الـجـمـهـوريـة الـجـزائـريـة الـديـمـقـراطـيـة الـشـعـبـيـة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة الــتــعــلــيــم الــعــالــي و الــبــحــث الــعــلــمــي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE MUSTAPHA STAMBOULI

MASCARA

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

جامعة مصطفى اسطمبولي

مـعـسـكـر

كـلـيـة الـعـلـوم الـدقـيـقـة

قسم الـرياضيات

Thèse de doctorat

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Analyse Mathématique*

Sujet de la thèse *:*

L'équation du champ de phase cristallin avec dérivée temporelle fractionnaire

---

Présentée par: Ouedjedi Yamina

Devant le Jury :

Président :	**Mr. Frakis Abdelkader**	**Prof**	**Université de Mascara**
Examinateur:	**Mr. Mezouar Nadia**	**Prof**	**Université de Mascara**
Examinateur:	**Mr. Bayour Benoumer**	**Prof**	**Université de Mascara**
Examinatrice:	**Mme. Aitemrar Chafika Amel**	**MCA**	**ENS Oran**
Raporteur:	**Mr. Benmeriem Khaled**	**Prof**	**Université de Mascara**
Co-Rapporteur	**Mr. Rougirel Arnaud**	**MCA**	**Université de Poitier-France**

L'Année Universitaire: 2024-2025

Dédicace

A mes parents,

mon frère, mes soeurs,

mes petites Sodjoud et Dhoha.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Mr Arnaud Rougirel et Mr Khaled Benmeriem, pour leurs observations et leurs conseils tout au long de ces années de thèse. Ils ont toujours été disponible, à l'écoute de mes questions et ils sont toujours intéressés à l'avancée de mes travaux.

Je voudrais à remercier Mr Frakis Abdelkader d'avoir accepté d'être président du jury. Je remercie également Mr Bayour Benoumer, Mme Mezouar Nadia et Mme Aite mrar Chafika Amel pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Abstract

In this thesis, we study the existence and uniqueness of the weak solution to the time fractional crystal phase field equation with the time Caputo derivative and the existence and uniqueness of the time fractional reaction-diffusion equation with the time Caputo derivative and the time Riemann-Liouville derivative.

To obtain the existence of the weak solution to these problems, we use the Galerkin method. For this, we need to study ordinary differential equations with Riemann-Liouville fractional derivative and Caputo fractional derivative in Chapter 3 and to study fractional spaces in Chapter 4.

Résumé

Dans cette thèse, on étudie l'existence et l'unicité de la solution faible de l'équation du champ de phase cristallin avec dérivée temporelle fractionnaire de Caputo et l'existence et l'unicité de l'équation de réaction diffusion avec dérivée temporelle fractionnaire de Riemann-Liouville et dérivée temporelle fractionnaire de Caputo.

Afin d'obtenir l'existence de la solution faible de ces problèmes on utilise la méthode de Galerkin, pour cela on a besoin d'étudier les équations différentielles ordinaire avec dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et dérivée fractionnaire de Caputo, dans le chapitre trois et d'étudier les espaces fractionnaires dans le chapitre 4.

ملخص

ندرس في هذه الرسالة وجود و وحدانية الحل الضعيف لمعادلة مجال الطور البلوري مع مشتق كابوتو الكسري الزمني، ووجود و وحدانية معادلة التفاعل والانتشار مع مشتق ريمان-ليوفيل الكسري الزمني ومشتق كابوتو الكسري الزمني. وللحصول على وجود الحل الضعيف لهذه المسائل، تُستخدم طريقة جاليركين. ويتطلب ذلك دراسة المعادلات التفاضلية العادية مع مشتق ريمان-ليوفيل الكسري ومشتق كابوتو الكسري الزمني في الفصل الثالث، ودراسة الفضاءات الكسرية في الفصل الرابع.

Table des matières

Notations

PFC	Phase field cristal (Champs de phase cristallin).
EDP	Equation différentielle partielle.
$\mathbb{R}^n$	Espace euclidien de dimension n.
Ω	Domaine borné régulier de $\mathbb{R}^n$.
H	Un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(.,.)$.
X	Un espace de Banach.
$\rightarrow$	La convergence forte.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$B(x_0, r, X)$	La boule de centre x_0 et de rayon r.
$\Subset$	Injection compacte.
$\hookrightarrow$	Injection continue.
$< .,. >$	Crochet de dualité.
$u_h(.) = u(. - h)$	La translation de u par h.
$D^{\alpha}_{0,t}$ ou ${}^RD^{\alpha}_{0,t}$	La dérivée fractionnaire de Riemann Liouville.
${}^cD^{\alpha}_{0,t}$, ${}^CD^{\alpha}_{0,t}$	La dérivée fractionnaire de Caputo.
p.p	p.p=Presque par tout.
$mes(\Omega)$	Mesure de Ω.
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue.
$W^{k,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev.
$H^k(\Omega)$	Espace de Sobolev pour $p = 2$.
$\partial\Omega$	Frontière du Ω.
Δ	Opérateur Laplacien.
$\|\|.\|\|_E$	Norme sur l'espace E.
Γ	La fonction Gamma.
β	La fonction Beta.
$E_{\alpha,\alpha}$	La fonction Mettag Leffler.
∇	Opérateur gradient.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	L'espace de fonction k fois continûment différentiables.
$\mathcal{D}(\Omega)$	L'espace de fonction infiniment différentiable a support compact.
cst	Désigne une constante.

Introduction

Motivations physiques

La méthode du champs de phase cristallin (PFC) a été introduite par K. Elder et ses collaborateurs en 2002 [13][14] [15]. On peut la voir comme une approche multi-échelle qui relie entre la méthode classique de la dynamique moléculaire (MD) et la méthode du champs de phase.

Le modèle de champ de phase a été introduit pour la première fois dans la modélisation de la solidification d'une masse fondue pure. L'idée était d'éviter le suivi explicite d'une interface solide-liquide pendant la solidification en remplaçant l'interface solide-liquide par une interface diffuse. La théorie d'interface diffuse la plus connue aujourd'hui est due à Cahn et Hilliard qui ont étudié les limites d'interphase décrites par un champ de composition. L'interface diffuse du mouvement des parois du domaine antiphasé a été proposée pour la première fois par Allen et Cahn, c'est-à-dire l'équation d'Allen Cahn. L'équation de diffusion non linéaire de Cahn-Hilliard et l'équation d'Allen Cahn fournissent les équations de base régissant le champ de phase.

Cependent pour la dynamique moléculaire, l'échelle de temps est très courte.

La méthode du champs de phase cristallin introduit un paramètre d'ordre défini comme la densité locale atomique moyennée sur de très petites échelle du temps. Ce paramètre est uniforme dans la phase liquide et périodique dans la phase cristalline [13].

Elle est basée sur une fonctionnelle de l'énergie libre qui peut être déduite de la théorie de Ramakrishnan et Yussouff [38]. Après certaines simplifications on arrive à une fonctionnelle de l'énergie libre du type Brazowskii en 1975 et Swift-Hohenberg en 1977 [36]. Ainsi une équation conservatrice du mouvement est adoptée pour décrire l'évolution du paramètre d'ordre. Selon [13], l'équation simplifiée, sans dimension du modèle est donnée par

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2[(\nabla^2+1)^2\psi + r\psi + \psi^3] \tag{0.1}$$

où r est un paramètre négatif, ψ la densité atomique. La fonctionelle de l'énergie libre associe a (0.1) est

$$E(\psi) = \int_\Omega \frac{1}{2}\psi(\nabla^2+1)^2\psi - r(-\frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{4}\psi^4)dx \tag{0.2}$$

où Ω est le domaine occupé par le matériau. Le modèle du champs de phase cristallin est appliqué pour des problèmes d'élasticité ou de la croissance des grains.

Modèle du champs de phase cristallin et dérivée fractionnaire temporelle

Récemment les modèles du champs de phase et le modèle du champs de phase cristallin avec effets nonlocals sont utilisés où les interactions à longue portée sont intéressantes. On se propose de modéliser la nonlocalité en temps par des dérivées temporelles fractionnaires.

La question des dérivées d'ordre non entier est évoquée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à de L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x, Leibnitz repond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences . Plus de 300 ans après on commence

seuleument à venir à bout des difficultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847). Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion dérivation aux ordres non-entiers. Les approches les plus populaire sont la dérivée fractionnaire de Caputo et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.
La définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α où $0 < \alpha < 1$ de la fonction intégrable f sur $[0, T]$ est donée par

$$D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * f)(t). \tag{0.3}$$

Où $g_{1-\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$.
La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle actif dans le développement de calcul differentiel à la fin des années 1960. Caputo a proposé une nouvelle définition de la dérivation fractionnaire pour résoudre des problèmes de mécanique.
La définition de la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction continue sur $[0, T]$ d'ordre α où $0 < \alpha < 1$ est donnée par

$$D_{0,t}^{\alpha} f(t) = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * (f - f(0)))(t). \tag{0.4}$$

Dans cette thèse on étudie l'équation de champ de phase cristallin avec dérivée temporelle fractionnaire. L'équation de champs de phase cristallin est donnée par

$$D_{0,t}^{\alpha} u - \Delta(\Delta^2 u + 2\Delta u + f(u)) = 0. \tag{0.5}$$

Problèmes fractionnaires et résultats principaux
La méthode de Galerkin est une méthode très générale et très efficace pour résoudre les équations aux dérivées partielles linéaire et nonlinéaire. Afin de montrer l'existence de la solution de ces dérivée temporelle fractionnaire on a étudié les deux problèmes suivants (Chapitre 3)

$${}^{R}D_{0,t}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \quad (g_{1-\alpha} * x)(0) = v. \tag{0.6}$$

$${}^{c}D_{0,t}^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \quad x(s) = v. \tag{0.7}$$

Le problème (0.6) concerne la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, et (0.7) concerne la dérivée fractionnaire de Caputo.
On a aussi besoin des trois points suivants pour résoudre des équations différentielles partielles avec dérivée temporelle fractionnaire de Riemann-Liouville (Dans le cas de la dérivée temporelle de Caputo ces points on été développé dans [25])

- Les espaces fractionnaires.
- Les inégalités temporelles fractionnaires.
- Le théorème de Aubin lions.

Habituellement, les espaces fractionnaires de Gagliardo-Sobolev sont utilisés. Cependant, ils ne sont pas très adaptés pour les problèmes temporel fractionnaire puisque la relation entre ces espaces et la dérivés temporelles fractionnaire n'est pas simple.
Récemment, des espaces fractionnaires plus simples sont apparus dans la littérature. Voir par exemple [12] [25]. Ces espaces sont des généralisations naturelles des espaces d'ordre entier voir chapitre 4.
Dans les inégalités fractionnaires on utilisera par exemple

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u(t,x)|^2dx \leq \int_{\Omega} D^{\alpha}_{0,t}u(t,x)dx. \tag{0.8}$$

Dans le cas entier, l'inégalité (0.8) est vraie si la condition initiale est triviale. Zacher [39] a prouvé (0.8) et on trouve aussi la preuve dans [25] mais sous des conditions différentes, le premier utilise la régularité et le deuxième la convexité . Pour appliquer (0.8) pour résoudre des problèmes nonlinèaire on utilisé un argument de densité. Voir le corollaire 3.0.1 et la proposition 3.0.2.
Pour obtenir la convergence du terme non linéaire, on a besoin d'un théorème analogue au théorème de Aubin Lions dans EDP, ce théorème nous donne la convergence ponctuelle par un argument de compacité voir le lemme 3.0.4.
Comme une application des chapitres 3 et 4 on a choisis une équation de réaction-diffusion fractionnaire, le problème suivant est avec la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

$$\begin{cases} {}^{R}D^{\alpha}_{0,t}u = \Delta u - f(u) & sur\,[0,T]\times\Omega \\ u = 0 & sur\,[0,T]\times\partial\Omega \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = v & sur\,[0,T]\times\Omega. \end{cases} \tag{0.9}$$

Ici $u : \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnu et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale de degré impair (on le note p) à coefficient dominant positif

$$f(u) = \sum_{j=1}^{p} b_j u^j \quad b_p > 0. \tag{0.10}$$

On a trouvé que le problème a une unique solution dans $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap L^{\frac{p}{p+1}}(0,T;L^{\frac{p}{p+1}}(\Omega))$ si $\alpha > \frac{p}{p+1}$. Si $\alpha \leq \frac{1}{p+1}$ le problème a une solution si $v = 0$ voir le théorème 4.1.2.
Puis on a étudié le problème de réaction-diffusion fractionnaire avec dérivée temmporelle fractionnaire de Caputo suivant

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}_{0,t}u = \Delta u - f(u) & sur\,[0,T]\times\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & sur\,[0,T]\times\partial\Omega \\ u(0) = v & sur\,[0,T]\times\Omega. \end{cases} \tag{0.11}$$

Alors le problème a une unique solution dans $L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega))$.
Par comparaison avec la dérivée fractionnaire de Rieman-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo retire les points de singularités à l'origine. L'étude des problème

fractionnaire avec dérivée de Caputo rassemble beaucoup l'étude des problèmes dans le cas entier. Puis on a étudié le modèle de champs de phase cristallin avec dérivée temporelle fractionnaire.

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}_{0,t}u(t) - \Delta(\Delta^2 u(t) + 2\Delta u(t) + f(u(t))) = 0 \quad , sur\ [0,T] \times \Omega \\ -\frac{\partial \Delta^2 u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad sur\ [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \text{ dans } [0,T] \times \Omega. \end{cases} \tag{0.12}$$

Le problème a unique solution dans $L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))$ voir théorème 7.0.2.

Plan

Cette thèse est partagée en deux parties.

La première concerne l'étude des équations difféhabía retilles ordinaire d'ordre fractionnaire (non entier)on obtient l'existence de la solution au moyen du théorème de Cauchy-Lipschitz et la méthode d'approximation succéssive. La deuxième partie est consacrée à l'étude des équations différentielles partielles d'ordre non entier en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin pour obtenir l'existence de la solution.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre on donne quelques théorèmes et définitions qu'on va les utiliser dans les chapitres suivants.

1.1 Espaces fonctionnels

On va utiliser les espaces $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ et les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ [5].

Définition 1.1.1 *Soit $p \in [1,\infty]$. On note $L^p(0,T;X)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : [0,T] \to X$ tel que $t \mapsto ||f(t)||_X$ appartient à $L^p[0,T]$.*

Théorème 1.1.1 *L'espace $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$||f||_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} (\int_0^T ||f(t)||^p dt)^{\frac{1}{p}}, & si\, p < \infty\,; \\ ess\sup_{t\in[0,T]} ||f(t)||, & si\, p = \infty\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Théorème 1.1.2 *[35] Soient X, Y, B des espaces de Banach tels que*

$$X \Subset B \subset Y. \tag{1.2}$$

Pour tout $1 < q \leq \infty$ et A une partie bornée dans $L^q(0,T;B) \cap L^1_{loc}(0,T;X)$ et si

$$\forall 0 < t_1 < t_2 < T, \int_{t_1}^{t^2} ||u(t+h)-u(t)||_Y dt \to 0 \text{ quand } h \to 0, \; uniformement\, pour\, u \in A. \tag{1.3}$$

Alors A est relativement compacte dans $L^p(0,T;B)$, $\forall p < q$.

Lemme 1.1.1 *Pour tout $p < \infty$, alors $u \in L^p(0,T;X)$ on a*

$$u_h \to u \quad dans\, L^p(0,T;X)\, quand\, h \to 0. \tag{1.4}$$

Pour plus d'informations sur ces espaces voir [4].

Lemme 1.1.2 *[34] Soit u une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur Ω on a*

$$\int_{\Omega} div\, u dx = \int_{\partial\Omega} u.\overrightarrow{n}\, d\sigma. \tag{1.5}$$

Où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire normal sur $\partial\Omega$.

Lemme 1.1.3 *(Formule de Green) Pour tout $u, v \in H^2(\Omega)$ on a*

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u.\overrightarrow{n}\, d\sigma. \tag{1.6}$$

Définition 1.1.2 *Soit $\beta \in (0, \infty)$, on note g_β une fonction dans $L^1_{loc}([0, \infty))$ définie p.p $t > 0$ par*

$$g_\beta(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1},$$

où Γ désigne la fonction gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \tag{1.7}$$

Proposition 1.1.1 *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$, alors*

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}. \tag{1.8}$$

Définition 1.1.3 *Soit $0 < \alpha < 1$, on définit l'espace $C_{1-\alpha}([0, T], X)$ par*

$$C_{1-\alpha}([0, T]; X) = \{x \in C(]0, T]; X) : \frac{x}{g_\alpha} \, admet \; une \; limite \, en \; t = 0\}. \tag{1.9}$$

Théorème 1.1.3 *L'espace $C_{1-\alpha}([0, T]; X)$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$||x||_{C_{1-\alpha}([0,T];X)} = \sup_{t\in[0,T]} \frac{||x(t)||}{g_\alpha(t)}. \tag{1.10}$$

Définition 1.1.4 *On note $\mathcal{D}'(0, T; X)$ l'espace des applications linéaires continue de*

$$\mathcal{D}(0, T) \to X.$$

On l'appelle l'espace de distribution à valeur vectorielle.

Définition 1.1.5 *Soit $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, on définit la dérivée de T par*

$$< T', \varphi >= - < T, \varphi' >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

1.2 Quelques inégalités

Inégalité de Hölder : Soient $f \in L^p(0,T;X)$, $g \in L^q(0,T,X)$

$$\int_0^T ||f(t)g(t)||_X dt \leq ||f||_{L^p(0,T;X)}||g||_{L^q(0,T;X)},$$

avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Inégalité de Young [32] Pour tout $a,b \geq 0$, $p,q > 1$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Des fois on utilise l'inégalité de Young avec ϵ

$$ab \leq \frac{1}{(q\epsilon)^{\frac{p}{q}}}\frac{a^p}{p}+\epsilon b^q.$$

Inégalité de Poincaré : Soient Ω un ouvert borné et $1 \leq p < \infty$. Il existe une constante $C(\Omega,p)$ telle que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega,p)||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

1.3 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *Soit $g \in L^1_{loc}([0,\infty))$, $T>0$ et $f \in L^1(0,T;X)$. Alors la convolution de f et g est une fonction dans $L^1(0,T;X)$ donnée par*

$$g * f(t) = \int_0^t g(t-y)f(y)dy, \quad p.p\ t \in [0,T].$$

Nous avons : si $f \in L^p(0,T;X)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, et $g \in L^1(0,T)$ alors

$$g * f \in L^p(0,T;X) \quad et \quad ||g*f||_{L^p(0,T;X)} \leq ||g||_{L^1(0,T)}||f||_{L^p(0,T;X)}. \tag{1.11}$$

Définition 1.3.2 *Soient $0<\alpha<1$, $T>0$, $t \in [0,T]$ $1 \leq q < \infty$ et f une fonction dans $L^q([0,T];X)$. On dit que f admet une dérivée de Riemann Liouville d'ordre α (fractionnaire) dans $L^q([0,T];X)$ si*

$$g_{1-\alpha} * f \in W^{1,q}([0,T];X). \tag{1.12}$$

Dans ce cas

$$^{R}D^{\alpha}_{0,t}f = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * f). \tag{1.13}$$

Voir définition 2.4 [29].

Exemple 1.3.1 *1. On va calculer la dérivée fractionnaire de la fonction constante. Notons $f(t) = c$, $T > 0$, pour tout $t \in [0, T]$ et $0 < \alpha < 1$ on a*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * c)(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-y)^{-\alpha} dy \\ &= c g_{1-\alpha}(t). \end{aligned} \tag{1.14}$$

2. Soient $0 < \alpha < 1$, $\beta \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction $f(t) = t^\beta$, alors

$$\begin{aligned} D^\alpha_{0,t} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-y)^{-\alpha} y^\beta dy \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{t^{\beta+1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) \int_0^1 (1-z)^{-\alpha} z^\beta dz \\ &= \frac{(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\beta-\alpha} B(1-\alpha, \beta+1) \quad \textit{voir (1.16) la définition de } B \\ &= \frac{(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-1)} t^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)} \quad \textit{voir (1.17)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1) t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Dans l'exemple B désigne la fonction beta

$$B(w, z) = \int_0^1 (1-y)^{w-1} y^{z-1} dy \quad \textit{avec } z \in]0, \infty[, w \in]0, \infty[. \tag{1.16}$$

Nous avons

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.17}$$

On a aussi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.18}$$

Proposition 1.3.1 *[12] Soit $\alpha \in (0,1)$ et $u \in L^1(0, T; X)$. Si u admet une dérivée fractionnaire dans $L^1(0, T; X)$, alors*

$$u = (g_{1-\alpha} * u)(0) g_\alpha + g_\alpha *^R D^\alpha_{0,t} u.$$

1.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.4.1 *Soient $0 < \alpha < 1$, x une fonction dans $C([0, T]; X)$. On dit que x admet une dérivée de Caputo d'ordre α (fractionnaire) dans $C([0, T]; X)$ si*

$$g_{1-\alpha} * (x - x(0)) \in C^1([0, T]; X).$$

Dans ce cas la dérivée de Caputo d'ordre α de x est donnée par

$$^{C}D_{0,t}^{\alpha}x = \frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * (x - x(0))).$$

Exemple 1.4.1 – *Pour tout $0 < \alpha < 1$, notons $f(t) = c$ alors sa dérivée fractionnaire est*

$$^{C}D_{0,t}^{\alpha}f(t) = 0. \tag{1.19}$$

Chapitre 2

Equation differentielle ordinaire avec dérivée fractionnaire

2.1 Equation différentielle ordinaire avec dérivée de Riemann-Liouville

Soient $(X, ||.||)$ un espace de Banach réel et $0 < \alpha < 1$. On considère le problème suivant, $\forall t \in [0, T]$ avec $T > 0$

$$^{R}D^{\alpha}_{0,t}x(t) = f(t, x(t)), \quad (g_{1-\alpha} * x)(0) = v. \tag{2.1}$$

La condition initiale dans (2.1) veut dire

$$(g_{1-\alpha} * x)(t) \to v \,\text{quand}\, t \to 0. \tag{2.2}$$

Définition 2.1.1 *On dit que la fonction $f : [0, T] \times X \to X$ est globalement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si il existe une constante $L(T)$ telle que pour tout $x, y \in X$*

$$||f(t, x) - f(t, y)||_X \leq L(T)||x - y||_X. \tag{2.3}$$

Définition 2.1.2 *Soient $T > 0$, $0 < \alpha < 1$ et f une fonction continue sur $[0, T] \times X$. Une fonction $x : [0, T] \to X$ est dite solution du problème (2.1) sur $[0, T]$ si*

- *$(g_{1-\alpha} * x)(0) = v$ dans X ;*
- *$x \in C_{1-\alpha}([0, T]; X)$ et admet une dérivée fractionnaire dans $L^1([0, T]; X)$ au sens de la définition 1.3.2;*
- *$^{R}D^{\alpha}_{0,t}x = f(t, x)$ dans $C_{1-\alpha}([0, T]; X)$.*

Théorème 2.1.1 *Soit f une fonction continue sur $[0, T] \times X$, globalement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable et*

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.4}$$

Alors le problème (2.1) a une unique solution.

Preuve

On remarque que le problème posé equivaut à résoudre l'équation intégrale

$$\forall t \in]0,T]; \quad x(t) = g_\alpha(t)v + \int_0^t g_\alpha(t-y) f(y, x(y))dy. \tag{2.5}$$

En effet

1. La condition initiale, on a grâce à (1.8)

$$\begin{aligned} ||g_{1-\alpha} * x(t) - v|| &= ||g_{1-\alpha} * g_\alpha(t)v + g_{1-\alpha} * g_\alpha * f(.,x(.))(t) - v|| \\ &\leq || \int_0^t f(y,x(y)) - f(y,0)dy|| \\ &\leq L(T) \int_0^t ||x(y)||dy \quad \text{d'après (2.3) et (2.4)} \\ &\leq L(T) \sup_{t\in[0,T]} \frac{||x(t)||}{g_\alpha(t)} g_{\alpha+1}(t) \to 0 \,\text{quand}\, t \to 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

2. Montrons que $D^\alpha_{0,t}x(t) = f(t,x(t))$

$$D^\alpha_{0,t}x(t) = \frac{d}{dt}((g_{1-\alpha} * x)(t)) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(y,x(y))dy. \tag{2.7}$$

Comme f est $L^1(0,T;X)$ alors

$$D^\alpha_{0,t}x(t) = f(t,x(t)). \tag{2.8}$$

Par convolution, nous avons

$$g_\alpha * D^\alpha_{0,t}x(t) = g_\alpha * f(.,x(.))(t). \tag{2.9}$$

Grâce à la proposition 1.3.1

$$x(t) = g_\alpha(t)v + \int_0^t g_\alpha(t-y) f(y,x(y))dy. \tag{2.10}$$

Pour montrer l'existence de la solution de ce problème on va utiliser la méthode des approximations successives.

Existence Soit $T > 0$. On forme la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations de reccurence

$$x_0(t) = g_\alpha(t)v, \quad x_{n+1}(t) = g_\alpha(t)v + \int_0^t g_\alpha(t-y) f(y,x_n(y))dy \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.11}$$

Pour $n = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_\alpha(t)}||x_1(t)-x_0(t)|| &= ||g_\alpha(t)v + \frac{1}{g_\alpha(t)}\int_0^t g_\alpha(t-y)f(y,x_0(y))dy - g_\alpha(t)v|| \\ &\leq \frac{1}{g_\alpha(t)}\int_0^t g_\alpha(t-y)||f(y,x_0(y)) - f(y,0)||dy \quad \text{en utilisant (2.4).}\end{aligned} \tag{2.12}$$

Comme la fonction f est globalement lipschitzienne on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_\alpha(t)}||x_1(t)-x_0(t)|| &\leq \frac{L(T)}{g_\alpha(t)}\int_0^t g_\alpha(t-y)||x_0(y)||dy \quad \text{d'après (2.3)} \\ &\leq \frac{L(T)||v||}{g_\alpha(t)} g_\alpha * g_\alpha(t) \\ &\leq \frac{L(T)||v||}{g_\alpha(t)} g_{2\alpha}(t) \quad \text{d'après (1.8).}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Pour $n = 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_\alpha(t)}||x_2(t)-x_1(t)|| &= \frac{1}{g_\alpha(t)}||\int_0^t g_\alpha(t-y)(f(y,x_1(y)) - f(y,x_0(y))dy|| \\ &\leq \frac{L(T)}{g_\alpha(t)}\int_0^t g_\alpha(t-y)||x_1(y)-x_0(y)||dy \quad \text{d'après (2.3)} \\ &\leq \frac{L(T)}{g_\alpha(t)}\int_0^t g_\alpha(t-y)\frac{g_\alpha(y)}{g_\alpha(y)}||x_1(y)-x_0(y)||dy \\ &\leq \frac{L(T)^2||v||}{g_\alpha(t)} g_\alpha * g_{2\alpha}(t) \quad \text{d'après (2.13)} \\ &\leq \frac{L(T)^2||v||}{g_\alpha(t)} g_{3\alpha}(t) \quad \text{d'après (1.8)}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Par recurence, pour tout $n \geq 0$ nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_\alpha(t)}||x_{n+1}(t)-x_n(t)|| &\leq \frac{||v||L(T)^{n+1}g_{(n+2)\alpha}(t)}{g_\alpha(t)} \\ &= \frac{||v||L(T)^{n+1}t^{(n+1)\alpha}t^{\alpha-1}}{g_\alpha(t)\Gamma((n+1)\alpha+\alpha)}. \\ &= \Gamma(\alpha)||v||\frac{(L(T)t^\alpha)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha+\alpha)} \\ &\leq \Gamma(\alpha)||v||\frac{(L(T)T^\alpha)^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha+\alpha)}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Alors on a par sommation

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{g_\alpha(t)}||x_{n+1}(t)-x_n(t)|| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\alpha)||v||\frac{(L(T)T^\alpha)^{n+1}}{\Gamma((n+2)\alpha)}. \tag{2.16}$$

Montrons la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\alpha)||v||\frac{(L(T)T^{\alpha})^{n+1}}{\Gamma((n+2)\alpha)}. \tag{2.17}$$

En utilisant le critère de d'Alembert, nous avons

$$\Gamma(\alpha)||v||\frac{(L(T)T^{\alpha})^{n+2}}{\Gamma((n+3)\alpha)} \times \frac{\Gamma((n+2)\alpha)}{\Gamma(\alpha)||v||(L(T)T^{\alpha})^{n+1}} = L(T)T^{\alpha}\frac{\Gamma((n+2)\alpha)}{\Gamma((n+2)\alpha+\alpha)}. \tag{2.18}$$

On a

$$\Gamma((n+2)\alpha) = \frac{\Gamma((n+2)\alpha+1)}{(n+2)\alpha}. \tag{2.19}$$

Alors

$$\begin{aligned} L(T)T^{\alpha}\frac{\Gamma((n+2)\alpha)}{\Gamma((n+2)\alpha+\alpha)} &= \frac{L(T)T^{\alpha}}{(n+2)\alpha}\frac{\Gamma((n+2)\alpha)+1)}{\Gamma((n+2)\alpha+\alpha)} \\ &= \frac{L(T)T^{\alpha}}{((n+2)\alpha)^{\alpha}}\frac{((n+2)\alpha)^{(\alpha-1)}\Gamma((n+2)\alpha)+1)}{\Gamma((n+2)\alpha+\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Nous avons pour tout $x > 0, 0 < s < 1$

$$\lim_{x\to\infty} x^{s-1}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)} = 1. \tag{2.21}$$

Donc d'aprés (2.20)

$$\lim_{n\to\infty} L(T)T^{\alpha}\frac{\Gamma((n+2)\alpha)}{\Gamma((n+2)\alpha+\alpha)} = 0. \tag{2.22}$$

Alors la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\alpha)||v||\frac{(L(T)T^{\alpha})^{n+1}}{\Gamma((n+2)\alpha)} \tag{2.23}$$

est convergente. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{g_{\alpha}(t)}||x_{n+1}(t)-x_n(t)||$ est normalement convergente sur $[0,T]$ donc uniformément convergente sur $[0,T]$. Alors il existe une fonction continue sur [0,T] telle que

$$\sup_{t\in[0,T]}\frac{1}{g_{\alpha}(t)}||x_{n+1}(t)-x(t)|| \to 0\, quand\, n\to\infty. \tag{2.24}$$

On en déduit que

$$x_n \to x\, dans\, C_{1-\alpha}([0,T];X). \tag{2.25}$$

Comme f est globalement Lipschitzienne et grâce à (2.25) on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_\alpha(t)}||g_\alpha(t)v - g_\alpha(t)v + \int_0^t g_\alpha(t-y)(f(y,x_n(y)) - f(y,x(y)))dy|| \\ \leq \frac{L(T)}{g_{\alpha(t)}}\int_0^t g_\alpha(t-y)||x_n(y)-x(y)||dy \\ \leq \frac{L(T)}{g_{\alpha(t)}}\int_0^t g_\alpha(t-y)\frac{g_\alpha(y)}{g_\alpha(y)}||x_n(y)-x(y)||dy \\ \leq \frac{L(T)}{g_{\alpha(t)}} g_{2\alpha}(t)\sup_{t\in[0,T]}\frac{||x_n(t)-x(t)||}{||g_\alpha(t)||} \to 0\text{quand}\, n \to \infty.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Donc par passage à la limite dans (2.11), on trouve

$$x(t) = g_\alpha(t) + \int_0^t g_\alpha(t-y)f(y,x(y))dy. \tag{2.27}$$

Unicité Soit x_1, x_2 deux solutions de notre problème . Montrons l'unicité sur $[0,t_1]$

$$\begin{aligned}||x_1(t)-x_2(t)|| &\leq \int_0^t g_\alpha(t-y)||(f(y,x_1(y)) - f(y,x_2(y)))dy|| \\ &\leq L(T)\int_0^t g_\alpha(t-y)||x_1(y)-x_2(y)||dy.\end{aligned} \tag{2.28}$$

On intègre sur $[0,t_1]$ et par Fubini, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1}||x_1(t)-x_2(t)||dt &\leq L(T)\int_0^{t_1}\int_0^t g_\alpha(t-y)||x_1(y)-x_2(y)||dydt \\ &\leq L(T)\int_0^{t_1}||x_1(y)-x_2(y)||dy\int_0^{t_1} g_\alpha(t)dt \\ &\leq \frac{L(T)}{\Gamma(\alpha+1)}t_1^\alpha\int_0^{t_1}||x_1(y)-x_2(y)||dy.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Il existe au moins un t_1 tel que

$$\frac{L(T)}{\Gamma(\alpha+1)}t_1^\alpha < 1. \tag{2.30}$$

Donc on a l'unicité sur $[0,t_1]$. Montrons l'unicité sur $[t_1,T]$. Notons

$$t_0 = \sup\{t : x_1(y) = x_2(y) \quad \forall y \in [0,t]\}.$$

Il existe un h tel que $t_0 < h \leq T$

$$\int_{t_0}^h ||x_1(t)-x_2(t)||dt \neq 0 \quad L(T)\int_0^{h-t_0} g_\alpha(t)dt < 1. \tag{2.31}$$

Comme la partie précédente et par Fubini, nous avons

$$\int_{t_0}^{h} ||x_1(t) - x_2(t)||dt \leq L(T) \int_{t_0}^{h} ||x_1(y) - x_2(y)||dy \int_{0}^{h-t_0} g_\alpha(t)dt.$$

D'où l'unicité sur $[0, T]$ d'après (2.31). □

2.2 Equation différentielle ordinaire avec dérivée fractionnaire de Caputo

Dans cette sous-section on va étudier le problème suivant :

$$^cD^\alpha_{0,t}x(t) = f(t, x(t)), \quad x(s) = v, \tag{2.32}$$

tel que $(X, ||.||)$ un espace de Banach complexe, $s \geq 0$ et $v \in X$

$$f : [0, \infty[\times X \to X.$$

On a trouvé que si $s = 0$ et la fonction f localement lipschitzienne le problème (2.32) a une unique solution voir théorème 2.2.1.
Si $X = \mathbb{R}$,$s > 0$ et la fonction f est localement lpschitzienne le problème (2.32) a une unique solution voir théorème 2.2.3.
Si la fonction f est globalement lipschitzienne alors le problème (2.32) a une unique solution mais pour s très petit voir le théorème 2.2.2.

Définition 2.2.1 *Soit $T > 0$. Une fonction $f : [0, T] \times X \to X$ est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si $\forall x_0 \in X, \forall r > 0, \exists L = L(x_0, T, r) > 0$ tels que $\forall t \in [0, T], \forall x, y \in B(x_0, r, X)$*

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L(x_0, T, r)||x - y||. \tag{2.33}$$

Définition 2.2.2 *Soit $0 < \alpha < 1$, $s \geq 0$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ \times X$ à valeurs dans X. Soit $T > 0$. Une fonction $x : [0, T] \to X$ est dite solution du problème (2.32) sur $[0, T]$ si*

- *$T \geq s$ $x(s) = v$ dans X ;*
- *$x \in C([0, T]; X)$ et admet une dérivée d'ordre α dans $C([0, T]; X)$ au sens de la définition 1.4.1 ;*
- *$^cD^\alpha_{0,t}x \in C([0, T]; X)$;*
- *$^cD^\alpha_{0,t}x = f(t, x)$ dans $C([0, T]; X)$.*

Lemme 2.2.1 *Soit $0 < \alpha < 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. La fonction*

$$x(t) = v + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - y)^{\alpha-1} f(y)dy, \quad avec\, t \in [0, T],$$

est une solution du problème suivant

$$^cD^\alpha_{0,t}x(t) = f(t), \quad x(0) = v. \tag{2.34}$$

Preuve

On commence par la condition initiale. $\forall 0 \leq t \leq T$, on a

$$||x(t) - v|| = ||\int_0^t g_\alpha(t-y)f(y)dy|| \leq \frac{t^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \sup_{t\in[0,T]} |f(t)|.$$

Quand $t \to 0$ on obtient $x(0) = v$.
On va montrer que x vérifie l'équation ${}^C D^\alpha_{0,t} x(t) = f(t)$.

$$x(t) - v = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy = g_\alpha * f(t).$$

On applique la dérivée fractionnaire de Caputo

$$D^\alpha_{0,t}(x(t) - v) = D^\alpha_{0,t}(g_\alpha * f(t)) = \frac{d}{dt}(g_\alpha * g_{1-\alpha} * f(t)).$$

Or

$$g_\alpha * g_{1-\alpha} = 1. \tag{2.35}$$

Donc

$$D^\alpha_{0,t}(x(t) - v) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(y)dy.$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient

$${}^c D^\alpha_{0,t} x(t) = f(t).$$

□

On considère le problème suivant :

$${}^c D^\alpha_{0,t} x(t) = f(t), \quad x(s) = v, \quad s \geq 0. \tag{2.36}$$

Lemme 2.2.2 *Soient $T > 0$ $s \geq 0$, $0 < \alpha < 1$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors le problème (2.36) a une solution*

$$x(t) = v - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy \ \ \forall t \in [0,T]. \tag{2.37}$$

Preuve

Existence : Soit x défini par (2.37). Alors la condition non initale est vérifiée. En effet

$$x(s) = v - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y)dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y)dy = v.$$

La démonstration de l'équation ${}^{c}D^{\alpha}_{0,t}x(t) = f(t)$ est la même dans la preuve du lemme 2.2.1.
Unicité : Soit x_1, x_2 deux solutions du problème (2.36) et $t \in [0, T]$ selon le lemme 2.2.1

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f(y) dy$$

et

$$x_2(t) = x_2(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

En particulier, si $t = s$ alors

$$x_1(0) = x_1(s) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y) dy$$

et

$$x_2(0) = x_2(s) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y) dy.$$

Comme $x_1(s) = x_2(s)$ donc $x_1(0) = x_2(0)$ d'où $x_1 = x_2$. □
Pour montrer l'existence de la solution du problème (2.32) on utilise le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.2.1 *Soit* $0 < \alpha < 1$, $s = 0$ *et* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^+ \times X$ *à valeur dans* X *et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Il existe* $T_0 > 0$ *tel que pour tout* $T \in [0, T_0]$, *le problème* (2.32) *a une unique solution.*

Preuve

La preuve de l'existence de la solution s'obtient comme la preuve du théorème 2.2.3.
Unicité :Soit x_1 une solution du problème (2.32) sur $[0, T_1]$ tel que $x(t) \in B(0, r_1, X)$ et x_2 une autre solution sur $[0, T_2]$ tel que $x_2(t) \in B(0, r_2, X)$. Posons $T = \min\{T_1, T_2\}$, $r = \max\{r_1, r_2\}$ et $L(0, T, r)$ la constante de Lipschitz sur $B(0, r, X)$. Montrons que $x_1(t) = x_2(t)\, \forall t \in [0, T]$. Notons

$$t_0 = sup\{t \in [0, T] : x_1(y) = x_2(y)\, \forall y \in [0, t]\}.$$

On suppose que $t_0 < T$ alors il existe $t_0 < h \leq T$ tels que

$$\int_{t_0}^{h} ||x_1(t) - x_2(t)||dt \neq 0 \ et \ \frac{L(0, T, r)}{\Gamma(\alpha+1)} h^{\alpha} < 1. \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{h} ||x_1(t) - x_2(t)||dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{h} \int_{t_0}^{T} (t-y)^{\alpha-1} ||f(y, x_1(y)) - f(y, x_2(y))||dydt \\ &\leq \frac{L(0, T, r)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{h} ||x_1(y) - x_2(y)||dy \int_0^{h-t_0} t^{\alpha-1} dt \\ &\leq \frac{L(0, T, r)}{\Gamma(\alpha)} h^{\alpha} \int_{t_0}^{h} ||x_1(y) - x_2(y)||dy. \end{aligned} \tag{2.39}$$

D'après l'inégalité (2.38) on a l'unicité. □

Théorème 2.2.2 *Soit* $0 < \alpha < 1$, $0 \leq s \leq T$ *et* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^+ \times X$ *à valeur dans* X *et globalement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Si*

$$s < \frac{1}{2L(T)}. \tag{2.40}$$

Alors il existe $T_0 > 0$ *tel que le problème (2.32) a une solution pour tout* $T \in [s, T_0]$.

Preuve

Même preuve du théorème 2.2.3 .

□

Théorème 2.2.3 *Soit* B *la boule fermé de centre* x_0 *et de rayon* r. *Soient* $0 < \alpha < 1$, $0 \leq s \leq T$ *et* f *une fonction continue sur* $\mathbb{R}^+ \times X$ *à valeurs dans* X *et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Si*

$$s < \min\{(\frac{\Gamma(\alpha+1)||f(t_0,x_0)||}{2(L(x_0,T,r)r + ||f(t_0,x_0)||)})^{\frac{1}{\alpha}}; (\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2L(x_0,T,r)})^{\frac{1}{\alpha}}\}. \tag{2.41}$$

Alors il existe $T_0 > 0$ *tel que pour tout* $T \in [s, T_0]$ *le problème (2.32) a une solution.*
Soient x_1, x_2 *deux solution de problème* (2.32). *Supposons* $x_1(0) = x_2(0)$ *alors le problème* (2.32) *a une unique solution.*
Si $X = \mathbb{R}$ *le problème* (2.32) *a une unique solution.*

Preuve

Soit $r = ||v|| + ||f(0,0)||$. On introduit B la boule fermée dans $C([0,T], X)$ de centre $x_0 = 0$ et de rayon r par

$$B = \{x \in C([0,T], X) : \sup_{t \in [0,T]} ||x(t)|| \leq r\}.$$

On considère l'application

$$F : C([0,T], X) \to C([0,T], X)$$

$$F(x)(t) = v - \int_0^s g_\alpha(s-y) f(y, x(y)) dy + \int_0^t g_\alpha(t-y) f(y, x(y)) dy.$$

D'après (2.41) on choisit T tel que $s \leq T$ et

$$g_{\alpha+1}(T) \leq \frac{||f(0,0)||}{2(L(0,T,r)r + ||f(0,0)||)}; \tag{2.42}$$

$$g_{\alpha+1}(T) < \frac{1}{2L(0,T,r)}. \tag{2.43}$$

Montrons que pour tout $x \in B$ on a $F(x) \in B$. En effet,

$$\begin{aligned}
||F(x)(t)|| &= ||v - \int_0^s g_\alpha(s-y)f(y,(x(y))dy - \int_0^t g_\alpha(t-y)f(y,x(y))dy|| \\
&\leq ||v|| + ||\int_0^s g_\alpha(s-y)(f(y,x(y)) - f(0,0)dy|| + ||\int_0^s g_\alpha(s-y)f(0,0)dy|| \\
&+ ||\int_0^t g_\alpha(t-y)(f(y,x(y)) - f(0,0))dy|| + ||\int_0^t g_\alpha(t-y)f(0,0)dy||.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Par hypothèse, f est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. De plus $||x(y)|| \leq r, \forall y \in [0,T]$, car $x \in B$ et comme $T \geq s$ $g_{\alpha+1}(s) \leq g_{\alpha+1}(T)$ car $g_{\alpha+1}$ est croissante. On trouve

$$\begin{aligned}
||F(x)(t)|| &\leq ||v|| + L(0,T,r)g_{\alpha+1}(s) \sup_{t\in[0,T]} ||x(t)|| + g_{\alpha+1}(s)||f(0,0)|| \\
&+ \frac{L(0,T,r)T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t\in[0,T]} ||x(t)|| + g_{\alpha+1}(T)||f(0,0)|| \\
&\leq ||v|| + 2g_{\alpha+1}(T)(L(0,T,r)r + ||f(0,0)||).
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (2.42) on a

$$||F(x)(t)|| \leq r$$

L'application F est contractante sur B. En effet :$\forall x_1, x_2 \in B$, on a

$$\begin{aligned}
||F(x_1)(t) - F(x_2)(t)|| &= ||\int_0^s g_\alpha(s-y)(f(y,x_1(y)) - f(y,x_2(y)))dy|| \\
&+ ||\int_0^t g_\alpha(t-y)(f(y,x_1(y)) - f(y,x_2(y)))dy||.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Comme f est Localement lipschitzienne on a

$$\begin{aligned}
||F(x_1)(t) - F(x_2)(t)|| &\leq \frac{L(0,T,r)(T^\alpha + s^\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t\in[0,T]} ||x_1(t) - x_2(t)|| \\
&\leq 2L(0,T,r)g_{\alpha+1}(T) \sup_{t\in[0,T]} ||x_1(t) - x_2(t)||.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

D'après (2.43) F est contractante. Donc F a un unique point fixe dans B. Montrons que x admet une dérivée fractionnaire, $x \in C([0,T],X)$ car $x \in B$ et

$$g_{1-\alpha} * (x - x(0)) \in C^1([0,T],X).$$

(La même preuve du lemme 2.2.1). La condition non initiale

$$x(s) = v - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y, x(y))dy + \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y, x(y))dy = v.$$

D'où le point fixe de F est la solution locale du problème (2.32).
Unicité : Soit x_1 une solution du problème (2.32) sur $[0, T_1]$ tel que $x(t) \in B(0, r_1, X)$ et x_2 une autre solution sur $[0, T_2]$ tel que $x_2(t) \in B(0, r_2, X)$. Posons $T = \min\{T_1, T_2\}$, $r = \max\{r_1, r_2\}$ et $L(0, T, r)$ la constante de Lipschitz sur $B(0, r, X)$. Montrons que $x_1(t) = x_2(t) \, \forall t \in [0, T]$. Nous avons

$$x_1(0) = v - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y, x_1(y))dy.$$

$$x_2(0) = v - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-y)^{\alpha-1} f(y, x_2(y))dy.$$

Si $x_1(0) = x_2(0)$ alors

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_0^t g_\alpha(t-y)(f(y, x_1(y)) - f(y, x_2(y)))dy \tag{2.47}$$

le reste de la preuve se fait comme la preuve de théorème 2.2.1.

□

Théorème 2.2.4 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+ \times X$ et localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. L'application $x : [0, T_0] \to X$ est la solution du (2.32). Il existe $T_1 > T_0$ tel que x a un seul prolongement w sur $[0, T_1]$.*

Preuve

On utilise le théorème du point fixe de Banach. Soit $r > 0$ et $T_1 > T_0$. On considère

$$\begin{aligned} K = \{w \in C([0, T_1]; X) : w(t) = x(t) \text{ pour tout } t \in [0, T_0] \\ \text{et} ||w(t) - x(T_0)|| \leq r \text{ pour tout } \ t \in [T_0, T_1]\}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

On définit l'application

$$F : C([0, T_1]; X) \to C([0, T_1]; X), \tag{2.49}$$

tel que

$$F(w)(t) = v - \int_0^s g_\alpha(s-y) f(y, w(y))dy + \int_0^t g_\alpha(t-y) f(y, w(y))dy. \tag{2.50}$$

Choisissons $T_1 \in]0, 1]$ tel que $T > T_0$

$$T_1^\alpha < \frac{\Gamma(\alpha+1)r}{2(L(x(T_0), 1, r) + ||f(T_0, x(T_0))||)}, \tag{2.51}$$

et

$$g_{\alpha+1}(T_1)L(x(T_0),1,r) < 1 \tag{2.52}$$

où $L(x(T_0),1,r)$ est la constante de Lipschitz de f sur $[0,T_1]\times K$.
Nous avons pour tout $w \in K$ $F(w) \in K$ en effet

- Si $t \in [0,T_0]$ par la méthode du point fixe on a $F(w)(t) = w(t) = x(t)$ où x est la solution du (2.32).
- Si $t \in [T_0,T_1]$

$$\begin{aligned}
&||F(w)(t) - x(T_0)|| = ||\int_0^t g_\alpha(t-y)f(y,w(y))dy - \int_0^{T_0} g_\alpha(T_0-y)f(y,w(y))dy|| \\
&\leq ||\int_0^{T_0} (g_\alpha(t-y) - g_\alpha(T_0-y))f(y,w(y))dy + \int_t^{T_1} g_\alpha(t-y)f(y,w(y))dy|| \\
&\leq \int_0^{T_0} |g_\alpha(t-y) - g_\alpha(T_0-y)|||f(y,w(y)) - f(T_0,x(T_0))||dy \\
&+ \int_0^{T_0} |g_\alpha(t-y) - g_\alpha(T_0-y)|||f(T_0,x(T_0))||dy \\
&+ \int_{T_0}^t g_\alpha(t-y)||f(y,w(y)) - f(T_0,x(T_0))||dy + \int_{T_0}^t g_\alpha(t-y)||f(T_0,x(T_0))||dy,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Comme f est localement lipschitzienne alors d'après (2.33) on a

$$||F(w)(t) - x(T_0)|| \leq 2(L(x(T_0),1,r)r + ||f(T_0,x(T_0))||)g_{\alpha+1}(T_1). \tag{2.54}$$

D'après (2.51)

$$||F(w)(t) - x(T)|| \leq r. \tag{2.55}$$

Montrons que F est contractante sur K. $\forall w, v \in K$

$$\begin{aligned}
||F(w)(t) - F(v)(t)|| &\leq \int_0^t g_\alpha(t-y)||f(y,w(y)) - f(y,v(y))||dy \\
&\leq L(x(T_0),1,r)g_{\alpha+1}(T_1) \sup_{t\in[0,T_1]} ||w(t) - v(t)|| \quad \text{d'après (2.33)}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

d'après inégalité (2.52) en résulte que F est contractante. D'où x a un prolongement. □

Définition 2.2.3 *Soit $x : I \to X$ avec I un intervalle dans $\mathbb{R}^+$. On dit que x est une solution maximale du problème (2.32) si $\forall J$ un intervalle d'extremité gauche* 0 *contenant I et pour tout $\widetilde{x}$ solution de (2.32) sur J on a*

$$\widetilde{x} = x \text{ sur } I \Rightarrow J = I.$$

Théorème 2.2.5 *Sous les hypothèses du théorème 2.2.3, il existe un intervalle I et une solution x de (2.32)définie sur I qui est maximale.*

Preuve

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des paires,$(J, \widetilde{x})$ telles que :
- J un intervalle de $\mathbb{R}^+$ avec $s \in J$
- $\widetilde{x}$ est la solution du problème (2.32) sur J

Posons
$$I = \bigcup_{(J,\widetilde{x})\in\mathcal{J}} J$$
On définie une application $x : I \to Y$ de la façon suivante : $x(t) = \widetilde{x}(t)$ tel que $t \in J$. L'application x est bien définie car si on prend un autre couple $(J_1, x_1) \in \mathcal{J}$ tel que $t \in J_1$ alors $x_1(t) = \widetilde{x}(t)$ par unicité. Montrons que la borne superieur de I n'appartient pas à I. Si la borne superieur appartient à I alors d'après le th précédent on peut trouver un T_1 plus grand que la borne superieur de I et une solution w de (2.32) sur $[0, T_1]$ et cet intervalle contenant I, ceci contredit la definition de I. □

Théorème 2.2.6 *Sous les conditions du théorème 2.2.3, soit x la solution maximale de (2.32) sur $[0, T_m)$, alors*
- *Soit $T_m = \infty$ dans ce cas on a l'éxistence globale*
- *Soit $T_m < \infty$ alors*
$$\limsup_{t\to T_m} ||x(t)|| = \infty.$$

Preuve

- Si $T_m = \infty$ alors la solution maximale est globale.
- Si $T_m < \infty$ on prouve que
$$\limsup_{t\to T_m} ||x(t)|| = \infty. \tag{2.57}$$
Raisonons par l'absurde. Il existe une constante $d > 0$ tel que
$$||x(t)|| \leq d < \infty \quad \forall t \in [0, T_m). \tag{2.58}$$
Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers T_m, pour tout $t_n > t_m$ on a
$$\begin{aligned} ||x(t_n) - x(t_m)|| &= || \int_0^{t_n} g_\alpha(t_n - y) f(y, x(y))dy - \int_0^{t_m} g_\alpha(t_m - y) f(y, x(y))dy|| \\ &\leq \int_0^{t_m} (g_\alpha(t_n - y) - g_\alpha(t_m - y))||f(y, x(y))||dy + \int_{t_m}^{t_n} g_\alpha(t_n - y)||f(y, x(y))||dy \\ &\leq \frac{\sup_{t\in[0,t_n]} ||f(t, x(t))||}{\Gamma(\alpha+1)}(| - (t_n - t_m)^\alpha + t_n^\alpha - t_m^\alpha| + |(t_n - t_m)^\alpha|) \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.59}$$

D'où $(x(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui est convergente vers $x_{T_m} \in X$. Alors on peut prolonger x sur $[0, T_m]$, ou conclut

$$x(t) = v - \int_0^s g_\alpha(s-y)f(y,x(y))dy + \int_0^t g_\alpha(t-y)f(y,x(y))dy \tag{2.60}$$

vérifie pour tout $t \in [0, T_m]$, d'après le théorème (prolongement), il existe τ tel que x est une solution de (2.32) sur $[0, T_m + \tau]$ et ceci contredit la définition de $[0, T_m)$.

. $\square$

Chapitre 3

Espace fractionnaire

Soit X, Y des espaces de Banach réels tel que X s'injecte de façon continue dans Y.
Dans ce chapitre on utilise les definitions suivantes.

Définition 3.0.4 *Une fonction* $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}, X)$ *est dite causale si* $f = 0$ *p.p sur* $]-\infty, 0[$

Définition 3.0.5 *Soient les fonctions causale* $f \in L^1_{Loc}(\mathbb{R}; X)$ *et* $g \in L^1_{Loc}(\mathbb{R})$*. Alors la convolution de* f *et* g *est une fonction causale dans* $L^1_{Loc}(\mathbb{R}; X)$ *définie par*

$$g *_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g(t-y)f(y)dy \quad p.p\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Définition 3.0.6 *Soient* $f \in L^(0, T; X)$ *et* $g \in L^1(0, T)$*. Alors la convolution de* f *et* g *dans* $L^(0, T; X)$ *est donnée par*

$$g *_T f = \int_0^t g(t-y)f(y)dy \quad p.p\ t \in [0, T]. \tag{3.2}$$

Grâce à la proposition suivante on a la définition de la dérivée fractionnaire au sense de distribution (la derivée fractionnaire faible).

Proposition 3.0.1 ([29] prposition 2.3) *Soient* $0 < \alpha < 1$, $f \in L^1(0, T; X)$ *et* $\varphi \in C([0, T])$*. Supposons que* f *admet une dérivée fractionnaire dans* $L^1(0, T; X)$*. Alors*

$$\int_0^T D^\alpha_{0,t} f(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T f(t) D^\alpha_{t,T}\varphi(t)dt + [g_{1-\alpha} * f\varphi]_0^T, \tag{3.3}$$

ou

$$D^\alpha_{t,T}\varphi(t) = \int_t^T g_{1-\alpha}(y-t)\varphi'(y)dy, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Définition 3.0.7 *Soient* $0 < \alpha < 1$, $q \in [1, \infty)$ *et* $f \in L^q(0, T; X)$. *La dérivée fractionnaire au sense de distribution de* f, *notée par* $D^\alpha_{0,t} f$, *est définie pour tout* $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$

$$< D^\alpha_{0,t} f, \varphi >= -\int_0^T f D^\alpha_{t,T} \varphi(t) dt. \tag{3.5}$$

Soient $T > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ et $p, q \in [1; \infty)$. On définit l'espace

$$W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y) = \{u \in L^p(0, T; X) : D^\alpha_{0,t} u \in L^q(0, T; Y)\} \tag{3.6}$$

et

$${}_0W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y) = \{u \in W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y) : (g_{1-\alpha} * u)(0) = 0 \, dans \, Y\}. \tag{3.7}$$

Dans (3.6), $D^\alpha_{0,t} u$ est la dérivée fractionnaire au sense de distribution. On muni l'espace $W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y)$ par la norme

$$||u||_{W^\alpha} = (||u||^2_{L^p(0,T;X)} + ||D^\alpha_{0,t} u||^2_{L^q(0,T;Y)})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

Théorème 3.0.7 *L'espace* $W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y)$ *muni de la norme* (3.8) *est un espace de Banach.*

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y)$, alors (u_n) est une suite de Cauchy dans $L^p(0, T; X)$ et $D^\alpha_{0,t} u_n$ est une suite de Cauchy dans $L^q(0, T; Y)$ donc

$$u_n \to u \, dans \, L^p(0, T; X) \quad D^\alpha_{0,t} u_n \to \chi \, dans \, L^q(0, T; Y).$$

Comme $D^\alpha_{0,t} u_n \to D^\alpha_{0,t} u$ dans $\mathcal{D}'(0, T; Y)$ on en déduit que $\chi = D^\alpha_{0,t} u$, d'où $u_n \to u$ dans $W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y)$. □

Lemme 3.0.3 *Soit* $h > 0$ *et* $u \in L^p(\mathbb{R}; X)$ *une fonction causale tel que*

$$u_{|[0,T]} \in {}_0W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y). \tag{3.9}$$

Alors $u_h \in L^p(\mathbb{R}; X)$ *et vérifie* (3.9) *de plus* $u_h \to u$ *dans* $W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y)$ *quand* $h \to 0$.

Preuve

Montrons que $u_h \in {}_0W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y)$, par un changement de variable $(z = t - h)$ et comme u est causale nous avons

$$||u_h||_{W^\alpha} \leq ||u_{|[0,T]}||_{W^\alpha}. \tag{3.10}$$

Comme $(g_{1-\alpha} * u)(. - h) \in C([0, T]; Y)$, car d'après l'inégalité précédente u_h dans $W^\alpha_{p,q}(0, T; X, Y)$, alors $(g_{1-\alpha} * u)(t - h) \to (g_{1-\alpha} * u)(0) = 0$ quand $t \to h$.

Montrons que $u_h \to u$ dans $W^{\alpha}_{p,q}(0,T;X,Y)$ quand $h \to 0$. Nous avons d'après le lemme 1.1.1 $u_h \to u$ dans $L^p(0,T;X)$ et comme u est causale et $h>0$, on a

$$D^{\alpha}_{0,t}u_h(t) = \int_0^t g_{1-\alpha}(t-y)u(y-h)dy = \int_0^{t-h} g_{1-\alpha}(t-h-z)u(z)dz = (D^{\alpha}_{0,t}u)(t-h). \tag{3.11}$$

Donc $D^{\alpha}_{0,t}u_h \to D^{\alpha}_{0,t}u$ dans $L^q(0,T;Y)$. □

Théorème 3.0.8 *Soit u une fonction causale telle que*

$$u_{|[0,T]} \in {}_0W^{\alpha}_{p,q}(0,T;X,Y), \quad \forall T>0. \tag{3.12}$$

Alors il existe une suite $(u_n)_{n\geq 1} \in C^{\infty}([0,T];X)$ telle que $u_n(0)=0$ et

$$u_n \to u \, dans \, L^p(0,T;X) \quad et \quad {}^RD^{\alpha}_{0,t}u_n \to {}^RD^{\alpha}_{0,t}u \, dans \, L^q(0,T;Y).$$

Preuve du théorème 3.0.8

D'après le lemme 3.0.3 on peut supposer qu'il existe $h>0$ telle que $u=0$ sur $[0,h]$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite régularisante, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et

$$supp\, f_n \subseteq [-\frac{h}{n}, \frac{h}{n}], \quad \forall n \geq 1. \tag{3.13}$$

Posons

$$u_n = f_n *_{\mathbb{R}} u. \tag{3.14}$$

Comme $u \in L^p(\mathbb{R};X)$ alors $u_n \to u$ dans $L^p(\mathbb{R};X)$ et $u_n(0)=0$ d'après (3.13) de plus $u_n \in C^{\infty}(\mathbb{R};X)$.
Montrons que ${}^RD^{\alpha}_{0,t}u_{n_{|[0,T]}} \to {}^RD^{\alpha}_{0,t}u_{|[0,T]}$ dans $L^q(0,T;Y)$. Nous avons d'après la proposition 1.3.1

$$\begin{aligned} u_{|[0,T]} &= g_{\alpha_{|[0,T]}} *_T {}^RD^{\alpha}_{0,t}u_{|[0,T]} \quad dans\, L^q(0,T;Y) \\ &= (g_{\alpha} *_{\mathbb{R}} {}^RD^{\alpha}_{0,t}u)_{|[0,T]}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

d'après la proposition 3.0.2 avec (3.15), (3.14) on en déduit (voir [22], [29])

$$\begin{aligned} g_{1-\alpha} *_{\mathbb{R}} u_n &= g_{1-\alpha} *_{\mathbb{R}} f_n *_{\mathbb{R}} g_{\alpha} *_{\mathbb{R}} {}^RD^{\alpha}_{0,t}u \\ &= g_{1-\alpha} *_{\mathbb{R}} g_{\alpha} *_{\mathbb{R}} f_n *_{\mathbb{R}} {}^RD^{\alpha}_{0,t}u \\ &= g_1 *_{\mathbb{R}} f_n *_{\mathbb{R}} {}^RD^{\alpha}_{0,t}u. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Par suite

$$\frac{d}{dt}\{g_{1-\alpha} *_{\mathbb{R}} u_n\} = f_n *_{\mathbb{R}} {}^RD^{\alpha}_{0,t}u, \quad dans\, \mathcal{D}'(\mathbb{R};Y). \tag{3.17}$$

De plus, comme $g_{1-\alpha} *_{\mathbb{R}} u_n \in C^\infty(\mathbb{R}; X)$, la proposition 3.0.2 implique

$$\frac{d}{dt}\{g_{1-\alpha} *_{\mathbb{R}} u_n\}_{|[0,T]} = \frac{d}{dt}\{g_{1-\alpha} *_T u_{n_{|[0,T]}}\} = {}^R D^\alpha_{0,t}(u_{n_{|[0,T]}}). \tag{3.18}$$

Donc

$${}^R D^\alpha_{0,t}(u_{n_{|[0,T]}}) = (f_n *_{\mathbb{R}} {}^R D^\alpha_{0,t} u)_{|[0,T]}. \tag{3.19}$$

On a, $\forall t \in [0,T]$

$$f_n *_{\mathbb{R}} {}^R D^\alpha_{0,t} u(t) = \int_0^\infty f_n(t-y)\, {}^R D^\alpha_{0,t} u(y) dy. \tag{3.20}$$

D'après (3.13) on a $f_n(t-y) = 0$ si $t - y < -\frac{h}{n}$. Donc

$$y > T + h \Rightarrow f_n(t-y) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

D'où

$$f_n *_{\mathbb{R}} {}^R D^\alpha_{0,t} u(t) = \int_0^{T+h} f_n(t-y)^R D^\alpha_{0,t} u(y) dy = f_n *_{\mathbb{R}} F(t), \tag{3.21}$$

avec

$$F = \begin{cases} {}^R D^\alpha_{0,t} u & sur\,[0, T+h]\,; \\ 0 & sinon\ . \end{cases} \tag{3.22}$$

On a $f_n *_{\mathbb{R}} F \to F$ dans $L^q(\mathbb{R}, Y)$. D'où

$$(f_n *_{\mathbb{R}} {}^R D^\alpha_{0,t} u)_{|[0,T]} = f_n * F_{|[0,T]} \to F_{|[0,T]} = {}^R D^\alpha_{0,t} u) \quad dans\, L^q(0,T;Y). \tag{3.23}$$

Revenant à (3.19), on obtient

$${}^R D^\alpha_{0,t}(u_{n_{|[0,T]}}) \to {}^R D^\alpha_{0,t} u \quad dans\, L^q(0,T;Y). \tag{3.24}$$

$\square$

Corollaire 3.0.1 *Soit X un espace de Banach s'injectant de façon dense et continue dans un espace de Hilbert H. Soit $p \geq 2$ et p' son conjugué. Posons*

$$u \in {}_0W^\alpha(0,T;X,Y). \tag{3.25}$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$

$$\frac{1}{2} g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_H(t) \leq \int_0^t < D^\alpha_{0,t} u(s), u(s) >_{X',X} ds. \tag{3.26}$$

Preuve

D'après le théorème 3.0.8 il existe une suite (u_n) dans $C^\infty([0,T];X)$ tel que $u_n \to u$ dans $L^p(0,T;X)$ et$D^\alpha_{0,t}u_n \to\ D^\alpha_{0,t}u$ dans $L^q(0,T;Y)$. Nous avons

$$< .,. >_{X',X} = (.,.)_H .$$

Donc grâce à la proposition 2.18 dans [25] on a, pour tout $t \in [0,T]$

$$\frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * ||u_n||^2_H(t)) \leq < D^\alpha u_n(t), u_n(t) >_{X',X} . \tag{3.27}$$

Par intégration, on touve

$$g_{1-\alpha} * ||u_n(.)||^2_H(t) - g_{1-\alpha} * ||u_n(.)||^2_H(0) \leq \int_0^t < D^\alpha u_n(s), u_n(s) >_{X',X} ds. \tag{3.28}$$

On a $u_n \in C^\infty([0,T];X)$ donc $\sup_{t\in[0,T]} ||u_n(t)||_H \leq \infty$. On en déduit qu'il existe un $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, ||u_n(t)||_H \leq C$. Donc

$$g_{1-\alpha} * ||u_n(.)||^2_H(t) \leq C^2 g_{2-\alpha}(t) \to 0 \, quand \, t \to 0. \tag{3.29}$$

Montrons que $g_{1-\alpha} * ||u_n(.)||^2_H \to g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_H$ dans $L^1(0,T)$. D'après (1.11)

$$\begin{aligned}\int_0^T |g_{1-\alpha} * (||u_n(.)||^2_H - ||u(.)||^2_H)(t)|dt &\leq g_{2-\alpha}(T) \int_0^T | \, ||u_n(t)||_H - ||u(t)||_H|(||u_n(t)|| + ||u(t)||)dt \\ &\leq C g_{2-\alpha}(T)(T^{\frac{p-1}{p}} + ||u||_{L^{p'}(0,T;H)})||u_n - u||_{L^p(0,T;H)},\end{aligned} \tag{3.30}$$

d'où $g_{1-\alpha} * ||u_n(.)||^2_H \to g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_H$.
Montrons que $\int_0^t < D^\alpha u_n(s), u_n(s) >_{X',X} ds \to \int_0^t < D^\alpha u(s), u(s) >_{X',X} ds$ dans $L^1(0,T)$

$$\begin{aligned}&\int_0^T |\int_0^t < D^\alpha u_n(s), u_n(s) >_{X',X} - < D^\alpha_{0,t} u(s), u(s) >_{X',X} ds|dt \\ &\leq T \int_0^T | < D^\alpha_{0,t} u_n(s) - D^\alpha_{0,t} u(s), u_n(s) >_{X',X} + < D^\alpha_{0,t} u(s), u_n(s) - u(s) >_{X',X} ds|dt \\ &\leq ||D^\alpha_{0,t} u_n(s) - D^\alpha_{0,t} u||_{L^{p'}(0,T;X')}||u_n||_{L^p(0,T;X)} + ||u_n - u||_{L^p(0,T;X)}||D^\alpha_{0,t} u||_{L^{p'}(0,T;X')}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

□

On utilise ce corollaire pour obtenir l'unicité. Pour l'existence on utilise la proposition suivante.

Proposition 3.0.2 *Soit X un espace de Banach s'injectant de façon dense et continue dans un espace de Hilbert H. Soit $p \geq 2$ et $\frac{1}{p'} < \alpha < 1$. Supposons que*

$$u \in W^{\alpha}_{p,p'}(0,T;X,X'), \tag{3.32}$$

et $(g_{1-\alpha} * u)(0) \in X$. Alors

$$\int_0^T < D^{\alpha}_{0,t}u(t), u(t) - (g_{1-\alpha} * u)(0)g_{\alpha}(t) >_{X',X} dt \geq 0. \tag{3.33}$$

Preuve

Comme $\frac{1}{p'} < \alpha < 1$ la fonction $u - (g_{1-\alpha} * u)(0)g_{\alpha} \in L^p(0,T;X)$ et nous avons d'après (1.8), pour tout $t \in [0,T]$

$$g_{1-\alpha} * (u(t) - (g_{1-\alpha} * u)(0)g_{\alpha}(t)) = g_{1-\alpha} * u(t) - (g_{1-\alpha} * u)(0) \to 0 \, quand \, t \to 0, \tag{3.34}$$

et on a $D^{\alpha}_{0,t}(u - (g_{1-\alpha} * u)(0)g_{\alpha}) = D^{\alpha}_{0,t}u$ d'où $u - (g_{1-\alpha} * u)(0)g_{\alpha} \in {}_0W^{\alpha}_{p,p'}(0,T;X,X')$ donc d'après le corollaire 3.0.1 on obtient (3.33). $\square$

Lemme 3.0.4 *Soit $X \subset B \subset Y$ des espaces de Banach avec X s'injectant de façon compacte dans B. Soit $u \in W^{\alpha}_{p,1}(0,T;X,Y)$ tel que $p \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. Alors $W^{\alpha}_{p,1}(0,T;X,Y)$ s'injecte de façon compacte dans $L^r(0,T;B)$ where $1 \leq r < p$.*

Preuve

Soit $u \in U \subset W^{\alpha}_{p,1}(0,T;X,Y)$, où U est un borné dans $W^{\alpha}_{p,1}(0,T;X,Y)$. On remarque que $u \in L^1_{\text{loc}}(0,T;X)$ et dans $L^p(0,T;B)$ alors u appartient à $L^p(0,T;B) \cap L^1_{\text{loc}}(0,T;X)$.
D'après la proposition 1.3.1, on a pour tout $t \in [0,T]$

$$u(t) = g_{\alpha}(t)(g_{1-\alpha} * u)(0) + g_{\alpha} * \mathbf{D}^{\alpha}_{0,t}u(t). \tag{3.35}$$

Pour tout $t \in [0,T]$, on suppose $t + h \leq T$, alors

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) = (g_{\alpha}(t+h) - g_{\alpha}(t))(g_{1-\alpha} * u)(0) + \int_0^t (g_{\alpha}(t+h-y) - g_{\alpha}(t-y))\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t}u(y)dy \\ + \int_t^{t+h} g_{\alpha}(t+h-y)\mathbf{D}^{\alpha}_{0,t}u(y)dy. \end{aligned} \tag{3.36}$$

La fonction $g_{1-\alpha} * u \in W^{1,1}(0,T;X,Y) \subset C([0,T];Y)$, alors

$$||g_{1-\alpha} * u||_{C(0,T;Y)} \leq C||g_{1-\alpha} * u||_{L^1(0,T;Y)} + C||D^{\alpha}_{0,t}u||_{L^1(0,T;Y)} \leq C(T). \tag{3.37}$$

Soit $t_1 < t - 2 < T$. On intègre sur $[t_1, t_2]$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} |g_\alpha(t) - g_\alpha(t+h)|dt &\leq \int_0^T |g_\alpha(t) - g_\alpha(t+h)|dt \\ &= g_{\alpha+1}(T) - g_{\alpha+1}(T+h) + g_{\alpha+1}(h) \\ &\leq g_{\alpha+1}(h) \quad car\, g_{\alpha+1}\, est\, croissante.\end{aligned} \tag{3.38}$$

D'après (3.38) et (3.37) le premier terme de l'équation (3.36) est borné dans $L^1(t_1, t_2; Y)$ par $C(T)g_{\alpha+1}(h)$ où $C(T)$ ne dépend pas de u et h.
Pour le second terme de l'équation (3.36), on applique le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^t |g_\alpha(t+h-y) - g_\alpha(t-y)|||D^\alpha_{0,t}u(y)||_Y dydt \\ &\qquad \leq \int_0^{t_2}\int_0^t |g_\alpha(t+h-y) - g_\alpha(t-y)|||D^\alpha_{0,t}u(y)||_Y dydt \\ &\qquad \leq \int_0^{t_2} ||D^\alpha_{0,t}u(y)||_Y dy \int_y^{t_2} |g_\alpha(t+h-y) - g_\alpha(t-y)|dt \\ &\qquad \leq C(T)g_{\alpha+1}(h).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Par la même méthode on trouve que le dernier terme est borné par $C(T)g_{\alpha+1}(h)$. D'après le théorème 1.1.2, U est relativement compacte dans $L^r(0,T;B)$ où $r < p$ et $W^\alpha_{p,1}(0,T;X,Y)$ s'injecte de façon continue dans $L^r(0,T;B)$, alors $W^\alpha_{p,1}(0,T;X,Y)$ s'injecte de façon compacte dans $L^r(0,T;B)$. □

Chapitre 4

L'équation de réaction-diffusion avec dérivée temporelle fractionnaire

4.1 Le problème de réaction-diffusion fractionnaire avec conditions aux bord de Dirichlet

4.1.1 Le problème de réaction-diffusion fractionnaire avec un terme non linéaire Lipschitzien

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^R D_{0,t}^{\alpha} u = \Delta u - f(u) & sur\ [0,T] \times \Omega \\ u = 0 & sur\ [0,T] \times \partial\Omega \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = v & sur\ [0,T] \times \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

avec $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction globalement Lipschitzienne et il existe une constante positive C tel que

$$f(u)u \geq -C \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Définition 4.1.1 *Soient $0 < \alpha < 1$, u une fonction dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. On dit que u admet une dérivée fractionnaire au sens faible dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ on la note ${}^R D_{0,t}^{\alpha} u$ s'il existe une fonction $\upsilon \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tel que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$*

$$-\int_0^T u(t)\,{}^R D_{t,T}^{\alpha}\varphi(t)dt = \int_0^T \upsilon(t)\varphi(t)dt,$$

où

$$^{R}D^{\alpha}_{t,T}\varphi(t) = \int_t^T g_{1-\alpha}(y-t)\varphi(y)dy.$$

Définition 4.1.2 *Soient $0 < \alpha < 1$, $T > 0$. Une fonction $u : [0,T] \to H^1_0(\Omega)$ est dite solution faible du problème (4.1) si*

- $(g_{1-\alpha} * u)(0) = v$ *dans* $H^1_0(\Omega)$;
- $u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ *et u admet une dérivée fractionnaire dans* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$;
- $f(u) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$;
- $^{R}D^{\alpha}_{0,t}u = \Delta u - f(u)$ *dans* $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Théorème 4.1.1 *Soient $v \in H^1_0(\Omega)$ avec Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction globalement Lipschitzienne et vérifie (4.2).*

- *Si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ alors le problème (4.1) a une unique solution.*
- *Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ alors*
  1. *si $v \neq 0$ le problème (4.1) n'a aucune solution.*
  2. *si $v = 0$ le problème (4.1) a une unique solution.*

Preuve du théorème 4.1.1

Notons $V = H^1_0(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$.
Considérons le cas où $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Si u est une solution alors $u \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ et $^{R}D^{\alpha}_{0,t}u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ or

$$u - g_\alpha *^{R} D^{\alpha}_{0,t}u = vg_\alpha \, dans \, L^1(0,T;H^1_0(\Omega)).$$

Donc le problème (4.1) n'a aucune solution car le terme à gauche est dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et le terme à droite n'est jamais dans cet espace si $v \neq 0$.
Pour $v = 0$, on fait la même démonstration du cas $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
Solutions approchées : L'espace $H^1_0(\Omega)$ est un espace séparable donc il existe une suite $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} w_i \in H^1_0(\Omega), \\ \forall n \geq 0, \; w_1 ... w_n \, \text{sont linéairement indépendants}, \\ \text{Les combinaisons linéaires finies des} \, w_i \text{sont dense dans} H^1_0(\Omega) \end{cases} \tag{4.3}$$

On note

$$V_n =< w_1, ..., w_n >$$

et

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) w_i, \tag{4.4}$$

tels que x_i vérifient

$$< {}^{R}D^{\alpha}_{0,t}u_n(t), w_i >_{V',V} - < \nabla u_n(t), \nabla w_i >_{V',V} + < f(u_n(t)), w_i >_{V',V} = 0, \tag{4.5}$$

$\forall w_i \in V_n,\ x_i \in C_{1-\alpha}]0,T]$.

$$(g_{1-\alpha} * u_n)(0) = v_n, \tag{4.6}$$

avec $v_n \rightarrow\ v\, dans\, H_0^1(\Omega)$.
La fonction f est globalement Lipschitzienne alors le problème (4.5)-(4.6) a une unique solution d'après le théorème 2.1.1 dans l'intervalle $[0,T]$.
Estimation à priori

$$\begin{aligned} < D_{0,t}^{\alpha} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V} - < \nabla u_n(t), \nabla u_n(t) - g_\alpha(t) \nabla v_n >_{V',V} \\ + < f(u_n(t)), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V} = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

On intègre (4.7) sur $[0,T]$

$$\begin{aligned} &\int_0^T < D_{0,t}^{\alpha} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V}\, dt + \int_0^T ||u_n(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt + \int_\Omega \int_0^T f(u_n(t)) u_n(t) dt dx \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n(t) g_\alpha(t) \nabla v_n| dt dx + \int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t)) g_\alpha(t) v_n| dt dx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

D'après la proposition 3.0.2

$$\int_0^T < D_{0,t}^{\alpha} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V}\, dt. \geq 0 \tag{4.9}$$

Comme f est globalement lipschitzienne et vérifie (4.2), pour tout $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et grâce à l'inégalité de Young, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T ||u_n(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \leq CT mes(\Omega) + \frac{1}{2} \int_0^T ||u_n(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt + \frac{1}{2} \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt ||v_n||^2_{H_0^1(\Omega)} \\ + |f(0)| g_{\alpha+1}(T) ||v_n||_{L^1(\Omega)} + \varepsilon \int_0^T ||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt \\ + \frac{L^2}{\varepsilon} \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt ||v_n||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$(\frac{1}{2} - \varepsilon C(\Omega)) \int_0^T ||u_n(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \leq C' \tag{4.11}$$

avec C ne dépend pas de n.
Passage à la limite : On choisit ε de sorte que $\frac{1}{2} - \varepsilon C(\Omega) > 0$, d'après (4.11), il existe $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tel que pour une sous suite (u_n)

$$u_n \rightharpoonup u\, dans\, L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{4.12}$$

<u>*Convergence du terme non lineaire :*</u> Comme f est globalement Lipschitzienne, nous avons

$$\int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t))|^2 dtdx \leq T\, mes(\Omega)\, C' \, |f(0)|^2 + C(\Omega)\, L^2 C' \int_0^T \, ||u_n(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dxdt < \infty. \tag{4.13}$$

On en déduit que

$$D_{0,t}^\alpha u_n = \Delta u_n - f(u_n)\, dans\, L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)). \tag{4.14}$$

D'où $u \in W_{2,1}^\alpha(0,T; V, V')$, d'après le lemme 3.0.4

$$W_{2,1}^\alpha(0,T; V, V') \Subset L^1(0,T; L^2(\Omega)),$$

alors

$$u_n \to u\, dans\, L^q(0,T; L^2(\Omega)) \quad q < 2.$$

Donc, pour une sous suite de $(u_n)_{n\geq 1}$, encore notée $(u_n)_{n\geq 1}$

$$u_n \to u\, p.p\, sur\, [0,T] \times \Omega.$$

Par continuité de f on a

$$f(u_n) \to f(u)\, p.p\, sur\, [0,T] \times \Omega,$$

Grâce au (4.13) et le lemme 1.3 de lions [28]

$$f(u_n) \rightharpoonup f(u)\, dans\, L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

Retour au problème initial : Montrons que

$${}^R D_{0,t}^\alpha u - \Delta u + f(u) = 0\, dans\, L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, alors il existe une suite

$$v_n = \sum_{j=1}^n a_j w_j \ tel \ \ que \ \ v_n \to v \ dans \ H_0^1(\Omega).$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$${}^R D_{t,T}^\alpha \varphi(t) v_n \to^R D_{t,T}^\alpha \varphi(t) v\, dans\, L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

On multiplie (4.5) par $\varphi(t) a_j$, on somme sur j et on intègre sur $(0,T)$. On obtient

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_n(t),\, {}^R D_{t,T}^\alpha \varphi(t) v_n) dt + \int_0^T &< \Delta u_n(t), \varphi(t) v_n >_{V',V} \, dt \\ + \int_0^T &< f(u_n(t)), \varphi(t) v_n >_{V',V} \, dt = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Par passage à la limite,

$$-\int_0^T (u(t),\ {}^RD^\alpha_{t,T}\varphi(t)v)dt+\int_0^T < \Delta u(t),\varphi(t)v >_{V',V} dt+\int_0^T < f(u(t)),\varphi(t)v >_{V',V} dt = 0,$$

$\forall v \in H^1_0(\Omega), \forall\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$.
D'après la définition 4.1.1 on a

$${}^RD^\alpha_{0,t}u = \Delta u + f(u) \in \mathcal{D}'(0,T,H^{-1}(\Omega)),$$

et comme $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ et $\Delta u \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega))$ on a

$${}^RD^\alpha_{0,t}u = \Delta u + f(u) \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)).$$

Montrons que $g_{1-\alpha} * u(0) = v$. Soit φ de classe C^∞ tel que $\varphi(0) \neq 0$, $\varphi(T) = 0$, pour tout $w \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_0^T < {}^RD^\alpha_{0,t}u(t), w\varphi(t) > dt - \int_0^T < \Delta u, \varphi(t)w > dt + \int_0^T < f(u(t)), w\varphi(t) > dt = 0,$$

On a d'après la proposition 3.3 [12]

$$< {}^RD^\alpha_{0,t}u(t), \varphi(t) >= {}^RD^\alpha_{0,t}(u(t),\varphi(t)) \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

On intègre par partie

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u(t),w)\,{}^RD^\alpha_{t,T}\varphi(t)dt - \int_0^T < \Delta u, \varphi(t)w >_{V,V'} dt + (g_{1-\alpha} * u(0), w)\varphi(0) \\ + \int_0^T < f(u(t)), w\varphi(t) >_{V,V'} dt = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

On intègre (4.5),

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u_n(t),w_n)^RD^\alpha_{t,T}\varphi(t)dt - \int_0^T < \Delta u_n(t), \varphi(t)w_n >_{V,V'} dt + (g_{1-\alpha} * u_n(0), w_n)\varphi(0) \\ + \int_0^T < f(u_n(t)), w_n\varphi(t) >_{V,V'} dt = 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

On passe à la limte.

$$\begin{aligned} \int_0^T (u(t),w)^RD^\alpha_{t,T}\varphi(t)dt - \int_0^T < \Delta u(t), \varphi(t)w > dt + (v,w)\varphi(0) \\ + \int_0^T < f(u(t)), w\varphi(t) >_{V,V'} dt = 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

D'après (4.16)et (4.18) on a $g_{1-\alpha} * u(0) = v$.
Unicité Soient u_1, u_2 deux solutions du problème (4.1). Alors $u = u_1 - u_2$ vérifie

$$D^{\alpha}_{0,t}u - \triangle u + f(u_1) - f(u_2) = 0 \ \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{4.19}$$

$$(g_{1-\alpha} * u)(0) = 0. \tag{4.20}$$

On multiplie (4.19) par u et on intègre sur Ω et $[0,T]$, alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\int_0^t < D^{\alpha}_{0,t}u(y), u(y) >_{V,V'} + \int_0^t ||u(y)||^2_{H^1_0(\Omega)}dy = \int_0^t < f(u_2(y)) - f(u_1(y)), u(y) >_{V',V} dy. \tag{4.21}$$

La fonction f est globalement Lipschitzienne alors

$$\int_0^t < D^{\alpha}_{0,t}u(y), u(y) >_{V,V'} + \int_0^t ||u(y)||^2_{H^1_0(\Omega)}dy \leq L||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy, \tag{4.22}$$

comme $u \in W^{\alpha}_{2,1}(0,T;V,V')$ d'après le corollaire 3.0.1

$$\frac{1}{2}g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_{L^2(\Omega)}(t) \leq L\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy. \tag{4.23}$$

Comme

$$g_{1-\alpha}(t)\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \leq g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_{L^2(\Omega)}(t), \tag{4.24}$$

alors d'après (4.23)

$$\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \leq \frac{2L}{g_{1-\alpha}(t)}\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy. \tag{4.25}$$

Il existe au moins un t tel que

$$\frac{2L}{g_{1-\alpha}(t)} < 1. \tag{4.26}$$

donc on a l'unicité sur $[0, t_1]$ où t_1 très petit. Montrons l'unicité sur $[t_1, T]$. Posons

$$t_0 = sup\{t \in (0,T] : u = 0 \, p.p \, sur[0,t]\}. \tag{4.27}$$

Supposons que $t_0 < T$ alors il existe un h où $t_0 < h \leq T$ tel que pour tout $t \in]t_0, T]$

$$\int_{t_0}^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \neq 0. \tag{4.28}$$

$$2L\Gamma(1-\alpha)(h-t_0)^{\alpha} < 1. \tag{4.29}$$

On a

$$\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \leq 2L\Gamma(1-\alpha)(h-t_0)^{\alpha}\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy, \tag{4.30}$$

d'après (4.28) on obtient $t_0 = T$, d'où l'unicité. $\square$

4.1.2 Le problème de réaction-diffusion fractionnaire avec un terme non linéaire non Lipschitzien

Dans cette sous-section on va étudier le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver}\, u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega)), & \text{tel que} \\ D_{0,t}^\alpha u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)), & \\ D_{0,t}^\alpha u - \Delta u + f(u) = 0, & \text{dans}\, L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)) \\ (g_{1-\alpha} * u)(0), = v & \text{dans}\, L^2(\Omega). \end{cases} \tag{4.31}$$

avec $f(u)$ tend vers $\pm\infty$ quand $u \to \pm\infty$, localement lipschitzienne et pour certaines constantes positives C, c, K et p

$$f(u)u \geq C|u|^{p+1} - K \tag{4.32}$$

$$|f(u)| \leq c(1 + |u|^p) \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{4.33}$$

$$f \;\text{ est croissante au voisinage de}\, \infty\, et\, -\infty. \tag{4.34}$$

Théorème 4.1.2 *Soit* $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ *avec* Ω *un ouvert borné dans* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une fonction localement lipschitzienne et elle vérifie* (4.32)- (4.34). *Alors*

- *si* $\alpha > \frac{p+1}{p}$ *le problème* (4.31) *a une solution unique.*
- *Si* $\alpha \leq \frac{1}{p+1}$ *alors*
  1. *si* $v = 0$ (4.31) *a une solution unique ;*
  2. *si* $v \neq 0$ (4.31) *n'a aucune solution.*

Preuve

Pour montrer l'existence nous allons utiliser un argument de troncature.
Alors pour tout $M \in \mathbb{N}$ on définie le terme non linéaire tronqué

$$f_M(u) = \begin{cases} f(u) & si\, |u| \leq M \\ f(M) & si\, u > M \\ f(-M) & si\, u < -M. \end{cases} \tag{4.35}$$

On observe que la fonction f_M est globalement lipschitzienne car pour tout $|u| \leq M$, $f_M = f$ et f est localement Lipschitzienne et pour $|u| > M$ f_M est constante.
Alors on considère le problème tronqué suivant

$$(PbT) \begin{cases} {}^R D_{0,t}^\alpha u = \Delta u - f_M(u) & dans\, [0,T] \times \Omega \\ u = 0 \quad sur\, \partial\Omega & \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = v. & \end{cases} \tag{4.36}$$

D'après le théorème 4.1.1 il existe une suite de solutions du problème (4.36) $(u_M)_{M\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tel que pour tout $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$

$$< {}^R D_{0,t}^\alpha u_M, v >_{V',V} - < \nabla u_M, \nabla v >_{V',V} + < f_M(u_M), v >_{V',V} = 0. \tag{4.37}$$

Où $V = H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ et $V' = H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)$.
Remplaçant v par $u_M - g_\alpha v$ dans (4.46), puis intègrant sur $[0,T]$, il vient

$$\int_0^T < {}^R D_{0,t}^\alpha u_M(t), u_M(t) - g_\alpha(t) v >_{V',V} dt - \int_0^T < \nabla u_M, \nabla u_M(t) - g_\alpha(t)\nabla v >_{V',V} dt \\ + \int_0^T < f_M(u_M(t)), u_M(t) - g_\alpha(t) v >_{V',V} dt = 0. \tag{4.38}$$

Grâce à la proposition 3.0.2

$$\int_0^T < {}^R D_{0,t}^\alpha u_M(t), u_M(t) - g_\alpha(t) v >_{V',V} dt \geq 0.$$

Alors en utilisant inégalité de Young, comme $\alpha > \frac{p}{p+1} \geq \frac{1}{2}$ on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^T ||u_M(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega f_M(u_M(t)) u_M(t) dt dx \leq C + \int_0^T \int_\Omega f_M(u_M(t)) g_\alpha(t) v dt dx. \tag{4.39}$$

On a d'après le lemme 4.1.1 et par l'inégalité de Young, $\forall M \geq M_0$

$$\frac{1}{2}\int_0^T ||u_M(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt + (1-\varepsilon)\int_0^T \int_\Omega |f_M(u_M(t))|^{\frac{p+1}{p}} dt dx \leq C + C_\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |g_\alpha(t) v|^{p+1} \leq C(T), \tag{4.40}$$

où $C(T)$ ne dépend pas de M. Alors on en déduit de l'inégalité précédente que

$$D_{0,t}^\alpha u_M \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)) \subset L^1(0,T;H^{-1}(\Omega) + L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \tag{4.41}$$

Donc d'après le lemme 3.0.4, il existe une fonction u tel que pour une sous-suite (u_M)

$$u_M \rightharpoonup u \quad p.p\, sur\, [0,T] \times \Omega. \tag{4.42}$$

Comme f_M converge uniformement vers f sur tout compact, on obtient

$$f_M(u_M) \to f(u) \quad p.p\, sur\, [0,T] \times \Omega. \tag{4.43}$$

Alors d'après le lemme 1.3 dans [28]

$$f(u_M) \rightharpoonup f(u) \quad dans\, L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \tag{4.44}$$

Nous avons $f_M(u_M)u_M + C \to f(u)u + C$ p.p sur $[0,T]\times\Omega$ et d'après (4.2) $f_M(u_M)u_M + C \geq 0$. Par le lemme de Fatou, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega f(u(t))u(t)dtdx \leq C(T). \tag{4.45}$$

Donc d'après (4.32), $u \in L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega))$.

Par passage à la limite dans (4.46), on obtient, pour tout $v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;L^p(\Omega))$

$$< {}^R D_{0,t}^\alpha u, v >_{V',V} - < \Delta u, v >_{V',V} + < f(u), v >_{V',V} = 0. \tag{4.46}$$

Unicité : D'abord, montrons qu'on a l'unicité sur $[0,t_1]$ où $t_1 < T$.
Soit u_1, u_2 deux solutions du problème (4.1), on note $u = u_1 - u_2$ vérifie

$$\begin{aligned} &D_{0,t}^\alpha u - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = 0 \\ &dans\, L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$(g_{1-\alpha} * u)(0) = 0. \tag{4.48}$$

Pour tout $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega))$ on a

$$\int_0^{t_1} <^R D_{0,t}^\alpha u(t), u(t) >_{V',V} dt + \int_0^{t_1} ||u(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^{t_1} \int_\Omega (f(u_1(t)) - f(u_2(t)))u(t)dxdt = 0. \tag{4.49}$$

Notons

$$[|u_1| \leq M] = \{(t,x) : |u_1(t,x)| \leq M\}. \tag{4.50}$$

Grâce au lemme 4.1.2 on a

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} <^R D_{0,t}^\alpha u(t), u(t) >_{V',V} dt + \int_0^{t_1} ||u(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \\ \leq \int_0^{t_1} \int_{[|u_1|<M]\cap[|u_2|<M]} (f(u_2(t)) - f(u_1(t)))u(t)dxdt. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Comme f est localemment lipschitzienne alors

$$\int_0^{t_1} <^R D_{0,t}^\alpha u(t), u(t) >_{V',V} dt + \int_0^{t_1} ||u(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \leq K(M) \int_0^{t_1} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt. \tag{4.52}$$

D'après (3.26) on a

$$\frac{1}{2} g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_{L^2(\Omega)}(t_1) + \int_0^{t_1} ||u(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} dt \leq K(M) \int_0^{t_1} ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt. \tag{4.53}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1}||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy &= \int_0^{t_1}(t_1-y)^{-\alpha}(t_1-y)^{\alpha}||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \\ &\leq t_1^{\alpha}\int_0^{t_1}(t_1-y)^{-\alpha}||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy.\end{aligned} \tag{4.54}$$

Alors

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{t_1^{\alpha}}\int_0^{t_1}||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \leq g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_{L^2(\Omega)}(t_1). \tag{4.55}$$

Revenant à (4.53), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{t_1^{\alpha}}\int_0^{t_1}||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy + \int_0^{t_1}||u(t)||^2_{H_0^1(\Omega)}dt \leq K(M)\int_0^{t_1}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt. \tag{4.56}$$

En particulier

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{t_1^{\alpha}}\int_0^{t_1}||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \leq 2K(M)\int_0^{t_1}||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt. \tag{4.57}$$

Il existe au moins un t_1 tel que

$$\frac{2K(M)t_1^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} < 1.$$

On en déduit que $u = 0$, donc on a l'unicité sur $[0, t_1]$ où t_1 petit. On obtient l'unicité sur $[t_1, T]$ comme dans le cas où le terme non linéaire est globalement lipschitzien.

$\square$

Remarque 4.1.1 *Si $v = 0$ et $\alpha \leq \frac{p}{p+1}$ alors le problème* (4.31) *a une unique solution.*

Lemme 4.1.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant* (4.32), (4.33)*, et f_M la fonction définie par* (4.35)*. Alors $\exists M_0 \geq 0$, $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$ tel que*

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C_0 f_M(u)u + C_0 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall M \geq M_0. \tag{4.58}$$

Preuve

On commence par $|u| \leq M$. Nous avons d'après (4.33)

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} = |f(u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq c_1 + c_1|u|^{p+1} \tag{4.59}$$

et par (4.32), on obtient

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C_1 + C_0 f(u)u. \tag{4.60}$$

Si $u > M$, on a d'après (4.33)

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} = |f(M)|^{\frac{p+1}{p}} \leq c_1 + c_1|M|^{p+1}, \tag{4.61}$$

grâce à (4.32) on a

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C_1 + C_0 f(M)M. \tag{4.62}$$

Nous avons par définition de f

$$\exists M_0 \geq 0 \ \text{ tel } \text{ que}\, \forall M \geq M_0 \ f(M) \geq 0 \ et f(-M) \leq 0. \tag{4.63}$$

Alors d'après (4.63) il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall M \geq M_0$

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C_1 + C_0 f(M)u. \tag{4.64}$$

Dans le cas où $u < -M$, on fait comme le cas précédent c'est-à-dire qu'il existe $M_0 > 0, C_0$ et $C_1 > 0$ tel que

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C_1 + C_0 f(-M)u, \quad \forall M \geq M_0. \tag{4.65}$$

Alors d'après les cas précédents, on en déduit qu' $\exists M_0 > 0, C_0 > 0$ et $C_1 > 0$

$$|f_M(u)|^{\frac{p+1}{p}} \leq C_1 + C_0 f_M(u)u, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall M \geq M_0. \tag{4.66}$$

□

Lemme 4.1.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ alors il existe $M > 0$ tel que pour tout $|u| \geq M$ on a*

$$(f(u) - f(y))(u - y) \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{4.67}$$

Preuve

La fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$ i.e il existe un $M > 0$ tel que

$$\begin{cases} f \ \text{ est } \ \text{croissante } \ \text{sur}\, [M, +\infty[\\ f(u) \leq f(M)\, \forall u \leq M. \end{cases} \tag{4.68}$$

D'après (4.68) nous avons $\forall u \geq M$ et $\forall y \leq M$

$$(f(u) - f(y))(u - y) \geq 0. \tag{4.69}$$

Si $y \geq M$ et $u \geq y$, alors f est croissante sur $[M, +\infty[$ on a

$$(f(u) - f(y))(u - y) \geq 0, \quad (reste\, vrai\, si\, u \leq y). \tag{4.70}$$

La fonction f est croissante au voisinage de $-\infty$ i.e il existe un $M > 0$ tel que

$$\begin{cases} f \text{ est croissante sur }]-\infty,-M] \\ f(-M)\leq f(u)\,\forall u\geq -M. \end{cases} \tag{4.71}$$

Donc pour tout $u\leq -M$ et pour tout $y\leq -M$, si $u\leq y$ alors d'après (4.71) on a

$$(f(u)-f(y))(u-y)\geq 0, \quad (reste\,vrai\;si\;u\geq y). \tag{4.72}$$

Si $u\leq -M$ et $y\geq -M$ d'après (4.71) on a

$$f(y)\geq f(u)\Rightarrow (f(u)-f(y))(u-y)\geq 0. \tag{4.73}$$

On conclut que

$$\exists M>0\,tel\,que\,|u|\geq M\Rightarrow (f(u)-f(y))(u-y)\geq 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}. \tag{4.74}$$

□

4.2 L'équation de réaction-diffusion fractionnaire avec les conditions aux limite de Neumann

4.2.1 L'équation de réaction-diffusion fractionnaire avec un terme non linéaire globalement Lipschitzien

Le problème se présente comme suit

$$\begin{cases} \text{Trouver } u\in W^{\alpha}_{2,2}(0,T;H^1(\Omega),(H^1(\Omega))'), & \text{tel que} \\ D^{\alpha}_{0,t}u-\Delta u+f(u)=0, & \text{dans } L^2(0,T;(H^1(\Omega))'), \\ \frac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{sur } [0,T]\times\Omega, \\ (g_{1-\alpha}*u)(0)=v & \text{dans } L^2(\Omega), \end{cases} \tag{4.75}$$

La fonction $u:[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. On suppose la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est globalement lipschitzienne. De plus pour certain $C_0>0$, $C_1>0$

$$C_0u^2-C_1\leq f(u)u. \tag{4.76}$$

Théorème 4.2.1 *Soient $v\in H^1(\Omega)$ où Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ et f une fonction globalement lipschitzienne vérifiant* (4.76).

- *Si $\frac{1}{2}<\alpha<1$ alors le problème* (4.75) *a une unique solution.*
- *Si $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ alors*
  1. *si $v\neq 0$ le problème* (4.75) *n'a aucune solution.*
  2. *si $v=0$ le problème* (4.75) *a une unique solution.*

Preuve

Notons $V = H^1(\Omega)$ muni de la norme,

$$||u||_{H^1(\Omega)} = (||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{4.77}$$

On note (w_n) une suite comme la suite dans la preuve du théorème 4.1.1, V_n l'espace engendré par $w_1, ..., w_n$ et $V' = (H^1(\Omega))'$.
L'existence de la solution du problème approché se fait exactement comme dans la sous-section 4.1.1.
Estimation à priori : Soient $u_n \in L^2(0,T;V_n)$ et $v_n \in V_n$

$$\begin{aligned} < D^\alpha_{0,t} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t)v_n >_{V',V} - < \nabla u_n(t), \nabla u_n(t) - g_\alpha(t)\nabla v_n >_{V',V} \\ + < f(u_n(t)), u_n(t) - g_\alpha(t)v_n >_{V',V} = 0. \end{aligned} \tag{4.78}$$

On intègre (4.78) sur $[0,T]$. Pour tout $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} &\int_0^T < D^\alpha_{0,t} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t)v_n >_{V',V} dt + \int_0^T ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \int_\Omega f(u_n(t))u_n(t)dxdt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega \nabla u_n(t) g_\alpha(t) \nabla v_n dtdx + \int_0^T \int_\Omega f(u_n(t)) g_\alpha(t) v_n dtdx \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n(t) g_\alpha(t) \nabla v_n| dtdx + \int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t)) g_\alpha(t) v_n| dtdx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2} ||\nabla v_n||^2_{L^2(\Omega)} \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt \quad \text{(on a appliqué l'inégalité de Young)} \\ &+ \int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t))||g_\alpha(t)v_n)| dtdx. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Comme f est globalement lipschitzienne et vérifie (4.76), d'après la proposition 3.0.2 et (4.79), on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} dt + C_0 \int_0^T ||u_n(t)||^2 dt \leq \frac{1}{2} ||\nabla v_n||^2_{L^2(\Omega)} \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt + C_1 T \\ + L \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)||g_\alpha(t)v_n)| dxdt + \int_0^T \int_\Omega |f(0)||g_\alpha(t)v_n)| dxdt. \end{aligned} \tag{4.80}$$

En appliquant l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}\min(\frac{1}{2};C_0)(\int_0^T ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^T ||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt) &\leq \frac{1}{2}||v_n||^2_{H^1(\Omega)}\int_0^T g_\alpha(t)^2dt\\ &+C_1T+\varepsilon\int_0^T ||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}dt+\frac{L^2}{\varepsilon}||v_n||^2_{L^2(\Omega)}\int_0^T g_\alpha(t)^2dt\\ &+|f(0)|g_{\alpha+1}(T)||v_n||_{L^1(\Omega)}\\ &\leq Cst+C\varepsilon\int_0^T ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)}dt.\end{aligned} \tag{4.81}$$

On choisit ε tel que

$$\min(\frac{1}{2};C_0)-C\varepsilon>0.$$

Alors, on trouve

$$(\min(\frac{1}{2};C_0)-C\varepsilon)\int_0^T ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)}dt\leq Cst, \tag{4.82}$$

où Cst ne dépend pas de n.

Passage à la limite : D'après (4.82) il existe une fonction dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ telle que pour une sous suite on la note encore (u_n)

$$u_n \rightharpoonup u\, dans\, L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{4.83}$$

Le reste de la démonstration se fait exactement comme la preuve du théorème 4.1.1.
Unicité Soient u_1,u_2 deux solutions du problème (4.75). Notons $u=u_1-u_2$ vérifie

$$D^\alpha_{0,t}u-\triangle u+f(u_1)-f(u_2)=0\,\text{dans}\,L^2(0,T;(H^1(\Omega))') \tag{4.84}$$

$$(g_{1-\alpha}*u)(0)=0. \tag{4.85}$$

On multiplie (4.84) par u et on intègre sur Ω et $[0,T]$, alors pour tout $t\in[0,T]$

$$\begin{aligned}\int_0^t <D^\alpha_{0,t}u(y),u(y)>_{V,V'}+\int_0^t ||u(y)||^2_{H^1(\Omega)}dy-\int_0^t ||u(y)||^2_{L^1(\Omega)}dy\\ =\int_0^t <f(u_2(y))-f(u_1(y)),u(y)>_{V',V}dy.\end{aligned} \tag{4.86}$$

La fonction f est globalement Lipschitzienne alors

$$\int_0^t <D^\alpha_{0,t}u(y),u(y)>_{V,V'}+\int_0^t ||u(y)||^2_{H^1_0(\Omega)}dy\leq(L+1)\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy, \tag{4.87}$$

comme $u \in W^{\alpha}_{2,1}(0,T;V,V')$ d'après le corollaire 3.0.1

$$\frac{1}{2}g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_{L^2(\Omega)}(t) \leq (L+1)\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy. \tag{4.88}$$

Comme

$$g_{1-\alpha}(t)\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \leq g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_{L^2(\Omega)}(t), \tag{4.89}$$

alors d'après (4.88)

$$\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy \leq 2(L+1)\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}\int_0^t ||u(y)||^2_{L^2(\Omega)}dy. \tag{4.90}$$

Il existe au moins un t tel que

$$2(L+1)\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha} < 1. \tag{4.91}$$

Donc on a l'unicité sur $[0,t_1]$ où t_1 très petit, on obtient l'unicité sur $[0,T]$ comme on a fait dans la preuve du théorème 4.1.1. $\square$

Chapitre 5

L'équation de Swift-Hohenberg avec dérivée temporelle fractionnaire

5.1 L'équation de Swift-Hohenberg fractionnaire

Soient Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver}\, u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R} & \text{tel que}\,, \\ D^{\alpha}_{0,t} u = -\Delta^2 u - \Delta u - f(u), & \text{sur}\, [0,T] \times \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{sur}\, [0,T] \times \partial\Omega, \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = v, & \text{sur}\, \Omega. \end{cases} \tag{5.1}$$

5.1.1 L'équation de Swift-Hohenberg fractionnaire avec un terme non linéaire globalement Lipschitzien

Le problème se présente comme suit

$$\begin{cases} \text{Trouver}\, u \in W^{\alpha}_{2,2}(0,T; H^2_0(\Omega), H^{-2}(\Omega)), & \text{tel que;} \\ D^{\alpha}_{0,t} u + \Delta^2 u + \Delta u + f(u) = 0, & \text{dans}\, L^2(0,T; H^2_0(\Omega)); \\ (g_{1-\alpha} * v)(0) = v, & \text{dans}\, L^2(\Omega). \end{cases} \tag{5.2}$$

Théorème 5.1.1 *Soient $v \in H^2_0(\Omega)$ avec Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction globalement lipschitzienne vérifiant pour certains $\delta > 0$ et $C_0 > 0$*

$$(1+\delta)u^2 - C_0 \leq f(u)u. \tag{5.3}$$

.

- *Si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ alors le problème (5.2) a une unique solution.*
- *Si $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ alors*
  1. *si $v \neq 0$ le problème (5.2) n'a aucune solution.*
  2. *si $v = 0$ le problème (5.2) a une unique solution.*

Preuve

Notons $V = H_0^2(\Omega)$ muni de la norme

$$||u||_{H_0^2(\Omega)} = ||\triangle u||^2_{L^2(\Omega)} \tag{5.4}$$

et $V' = (H^{-2}(\Omega)$. Posons dans la suite que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
Solution approchée : Soit $w_1, ..., w_n$ une base comme (4.3) dans $H_0^2(\Omega)$. Alors le problème approché se présente comme suit

$$\begin{cases} \text{Trouver}\, u_n \text{dans}\, L^2(0,T;V_n)\,\text{tel que,} \\ (D_{0,t}^\alpha u_n(t), w) + (\Delta u_n(t), \Delta w) + (\nabla u_n(t), \nabla w) + (f(u_n(t)), w) = 0, \quad \text{dans}\, L^2(0,T), \forall w \in V_n \\ (g_{1-\alpha} * u_n)(0) = v_n. \end{cases} \tag{5.5}$$

On note $(.,.)$ le produit scalaire de $H_0^2(\Omega)$.
Comme f est globalement lipschitzienne alors d'après le théorème 2.1.1 le problème (5.5) a une unique solution.
Estimations : Remplaçant w dans (5.5) par $u_n - g_\alpha v_n$, puis on intègre sur $[0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T < D_{0,t}^\alpha u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V} dt + \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t)|^2 dt dx + \int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t)) u_n(t)| dt dx \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |g_\alpha(t) \Delta u_n(t) \Delta v_n| dt dx + \int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t)) g_\alpha(t) v_n| dt dx + \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t) u_n(t)| dt dx \\ &+ \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t) g_\alpha(t) v_n| dx dt. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Soient λ, ε telle que

$$0 < \lambda < \varepsilon < \frac{\delta}{2(1+\delta)}. \tag{5.7}$$

Par inégalité de Young et comme $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et $\varepsilon < \frac{1}{2}$ d'après (5.7) on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T < D_{0,t}^\alpha u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V} dt + \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t)|^2 dt dx + \int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t)) u_n(t)| dt dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t)|^2 dx dt + \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt ||\Delta v_n||^2_{L^2(\Omega)} + (\frac{1}{2} - \varepsilon) \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t)|^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{\frac{1}{2} - \varepsilon} \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)|^2 dt dx + \lambda \int_0^t \int_\Omega |\Delta u_n(t)|^2 dx dt + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \int_\Omega g_\alpha(t)^2 dt ||v_n||^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \int_0^t \int_\Omega |f(u_n(t)) - f(0)| g_\alpha(t) v_n dx dt + |f(0)| g_{\alpha+1}(T) \int_\Omega |v_n| dx \end{aligned} \tag{5.8}$$

Comme f est globalement Llipschitzienne et vérifie (5.3),

$$\begin{aligned}
&\int_0^T < D_{0,t}^{\alpha} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V} dt + (\varepsilon - \lambda) \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t)|^2 dt dx \\
&+ (1+\delta) \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)|^2 dt dx \\
&\leq C_0 T \text{mes}(\Omega) + \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt ||\Delta v_n||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \int_\Omega g_\alpha(t)^2 dt ||v_n||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ |f(0)| g_{\alpha+1}(T) \int_\Omega |v_n| dx \\
&+ L \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)| g_\alpha(t) |v_n| dx dt + \frac{1}{\frac{1}{2} - \varepsilon} \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)|^2 dt dx \\
&\leq C_0 T \text{mes}(\Omega) + \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt ||\triangle v_n||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \int_\Omega g_\alpha(t)^2 dt ||v_n||^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ |f(0)| g_{\alpha+1}(T) \int_\Omega |v_n| dx \\
&+ \frac{1}{\frac{1}{2} - \varepsilon} \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)|^2 dx dt + L^2 (\frac{1}{2} - \varepsilon) \int_0^T g_\alpha(t)^2 dt ||v_n||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\frac{1}{2} - \varepsilon} \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)|^2 dt dx
\end{aligned} \tag{5.9}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\int_0^T < D_{0,t}^{\alpha} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V} dt + (\varepsilon - \lambda) \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_n(t)|^2 dt dx \\
&+ (1 + \delta - \frac{1}{1 - 2\varepsilon}) \int_0^T \int_\Omega |u_n(t)|^2 dt dx \\
&\leq C(T).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Grâce à la proposition 3.0.2,

$$\int_0^T < D_{0,t}^{\alpha} u_n(t), u_n(t) - g_\alpha(t) v_n >_{V',V} dt \geq 0 \tag{5.11}$$

et d'après (5.7)

$$\begin{aligned}
&1 + \delta - \frac{1}{1 - 2\varepsilon} > 0, \\
&\varepsilon - \lambda > 0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

On en déduit que

$$||u_n||_{L^2(0,T;H_0^2(\Omega))} \leq C(T). \tag{5.13}$$

Nous avons supposé que f est globalement lipschitzienne, donc

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |f(u_n(t))|^2dxdt &\leq C\int_0^T\int_\Omega |f(u_n(t))-f(0)|^2dxdt + C|f(0)|^2T\text{mes}(\Omega)\\ &\leq L^2C\int_0^T\int_\Omega |u_n(t)|^2dxdt + C|f(0)|^2T\text{mes}(\Omega).\end{aligned} \tag{5.14}$$

Alors d'après (5.13)

$$f(u_n) \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{5.15}$$

Donc

$$D^\alpha u_n + \Delta^2 u_n - \Delta u_n + f(u_n) = 0 \quad \text{dans}\, L^2(0,T;(H^{-2}(\Omega)). \tag{5.16}$$

Convergence du terme non linéaire : D'après (5.13) il existe une fonction $u \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega))$ tel que pour une sous suite (u_n)

$$u_n \rightharpoonup u\, \text{dans}\;\; L^2(0,T;H_0^2(\Omega)). \tag{5.17}$$

Nous avons $u_n \in L^2(0,T;H_0^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, alors $u_n \in W^\alpha_{2,1}(0,T;H_0^1(\Omega),H^{-2}(\Omega))$ qui s'injecte de façon compacte dans $L^1(0,T;L^2(\Omega))$. D'après le lemme 3.0.4, pour toute sous suite (u_n), on a

$$u_n \to u\, \text{p.p sur}\, [0,T]\times\Omega. \tag{5.18}$$

Comme f est continue

$$f(u_n) \to f(u)\, \text{p.p sur}\, [0,T]\times\Omega. \tag{5.19}$$

Alors d'après le lemme de Lions

$$f(u_n) \rightharpoonup f(u)\, \text{dans}\, L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{5.20}$$

Comme on a fait dans la démonstration du théorème 4.1.1 on obtient

$$D^\alpha_{0,t}u + \Delta^2 u - \Delta u + f(u) = 0 \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)) \tag{5.21}$$

et

$$(g_{1-\alpha} * u)(0) = v. \tag{5.22}$$

Unicité : Soient u_1, u_2 deux solutions du (5.2). Alors $u = u_1 - u_2$ vérifie

$$D^\alpha u + \Delta^2 u - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = 0 \quad \text{dans}\, L^2(0,T;H^{-2}(\Omega)), \tag{5.23}$$

et

$$(g_{1-\alpha} * u)(0) = 0. \tag{5.24}$$

On multplie (5.23) par u puis on intègre sur $[0,t]$ et Ω, on trouve, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\int_0^t < D_{0,t}^\alpha u(y), u(y) >_{V',V} dy + \int_0^t ||u(y)||^2_{H_0^2(\Omega)} dy \\ = \int_0^t ||u(y)||^2_{H_0^1(\Omega)} dy - \int_0^t \int_\Omega (f(u_1(y)) - f(u_2(y)))u(y) dy dx\end{aligned} \tag{5.25}$$

Comme f est globalement lipschitzienne, d'après le corollaire 3.0.1, on a

$$\frac{1}{2} g_{1-\alpha} * ||u(.)||^2_{H_0^1(\Omega)}(t) \leq (L + C(\Omega)) \int_0^t ||u(y)||^2_{H_0^1(\Omega)} dy \quad \text{car } H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega). \tag{5.26}$$

On en déduit que

$$\int_0^t ||u(y)||^2_{H_0^1(\Omega)} dy \leq \frac{2(L + C(\Omega))}{g_{1-\alpha}(t)} \int_0^t ||u(y)||^2_{H_0^1(\Omega)} dy \tag{5.27}$$

Il existe au moins un t tel que $\frac{2(L+C(\Omega))}{g_{1-\alpha}(t)} < 1$, alors on a l'unicité sur $[0,t]$, pour l'unicité sur $[t,T]$ on procède comme dans les chapitres précédents. $\square$

Chapitre 6

L'équation de réaction-diffusion avec dérivée temporelle fractionnaire de Caputo

6.1 Définition de la dérivée fractionnaire de Caputo généralisée

Dans ce chapitre on utilise la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo généralisée qui est donnée par [27]. Avant de donner la définition de la dérivée fractionnaire on introduit les ensembles suivants :

$$\mathcal{E} = \{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : \exists M_v \in \mathbb{R}\, suppv \subset [-M_v; +\infty[\}. \tag{6.1}$$

$$G_c = \{\varphi \in \mathcal{E} \text{ tel que } supp\varphi \subset [0, T)\}. \tag{6.2}$$

$$G = \{\varphi \in \mathcal{E} : \exists \phi \in G_c\, u_n\varphi \to \phi \,\text{dans}\, \mathcal{D}'(-\infty, T)\text{pour toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\}. \tag{6.3}$$

$$\mathcal{D}' = \{v | v : C_c(-\infty, T; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{B} \text{ opérateur linéaire borné}\}, \tag{6.4}$$

où $\mathbb{B}$ un espace de Banach.

Définition 6.1.1 *(modified Rieman Liouville operators) : Soit* $0 < \alpha < 1$ *Soit* $J_\alpha : G \to G_c$ *donné par* $J_\alpha\varphi := g_\alpha * (H\varphi)$ *tel que*

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} H(t) t^{\alpha-1}, \tag{6.5}$$

où H *est la fonction de Heavside.*

Définition 6.1.2 *(Dérivée fractionnaire de Caputo généralisée) Soient* B *un espace de Banach,* $0 < \alpha < 1$ *et* $\varphi \in L^1_{Loc}(0, T; B)$*. Pour* $\varphi_0 \in B$*, on définit la dérivée faible* *fractionnaire de Caputo par* ${}^cD^\alpha_{0,t}\varphi \in \mathcal{D}'$ *tel que pour tout* $\phi \in \mathcal{C}(-\infty, T; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} <^c D^\alpha_{0,t}\varphi, \phi> &= \int_{-\infty}^{T} (\varphi - \varphi_0) H(t)\, {}^c\widetilde{D}^\alpha_{t,T}\phi dt \\ &= \int_{0}^{T} (\varphi - \varphi_0)\, {}^c\widetilde{D}^\alpha_{t,T}\phi dt. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Où la formule explicite de ${}^c\widetilde{D}^\alpha_{t,T}\phi$ *est donnée par*

$${}^c\widetilde{D}^\alpha_{t,T}\phi(t) = -g_{1-\alpha} * \phi'(t). \tag{6.7}$$

Soit X un space de Banach. Notons

$$W^{\alpha,p} = \{u \in L^p(0,T;X) :^c D^\alpha_{0,t}u \in L^p(0,T;X)\}, \tag{6.8}$$

si $p = 2$ on le note $H^\alpha(0,T;X)$.
Nous avons ce théorème de compacité

Théorème 6.1.1 *(Théorème 4.1 dans [25]) Soient* $T > 0, 0 < \alpha < 1, p \in [1, \infty[$. *Soient* V, B, H *des espaces de Banach tel que* V *s'injecte de façon compacte dans* B *et* B *s'injecte de façon continue dans* H. *Notons* $W \subset L^1_{Loc}(0,T;V)$. *Supposons*

1. *Il existe* $C_1 > 0$ *tel que* $\forall u \in W$

$$\sup_{t\in(0,T)} J_\alpha(||u(t)||^p_V) = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} ||u(y)||^p_V dy. \tag{6.9}$$

2. *Il existe* $r \in (\frac{p}{1+p\alpha}, \infty) \cap [1, \infty)$ *et* $C' > 0$ *tel que pour tout* $u \in W$

$$||{}^cD^\alpha_{0,t}u||_{L^r(0,T;H)} \leq C'. \tag{6.10}$$

Alors W *est relativement compacte dans* $L^p(0,T;B)$.

Définition 6.1.3 *On dit qu'une fonction* f *est convexe si et seulement si pour tous points* a, b *dans un intervalle* I *et pour tout* $t \in [0,1]$ *on a :*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b). \tag{6.11}$$

Définition 6.1.4 *On dit qu'une fonction* f *est* $\lambda-$*convexe si et seulement si pour certain* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) - \frac{\lambda}{2}|x|^2 \text{ est convexe} \tag{6.12}$$

Proposition 6.1.1 *Si* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *alors* f *est* $\lambda-$*convexe si et seulement si* $f''(x) \geq \lambda$.

Les propositions suivantes nous aide pour obtenir les estimations.

Proposition 6.1.2 *[20]Soit V un espace de Banach tel que $V \Subset L^2(\Omega) \subset V'$. Soit $u \in H^\alpha(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;V)$ et $E \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est λ-convexe avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $E'(u) \in L^2(0,T;V)$ alors on a pour tout $t \in (0,T)$*

$$g_\alpha * <^c D^\alpha_{0,t}u, E'(u)> -\lambda g_\alpha * <^c D^\alpha_{0,t}u, u> \geq \int_\Omega E(u)-E(u_0)dx - \frac{\lambda}{2}(||u||^2_{L^2(\Omega)} - ||u_0||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{6.13}$$

Proposition 6.1.3 *[25] Soit $\alpha \in (0,T)$, B un espace de Banach. Si $u : (0,T] \to B$ satisfait*

$$u \in C^1(0,T;B) \cap C([0,T);B), \tag{6.14}$$

et $u \mapsto E(u) \in \mathbb{R}$ est $C^1(\mathbb{R})$ et convexe alors :

$$^cD^\alpha_{0,t}E(u) \leq <^c D^\alpha_{0,t}u, E'(u)> . \tag{6.15}$$

Lemme 6.1.1 *[20](Lemme de Gronwall fractionnaire) Soit $u \in L^1_{Loc}(0,T;\mathbb{R}^+)$ et $a, b > 0$. Si u satisfait*

$$u(t) \leq a + b(g_\alpha * u)(t) \qquad p.p\ t \in (0,T). \tag{6.16}$$

Alors

$$u(t) \leq aC(a,b,T). \tag{6.17}$$

Lemme 6.1.2 *[25] Soit $u \in L^1_{Loc}(0,T;B),^c D^\alpha_{0,t}u \in L^1(0,T;B)$ on a*

$$(u-u_0)H(t) = g_\alpha *^c D^\alpha_{0,t}u. \tag{6.18}$$

6.2 L'équation de réaction-diffusion avec dérivée fractionnaire temporelle de Caputo

Soient n un entier positif, Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ et $0 < \alpha < 1$. Notre problème se présente comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega)) \text{tel que,} \\ ^cD^\alpha_{0,t}u - \Delta u + f(u) = 0 \text{ dans } L^2(0,T;(H^1(\Omega))') + L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \text{ dans } H^1(\Omega). \end{cases} \tag{6.19}$$

Ici $u_0 : H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est la condition initiale, et f est une fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Théorème 6.2.1 *Soit $u_0 \in H^1(\Omega)$, soit f une fonction C^1 croissante au voisinage de $\pm\infty$ véifiant pour certain $c > 0, p \geq 1$*

$$c - |u|^{p+1} \leq f(u)u \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{6.20}$$

$$|f(u)| \leq c'(1+|u|^p) \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{6.21}$$

Alors le problème (6.19) a une unique solution.

Preuve

Solution approchée : Comme l'espace $H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ est un espace séparable, il existe une suite $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ ayant les propriétés (4.3). Notons

$$V_n =< w_1, ..., w_n > \tag{6.22}$$

et

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{nj}(t) w_j, \tag{6.23}$$

où $u_{nj} : (0,T) \to \mathbb{R}$ résolvent le systeme suivant :

$$\begin{cases} <^c D^{\alpha}_{0,t} u_n(t), \varphi > - < \nabla u_n(t), \nabla \varphi > + < f(u_n(t)), \varphi >= 0, \\ u_n(0) \to u_0. \end{cases} \tag{6.24}$$

Où $< .,. >$ est le crochet de dualité entre $H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ et $(H^1(\Omega))' + L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))$. Soit φ dans V_n. D'après le théorème 7[11], il existe unique solution locale $u_n \in H^{\alpha}(0,\tau;V_n) \cap L^{\infty}(0,\tau;V_n)$ pour un $\tau < T$ très petit. Pour l'existence globale de la solution, on utilise alternative de bolw-up [11] théorème 10. De plus d'aprés le lemme 3.1 [19] $u_n \in C(0,T;V_n) \cap C^1(0,T;V_n)$.

Estimation à priori : Prenons $\varphi = u_n$ dans (6.24) on obtient

$$<^c D^{\alpha}_{0,t} u_n(t), u_n(t) > - < \nabla u_n(t), \nabla u_n(t) > + < f(u_n(t)), u_n(t) >= 0. \tag{6.25}$$

D'aprés (6.20)

$$<^c D^{\alpha}_{0,t} u_n(t), u_n(t) > + ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} |u_n^{p+1}(t)| dx \leq c. \tag{6.26}$$

On applique inégalité de Young

$$({}^c D^{\alpha}_{0,t} u_n(t), u_n(t)) + ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_n(t)|^2 dx \leq C. \tag{6.27}$$

Grâce à la proposition 6.1.3

$${}^c D^{\alpha}_{0,t} ||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u_n(t)|^2 dx \leq C. \tag{6.28}$$

On convole avec g_{α}

$$g_{\alpha} *^c D^{\alpha}_{0,t} ||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + g_{\alpha} * ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p} g_{\alpha} * \int_{\Omega} |u_n(t)|^2 dx \leq C'. \tag{6.29}$$

D'après le lemme 6.1.2

$$||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + g_{\alpha} * ||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{p} g_{\alpha} * \int_{\Omega} |u_n(t)|^2 dx \leq C' + ||u_n(0)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.30}$$

D'où
$$u_n \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{6.31}$$
Revenons à notre estimation (6.26). On utilise la proposition 6.1.3. Par convolution avec g_α et gâce au lemme 6.1.2, on a
$$||u_n(t)||^2+g_\alpha*||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)}+g_\alpha*||u_n(t)||^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C+||u_n(0)||^2_{L^2(\Omega)}+g_\alpha*||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.32}$$
D'aprés (6.30)
$$||u_n(t)||^2+g_\alpha*||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)}+g_\alpha*||u_n(t)||^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C'. \tag{6.33}$$
On en déduit que
$$u_n \in L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega))\cap L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{6.34}$$
Estimation du terme non linéaire : Nous avons d'après (6.21) et d'après (6.33)
$$\int_0^T\int_\Omega |f(u_n(t))|^{\frac{p+1}{p}}dxdt \leq C''+\int_0^T ||u_n(t)||^{p+1}_{L^{p+1}(\Omega)} \leq C_1. \tag{6.35}$$
Soit $w\in L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap L^2(0,T;L^{p+1}(\Omega))$. On utilise l'inégalite de Hölder
$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |{}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)w|dxdt &\leq ||u_n||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}||w||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}\\ &+||f(u_n)||_{L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))}||w||_{L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{6.36}$$
Donc on a d'après (6.35) et (6.33)
$${}^cD^\alpha_{0,t}u_n \in L^1(0,T;(H^1(\Omega))'+L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))). \tag{6.37}$$
Alors d'après le théorème 6.1.1, quite à extraire une sous suite, on a
$$u_n \to u \ p.p. \tag{6.38}$$
Par continuité
$$f(u_n)\to f(u)\ \ p.p. \tag{6.39}$$
Alors d'après le lemme 1.3 [28]
$$f(u_n)\rightharpoonup f(u)\ \text{ dans }\ L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \tag{6.40}$$
Retour au problème initial : Montrons que
$${}^cD^\alpha_{0,t}u-\Delta u+f(u)=0 \quad \text{dans } L^2(0,T;(H^1(\Omega))')+L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \tag{6.41}$$

Soit $v \in H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$, alors il existe une suite

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} a_j w_j \ tel\ \ que\ \ v_n \to v\ dans\ H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega).$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\varphi(t)v_n \to \varphi v\, dans\, L^{p+1}(0,T; H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)). \tag{6.42}$$

On multiplie (6.24) par $\varphi(t)a_j$, on somme sur j et on intègre sur $(0,T)$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T <^c D_{0,t}^{\alpha} u_n(t), \varphi(t)v_n > dt + \int_0^T < \Delta u_n(t), \varphi(t)v_n >_{V',V} dt \\ + \int_0^T < f(u_n(t)), \varphi(t)v_n >_{V',V} dt = 0.\end{aligned} \tag{6.43}$$

La convergence du terme linéaire, grâce à l'inégalité de Hölder, d'après le théorème 6.1.1 et (6.42)

$$\begin{aligned}&\int_0^T < (\nabla u_n(t) - \nabla u(t)), \varphi(t)\nabla v_n > - < \nabla u(t), \nabla v\varphi(t) - \nabla v_n\varphi(t) > dt \\ &\leq ||u_n - u||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}||v_n\varphi(t)||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + ||\varphi v_n - \varphi v||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}||u||_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \to 0.\end{aligned} \tag{6.44}$$

Passage à la limite dans le terme non linéaire : nous avons d'après (6.42) et d'après la définition de la convergence faible (6.40) et parl l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega f(u_n(t))(\varphi(t)v_n - \varphi(t)v)dxdt - \int_0^T \int_\Omega (f(u(t)) - f(u_n(t)))\varphi(t)vdxdt \\ &\leq ||f(u_n)||_{L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))}||\varphi(t)v_n - \varphi(t)v||_{L^{p+1}(0,T;L^{p+1}(\Omega))} \\ &- \int_0^T \int_\Omega (f(u(t)) - f(u_n(t)))\varphi(t)vdxdt \to 0\end{aligned} \tag{6.45}$$

Il nous reste la convergence de la dérivée fractionnaire. Nous avons

$${}^cD_{0,t}^{\alpha}u_n = \Delta u_n - f(u_n) \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))') + L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)) \subset L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) + (H^1(\Omega))'). \tag{6.46}$$

Alors d'après la proposition 3.5 [25], il existe une sous suite encore notée ${}^cD_{0,t}^{\alpha}u_n$ convergeant vers ${}^cD_{0,t}^{\alpha}u$. Donc

$$\begin{aligned}&\int_0^T < ({}^cD_{0,t}^{\alpha}u_n(t) -^c D_{0,t}^{\alpha}u(t)), \varphi(t)\nabla v_n > - <^c D_{0,t}^{\alpha}u(t), \nabla v\varphi(t) - \nabla v_n\varphi(t) > dt \\ &\leq ||{}^cD_{0,t}^{\alpha}u_n -^c D_{0,t}^{\alpha}u||_{L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;(H^1(\Omega))' + L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))}||v_n\varphi(t)||_{L^{p+1}(0,T;H^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega))} \\ &+ ||\varphi v_n - \varphi v||_{L^{p+1}(0,T;H^1(\Omega)\cap L^{p+1}(\Omega))}||{}^cD_{0,t}^{\alpha}u||_{L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;(H^1(\Omega))' + L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega))} \to 0.\end{aligned} \tag{6.47}$$

On passe à la limite dans (6.43). D'après (6.44), (6.45) et (6.47), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T <^c D^\alpha_{0,t} u(t), \varphi(t)v >_{V',V} dt + \int_0^T < \Delta u(t), \varphi(t)v >_{V',V} dt \\ + \int_0^T < f(u(t)), \varphi(t)v >_{V',V} dt = 0,\end{aligned} \tag{6.48}$$

avec $V = H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$, $V' = (H^1(\Omega))' + L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)$. D'où

$${}^c D^\alpha_{0,t} u - \Delta u + f(u) = 0 \quad \text{dans } L^2(0,T;(H^1(\Omega))') + L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega)). \tag{6.49}$$

Condition initiale : On a ${}^c D^\alpha_{0,t} u_n \in L^{\frac{p+1}{p}}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) + (H^1(\Omega))'))$ et par définition de la dérivée fractionnaire on a $g_{1-\alpha} * (u_n - u_n(0)) \in W^{1,1}(0,T;(H^3(\Omega))')$. D'aprés l'injection continue de $W^{1,1}(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) + (H^1(\Omega))') \subset C(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) + (H^1(\Omega))')$ on a $g_{1-\alpha}*(u_n - u_n(0)) \in C(0,T;L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega) + (H^1(\Omega))')$. Alors par intégration par parties, on obtient pour tout $v \in H^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (u_n(t) - u(0), v_n)^c \widetilde{D}^\alpha_{0,t} \eta(t) dt + \int_0^T (\nabla u_n(t), \nabla v_n)\eta(t)dt + \int_0^T (f(u_n(t)), v_n)\eta(t)dt \\ &= (g_{1-\alpha} * (u_n(t) - u_n(0))(0), v_n)\eta(0).\end{aligned} \tag{6.50}$$

avec ${}^c\widetilde{D}^\alpha_{0,t}$ est la dérivée à gauche de la dérivée de Caputo.
Nous avons

$$|(g_{1-\alpha}*(u_n - u_n(0))(0), v_n)\eta(0)| \leq ||u_n - u_n(0)||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} ||v_n||_{L^1(\Omega)} ||\eta||_{L^\infty(0,T)} g_{2-\alpha}(0) = 0. \tag{6.51}$$

On passe à la limite et d'après (6.44), (6.45), (6.47) et l'inégalité précédente, on obtient

$$-\int_0^T (u(t) - u(0), v)^c \widetilde{D}^\alpha_{0,t}\eta(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\eta(t)dt + \int_0^T (f(u), v)\eta(t)dt = g_{1-\alpha}*(u - u_0), v)\eta(0). \tag{6.52}$$

Poson $\eta(0) = 1$, par comparaison avec (6.48) on obtient, $u(0) - u_0 = 0$.
Unicité : Soient u_1, u_2 deux solutions de notre problème. Notons $u = u_1 - u_2$ alors

$${}^c D^\alpha_{0,t} u + \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = 0. \tag{6.53}$$

$$u(0) = 0. \tag{6.54}$$

On multiplie (6.53) par u et on intègre sur Ω

$$<^c D^\alpha_{0,t} u(t), u(t) > + < \Delta u(t), u(t) > + < f(u_1(t)) - f(u_2(t)), u >= 0. \tag{6.55}$$

La formule de Green nous donne

$$<^c D^\alpha_{0,t} u(t), u(t) > +||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + < f(u_1(t)) - f(u_2(t)), u >= 0. \tag{6.56}$$

Nous avons d'après le lemme 4.1.2 car f est croissante au voisinage de $\pm\infty$

$$<^c D^\alpha_{0,t} u(t), u(t) > +||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_{|u_1| \leq M \cap |u_2| \cap M} (f(u_2(t)) - f(u_1(t)))u(t)dx. \tag{6.57}$$

Comme la fonction F est C^1 alors f est localement lipschitzienne

$$<^c D^\alpha_{0,t} u(t), u(t) > +||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq L||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.58}$$

Comme $u(0) = 0$, la dérivée fractionnaire de Caputo est égale la dérivée fractionnaire de Riemann Liouville donc on peut appliquer le corolaire 3.0.1, on intègre sur $[0, T]$

$$\frac{1}{2} g_{1-\alpha} * ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq L \int_0^T ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.59}$$

Par convolution avec g_α on obtient

$$\int_0^T ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + g_\alpha * \int_0^T ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq L g_\alpha * \int_0^T ||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{6.60}$$

D'après le lemme de Growall fractionnnaire, $u = 0$. $\square$

Chapitre 7

L'équation du champs de phase cristallin avec dérivée temporelle fractionnaire

Dans la construction des modèles phénoménologiques, la compréhension physique ou la connaissance empirique est souvent utilisée pour mettre au point une description mathématique appropriée. De même, lorsqu'on étudie les modèles mathématiques qui dérivent de la physique, on considère, généralement ces modèles avec des conditions aux bords naturels, telles que les conditions aux bords de Neumann et des conditions aux bords périodiques. L'utilisation de telles conditions est très importante, car dans le premier cas les solutions des problèmes qui en découlent, présentent automatiquement des symétries. En outre, dans le second cas, on peut étendre ces solutions à l'espace tout entier. C'est l'une des raisons qui nous pousserons à étudier l'équation du champs de phase cristallin avec dérivée temporelle fractionnaire avec des conditions aux bords de Neumann.
Soient Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ où $n \leq 3$. L'équation du champs de phase cristallin avec les conditions de Neumann s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver}\, u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}, \\ {}^cD^{\alpha}_{0,t}u - \Delta(\Delta^2 u + 2\Delta u + f(u)) = 0 \,\text{sur}\, [0, T] \times \Omega, \\ \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial \overrightarrow{n}} = \frac{\partial \Delta u}{\partial \overrightarrow{n}} = \frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \quad sur\, \partial\Omega, \\ u(0) = u_0, \,\text{dans}\, \Omega. \end{cases} \tag{7.1}$$

Où $\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = \nabla u.\overrightarrow{n}$ désigne la dérivée normale extérieure de u et $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$.
La fonction f satisfait

$$|f(u)| \leq c(1 + |u|^{p+1}) \quad \forall u \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

$$|u|^{p+2} - c \leq f(u)u. \tag{7.3}$$

$$-c' + |u|^p \leq f'(u) \leq k + |u|^p. \tag{7.4}$$

Définition 7.0.1 *Une solution classique de* (7.1) *est une fonction* $u \in C^1(0,T;C^6(\overline{\Omega}))$ *vérifiant* (7.1).

Définition 7.0.2 *Soient* $1 \leq p \leq 2$*,* $n = 3$ *une fonction* u *est une solution faible de* (7.1) *si*

1. $u \in L^2(0,T;V(\Omega)) \cap L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$.
2. ${}^cD^\alpha_{0,t}u \in L^1(0,T;((V(\Omega))' + L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega))$
3. *pour tout* $v \in V(\Omega)$

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx + \int_\Omega \nabla\Delta u(t)\nabla\Delta v dx - 2\int_\Omega \nabla\Delta u(t)\nabla v dx + \int_\Omega f'(u(t))\nabla u(t)\nabla v dx = 0. \tag{7.5}$$

Où $V(\Omega) = \{v \in H^5(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \Delta v}{\partial n} = 0\}$.
Pour $n = 2;\ 1$ *on prend* $p > 0$.

Le dernier terme dans l'équation (7.5) est bien défini, en effet, d'après la condition (7.4), on a pour tout $v \in V(\Omega)$

$$\int_0^T\int_\Omega |f'(u(t))\nabla u(t)\nabla v|dxdt \leq k\int_0^T\int_\Omega |\nabla u\nabla v|dxdt + k\int_0^T\int_\Omega |u|^p|\nabla u\nabla v|dxdt. \tag{7.6}$$

- Si $n = 3$, nous avons $p \leq 3$ alors d'après le corollaire IX.14 [5], $L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \subset L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |f'(u(t))\nabla u(t)\nabla v|dxdt &\leq \frac{k}{2}||u||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{k}{2}T||v||^2_{H^1(\Omega)}\\ &+ C_0||u||^{2p}_{L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))} + C_2\int_0^T\int_\Omega |\nabla u\nabla v|^2dxdt\\ &\leq \frac{k}{2}||u||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{k}{2}T||v||^2_{H^1(\Omega)}\\ &+ C_0||u||^{2p}_{L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))} + C_3\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^4dxdt\\ &+ C_4\int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^4dxdt.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Grâce à l'inégalité d'interpolation suivante [16]

$$||\nabla u||_{L^4(\Omega)} \leq c||u||^{\frac{3}{4}}_{H^1(\Omega)}||u||^{\frac{1}{4}}_{H^4(\Omega)}. \tag{7.8}$$

On obtient

$$\int_0^T \int_\Omega |f'(u(t))\nabla u(t)\nabla v|dxdt \leq \frac{k}{2}||u||^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \frac{k}{2}T||v||^2_{H^1(\Omega)} + C_0||u||^{2p}_{L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))}$$
$$+ C_5 \int_0^T ||u(t)||^{\frac{12-n}{3}}_{H^1(\Omega)}||u(t)||^{\frac{n}{3}}_{H^4(\Omega)}dx + C_6||v||^{\frac{12-n}{3}}_{H^1(\Omega)}||v||^{\frac{n}{3}}_{H^4(\Omega)}. \tag{7.9}$$

Nous avons $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \bigcap L^2(0,T;V(\Omega))$ et $n < 6$. D'où

$$\int_0^T \int_\Omega |f'(u(t))\nabla u(t)\nabla v|dxdt \leq C_4. \tag{7.10}$$

– Si $n = 2$, on a l'inégalité suivante [16]

$$||\nabla u||_{L^4(\Omega)} \leq ||\Delta^2 u||^{\frac{1}{6}}||\nabla u||^{\frac{5}{6}} \tag{7.11}$$

et grâce au corollaire IX.14 [5], dans ce cas p est arbitraire. Comme on a fait précédemment on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega |f'(u(t))\nabla u(t)\nabla v|dxdt \leq C. \tag{7.12}$$

– Si $n = 1$ on applique aussi le corollaire IX.14 on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega |f'(u(t))\nabla u(t)\nabla v|dxdt \leq C. \tag{7.13}$$

Montrons que toute solution classique est une solution faible : Soit u la solution classique du problème (7.1). En multipliant la première équation de (7.1) par une fonction test $v \in V(\Omega)$ et en intègrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx - \int_\Omega \Delta^3 u(t)vdx - 2\int_\Omega \Delta^2 u(t)vdx - \int_\Omega \Delta f(u(t))vdx = 0. \tag{7.14}$$

Par la formule de Green (1.6), pour tout $x \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx - \int_\Omega \Delta^3 u(t)vdx - 2\int_\Omega \Delta^2 u(t)vdx - \int_\Omega \Delta f(u(t))vdx \\
&= \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx + \int_\Omega \nabla\Delta u(t)\nabla\Delta vdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial \overrightarrow{n}}\Delta vd\sigma + \int_{\partial\Omega} \Delta^2 u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}}d\sigma \\
&- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial \overrightarrow{n}}vd\sigma + 2\int_\Omega \nabla\Delta u(t)\nabla vdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Delta u}{\partial \overrightarrow{n}}vd\sigma \\
&+ \int_\Omega \nabla f(u(t))\nabla vdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f(u)}{\partial \overrightarrow{n}}vd\sigma.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Où $d\sigma$ est la mésure superficielle sur $\partial\Omega$. D'après les conditions aux bord et comme $v \in V(\Omega)$ on trouve l'équation (7.5).

Montrons que toute solution faible et régulière est une solution classique. Soit u une solution faible et régulière du problème (7.1). En appliquant la formule de Green pour tout, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx + \int_\Omega \nabla\Delta u(t)\nabla\Delta vdx - 2\int_\Omega \nabla\Delta u(t)\nabla vdx + \int_\Omega f'(u(t))\nabla u(t)\nabla vdx \\
&= \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx - \int_\Omega \Delta^3u(t)vdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^2u}{\partial\overrightarrow{n}}vd\sigma - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta u}{\partial\overrightarrow{n}}\Delta vd\sigma - \int_{\partial\Omega} \Delta^2u\frac{\partial v}{\partial\overrightarrow{n}}d\sigma \\
&- \int_\Omega \Delta^2uvdx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta u}{\partial\overrightarrow{n}}vd\sigma - \int_\Omega \Delta f(u(t))vdx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f(u)}{\partial\overrightarrow{n}}vd\sigma.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Tout d'abord on choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ alors on a

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx - \int_\Omega \Delta^3u(t)vdx - 2\int_\Omega \Delta^2u(t)vdx - \int_\Omega \Delta f(u(t))vdx = 0. \tag{7.17}$$

D'où

$${}^cD^\alpha_{0,t}u - \Delta^3u - 2\Delta^2u - \Delta f(u) = 0 \quad v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{7.18}$$

En déduit par densité que

$${}^cD^\alpha_{0,t}u - \Delta^3u - 2\Delta^2u - \Delta f(u) = 0 \quad \text{sur}\Omega. \tag{7.19}$$

Revenons à (7.16). Nous avons pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $u \in L^2(0,T;V(\Omega))$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u(t)vdx - \int_\Omega \Delta^3u(t)v - \int_\Omega \Delta^2uvdxdx - \int_\Omega \Delta f(u(t))vdx = \\
&- \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^2u}{\partial\overrightarrow{n}}vd\sigma.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

Donc pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Delta^2u}{\partial\overrightarrow{n}}vd\sigma = 0 \tag{7.21}$$

On déduit par densité que

$$\frac{\partial\Delta^2u}{\partial\overrightarrow{n}} = 0. \tag{7.22}$$

Théorème 7.0.2 *Soit $u_0 \in H^2(\Omega)$ et f une fonction de $C^1(\Omega)$ satisfaisant* (7.2) - (7.4)*.*

- *Si $n = 1; 2$, $p > 0$, il existe une unique solution faible du problème* (7.1)*.*
- *Si $n = 3$ et $p \leq 2$ il existe une unique solution faible du problème* (7.1)*.*

Preuve

Solution du problème approché : L'espace $V(\Omega)\cap L^{p+2}(\Omega)$ est un espace séparable alors il existe une suite $(w_i)_{i=1}^{\infty}$ ayant les propriétés (4.3). Notons

$$F_n = < w_1, ..., w_n > \tag{7.23}$$

et

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{nj}(t) w_j, \tag{7.24}$$

où $u_{nj} : (0,T) \to \mathbb{R}$ qui résoud le système suivant :

$$\begin{cases} \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)\varphi dx + \int_\Omega \nabla\Delta u_n(t)\nabla\Delta\varphi)dx + 2\int_\Omega \nabla\Delta u_n(t)\nabla\varphi dx + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla\varphi dx = 0 \\ u_n(0) = u_{n,0}. \end{cases} \tag{7.25}$$

Pour tout φ dans F_n. D'après le théorème 7[11] il existe unique solution locale $u_n \in H^\alpha(0,\tau;F_n)\cap L^\infty(0,\tau;F_n)$ pour un $\tau < T$ très petit. Pour l'existence globale de la solution on applique alternative bolw-up [11] théorème 10.
Estimation à priori : Prenons $\varphi = u_n$ dans (7.25), on obtient

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)u_n(t)dx + ||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla u_n(t)dx = -2\int_\Omega \nabla\Delta u_n(t)\nabla u_n(t)dx. \tag{7.26}$$

On utilise l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)u_n(t)dx + ||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla u_n(t)dx \\ \leq \frac{||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon} + \varepsilon||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Nous avons d'après (7.4)

$$\begin{aligned} &\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)u_n(t)dx + (1-\varepsilon)||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |u_n(t)|^p|\nabla u_n(t)|^2 dx \\ &\leq c'||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon c'+1}{\varepsilon}||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

On choisit $\varepsilon > 0$ $1 \in]0,1[$. On utilise l'inégalité d'interpolation (4.99) de [37]

$$|\nabla u_n|^2 \leq c_1'||u_n||_{L^2(\Omega)}||u_n||_{H^2(\Omega)} \tag{7.29}$$

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)u_n(t)dx + (1-\varepsilon)||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon c'+1}{\varepsilon}c_1||u_n(t)||_{L^2(\Omega)}||u_n(t)||_{H^2(\Omega)}. \tag{7.30}$$

On applique l'inégalité de Young pour $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)u_n(t)dx + (1-\varepsilon)||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{(\frac{\varepsilon c'+1}{\varepsilon})^2c_1^2||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}||u_n(t)||^2_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{(\frac{\varepsilon c'+1}{\varepsilon})^2c_1^2||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}}{2\lambda} + \frac{\lambda c_2}{2}||u_n(t)||^2_{H^3(\Omega)}\end{aligned} \tag{7.31}$$

Prenons $\lambda < \frac{1-\varepsilon}{\frac{c_2}{2}}$, alors

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)u_n(t)dx + ((1-\varepsilon) - \frac{\lambda c_2}{2})||u_n(t)||^2_{H^3(\Omega)} \leq C'||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.32}$$

Par convolution avec g_α

$$g_\alpha * \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)u_n(t)dx + C''g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^3(\Omega)} \leq C'g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.33}$$

On applique la proposition 6.1.2 pour $E(u_n) = \frac{1}{2}|u_n|^2$ (dans ce cas $\lambda = 0$ de la proposition 6.1.2).

$$||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C''g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^3(\Omega)} \leq C'g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_n(0)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.34}$$

D'après le lemme de Gronwall fractionnaire

$$||u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^3(\Omega)} \leq C_3. \tag{7.35}$$

Revenons à notre système (7.25). On choisit $\varphi = 1$ alors

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)dx = 0. \tag{7.36}$$

Alors

$$\int_\Omega \frac{d}{dt}g_{1-\alpha} * (u_n - u_n(0))(t)dx = 0. \tag{7.37}$$

On intègre sur $[0,t]$ et comme $g_{1-\alpha} * (u_n - u_n(0))(0) = 0$ on a

$$\int_\Omega g_{1-\alpha} * (u_n - u_n(0))(t)dx = \int_\Omega g_{1-\alpha} * (u_n(0) - u_n)(t)dx = 0. \tag{7.38}$$

On applique la proposition 6.1.2, posons $E(u) = u$ alors $\lambda = 0$, (λ de la proposition 6.1.2). Alors d'après (7.36)

$$\int_\Omega u_n(0) - u_n(t)dx \geq 0. \tag{7.39}$$

Revenons à (7.38)

$$\int_0^t (t-y)^{-\alpha} \int_\Omega u_n(0) - u_n(t) dxdt = 0. \tag{7.40}$$

D'après (7.39) on déduit

$$\int_\Omega u_n(0) = \int_\Omega u_n(t) dx. \tag{7.41}$$

Montrons que $u_n \in L^{p+2}(0,T; L^{p+2}(\Omega))$. Notons $< u_n >= \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_\Omega u_n(0)dx$ et $\overline{u_n} = u_n - < u_n(0) >$. Alors, par translation on réécrit notre problème sous la forme

$$\begin{cases} \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\overline{u}_n(t)vdx + \int_\Omega \nabla\Delta\overline{u}_n(t)\nabla\Delta vdx + 2\int_\Omega \nabla\Delta\overline{u}_n(t)\nabla vdx \\ + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla vdx = 0, \\ \overline{u_n}(0) = u_n(0) - < u_n > \end{cases} \tag{7.42}$$

Estimation à priori On prend $v = \overline{u}_n$ donc on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\overline{u}_n(t)\overline{u}_n(t)dx + \int_\Omega \nabla\Delta\overline{u}_n(t)\nabla\Delta\overline{u}_n(t)dx + 2\int_\Omega \nabla\Delta\overline{u}_n(t)\nabla\overline{u}_n(t)dx \\ + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla\overline{u}_n(t)dx = 0. \end{aligned} \tag{7.43}$$

Nous avons

$$f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla\overline{u}_n(t) = -\Delta\overline{u}_n(t)f(u_n(t)) + div(f(u_n(t))\nabla\overline{u}_n(t)). \tag{7.44}$$

Comme $\overline{u}_n(t) \in V(\Omega)$, d'après (1.5) on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\overline{u}_n(t)\overline{u}_n(t)dx + \int_\Omega \nabla\Delta\overline{u}_n(t)\nabla\Delta\overline{u}_n(t)dx + 2\int_\Omega \nabla\Delta\overline{u}_n(t)\nabla\overline{u}_n(t)dx \\ - \int_\Omega f(u_n(t))\Delta\overline{u}_n(t)dx = 0. \end{aligned} \tag{7.45}$$

D'après (1.5) on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\overline{u}_n(t)(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx + ||\Delta\overline{u}_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f(u_n(t))u_n(t)dx \\ &= 2||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f(u_n(t)) < u_n > dx. \end{aligned} \tag{7.46}$$

On applique l'inégalité de Young, (7.3) et (7.2)

$$\begin{aligned} &\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\overline{u}_n(t)(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx + ||\Delta\overline{u}_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |u_n(t)|^{p+2}dx \\ &\le C' + c_1\int_\Omega |u_n(t)|^{p+1}dx + ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \tag{7.47}$$

On applique l'inégalité de Young pour $\gamma > 0$

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\overline{u}_n(t)(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx + ||\Delta\overline{u}_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + (1-\gamma)\int_\Omega |u_n(t)|^{p+2}dx \\ \leq C_1' + ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{7.48}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\overline{u}_n(t)(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx &= \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}(-\Delta)(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx \\ &= \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx,\end{aligned} \tag{7.49}$$

Alors

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx + ||\overline{u}_n(t)||^2_{H^2(\Omega)} + (1-\gamma)\int_\Omega |u_n(t)|^{p+2}dx \\ \leq C_1' + ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{7.50}$$

On choisit $0 < \gamma < 1$ et on convole avec g_α

$$g_\alpha * \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n(t)dx + g_\alpha * ||\overline{u}_n(t)||^2_{H^2(\Omega)} \\ + (1-\gamma)g_\alpha * \int_\Omega |u_n(t)|^{p+2}dx \leq g_\alpha * C_1' + g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)} \tag{7.51}$$

On applique la proposition 6.1.2 pour $E(\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n) = \frac{1}{2}|\nabla(-\Delta)^{-1}\overline{u}_n|^2$. D'après (7.35), on déduit

$$||u_n||_{L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))} \leq C. \tag{7.52}$$

Revenons à (7.25). On remarque que

$$\nabla\Delta u_n\nabla\Delta\varphi = -\Delta^2 u_n\Delta\varphi + div(\Delta\varphi\nabla\Delta u_n). \tag{7.53}$$

et

$$-\Delta^2 u_n\Delta\varphi = \nabla\Delta^2 u_n\nabla\varphi - div(-\Delta^2 u_n\nabla\varphi). \tag{7.54}$$

Alors nous avons d'après (1.5) et comme $\varphi \in V(\Omega)$ et $u_n(t) \in V(\Omega)$

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)\varphi dx + \int_\Omega \nabla\Delta^2 u_n(t)\nabla\varphi dx + 2\int_\Omega \nabla\Delta u_n(t), \nabla\varphi dx \\ + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t), \nabla\varphi dx = 0. \tag{7.55}$$

Posons $\varphi = \Delta^2 u_n(t)$, alors

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)\Delta^2 u_n(t)dx + \int_\Omega \nabla\Delta^2 u_n(t)\nabla\Delta^2 u_n(t)dx + 2\int_\Omega \nabla\Delta u_n(t)\nabla\Delta^2 u_n(t)dx + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla\Delta^2 u_n(t)dx = 0. \tag{7.56}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &{}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)\Delta^2 u_n(t) = div({}^cD^\alpha_{0,t} u_n(t)\nabla\Delta u_n(t)) - {}^cD^\alpha_{0,t}\nabla u_n(t)\nabla\Delta u_n(t). \\ &- {}^cD^\alpha_{0,t}\nabla u_n(t)\nabla\Delta u_n(t) = -div({}^cD^\alpha_{0,t}\nabla u_n(t)\Delta u_n(t)) + {}^cD^\alpha_{0,t}\Delta u_n(t)\Delta u_n(t). \end{aligned} \tag{7.57}$$

Alors d'après (1.5) et comme $u_n \in V(\Omega)$, et par inégalité de Young on a

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\Delta u_n(t)\Delta u_n(t)dx + ||\nabla\Delta^2 u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega f'(u_n(t))\nabla u_n(t)\nabla\Delta^2 u_n(t)dx \leq \varepsilon||\nabla\Delta^2 u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.58}$$

Grâce à (7.4) on a

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\Delta u_n(t)\Delta u_n(t)dx + ||\nabla\Delta^2 u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon||\nabla\Delta^2 u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + c\int_\Omega |\nabla u_n(t)\nabla\Delta^2 u_n(t)|dx. \tag{7.59}$$

D'après l'inégalité de Young

$$\int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\Delta u_n(t)\Delta u_n(t)dx + ||\nabla\Delta^2 u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\varepsilon||\nabla\Delta^2 u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}||\nabla\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + c_1||\nabla u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.60}$$

On convole avec g_α. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $1 - 2\varepsilon > 0$

$$g_\alpha * \int_\Omega {}^cD^\alpha_{0,t}\Delta u_n(t)\Delta u_n(t)dx + (1-2\varepsilon)g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^5(\Omega)} \leq g_\alpha * \frac{1}{\varepsilon}||u_n(t)||^2_{H^3(\Omega)} + c_1 g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)}. \tag{7.61}$$

On applique la proposition (6.1.2) pour $E(\Delta u_n(t)) = \frac{1}{2}|\Delta u_n(t)|^2$

$$||\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + (1-2\varepsilon)g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^5(\Omega)} \leq g_\alpha * \frac{1}{\varepsilon}||u_n(t)||^2_{H^3(\Omega)} + c_1 g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^1(\Omega)} + ||\Delta u_n(0)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.62}$$

D'après (7.35), on a

$$||\Delta u_n(t)||^2_{L^2(\Omega)} + (1-2\varepsilon)g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^5(\Omega)} \leq C. \tag{7.63}$$

On déduit

$$||u_n(t)||^2_{H^2(\Omega)} + (1-2\varepsilon)g_\alpha * ||u_n(t)||^2_{H^5(\Omega)} \leq C'. \tag{7.64}$$

Estimation de $f(u_n)$ et de ${}^cD^\alpha_{0,t}u_n$: Nous avons d'après (7.2) et (7.52)

$$\int_0^T \int_\Omega |f(u_n(t))|^{\frac{p+2}{p+1}} dxdt \leq c||u_n||_{L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))}. \tag{7.65}$$

Soit $w \in V(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, on utilise l'inégalite de Hölder

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega |{}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)w|dxdt \leq{}& ||u_n||_{L^2(0,T;V(\Omega))}||w||_{L^2(0,T;V(\Omega))} + ||u_n||_{L^2(0,T;V\Omega))}||w||_{L^2(0,T;V(\Omega))} \\ &+ ||f(u_n)||_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(0,T;L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega))}||w||_{L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{7.66}$$

Donc on a

$${}^cD^\alpha_{0,t}u_n \in L^1(0,T;(V(\Omega))' + L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega))). \tag{7.67}$$

Alors d'après le théorème 6.1.1 et l'estimation (7.64)

$$u_n \to u \,\text{dans}\, L^2(0,T;V(\Omega)). \tag{7.68}$$

On a aussi

$$u_n \rightharpoonup^\star u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)). \tag{7.69}$$

Donc

$$u_n \to u \ p.p. \tag{7.70}$$

Par continuité

$$f(u_n) \to f(u) \ p.p. \tag{7.71}$$

Alors d'après le lemme 1.3 [28]

$$f(u_n) \rightharpoonup f(u) \text{ dans } L^{\frac{p+2}{p+1}}(0,T;L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)). \tag{7.72}$$

Retour au problème initial : Prouvons que la fonctions limite u satisfait la forme faible de PFC

$$\begin{aligned}\int_0^T <{}^c D^\alpha_{0,t}u(t),\varphi> dt ={}& \int_0^T <\Delta^3 u(t),\varphi> dt + 2\int_0^T <\Delta^2 u(t),\varphi> dt \\ &+ \int_0^T <\Delta f(u(t)),\varphi> dt,\end{aligned} \tag{7.73}$$

pour tout $\varphi \in V(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$.
Soit $w \in V(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega)$ alors on peut trouver une suite

$$w_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j \quad \text{tel que} \tag{7.74}$$

$$w_n \to w \quad \text{dans} V(\Omega) \cap L^{p+2}(\Omega). \tag{7.75}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T < {}^cD^{\alpha}_{0,t} u_n(t), w_n > \varphi(t) dt \\
&\qquad = \int_0^T < \Delta^3 u_n(t), w_n > \varphi(t) dt + 2 \int_0^T < \Delta^2 u_n(t), w_n > \varphi(t) dt \\
&\qquad + \int_0^T < \Delta f(u_n(t)), w_n > \varphi(t) dt.
\end{aligned} \tag{7.76}$$

La convergence du termes linéaire :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T < \nabla\Delta u_n(t) - \nabla\Delta u(t), \varphi(t)\nabla\Delta v_n > - < \nabla\Delta u(t), \nabla\Delta v\varphi(t) - \nabla\Delta v_n\varphi(t) > dt \\
&\leq ||u_n - u||^2_{L^2(0,T;V(\Omega))} ||v_n\varphi(t)||_{L^2(0,T;V(\Omega))} + ||\varphi v_n - \varphi v||_{L^2(0,T;V(\Omega))} ||u||_{L^2(0,T;V(\Omega))} \to 0.
\end{aligned} \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T < \Delta u_n(t) - \Delta u(t), \varphi(t)\Delta v_n > - < \Delta u(t), \Delta v\varphi(t) - \Delta v_n\varphi(t) > dt \\
&\leq ||u_n - u||^2_{L^2(0,T;V(\Omega))} ||v_n\varphi(t)||_{L^2(0,T;V(\Omega))} + ||\varphi v_n - \varphi v||_{L^2(0,T;V(\Omega))} ||u||_{L^2(0,T;V(\Omega))} \to 0.
\end{aligned} \tag{7.78}$$

La convergence du terme non linéaire

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega f(u_n(t))(\varphi(t)\Delta v_n - \varphi(t)\Delta v) dx dt - \int_0^T \int_\Omega f(u(t)) - f(u_n(t)))\varphi(t)\Delta v dx dt \\
&\leq ||f(u_n)||_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(0,T;L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega))} ||\varphi(t)v_n - \varphi(t)v||_{L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega)\cap V(\Omega))} \\
&+ \int_0^T \int_\Omega (f(u(t)) - f(u_n(t)))\varphi(t)\Delta v dx dt \to 0.
\end{aligned} \tag{7.79}$$

La convergence de la dérivée fractionnaire : Nous avons pour tout $p \leq 2$

$$^cD^{\alpha}_{0,t} u_n \in L^{\frac{2p}{2p-1}}(0,T;(V(\Omega))'). \tag{7.80}$$

En effet, on a $f'(u_n)\nabla u_n \in L^{\frac{2p}{2p-1}}(0,T;L^{\frac{2p}{2p-1}}(\Omega))$ car on a d'après (7.4) et inégalité de Young

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |f'(u_n)\nabla u_n|^{\frac{2p}{2p-1}}dxdt &\leq c\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^{\frac{2p}{2p-1}}dxdt\\ &+\int_0^T\int_\Omega |u_n(t)|^{\frac{2p^2}{2p-1}}|\nabla u_n(t)|^{\frac{2p}{2p-1}}dxdt\\ &\leq \int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^4dxdt+\int_0^T\int_\Omega |u_n(t)|^{\frac{4p^2}{2p-1}}dxdt\\ &+\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^{\frac{4p}{2p-1}}dxd.\end{aligned}\tag{7.81}$$

Alors si $p=1$ les dernières intégrales sont bornées. On utlise l'inégalité d'interpolation (7.8), (7.64) et le corollaire IX.14[5] et aussi si $p=2$.
Revenons à notre problème (7.25). Nous avons pour tout $v\in L^{2p}(0,T;V(\Omega))$

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |{}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)vdxdt| &\leq c_1||u_n||_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}||v||_{L^{2p}(0,T;V(\Omega))}\\ &+||f'(u_n)\nabla u_n||_{L^{\frac{2p}{2p-1}}(0,T;(V(\Omega))')}\int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^{2p}dxdt.\end{aligned}\tag{7.82}$$

Si $p=1$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |{}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)vdxdt| &\leq c_1||u_n||_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}||v||_{L^{2p}(0,T;V(\Omega))}\\ &+c_2||f'(u_n)\nabla u_n||_{L^{\frac{2p}{2p-1}}(0,T;(V(\Omega))')}||v||_{L^{2p}(0,T;V(\Omega))}.\end{aligned}\tag{7.83}$$

Si $p=2$ on utlise l'inégalité d'interpolation (7.8). On trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega |{}^cD^\alpha_{0,t}u_n(t)vdxdt| &\leq c_1||u_n||_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}||v||_{L^{2p}(0,T;V(\Omega))}\\ &+||f'(u_n)\nabla u_n||_{L^{\frac{2p}{2p-1}}(0,T;(V(\Omega))')}\int_0^T\int_\Omega ||v||^3_{H^1(\Omega)}||v||_{H^4(\Omega)}dxdt\\ &\leq c_1||u_n||_{L^2(0,T;H^3(\Omega))}||v||_{L^{2p}(0,T;V(\Omega))}\\ &+c_2||f'(u_n)\nabla u_n||_{L^{\frac{2p}{2p-1}}(0,T;(V(\Omega))')}||v||_{L^{2p}(0,T;V(\Omega))}.\end{aligned}\tag{7.84}$$

Comme $\frac{2p}{2p-1}>1$, d'après la proposition 3.5 [25], il existe une sous suite encore notée ${}^cD^\alpha_{0,t}u_n$ convergeant vers ${}^cD^\alpha_{0,t}u$. Donc

$$\begin{aligned}&\int_0^T <^c D^\alpha_{0,t}u_n(t)-^c D^\alpha_{0,t}u(t,\varphi(t)v_n> - <^c D^\alpha_{0,t}u(t),v\varphi(t)-v_n\varphi(t)>dt\\ &\leq ||^cD^\alpha_{0,t}u_n-^c D^\alpha_{0,t}u||_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(0,T;(V(\Omega))'+L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega))}||v_n\varphi(t)||_{L^{p+2}(0,T;V(\Omega)\cap L^{p+2}(\Omega))}\\ &+||\varphi v_n-\varphi v||_{L^{p+2}(0,T;V(\Omega)\cap L^{p+2}(\Omega))}||^cD^\alpha_{0,t}u||_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(0,T;(V(\Omega))'+L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega))}\to 0.\end{aligned}\tag{7.85}$$

On passe à la limite dans (7.76). D'après (7.77), (7.79) et (7.85) on obtient

$$\int_0^T ({}^cD_{0,t}^\alpha u(t),w)\varphi(t)dt = \int_0^T < \Delta^3 u(t),w > \varphi(t)dt, \\ + 2\int_0^T < \Delta^2 u(t),w > \varphi dt + \int_0^T < \Delta f(u(t)),w > \varphi(t)dt. \tag{7.86}$$

Condition initiale : Comme dans le chapitre précédent, on obtient $u_{n,0} \to u_0$.

Unicité : Soit u_1, u_2 deux solutions de notre problème, notons $u = u_1 - u_2$, on a

$${}^cD_{0,t}^\alpha u - \Delta^3 u - 2\Delta^2 u - \Delta(f(u_1) - f(u_2)) = 0. \tag{7.87}$$

$$u(0) = 0. \tag{7.88}$$

On multiplie l'équation (7.87) par u et on intègre sur Ω

$$< {}^cD_{0,t}^\alpha u(t),u(t) > - < \Delta^3 u(t),u(t) > -2 < \Delta^2 u(t),u(t) > \\ - < \Delta(f(u_1) - f(u_2)),u(t) >= 0 \tag{7.89}$$

Nous avons $\int_\Omega u(t)dx = 0$ alors on a

$$< {}^cD_{0,t}^\alpha(-\Delta)(-\Delta)^{-1}u(t),(-\Delta)^{-1}u(t) > + < \Delta^2 u(t),u(t) > +2 < \Delta u(t),u(t) > \\ + < (f(u_1(t)) - f(u_2(t))),u(t) >= 0. \tag{7.90}$$

On applique la formule (1.5) et l'inégalité de Young et la croissance à l'infini comme on a fait dans la preuve du chapitre précédent

$$\begin{aligned} < {}^cD_{0,t}^\alpha \nabla(-\Delta)^{-1}u(t), \nabla(-\Delta)^{-1}u(t) > &+(1-\varepsilon)||u(t)||^2_{H^2(\Omega)} \\ &\le (\frac{1}{\varepsilon} + L + 1)||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le (\frac{1}{\varepsilon} + L + 1)^2\frac{1}{\delta}||\nabla(-\Delta)^{-1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \delta||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le (\frac{1}{\varepsilon} + L + 1)^2\frac{1}{\delta}||\nabla(-\Delta)^{-1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \delta c||u(t)||^2_{H^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{7.91}$$

Choisissons $0 < \varepsilon < 1$ et $0 < \delta < \frac{1-\varepsilon}{c}$. comme $u(0) = 0$, la dérivé fractionnaire de Caputo est égale la dérivé fractionnaire de Rieman-Liouville. On applique le corrolaire 3.0.1 alors

$$g_{1-\alpha} * ||\nabla(-\Delta)^{-1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ((1-\varepsilon) - c\delta)\int_0^t ||u(t)||^2_{H^2(\Omega)} \\ \le (\frac{1}{\varepsilon} + L + 1)^2\frac{1}{\delta}\int_0^t ||\nabla(-\Delta)^{-1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.92}$$

On convole avec g_α on obtient

$$\int_0^t ||\nabla(-\Delta)^{-1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ((1-\varepsilon) - c\delta) g_\alpha * \int_0^t ||u(t)||^2_{H^2(\Omega)} \\ \leq (\frac{1}{\varepsilon} + L + 1)^2 \frac{1}{\delta} g_\alpha * \int_0^t ||\nabla(-\Delta)^{-1}u(t)||^2_{L^2(\Omega)}. \tag{7.93}$$

On applique le lemme de Gronwall fractionnaire on obtient $u = 0$. $\square$

Bibliographie

[1] J. P. Aubin, *Approximation of elliptic Boundary value problems.* Wiely-new York (1972).

[2] E. G. Bajlekova, Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. *Thèse de Doctorat université de Eindhoven.* (2001).

[3] W. J. Boettinger, phase field simulation of solidification. *Annu. Rev. Mater. Res.* (2002).

[4] F. Boyer, P. Fabrie, *Mathematical Tools for the Navier-Stokes Equations and Related Models Study of the Incompressible.* Applied Mathematical sciences. **183**,(2013).

[5] Haïm Berezis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et application.* Masson, Paris (1987).

[6] L. Q. Chen, phase field models for microstructure evolution. *Annu. Rev. Mater. Res.* (2002).

[7] M. Chipot, *Element of Nonlinear Analysis.* Birkhäuser advanced Texts. Birkhäuser Verlag, Bassel (2000).

[8] P. Clément and E. Mitidieri. Qualitative properties of solutions of Volterra equations in Banach spaces. Israel J. Math. 64 No 1 (1988), 1-24.

[9] N. D Cong and H. T. Tuan, Generation of nonlocal fractional dynamical systems by fractional differential equations. *Journal of integral eqautions and applications.* **29** (2017), 1–24.

[10] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, (1993).

[11] P.M. de Carvalho Neto and R. Fehlberg Junior, On the fractional version of Leibniz rule. *arXiv e-prints.* (2019), 1901–10376.

[12] L. Djilali and A. Rougirel, Galerkin method for time fractional diffusion equations. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations.* **4**, No 2 (2018), 349–368.

[13] K. R. Elder and M. Grant. Modeling elastic and plastic deformations in nonequilibrium processing using phase field crystals. *Phys. Rev. E,* 70(051605), 2004.

[14] K.R. Elder, M. Katakowsi, M. Haataja, M. Grant, Modeling elasticity in crystal growth. *phys. Rev. Lett.* 2002.

[15] K. R. Elder, N. Provatas, J. Berry, P. Stefanovic, M. Grant. Phase-field crysatl modeling and classical density functional theory of freezing. *phys. Rev. B.* (2007).

[16] C.M. Elliot and Z. Songmu. On the cahn hilliard equation, *Arch. Rational Mech. Anal* 96(4) : 339-357, (1986).

[17] Hassan Emamirad and Arnaud Rougirel,Time Fractional Linear Problems On $L^2(\mathbb{R}^d)$. *Bull. Sci. Math.,* 144 (2018), 1–38.

[18] L. C. Evans, *Partial differential equations.* American Mathematical Society, San Francisco, (1998).

[19] Y. Feng, L. Li, J.-G. Liu, and X. Xu. Continuous and discrete one dimensional autonomous fractional ODEs. *Discrete Cont. Dyn.-B, To appear.*

[20] M. Fritz, M. L. Rajendran, B. WohlmuthTime fractional Cahn Hilliard Equation : well-posedness, degenracy and numerical solution.

[21] S. B. Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles.* Dunoud,(2010).

[22] I.M. Gelfand and G.E. Shilov, *Generalized Functions*. Vols. 1-5. (1967).

[23] R. B. Hoyle. Pattern formation. *Cambridge University Press, Cambridge,* (2006). An introduction to methods.

[24] A.A. Kilba, H.M. Srivastava and J.J Trujillo, *theory and applications of fractional differential equations.* North-Holland,Mathematical studies. Amsterdam (2006).

[25] Lei Li and Jian-Guo Liu, Some compactness criteria for weak solutions of time fractional PDEs.*preprint, Arxiv.* (2017).

[26] Lei Li and Jian-Guo Liu, Some compactness criteria for weak solutions of time fractional PDEs. *SIAM J. on Mathematical Analysis.* **50**, No 4 (2018), 3963–3995.

[27] Li, Lei and Liu, Jian-Guo, A generalized definition of Caputo derivatives and its application to fractional ODEs. *SIAM J. Math. Anal.* **50**, No 3 (2018), 2867–2900.

[28] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires.* Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).

[29] Y. Ouedjedi A. Rougirel K. Benmeriem. Galerkin method for time semilinear equations. *Fractional calculus and applications.* (2021).

[30] P. D. Panagiotopoulos, *Inequality problems in mechanics and applications.* (1985), Birkhäuser, Boston. Basel. Stuttgart

[31] I. Podlubny, *Fractional differential equations.* (1999).

[32] J. C. Robinson, C Pierre *Infinite-Dimensional Dynamical Systems. An introduction to dissipative parabolic PDES and the theory of Global Attractors* Applied Mechanics Reviews. (2003).

[33] T. Roubicek, *Nonlinear Partial Differential Equations with Applications.* Vol. 153 of Intern. Ser. of Numer. Math., Birkhäuser Verlag, Basel (2005).

[34] J. Shen, T. Tang, L.L. Wang *Spectral methods : algorithms, analysis and applications.* (2011).

[35] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;X)$. *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* **146** (1986), 65–96.

[36] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A.* (1977).

[37] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* Vol. 68 of Appl. Math. Sci. Ser., Springer-Verlag, New York (1988).

[38] M. Yussouff T. V.Ramakrishnan. First principles order parameter theory of freezing. *Phys. Rev. B.* (1979).

[39] R. Zacher, Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces. *Funkcialaj Ekvacioj* **52** (2009), 1–18.