen T-K",**2016**,"Size-dependent behaviour of functionally graded microbeams using various shear deformation theories based on the modified couple contrainte theory",*"Compos Struct"*,**154**,556-72,
- Vatankhah R**, Kahrobaiyan MH, Alasty A, Ahmadian MT",**2013**,"Nonlinear forced vibration of strain gradient microbeams",*"Appl Math Model"*,**37**,8363-82,
- Vondřejc, J. (2022), "Synergy of stochastics and inelasticity at multiple scales: novel Bayesian applications in stochastic upscaling and fracture size and scale effects", *SN Appl. Sci.*, 4, 191. <https://doi.org/10.1007/s42452-022-04935-y>.
- Wang B**, Liu M, Zhao J, Zhou S",**2010**,"A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory",*"Eur J Mech A Solids"*,**29**,591-9,
- Wang B**, Liu M, Zhao J, Zhou S",**2014**,"A size-dependent Reddy-Levinson beam model based on a strain gradient elasticity theory",*"Meccanica"*,**49**,1427-41,
- Wang CM**, Kitipornchai S, Lim CW, Eisenberger M",**2007**,"Vibration of nonlocal Timoshenko beams",*"Nanotechnology"*,**18**,105401-9,
- Wang CM**, Kitipornchai S, Lim CW, Eisenberger M",**2008**,"Beam bending solutions based on

- nonlocal Timoshenko beam theory", *J Eng Mech*, **134**,475-81,
- Wang CM**, Zhang YY, Ramesh SS, Kitipornchai S",**2006**,"Buckling analysis of micro- and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory", *Journal of Physics D*",**39**,3904-9,
- Wang L**",**2010**,"Vibration analysis of fluid-conveying nanotubes with consideration of surface effects", *Phys E*",**43**,437-9,
- Wang Q**",**2005**,"Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics", *J Appl Phys*",**98**,124301-6,
- Wang Q**, Liew KM",**2007**,"Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nanostructures", *Phys Lett A*",**363**,236-42,
- Wang Q**, Varadan VK",**2006**,"Vibration of carbon nanotubes studied using nonlocal continuum mechanics", *Smart Mater Struct*",**15**,659-66,
- Wang Q**, Varadan VK, Quek ST",**2006**,"Small scale effect on elastic buckling of carbon nanotubes with nonlocal continuum models", *Phys Lett A*",**357**,130-5,
- Wang Q**, Wang CM",**2007**,"The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes", *Nanotechnology*",**18**,075702-4,
- Wang YG**, Lin WH, Liu N",**2013**,"Nonlinear free vibration of a microscale beam based on modified couple contrainte theory", *Phys E*",**47**,80-5,
- Wang YG**, Lin WH, Liu N",**2015**,"Nonlinear bending and post-buckling of extensible microscale beams based on modified couple contrainte theory", *Appl Math Model*",**39**,117-27,
- Wang YG**, Lin WH, Zhou CL, Liu RX",**2014**,"Thermal postbuckling and free vibration of extensible microscale beams based on modified couple contrainte theory", *J Mech*",**31**,37-46,
- Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. (2013), "Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation", *Comput. Mater. Sci.*, 71, 201-208. <https://doi.org/10.1016/j.commat.2013.01.028>.
- Witvrouw, A. and Mehta, A. (2005), "The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications", *Mater. Sci. Forum*, 492, 255-260. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.492-493.255>.
- Wu CP**, Lai WW",**2015**,"Free vibration of an embedded single-walled carbon nanotube with various boundary conditions using the RMVT-based nonlocal Timoshenko beam theory and DQ method", *Phys E*",**68**,8-21,
- Wu, H., Kitipornchai, S. and Yang, J. (2017), "Imperfection sensitivity of thermal post-buckling behaviour of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams", *Appl. Math. Model.*, 42, 735-752. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.10.045>.
- Xia W**, Wang L, Yin L",**2010**,"Nonlinear non-classical microscale beams: Static bending, postbuckling and free vibration", *Int J Eng Sci*",**48**,2044-53,
- Xiang S**, Jin Y-x, Bi Z-y, Jiang S-x, Yang M-s",**2011**,"A n-order shear deformation theory for free vibration of functionally graded and composite sandwich plates", *Compos Struct*",**93**,2826-32,

- Xie X**, Zheng H, Yang H",**2015**,"Indirect radial basis function approach for bending, free vibration and buckling analyses of functionally graded microbeams",*"Compos Struct"*,**131**,606-15,
- Yamamoto, N., de Villoria, R.G. and Wardle, B.L. (2012), "Electrical and thermal property enhancement of fiber-reinforced polymer laminate composites through controlled implementation of multi-walled carbon nanotubes", *Compos. Sci. Technol.*, 72(16), 2009-2015. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2012.09.006>.
- Yang F**, Chong ACM, Lam DCC, Tong P",**2002**,"Couple contrainte based strain gradient theory for elasticity",*"Int J Solids Struct"*,**39**,2731-43,
- Yas, M.H. and Samadi, N. (2012), "Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation", *Int. J. Press. Ves. Pip.*, 98, 119-128. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2012.07.012>.
- Yoshihisa Uchida**, "(2004) Properties of functionally graded materials, Manufactured by Progressive Lamination Method for Applications ",**39**-51-B, Vol. 39-B.
- Zemri A**, Houari MSA, Bousahla AA, Tounsi A",**2015**,"A mechanical response of functionally graded nanoscale beam: An assessment of a refined nonlocal shear deformation theory beam theory",*"Struct Eng Mech"*,**54**,693-710,
- Zhang B**, He Y, Liu D, Gan Z, Shen L",**2013**,"A novel size-dependent functionally graded curved microbeam model based on the strain gradient elasticity theory",*"Compos Struct"*,**106**,374-92,
- Zhang B**, He Y, Liu D, Gan Z, Shen L",**2014**,"Size-dependent functionally graded beam model based on an improved third-order shear deformation theory",*"Eur J Mech A Solids"*,**47**,211-30,
- Zhang YQ**, Liu GR, Xie XY",**2005**,"Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity",*"Physical Review B"*,**71**,195404-7,
- Zhang Z**, Wang CM, Challamel N",**2014**,"Eringen's length scale coefficient for buckling of nonlocal rectangular plates from microstructured beam-grid model",*"Int J Solids Struct"*,**51**,4307-15,
- Zhang Z**, Wang CM, Challamel N",**2015**,"Eringen's length-scale coefficients for vibration and buckling of nonlocal rectangular plates with simply supported edges",*"J Eng Mech"*,**141**,04014117-10,
- Zhang Z**, Wang CM, Challamel N, Elishakoff I",**2014**,"Obtaining Eringen's length scale coefficient for vibrating nonlocal beams via continualization method",*"J Sound Vib"*,**333**,4977-90,
- Zhao J**, Zhou S, Wang B, Wang X",**2012**,"Nonlinear microbeam model based on strain gradient theory",*"Appl Math Model"*,**36**,2674-86,
- Zhao, J.L., Chen, X., She, G.L., Jing, Y., Bai, R.Q., Yi, J., ... & Luo, J. (2022), "Vibration characteristics of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite double-beams in thermal environments", *Steel Compos. Struct.*, 43(6), 797-808. <https://doi.org/10.12989/scs.2022.43.6.797>.
- Zidour M**, Benrahou KH, Semmah A, Naceri M, Belhadj HA, Bakhti K, et al",**2012**,"The thermal effect on vibration of zigzag single walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory",*"Comput Mater Sci"*,**51**,252-60,

