

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mustapha STAMBOULI de Mascara
Faculté des Sciences et de la Technologie



Polycopié de Cours

Ondes et vibrations

Cours et exercices corrigés

Présenté par :

Nacera SERIR

Ce cours est destiné aux étudiants de la deuxième année licence, spécialités :
électrotechnique, électronique, électromécanique, automatique et biomédical.

Algérie
2025

Avant-propos

Conforme aux programmes LMD (Licence-Master-Doctorat) défini par arrêté ministériel du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique, ce fascicule s'adresse aux étudiants de la deuxième année licence, domaines des Sciences et Technologie (ST), dont les spécialités suivantes : électrotechnique, électronique, électromécanique, automatique et biomédical. Il est conçu de façon à aplanir au mieux les difficultés inhérentes au discours scientifique tout en conservant la rigueur nécessaire. Cet ouvrage présente l'ensemble des notions et des bases abordées en ondes et vibrations mécanique durant la deuxième année licence ST. Ainsi également, des exercices corrigés sont proposés en fin de chaque chapitre permettant à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux partiels et aux examens.

Le cours est subdivisé en deux parties principales, la première partie traite des oscillateurs contient cinq chapitres et la seconde partie traite les ondes réparties en quatre chapitres.

Dans la première partie, le premier chapitre est consacré aux équations de Lagrange, dont l'objectif était de donner une introduction sur ces équations dans les différents systèmes. Le deuxième chapitre est dédié à l'étude et l'analyse du mouvement libre à un degré de liberté. Des différents formalismes sont utilisés pour la détermination de l'équation du mouvement des oscillateurs harmoniques tel que le pendule élastique et le circuit LC. Dans ce chapitre on a présenté le mouvement amorti à un degré de liberté d'un oscillateur soumis aux forces de frottement, ou nous nous sommes intéressés uniquement aux forces de frottements visqueux. Ensuite l'équation du mouvement et sa solution dans les différents régimes est présentée et discutée. Dans le troisième chapitre on a présenté la réponse d'un système amorti à un degré de liberté à une excitation harmonique sinusoïdale produite par une force extérieure au système. Ensuite Le phénomène de résonance est mis en évidence par les résultats issus de la description d'un mouvement forcé à un degré de liberté, Nous avons consacré le quatrième et le cinquième chapitre aux oscillations libres et oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté respectivement ou les équations des systèmes masses-ressorts-amortisseurs sont déterminées avec leurs solutions. Dans cette partie nous pouvons voir les analogies entre les systèmes électriques et mécaniques.

La deuxième partie se limite sur l'étude de l'équation de propagation des ondes électromagnétiques est constitué de quatre chapitres, généralités sur le phénomène de propagation en sixième chapitre ou nous avons donné quelques définitions des grandeurs physiques et représenté l'équation d'Alembert à une dimension. Par la suite la solution de cette équation dans les différentes dimensions est détaillée. Le chapitre sept est consacré aux cordes vibrantes où nous représentons l'équation de propagation d'une corde vibrante dans les deux cas, corde de longueur finie et infinie, et leur solution. L'étude de l'équation des ondes acoustiques dans les fluides est représentée dans le huitième chapitre. Enfin les ondes électromagnétiques en dernier chapitre.

Le cours présenté dans ce polycopié de cours est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants de deuxième année Licence (ST) à l'université Mustapha STAMBOULI de Mascara. Il s'agit d'un cours de physique 3 "Ondes et Vibrations".

Table des Matières

Avant-propos.....	i
-------------------	---

Chapitre 1 : Introduction aux équations de Lagrange

1.1	Equation de Lagrange pour une particule.....	2
1.1.1	Equation de Lagrange.....	2
1.1.1.1	Coordonnées généralisées d'un système physique.....	2
1.1.1.2	Degré de liberté.....	2
1.1.1.3	Equation de Lagrange.....	3
1.1.2	Cas des systèmes conservatifs.....	5
1.1.3	Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse.....	5
1.1.4	Cas d'une force extérieure dépendant du temps.....	6
1.2	Système à plusieurs degrés de liberté.....	6
1.3	Exercices.....	7
1.4	Solutions.....	8

Chapitre 2 : Oscillation libres des systèmes à un degré de liberté

2.1	Oscillations non amorties.....	12
2.1.1	Équation du mouvement.....	12
2.1.2	Solution de l'équation différentielle du mouvement.....	12
2.1.3	Etude d'une vibration harmonique en termes d'énergies.....	13
2.1.4	Oscillations électriques.....	14
2.1.5	Analogie électromécanique.....	15
2.2	Oscillations libres des systèmes amorties.....	16
2.2.1	Equation de Lagrange dans les oscillations amorties.....	16
2.2.2	Equation différentielle du mouvement des systèmes amorties.....	17

2.2.3	<i>Solution de l'équation différentielle du mouvement.....</i>	17
2.2.4	<i>Analogie électromécanique.....</i>	20
2.3	Exercices.....	22
2.4	Solutions.....	24

Chapitre 3 : Oscillation forcées des systèmes à un degré de liberté

3.1	Equations différentielles.....	31
3.2	Système masse-ressort-amortisseur.....	31
3.3	Solution des équations différentielles.....	32
3.3.1	<i>Excitation harmonique.....</i>	32
3.3.2	<i>Excitation périodique.....</i>	35
3.4	Impédance mécanique.....	35
3.4.1	<i>Impédance.....</i>	35
3.4.2	<i>Masse.....</i>	35
3.4.3	<i>Ressort.....</i>	36
3.5	Analogie électromécanique.....	36
3.6	Exercices.....	37
3.7	Solutions.....	38

Chapitre 4 : Oscillation libres des systèmes à deux degrés de liberté

4.1	Introduction.....	46
4.2	Système à deux degrés de liberté.....	46
4.2.1	<i>Equations différentielles de mouvement.....</i>	46
4.2.2	<i>Types de couplages.....</i>	46
4.2.2.1	<i>Couplage élastique.....</i>	46
4.2.2.2	<i>Couplage visqueux.....</i>	47
4.2.2.3	<i>Couplage inertiel.....</i>	47
4.2.3	<i>Equations différentielles de mouvement (Pendules couplés)</i>	47
4.2.3.1	<i>Equations différentielles du mouvement.....</i>	48

4.2.3.2	<i>Pulsations propres d'oscillation.....</i>	49
4.2.3.3	<i>Modes des oscillations.....</i>	50
4.2.3.4	<i>Calcul des solutions des équations différentielles.....</i>	51
4.3	Exercices.....	52
4.4	Solutions.....	53

Chapitre 5 : Oscillation forcées des systèmes à deux degrés de liberté

5.1	Equations de Lagrange.....	64
5.2	Système masse-ressort-amortisseur.....	64
5.2.1	<i>Equations différentielles de mouvement.....</i>	64
5.3	Solution des équations différentielles.....	65
5.3.1	<i>Calcul de χ_1 et χ_2 dans le cas de faible amortissement.....</i>	65
5.3.2	<i>Etude de la variation de χ_1 et χ_2.....</i>	66
5.4	Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté.....	67
5.5	Exercices.....	68
5.6	Solutions.....	69

Chapitre 6 : Phénomènes de propagation à une dimension

6.1	Généralité et définitions de base.....	74
6.1.1	<i>Définition d'une onde.....</i>	74
6.1.2	<i>Onde progressive.....</i>	74
6.2	Equation de propagation.....	76
6.3	Solution de l'équation de propagation.....	76
6.2.1	<i>Propriété de $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$.....</i>	76
6.2.2	<i>Propriété de $g\left(t + \frac{r}{v}\right)$.....</i>	77
6.4	Onde progressive sinusoïdale.....	77
6.3.1	<i>Force en un point.....</i>	78
6.3.2	<i>Vitesse de particules.....</i>	78
6.3.3	<i>Impédance.....</i>	79
6.5	Superposition de deux ondes progressives sinusoïdale.....	80

6.4.1	Cas de deux ondes de même pulsation.....	80
6.4.2	Cas de deux ondes de pulsation différente.....	80
6.6	Exercices.....	81
6.7	Solutions.....	81

Chapitre 7 : Cordes vibrantes

7.1	Equations des ondes.....	84
7.2	Vitesse du son.....	85
7.3	Ondes progressives harmoniques.....	85
7.4	Oscillations libres d'une onde de longueur finie.....	85
7.5	Réflexion et transmission.....	86
7.6	Exercices.....	88
7.7	Solutions.....	88

Chapitre 8 : Cordes acoustiques dans les fluides

8.1	Equation d'onde.....	91
8.2	Vitesse du son.....	94
8.3	Onde progressive sinusoïdale.....	94
8.4	Réflexion-transmission.....	95
8.5	Exercices.....	95
8.6	Solutions.....	96

Chapitre 9 : Ondes électromagnétiques

9.1	Equation d'onde.....	98
9.2	Réflexion-transmission.....	98
9.2.1	Polarisation électrique perpendiculaire au plan d'incidence.....	99
9.2.2	Polarisation électrique parallèle au plan d'incidence.....	101
9.3	Différents types des ondes électromagnétiques.....	103
Bibliographie.....		106

Chapitre 1

Introduction aux équations de Lagrange

L'équation de Lagrange est un outil fondamental en mécanique analytique qui permet de décrire le mouvement dynamique des systèmes physiques en utilisant des coordonnées généralisées. Cette équation permet de formuler les lois du mouvement d'une manière qui simplifier l'analyse des systèmes complexes.

1.1 Equation de Lagrange pour une particule

1.1.1 Equation de Lagrange

1.1.1.1 Coordonnées généralisées d'un système physique

Les coordonnées Généralisées sont l'ensemble de variables réelles indépendantes ou liées permettant de décrire et configurer tous les éléments du système à tout instant t .

Exemples :

- Un point matériel libre dans l'espace peut être déterminé par 3 coordonnées généralisées (x, y, z) ;
- Un corps solide peut être déterminé par 6 coordonnées généralisées :
 - * 03 coordonnées relatives au centre de gravité;
 - * 03 coordonnées liées aux angles d'Euler (φ, ψ, θ) .

On note :

- Les coordonnées généralisées : $q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)$.
- Les vitesses généralisées : $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_N(t)$.
- Les accélérations généralisées : $\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \dots, \ddot{q}_N(t)$.

1.1.1.2 Degré de liberté

Le degré de liberté (ddl) d'un système est le nombre minimal de coordonnées généralisées indépendantes nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant :

$$d = N - r$$

Avec :

- d est le degré de liberté,
- N est le nombre de coordonnées généralisées,
- r est le nombre de relations ou contraintes reliant ces coordonnées entre elles.

Remarques :

- Les contraintes peuvent être géométriques, cinématiques ou imposées par des liaisons mécaniques.
- Si les coordonnées sont toutes indépendantes ($r=0$), alors $d = N$

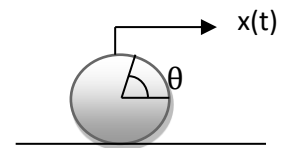
Exemples :

1. Un disque de masse m et de rayon r , roule sans glisser sur un plan horizontal.

Ici on a deux coordonnées généralisées x et θ , donc : $N = 2$.

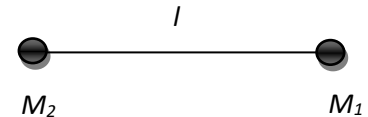
x et θ sont liées avec une relation : $x = r\theta$, donc : $r = 1$.

Le nombre de degrés de liberté : $d = N - r = 1$.



2. Un système mécanique constitué de 02 points matériels M_1 et M_2 reliés d'une tige de longueur l .

$$\left. \begin{array}{l} M_1(x_1, y_1, z_1): 3 \\ M_2(x_2, y_2, z_2): 3 \end{array} \right\} \Rightarrow N = 6$$



L'équation de liaison : $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = cte \Rightarrow r = 1 \Rightarrow d = 5$

1.1.1.3 Equation de Lagrange

Une particule de masse m astreinte à se déplacer sans frottement sa position est repérée par une coordonnée généralisée q et un vecteur de position $\vec{r}(q)$:

D'après le Principe fondamentale de la dynamique on a :

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.1)$$

Avec : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ est la vitesse de particule.

$\vec{F}$: la résultante de toutes les forces agissant sur la particule.

Lors d'un déplacement infinitésimal δr le travail fourni $\delta w = F \delta r$ par F est :

$$\delta w = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q \Rightarrow \frac{\delta w}{\delta q} = F \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = F_q. \quad (1.2)$$

Avec: F_q est la force généralisée conjuguée de q .

Remplaçant l'équation (1.1) dans l'équation (1.2) :

$$\delta w = m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \delta q. \quad (1.3)$$

D'autre part :

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} + \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right) \quad (1.4)$$

Donc
$$\frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right) - \vec{v} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right) \quad (1.5)$$

Sachant que :
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right) = \frac{d}{dq} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \right) \quad (1.6)$$

Remplaçant dans l'équation (1.5) on trouve :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \quad (1.7)$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ peut s'écrire :

$$\vec{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta q} \cdot \frac{\delta q}{\delta t} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta q} \dot{q} \quad (1.8)$$

D'où la relation :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \quad (1.9)$$

Sachant que :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} \quad (1.11)$$

L'équation (1.9) devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (1.12)$$

L'expression de travail peut alors s'écrire :

$$\delta w = m \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] \delta q \quad (1.13)$$

Donc :

$$\delta w = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} \right] \delta q \quad (1.14)$$

Avec $T \equiv E_c = \frac{1}{2} m v^2$ est l'énergie cinétique de la masse m , on obtient finalement l'équation d'Alembert pour un système à un degré de liberté.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = F_q. \quad (1.15)$$

C'est l'équation de Lagrange pour une particule

1.1.2 Cas des systèmes conservatifs

Pour un système conservatif, la force appliquée dérive d'un potentiel $F_q = -\frac{\partial U}{\partial q}$, l'équation (1.15) s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (1.16)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (1.17)$$

Puisque l'énergie potentielle U est indépendante de la vitesse donc $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$.

L'équation (1.17) devient:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial q} = 0 \quad (1.18)$$

On introduit la fonction de Lagrange ($L = T - U = E_c - E_p$). L'équation (1.18) devient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1.19)$$

C'est l'équation de Lagrange pour un **système conservatif**.

Remarque :

- Pour un mouvement unidimensionnel x , l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \left(\frac{dL}{dx} \right) = 0$$

- Pour un mouvement rotationnel θ , l'équation de Lagrange s'écrit :

1.1.3 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse

Dans le cas d'une force de frottement dépendant de la vitesse ($\vec{f} = -\alpha \vec{v}$), le système dissipe de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il ya donc une relation entre la force F_q et la

fonction de dissipation D d'un côté et la fonction de dissipation D et le coefficient de frottement visqueux α :

$$\begin{cases} F_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \\ D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2 \end{cases} \quad (1.20)$$

Remplaçons l'équation (1.20) dans l'équation (1.15), l'équation de Lagrange devient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad (1.21)$$

C'est l'équation de Lagrange dans le cas des forces de frottement dépendant de la vitesse.

1.1.4 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation (1.21) s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{\text{ext}.q} \quad (1.22)$$

- L'équation de **Lagrange de translation**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_j F_{\text{ext}.q}$$

- L'équation de **Lagrange de rotation**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_j M_{\Delta}(F_{\text{ext}.q})$$

F_{ext} : forces extérieures appliquées : $\begin{cases} \text{Force de Frottement au système} \\ \text{Force entraînant le mouvement (sinusoïdal)} \end{cases}$

$M_{\Delta}(F_{\text{ext}.q}) = F_{\text{ext}.q} \cdot r$ est le moment de la force

r : est la rayon de rotation

1.2 Système à plusieurs degrés de liberté

Pour un système à plusieurs degrés de liberté,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i F_{\text{ext}.q_i} \quad (1.23)$$

Avec: $i = 1, 2, 3, \dots$

1.3 Exercices :

Exercice 1 :

Dans les systèmes mécaniques illustrés ci-dessous, les positions d'équilibre sont indiquées par des lignes en pointillés.

1. Définir les liaisons et le nombre de degrés de liberté du point matériel dans chaque système.
2. Quelles coordonnées généralisées peuvent être utilisées pour caractériser le déplacement de ce point ?

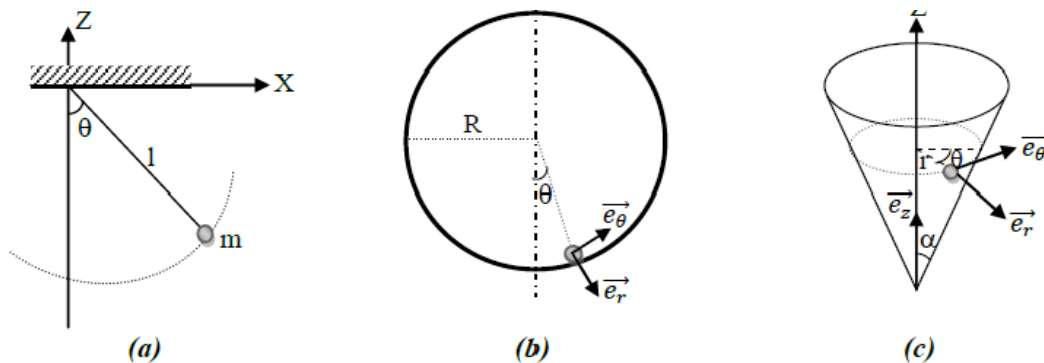


Fig.1.1 : (a) pendule simple, (b) cercle, (c) cône.

Exercice 2 :

Soit le système mécanique de la figure I.2.

Le système constitué d'une masse m et un ressort de constante de raideur équivalente k .

Trouver l'équation différentielle du mouvement par le formalisme de Lagrange.

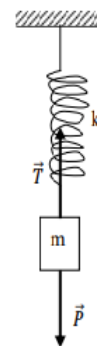


Fig 1.2

Exercice 3 :

Déterminer l'équation de mouvement d'un pendule simple de la Figure (1.3), constitué d'une masse m et fils de longueur l de masse négligeable pour des faibles oscillations par la méthode de Newton puis par la méthode de Lagrange.

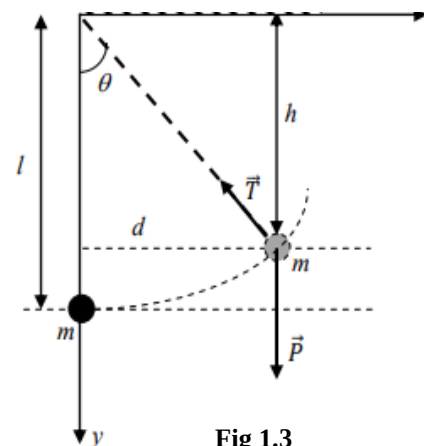


Fig 1.3

1.4 Solutions :

Exercice 1 :

Calcule du nombre de degré de liberté du point matériel dans chaque système.

- **Cas du système (a) :**

1. Le point m est défini par :

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ z = l \cos \theta \end{cases} \Rightarrow N = 2$$

2. Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + z^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{x^2 + z^2} = cte \Rightarrow r = 1$$

D'où le nombre de degré de liberté du système (a) est : $d=2-1=1$

La coordonnée généralisée qui définit le système (a) est : θ .

- **Cas du système (b) :**

1. Le vecteur position d'un point M est défini par : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = \sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases} \Rightarrow N = 2$$

2. Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + y^2 = R^2 = cte \Rightarrow r = 1.$$

D'où le nombre de degré de liberté le système (b) est : $d=2-1=1$.

- **Cas du système (c) :**

1. Le point M est défini par :

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases} \Rightarrow N = 2.$$

2. Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + z^2 = R^2 = cte \Rightarrow r = 1.$$

D'où le nombre de degré de liberté le système (c) est : $d=2-1=1$.

Exercice 2 :

Equation de Lagrange est : $\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) - \left(\frac{dL}{dx} \right) = 0.$

Lagrangien du système est donné par : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2.$

Avec : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ et $E_p = \frac{1}{2} k x^2.$

En utilisant l'équation de Lagrange :

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = m\dot{x} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{x}} \right) = m\ddot{x}.$$

$$\frac{dL}{dx} = -kx.$$

Equation différentielle de mouvement est comme suit :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Equation différentielle de mouvement de type: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$

Avec la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$

Exercice 3 :

Equation de Lagrange caractérisant le système est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \left(\frac{dL}{d\theta} \right) = 0.$$

Lagrangien est donné par : $L = E_c - E_p = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta.$

Avec :

L'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$

L'énergie cinétique potentiel : $E_p = -mgh = -mgl \cos \theta$

Pour les faibles oscillations : $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}.$

Energie potentielle s'écrit :

$$E_p = -mgh = -mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = -mgl + \frac{mgl}{2} \theta^2.$$

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + -mgl - \frac{1}{2} mgl \theta^2.$$

En utilisant l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \left(\frac{dL}{d\theta} \right) = 0.$$

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \text{ et } \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) = ml^2\ddot{\theta}.$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -mgl\theta.$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange :

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est la pulsation libre.

Chapitre 2

Oscillation libres des systèmes à un degré de liberté

2.1 Oscillations non amorties

Un oscillateur est un dispositif dont certains paramètres peuvent évoluer dans le temps de façon périodique autour d'une valeur d'équilibre. Un système régit par une seule coordonnée généralisée (q), oscillant en absence de toute force d'excitation ($f(t) = 0$) est appelé, oscillateur libre à un seul degré de liberté (1ddl).

2.1.1 Équation du mouvement

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti est de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.1)$$

Cette équation est obtenue par le formalisme de Lagrange des systèmes conservatifs :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \left(\frac{dL}{dq} \right) = 0. \quad (2.2)$$

L'équation (2.1) est appelée « *équation différentielle, d'ordre 2 sans second membre, de l'oscillateur harmonique simple* ».

Exemples :

- **Cas de translation : un système masse-ressort :**

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.3)$$

- **Cas de rotation: un pendule simple :**

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti ($\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$) est une équation du second ordre sans second membre, sa solution est une fonction sinusoïdale de temps, de la forme :

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ ou } q(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.5)$$

Avec: A est l'amplitude des oscillations;

φ est la phase initiale;

ω_0 est la pulsation du système, elle dépend des éléments constitutifs (masse, ressort, fils...);

A et φ sont calculés à partir des conditions initiales : $q(t = 0) = q_0$ et $\dot{q}(t = 0) = \dot{q}_0$.

2.1.3 Etude d'une vibration harmonique en termes d'énergies

Nous voulons montrer que l'énergie totale (mécanique) $E = T + U$, est constante et déduire la valeur de cette constante.

Prenons le cas du système masse ressort, l'énergie mécanique est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.6)$$

$$\text{Avec : } x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2.7)$$

Sachant que : $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ et en utilisant la relation : $k = m\omega_0^2$.

$$\text{Alors : } E = \frac{1}{2}A^2m\omega_0^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \quad (2.8)$$

Nous retrouvons ici le fait que l'énergie mécanique de ce système ne varie pas. L'énergie totale est constante.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2[1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (2.9)$$

$$T = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\left[1 - \frac{x^2}{A^2}\right]. \quad (2.10)$$

$$\text{si : } \begin{cases} x = 0, T = T_{\max} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \\ x = \pm A; T_{\min} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\text{d'autre part : } U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 \quad (2.12)$$

$$\text{si : } \begin{cases} x = 0, U = U_{\min} = 0 \text{ (position d'équilibre)} \\ x = \pm A; U_{\max} = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \end{cases} \quad (2.13)$$

La figure suivante montre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x :

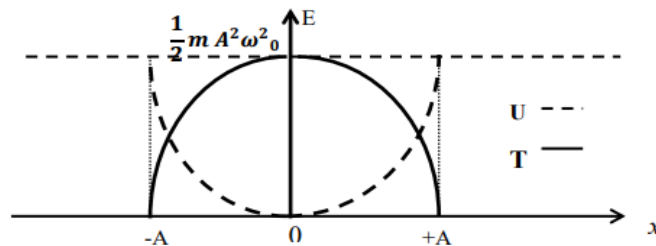


Fig. 2.1 : variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x .

- L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle.
- Quand l'énergie cinétique diminue l'énergie potentielle augmente et vice versa. Cette propriété est appelée **conservation de l'énergie** totale du système.

2.1.4 Oscillations électriques

a. Loi de Kirchhoff

Considérons un circuit LC (Fig. 2.2).

D'après la loi des mailles :
$$U_L + U_C = 0 \quad (2.14)$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (2.15)$$

Sachant que : $i = \frac{dq}{dt}$ et $\left(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0\right)/L$.

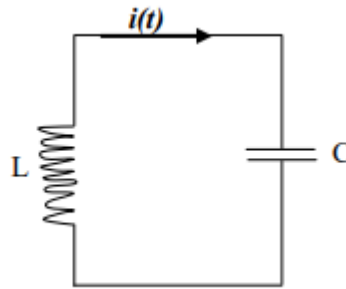


Fig.2.2: circuit LC .

On arrive à :

$$\ddot{q} + \frac{L}{C}q = 0 \quad (2.16)$$

C'est l'équation différentielle de mouvement d'un oscillateur électrique libre.

b. Formalisme de Lagrange

$$T = E_{mag} = V_L dq = \int L \frac{di}{dt} dq = \int L i di = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2. \quad (2.17)$$

$$U = E_{elec} = V_C dq = \int \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} q^2. \quad (2.18)$$

Le Lagrangien : $L = T - U = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2$.

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) - \left(\frac{dL}{dq} \right) = 0. \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \frac{dL}{d\dot{q}} = L\dot{q} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{q}}\right) = L\ddot{q} \\ \frac{dL}{dq} = -\frac{1}{c}q \end{cases}.$$

L'équation différentielle de mouvement est : $\left(L\ddot{q} + \frac{1}{c}q = 0\right)/L \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ (2.20)

et la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (2.21)

2.1.5 Analogie électromécanique

L'analogie entre le système mécanique masse-ressort et le système électrique LC est regroupée dans le tableau suivant :

Tableau 2.1: analogie électromécanique.

<i>Système mécanique</i>		<i>Système électrique</i>
<i>Translation</i>	<i>Rotation</i>	<i>Circuit LC</i>
Déplacement : x	Angle : θ	Charge : q
Vitesse : $\dot{x}$	Vitesse angulaire : $\dot{\theta}$	Courant : $\dot{q}$
Accélération : $\ddot{x}$	Accélération angulaire : $\ddot{\theta}$	Variation de courant : $\ddot{q}$
Masse : m	Moment d'inertie : J_O	Inductance : L
Constante de raideur : k	Constante de torsion : C	Inverse de la capacité : $1/C$
Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	Energie cinétique : $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$
Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}kx^2$	Energie potentielle : $U = \pm mgh$	Energie électrique : $U = \frac{1}{2c}q^2$

2.2 Oscillations libres des systèmes amorties

Dans la partie précédente, nous n'avons pas pris en considération les forces de frottement, du coup l'oscillateur oscille sans jamais s'arrêter. En réalité, le système oscille en présence des forces de frottement visqueux, et l'oscillateur fini par s'arrêter et s'équilibrer. Dans cette partie on doit tenir compte de l'influence de la force de frottement de type visqueux $\vec{f}_{fr} = -\alpha \vec{v}$ sur les oscillations du système, où α est le coefficient de frottement et $\vec{v}$ la vitesse de la masse du système (Fig.2.4).

Ce type de mouvement est appelé mouvement **amorti**, l'amortisseur est schématisé et modélisé par le schéma montré dans la figure 2.3.



Fig.2.3: schéma d'un dispositif amortisseur.

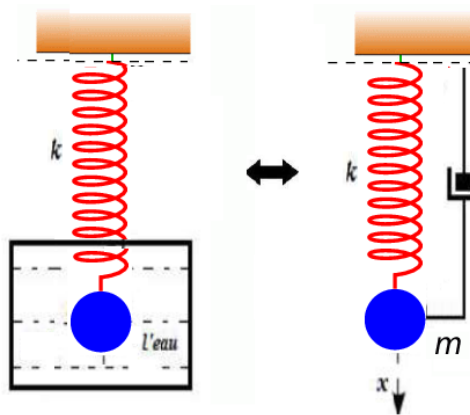


Fig.2.4: système masse-ressort- amortisseur

2.2.1 Equation de Lagrange dans les oscillations amorties

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti, s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} \quad (2.22)$$

L'étude de l'oscillateur amorti se fait de la même façon que précédemment mais en ajoutant la force de frottement visqueux.

2.2.2 Equation différentielle du mouvement des systèmes amortis

Reprenons l'exemple masse-ressort soumis à une translation dans la direction (x) en présence des forces de frottement, en utilisant le formalisme de Lagrange:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \alpha\dot{x}(t) = 0 \quad (2.23)$$

Ou encore :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (2.24)$$

En terme de coordonnée généralisée q :

$$\ddot{q}(t) + 2\lambda\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0 \quad (2.25)$$

Ceci est une équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants.

Avec : $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

- α est constante positive, appelée coefficient de frottement : $\left[\frac{N.s}{m}\right]$
- λ est un facteur d'amortissement.

2.2.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

On se propose une solution à l'équation différentielle sous la forme: $q(t) = e^{rt}$

où r est une constante à définir. En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient l'équation caractéristique suivante:

$$e^{rt}(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2) = 0. \quad (2.26)$$

Le discriminant Δ' donné par:

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2. \quad (2.27)$$

Il existe trois types de solutions selon la valeur de ce discriminant, à savoir:

a. Cas d'un amortissement fort: ($\Delta' > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0$)

Dans ce cas, les solutions réelles négatives de l'équation caractéristique sont données par:

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \\ r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad (2.28)$$

la solution générale de l'équation différentielle est la superposition des deux solutions correspondantes à r_1 et r_2 , à savoir:

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (2.29)$$

Où A_1 et A_2 sont des coefficients à déterminer par les conditions initiales: $\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$

Remarque :

- Il est utile de noter que la solution ci-dessus ne contient aucun terme représentant un mouvement d'oscillation (sinusoïdal). On dit alors que le système a un mouvement **apériodique**, c-à-d $q(t)$ est un mouvement non sinusoïdal.
- En effet, le système une fois lâché de sa position d'équilibre ne fait que revenir à sa position d'équilibre sans faire d'oscillation, tellement l'amortissement appliqué est fort.
- $q(t)$ tend vers 0 sans oscillation quand le temps augmente.

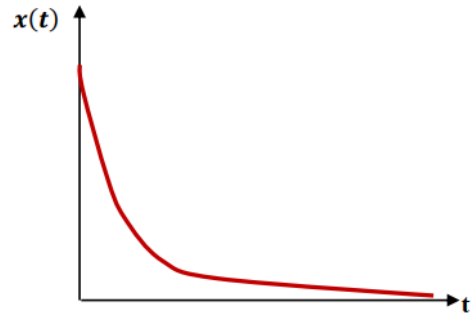


Fig.2.5

b. Cas d'un amortissement critique: $\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0$.

Dans ce cas, une seule solution de l'équation caractéristique existe:

$$r_1 = r_2 = r = -\lambda \quad (2.30)$$

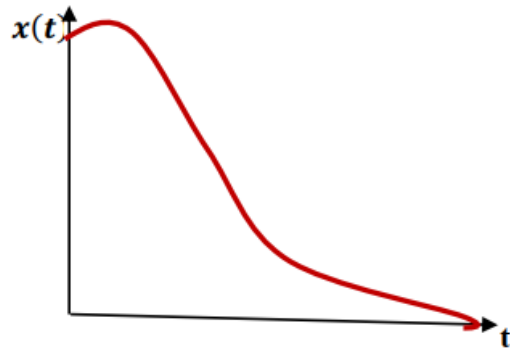
On se propose une solution sous la forme:

$$q(t) = (A_1 t + A_2) e^{rt} \quad (2.31)$$

Où A_1 et A_2 sont des coefficients à déterminer par les conditions initiales: $\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$

Remarque :

- $q(t)$ n'est pas oscillatoire car il ne contient pas un terme sinusoïdal.
- $q(t)$ tend vers 0 sans oscillation quand le temps augmente.
- Le système revient à sa position d'équilibre le plus rapidement possible.

**Fig.2.6**

- Pas de terme dans l'équation horaire qui indique une oscillation du système. On dit que le système a **un mouvement amorti critique**.

c. Cas d'un amortissement faible: $\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0$.

Deux solutions complexes existent :

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ r_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \end{cases} \quad (2.32)$$

La solution générale de l'équation différentielle est la superposition des deux solutions correspondantes à r_1 et r_2 , à savoir:

$$q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \quad (2.33)$$

$$q(t) = e^{-\lambda t} (A_1 e^{\omega_a t} + A_2 e^{-\omega_a t}) \quad (2.34)$$

$$\text{Avec: } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (2.35)$$

ω_a est la **pseudo-pulsation** du système,

A_1 et A_2 sont des coefficients à déterminer par les conditions initiales: $\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases}$

Il est possible de réécrire la solution (2.34) sous une forme réelle:

$$q(t) = A e^{-\lambda t} (\cos \omega_a t + \varphi) \quad (2.36)$$

où A et φ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

$$\text{On définit aussi la } \textbf{pseudo-période} \text{ du mouvement comme suit: } T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad (2.37)$$

Remarque :

- Le système fait des oscillations à cause de la présence dans la solution du terme cosinus avec une **pseudo-pulsation** ω_a .
- L'amplitude de mouvement, en présence d'amortissement (faible), décroît en exponentielle avec le temps. Ceci est une caractéristique du mouvement d'un système mécanique soumis à une force de frottement de type visqueux avec :

- $q(t)$ représente un mouvement vibratoire.
- L'amplitude $Ae^{-\lambda t}$ est décroissante :

$q(t)$ tend vers 0 quand t augmente.

- L'élongation $q(t)$ va osciller en restant comprise

entre $-Ae^{-\lambda t}$ et $Ae^{-\lambda t}$.

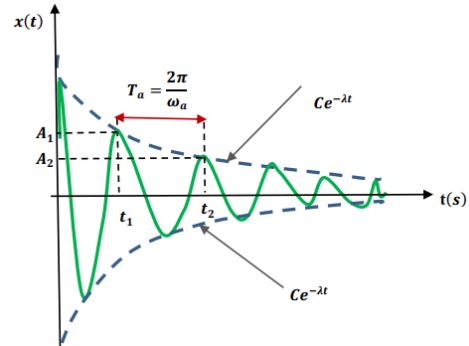


Fig.2.7

Ces deux exponentielles représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur c'est-à-dire les positions extrémales prises par q lorsque le temps s'écoule.

- L'oscillation est dite : **sous-amorti** ou **faiblement amorti**

On définit le décrément logarithmique δ qui représente la décroissance de l'amplitude après une seule pseudo-période du système comme suit:

$$\delta = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} \quad (2.38)$$

2.2.4 Analogie électromécanique

Soit un circuit oscillant RLC en série représenté par la figure (2.8).

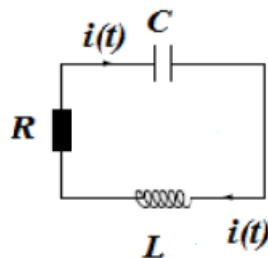


Fig.2.8 : circuit RLC .

L'application des lois de Kirchhoff donne l'équation suivante:

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = 0 \quad (2.39)$$

Sachant que le courant $i(t)$ pendant un temps dt apporte une charge dq telle que:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2.40)$$

On obtient alors l'équation différentielle du mouvement comme suit:

$$\left(L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + \frac{q}{C} = 0 \right) / L. \quad (2.41)$$

On remarque que cette équation est équivalente à l'équation d'un mouvement oscillatoire amorti représenté comme suit:

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}\dot{q}(t) + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (2.42)$$

En constatant la similitude entre les équations différentielles gouvernant le système mécanique et le système électrique, on peut faire les analogies électromécaniques suivantes:

Tableau 2.2: analogie électromécanique.

<i>Caractéristiques</i>	<i>Système mécanique</i>	<i>Système électrique</i>
Déplacement	$x(t)$	$q(t)$
Equation du mouvement	$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\ddot{q}(t) + 2\lambda\dot{q}(t) + \omega_0^2 q = 0$
Pulsation propre ω_0	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
Facteur d'amortissement λ	$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$	$\lambda = \frac{R}{2L}$
Amortisseur	α	R
Ressort	k	$1/C_{eqv}$
Masse	m	L

2.3 Exercices

Exercice 1 :

On considère un système composé d'une tige de masse M et de longueur $2L$ Qui peut pivoter dans le plan vertical autour du point O . Les deux extrémités sont attachées à des bâtis par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k (Fig.2.9).

A l'équilibre la tige est verticale et les ressorts sont au repos.

La tige est écartée de son état d'équilibre puis relâchée sans vitesse initiale pour osciller librement. La période des oscillations mesuré est de 1 s.

1. Calculer l'énergie cinétique du système en fonction de θ .
2. Calculer l'énergie potentielle du système en fonction de θ .
3. Etablir l'équation de mouvement du système et donner l'expression de la pulsation propre ω_0 .
4. Si $L=1\text{ m}$ et la $M= 0.5\text{ kg}$, $T=1\text{ s}$, calculer la constante de raideur k .

On donne : $g=9.81\text{ m/s}^2$.

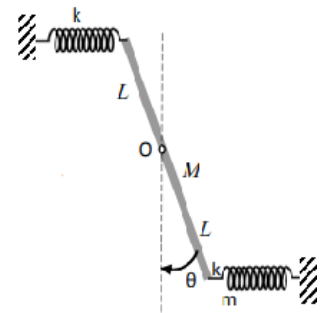


Fig.2.9

Exercice 2 :

Dans la figure ci-contre (Fig.2.10), M et R représentent respectivement la masse et le rayon d'une poulie homogène de moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.

A la poulie sont fixés un ressort de raideur k et un corps de masse m par un fil non élastique de masse négligeable.

On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie.

Si x est le déplacement vertical de la masse m .

Trouver l'équation du mouvement et la pulsation propre du système.

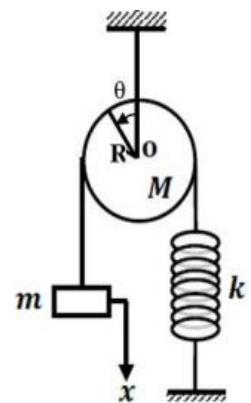


Fig.2.10

Exercice 3 :

On définit un oscillateur amorti régi par l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0.$$

où m est la masse du corps, k est le constante de raideur et x est le déplacement du corps.

On lance le système avec une vitesse initiale $v_0 = 25 \text{ cm/s}$.

Donc, on a : $t=0 \text{ s}$, $x=0 \text{ m}$ et $\dot{x} = v_0$.

1. Calculer la période propre du système, Sachant que : $m=150 \text{ g}$ et $k=3.8 \text{ N/m}$.
2. Montrer que si $\alpha=0.6 \text{ kg/s}$, le corps a un mouvement oscillatoire amorti.
3. Résoudre dans ce cas l'équation différentielle.
4. Calculer le pseudo-période du mouvement.
5. Calculer le temps t_m au bout duquel la première amplitude x_m est atteinte. En déduire x_m .
6. Calculer la vitesse d'une pseudo-période.

Exercice 4 :

Supposons que le système suivant (Fig.2.11) effectue des oscillations de faibles amplitudes.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de λ et ω_0 .

2. Pour $\lambda < \omega_0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle.

On donne : $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.

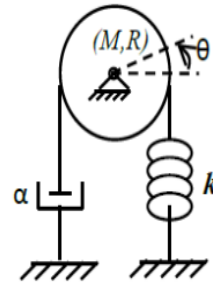


Fig.2.11

Exercice 5 :

Le circuit ci-contre est constitué d'un condensateur de capacité $C = 5 \mu\text{F}$, d'une bobine d'inductance $L = 0.5 \text{ mH}$ et d'une résistance $R=5 \text{ m}\Omega$.

Le condensateur est initialement chargé à une tension de 25 V .

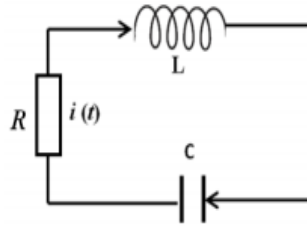


Fig.2.12 : circuit RLC.

1. A l'aide de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle que satisfait la charge q dans le circuit.
2. Trouver cette équation différentielle en fonction de la tension U_C du condensateur.
3. Dédire la solution de cette équation.
4. Représenter l'analogie mécanique de cet oscillateur harmonique.

2.3 Solutions

Exercice 1 :

1. Energie cinétique du système en fonction de θ

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{M(2L)^2}{12} \dot{\theta}^2 = \frac{ML^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

2. Energie potentielle du système en fonction de θ

$$E_p = \frac{1}{2} k(L\theta)^2 + \frac{1}{2} k(L\theta)^2 = kL^2 \theta^2.$$

3. Equation de mouvement du système par la méthode de Lagrange

L'équation de Lagrange pour ce système s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \left(\frac{dL}{d\theta} \right) = 0 \text{ avec } L = E_c - E_p = \frac{ML^2}{6} \dot{\theta}^2 - kL^2 \theta^2.$$

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = \frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \text{ et } \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) = \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta}.$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -2kL^2 \theta.$$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange :

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + 2kL^2 \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{6k}{m} \theta = 0 \text{ qui représente l'équation différentielle du mouvement}$$

libre non amorti.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ est la pulsation d'oscillation.

4. Si $L=1\text{ m}$ et la $M=0.5\text{ kg}$, $T=1\text{ s}$

Calcul de la constante de raideur k

$$T = 1\text{ s}, \text{ donc } \omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{T}} = 2\pi\text{ rad s}^{-1}.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6k}{m}} = 2\pi \Rightarrow k = 3.23\text{ Nm}^{-1}.$$

Exercice 2 :

Le moment d'inertie d'une poulie homogène : $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$

Equation du mouvement et la pulsation propre ω_0 du système :

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m$

$$T = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{avec } x = R\theta.$$

$$E_c = T = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta}^2$$

- Energie potentielle : $E_p = U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R\theta)^2$
- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) - \left(\frac{dL}{d\theta}\right) = 0$

$$\frac{dL}{d\dot{\theta}} = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = -kR^2\theta$$

- En remplaçant dans l'équation de Lagrange :

$$\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{(M+2m)}\theta = 0.$$

$$\text{et } \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{(M+2m)}}.$$

Exercice 3 :

1. Equation du mouvement amorti est de forme :

$$(m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0)/m \Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec: $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

2. Période propre du système est T_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \text{ rad/s.}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{5} = 1.25 \text{ s.}$$

3. Equation différentielle du mouvement se transforme en :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = -21 < 0.$$

Avec: $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 21 \text{ rad/s.}$

4. Le corps m a un mouvement oscillatoire amorti.

La résolution de cette équation différentielle est de forme :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

En appliquant les conditions initiales :

$$t = 0 \text{ s}; x = 0; \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

A $t = 0$ s:

$$\dot{x} = v_0 \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_a}.$$

La solution finale sera exprimée comme suit : $x(t) = \frac{v_0}{\omega_a} e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t \pm \frac{\pi}{2})$.

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_a} e^{-\lambda t} \sin \omega_a t.$$

5. Pseudo-période se calcule comme suit : $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 1.37 \text{ s}$

6. Temps de la première amplitude t_m

Il faut que : $\dot{x}(t = t_m) = \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=t_m} = 0 \Rightarrow t_m = \frac{\arctg \frac{\omega_a}{\lambda}}{\omega_a} = 0.25 \text{ s} \neq \frac{T}{4}.$

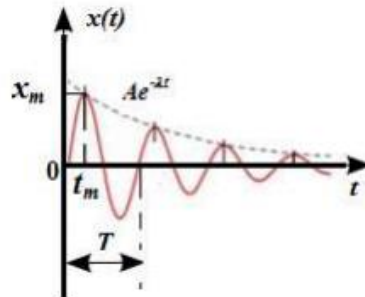


Fig.2.13 : mouvement oscillatoire amorti.

La figure ci-dessus représente le mouvement oscillatoire amorti.

Exercice 4 :

1. Equation différentielle du mouvement en fonction de λ et ω_0 .

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2} J_{/O} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2} k (R\theta)^2$
- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta})^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k (R\theta)^2$
- Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = k R^2 \theta \text{ et } \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2 \dot{\theta}.$$

L'équation de Lagrange : $\frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + k R^2 \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M} \dot{\theta} + \frac{2k}{M} \theta = 0.$

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec } \lambda = \frac{\alpha}{M} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{2k}{M}.$$

2. Solution de l'équation différentielle, lorsque $\lambda < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi), \text{ avec : } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{2k}{M} - \left(\frac{\alpha}{M}\right)^2}.$$

Exercice 5 :

1. Equation différentielle :

Suivant la loi des mailles on peut écrire : $U_L + U_R + U_C = 0 \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0.$

La charge $q(t)$ est liée au courant $i(t)$ par :

$$q(t) = \int i dt \Rightarrow i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{ et } \frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$$

$$\text{Donc: } L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \Leftrightarrow L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = 0.$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \Leftrightarrow \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

C'est une équation différentielle d'un oscillateur libre amorti

Avec : $2\lambda = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

2. Equation différentielle en fonction de la tension U_C du condensateur

On a : $U_C = \frac{q}{C} \Rightarrow \begin{cases} q = C U_C \\ \dot{q} = C \dot{U}_C \\ \ddot{q} = C \ddot{U}_C \end{cases}$

Suivant la loi des mailles on peut écrire :

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Leftrightarrow C \ddot{U}_C + 2\lambda C \dot{U}_C + \omega_0^2 C U_C = 0.$$

$$\Leftrightarrow \ddot{U}_C + 2\lambda \dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0.$$

Avec: $2\lambda = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

3. Solution de l'équation différentielle

On cherche une solution de la forme : $q(t) = Ae^{rt}$.

En remplaçant ceci dans l'équation du mouvement on obtient :

$$r^2 Ae^{rt} + 2\lambda Ae^{rt} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

$$2\lambda = \frac{R}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{5 \times 10^{-3}}{2 \times 0.5 \times 10^{-3}} = 5.$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{0.5 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2.$$

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0.$$

Dans ce cas l'amortissement est faible et le mouvement est dit **pseudo-périodique**.

L'équation caractéristique admet deux solutions complexes:

$$\begin{cases} r_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \\ r_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \end{cases}$$

L'équation du mouvement résultant est :

$$q(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi).$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \approx 2 \times 10^4 \text{ rad/s}.$$

L'équation du mouvement devient : $q(t) = Ae^{-5t} \cos(2 \times 10^4 t + \varphi).$

4. Analogie mécanique de cet oscillateur harmonique :

$$\left\{ \begin{array}{l} L \Leftrightarrow m \\ q(t) \Leftrightarrow x(t) \\ R \Leftrightarrow m \cdot \\ \frac{1}{c} \Leftrightarrow k \end{array} \right.$$

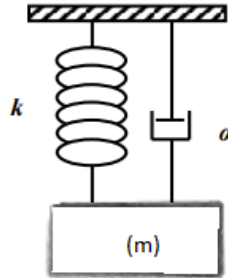


Fig.2.14 : système d'oscillatoire amorti.

Chapitre 3

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

Une oscillation forcée concerne tout système en mouvement sous l'action d'une force extérieure. Dans ce chapitre, on étudie la réponse d'un système amorti à 1 ddl à une excitation produite par une force extérieure au système. Ce type d'excitation se rencontre fréquemment dans l'industrie (machines tournantes, ventilateurs, moteurs, ...).

3.1 Equations différentielles

L'équation différentielle d'oscillations forcées à un degré de liberté est obtenue par le formalisme de Lagrange comme suit :

- **Cas du mouvement de translation**

Pour un mouvement de translation, on écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F_{ext} \quad (3.1)$$

- **Cas du mouvement de rotation**

Pour un mouvement de rotation, on écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + M(F_{ext}) \quad (3.2)$$

Avec: $M(F_{ext})$ est le moment de la force appliquée, donné par :

$$M(F_{ext}) = F_{ext} \times r \quad (3.3)$$

3.2 Système masse-ressort-amortisseur

Considérons le système masse-ressort-amortisseur excité par une force extérieure $F(t)$. On a un mouvement de translation donc l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F(t) \quad (3.4)$$

Avec :

- Lagrangien : $L = T - U$ (3.5)

- L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (3.6)

- L'énergie potentielle : $U = \frac{1}{2} k x^2$ (3.7)

- Le Lagrangien : $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$ (3.8)

- La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ (3.9)

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} \end{cases}$$

Remplaçant dans l'équation de Lagrange (3.1), on trouve :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t) \quad (3.10)$$

Si on divise par (m), l'équation devient :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (3.11)$$

C'est l'équation différentielle **du mouvement des oscillations forcés** pour le système masse-ressort-amortisseur à 1ddl.

Où l'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (3.12)$$

Avec : $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

3.3 Solution de l'équation différentielle

3.3.1 Excitation harmonique

Dans le cas où l'excitation est sinusoïdale de type : $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ l'équation du mouvement (3.12) s'écrit sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \quad (3.13)$$

La solution générale de l'équation différentielle est donnée par :

$$x(t) = x_t(t) + x_p(t) \quad (3.14)$$

Où $x_t(t)$ est la solution homogène correspond à la solution de l'équation différentielle sans second membre, déjà obtenue dans le cas d'un système amorti : $(\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0)$ (chapitre 2) alors que $x_p(t)$ est la solution particulière qui a la même forme que le second membre de l'équation différentielle ci-dessus.

- **Solution transitoire (homogène) $x_p(t)$**

Dans le cas d'un faible amortissement, la solution sans second membre a la forme générale suivante :

$$x_t(t) = Ce^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) \quad (3.15)$$

Remarquons que la solution homogène sans second membre s'annule au bout d'un certain temps à cause de la présence du terme exponentiel. Le système est dit dans le ***régime transitoire***.

- ***Solution permanente (particulière) $x_p(t)$***

La solution particulière est donnée par :

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \quad (3.16)$$

où A est l'amplitude du mouvement de la masse en réponse à la force extérieure et ϕ le déphasage de la masse par rapport à la force extérieure.

Finalement la solution générale se met sous la forme :

$$x(t) = Ce^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) + A \cos(\Omega t + \phi) \quad (3.17)$$

Une fois la solution transitoire s'annule, le mouvement de la masse devient sinusoïdal simple avec une amplitude constante A , avec la même pulsation Ω que la force extérieure mais avec un déphasage ϕ . Le système est donc dans ***le régime permanent***.

Pour obtenir les expressions de A et ϕ il serait utile de passer à la notation complexe de la solution proposée pour le régime permanent, à savoir :

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow A e^{j(\Omega t + \phi)} \quad (3.18)$$

$$\dot{x}(t) \rightarrow j A \Omega e^{j(\Omega t + \phi)} \quad (3.19)$$

$$\ddot{x}(t) \rightarrow -A \Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)} \quad (3.20)$$

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \rightarrow F_0 e^{j \Omega t} \quad (3.21)$$

En remplaçant dans l'équation (3.12), l'équation du mouvement devient :

$$-A \Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)} + 2\lambda j A \Omega e^{j(\Omega t + \phi)} + \omega_0^2 A e^{j(\Omega t + \phi)} = \frac{F_0}{m} e^{j \Omega t} \quad (3.22)$$

On simplifier par $e^{j \Omega t}$ on obtient

$$-A\Omega^2 e^{j\Phi} + 2\lambda j A \Omega e^{j\Phi} + \omega_0^2 A e^{j\Phi} = \frac{F_0}{m} \Rightarrow -A\Omega^2 + 2\lambda j A \Omega + \omega_0^2 A = \frac{F_0}{m} e^{-j\Phi} \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow A((\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega) = \frac{F_0}{m} e^{-j\Phi} \quad (3.24)$$

$$\text{Multipliant cette équation par son conjugué } A((\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega) = \frac{F_0}{m} e^{j\Phi} \quad (3.25)$$

On obtient :

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2] A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \quad (3.26)$$

Maintenant on cherche à déterminer Φ :

$$\text{Selon la formule de d'Euler : } e^{-j\Phi} = \cos \Phi - j \sin \Phi \quad (3.27)$$

$$\text{Donc : } A[(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega] = \frac{F_0}{m} e^{-j\Phi} = \frac{F_0}{m} [\cos \Phi - j \sin \Phi] \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \Omega^2) = \frac{F_0}{m} \cos \Phi \\ A2\lambda\Omega = -\frac{F_0}{m} \sin \Phi \end{cases} \Rightarrow \tan \Phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (3.29)$$

La phase est définie par :

$$\Phi = \arctg\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad (3.30)$$

Donc on peut écrire :

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)\right) \quad (3.31)$$

Remarque :

- La solution générale de l'équation différentielle, s'écrit : $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$.
- $x_t(t)$ est appelée solution homogène caractérisant un régime transitoire qui disparaît exponentiellement avec le temps. Quand le régime transitoire disparaît : $x(t) = x_p(t)$.

- $x_p(t)$ est appelée solution particulière d'amplitude A caractérisant un régime permanent (stationnaire) car il subsiste aussi longtemps que la force extérieure (F_{ext}) est appliquée. Nous notons la dépendance de l'amplitude A de la pulsation Ω .

3.3.2 Excitation périodique

Pour une excitation périodique, la fonction étant périodique, de période T , son développement de série de Fourier est donné par :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (3.32)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \quad (3.33)$$

La solution de cette équation peut alors être calculée pour chacune des composantes de l'excitation: $a_0/2$, $a_n \cos(n\omega t)$ et $b_n \sin(n\omega t)$. On obtient alors par superposition :

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \quad (3.34)$$

3.4 Impédance mécanique

L'impédance complexe d'entrée du système est définie par le rapport des amplitudes complexes de la force F et de la vitesse ϑ .

$$\bar{Z} = \frac{\bar{F}}{\bar{\vartheta}} \quad (3.35)$$

3.4.1 Amortisseur

Dans ce cas la force appliquée est reliée à la vitesse par $F = \alpha\vartheta$ On déduit l'impédance complexe d'un amortisseur par :

$$\bar{Z} = \alpha \quad (3.36)$$

3.4.2 Masse

Dans le cas d'une masse, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$F = m \frac{d\vartheta}{dt} \quad (3.37)$$

On déduit l'impédance complexe d'une masse $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = i m \Omega = m \Omega e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (3.38)$$

3.4.3 Ressort

Dans le cas d'un ressort de raideur k , la force appliquée F_r au ressort s'exprime en fonction de l'allongement par :

$$F_r = kx \quad (3.39)$$

On déduit l'impédance complexe d'un ressort :

$$\bar{Z} = \frac{k}{i\Omega} = -i \frac{k}{\Omega} = \frac{k}{\Omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (3.40)$$

3.5 Analogie électromécanique

On peut conclure que l'analogie entre le système mécanique et le système électrique est de la forme suivante

Tableau 3.1 : analogie électromécanique

<i>Caractéristiques</i>	<i>Système mécanique</i>	<i>Système électrique</i>
Equation du mouvement	$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{a}$	$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U(t)}{a}$
Pulsation propre ω_0	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
Facteur d'amortissement λ	$\frac{\alpha}{2m}$	$\frac{R}{2L}$
Force d'excitation	$F(t)$	$U(t)$
Impédance d'entrée $\bar{Z}$	$\alpha + i(m\Omega - \frac{k}{\Omega})$	$R + i(L\Omega - \frac{1}{C\Omega})$

3.6 Exercices :

Exercice 1 :

Dans le système ci-contre, la boule est ponctuelle et la tige est de longueur total $3l$ et de masse négligeable. Avec $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$.

1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U et la fonction de dissipation D . Pour des faibles oscillations ($\theta \ll 10$).

2. Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement.

3. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution du mouvement. (Préciser son amplitude A et sa phase ϕ).

4. Déduire la pulsation de résonance Ω_R .

5. Donner les pulsations de coupure Ω_{c1} , Ω_{c2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\lambda \ll \omega_0$.

6. Calculer Ω_R , et le facteur de qualité B si :

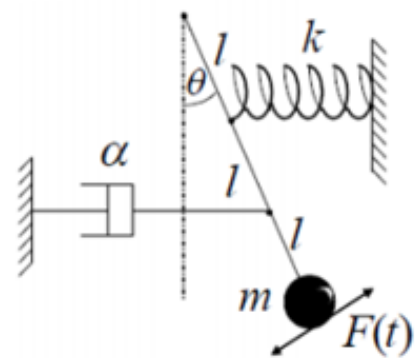


Fig.3.1

$$m = 1 \text{ Kg}, \quad k = 15 \text{ N/m}, \quad l = 0.5 \text{ m}, \quad \alpha = 0.5 \text{ N.s/m}, \quad g = 10 \text{ m.s}^{-2}.$$

Exercice 2 :

Etablir l'équation différentielle en courant puis en charge du circuit oscillatoire électrique RLC de la figure (3.2) on donne :

$$R=80\Omega, U(t) = U_0 \cos(\Omega t), L=10 \text{ H}, C=0.005 \text{ F}, \Omega=3 \text{ rad/s}, U_0=53 \text{ V}.$$

1. Calculer la période propre T_0 et le facteur

d'amortissement λ

2. Déterminer la solution du régime transitoire,

et en déduire sa pseudo pulsation ω_a .

3. Déterminer la solution du régime permanente.

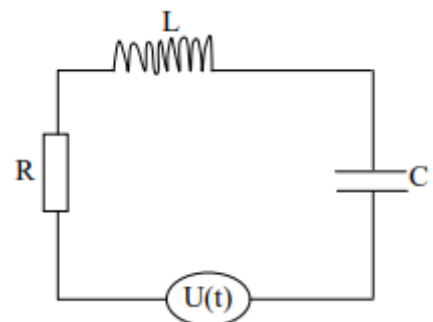


Fig.3.2

Exercice 3 :**Partie A :**

Dans le cas des oscillations libres :

1. Déterminer le Lagrangien du système.
2. Etablir l'équation du mouvement.
3. En déduire la solution générale avec les conditions initiales suivantes : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

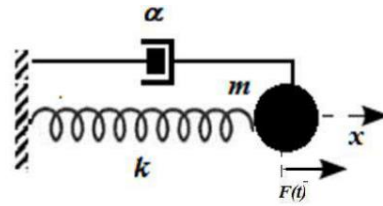


Fig.3.3

Partie B :

On admet que les frottements existent, la masse m effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale de la forme : $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ et la vitesse du mobile est de forme : $v(t) = v_0 \cos(\Omega t - \varphi)$

1. Établir l'équation du mouvement.
2. Résoudre l'équation différentielle en régime permanent.
3. Déterminer l'impédance mécanique complexe définie comme le rapport entre la force appliquée et la vitesse du mobile.
4. Comparer le résultat avec le système électrique.

3.7 Solutions**Exercice 1 :**

1. Trouvons l'énergie cinétique, potentielle et fonction de dissipation :

- Energie cinétique : $T = T_m = \frac{9}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = U_m + U_k = mg(3l - 3l \cos \theta) + \frac{1}{2} k (\sin \theta)^2$

$$U \approx \frac{3}{2} m g l \theta^2 + \frac{1}{2} k l^2 \theta^2$$

- Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha (2l\dot{\theta})^2 = 2\alpha l^2 \dot{\theta}^2$

2. Formalisme Lagrangien et Equation de mouvement :

- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{9}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{3}{2} m g l \theta^2 + \frac{1}{2} k l^2 \theta^2$

- Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 9ml^2 \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 9ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta - kl^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha l^2 \dot{\theta}$$

Dans le cas du mouvement circulaire :

$$9ml^2 \ddot{\theta} + (mgl + kl^2)\theta = -4\alpha l^2 \dot{\theta} + 3Fl$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{9m} \dot{\theta} + \frac{(mg + kl)}{9ml} \theta = \frac{F_0}{3ml} \cdot \cos \Omega t$$

3. Solution de l'équation permanente de mouvement :

L'équation est de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{F_0}{3ml} \cos \Omega t \quad \text{avec} \quad 2\lambda = \frac{4\alpha}{9m} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{(mg+kl)}{9ml}$$

La solution permanente est : $\theta = A \cos(\Omega t + \phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et ϕ :

$$\theta(t) = A \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow A e^{j(\Omega t + \phi)}$$

$$\dot{\theta}(t) \rightarrow jA\Omega e^{j(\Omega t + \phi)}$$

$$\ddot{\theta}(t) \rightarrow -A\Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)}$$

$$\frac{F_0}{3ml} \cos \Omega t \rightarrow \frac{F_0}{3ml} e^{j\Omega t}$$

En remplaçant dans l'équation $\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{F_0}{3ml} \cos \Omega t$ l'équation du mouvement devienne :

$$-A\Omega^2 e^{j(\Omega t + \phi)} + 2\lambda jA\Omega e^{j(\Omega t + \phi)} + \omega_0^2 A e^{j(\Omega t + \phi)} = \frac{F_0}{3ml} e^{j\Omega t}$$

On simplifier par $e^{j\Omega t}$ on obtient

$$-A\Omega^2 e^{j\phi} + 2\lambda jA\Omega e^{j\phi} + \omega_0^2 A e^{j\phi} = \frac{F_0}{3ml} \Rightarrow -A\Omega^2 + 2\lambda jA\Omega + \omega_0^2 A = \frac{F_0}{3ml} e^{-j\phi}$$

$$\Rightarrow A((\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega) = \frac{F_0}{3ml} e^{-j\Phi}$$

Multipliant cette équation par son conjugué $A((\omega_0^2 - \Omega^2) - j2\lambda\Omega) = \frac{F_0}{3ml} e^{j\Phi}$

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2]B^2 = \left(\frac{F_0}{3ml}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{3ml}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

Maintenant on cherche à déterminer Φ :

selon la formule de d'Euler $e^{-j\Phi} = \cos \Phi - j\sin \Phi$

$$\text{donc : } A[(\omega_0^2 - \Omega^2) + j2\lambda\Omega] = \frac{F_0}{3ml} \frac{F_0}{m} e^{-j\Phi} = \frac{F_0}{3ml} [\cos \Phi - j\sin \Phi]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \Omega^2) = \frac{F_0}{3ml} \cos \Phi \\ A2\lambda\Omega = -\frac{F_0}{3ml} \sin \Phi \end{cases} \Rightarrow \tan \Phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

La phase est définie par :

$$\Phi = \arctg\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Donc on peut écrire :

$$\theta(t) = \frac{\frac{F_0}{3ml}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)\right)$$

4. La pulsation de résonance est Ω_R telle que : $\left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$

5. Pour un amortissement faible $\lambda \ll \omega_0$: $\Omega_{c1} = \omega_0 - \lambda$, $\Omega_{c2} = \omega_0 + \lambda$

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\lambda$$

6. A.N : $\Omega_R \approx 2.88 \text{ rad/s}$, $B \approx 0.22 \text{ Hz}$. Le facteur de qualité est : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B} \approx 13.1$

Exercice 2 :

1. Equation différentielle en charge :

Le bilan des tensions s'écrit :

$$\sum_{i=1}^3 U_i = U \Rightarrow U_R + U_L + U_C = U$$

$$Ri + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U \Rightarrow R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = U$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{U_0}{L} \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \Omega t$$

Avec : $2\lambda = \frac{R}{L}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

2. La période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}}} = 2\pi\sqrt{LC} = 1.4s$$

$$\lambda = \frac{R}{2L} = 4$$

3. La solution transitoire :

L'équation différentielle du mouvement devient :

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3 \cos 3t$$

La solution générale est : $q(t) = q_t(t) + q_p(t)$

$q_t(t)$ est la solution homogène calculée lorsque $U(t)=0$. L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 0$$

On calcule le déterminant : Δ' :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 16 - 20 = -4 < 0$$

Donc $q_t(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi)$ avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 2 \text{ rad/s}$

La solution homogène s'écrit comme suit

$$q_t(t) = Ae^{-4t} \cos(2t + \varphi)$$

La solution particulière est calculée lorsque $u(t) \neq 0$

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3 \cos 3t$$

La solution particulière suit la forme du second membre.

$$q_p(t) = q_0 \cos(3t + \varnothing)$$

Pour calculer q_0 et $\varnothing$ à partir de la méthode des nombres complexes. On suppose la solution complexe de la forme :

$$q_p(t) = q_0 e^{j(3t+\varnothing)} = q_0 e^{j3t} e^{j\varnothing}$$

En remplaçant la solution dans l'équation différentielle,

$$-9q_0 e^{j3t} e^{j\varnothing} + 24j q_0 e^{j3t} e^{j\varnothing} + 20q_0 e^{j3t} e^{j\varnothing} = 5.3 e^{j3t}$$

$$-9q_0 e^{j\varnothing} + 24j q_0 e^{j\varnothing} + 20q_0 e^{j\varnothing} = 5.3$$

$$q_0 e^{j\varnothing} (11 + 24j) = 5.3$$

$$q_0 = \frac{5.3}{\sqrt{11^2 + 24^2}} = 0.2$$

$$\varnothing = -\arctg \frac{24}{11} = -65.4^\circ = -1.14 \text{ rad}$$

Et la solution particulière :

$$q_p(t) = 0.2 \cos(3t - 1.14)$$

$$q(t) = A e^{-4t} \cos(2t + \varphi) + 0.2 \cos(3t - 1.14)$$

La solution permanente est calculée lorsque $q_t(t) \rightarrow 0$ Donc elle est donnée par :

$$q(t) = 0.2 \cos(3t - 1.14)$$

Exercice 3 :

a) Mode libre

Le lagrangien du système :

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2} k x^2$
- Le lagrangien $L = T - U$; $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

L'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

La solution générale est de la forme :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

b) Mode forcé

L'équation du mouvement est de la forme :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

$$\begin{cases} 2\lambda = \frac{\alpha}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{cases}$$

C'est une équation différentielle inhomogène linéaire, d'un mouvement forcé.

La résolution de cette équation différentielle en régime permanent est :

$$x(t) = x_p(t) = A \cos(\Omega t - \varphi) = R_e A e^{j(\Omega t - \varphi)}$$

Soient A l'amplitude de la solution et φ son argument.

En remplaçant dans l'équation différentielle et après le calcul, on obtient] Le module d'amplitude suivant :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

La phase du mouvement comme suit :

$$\varphi = \arctg\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

la variation de l'amplitude $A(\Omega)$ est donnée par :

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega = \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Cette pulsation est appelée la pulsation de résonance.

L'impédance complexe est définie comme suit :

$$\tilde{Z}_{mec} = \frac{F(t)}{v(t)}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$\tilde{Z}_{mec} = \alpha + j \left(m\Omega - \frac{k}{\Omega} \right)$$

Pour le système électrique, le résultat est donné comme suit :

$$\tilde{Z}_{elect} = \frac{U(t)}{i(t)} \Rightarrow \tilde{Z}_{elect} = R + j \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega} \right)$$

On conclue donc les équivalences entre le système mécanique et le système électrique comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} L \Leftrightarrow m \\ q(t) \Leftrightarrow x(t) \\ R \Leftrightarrow \alpha \\ \frac{1}{C_{eqv}} \Leftrightarrow k \\ U(t) \Leftrightarrow F(t) \end{array} \right.$$

Chapitre 4

Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

4.1 Introduction

Un système en oscillation libre est à 2 degrés de liberté (2ddl) si deux coordonnées indépendantes sont nécessaires et suffisantes pour décrire son mouvement. Il y a deux équations de Lagrange que de degrés de liberté ou de coordonnées généralisées.

4.2 Système à deux degré de liberté

4.2.1 Equations différentielles de mouvement

Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Un système à 2 degrés de liberté possède deux coordonnées généralisées (q_1, q_2) , deux équations différentielles et deux pulsations propres (ω_1, ω_2) .

4.2.2 Types de couplages

Il existe trois types de couplage : élastique, inertiel et visqueux :

4.2.2.1 Couplage élastique

Dans les systèmes mécaniques, ce type de couplage est assuré par un ressort et dans leurs systèmes équivalents (circuits électriques) est assuré par capacité (Fig.4.1) .

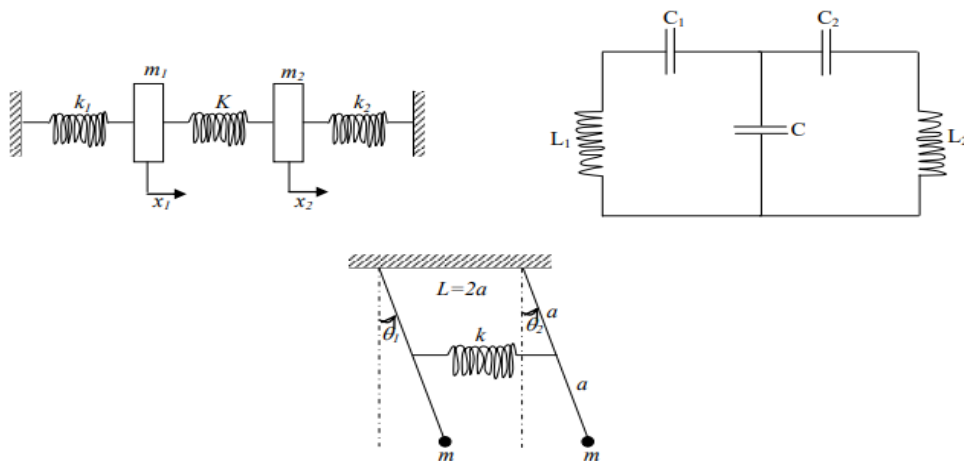


Fig.4.1 : couplage élastique pour différents systèmes.

4.2.2.2 Couplage visqueux

Dans le système mécanique le couplage entre les deux systèmes est à travers un amortisseur et par analogie dans le système électrique ce couplage est assuré par une résistance (Fig.4.2), ce qui représente des systèmes équivalents.

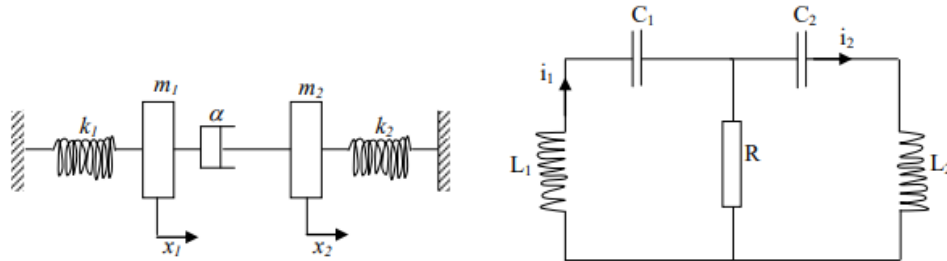


Fig.4.2 : couplage visqueux.

4.2.2.3 Couplage inertiel

Dans le système mécanique le couplage entre les deux systèmes est à travers une masse et par analogie dans le système électrique ce couplage est assuré par la bobine. (Fig.4.3)

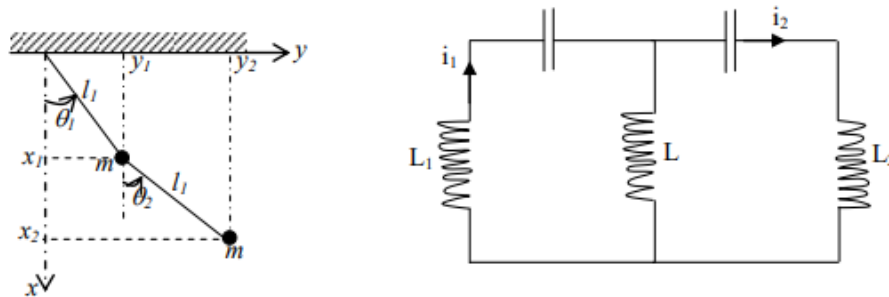


Fig.4.3 : couplage inertiel.

4.2.3 Equations différentielles de mouvement (pendules couplés)

Considérons deux pendules qui sont couplés par un ressort horizontal de constante de raideur k à une distance a de l'axe de rotation.

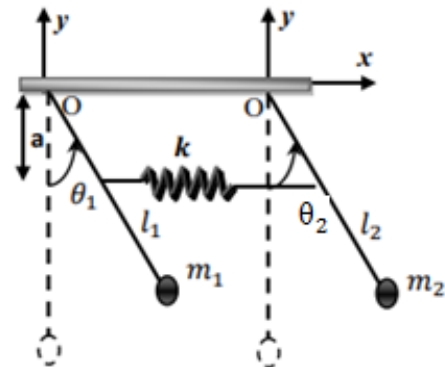


Fig.4.4 : pendule couplé à 2ddl

4.2.3.1 Equations différentielles du mouvement

Les coordonnées des éléments du système de deux masses sont :

- Pour la masse m_1 : $\begin{cases} x_{m_1} = l_1 \sin \theta_1 \\ y_{m_1} = -l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \Rightarrow v_{m_1}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (4.2)$

- Pour la masse m_2 : $\begin{cases} x_{m_2} = l_2 \sin \theta_2 \\ y_{m_2} = -l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_2} = l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases} \Rightarrow v_{m_2}^2 = l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.3)$

Energie cinétique: $T = \frac{1}{2} m_1 v_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{m_2}^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (4.4)$

Energie potentielle: $U = U_R + U_{m_1} + U_{m_2} \quad (4.5)$

Si on choisit comme origine des énergies potentielles l'axe (Ox) on a pour les deux masses :

$$U_{m_1} + U_{m_2} = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.6)$$

La présence de signe moins dans l'équation (4.6) provient au choix de l'axe (masse inferieur a ce dernier).

$$U = \frac{1}{2} k a^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 - m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.7)$$

$$x = a \sin \theta_1 - a \sin \theta_2 = a (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (4.8)$$

La fonction de Lagrange sera donc : $L = T - U \quad (4.9)$

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} k a^2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2)^2 + m_1 g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2 \quad (4.10)$$

D'après l'équation (4.10), on observe clairement deux coordonnées généralisées décrivant le mouvement donc nous obtiendrons deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -k a^2 \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) - m_1 g l_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (4.11a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = ka^2 \cos \theta_2 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (4.11b)$$

Pour le cas des faibles oscillations, les angles de vibration du pendule couplé sont extrêmement réduits (très petits) on a : $\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1 \end{cases}$

Les deux équations différentielles du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (ka^2 + m_1 g l_1) \theta_1 = ka^2 \theta_2 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + (ka^2 + m_2 g l_2) \theta_2 = ka^2 \theta_1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Remarque :

- Si $a = 0$ ou $k = 0$, dans le cas de couplage nul : les deux systèmes demeurent indépendants.
- Les deux équations différentielles possèdent deux solutions distincts notés $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
- Le terme de couplage ka^2 est en fonction de k donc le couplage est **élastique**.

4.2.3.2 Pulsations propres d'oscillation

On suppose que le système admet des solutions harmoniques :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2 \end{cases} \quad (4.13)$$

On substitue dans les équations (4.12), par conséquent :

$$\begin{cases} (ka^2 + m_1 g l_1 - m_1 l_1^2 \omega^2) \theta_1 - ka^2 \theta_2 = 0 \\ -ka^2 \theta_1 + (ka^2 + m_2 g l_2 - m_2 l_2^2 \omega^2) \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Calcul des pulsations propres

On pose que : $m_1 = m_2 = m$ et $l_1 = l_2 = l$

On peut écrire le système des équations (4.14) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgl - ml^2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux équations admettent une solution, si le déterminant est nul.

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} ka^2 + mgl - ml^2\omega^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & ka^2 + mgl - ml^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow (ka^2 + mgl - ml^2\omega^2)^2 - (ka^2)^2 = 0 \\
& \Rightarrow ka^2 + mgl - ml^2\omega^2 = \begin{cases} +ka^2 \\ -ka^2 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l} + 2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{a}{l}\right)^2 \\ \omega_2^2 = \frac{g}{l} \end{cases} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Avec : ω_1 est **la 1^{ère} pulsation propre** et ω_2 est **la 2^{ème} pulsation propre**.

Remarque :

- Si $a = 0$ ou $k = 0$, le couplage est nul $\Rightarrow \omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{g}{l}$
- Lorsque le système oscille avec une de ses deux pulsations on dit que le système oscille dans un de ses deux modes.

4.2.3.3 Modes d'oscillations

Le mode représente l'état où les composants dynamiques du système exécutent une oscillation harmonique à la même pulsation correspondant à l'une de ses deux fréquences.

Dans chaque mode les deux masses effectuent des mouvements harmoniques simples avec la même pulsation (ω_1 **ou** ω_2) et les deux pendules passent par la position d'équilibre au même instant.

- **Cas du premier mode:** on remplace dans l'un des équations (4.14) par : $\omega_1^2 = \frac{g}{l} + 2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{a}{l}\right)^2$, on aboutit après le calcul que : $\theta_2 = -\theta_1$

Remarque :

- Chaque période sauf au centre du ressort, le ressort subit une élongation et compression
- Dans le premier mode les deux pendules ont la même pulsation ω_1 , la même amplitude et un déphasage π .
- Les deux pendules ont des mouvements opposés.

- **Cas du deuxième mode :**

On remplace dans le système des équations (4.14) par : $\omega_2^2 = \frac{g}{l}$, on obtient après calcul que : $\theta_2 = \theta_1$.

Remarque :

- Le ressort ne subit aucune variation de sa longueur.
- Les deux pendules se déplacent dans le même sens.

4.2.3.4 Calcul des solutions des équations différentielles

Chaque mouvements θ_1 et θ_2 possèdent deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 ou ω_2 . Étant donnée que les équations différentielles sont linéaires, toute combinaison de solutions demeure une solution du système.

- **Dans le premier mode de vibration :** $\omega = \omega_1$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases} \quad (4.16)$$

- **Dans le deuxième mode de vibration :** $\omega = \omega_2$

$$\begin{cases} \theta_1(t) = B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (4.17)$$

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (4.18)$$

- **Dans le premier mode :** $\omega = \omega_1 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;
 $\vec{V}_1$ est le premier vecteur propre.
- **Dans le deuxième mode :** $\omega = \omega_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
 $\vec{V}_2$ est le deuxième vecteur propre.

Donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = -A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (4.19)$$

Supposons que :

$$\begin{cases} \theta_1(0) = \theta_0; \dot{\theta}_1(t) = 0 \\ \theta_2(0) = 0; \dot{\theta}_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1(0) = A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2 = \theta_0 \\ \theta_2(0) = -A \sin \varphi_1 + B \sin \varphi_2 = 0 \\ \dot{\theta}_1(t) = A\omega_1 \cos \varphi_1 + B\omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \\ \dot{\theta}_2(t) = -A\omega_1 \cos \varphi_1 + B\omega_2 \cos \varphi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2} \\ A = B = \frac{\theta_0}{2} \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2} \sin \left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\theta_0}{2} \sin \left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2} \right) \\ \theta_2(t) = -\frac{\theta_0}{2} \sin \left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\theta_0}{2} \sin \left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2} \right) \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \theta_1(t) = \theta_0 \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \times \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \\ \theta_2(t) = -\theta_0 \sin \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \times \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t \right) \end{cases} \quad (4.22)$$

4.3 Exercices :

Exercice 1 :

Soit le système mécanique représenté par la Figure

ci-contre, composé de deux oscillations linéaires

(m, k) couplés par un ressort de raideur k' .

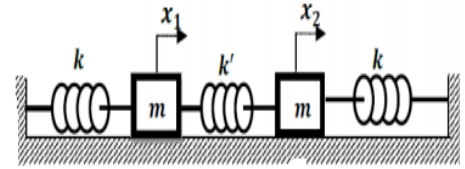


Fig.4.5 : couplage élastique pour système mécanique.

1. Ecrire le Lagrangien du système.

2. Mettre ce Lagrangien sous la forme : $L = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \omega_0^2 [(x_1^2 + x_2^2) + 2C(x_1 x_2)]]$

3. Donner les expressions de ω_0^2 et C (Coefficient de couplage). En déduire les équations du mouvement.

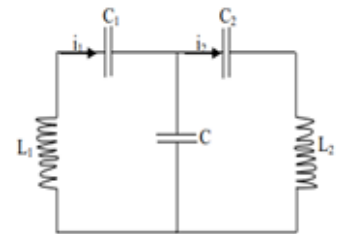
4. Déterminer les pulsations propres du système.

5. Donner les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = x_0 ; \dot{x}_1(0) = 0 ; x_2(0) = 0 ; \dot{x}_2(0) = 0.$$

Exercice 2 :

Soit le montage de la figure ci-contre.



Les deux circuits LC oscillants sont couplés par une capacité C . **Fig.4.6** : couplage élastique

$$(C_1 = C_2 = C \text{ et } L_1 = L_2 = L)$$

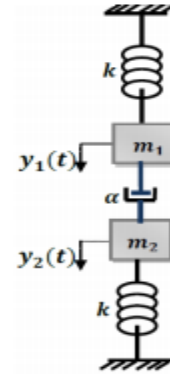
pour système électrique.

1. Ecrire les deux équations différentielles en i_1 et i_2 , puis en q_1 et q_2 .

2. Trouver les pulsations propres du système
3. Donner la solution générale sachant qu'à $t = 0$ s, seul C_1 possède une charge q .

Exercice 3 :

On considère le système représenté par la figure ci-contre constitué de deux oscillateurs verticaux (m_1, k) et (m_2, k) couplés par un amortisseur α .

**Fig.4.7 :** couplage visqueux.

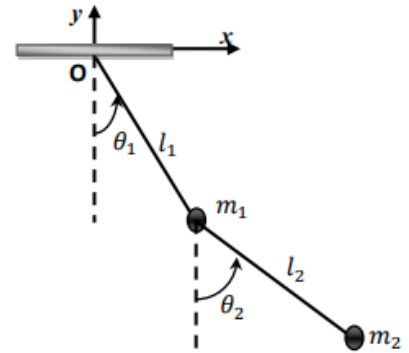
1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Déterminer les équations différentielles du mouvement en fonction des variables $y_1(t)$ et $y_2(t)$.

On pose : $Y_1 = y_1 - y_2$, $Y_2 = y_1 + y_2$ et $m_1 = m_2 = m$

3. Donner les solutions des équations différentielles.

Exercice 4 :

Considérons deux pendules qui sont couplés par une masse m_1 qui se trouve à une distance l_1 de l'axe de rotation.

**Fig.4.8 :** couplage inertiel.

1. Déterminer les équations différentielles du mouvement.

Pour le cas des faibles oscillations:

2. Déterminer les pulsations propres du système ω_1 et ω_2 .
3. Déterminer les solutions générales $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$, si $m_1 = m_2 = m$ et $l_1 = l_2 = l$.

4.4 Solutions :**Exercice 1 :**

On écrit les deux équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

Energie cinétique du système :
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Energie potentielle du système :
$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (-x_2)^2 + \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2$$

Lagrangien du système est :

$$L = T - U$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 \\ L &= \frac{1}{2}m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} \frac{k}{m} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2} \frac{k'}{m} (x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2) \right] \\ L &= \frac{1}{2}m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \left(\frac{k+k'}{m} \right) (x_1^2 + x_2^2) + \frac{k'}{m} (2x_1x_2) \right] \\ L &= \frac{1}{2}m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \left(\frac{k+k'}{m} \right) \left[(x_1^2 + x_2^2) + \frac{2k'}{k+k'} (x_1x_2) \right] \right] \end{aligned}$$

Ce Lagrangien se présente sous la forme :

$$L = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \omega_0^2[(x_1^2 + x_2^2) + 2C(x_1x_2)]]$$

Avec : $\omega_0^2 = \left(\frac{k+k'}{m}\right)$ et $C = \frac{k'}{k+k'}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = m\ddot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -m\omega_0^2(x_1 - Cx_2) \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = m\ddot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -m\omega_0^2(x_2 - Cx_1) \end{cases} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = C\omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = C\omega_0^2 x_1 \end{cases} \quad (a) \end{aligned}$$

1. Calcul des pulsations propres du système

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases} \quad (b)$$

On remplace l'équation (b) dans le système (a) on aura :

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)x_1 - C\omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)x_2 - C\omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -C\omega_0^2 \\ -C\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul du déterminant Δ de la matrice:

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -C\omega_0^2 \\ -C\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (C\omega_0^2)^2 = 0$$

Donc les pulsations du système sont : $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0\sqrt{1-C} \\ \omega_2 = \omega_0\sqrt{1+C} \end{cases}$

2. Solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = x_0 ; \dot{x}_1(0) = 0 ; x_2(0) = 0 ; \dot{x}_2(0) = 0$$

- Calcul des modes d'oscillations :

Quand :

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \omega = \omega_2 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Les conditions aux limites :

$$x_1(0) = x_0 \Rightarrow A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2 = x_0$$

$$\dot{x}_1(t) = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 \Rightarrow -A\omega_1 \sin(\varphi_1) - B\omega_2 \sin(\varphi_2) = 0$$

$$x_2(0) = 0 \Rightarrow A \cos \varphi_1 - B \cos \varphi_2 = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow -A\omega_1 \sin(\varphi_1) + B\omega_2 \sin(\varphi_2) = 0$$

$$\begin{cases} A \cos \varphi_1 + B \cos \varphi_2 = x_0 & (c) \\ -A\omega_1 \sin(\varphi_1) - B\omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 & (d) \\ A \cos \varphi_1 - B \cos \varphi_2 = 0 & (e) \\ A\omega_1 \sin(\varphi_1) + B\omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 & (f) \end{cases}$$

$$(d) + (f) \Rightarrow \sin \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = k\pi$$

$$(f) - (d) \Rightarrow \sin \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = k\pi$$

Si : $k = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

$$\begin{cases} (c) \Rightarrow A + B = x_0 \\ (e) \Rightarrow A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{x_0}{2} \\ B = \frac{x_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \end{cases}$$

Exercice 2 :

1. Equations différentielles du mouvement :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n U_i = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} U_{L1} + U_{C1} + U_C = 0 \\ U_{L2} + U_{C2} + U_C = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = 0 \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt - \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 - \frac{1}{C} (q_1 - q_2) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Avec : $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ et $\frac{di}{dt} = \ddot{q}$.

2. Calcul des pulsations propres du système

On suppose les solutions de la forme :

$$q_1(t) = Q_1 e^{j\omega t} \text{ et } q_2(t) = Q_2 e^{j\omega t}$$

Avec : $Q_1 = q_{01} e^{j\varphi}$ et $Q_2 = q_{02} e^{j\varphi}$

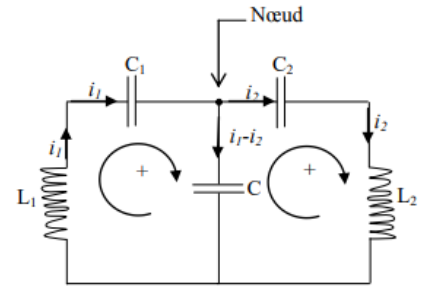


Fig.4.9

Le système devient :

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 L + \frac{2}{C}\right) Q_1 - \frac{1}{C} Q_2 = 0 \\ -\frac{1}{C} Q_1 + \left(-\omega^2 L + \frac{2}{C}\right) Q_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\omega^2 L + \frac{2}{C} & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{C} & -\omega^2 L + \frac{2}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant Δ de la matrice:

$$\Delta = \left(-\omega^2 L + \frac{2}{C}\right)^2 - \left(-\frac{1}{C}\right)^2 = 0$$

$$\left(-\omega^2 L + \frac{2}{C}\right) = \pm \frac{1}{C}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{1}{LC} \\ \omega_2^2 = 3 \frac{1}{LC} \end{cases}$$

On pose : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 \\ \omega_2^2 = 3\omega_0^2 \end{cases}$$

- **Cas du premier mode :** $\omega_1^2 = \omega_0^2$.

$\omega_1^2 = \omega_0^2 \Rightarrow q_2 = q_1 \Rightarrow Q_{11} = Q_{21} \Rightarrow \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_1$ est le premier vecteur propre.

- **Cas de la deuxième mode :** $\omega_2^2 = 3\omega_0^2$.

$\omega_2^2 = 3\omega_0^2 \Rightarrow q_2 = -q_1 \Rightarrow Q_{12} = -Q_{22} \Rightarrow \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2$ est le deuxième vecteur propre.

Solution générale :

$$\begin{cases} q_1(t) = Q_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Q_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ q_2(t) = Q_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Q_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) = Q_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Q_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ q_2(t) = Q_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - Q_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

On suppose que : $Q_{11} = Q_1$ et $Q_{12} = Q_2$

Les constantes Q_{11} , Q_{12} , φ_1 et φ_2 sont déterminées grâce aux conditions initiales 4 inconnues donc nécessaire d'avoir quatre équations : $q_1(0) = q$, $q_2(0) = 0$ et $\dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$.

$$\begin{cases} q_1(0) = Q_{11} \cos(\varphi_1) + Q_{12} \cos(\varphi_2) = q \\ q_2(0) = Q_{11} \cos(\varphi_1) - Q_{12} \cos(\varphi_2) = 0 \\ \dot{q}_1(0) = -Q_{11} \omega_1 \sin(\varphi_1) - Q_{12} \omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 \\ \dot{q}_2(0) = Q_{11} \omega_1 \sin(\varphi_1) - Q_{12} \omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2Q_{12} \cos(\varphi_2) = q \\ Q_{11} \cos(\varphi_1) = Q_{12} \cos(\varphi_2) \\ 2Q_{12} \omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 \\ 2Q_{11} \omega_1 \sin(\varphi_1) = 0 \end{cases}$$

Donc $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ et $Q_{11} = Q_{12} = \frac{q}{2}$.

$$\begin{cases} q_1(t) = \frac{q}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{q}{2} \cos(\omega_2 t) \\ q_2(t) = \frac{q}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{q}{2} \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

Exercice 3 :

Energie cinétique du système : $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$

Energie potentielle du système : $U = \frac{1}{2} k y_1^2 + \frac{1}{2} k y_2^2$

Fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2$

Donc Lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} k y_1^2 - \frac{1}{2} k y_2^2$$

Equation de Lagrange :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = m_1 \ddot{y}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = -ky_1 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = \alpha (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = m_2 \dot{y}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = m_2 \ddot{y}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = -ky_2 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} = -\alpha (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + ky_1 = -\alpha (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \\ m_2 \ddot{y}_2 + ky_2 = \alpha (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + ky_1 = \alpha \dot{y}_2 & (1) \\ m_1 \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + ky_2 = \alpha \dot{y}_1 & (2) \end{cases}$$

Si on suppose que : $m_1 = m_2 = m$, on trouve :

$$\begin{cases} m \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + ky_1 = \alpha \dot{y}_2 \\ m \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + ky_2 = \alpha \dot{y}_1 \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow m (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + \alpha (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = \alpha (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$$

$$\Rightarrow m (\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + 2\alpha (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = 0 \quad (3)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow m (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + \alpha (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + k(y_1 + y_2) = \alpha (\dot{y}_2 + \dot{y}_1)$$

$$\Rightarrow m (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + k(y_1 + y_2) = 0 \quad (4)$$

On pose : $Y_1 = y_1 - y_2$, : $Y_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{Y}_1 + 2\alpha \dot{Y}_1 + kY_1 = 0 \\ m \ddot{Y}_2 + kY_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{Y}_1 + \frac{2\alpha}{m} \dot{Y}_1 + \frac{k}{m} Y_1 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \frac{k}{m} Y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{Y}_1 + 2\lambda \dot{Y}_1 + \omega_1^2 Y_1 = 0 & (3) \\ \ddot{Y}_2 + \omega_2^2 Y_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Avec : $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \frac{k}{m}$ et $2\lambda = \frac{2\alpha}{m}$.

A.N : $\lambda = \frac{3}{1} = 3s^{-1}$ et $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3 \text{ rad/s}$.

Ce sont deux équations découplées, la première représente une équation différentielle d'un mouvement **libre amorti** et la deuxième une équation différentielle d'un mouvement **libre non amorti**. Dans, le cas de l'équation (3) on cherche une solution de la forme :

$$Y_1(t) = A e^{rt}.$$

En remplaçant ceci dans l'équation (3) on obtient :

$$A r^2 e^{rt} + 2\lambda r A e^{rt} + \omega_0^2 A e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

En calculant le discriminant réduit : $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 9 - 9 = 0$

Donc la solution est sous la forme $Y_1(t) = e^{-\lambda t}(A_1 + A_2 t)$

$$Y_1(t) = e^{-3t}(A_1 + A_2 t)$$

D'autre part l'équation (2) à comme solution : $Y_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$

$$Y_2(t) = A_2 \cos(3t + \varphi_2)$$

Exercice 4 :

1. Equations différentielles du mouvement

- **Pour la masse m_1** , on trouve à une distance l_1 de O :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_{m_1} = l_1 \sin \theta_1 \\ y_{m_1} = -l_1 \cos \theta_1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{y}_{m_1} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow v_{m_1}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2. \end{aligned}$$

- **Pour la masse m_2** , on trouve à une distance $l_1 + l_2$ de O :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_{m_2} = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_{m_2} = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_{m_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{cases} \\ \Rightarrow v_{m_2}^2 &= (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \\ \Leftrightarrow v_{m_2}^2 &= L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2). \end{aligned}$$

Avec : $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2$.

Alors: $v_{m_2}^2 = L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$.

Pour les faibles oscillations $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$

Donc :
$$v_{m_2}^2 = L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2.$$

Energie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_{m_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{m_2}^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2.$$

Energie potentielle du système s'écrit :

$$U = U_{m_1} + U_{m_2}$$

Si on choisit comme origine des énergies potentielles l'axe (Ox) on a pour les deux masses :

$$U_{m_1} + U_{m_2} = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2).$$

Le signe moins vient du fait que la masse m est inférieure à l'axe choisi.

$$U = -g l_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1 - m_2 g l_2 \cos \theta_2.$$

La fonction de Lagrange :

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2 + g l_1 (m_1 + m_2) \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2.$$

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -g l_1 (m_1 + m_2) \sin \theta_1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + g l_1 (m_1 + m_2) \sin \theta_1 = 0$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + g l_1 (m_1 + m_2) \theta_1 = -m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2$$

Dans le cas des faibles oscillations, les angles sont très petits on a : $\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1 \end{cases}$

On divise par le terme $(m_1 + m_2) l_1$, on trouve : $l_1 \ddot{\theta}_1 + g \theta_1 = \frac{-m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \ddot{\theta}_2.$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 l_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -g l_1 m_2 \sin \theta_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_2 l_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + m_2 g l_2 \theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l_2 \theta_2 = -m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1$$

On divise par le terme $m_2 l_2$, on trouve : $l_2 \ddot{\theta}_2 + g \theta_2 = -l_1 \ddot{\theta}_1$.

Donc les deux équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} l_1 \ddot{\theta}_1 + g \theta_1 = \frac{-m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \ddot{\theta}_2 & (1) \\ l_2 \ddot{\theta}_2 + g \theta_2 = -l_1 \ddot{\theta}_1 & (2) \end{cases}$$

2. Calcul des pulsations propres

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2 \end{cases}$$

On remplace dans les équations du mouvement (1) et (2) :

$$\begin{cases} (g - l_1 \omega^2) \theta_1 - \frac{m_2 l_2}{(m_1 + m_2) l_1} \omega^2 \theta_2 = 0 & (3) \\ (g - l_2 \omega^2) \theta_2 - l_1 \omega^2 \theta_1 = 0 & (4) \end{cases}$$

Si on suppose que : $m_1 = m_2 = m$ et $l_1 = l_2 = l$, on trouve :

$$\begin{cases} (g - l \omega^2) \theta_1 - \frac{1}{2} l \omega^2 \theta_2 = 0 & (5) \\ -l \omega^2 \theta_1 + (g - l \omega^2) \theta_2 = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (g - l \omega^2) & \frac{1}{2} l \omega^2 \\ -l \omega^2 & (g - l \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux équations accepteront une solution si le déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} (g - l\omega^2) & \frac{l}{2}l\omega^2 \\ -l\omega^2 & (g - l\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow ((g - l\omega^2)^2 - \frac{1}{2}(l\omega^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow g - l\omega^2 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}l\omega^2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}l\omega^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{g}{l(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})} \\ \omega_2^2 = \frac{g}{l(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})} \end{cases}$$

Tels que : ω_1 : **la 1^{ère} pulsation propre** et ω_2 : **la 2^{ème} pulsation propre**.

Calcul des vecteurs propres :

- **Cas du premier mode** : on remplace $\omega_1^2 = \frac{g}{l(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})}$ dans (5) et (6) :

On obtient : $\theta_2 = \sqrt{2}\theta_1$.

- **Cas du deuxième mode** : on remplace $\omega_2^2 = \frac{g}{l(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})}$ dans (5) et (6) :

On obtient : $\theta_2 = -\sqrt{2}\theta_1$.

3. Calcul des solutions des équations différentielles

Chacune des mouvements θ_1 et θ_2 possède deux composantes harmoniques de pulsations ω_1 ou ω_2 . Comme les équations différentielles sont linéaires, toute combinaison de solutions reste solution du système.

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A\sqrt{2}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sqrt{2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A\sqrt{2}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\sqrt{2}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Chapitre 5

Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

Un système en oscillation forcée est à deux degrés de liberté (2ddl) si deux coordonnées indépendantes sont nécessaires et suffisantes pour décrire son mouvement.

5.1 Equations de Lagrange

Les systèmes régissent par deux coordonnées généralisées (q_1, q_2), soumis à des forces excitatrices ($F_{q_1}(t), F_{q_2}(t)$) sont appelés, oscillateurs forcés à 2ddl. Les équations de Lagrange s'écrivent dans le cas d'un mouvement de translation par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + F_{q_1}(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + F_{q_2}(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Si le mouvement de système est rotationnelle la coordonnée généralisée est une rotation ($q = \theta$) la force $F_q(t)$ est remplacée par le moment de cette force $M(F_q(t))$.

5.2 Système masse-ressort-amortisseur

5.2.1 Equations d différentielle de mouvement

Soit le système a 2ddl (x_1, x_2) de la figure (5.1). Ce système est soumis à une force extérieure. $F_1(t) = F(t) = F_0 \cos \Omega t$.

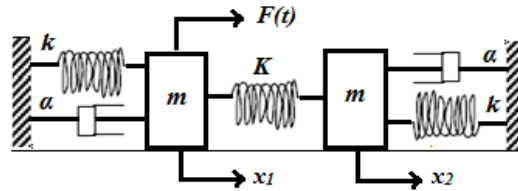


Fig.5.1

Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + F(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \end{cases} \quad (5.2)$$

Energie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad (5.3)$$

Energie potentielle du système :

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2 \quad (5.4)$$

Lagrangien du système :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 \quad (5.5)$$

Fonction de dissipation du système :
$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2 \quad (5.6)$$

L'application des équations de Lagrange (5.2) conduit vers les équations différentielles du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + (k + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \quad (5.7)$$

5.3 Solution des équations différentielles

En régime permanent, la solution des équations différentielle du mouvement est de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{1p}(t) = \chi_1 \cos(\Omega t + \Phi_1) \\ x_2(t) = x_{2p}(t) = \chi_2 \cos(\Omega t + \Phi_2) \end{cases} \quad (5.8)$$

En écriture complexe :

$$\begin{cases} x_1(t) = \chi_1 e^{j(\Omega t + \Phi_1)} = \bar{\chi}_1 e^{j(\Omega t)} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 \bar{\chi}_1 e^{j(\Omega t)} \\ x_2(t) = \chi_2 e^{j(\Omega t + \Phi_2)} = \bar{\chi}_2 e^{j(\Omega t)} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 \bar{\chi}_2 e^{j(\Omega t)} \end{cases} \quad (5.9)$$

5.3.1 Calcul de χ_1 et χ_2 dans le cas de faible amortissement

Dans le cas de faible amortissement $\alpha = 0$ les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + (k + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

On obtient alors le même système que le chapitre précédent avec :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2K+k}{m}}.$$

Utilisant l'écriture complexe de la force : $F(t) = F_0 \cos \Omega t = F_0 e^{j\Omega t}$.

Donc :

$$\begin{cases} -m\Omega^2 \bar{\chi}_1 e^{j(\Omega t)} + (k+K) \bar{\chi}_1 e^{j(\Omega t)} - K \bar{\chi}_2 e^{j(\Omega t)} = F_0 e^{j\Omega t} \\ -m\Omega^2 \bar{\chi}_2 e^{j(\Omega t)} + (k+K) \bar{\chi}_2 e^{j(\Omega t)} - K \bar{\chi}_1 e^{j(\Omega t)} = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} [(k+K) - m\Omega^2] \bar{\chi}_1 - K \bar{\chi}_2 = F_0 \\ [(k+K) - m\Omega^2] \bar{\chi}_2 - K \bar{\chi}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

La résolution de ce système à deux équations conduit vers :

$$\bar{\chi}_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\frac{k+K}{m} - \frac{m\Omega^2}{m}}{\left(\frac{k+2K}{m} - \frac{m\Omega^2}{m}\right) \left(\frac{k}{m} - \frac{m\Omega^2}{m}\right)} \quad (5.13)$$

A partir de chapitre précédant : $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2K+k}{m}}$ et on pose $\omega_a = \sqrt{\frac{K+k}{m}}$

$$\bar{\chi}_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_a^2 - \Omega^2}{(\omega_2^2 - \Omega^2)(\omega_1^2 - \Omega^2)} \quad (5.14)$$

On a :

$$a\bar{\chi}_1 \Rightarrow \bar{\chi}_2 = \frac{F_0}{m} \frac{K}{(\omega_2^2 - \Omega^2)(\omega_1^2 - \Omega^2)} \quad (5.15)$$

$\bar{\chi}_1 = \chi_1 e^{j\phi_1}$ et $\bar{\chi}_2 = \chi_2 e^{j\phi_2}$ donc ϕ_1 et ϕ_2 peuvent avoir que des valeurs 0 et/ou π vu que la partie imaginaire de $\bar{\chi}_1$ et $\bar{\chi}_2$ est nulle. Sachant que $\chi_1 = |\bar{\chi}_1|$ et $\phi_1 = -\text{artg} \frac{\text{Im}(\bar{\chi}_1)}{\text{Re}(\bar{\chi}_1)}$

on aura :

$$\chi_1 = \frac{F_0}{m} \frac{|\omega_a^2 - \Omega^2|}{|\omega_2^2 - \Omega^2| |\omega_1^2 - \Omega^2|} \text{ et } \chi_2 = \frac{F_0}{m^2} \frac{K}{|\omega_2^2 - \Omega^2| |\omega_1^2 - \Omega^2|} \quad (5.16)$$

5.3.2 Etude de la variation de χ_1 et χ_2

On remarque que χ_1 et χ_2 sont en fonction de la pulsation excitatrice Ω :

- $\Omega = 0$: $\chi_1 = \frac{F_0}{m} \left(\frac{\omega_a}{\omega_1 \omega_2}\right)^2$ et $\chi_2 = \frac{F_0}{m^2} \frac{K}{(\omega_1 \omega_2)^2}$
- $\Omega = \omega_1 = \omega_2 \Rightarrow$ les amplitudes χ_1 et χ_2 passe par leurs maximum $\Rightarrow$ **résonance**.
- $\Omega = \omega_a \Rightarrow$ les amplitudes χ_1 et χ_2 sont minimales $\Rightarrow \omega_a$ est **pulsation d'antirésonance**

La variation des amplitudes χ_1 et χ_2 on fonction de la pulsation excitatrice Ω est illustré sur les figures (5.2) et (5.3)

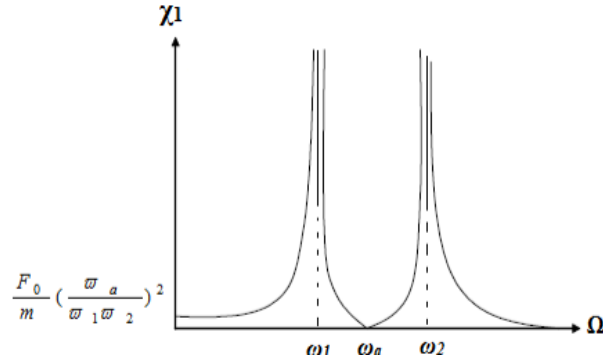


Fig.5.2 : évolution de l'amplitude χ_1 en fonction de Ω .

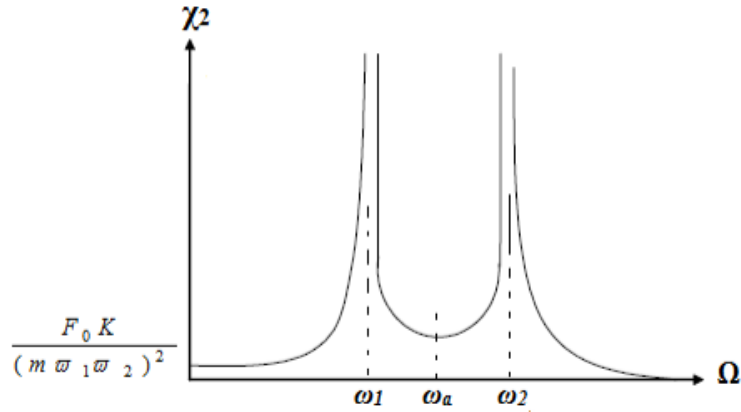


Fig.5.3 : évolution de l'amplitude χ_2 en fonction de Ω .

5.4 Généralisation aux systèmes à n degrés de liberté

Les systèmes régissent par n coordonnées généralisées ($q_1, q_2, \dots, q_n$), soumis à des forces excitatrices ($F_{q_1}(t), F_{q_2}(t), \dots, F_{q_n}(t)$) sont appelés, oscillateurs forcés à n ddl. Les équations de Lagrange s'écrivent dans le cas d'un mouvement de translation par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} + F_{q_1}(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} + F_{q_2}(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n} + F_{q_n}(t) \end{cases} \quad (5.17)$$

5.5 Exercices :

Exercice 1 :

Le système mécanique ci-contre,

composé de : masses, ressorts et

amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure (5.4).

Ce système est soumis à une force extérieure $F(t) = ka \cos \Omega t$.

1. Écris les EDM du système et trouver la réponse en régime permanent.
2. Si $\alpha=0$, pour quelle valeur de ω le système entre en résonance. Donner dans ce cas la condition pour que la masse excitée reste immobile.

Exercice 2 :

1. Etablir les équations différentielles du système oscillatoire mécanique de la figure (5.5).
2. On donne l'excitation $F(t) = F_0 \exp(i\Omega t)$ Les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ du régime permanent étant du même type que l'excitation, donner l'écriture matricielle des équations différentielles en amplitudes complexes $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$.
3. En déduire, lorsque $\beta = 0$, la pulsation de résonance existante.
4. Etablir les équations différentielles en courant puis en charges q_1 et q_2 du système oscillatoire électrique de la figure (5.5).
5. Y a-t-il analogie entre ces deux systèmes ? Si oui, donner les correspondances entre les éléments mécaniques et électriques. En déduire, lorsque $R = 0$ la pulsation de résonance existante.

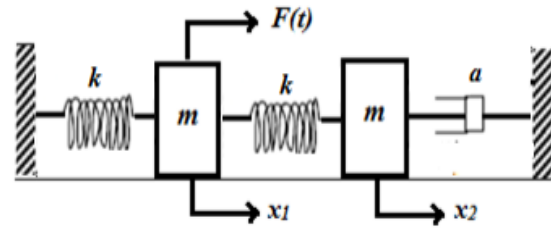


Fig.5.4

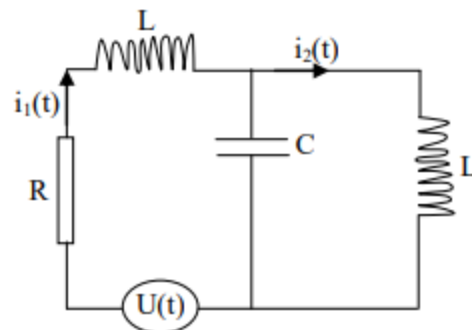
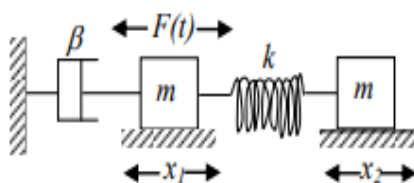


Fig. 5.5

5.6 Solutions :**Exercice 1 :**

1. Equations différentielles du mouvement

Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} \end{cases}$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}_2^2$$

L'application des équations de Lagrange conduit vers les équations différentielles du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + K(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 - k(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_2 = \frac{F(t)}{m} \\ \ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_2 + \frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 = 0 \end{cases}$$

En régime permanent, en écriture complexe, la solution des équations différentielle du mouvement est de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = \chi_1 e^{j(\Omega t + \Phi_1)} = \overline{\chi}_1 e^{j(\Omega t)} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 \overline{\chi}_1 e^{j(\Omega t)} \\ x_2(t) = \chi_2 e^{j(\Omega t + \Phi_2)} = \overline{\chi}_2 e^{j(\Omega t)} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 \overline{\chi}_2 e^{j(\Omega t)} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\chi}_1 \\ \overline{\chi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ka}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Omega) = \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m} \right) \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m} \right) - \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0$$

$$\chi_1 = \frac{1}{\det} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m} \right) \text{ et } \chi_2 = \frac{1}{\det} \alpha \left(\frac{k}{m} \right)^2$$

2. Résolution des équations différentielles du mouvement pour $\alpha = 0$

$$\det(\Omega) = \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m} \right) \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) - \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0$$

Les équations admettent deux solutions :

$$\omega_1 = \frac{k}{2m} (3 - \sqrt{5}) \text{ et } \omega_2 = \frac{k}{2m} (3 + \sqrt{5})$$

Pour que la masse soit immobile : $\chi_1 = \frac{1}{\det} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m} \right) = 0$,

Pour $\alpha = 0$:

$$\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Exercice 2 :

1. Equations différentielles du mouvement

Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Energie potentielle :

$$U = k(x_1 - x_2)^2$$

Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - k(x_1 - x_2)^2$$

Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \beta \dot{x}_2^2$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F(t) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

L'application des équations de Lagrange conduit vers les équations différentielles du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\beta}{m}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = \frac{F_0}{m}e^{i\Omega t} \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

2. Solutions complexes χ_1 et χ_2

En régime permanent, en écriture complexe, la solution des équations différentielle du mouvement est de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = \chi_1 e^{j(\Omega t + \varphi)} = \overline{\chi_1} e^{j(\Omega t)} \\ x_2(t) = \chi_2 e^{j(\Omega t + \varphi)} = \overline{\chi_2} e^{j(\Omega t)} \end{cases}$$

En remplaçant ces solutions dans le système d'équation :

$$\begin{cases} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + i \frac{\beta}{m} \right) \overline{\chi_1} - \frac{k}{m} \overline{\chi_2} = \frac{F_0}{m} \\ -\frac{k}{m} \overline{\chi_1} + \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) \overline{\chi_2} = 0 \end{cases}$$

Le système matriciel est donné par :

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + \frac{k}{m} + i\Omega \frac{\beta}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\Omega^2 + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\chi_1} \\ \overline{\chi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En calculant le déterminant :

$$\det(\Omega) = \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + i\Omega \frac{\beta}{m} \right) - \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0$$

3. Si $\beta = 0$, le déterminant s'écrit : $\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) - \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0$

$$\Rightarrow \Omega^4 - \frac{2k}{m} \Omega^2 = 0$$

Donc :

$$\begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \Omega_R \end{cases}$$

4. Equations différentielles de la figure (5.5)

D'après la loi des mailles :

$$\begin{cases} L \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = U(t) \\ L \frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = U(t) \\ L\ddot{q}_2 - \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$$

5. Oui il existe une analogie :

$$x \leftrightarrow q, R \leftrightarrow \beta, m \leftrightarrow L, k \leftrightarrow \frac{1}{C} \text{ et } F(t) \leftrightarrow U(t)$$

et la pulsation de résonnance : $\Omega_R = \sqrt{\frac{2}{LC}}$.

Chapitre 6

Phénomènes de propagation à une dimension

Les exemples de phénomènes de propagation sont multiples : propagation de la lumière, d'ondes électromagnétiques, du son ou de la chaleur... Les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide, se réfléchissent, s'absorbent et se transmettent au niveau d'un milieu matériel. Quant aux ondes mécaniques et acoustiques, elles ont besoin d'un milieu matériel pour se propager. En effet, dans ce chapitre nous allons s'intéresser à la résolution de l'équation de propagation d'Alembert à une seule dimension.

6.1 Généralité et définition de base

6.1.1 Définition d'une onde

L'onde est une perturbation locale temporaire qui se déplace dans un milieu avec transport d'énergie mais sans transport de matière.

Il existe différents types d'ondes :

- Ondes mécaniques ;
- Ondes électromagnétiques ;
- Ondes de chaleur ;
- Ondes de matière.

Les ondes mécaniques et les ondes de chaleur se propagent dans un milieu matériel solide, liquide ou gazeux. Les ondes électromagnétiques et les ondes de matière peuvent se propager dans un milieu matériel, mais aussi dans le vide. Chaque type d'onde est caractérisé par la nature physique de la grandeur perturbée. Lorsque cette grandeur est vectorielle, il y a lieu de distinguer deux modes de propagation

6.1.2 Ondes progressives : la grandeur perturbée se propage dans une direction. Il y a lieu de distinguer deux modes de propagation :

- **Les ondes transversales** : la grandeur perturbée varie dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation ;
- **Les ondes longitudinales** : la grandeur perturbée varie selon la direction de propagation.

Une onde est caractérisée par sa *fréquence* ν , sa *longueur d'onde* λ et son *amplitude* $\varphi(r, t)$; définie en tout point de l'espace-temps avec les trois coordonnées d'espace et celle du temps.

Exemples :

- Ondes mécaniques à une dimension : vagues sur l'eau ;
- Ondes mécaniques à deux dimensions : Chute d'une goutte d'eau en un point de surface d'eau ;
- Ondes mécaniques à trois dimensions : ondes sonores.

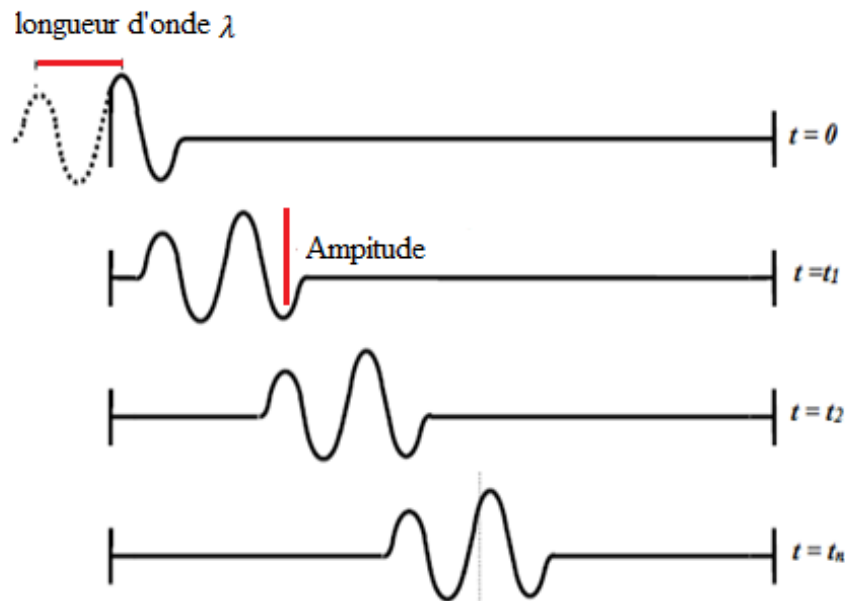


Fig.6.1 : onde transversale se propageant le long d'une corde.

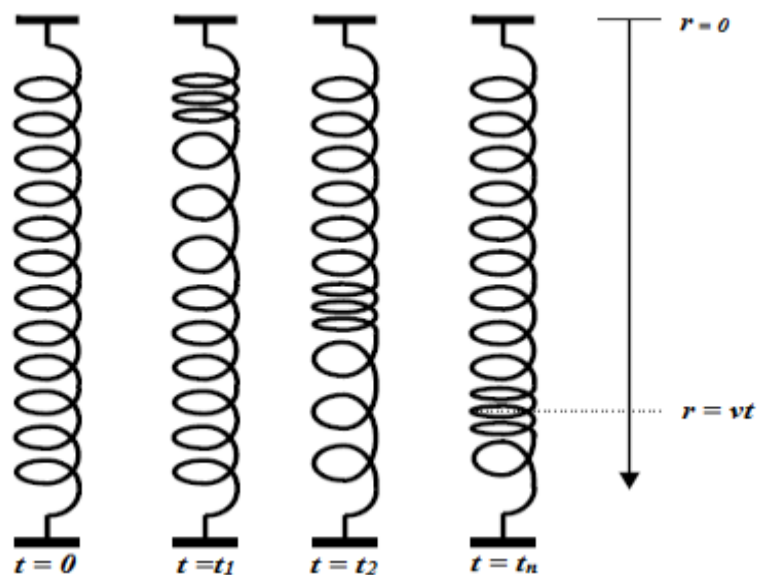


Fig.6.2 : onde longitudinale se propageant le long d'une corde.

6.2 Equation de propagation

Les équations de propagation font intervenir les dérivées de $\varphi(r, t)$. L'équation de propagation ou *équation d'Alembert* ou encore *équation d'onde* est décrite comme suit :

$$\frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi(r, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.1)$$

6.3 Solution de l'équation de propagation

Pour résoudre l'équation de propagation des ondes à une dimension (6.1), opérons le

changement de variable suivant : $\begin{cases} x = t - \frac{r}{v} \\ y = t + \frac{r}{v} \end{cases}$

Donc ce qui suit, essayons de développer d'une manière explicite les termes de l'équation de propagation à savoir : $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial t} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{1}{v}; \frac{\partial y}{\partial r} = +\frac{1}{v} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (6.8)$$

À partir de cette équation, on peut conclure que : $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ne dépend que de x (pas de y), et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ne dépend que de y (pas de x) donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f'(x) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = g'(y) \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\varphi(r, t) = f(x) + g(y) = f\left(t - \frac{r}{v}\right) + g\left(t + \frac{r}{v}\right) \quad (6.10)$$

6.3.1 Propriété de $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$

Si on considère la fonction $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$, la perturbation à l'abscisse r_1 à l'instant t_1 est le même à l'abscisse r_2 à l'instant $t_2 > t_1$

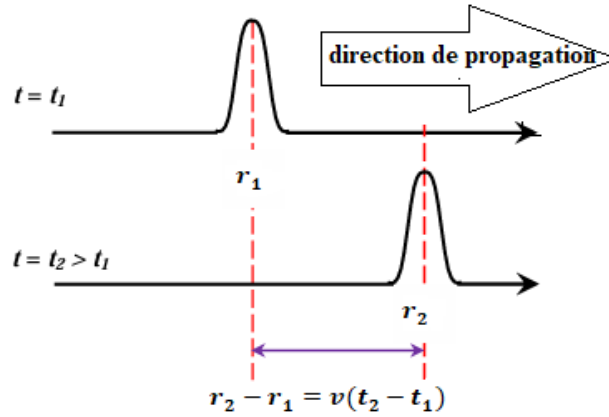


Fig.6.3 : onde progressive dans le sens r croissants.

$$t_1 - \frac{r_1}{v} = t_2 - \frac{r_2}{v} \Rightarrow r_2 - r_1 = v(t_2 - t_1) \quad (6.11)$$

Donc la fonction $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$ correspond à **une onde progressive**.

6.3.2 Propriété de $g\left(t + \frac{r}{v}\right)$

Si on considère la fonction $g\left(t + \frac{r}{v}\right)$, la perturbation à l'abscisse r_1 à l'instant t_1 est le même à l'abscisse r_2 à l'instant $t_2 > t_1$

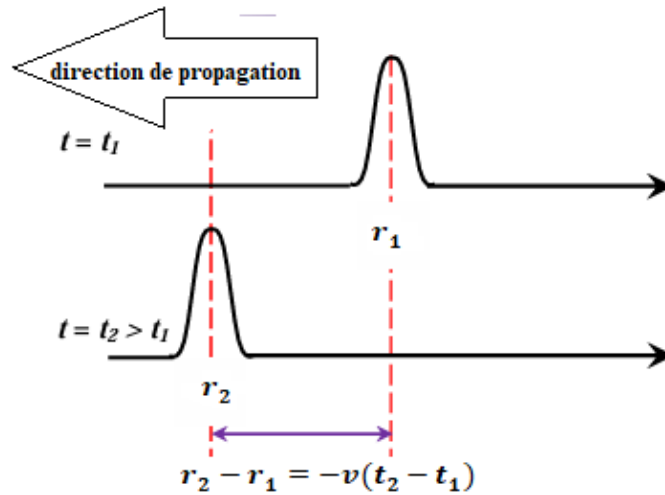


Fig.6.4 : onde progressive dans le sens r décroissants.

Conclusion :

- La fonction $g\left(t + \frac{r}{v}\right)$ correspond à une onde dite « **onde progressive inverse ou rétrogrades** ».
- Donc la solution est une superposition d'ondes progressives et rétrogrades .

6.4 Ondes progressives périodiques sinusoïdales

Une onde progressive harmonique se propageant selon Ox est définie par :

$$\varphi(x, t) = A \sin(\omega t - \phi) \quad (6.12)$$

ou encore en notation complexe :

$$\varphi(x, t) = A e^{j(\omega t - \phi)} \quad (6.13)$$

Où: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde et λ étant la longueur d'onde définie par :

$$\lambda = v f \quad (6.14)$$

6.4.1 Force en un point

On appelle force en un point, la projection selon Oy de la force exercée, en ce point, par la partie gauche de la corde sur la partie droite.

$$F = -T \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} . \quad (6.15)$$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, cette relation devient :

$$F = TkAe^{j(\omega t - \phi)}. \quad (6.16)$$

6.4.2 Vitesse de particules

La vitesse des particules, s'écrit :

$$v(t) = \dot{\phi} = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = JA\omega e^{j(\omega t - \phi)}. \quad (6.17)$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particule $\dot{\phi}$ est en phase avec la force F

6.4.3 Impédance

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule :

$$\bar{Z}(x) = \frac{\bar{\phi}}{\bar{v}} \quad (6.18)$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \frac{kT}{\omega} = \frac{T}{v} = \frac{\vartheta^2 \mu}{v} = \mu v = \sqrt{\mu T} \quad (6.19)$$

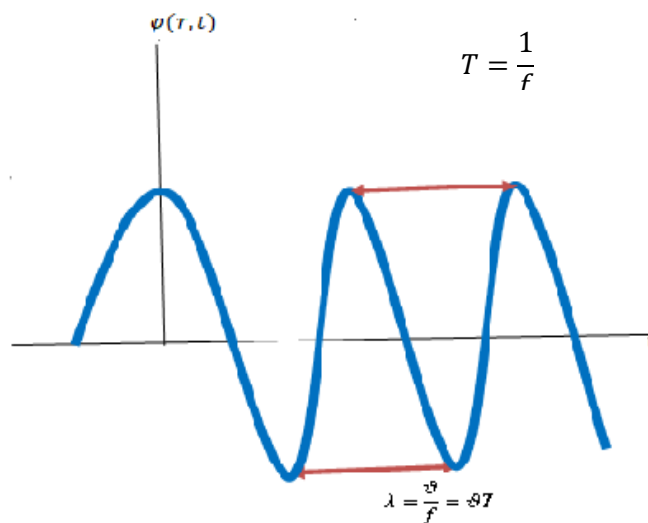


Fig.6.5 : représentation d'une onde sinusoïdale.

6.5 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

Considérons la superposition d'ondes « l'addition de deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation ». En notation complexe, on écrit alors l'onde totale, somme des deux ondes.

6.5.1 Cas de deux ondes de même pulsation

Soit les deux grandeurs sinusoïdales de mêmes pulsations ω :

$$\varphi_1(x, t) = a_1 \sin(k(xvt) + \phi_1) \quad (6.20)$$

$$\varphi_2(x, t) = a_2 \sin(k(xvt) + \phi_2) \quad (6.21)$$

Utilisons la représentation complexe pour calculer : $\varphi(t) = \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t)$

Notons : $kxv = \omega$

$$\varphi_1(x, t) = \overline{a_1} e^{j\omega t} \text{ et } \varphi_2(x, t) = \overline{a_2} e^{j\omega t} \quad (6.22)$$

$$\varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t) = \overline{a_1} e^{j\omega t} + \overline{a_2} e^{j\omega t} = (\overline{a_1} + \overline{a_2}) e^{j\omega t} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \text{On note :} \quad a = \overline{a_1} + \overline{a_2} \Rightarrow \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t) = \\ \varphi(t) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Avec a est le nombre complexe, son module est :

$$|a| = |a_1 e^{j\phi_1} + a_2 e^{j\phi_2}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad (6.25)$$

Et une phase ϕ qui satisfait :

$$\tan \phi = \frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2} \quad (6.26)$$

$$\text{On peut écrire : } a = |a| e^{j\phi} \Rightarrow \varphi(t) = |a| e^{j(\omega t + \phi)} = \varphi_1(x, t) + \varphi_2(x, t) \quad (6.27)$$

6.1.1 Cas de deux ondes de pulsation différente

$$\text{Soit :} \quad \varphi_1(x, t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad (6.28)$$

$$\varphi_2(x, t) = a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (6.29)$$

Posant $a_1 = a_2 = a$ et $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ l'onde résultante est :

$$\varphi(t) = a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right). \quad (6.30)$$

6.6 Exercices :

Exercice 1 :

Une source émet une onde mécanique φ se propageant dans la direction Ox avec une vitesse c constante.

1. Ecrire l'équation de propagation d'onde.
2. Posant les variables suivantes : $p = t - \frac{x}{c}$ et $q = t + \frac{x}{c}$ déterminer la solution générale de cette équation.
3. Quelle est la forme de cette solution dans le régime sinusoïdal ?

Exercice 2 :

Une onde mécanique φ de fréquence ν se propageant dans un milieu à symétrie radiale avec une vitesse ϑ constante.

1. Ecrire l'équation de propagation de φ .
2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles.
3. Exprimer la solution générale dans le cas d'un milieu infini en régime sinusoïdal.

6.7 Solutions :

Exercice 1 :

1. Equation de propagation d'onde

Dans ce cas on a une onde plane qui se propageant suivant l'axe (Ox) donc l'équation est de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

2. Solution générale

On a : $p = t - \frac{x}{c}$ et $q = t + \frac{x}{c}$.

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} ; \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{c} ; \frac{\partial p}{\partial t} = 1 \text{ et } \frac{\partial q}{\partial t} = 1$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = 0.$$

Sachant que :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial p} \text{ alors } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right] = 0.$$

En intégrant sur p ensuite sur q , la fonction φ devient :

$$\varphi(x, t) = f\left(t - \frac{r}{v}\right) + g\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

3. Forme de cette solution dans le régime sinusoïdal est :

$$\varphi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{\omega}{c} x \right) \right]$$

Exercice 2 :

1. Equation de propagation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

2. Solution generale

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \left[f\left(t - \frac{r}{v}\right) + g\left(t + \frac{r}{v}\right) \right] \text{ avec } r^2 = x^2 + y^2.$$

En regime sinisiodal : $\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right).$

3. Solution générale

Dans le cas d'un milieu infini en régime sinusoïdal : on obtient une onde sphérique incidente sinusoïdale comme le montre la figure.

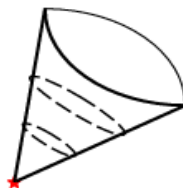


Fig.6.6

Chapitre 7

Cordes vibrantes

Une corde est un milieu continu unidimensionnel ayant une longueur finie ou parfois infinie. Elle possède généralement des propriétés d'élasticité et peut être tendue à ses deux extrémités et être amenée à une longueur supérieure à sa longueur de repos. Dans ce cas, elle possède une tension interne dont l'effet est d'attirer toute portion de la corde vers sa position d'équilibre. Pour une corde tendue, la position d'équilibre correspond à la ligne droite joignant les deux extrémités. Dans ce chapitre on présente l'équation de propagation de cette onde avec sa solution dans les deux cas de corde a une longueur finie ou infinie. La corde vibrante c'est le modèle physique permettant de représenter les mouvements d'oscillation d'un fil tendu.

7.1 Equations des ondes

On considère une corde de masse linéique μ initialement au repos le long de l'axe des abscisses. Elle est tendue avec une tension appliquée à ses deux extrémités. On déforme la corde dans la direction de l'axe des ordonnées et on la lâche. On note $y(x, t)$ la distance de la corde par rapport à l'axe des abscisses au point d'abscisse x et au temps t . Alors y est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante, **appelée équation des cordes vibrantes** :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (7.1)$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ est la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde.

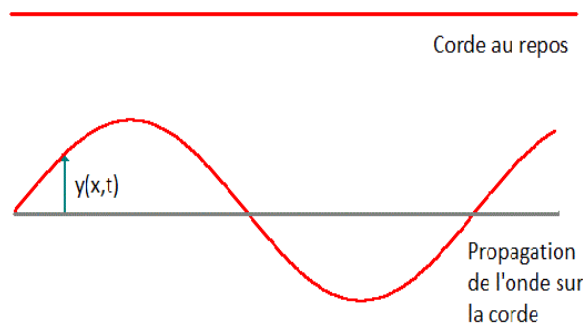


Fig.7.1 : propagation de la corde.

Cette équation a notamment été étudiée par d'Alembert et Euler. Ils ont ainsi prouvé que la solution s'écrit :

$$y(r, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (7.2)$$

où f et g sont des fonctions arbitraires d'une variable réelle deux fois dérivables.

La généralisation de cette équation (7.1) au cas de plusieurs variables spatiales s'appelle équation des ondes.

7.2 Vitesse du son

La vitesse de propagation du son ou célérité du son dépend de la nature du milieu dans lequel l'onde se propage mais également de la température par exemple : la vitesse de propagation d'une onde acoustique dans l'air à 15 °C au niveau de la mer elle est environ 340 m/s. et dans l'espace 129600 km/h.

7.3 Ondes progressives harmoniques

Une onde progressive harmonique se propageant selon (Ox) est définie par :

$$y(x, t) = A \cos(\omega t - kx) \quad (7.3)$$

où $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde, λ étant la longueur d'onde.

7.4 Oscillations libres d'une onde de longueur finie

Considérons une corde de longueur L fixe aux points $x = 0$ et $x = L$, représentée sur la figure (7.2)

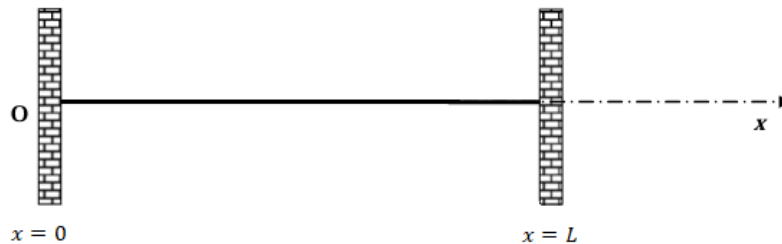


Fig.7.2 : corde de longueur L fixe aux points $x = 0$ et $x = L$.

D'après les conditions aux limites :

$$y(x = 0) = y(x = L) = 0 \text{ et } \frac{dy}{dt}(t = 0) = 0 \quad (7.4)$$

Nous cherchons une solution sous forme $y(x, t) = A(x)T(t)$

En remplaçant dans l'équation de propagation (7.1) on trouve :

$$T(x) \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} A(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = cste \quad (7.5)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} \right] = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = -k_x^2 \quad (7.6)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{A}(x) + k_x^2 A(x) = 0 \\ \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \end{cases} \quad (7.7)$$

Enfin on peut déterminer les solutions comme suit :

$$\begin{cases} A(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \\ T(t) = T_1 \cos \omega t + T_2 \sin \omega t \end{cases} \quad (7.8)$$

Maintenant d'après les conditions initial $y(x=0) = y(x=L) = 0$ et $\frac{dy}{dt}(t=0) = 0$

On obtient donc : $\begin{cases} A_1 = 0 \\ T_2 = 0 \end{cases}$ et $k_x^n = \frac{n\pi}{a}$ (7.9)

$$\begin{cases} A(x) = A_2 \sin k_x^n x \\ T(t) = T_1 \cos \omega t \end{cases} \quad (7.10)$$

La solution finale est de la forme :

$$y(x, t) = \sum_n A_2 T_1 \sin k_x^n x \cos \omega_n t \quad (7.11)$$

7.5 Réflexion et transmission

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, représentées sur la figure (7.3), reliées en $x = 0$. Leurs masses linéiques sont respectivement μ_1 et μ_2 . Lorsqu'une onde venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans la première corde, elle donne naissance au point, $x = 0$, à deux ondes :

- **une onde réfléchie** qui se propage dans le premier milieu dans le sens des x décroissants.
- **une onde transmise** qui se propage dans le second milieu dans le sens des x croissants.

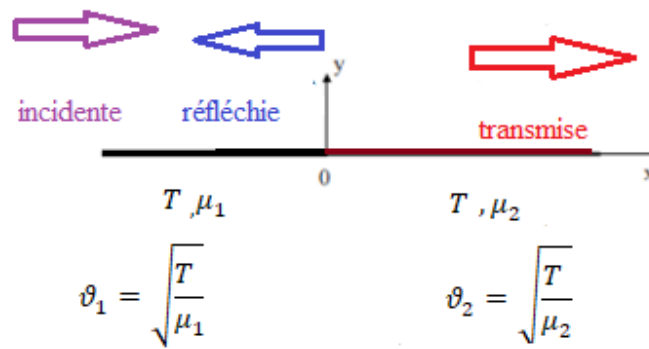


Fig.7.3 : réflexion transmission dans deux cordes semi-infinies

Le coefficient de réflexion r est le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie et l'onde incidente, et le coefficient de transmission t est le rapport entre l'amplitude de l'onde transmise et l'onde incidente :

$$r = \frac{U_r(x, t)}{U_i(x, t)} \quad (7.12)$$

$$t = \frac{U_t(x, t)}{U_i(x, t)} \quad (7.13)$$

Où U_i , U_r et U_t sont les amplitudes des déplacements associés respectivement à l'onde incidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise.

Les impédances Z_1 et Z_2 des deux cordes sont définies par :

$$Z_1 = \sqrt{\mu_1 T} \text{ et } Z_2 = \sqrt{\mu_2 T} \quad (7.14)$$

On en déduit :

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (7.15)$$

7.6 Exercices :**Exercice 1 :**

Soit une corde vibrant transversalement dans le plan Oxy . L'équation de mouvement est de forme $y=f(x,t)$. Soient T et μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre.

1. Ecrire l'équation de propagation de l'onde.
2. En déduire la célérité c des oscillations.

On considère que l'ébranlement original est sinusoïdal.

3. Déterminer la solution de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables.

Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance a , lâchée sans vitesse initiale.

4. Déterminer la forme de la solution générale.
5. Montrer que la fréquence de vibration de la corde sont multiples entier d'une fréquence fondamentale f_1 .

A.N : pour la troisième corde de la guitare de longueur $a=63\text{cm}$ en nylon, de masse volumique $\rho = \frac{1200\text{kg}}{\text{m}^3}$ et de section $S = 0.42\text{mm}^2$

6. Calculer la tension de cette corde pour quelle puisse émettre le son fondamental $f_1 = 147\text{hz}$

7.7 Solution :

1. Equation de propagation de l'onde

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

2. Célérité c des oscillations : $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

3. Solution de l'équation de propagation de l'onde

La solution de cette équation différentielle par la méthode de séparation des variables est: $y(x,t) = A(x)T(t)$

En remplaçant dans l'équation de propagation on trouve :

$$\begin{aligned}
 T(x) \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} A(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= cste \\
 \Rightarrow \left[\frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} \right] &= \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = -k_x^n \\
 \Rightarrow \begin{cases} \ddot{A}(x) + k_x^n A(x) = 0 \\ \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \end{cases} \\
 \begin{cases} A(x) = A_1 \cos k_x^n x + A_2 \sin k_x^n x \\ T(t) = T_1 \cos \omega t + T_2 \sin \omega t \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. Solution générale

Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance a , lâchée sans vitesse initiale

donc : $y(x=0) = y(x=a) = 0$ et $\frac{dy}{dt}(t=0) = 0$

On obtient donc : $\begin{cases} A_1 = 0 \\ T_2 = 0 \end{cases}$ et $k_x^n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \begin{cases} A(x) = A_2 \sin k_x^n x \\ T(t) = T_1 \cos \omega t \end{cases}$

La solution finale est de la forme : $y(x, t) = \sum_n A_2 T_1 \sin k_x^n x \cos \omega_n t$

5. Fréquence de vibration : $k_x = \frac{\omega_n}{c} = \frac{2\pi f_n}{c} = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow f_n = n f_1$ avec $f_1 = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

6. Tension de la corde : $T = 4a^2 \rho S f_1^2 = 17.3 \text{ N}$.

Chapitre 8

Cordes acoustiques dans les fluides

Les ondes acoustiques sont des ondes élastiques qui se propagent dans les fluides (gaz ou liquides). Nous étudierons dans ce chapitre le mouvement vibratoire de ces ondes dites acoustiques ou sonores. Nous présentons l'équation de propagation de cette onde avec sa solution.

8.1 Equation d'onde

Soit un tuyau de section 'S' contenant un fluide. Prenons un élément de volume considéré comme continu et suffisamment petit pour que les grandeurs acoustiques comme la pression, la masse volumique et la vitesse de particule puissent être considérées comme constantes dans cet élément de volume. Ainsi, nous négligerons les effets de la gravitation de telle sorte que P_0 (pression à l'équilibre) et ρ_0 (masse volumique du fluide à l'équilibre) sont uniformes dans tout le milieu. On suppose d'autre part que le milieu est homogène, isotrope et parfaitement élastique, c'est-à-dire non dissipatif.

Soit une tranche de fluide de petite épaisseur Δx située à l'abscisse x lorsque le fluide est au repos, la pression dans le fluide est uniforme et vaut P_0 et le volume occupé est V_0 avec :

$$V_0 = S(x + \Delta x - x) = S\Delta x \quad (8.1)$$

On applique une perturbation à l'entrée du tuyau au point x l'onde se propage. Il y aura déplacement des particules qui se trouvent à la branche x avec une distance $U(x)$, de même les particules qui se trouvent à la branche $x + \Delta x$ vont se déplacer de la même distance $U(x + \Delta x)$. On a de nouvelles positions $x + U(x)$ et $x + \Delta x + U(x + \Delta x)$ (Fig. 8.1).

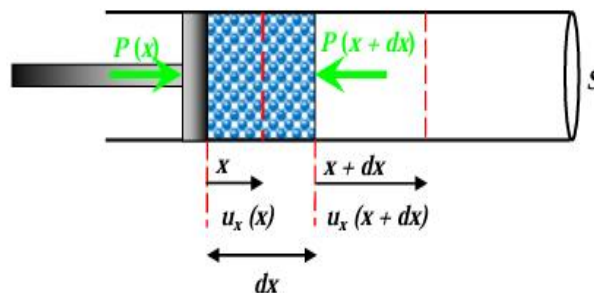


Fig.8.1 : propagation d'une onde acoustique.

Le nouveau volume après perturbation devient :

$$\begin{aligned} V &= S(U(x + \Delta x) + x + \Delta x - x - U(x)) = S(U(x + \Delta x) + \Delta x - U(x)) \\ &= S\Delta x + S(U(x + \Delta x) - U(x)) = V_0 + S(U(x + \Delta x) - U(x)) \end{aligned} \quad (8.2)$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $U(x)$, on obtient :

$$U(x + \Delta x) = U(x) + \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \quad (8.3)$$

On aura :

$$V = V_0 + S \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x = V_0 + V_0 \frac{\partial U}{\partial x} \quad (8.4)$$

Finalement :

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (8.5)$$

La pression acoustique est un paramètre essentiel pour caractériser une onde acoustique.

A l'équilibre, la pression au points x et $x + \Delta x$ est P_0 après la perturbation, la pression instantanée P en un point quelconque appelée pression acoustique définie par :

$$P(x) = P - P_0 \quad (8.6)$$

Comme il y a une compressibilité du fluide à cause de son déplacement, il existe une relation entre la pression acoustique et la variation du volume :

$$P(x) = - \frac{1}{\chi} \frac{\Delta V}{V_0} \quad (8.7)$$

où χ est le coefficient de compressibilité adiabatique.

A partir des deux relations (8.5) et (8.7) on obtient la relation fondamentale de l'acoustique (RFA) :

$$P(x) = - \frac{1}{\chi} \frac{\partial U}{\partial x} \quad (8.8)$$

Utilisant le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (8.9)$$

$$\vec{F}(x, t) + \vec{F}(x + \Delta x, t) + \vec{P} = \Delta m \vec{a} \quad (8.10)$$

Projectons selon Ox:

$$SP(x, t) - SP(x + \Delta x, t) = \Delta m \ddot{U} \quad (8.11)$$

On a $\Delta m = \Delta x S \rho_0 \ddot{U}$ avec ρ_0 étant la masse volumique du fluide à l'équilibre.

En ajoutant et retranchant P_0 dans le premier membre on obtient alors:

$$S[P(x, t) - P(x + \Delta x, t)] = \Delta x S \rho_0 \ddot{U} \quad (8.12)$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P(x, t)$, on obtient :

$$P(x + \Delta x) = P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x \quad (8.13)$$

On aura:

$$-S \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x = \Delta x S \rho_0 \ddot{U} = \Delta x S \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (8.14)$$

En utilisant la RFA :

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.15)$$

Finalement on obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.16)$$

Cette équation est identique à l'équation des cordes vibrantes.

Où c représente la vitesse de propagation définie par :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} \quad (8.17)$$

Obtenons l'équation de propagation en fonction de la pression acoustique $P(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.19)$$

Dérivant les deux membres par rapport à x :

$$-\chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P(x, t)) = \rho_0 \chi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \quad (8.20)$$

$$= \rho_0 \chi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right) = \rho_0 \chi \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\chi P(x,t)) \quad (8.21)$$

On obtient finalement l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (8.22)$$

8.2 Vitesse du son

Correspond à la vitesse de propagation des ondes sonores ou célérité. Ainsi la vitesse du son dans l'air est-elle est de l'ordre de 340 m/s, dans des conditions normales de température et de pression. La vitesse du son n'est pas une constante. Elle varie, par exemple, en fonction de la température. Plus il fait chaud, plus le son voyage vite. La vitesse du son augmente aussi avec la pression atmosphérique donc la vitesse de déplacement du son dépend du milieu dans lequel il est propagé.

8.3 Onde progressive sinusoïdale

Pour une onde se propageant vers les x croissants, une représentation de la fonction $P(x,t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$P(x,t) = P_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) = P_0 \cos(\omega t - kx) \quad (8.23)$$

Où $k = \frac{\omega}{c}$ est le vecteur d'onde.

En représentation complexe l'onde progressive sinusoïdale s'écrit :

$$P(x,t) = P_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad (8.24)$$

Avec: $P(x) = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x}$

Donc : $U(x,t) = -\chi \int P(x) dx \quad (8.25)$

$$U(x,t) = -\chi \int P_0 e^{j(\omega t - kx)} dx \quad (8.26)$$

$$U(x,t) = \frac{\chi P_0}{jk} e^{j(\omega t - kx)} = \frac{\chi P_0}{j \frac{\omega}{c}} e^{j(\omega t - kx)} \quad (8.27)$$

Comme $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$ on obtient alors :

$$U(x, t) = \frac{P_0}{j\omega\rho_0 c} e^{j(\omega t - kx)} \quad (8.28)$$

8.4 Réflexion-transmission

Soit deux milieux fluides semi-infinis séparés par une surface plane. Choisissons un repère orthonormé de telle sorte que le plan yOz coïncide avec la surface de séparation.

Lorsqu'une onde acoustique provenant de $-\infty$, se propageant dans le premier dans la direction de l'axe des x arrive à la surface de séparation, elle donne naissance à deux ondes :

- une onde réfléchie qui se propage dans le premier milieu dans le sens des $x \leq 0$.
- une onde transmise qui se propage dans le second milieu dans le sens des $x \geq 0$.

Les coefficients de réflexion et transmission sont définis respectivement par :

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (8.29)$$

Avec : $Z_1 = \rho_{01} c_1$ est l'impédance de premier fluide.

$Z_2 = \rho_{02} c_2$ est l'impédance de deuxième fluide.

8.5 Exercices :

Exercice 1 :

Une conduite cylindrique de section S et d'axe horizontal Ox contient un gaz au repos, de pression P_0 , de masse volumique ρ et de coefficient de compressibilité χ . Une onde acoustique plane se propageant dans ce fluide. On notera $u(x, t)$ le déplacement de la tranche de fluide d'abscisse au repos x et $P(x, t) = P - P_0$ la pression du fluide à l'abscisse x , à l'instant t . On négligera les échanges de chaleur.

Pour des petites oscillations :

1. Etablir l'équation de propagation relative au déplacement $u(x, t)$ à partir de l'équation fondamentale de la dynamique.

2. Calculer la célérité c de l'onde acoustique dans l'air caractérisé par : $\chi = 7.15 \cdot 10^6 \text{ Pa}^{-1}$ et $\rho = 1.29 \text{ kg.m}^{-3}$.

8.6 Solution :

1. Equation de propagation

Utilisant le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}(x, t) + \vec{F}(x + \Delta x, t) + \vec{P} = \Delta m \cdot \vec{a}$$

Projetons selon Ox :

$$SP(x, t) - SP(x + \Delta x, t) = \Delta m \ddot{U}$$

On a: $\Delta m = \Delta x S \rho_0 \ddot{U}$ avec ρ_0 étant la masse volumique du fluide à l'équilibre.

En ajoutant et retranchant P_0 dans le premier membre on obtient alors :

$$S[P(x, t) - P(x + \Delta x, t)] = \Delta x S \rho_0 \ddot{U}$$

En faisant un développement en série de Taylor au premier ordre de $P(x, t)$, on obtient :

$$P(x + \Delta x) = P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x$$

$$\Rightarrow -S \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \Delta x = \Delta x S \rho_0 \ddot{U} = \Delta x S \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

On a :

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2}$$

Finalement on obtient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho_0 \chi \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

2. Calcul de la célérité

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} = 5542.6 \text{ m/s.}$$

Chapitre 9

Ondes électromagnétiques

Les ondes électromagnétiques sont créées par vibration des charges électriques et cette vibration se propage par transfert d'énergie entre le champ électrique et magnétique. Nous étudierons dans ce chapitre le mouvement vibratoire de ces ondes, où nous présentons l'équation de propagation de cette onde avec les différents types d'ondes électromagnétiques.

9.1 Equation d'onde

La propagation des ondes électromagnétiques est l'une des conséquences les plus importantes des équations de Maxwell.

Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (9.1)$$

où $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N/m}^2$ est la permittivité du vide et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m/A}$ est la perméabilité du vide.

L'équation de propagation du champ électrique avec une vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (9.2)$$

L'équation de propagation du champ magnétique avec une vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$:

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (9.3)$$

Les champs électrique et magnétique se propagent donc à la même vitesse, appelé vitesse de la lumière.

9.2 Réflexion-transmission

Une onde électromagnétique qui se propage dans une direction et dans le premier milieu caractérisé par ε_1 et μ_1 , qui arrive dans un deuxième milieu caractérisé par ε_2 et μ_2 ; on obtient

une onde électromagnétique réfléchie et onde électromagnétique transmise. La surface de séparation entre les deux milieux appelée plan d'interface.

Les vecteurs de propagations incident $\vec{k}_i$, réfléchi $\vec{k}_r$ et transmis $\vec{k}_t$ se trouvent dans le même plan appelé plan d'incidence, ce dernier est perpendiculaire au plan d'interface.

On a les lois de réflexion et de transmission (lois de Snell-Descartes) :

$$\begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \end{cases} \quad (9.4)$$

$$(9.5)$$

Avec n_1 et n_2 les indices de réfraction des milieux 1 et 2 respectivement. θ_i , θ_r et θ_t sont respectivement les angles d'incidence, de réflexion et de transmission.

9.2.1 Polarisation électrique perpendiculaire au plan d'incidence

Dans ce cas nous avons les vecteurs d'ondes suivant :

$$\begin{cases} \vec{k}_i = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_y - \cos \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{k}_r = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_y + \cos \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{k}_t = \frac{n_2 \omega}{c} (\sin \theta_t \vec{e}_y - \cos \theta_t \vec{e}_z) \end{cases} \quad (9.6)$$

Et les vecteurs champs électriques :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_x \\ \vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_x \\ \vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_x \end{cases} \quad (9.7)$$

Dans le cas d'onde plane, on détermine le champ magnétique par :

$$\begin{cases} \vec{B}_i = -\frac{n_1 E_i}{c} (\cos \theta_i \vec{e}_y + \sin \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{B}_r = \frac{n_1 E_r}{c} (\cos \theta_i \vec{e}_y - \sin \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{B}_t = -\frac{n_2 E_t}{c} (\cos \theta_t \vec{e}_y + \sin \theta_t \vec{e}_z) \end{cases} \quad (9.8)$$

Condition initiale

A $t = 0$ s on se place à l'origine $x = y = z = 0$.

Conditions de passage : $E_{1T} = E_{2T}$

ou E_{1T} est le champ du milieu 1 et E_{2T} c'est le champ du milieu transmis ce qui nous permis d'écrire :

avec :

$$\begin{cases} E_{1T} = E_i + E_r \\ E_{2T} = E_t \end{cases} \quad (9.9)$$

$$\Rightarrow E_{0i}e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\vec{e}_x + E_{0r}e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\vec{e}_x = E_{0t}e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}\vec{e}_x \quad (9.10)$$

$$\Rightarrow E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (9.11)$$

Les coefficients de réflexion et de transmission définissent respectivement par :

$$r_{\perp} = \frac{E_{0i}}{E_{0r}} \quad (9.12)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \quad (9.13)$$

Le symbole $\perp$ veut dire qu'on est dans le cas où le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence.

Divisant l'équation (9.11) par E_{0i} l'équation devienne :

$$1 + r_{\perp} = t_{\perp} \quad (9.14)$$

La condition de passage pour le champ magnétique :

$$B_{2T} = B_{1T} \quad (9.15)$$

$$B_{1T} = \frac{n_1 E_i}{c} \cos \theta_i + \frac{n_1 E_r}{c} \cos \theta_i \quad (9.16)$$

$$B_{2T} \frac{n_2 E_t}{c} \cos \theta_t \quad (9.17)$$

$$n_1 \cos \theta_i (E_i - E_r) = n_2 \cos \theta_t E_t \quad (9.18)$$

Divisant cette équation par E_i l'équation devient :

$$1 - r_{\perp} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\perp} \quad (9.19)$$

A partir des deux équations (9.14) et (9.19), on trouve :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (9.20)$$

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (9.21)$$

Les différents vecteurs sont représentés dans le cas de l'incidence perpendiculaire sur Fig. 9.1

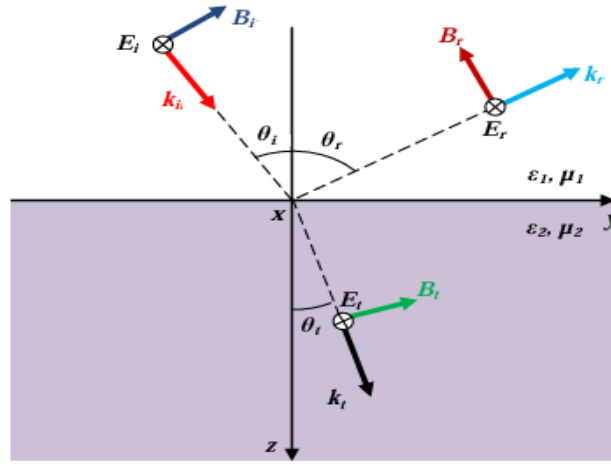


Fig.9.1 : Polarisation électrique perpendiculaire au plan d'incidence

9.2.2 Polarisation électrique parallèle au plan d'incidence

Les vecteurs d'ondes sont définis par :

$$\begin{cases} \vec{k}_i = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_y - \cos \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{k}_r = \frac{n_1 \omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_y + \cos \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{k}_t = \frac{n_2 \omega}{c} (\sin \theta_t \vec{e}_y - \cos \theta_t \vec{e}_z) \end{cases} \quad (9.22)$$

Et les vecteurs champs électriques :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = -E_i (\cos \theta_i \vec{e}_y + \sin \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{E}_r = E_r (\cos \theta_i \vec{e}_y - \sin \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{E}_t = -E_t (\cos \theta_t \vec{e}_y + \sin \theta_t \vec{e}_z) \end{cases} \quad (9.23)$$

Dans le cas d'onde plane, on détermine le champ magnétique par :

$$\begin{cases} \vec{B}_i = \frac{n_1 E_i}{c} \vec{e}_x \\ \vec{B}_r = \frac{n_1 E_r}{c} \vec{e}_y \\ \vec{B}_t = \frac{n_2 E_t}{c} \vec{e}_z \end{cases} \quad (9.24)$$

On a : $E_{1T} = E_{2T} \Rightarrow -E_i \cos \theta_i + E_r \cos \theta_i = -E_t \cos \theta_t$ (9.25)

Divisant cette équation par E_i l'équation devienne :

$$1 - r_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} t_{\parallel} \quad (9.26)$$

Le symbole $\parallel$ veut dire qu'on est dans le cas où le champ électrique est parallèle au plan d'incidence.

De même pour le champ magnétique :

$$B_{2T} = B_{1T} \Rightarrow -\frac{n_1 E_i}{C} - \frac{n_1 E_r}{C} = -\frac{n_2 E_t}{C} \quad (9.27)$$

$$\Rightarrow n_1 (E_i + E_r) = n_2 E_t \quad (9.28)$$

Divisant cette équation par E_i l'équation devient :

$$1 + r_{\parallel} = \frac{n_2}{n_1} t_{\parallel} \quad (9.29)$$

Par combinaison des deux relations (9.26) et (9.29), les coefficients de réflexion et de transmission sont :

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_t - n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (9.30)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (9.31)$$

Les différents vecteurs sont représentés dans ce cas sur Fig.9.2

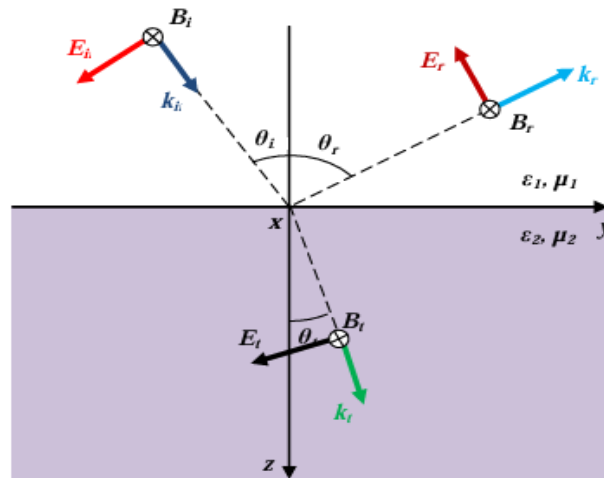


Fig.9.2 : Polarisation électrique parallèle au plan d'incidence

9.3 Différents types d'Ondes électromagnétiques

Le spectre électromagnétique répertorie les ondes électromagnétiques en fonction de leur longueur d'onde et de leur fréquence. Ces types d'ondes électromagnétiques sont subdivisés en fonction de leur champ d'application et correspondent à une plage de longueur d'onde spécifique figure (9.3).

Les types d'ondes électromagnétiques sont les suivants.

- ondes radio,
- microondes (catégorie d'ondes radio),
- infrarouges,
- lumière visible,
- ultraviolets,
- rayons X,
- rayons gamma.

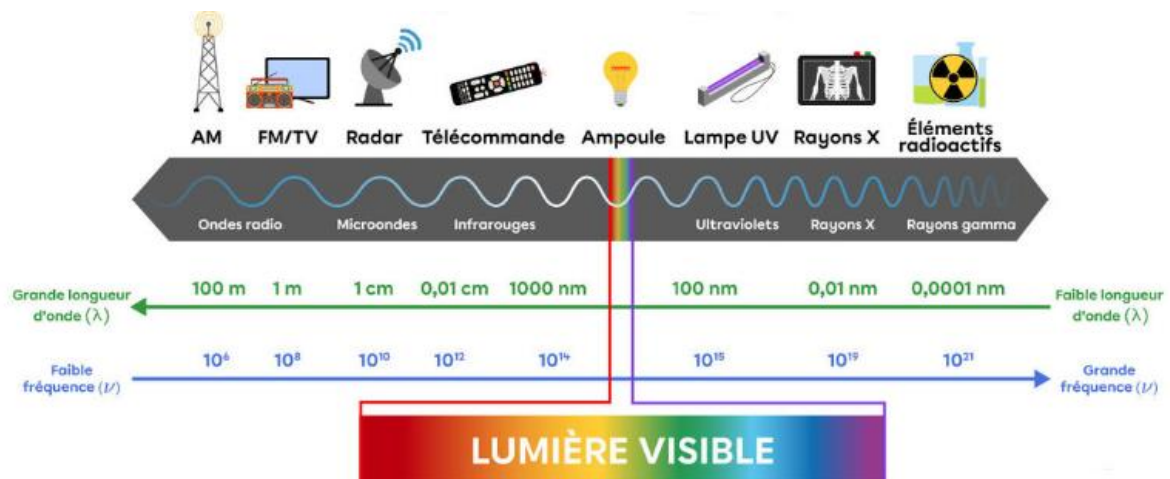


Fig. 9.3 : spectre électromagnétique.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] H. Djelouah. *Vibrations et Ondes Mécaniques Cours & Exercices*. Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene. Année Universitaire : 2011/2012. 122 pages.
- [2] F. Boukli Hacene. *Vibrations et Ondes Mécaniques*. Université Hassiba Benouali de Chlef. Année Universitaire : 2012/2013. 141 pages.
- [3] N. Aklouche. *Vibrations et Ondes Mécaniques*. Université Ferhat Abbas Sétif. Année Universitaire : 2011/2012. 45 pages.
- [4] R.N. Choudhuri. *Waves and Oscillations*. Department of Physics, Visva-Bharati Santiniketan, West Bengal. 2010. 394 pages.
- [5] H.J. Pain. *The Physics of Vibrations and Waves*, 6th Ed. London, UK, John Wiley & Sons, Ltd., 2005, 582 pages.
- [6] A. Mustapha. *Vibrations et Ondes Mécaniques*. Université des Sciences et de la Technologie d'Oran. Année Universitaire : 2022/2023. 78 pages.
- [7] M. Henry & N. Delorme. *Mini Manuel de Mécanique du Point*. Dunod, Paris, 2008. 241 pages.
- [8] G.C. King. *Vibrations and Waves*. 1st Ed. School of Physics & Astronomy, The University of Manchester, Manchester, UK. Wiley. 2009. 245 pages.
- [9] A.P. French. *Vibrations and Waves*. 1st Ed. M.I.T. Introductory Physics Series, CRC Press; Cambridge, USA, 2017 pages 328.
- [10] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker. *Fundamentals of Physics Extended*. 8th Ed. Wiley. 2008. 1224 pages.