Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
و البـحـث الـعلـمــي وزارة الـتعلــيـم الـعـالي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MUSTAPHA Stambouli
Mascara

جامعة مصطفى اسطمبولي
معسكر

Faculté des sciences exactes

Département de Mathématiques

THESE de DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse harmonique

Intitulée

Sur les applications harmoniques

Wondershare PDFelement

***Présentée par* : kada Benotmane Rida**

Le 22 / 05 / 2025 **à** 16 h

Devant le jury :

Président	Mohammed Cherif Ahmed	Professeur	Université de Mascara
Examinateur	Hanifi Zoubir	Professeur	Université d'Oran
Examinateur	Zagane Abderrahim	M.C.A	Université de Relizane
Examinateur	Kacimi Bouazza	M.C.A	Université de Mascara
Encadreur	ZEGGA Kaddour	M.C.A	Université de Mascara

Année Universitaire : 2024/2025

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Monsieur ZEGGA Kadour, pour son soutien inconditionnel, sa patience et ses réflexions pertinentes.
J'exprime ma profonde gratitude aux professeurs DJAA Mustapha et ZAGGAANE Abderrahim, dont l'expertise précieuse m'a grandement bénéficié tout au long de ce travail.
Je remercie également le professeur Mohammed CHERIF pour ses choix judicieux de sujets liés à ce travail et pour sa patience.
J'adresse aussi mes sincères remerciements aux professeurs HANIFI Zoubir et KACIMI Bouazza pour avoir accepté de faire partie du jury de soutenance, et pour avoir consacré un peu de leur temps précieux afin d'être présents avec moi en ce jour si spécial.
Mes sincères remerciements vont aux responsables, au personnel et aux enseignants de la faculté des sciences exactes de l'Université de Mascara pour leur accompagnement et leur dévouement.
Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont accompagné tout au long de ce voyage qu'est la vie, avec une pensée toute particulière pour mes chers parents.

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Dédicace

À mes parents bien-aimés, Vous êtes la source de ma force, mes repères et mes plus grands soutiens. Votre amour, vos sacrifices silencieux et vos prières m'ont porté jusqu'ici. À vous, je dois tout.

À mon épouse, Ta patience, ton amour , et ton soutien constant ont été pour moi un refuge et une inspiration. Merci de croire en moi, même dans mes doutes.

À mon encadrant, Monsieur Zegga Kaddour, Je vous exprime ma reconnaissance la plus sincère pour votre accompagnement bienveillant, vos conseils éclairés et votre confiance tout au long de ce travail.

À ma famille et à mes amis, Merci pour votre présence, vos encouragements et votre affection tout au long de ce parcours. À tout la famille Kada Benotmane et la famille Djabbar.

Et tout particulièrement, À mes chers amis Mouhssine et Yassine, Votre amitié sincère, votre écoute et votre soutien inestimable ont été des piliers sur lesquels j'ai toujours pu compter. Merci du fond du coeur

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Résumé

Cette thèse s'articule autour de deux objectifs principaux :
1) Elle s'inscrit dans le cadre de l'étude de la géométrie des fibrés tangents, en mettant particulièrement l'accent sur la métriques naturelles et les connexions linéaires sur le fibré tangent. Par ailleurs, nous utilisons une généralisation de la métrique de Cheeger-Gromoll sur le fibré tangent TM, considérée comme une métrique naturelle sur TM. Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit harmonique par rapport à cette métrique généralisée, et nous construisons plusieurs exemples de tels champs de vecteurs harmoniques.
2) Elle explore la géométrie d'une déformation non conforme de la métrique, appelée Mus-gradient, ainsi que l'étude de l'harmonicité et de la bi-harmonicité des applications entre deux variétés riemanniennes par rapport à cette métrique.

Mots clés:
Déformation non conforme, applications harmoniques, applications biharmoniques.
Relèvement horizontale,Relèvement verticale, Métrique de Cheeger-Gromoll généralisée.

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Contents

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Introduction

Cette thèse s'articule autour de deux objectifs principaux :
1) Elle s'inscrit dans le cadre de l'étude de la géométrie des fibrés tangents, en mettant particulièrement l'accent sur la métriques naturelles et les connexions linéaires sur le fibré tangent. Par ailleurs, nous utilisons une généralisation de la métrique de Cheeger-Gromoll sur le fibré tangent TM, considérée comme une métrique naturelle sur TM. Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit harmonique par rapport à cette métrique généralisée, et nous construisons plusieurs exemples de tels champs de vecteurs harmoniques.
2) Elle explore la géométrie d'une déformation non conforme de la métrique, appelée Mus-gradient, ainsi que l'étude de l'harmonicité et de la bi-harmonicité des applications entre deux variétés riemanniennes par rapport à cette métrique.
Soit (M, g) une variété Riemannienne . Une métrique Riemannienne $\bar{g}$ sur le fibré tangent TM de M est dite naturelle par rapport à g si,

$$\bar{g}(\mathrm{X}^{\mathrm{H}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{H}}) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \circ \pi$$

$$\bar{g}(\mathrm{X}^{\mathrm{H}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{V}}) = 0$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$

Wondershare PDFelement

En 1958 Sasaki S.[26], à partir d'une variété Riemannienne (M, g) a construit une métrique naturelle $\widehat{g}$ sur le fibré tangent TM de M . Aujourd'hui, cette métrique est connue sous le nom de métrique de Sasaki sur TM et définie par :

$$\widehat{g}(\mathrm{X}^{\mathrm{H}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{H}}) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \circ \pi$$

$$\widehat{g}(\mathrm{X}^{\mathrm{H}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{V}}) = 0$$

$$\widehat{g}(\mathrm{X}^{\mathrm{V}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{V}}) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \circ \pi$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$
En 1971 Kowalski O.[20], a utilisé le crochet de Lie sur TM pour obtenir des formules explicites de la connexion de Levi-Civita $\widehat{\nabla}$ et le tenseur de courbure Riemannienne $\widehat{R}$ sur $(\mathrm{TM}, \widehat{g})$ munie de la métrique de Sasaki.
En 1972 Cheeger J. et Gromoll D.[10] ont introduit leur métrique sur le fibré tangent TM dans leur article "On the Structure of Complete Manifolds of Nonnegative Curvature", principalement pour étudier les variétés à courbure positive.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$\widehat{g}_p(\mathrm{X}^{\mathrm{H}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{H}}) = g_x(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

$$\widehat{g}_p(\mathrm{X}^{\mathrm{H}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{V}}) = 0$$

$$\widehat{g}_p(\mathrm{X}^{\mathrm{V}}, \mathrm{Y}^{\mathrm{V}}) = \frac{1}{1+r^2}(g_x(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + g_x(\mathrm{X}, u)g_x(\mathrm{Y}, u))$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM}), p = (x, u) \in \mathrm{TM}$ et $r = ||u|| = \sqrt{g(u, u)}$.

La métrique de Cheeger-Gromoll généralisée est une famille de métriques naturelles $h_{p,q}$ sur le fibré tangent d'une variété riemannienne, dépendant de deux paramètres $p \in \mathbb{R}$ et $q \geq 0$. Cette famille a été introduite en 2009 par Michèle Benyounes, Eric Loubeau et Chris M. Wood [4], dans leur article intitulé "The Geometry of Generalised Cheeger-Gromoll Metrics". Dans cet article, les auteurs étudient la géométrie du fibré tangent muni de cette famille de métriques, qui déforment les métriques de Sasaki et de Cheeger-Gromoll.
En 2020, (R. Kada Ben Otmane, A. Zagane et M. Djaa) [17], nous avons employé la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée sur le fibré tangent TM comme métrique naturelle. Dans notre travail, on a établi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit harmonique par rapport à cette métrique. nous avons également construit plusieurs exemples explicites de champs de vecteurs harmoniques illustrant cette théorie.

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres:
Dans le premier chapitre, nous rappelons les définitions et propriétés fondamentales des variétés riemanniennes, des connexions linéaires, du tenseur de courbure, ainsi que des opérateurs différentiels sur une variété riemannienne. Nous introduisons également la structure du fibré tangent inverse et les notions d'applications harmoniques et biharmoniques.
Dans le deuxième chapitre, nous développons différents aspects de la géométrie du fibré tangent d'ordre 1, en étudiant:
• Le relèvement vertical, complet et horizontal des fonctions, des champs de vecteurs, des formes différentielles et des champs de tenseurs de type quelconque d'une variété vers son fibré tangent.
• L'analyse de certaines métriques riemanniennes sur le fibré tangent, notamment la métrique naturelle, la métrique de Sasaki et la métrique de Cheeger-Gromoll.
Par ailleurs, nous utilisons une généralisation de la métrique de Cheeger-Gromoll sur le fibré tangent TM, considérée comme une métrique naturelle sur TM. Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit harmonique par rapport à cette métrique généralisée, et nous construisons plusieurs exemples de tels champs de vecteurs harmoniques.

Wondershare PDFelement

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'harmonicité et la biharmonicité des applications entre deux variétés Riemanniennes par rapport à une déformation non conforme de la métrique, dite **métrique Mus-gradient**.

Définition Soient (M^m, g) une variété Riemannienne et $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ telle que $grad\, f \neq 0$. Sur M, on considère une déformations non conforme de g, appelée métrique Mus-gradient notée $\tilde{g}$ définie par:

$$\tilde{g}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (g + df \otimes df)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \mathrm{X}(f)\mathrm{Y}(f)$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, f est fonction de déformation.

Enfin, dans la dernière section, nous caractérisons certaines classes d'applications bi-harmoniques propres (bi-harmoniques non harmoniques). Nous proposons également des exemples explicites de telles applications dans le cas où (M^m, g) est un espace euclidien.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Chapter 1

Introduction à la géométrie Riemannienne

1.1 Métrique Riemannienne

Notation:
$C^{\infty}(M)$ l'ensemble des fonctions de classe C^{∞} sur M
$\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Definition 1.1.1 *Une métrige Riemannienne g sur une variété différentiable M est une application ,*

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^{\infty}(M)$$

$C^{\infty}(M)$-bilinéaire, symétrique et définie positive.

Wondershare PDFelement

Remarque 1.1.1 *Soit g une métrique Riemannienne sur M. Pour tout $V, W \in \Gamma(TM)$, on a :*

1. - $g(V, W) = g(W, V)$. *(symétrique)*
   - $g(V, V) \geq 0$ *et* $g(V, V) = 0 \Rightarrow V = 0$ *(définie positive)*
2. *Si (U, φ) est une carte sur M, alors*

$$g = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{1.1}$$

où g_{ij} sont des fonctions différentiables sur U appelés composantes du tenseur métrique relativement á la carte (U, φ).

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

localement, si $\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{V}^{\mathrm{i}} \partial_i$ *et* $\mathrm{W} = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{W}^{\mathrm{j}} \partial_j$ *on a*

$$g\left(\mathrm{V}, \mathrm{W}\right) = g_{ij} \mathrm{V}^{\mathrm{i}} \mathrm{W}^{\mathrm{j}}.$$

3. *Pour tout* $x \in \mathrm{M}$ *on a*

$$g_x : \mathrm{T}_x\mathrm{M} \times \mathrm{T}_x\mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée et définie positive, où $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *désigne l'espace tangent en* x.

Definition 1.1.2 *Une variété Riemannienne est un couple* (M, g)*, où* M *est une variété différentiable et* g *une métrique Riemannienne sur* M.

Wondershare PDFelement

Exemple 1.1.1 *L'espace* $\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire standard*

$$g_0\left(v, w\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

où $v = \left(v_1, ..., v_n\right)_x, w = \left(w_1, ..., w_n\right)_x \in \mathrm{T}_x\mathbb{R}^n$ *et* $x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.2 *Dans la boule*

$$\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \|x\| < 1\}.$$

on considère le tenseur g_H *définie par*

$$g_H(v, w) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2} g_0(v, w), \quad v, w \in \mathrm{T}_x\mathbb{D}^n, \quad x \in \mathbb{D}^n.$$

g_H *est appelée la métrique hyperbolique sur* $\mathbb{D}^n$.

Exemple 1.1.3 *Soit* M *une sous-variété différentiable de* $(\mathbb{R}^n, g_0)$*. Pour tout* $x \in \mathrm{M}$*, on a* $\mathrm{T}_x\mathrm{M} \subset \mathrm{T}_x\mathbb{R}^n$*. En posant*

$$g(v, w) = g_0(v, w) \qquad v, w \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}.$$

on obtient la métrique Riemannienne induite par g_0 *sur* M.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Remarque 1.1.2 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne, de dimension* n*,* (U, φ) *et* (V, ψ) *deux cartes sur* M*, Si* g_{ij}*(resp* $\tilde{g}_{kl}$ *)désignent les composantes de* g *relativement à la carte* (U, φ) *(resp* (V, ψ)*), alors pour tout* $x \in \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$*, le changement de coordonnées est donné par*

$$y = y(x) = y(y^1, ..., y^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$$

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl}.$$

où $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$ *et* $(\frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n})$ *désignent les bases de champs de vecteurs associés respectivement aux cartes* (U, φ) *et* (V, ψ)*.*

1.1.1 Image inverse d'une métrique Riemannienne

Definition 1.1.3 *Soient* (N, h) *une variété Riemannienne de dimension* n*,* M *une variété différentiable de dimension* m*, et* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *une immersion. Alors*

$$f^*h : \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{TM}) \longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$$

définie pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *et* $x \in \mathrm{M}$ *par*

$$f^*h(X, Y)_x = h_{f(x)}(d_x f(X_x), d_x f(Y_x)),$$

est une métrique sur M*, appelée métrique inverse.*

Expression locale de la métrique inverse f^*h

Soient (U, φ) une carte de M de base locale associée $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m})$ et (V, ψ) une carte de N de base locale associée $(\frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n})$, alors

$$\begin{aligned}
(f^*h)_{ij} &= f^*h(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\
&= h(df(\frac{\partial}{\partial x^i}), df(\frac{\partial}{\partial x^j})) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} h(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}) \circ f
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{i}} \frac{\partial f^{\beta}}{\partial x^{j}} (h_{\alpha\beta} \circ f). \qquad (1.2)$$

Definition 1.1.4 *Ètant donnée une métrique Riemannienne g sur une variété M, on définit la norme $\|\mathrm{V}\|_g$ d'un champ de vecteur $\mathrm{V} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ par*

$$\|\mathrm{V}\|_g = \sqrt{g(\mathrm{V},\mathrm{V})} \qquad (1.3)$$

Localement, si $\mathrm{V} = \mathrm{V}^i \partial_i$ alors,

$$\|\mathrm{V}\|_g^2 = g_{ij}\mathrm{V}^i\mathrm{V}^j$$

Proposition 1.1.1 *(isomorphisme canonique)*
Soit g une métrique Riemannienne sur M . l'application,

$$\sharp : \Gamma(\mathrm{TM}^*) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{TM})$$
$$\omega \rightarrow \sharp\omega$$

définie par

$$g(\sharp\omega, \mathrm{V}) = \omega(\mathrm{V}). \qquad (1.4)$$

pour tout $\mathrm{V} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, est un isomorphisme $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{M})$-linéaire.

Wondershare PDFelement

Lemme 1.1.1 *Soit g une métrique Riemannienne sur M. Pour tout $x \in \mathrm{M}$ la métrique g induit un isomorphisme linéaire entre $\mathrm{T}_x\mathrm{M}^*$ et $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$*

$$\sharp_x : \mathrm{T}_x\mathrm{M}^* \longrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{M}$$
$$\omega \rightarrow \sharp_x\omega$$

définie par,

$$g_x(\sharp_x\omega, v) = \omega(v)$$

pour tout $v \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$.

Remarque 1.1.3 *Localement, si $\omega = \omega_i dx^i$ et $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, alors*

$$\sharp\omega = \omega_i g^{ij} \partial_j$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de (g_{ij}).

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1.2 Connexion linéaire.

Definition 1.2.1 *Une connexion linéaire sur une variété* M *est une application*

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM)\\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V\end{aligned}$$

vérifiant:

1. $\nabla_X(V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2. $\nabla_X(fV) = X(f)V + f\nabla_X V$
3. $\nabla_{X+fY}V = \nabla_X V + f\nabla_Y V,$

pour tout $V, W, X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^\infty(M)$.

Definition 1.2.2 *Soient* ∇ *une connexion linéaire sur une variété* M *de dimension* n *et* $(\partial_1, ..., \partial_n)$ *(resp* $(dx^1, ..., dx^n)$ *) une base locale de* $\Gamma(TM)$ *(resp* $\Gamma(T^*M)$ *) . les coefficients de Christoffel sont définies par*

$$\Gamma_{ij}^k = dx^k(\nabla_{\partial_i}\partial_j) \tag{1.5}$$

Definition 1.2.3 *Une section* $V \in \Gamma(TM)$ *est dite parallèle par rapport a la connexion* ∇ *si*

$$\nabla_X V = 0$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$

Definition 1.2.4 *Soit* g *une métrique Riemannienne sur* M, *On dit que la métrique* g *est compatible avec la connexion* ∇ *(ou parallèle), si*

$$\nabla g = 0 \tag{1.6}$$

i.e

$$(\nabla_X g)(V, W) = 0$$

ou

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W). \tag{1.7}$$

pour tout $X, V, W \in \Gamma(TM)$.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1.2.1 Tenseur de torsion.

Definition 1.2.5 *Soient* M *une variété différentiable et* ∇ *une connexion linéaire sur* M. *Le tenseur de torsion associé à* ∇ *est une application* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$*-bilinéaire définie par*

$$\mathrm{T} : \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{TM}) \to \Gamma(\mathrm{TM})$$
$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \nabla_\mathrm{X}\mathrm{Y} - \nabla_\mathrm{Y}\mathrm{X} - [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$$

pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$.

La connexion ∇ *est dite sans torsion si* $\mathrm{T} = 0$.

Remarque 1.2.1

1. T *est un champ de tenseur de type* $(1, 2)$
2. $\mathrm{T}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = -\mathrm{T}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ *pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *(*T *est antisymétrique)*
3. *La connexion* ∇ *est sans torsion ssi pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *on a :*

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \nabla_\mathrm{X}\mathrm{Y} - \nabla_\mathrm{Y}\mathrm{X}$$

4. *Pour tout* $x \in \mathrm{M}$, *le tenseur de torsion* T *induit une application bilinéaire*

$$\mathrm{T}_x : \mathrm{T}_x\mathrm{M} \times \mathrm{T}_x\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{M}$$
$$(v, w) \longmapsto \mathrm{T}_x(v, w) = (\nabla_\mathrm{X}\mathrm{Y})_x - (\nabla_\mathrm{Y}\mathrm{X})_x - [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_x$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, *telque* $\mathrm{X}_x = v$ *et* $\mathrm{Y}_x = w$ *(indépendament du choix de* X *et* Y *).*

Théorème 1.2.1 *(fondamentale).*
Soit ∇ *une connexion linéaire sur* M. *Si* $p \in \mathrm{M}$ *tel que* $\mathrm{T}_p \approxeq 0$, *alors si et seulement si il existe une carte* $(\mathrm{U}, x^1, ..., x^n)$ *telle que pour tout* $i, j, k = 1, ..., n$, *on a*

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0 \qquad (1.8)$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1.2.2 Connexion de Levi-Civita

Théorème 1.2.2 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, l'application*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM),$$

définie par la formule de Kozul,

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y))$$
$$+g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]), \qquad (1.9)$$

est une connexion linéaire sur M*, appelée connexion de Levi-Civita.*

Preuve:
Pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$ on a,

1. • $2g(\nabla_{fX} Y, Z) = fX(g(Y, Z)) + Y(g(Z, fX)) - Z(g(fX, Y))$
$$+g(Z, [fX, Y]) + g(Y, [Z, fX]) - g(fX, [Y, Z]),$$
$$= fX(g(Y, Z)) + Y(f)(g(Z, X)) + fY(g(Z, X))$$
$$-Z(f)g(X, Y) - fZ(g(X, Y)) - Y(f)g(Z, X)$$
$$+fg(Z, [X, Y]) + Z(f)g(Y, X) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z])$$
$$= fX(g(Y, Z)) + fY(g(Z, X)) - fZ(g(X, Y))$$
$$+fg(Z, [X, Y]) + fg(Y, [Z, X]) - fg(X, [Y, Z])$$
$$= 2fg(\nabla_X Y, Z)$$
$$= 2g(f\nabla_X Y, Z),$$

   et comme g est non dégénérée on a, $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

2. • $2g(\nabla_{X+W} Y, Z) = (X + W)(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X + W)) - Z(g(X + W, Y))$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$+g(\mathrm{Z},[\mathrm{X}+\mathrm{W},\mathrm{Y}])+g(\mathrm{Y},[\mathrm{Z},\mathrm{X}+\mathrm{W}])-g(\mathrm{X}+\mathrm{W},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}])$$

$$=\mathrm{X}(g(\mathrm{Y},\mathrm{Z}))+\mathrm{Y}(g(\mathrm{Z},\mathrm{X}))-\mathrm{Z}(g(\mathrm{X},\mathrm{Y}))$$

$$+g(\mathrm{Z},[\mathrm{X},\mathrm{Y}])+g(\mathrm{Y},[\mathrm{Z},\mathrm{X}])-g(\mathrm{X},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}])$$

$$+\mathrm{W}(g(\mathrm{Y},\mathrm{Z}))+\mathrm{Y}(g(\mathrm{Z},\mathrm{W}))-\mathrm{Z}(g(\mathrm{W},\mathrm{Y}))$$

$$+g(\mathrm{Z},[\mathrm{W},\mathrm{Y}])+g(\mathrm{Y},[\mathrm{Z},\mathrm{W}])-g(\mathrm{W},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}])$$

$$=2g(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y},\mathrm{Z})+2g(\nabla_{\mathrm{W}}\mathrm{Y},\mathrm{Z})$$

$$=2g(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}+\nabla_{\mathrm{W}}\mathrm{Y},\mathrm{Z})$$

d'où, $\nabla_{\mathrm{X}+\mathrm{W}}\mathrm{Y}=\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}+\nabla_{\mathrm{W}}\mathrm{Y}$

3. • $2g(\nabla_{\mathrm{X}}f\mathrm{Y},\mathrm{Z})=\mathrm{X}(g(f\mathrm{Y},\mathrm{Z}))+f\mathrm{Y}(g(\mathrm{Z},\mathrm{X}))-\mathrm{Z}(g(\mathrm{X},f\mathrm{Y}))$

$$+g(\mathrm{Z},[\mathrm{X},f\mathrm{Y}])+g(f\mathrm{Y},[Z,\mathrm{X}])-g(\mathrm{X},[f\mathrm{Y},\mathrm{Z}])$$

$$=\mathrm{X}(f)g(\mathrm{Y},\mathrm{Z})+f\mathrm{X}(g(\mathrm{Y},\mathrm{Z}))+f\mathrm{Y}(g(\mathrm{Z},\mathrm{X}))$$

$$-\mathrm{Z}(f)g(\mathrm{X},\mathrm{Y})-f\mathrm{Z}(g(\mathrm{X},\mathrm{Y}))+\mathrm{X}(f)g(\mathrm{Z},\mathrm{Y})$$

$$+fg(\mathrm{Z},[\mathrm{X},\mathrm{Y}])+fg(\mathrm{Y},[\mathrm{Z},\mathrm{X}])+\mathrm{Z}(f)g(\mathrm{X},\mathrm{Y})-fg(\mathrm{X},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}])$$

$$=2\mathrm{X}(f)g(\mathrm{Y},\mathrm{Z})+f\mathrm{X}(g(\mathrm{Y},\mathrm{Z}))+f\mathrm{Y}(g(\mathrm{Z},\mathrm{X}))-f\mathrm{Z}(g(\mathrm{X},\mathrm{Y}))$$

$$+fg(\mathrm{Z},[\mathrm{X},\mathrm{Y}])+fg(\mathrm{Y},[\mathrm{Z},\mathrm{X}])-fg(\mathrm{X},[\mathrm{Y},\mathrm{Z}])$$

$$=2\mathrm{X}(f)g(\mathrm{Y},\mathrm{Z})+2fg(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y},\mathrm{Z})$$

$$=2g(\mathrm{X}(f)\mathrm{Y}+f\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y},\mathrm{Z}),$$

d'où, $\nabla_{\mathrm{X}}f\mathrm{Y}=\mathrm{X}(f)\mathrm{Y}+f\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}$.

4. De la même manière on obtient, $\nabla_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})=\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}+\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z}$. Donc ∇ est une connexion linéaire sur M.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Théorème 1.2.3 *[5] (Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne)*
Si (M, g) *est une variété Riemannienne, alors la connexion de Levi-Civita est l'unique connexion linéaire sans torsion et compatible avec* g.

Preuve: On a

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) - g(\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{X}, \mathrm{Z}) &= \frac{1}{2}\{g(\mathrm{Z}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) - g(\mathrm{Z}, [\mathrm{Y}, \mathrm{X}])\} \\ &= g(\mathrm{Z}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]), \end{aligned}$$

d'où la connexion de Levi-Civita est sans torsion. et,

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + g(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z}, \mathrm{Y}) &= \frac{1}{2}\{\mathrm{X}(g(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})) + \mathrm{X}(g(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}))\} \\ &= \mathrm{X}(g(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})), \end{aligned}$$

ce là prouve que la connexion de Levi-Civita est compatible avec la métrique g sur M. Comme g est non dégénérée, la relation (1.9) détermine complètement la connexion ∇, ce qui donne l'unicité.

Wondershare PDFelement

Remarque 1.2.2 *Dans un système de coordonnées* (x^i) *sur* M, ∇ *est complètement définie par les symboles de Christoffel* Γ_{ij}^k *définis par :*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

En effet,
si $\mathrm{X} = \mathrm{X}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ *alors*

$$\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y} = \mathrm{X}^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\mathrm{Y}^k + \Gamma_{ij}^k \mathrm{Y}^j\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \ .$$

Proposition 1.2.1 *Soient* (M^m, g) *une variété riemannienne de dimension* m *et* ∇ *sa connexion de Levi-Civita associée. Pour toute carte locale* (U, φ) *de* M *avec coordonnées* $(x^1, ..., x^m)$ *et base locale associée* $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m})$, *les symboles de Christoffel* Γ_{ij}^k *sont donns par:*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^m g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

où (g_{ij}) représente la matrice des coefficients de la métrique et (g^{kl}) sa matrice inverse. On a également la relation :

$$\sum_{k=1}^{m} g_{lk}\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

Les coefficients $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ sont les composantes locales de la métrique g dans la carte (U, φ).

Comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour tout $i, j = 1, ..., m$, où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ désigne les champs de base locaux, la connexion de Levi-Civita satisfait :

$$2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) = \partial_i(g_{jl}) + \partial_j(g_{il}) - \partial_l(g_{ij})$$

En exprimant $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ dans la base locale :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s}\partial_s$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l) &= 2\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} \\ &= \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \end{aligned}$$

Ce qui donne la relation fondamentale :

$$\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \tag{1.1}$$

Pour isoler Γ_{ij}^{k}, multiplions les deux membres par g^{lk} et sommons sur l :

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} \Gamma_{ij}^{s} g_{sl} g^{lk} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{lk}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

En utilisant la relation $\sum_{l=1}^{m} g_{sl}g^{lk} = \delta_s^k$ où δ_s^k est le symbole de Kronecker, on obtient finalement:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Exemple 1.2.1 *On considère la paramétrisation de la sphère* $\mathbb{S}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|u\| = 1\}$ *et soit la projection stéréographique,* $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *donnée par*

$$\psi(x) = (\frac{2x^1}{\|x\|^2+1}, ..., \frac{2x^n}{\|x\|^2+1}, \frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Les composantes du tenseur métrique relativement à ψ *sont*

$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1+\|x\|^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

En effet,
en utilisant la proposition 1.2.1

$$\Gamma^i_{ii}(x) = \Gamma^j_{ij}(x) = \Gamma^i_{ji}(x) = -\Gamma^i_{jj}(x) = \frac{-2x^i}{1+\|x\|^2},$$

$$\Gamma^k_{ij}(x) = 0, \qquad \text{pour } i, j, k = 1, ..., n. \text{ distincts.}$$

Théorème 1.2.4 *(fondamental).*
Soient (M, g) *une variété Riemannienne et* $p \in \mathrm{M}$, *alors il existe une carte* $(\mathrm{U}, x^1, ..., x^n)$ *telle que*

$$\Gamma^k_{ij}(p) = 0 \tag{1.10}$$

$$g(\partial_i, \partial_j)(p) = \delta_{ij} \tag{1.11}$$

pour tout $i, j, k = 1, ..., n$.

Wondershare PDFelement

1.3 Courbures

1.3.1 Tenseur de courbures.

Definition 1.3.1 *Soit* M *une variété différentiable muni d'une connexion linéaire* ∇.
le tenseur de courbure définie par, $R : \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{TM}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{TM})$, *associé à* ∇, *par :*

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{V} = \nabla_{\mathrm{X}}\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{V} - \nabla_{\mathrm{Y}}\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{V} - \nabla_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\mathrm{V}.$$

Pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{W} \in \Gamma(\mathrm{TM})$.

Propriétés 1.3.1 .

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1. *La courbure* R *est* $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{M})$-3 *linéaire.*

2. $\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{V} = -\mathrm{R}(\mathrm{Y},\mathrm{X})\mathrm{V}$ *pour tout* $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *et* $\mathrm{V} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *(antisymétrie).*

Definition 1.3.2 *Sur une variété Riemannienne* (M, g)*, le tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita est appelé tenseur de courbure Riemannienne.*
le tenseur de courbure Riemannienne s'exprime en fonction des coefficients de Christoffel:

$$\mathrm{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{R}^l_{ijk}\partial_l$$

$$\mathrm{R}^l_{ijk} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \sum_{m=1}^{n} \{\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}\},$$

où, $(\partial_i)_{i=1..n}$ *est une base locale de champs de vecteurs sur* M.

Wondershare PDFelement

Proposition 1.3.1 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. Le tenseur de courbure Riemannienne* R *a les propriétés suivantes:*

1. R *est un champ de tenseurs de type* $(1;3)$.

2. $g(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z},\mathrm{W}) = -g(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{W},\mathrm{Z})$.

3. $g(\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z},\mathrm{W}) = g(\mathrm{R}(\mathrm{Z},\mathrm{W})\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

4. R *vérifie l'identité de Bianchi algébrique*
$$\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Z} + \mathrm{R}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})\mathrm{X} + \mathrm{R}(\mathrm{Z},\mathrm{X})\mathrm{Y} = 0.$$

5. R *vérifie l'identité de Bianchi différentielle*
$$(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{R})(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) + (\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{R})(\mathrm{Z},\mathrm{X}) + (\nabla_{\mathrm{Z}}\mathrm{R})(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 0.$$

$\forall\ \mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z},\mathrm{W} \in \Gamma(\mathrm{TM})$.

1.3.2 Courbure sectionnelle

Definition 1.3.3 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* $n \geq 2$ *et* P *un* 2*-plan de* $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *de base* $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$*. On appelle courbure sectionnelle en* x *de* P

$$\mathrm{K}_x(\mathrm{P}) = \frac{g(\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X}))}{g(\mathrm{X}, \mathrm{X})g(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}) - g(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^2}$$

Remarquons que dans la définition précédente, on peut remplacer X par $\lambda\mathrm{X}$ pour $\lambda \neq 0$ et Y par $\mathrm{Y} - g(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{X}$. On peut donc supposer que $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$ est une base orthonormale. Dans ce cas

$$\mathrm{K}_x(\mathrm{P}) = g(\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X}))$$

On vérifie que $\mathrm{K}_x(\mathrm{P})$ ne dépend pas de la base orthonormée de P.
En effet,
Si $\{\mathrm{Z}, \mathrm{T}\}$ est une autre base orthonormale, il existe $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a^2+b^2 = 1$ avec

$$\mathrm{Z} = a\mathrm{X} + b\mathrm{Y}, \qquad \mathrm{T} = -b\mathrm{X} + a\mathrm{Y}.$$

Une simple vérification montre que

$$g(\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = g(\mathrm{R}(\mathrm{Z}, \mathrm{T})\mathrm{T}, \mathrm{Z}).$$

Definition 1.3.4 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, de dimension* n*. On dit que* M *est une variété à courbure constante s'il existe une constante* $k \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in \mathrm{M}$ *et tout* 2*-plan* P *de* $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$*, on a*

$$\mathrm{K}_x(\mathrm{P}) = k.$$

Proposition 1.3.2 *Une variété Riemannienne* (M, g) *est de courbure sectionnelle constante* k *si et seulement si le tenseur de courbure vérifie l'équation:*

$$R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z} = k(g(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})\mathrm{X} - g(\mathrm{X}, \mathrm{Z})\mathrm{Y})$$

pour tout X, Y *et* $\mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*.*

Corollaire 1.3.1 *Si* (M^m, g) *est une variété Riemannienne de courbure sectionnelle constante* k*, alors pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *on a*

1. *Ricci*$(\mathrm{X}) = (m-1)k\mathrm{X}$.
2. *Ric*$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (m-1)kg(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.
3. $S = m(m-1)k$.

Exemple 1.3.1 *L'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$ *muni du repère canonique* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$*, du produit scalaire euclidien* $g = g_{ij}dx_i \otimes dx_j$*, où* $g_{ij} = \delta_{ij}$*. On vérifie immédiatement que* $\Gamma_{ij}^k = 0, R_{ijk}^l = 0$ *donc* $R = 0$*. En particulier, la courbure sectionnelle de* $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *est nulle.*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1.3.3 Courbure de Ricci

Definition 1.3.5 *La courbure de Ricci d'une variété Riemannienne* (M^m, g) *de dimension* m *est un tenseur de type* $(0,2)$ *défini par*

$$\begin{aligned} Ric(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= trace R(*,\mathrm{X})\mathrm{Y} \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,\mathrm{X})\mathrm{Y}, e_i), \end{aligned}$$

pour tout $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*, où* (e_i) *est une base ortnonormée locale sur* M*, et*

$$\begin{array}{rcl} R(*,\mathrm{X})\mathrm{Y} : \Gamma(\mathrm{TM}) & \to & \Gamma(\mathrm{TM}) \\ \mathrm{Z} & \mapsto & R(\mathrm{Z},\mathrm{X})\mathrm{Y} \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} Ric : \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{TM}) & \to & \mathrm{C}^{\infty}(M) \\ (\mathrm{X},\mathrm{Y}) & \mapsto & Ric(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \end{array}$$

La courbure de Ricci, Ric est une forme bilinéaire symétrique, en effet

$$\begin{aligned} Ric(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,\mathrm{X})\mathrm{Y}, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(\mathrm{Y},e_i)e_i, \mathrm{X}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(R(e_i,\mathrm{Y})\mathrm{X}, e_i) \\ &= Ric(\mathrm{Y},\mathrm{X}) \end{aligned}$$

Relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{i=1..m}$*, les composantes du tenseur de Ricci sont donnée par*

$$\begin{aligned} Ric_{ij} &= Ric(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= trace R(*, \frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$= g^{kl} g(R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^l})$$

$$= g^{kl} R^s_{kij} g_{ls}$$

$$= \delta_{ks} R^s_{kij}$$

$$= R^k_{kij}$$

Definition 1.3.6 *Le tenseur de Ricci d'une variété Riemannienne* (M^m, g), *est un tenseur de type* $(1,1)$, *défini par*

$$Ricci(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} R(\mathrm{X}, e_i)e_i$$

pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, *où* (e_i) *est une base ortnonormée locale sur* M.

Remarque 1.3.1 *Soit* (M^m, g) *une variété Riemannienne, de dimension* m. *Pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *on a*

$$Ric(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = g(Ricci(\mathrm{X}), \mathrm{Y})$$

Wondershare PDFelement

1.3.4 Courbure scalaire

Definition 1.3.7 *On appelle courbure scalaire d'une variété Riemannienne* (M^m, g) *la fonction définie sur* M *par*

$$S = trace_g Ric = \sum_{i,j=1}^{m} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

où (e_i) *est une base orthonormée locale sur* M.

1.4 Opérateurs sur une variété Riemannienne

1.4.1 L'opérateur gradient

Definition 1.4.1 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, on définit l'opérateur gradient par*

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} : \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) &\longrightarrow \Gamma(\mathrm{TM}) \\ f &\longmapsto \mathrm{grad}\, f = \sharp df \end{aligned}$$

où df *est la différentielle de la fonction* f.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Proposition 1.4.1 *(Expression du gradient en coordonneés locales)*
Soit (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* m*,* (U, φ) *une carte sur* M *avec les champs de base associée* $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}$*, alors pour tout* $f \in C^\infty(M)$ *on a*

$$(grad\ f)|_U = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{1.12}$$

Preuve :
On applique directement la définition de l'application $\sharp$ (voir proposition 1.1.1), et la définition de la différentielle de $f \in C^\infty(M)$ relativement à la carte (U, φ) sur M, on a

$$df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial x^i$$

$$\sharp df = \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} (df)^i \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

où $dx^1, ..., dx^m$ est la base duale.
De la proposition 1.1.1, on déduit

Proposition 1.4.2 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. Pour tout champ de vecteur* $X \in \Gamma(TM)$ *et tout fonction* $f \in C^\infty(M)$*, on a*

$$df(X) = X(f) = g(grad\ f, X) \tag{1.13}$$

Propriétés 1.4.1 .
Soit (M, g) *une variété Riemannienne, pour tout* $f, h \in C^\infty(M)$ *on a*

1. $\text{grad}(f + h) = \text{grad}\ f + \text{grad}\ h$
2. $\text{grad}(fh) = h\ \text{grad}\ f + f\ \text{grad}\ h$
3. $(\text{grad}\ f)(h) = (\text{grad}\ h)(f)$

Preuve :
Soit $f, h \in C^\infty(M)$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$ on a:

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1. $g(\text{grad}(f+h),\mathrm{X}) = \mathrm{X}(f+h)$
   $= \mathrm{X}(f) + \mathrm{X}(h)$
   $= g(\text{grad } f, \mathrm{X}) + g(\text{grad } h, \mathrm{X})$
   $= g(\text{grad } f + \text{grad } h, \mathrm{X})$

2. $g(\text{grad}(fh),\mathrm{X}) = \mathrm{X}(fh)$
   $= h\mathrm{X}(f) + f\mathrm{X}(h)$
   $= hg(\text{grad } f, \mathrm{X}) + fg(\text{grad } h, \mathrm{X})$
   $= g(h \text{ grad } f + h \text{ grad } f, \mathrm{X})$

3. $(\text{grad } f)(h)) = g(\text{grad } h, \text{grad } f)$

$$= g(\text{grad } f, \text{grad } h)$$

$$= (\text{grad } h)(f)$$

1.4.2 L'opérateurs divergence

a)-Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne (M, g), on a

$$\begin{aligned} \nabla\mathrm{X} : \Gamma(\mathrm{TM}) &\longrightarrow \Gamma(\mathrm{TM}) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z \mathrm{X} \end{aligned} \tag{1.14}$$

est une application $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ linéaire ($\nabla\mathrm{X}$ est un tenseur de type$(1,1)$). si $x \in \mathrm{M}$, alors

$$\begin{aligned} (\nabla\mathrm{X}) : \mathrm{T}_x\mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{M} \\ v &\longmapsto (\nabla_v \mathrm{X})_x \end{aligned} \tag{1.15}$$

est une application linéaire d'espace vectoriel.

Definition 1.4.2 *Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, notée div X est une fonction sur M définie par*

$$\text{div } \mathrm{X} = \text{tr}_g(\nabla\mathrm{X})$$

pour tout $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(\text{div } \mathrm{X})(x) = \text{tr}_g((\nabla\mathrm{X})_x)$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

En coordoonée locale (voir la Remarque 1.5.1), on a

$$\begin{aligned}\text{div } \mathrm{X} &= dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X}) \\ &= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X}, \frac{\partial}{\partial x^j})\end{aligned}$$

Si (e_i) *est une base orthonormée locale sur* M *on a*

$$\text{div } \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} \mathrm{X}, e_i)$$

b)-Divergence d'une forme differentielle

Soit $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ une 1-forme sur une variété Riemannienne (M, g), on a

$$\begin{aligned}\nabla\omega : \Gamma(\mathrm{TM}) &\longrightarrow \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) \\ Z &\longmapsto \nabla_Z \omega\end{aligned} \qquad (1.16)$$

est une application $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ linéaire ($\nabla\omega$ est un tenseur de type $(0, 2)$).
si $x \in \mathrm{M}$, alors

$$\begin{aligned}(\nabla\omega)_x : \mathrm{T}_x\mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{T}_x^*\mathrm{M} \\ v &\longmapsto (\nabla_v \omega)_x\end{aligned} \qquad (1.17)$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Definition 1.4.3 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. La divergence d'une 1-forme* $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$, *notée div*$(\omega)$ *est une fonction sur* M *définie par*

$$\text{div}(\omega) = \text{tr}_g(\nabla\omega)$$

pour tout $x \in \mathrm{M}$, *on a*

$$(\text{div}(\omega))(x) = \text{tr}_g((\nabla\omega)_x)$$

De la Remarque 1.3.1, on obtient localement

$$\begin{aligned}\text{div } \omega &= \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \omega)(\frac{\partial}{\partial x^j})\end{aligned}$$

Cas d'un tenseur de type (0,p) *Si* T *est champ de tenseur de type (0,r), on défini sa divergence par:*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$(\text{div } T)(X_1, ..., X_r) = \text{tr}_g(Z \longmapsto (\nabla_Z T)(X_1, ..., X_r))$$

c)-Expression locale de la divergence

Proposition 1.4.3 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* m*, pour tout* $X \in \Gamma(TM)$ *on a localement*

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^{m} (\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} X^j \Gamma_{ij}^i)$$

où $X = \sum_{i=1}^{m} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Preuve: Localement, on

$$X = X^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{et} \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \tfrac{\partial}{\partial x^k},$$

d'où,

$$\begin{aligned} \text{div } X &= \sum_{i=1}^{m} dx_i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} X^j \frac{\partial}{\partial X^j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} dx^i(\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} (\frac{\partial X^j}{\partial x^i} + X^j \Gamma_{ij}^i) \end{aligned}$$

Propriétés 1.4.2 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, pour tous* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $f \in C^\infty(M)$ *on a*

1. $\text{div}(X + Y) = \text{div } X + \text{div } Y$
2. $\text{div}(fX) = f \text{ div } X + X(f)$

Preuve:
On applique directement la définition du divergence, soit (e_i) une base orthonormée locale sur M, on a

Supprimer filigrane
Wondershare PDFelement

$$
\begin{aligned}
1)\ \mathrm{div}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) &= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i}(\mathrm{X}), e_i) + \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i}(\mathrm{Y}), e_i) \\
&= \mathrm{div}\ \mathrm{X} + \mathrm{div}\ \mathrm{Y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\ \mathrm{div}(f\mathrm{X}) &= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{e_i} f(\mathrm{X}), e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g(e_i(f)\mathrm{X} + f\nabla_{e_i}\mathrm{X}, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} e_i(f) g(\mathrm{X}, e_i) + \sum_{i=1}^{m} f g(\nabla_{e_i}\mathrm{X}, e_i) \\
&= \mathrm{X}(f) + f\ \mathrm{div}\ \mathrm{X}
\end{aligned}
$$

Lemme 1.4.1 *Sur une variété Riemennienne* (M, g)*.Relativement à une carte* (U, x^i)*, on a*

$$
\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{\det(g_{ij})}) = \sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{l=1}^{m} \Gamma_{lk}^{l} \qquad (1.18)
$$

Proposition 1.4.4 *(Deuxième expression de la divergence en coordonnées locales).*
Soit (M, g) *une variété Riemannienne, pour tout* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *on a*

$$
\mathrm{div}\ \mathrm{X} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{X}^k)
$$

Preuve: D'aprés la proposition de premiére expression de la divergence en coordonnées locales nous avons,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \mathrm{X} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{X}^j \Gamma_{ij}^{i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{X}^j \sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ij}^{i}
\end{aligned}
$$

en utilisant le Lemme 1.4.1, avec $G = (g_{ij})$, alors un calcul direct donne,

$$
\mathrm{div}\ \mathrm{X} = \frac{1}{\sqrt{\det G}}(\sqrt{\det G} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^i} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}^j \sqrt{\det G} \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{ij}^{i})
$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$= \frac{1}{\sqrt{\det G}}(\sqrt{\det G}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{X}^j\frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{\det G})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det G}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\det G}\,\mathrm{X}^i)$$

en utilisant la convention d'Einstein on a

$$\mathrm{div(X)} = \frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{\det G}\,\mathrm{X}^i)$$

1.4.3 La Hessienne d'une fonction

Definition 1.4.4 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne et* $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$*, La Hessienne de la fonction* f *notée* Hess_f*, est une application* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$*-bilinéaire, définie par:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_f : \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\mathrm{TM}) &\longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})\\ (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &\longmapsto g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}(f), \mathrm{Y})\end{aligned}$$

Wondershare PDFelement

Proposition 1.4.5 *Soient* (M, g) *une variété Riemannienne et* $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$*, La Hessienne* Hess_f*, est une application symétrique.*

Preuve: En tenant compte que le tenseur de torsion associé à la métrique g est nul, on obtient:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}_f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) &= g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}(f), \mathrm{Y})\\ &= \mathrm{X}(g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{Y})) + g(\mathrm{grad}(f), \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})\\ &= \mathrm{X}(\mathrm{Y}(f)) - \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}(f)\\ &= [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] + \mathrm{Y}(\mathrm{X}(f)) - \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}(f)\\ &= \mathrm{Y}(\mathrm{X}(f)) - \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}(f)\\ &= \mathrm{Y}g(\mathrm{grad}(f), \mathrm{X}) - g(\mathrm{grad}(f), \nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{X})\\ &= g(\nabla_{\mathrm{Y}}\,\mathrm{grad}(f), \mathrm{X})\\ &= \mathrm{Hess}_f(\mathrm{Y}, \mathrm{X})\end{aligned}$$

1.4.4 L'opérateur Laplacien

Definition 1.4.5 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, on définit l'opérateur Laplacien noté* $\triangle$*, sur* M *par*

$$\begin{aligned}\triangle : \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M}) &\longrightarrow \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})\\ f &\longmapsto \triangle(f) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\ f) = \mathrm{trace}_g(\mathrm{Hess}_f)\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

appelé aussi opérateur de Laplace-Beltrami.

Propriétés 1.4.3 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne, pour tout* $f, h \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ *on a*

1. $\triangle(f+h) = \triangle(f) + \triangle(h)$
2. $\triangle(fh) = h\triangle(f) + f\triangle(h) + 2g(\text{grad } f, \text{grad } h)$

Preuve: Soit $f, h \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, en utilisant les propriétés des opérateurs *grad* et *div* et le fait que $\mathrm{X}(f) = g(\text{grad}(f), \mathrm{X})$, on obtient

$$\begin{aligned} 1)\ \triangle(f+h) &= \text{div}(\text{grad}(f+h)) \\ &= \text{div}(\text{grad } f + \text{grad } h) \\ &= \text{div}(\text{grad } f) + \text{div}(\text{grad } h) \\ &= \triangle(f) + \triangle(h) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \triangle(fg) &= \text{div}(\text{grad}(fh)) \\ &= \text{div}(f \text{ grad } h + h \text{ grad } f) \\ &= \text{div}(f \text{ grad } h) + \text{div}(h \text{ grad } f) \\ &= f \text{ div}(\text{grad } h) + (\text{grad } h)(f) + h \text{ div}(\text{grad } f) + (\text{grad } f)(h) \\ &= f\triangle(h) + h\triangle(f) + 2g(\text{grad } f, \text{grad } h) \end{aligned}$$

Proposition 1.4.6 *(Première expression du Laplacien en coordonnées locales).*
Soit (M, g) *une variété Riemannienne, pour tout* $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ *on a*

$$\triangle(f) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \tag{1.19}$$

Preuve: Soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, alors
$\triangle(f) = \text{div}(\text{grad } f)$
$= g^{ij} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^j})$
$= g^{ij}(\frac{\partial}{\partial x^i} g(\text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^j}) - g(\text{grad } f, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}))$
$= g^{ij}(\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j}) - \Gamma^k_{ij} g(\text{grad } f, \frac{\partial}{\partial x^k}))$
$= g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k})$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Exemple 1.4.1 *Soit $\mathbb{R}^m$ muni du produit scalaire standard g_0,$(g_{ij} = \delta_{ij})$, alors pour tous fonction différentiable f sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathrm{X} = (\mathrm{X}^1, ..., \mathrm{X}^m)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$ on a*

1. $$\begin{aligned} \text{grad } f &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^m}\right) \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} \text{div } \mathrm{X} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial \mathrm{X}^1}{\partial x^1} + ... + \frac{\partial \mathrm{X}^m}{\partial x^m} \end{aligned}$$

3. $$\triangle(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

1.4.5 Théorème de divergence

Definition 1.4.6 *Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimensionn, On appelle mesure de volume Riemannienne, notée v^{M} ou v^g,la mesure définie localement dans un repère par*

Wondershare PDFelement

$$v^{\mathrm{M}} = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$$

Exemple 1.4.2 *On considére la variété R^2 muni des coordonnées cartésiennes (x, y) on a*

$$g_0 = dx^2 + dy^2$$

et

$$v^{g_0} = \sqrt{\det(g_{ij})} dx \wedge dy = dx \wedge dy$$

On considére la sphère S^2 muni de la métrique

$$g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

alors,

$$v^g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, d\theta \wedge d\varphi = |\sin\theta|\, d\theta \wedge d\varphi$$

Supprimer filigrane
Wondershare PDFelement

Proposition 1.4.7 *(Théorème de divergence [5]). Soit D un domaine compact à bord dans une variété Riemannienne (M, g). Soit ω 1-forme et X un champ de vecteurs, définies sur un voisinage inclue dans D. Alors*

$$\int_D (\mathrm{div}\ \omega) v^{\mathrm{M}} = \int_{\partial D} \omega(\boldsymbol{n}) v^{\partial D} \qquad et \qquad \int_D (\mathrm{div}\ \mathrm{X}) v^{\mathrm{M}} = \int_{\partial D} g(\mathrm{X}, \boldsymbol{n}) v^{\partial D},$$

où ∂D est le bord de D et $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(x)$ est le vecteur unitaire normale à ∂D.

Corollaire 1.4.1 *Pour tout ω une 1-forme et X un champ de vecteurs à supports compact dans un domaine D, alors*

$$\int_D (\mathrm{div}\ \omega) v^{\mathrm{M}} = 0 \qquad et \qquad \int_D (\mathrm{div}\ \mathrm{X}) v^{\mathrm{M}} = 0.$$

1.4.6 Fibré tangent inverse

Definition 1.4.7 *Soit $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ une application de clasee $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ entre deux variétés riemanniennes, le fibré tangent inverse est définie par*

$$\varphi^{-1}\mathrm{TN} = \{(x, v) | x \in \mathrm{M}, v \in \mathrm{T}_{\varphi(x)}\mathrm{N}\}$$

une section sur $\varphi^{-1}\mathrm{TN}$ est une application de classe C^∞, $\mathrm{V} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{TN}$ tel que

$$\mathrm{V}(x) \in \mathrm{T}_{\varphi(x)}\mathrm{N}, \quad x \in \mathrm{M}$$

Notons par $\Gamma(\varphi^{-1}\mathrm{TN})$ l'ensemble des sections sur $\varphi^{-1}\mathrm{TN}$.

Connexion induite sur le fibré tangent inverse

Definition 1.4.8 *Soient M et N deux variétés différentiables, $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ une application de classe C^∞ et ∇^{N} une connexion linéaire sur N. On définit la connexion de Pull-back sur le fibré tangent inverse $\varphi^{-1}\mathrm{TN}$ par*

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi : \Gamma(\mathrm{TM}) \times \Gamma(\varphi^{-1}\mathrm{TN}) &\longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}\mathrm{TN}) \\ \nabla^\varphi_{\mathrm{X}} V &= \nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{X}} \tilde{V} \end{aligned} \tag{1.25}$$

pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $V \in \Gamma(\varphi^{-1}\mathrm{TN})$, $x \in \mathrm{M}$ avec $\tilde{V} \in \Gamma(\mathrm{TN})$ tel que $\tilde{V} \circ\varphi = V$ au voisinage de x.

Remarque 1.4.1 *La relation 1.25 est indépendante du choix de $\tilde{V}$.*
En effet: soient $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m})$ une base locale de $\Gamma(\mathrm{TM})$, $(\frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n})$ une base locale de $\Gamma(\mathrm{TN})$ et $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ base locale de $\Gamma(\mathrm{TN})$,
pour $\mathrm{X} = \mathrm{X}^i \partial_i \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $V = V^\beta(\sigma_\beta \circ \varphi) \in \varphi^{-1}\mathrm{TN}$, $\tilde{V} = \tilde{V}^\beta \sigma_\beta \in \Gamma(\mathrm{TN})$ et $x \in \mathrm{M}$ on a

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$(\nabla^{\varphi}_{X}V)_x = (\nabla_{d x\varphi(X x)}\tilde{V})_{\varphi(x)}$
$= X^i_x \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}|_x (\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \tilde{V}^\beta \sigma_\beta)\varphi(x)$
$= X^i_x \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}|_x \left\{ \dfrac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha}\sigma_\beta + \tilde{V}^\beta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sigma_\gamma \right\} |_{\varphi(x)}$
où, $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ *sont des fonctions différentiables sur* N*, définient par*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\sigma_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\sigma_\gamma$$

Remarquons que $\tilde{V}^\beta_{\varphi(x)} = V^\beta_x$ *et* $\frac{\partial V^\beta}{\partial x^i}|_x = \frac{\partial}{\partial x^i}(\tilde{V}^\beta \circ \varphi)|_x = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}|_x \frac{\partial \tilde{V}^\beta}{\partial y^\alpha}|_{\varphi(x)}$*, pour tout* $\beta = 1, ..., k$*, d'où*

$$(\nabla^{\varphi}_{X}V) = X^i\left(\frac{\partial V^\gamma}{\partial x^i} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}V^\beta(\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi)\right)(\sigma_\gamma \circ \varphi)$$

Exemple 1.4.3 *Soient* M, N *deux variétés différentiables, et* $\varphi : M \longrightarrow N$ *une application de classe* C^∞*. Si* ∇^N *est une connesion linéaire sur le fibré tangent* (TN, π_N, N) *alors*

$$\varphi^{-1}TN = \{(x, v) \mid x \in M, v \in T_{\varphi(x)}N\}$$
$$= \bigcup_{x\in M} x \times T_{\varphi(x)}N$$

et

$$\Gamma(\varphi^{-1}TN) = \{V : M \longrightarrow TN \mid \forall x \in M, V_x \in T_{\varphi(x)}N\}$$

Localement pour tout $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM)$ *et* $\varphi^\beta = y^\beta \circ \varphi$*, on a*

$$d\varphi(x) = X^i \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\beta} \circ \varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

et

$$\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\Gamma^{\gamma^N}_{\alpha\beta}\circ\varphi\right\}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi$$

En effet:

$\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi(\dfrac{\partial}{\partial x^j}) = \nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \dfrac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\dfrac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi$
$= \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial x^i \partial x^j}\dfrac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi + \dfrac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\dfrac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi$

$$= \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\left(\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right)\circ\varphi$$
$$= \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^\beta}\circ\varphi + \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i}\Gamma^{\gamma^N}_{\alpha\beta}\circ\varphi\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\circ\varphi$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Remarque 1.4.2 *Soient* M, N *deux variétés différentiables,* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*,* $\mathrm{V}, \mathrm{W} \in \Gamma(\mathrm{TN})$ *et* $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *une application différentiable, Si* X *et* V *(resp* Y *et* W*) sont* φ*-conjugué (i.e* $d\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{V} \circ \varphi$ *et* $d\varphi(\mathrm{Y}) = \mathrm{W} \circ \varphi$*) ,alors*

$$\nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}} d\varphi(\mathrm{Y}) = (\nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{V}} \mathrm{W}) \circ \varphi.$$

Proposition 1.4.8 *Soit* $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *une application différentiable.*
Si ∇^{N} *une connexion linéaire compatible avec une métrique* h *sur* N*, alors la connexion linéaire* ∇^{φ} *est compatible avec la métrique* h_{φ} *sur* $\varphi^{-1}\mathrm{TN}$*. C'est à dire, pour tous* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *et* $\mathrm{V}, \mathrm{W} \in \Gamma(\varphi^{-1}\mathrm{TN})$ *on a*

$$\mathrm{X}(h_{\varphi}(\mathrm{V}, \mathrm{W})) = h_{\varphi}(\nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}} \mathrm{V}, \mathrm{W}) + h_{\varphi}(\mathrm{V}, \nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}} \mathrm{W})$$

Preuve:
Soient $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $\mathrm{V}, \mathrm{W} \in \Gamma(\varphi^{-1}\mathrm{TN})$ et $\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{V}}, \tilde{\mathrm{W}} \in \Gamma(\mathrm{TN})$, tels que

$$d\varphi(\mathrm{X}) = \tilde{\mathrm{X}} \circ \varphi \quad , \quad \tilde{\mathrm{V}} \circ \varphi = \mathrm{V} \quad , \quad \tilde{\mathrm{W}} \circ \varphi = \mathrm{W}$$

alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{X}(h_{\varphi}(\mathrm{V}, \mathrm{W})) = \mathrm{X}(h(\tilde{V}, \tilde{W}) \circ \varphi) & \\ &= \tilde{\mathrm{X}}(h(\tilde{V}, \tilde{W})) \circ \varphi \\ &= h(\nabla^{\mathrm{N}}_{\tilde{\mathrm{X}}} \tilde{V}, \tilde{W}) \circ \varphi + h(\tilde{V}, \nabla^{\mathrm{N}}_{\tilde{\mathrm{X}}} \tilde{W}) \circ \varphi \\ &= h_{\varphi}(\nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{X}} V, W) + h_{\varphi}(V, \nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{X}} W) \end{aligned}$$

Proposition 1.4.9 *Soit* ∇^{N} *une connexion sans torsion sur* N*, alors*

$$\nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}} d\varphi(\mathrm{Y}) = \nabla^{\varphi}_{\mathrm{Y}} d\varphi(\mathrm{X}) + d\varphi([\mathrm{X}, \mathrm{Y}])$$

pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$.

preuve:
Soit $\mathrm{V}, \mathrm{W} \in \Gamma(\mathrm{TN})$ deux champs de vecteurs φ-conjugué avex X et Y respectivement. On a

$$\begin{aligned} [\mathrm{V}, \mathrm{W}] \circ \varphi &= d\varphi \circ [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \\ \nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{V}} \mathrm{W} &= \nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{W}} \mathrm{V} + [\mathrm{V}, \mathrm{W}] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}} d\varphi(\mathrm{Y}) &= (\nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{V}} \mathrm{W}) \circ \varphi \\ &= (\nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{W}} \mathrm{V} + [\mathrm{V}, \mathrm{W}]) \circ \varphi \\ &= \nabla^{\varphi}_{\mathrm{Y}} d\varphi(\mathrm{X}) + d\varphi([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) \end{aligned}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1.5 Applications harmoniques

1.5.1 Première variation d'énergie

Definition 1.5.1 *Soit* $\varphi : (\mathrm{M}^m, g) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, h)$ *une application de classe* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ *entre deux variétés riemanniennes de dimension* m *et* n *respectivement. On appelle la densité de* φ *l'application*

$$e(\varphi) : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

définie pour tout $x \in \mathrm{M}$ *par*

$$e(\varphi)(x) = \frac{1}{2}|d_x\varphi|^2,$$

où $|d_x\varphi|$ *est la norme de Hilbert Schmidt de la differentielle* $|d_x\varphi|$ *de* φ *au point* x*. Si* $\{e_i\}_{1\leq i\leq m}$ *est une base orthonormée de* $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$*, on a*

$$\begin{aligned}|d_x\varphi|^2 &= \mathrm{tr}_g\, \varphi^* h \\ &= \sum_{i=1}^{m} h(d_x\varphi(e_i), d_x\varphi(e_i))\end{aligned}$$

Si $\{x^i\}_{1\leq i\leq m}$ *et* $\{y^\alpha\}_{1\leq \alpha\leq n}$ *sont des coordonneés locale autour de* $x \in \mathrm{M}$ *et* $\varphi(x) \in \mathrm{N}$ *respectivement, alors*

$$|d_x\varphi|^2 = g_x^{ij}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}|_x\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}|_x h_{\alpha\beta}(\varphi(x)).$$

L'énergie de l'application φ *sur un domaine compact* D *dans* M *est définie par*

$$E(\varphi, D) = \int_D e(\varphi)v_g = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2 v_g.$$

Une variation de l'application φ *est une application de classe* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$*,*

$$\begin{aligned}\phi : \mathrm{M} \times (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathrm{N}, \quad \epsilon > 0 \\ (x,t) &\longmapsto \varphi_t(x)\end{aligned}$$

telle que (φ_t) *est une famille des applications de classe* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ *sur* M*, et* $\varphi_0 = \varphi$*. Soit* $v \in \Gamma(\varphi^{-1}\mathrm{TN})$ *définie par*

$$\begin{aligned}v(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)|_{t=0} \\ &= d\phi(0, \frac{\partial}{\partial t})_{(x,0)} \in \mathrm{T}_{\varphi(x)}\mathrm{N}\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Definition 1.5.2 *Application harmonique.*
Une application $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ *de classe* $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{M})$ *est dite harmonique si*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} = 0$$

pour tout domaine compact D *dans* M *et tout variation* (φ_t) *à support inclue dans* D.

Proposition 1.5.1 *(Première variation d'énergie) [3] [4].*
Soient $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ *une application différentiable et* (φ_t) *une variation de* φ *à support inclue dans* D. *Alors*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))v_g.$$

où $v(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)|_{t=0}$ *et* $\tau(\varphi) = \mathrm{tr}_g \nabla d\varphi$ *est le champ de tension de l'application* φ.

Preuve:
Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée sur M et $\frac{d}{dt}$ base sur $(-\epsilon, \epsilon)$, alors $\left\{(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})\right\}$ est une base locale orthonormée pour la métrique diagonale sur la variété produit $\mathrm{M} \times (-\epsilon, \epsilon)$, et on a le crochet de Lie $\left[(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})\right] = 0$, pour tout $i = 1, ..., m$, on a $d\phi(e_i, 0) = d\varphi(e_i)$ et $d\phi(0, \frac{d}{dt}) = v$.
En effet: Remarquons que

$$d\phi(e_i, 0) : \mathrm{M} \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathrm{TN},$$

$$\begin{aligned} d\phi(e_i, 0)_{(x,0)} &= d_x\phi_0(e_i|_x) + d_0\phi_x(0) \qquad \text{(formule de Leibniz)} \\ &= d_x\phi_0(e_i|_x) \\ &= d_x\varphi(e_i|_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi(0, \tfrac{d}{dt})_{(x,0)} &= d_x\phi_0(0|_x) + d_0\phi_x(\tfrac{d}{dt}|_{t=0}) \\ &= d\phi_x(\tfrac{d}{dt})|_{t=0} \\ &= v(x) \end{aligned}$$

avec $\phi_0(x) = \phi(x, 0)$ et $\phi_x(t) = \phi(x, t)$. Donc,

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_i))v_g|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))v_g|_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial}{\partial t} h(d\phi_t(e_i,0), d\phi_t(e_i,0))|_{t=0}v_g \\
&= \frac{1}{2}\int_D h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\, d\phi(e_i,0), d\phi(e_i,0))|_{t=0}v_g \\
&= \frac{1}{2}\int_D h(\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0))|_{t=0}v_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\mathrm{N}}_{d\varphi(e_i)} v, d\varphi(e_i))v_g \\
&= \int_D h(\nabla^{\varphi}_{e_i}, d\varphi(e_i))v_g
\end{aligned}
$$

Soit $\omega(*) = h(c, d\varphi(*))$, une 1-forme sur M, alors

$$
\begin{aligned}
div(\omega) &= (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\
&= e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla_{e_i}e_i) \\
&= e_i(h(v, d\varphi(e_i))) - h(v, d\varphi(\nabla_{e_i}e_i)) \\
&= h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \tau(\varphi)),
\end{aligned}
$$

et comme $\int_D div\,\omega\, v_g = 0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t, D)|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))v_g.$$

Théorème 1.5.1 *[3]*
Une application différentiable, $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ est harmonique si et seulement si $\tau(\varphi) = 0$.

Definition 1.5.3 *Une application $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ est totalement géodésique si le tenseur de la seconde dérivée covariante (ou tenseur de tension) est nul: $\nabla d\varphi = 0$*

1.5.2 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 1.5.1 *Tout application constante $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ est harmonique.*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Exemple 1.5.2 *La seconde forme fondamentale de l'application identité,* $\boldsymbol{Id}_M : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{M}, g)$ *est nulle, c'est à dire* $\boldsymbol{Id}_M$ *est totalement géodésique, donc* $\boldsymbol{Id}_M$ *est harmonique.*

Exemple 1.5.3 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne. Pour toute fonction* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* (e_i) *une base orthonormée sur* M *on a*

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \mathrm{tr}_g \nabla df \\
&= \nabla df(e_i, e_i) \\
&= \nabla^f_{e_i} df(e_i) - df(\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i} e_i) \\
&= e_i(e_i(f)) - (\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i} e_i)(f) \\
&= g(\nabla_{e_i} \mathrm{grad}\ f, e_i) \\
&= \mathrm{div}(\mathrm{grad}\ f) \\
&= \triangle(f).
\end{aligned}$$

Exemple 1.5.4 *Soit* $\mathrm{M} =]a, b[$ *un intervalle sur* $\mathbb{R}$*. Alors la courbe* $\gamma : (a, b) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, h)$ *est harmonique si*

$$\frac{d^2\gamma^\alpha}{dt^2} + {}^{\mathrm{N}}\Gamma^\alpha_{\beta\delta} \frac{d\gamma^\beta}{dt} \frac{d\gamma^\delta}{dt} = 0$$

donc, γ *est harmonique si et seulement si c'est une géodésique.*

Wondershare PDFelement

Exemple 1.5.5 *Soit l'application de Hopf*

$$\begin{aligned}
\phi : S^3 &\longrightarrow S^2 \\
(s, a, b) &\longmapsto (\alpha(s), \psi(a, b))
\end{aligned}$$

où $\psi(a, b) = ka + lb$*, et* $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, \pi]$ *telle que* $\alpha(0) = 0$ *et* $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$*. Soient,*

$$g_{S^3} = ds^2 + \cos^2 s\, da^2 + \sin^2 s\, db^2,$$

la métrique riemannienne sur S^3 *et*

$$h_{S^2} = d\alpha^2 + \sin^2 \alpha\, d\psi^2,$$

une métrique riemannienne sur S^2*. On a*

$\{e_1 = \frac{\partial}{\partial s},\quad e_2 = \frac{1}{\cos s}\frac{\partial}{\partial a},\quad e_3 = \frac{1}{\sin s}\frac{\partial}{\partial b}\}$ *est une base orthonormée sur* S^3*.*

$\left\{f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha},\quad f_2 = \frac{1}{\sin \alpha}\frac{\partial}{\partial \psi}\right\}$ *est une base orthonormée sur* S^2*.*
$d\phi(e_1) = \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha}$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$d\phi(e_2) = \tfrac{k}{\cos s}\tfrac{\partial}{\partial\psi}$$

$$d\phi(e_3) = \tfrac{l}{\sin s}\tfrac{\partial}{\partial\psi}$$

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = \tan s \tfrac{\partial}{\partial s}$$

$$\nabla_{e_3} e_3 = -\cot s \tfrac{\partial}{\partial s}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\alpha}} \tfrac{\partial}{\partial\alpha} = 0$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\psi}} \tfrac{\partial}{\partial\psi} = -\sin\alpha\cos\alpha \tfrac{\partial}{\partial\alpha}$$

$$\nabla^{\phi}_{e_1} d\phi(e_1) = \alpha'' \tfrac{\partial}{\partial\alpha}$$

$$\nabla^{\phi}_{e_2} d\phi(e_2) = -\tfrac{k^2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 s}\tfrac{\partial}{\partial\alpha}$$

$$\nabla^{\phi}_{e_3} d\phi(e_3) = -\tfrac{l^2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 s}\tfrac{\partial}{\partial\alpha}$$

où $\alpha'' = \dfrac{d\alpha}{ds}$. *En remplaçant dans l'expression*

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^{3}\{\nabla^{\phi}_{e_i} d\phi(e_i) - d\phi(\nabla_{e_i} e_i)\},$$

on obtient,

$$\tau(\phi) = \left(\alpha''(s) + \alpha'(s)(\cot s - \tan s) - \sin\alpha\cos\alpha(\frac{k^2}{\cos^2 s} + \frac{l^2}{\sin^2 s})\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Exemple 1.5.6 *Soient* N *une variété Riemannienne et* M *une sous-variété de* N. *Si* $i : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *est l'injection canonique, alors la sous-variété* M *est minimale si et seulement si* i *est harmonique. En effet,*

$$\nabla di = B$$

d'où, $\tau(i) = H$.

Exemple 1.5.7 *Soient* (M, g) *et* (N, h) *deux variétés riemanniennes.*
si $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ *est un plongement régulier isométrique, c'est à dire,* φ *est un plongement régulier tel que pour tout* $p \in \mathrm{M}, \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *on a*

$$g_p(\mathrm{X}_p, \mathrm{Y}_p) = h_{\varphi(p)}(d\varphi(\mathrm{X}_p), d\varphi(\mathrm{Y}_p)).$$

Alors, $\varphi(\mathrm{M})$ *est une sous-variété de* N, *de plus* $\varphi(\mathrm{M})$ *est minimale si et seulement si l'application* φ *est harmonique.*
En effet, si $\nabla^{\varphi(\mathrm{M})}$ *est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique induite par* h *sur* $\varphi(\mathrm{M})$, *et* B *désigne la deuxième forme fondamentale de* $\varphi(\mathrm{M})$ *sur* N, *alors*

$$\begin{aligned}
B(d\varphi(\mathrm{X}), d\varphi(\mathrm{Y})) &= (\nabla^{\mathrm{N}}_{d\varphi(\mathrm{X})} d\varphi(\mathrm{Y}))^{\perp} \\
&= \nabla^{\mathrm{N}}_{d\varphi(\mathrm{X})} d\varphi(\mathrm{Y}) - (\nabla^{\mathrm{N}}_{d\varphi(\mathrm{X})} d\varphi(\mathrm{Y}))^{\top} \\
&= \nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{X}} d\varphi(\mathrm{Y}) - \nabla^{\varphi(\mathrm{M})}_{d\varphi(\mathrm{X})} d\varphi(\mathrm{Y}) \\
&= \nabla^{\mathrm{N}}_{\mathrm{X}} d\varphi(\mathrm{Y}) - d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{\mathrm{X}} \mathrm{Y}) \\
&= \nabla d\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \qquad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})
\end{aligned}$$

Soit (e_i) *une base orthonormée locale sur* M, *comme l'application* φ *est isométrique, on a* $(d\varphi(e_i))$ *une base orthonormée sur* $\varphi(\mathrm{M})$, *d'où*

$$\begin{aligned}
H &= \operatorname{trace} B \qquad \textit{(courbure moyenne)} \\
&= B(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\
&= \nabla d\varphi(e_i, e_i) \\
&= \tau(\varphi)
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Exemple 1.5.8 .
Soit M *une variété Riemannienne et* g *la métrique Riemannienne induite sur la sphère unité* S^n *par l'injection canonique* $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. *Soit* $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow S^n$ *une application de classe* C^∞, *posons* $\psi = i \circ \varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, *alors* φ *est harmonique si et seulement si*

$$\tau(\psi) = -|d\psi|^2\psi.$$

En effet

$$\tau(\psi) = \tau(i \circ \varphi) = \mathrm{di}(\tau(\varphi)) + \mathrm{tr}\, \nabla\, \mathrm{di}(d\varphi, d\varphi),$$

donc, φ *est harmonique si et seulement si*

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= \mathrm{tr}\, \nabla\, \mathrm{di}(d\varphi, d\varphi) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \nabla\, \mathrm{di}(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \end{aligned}$$

où (e_i) *est une base orthonormée de* $\mathrm{T}_x\mathrm{M}$, $x \in \mathrm{M}$, *alors*

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= -\sum_{i=1}^{m} g(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\mathcal{N}_{\psi(x)} \qquad \text{où} \quad \mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= -\sum_{i=1}^{m} |d\varphi(e_i)|^2\psi(x) \quad , (N_{\psi(x)} = \psi(x)) \\ &= -|d\varphi|^2\psi(x) \\ &= -|d\psi|^2\psi(x). \end{aligned}$$

Remarque 1.5.1 *La composé de deux applications harmoniques n'est pas en générale harmonique. En particulier si* ϕ *est harmonique et* ψ *est totalement géodésique c'est à dire* $(\nabla d\psi = 0)$, *alors* $\psi \circ \phi$ *est harmonique.*

Exemple 1.5.9 *Soit l'application*

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ x &\longmapsto (x, 0), \end{aligned}$$

on a,

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= (\frac{\partial^2 x}{dx^2}, \frac{\partial^2 0}{dx^2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

et soit l'application,

$$\psi : (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2)$$
$$(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$$

On a,

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= \nabla(\psi)\\ &= \frac{\partial^2\psi}{dx^2} + \frac{\partial^2\psi}{dy^2}\\ &= 2-2 = 0,\end{aligned}$$

alors les deux applications φ *et* ψ *sont harmoniques, mais remarquons que la composé,*

$$\psi \circ \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) \longrightarrow (\mathbb{R}, dz^2)$$
$$x \longmapsto x^2$$

n'est pas harmonique , $\tau(\psi \circ \varphi) = 2$*.*

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1.6 Morphisme harmonique

1.6.1 Application semi-conforme

Soit $\phi\colon (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. L'espace tangent au point $x \in M$ se décompose en somme directe :

$$T_x M = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x,$$

d'un espace vertical $\mathcal{V}_x = \ker d\phi_x$, et d'un espace horizontal $\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x^\perp$ (complément orthogonal de $\mathcal{V}_x$).

On note $\mathcal{C}_\phi = \{x \in M \mid d\phi_x \equiv 0\}$ l'ensemble des points critiques de ϕ, et $M^* = M \setminus \mathcal{C}_\phi$.

Definition 1.6.1
Supposons $m \geq n$. L'application

$$\phi\colon (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$$

*est dite **semi-conforme** si pour tout $x \in M$, la restriction*

$$d\phi_x|_{\mathcal{H}_x}\colon \mathcal{H}_x \longrightarrow T_{\phi(x)}N$$

est une application linéaire surjective et conforme, c'est-à-dire qu'il existe une fonction différentiable

$$\lambda\colon M \to \mathbb{R}_+^*$$

telle que pour tout $X, Y \in \mathcal{H}_x$, on a :

$$h(d\phi_x(X), d\phi_x(Y)) = \lambda^2(x) g(X, Y).$$

Exemple 1.6.1
L'application $\phi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\phi(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right),$$

est semi-conforme de dilatation $\lambda = 1$.

On a les différentielles :

$$d\phi(\partial_x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right), \quad d\phi(\partial_y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right), \quad d\phi(\partial_z) = (0, 1).$$

Les espaces caractéristiques sont :

- *$\mathcal{C}_\phi = \varnothing$ (pas de points critiques)*

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

- $\mathcal{V}_p = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid xa + yb = 0, c = 0\}$, $\dim \mathcal{V}_p = 1$
- $\mathcal{H}_p = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid -ya + xb = 0\}$, $\dim \mathcal{H}_p = 2$

où $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$.

Proposition 1.6.1
Soit $\phi\colon (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application semi-conforme de dilatation λ avec $m > n$. Alors :

$$\tau(\phi) = (2 - n)d\phi(\mathrm{grad}_M \ln \lambda) - (m - n)d\phi(\mu),$$

où

$$\mu = \frac{1}{m - n} \sum_{i=n+1}^{m} \nabla^M_{e_i} e_i,$$

et $\{e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur (M^m, g) avec $\{e_i\}_{i=1}^n$ (resp. $\{e_i\}_{i=n+1}^m$) horizontale (resp. verticale).

1.6.2 Morphismes harmoniques

Definition 1.6.2 *Soit $\phi\colon (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application entre deux variétés riemanniennes. L'application ϕ est un **morphisme harmonique** si, pour toute fonction $v\colon V \to \mathbb{R}$ harmonique sur $V \subset N$ ouvert avec $\phi^{-1}(V)$ non vide, alors la composée $v \circ \phi$ est harmonique sur $\phi^{-1}(V) \subset M$.*

Wondershare PDFelement

Théorème 1.6.1
Soit $\phi\colon (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés riemanniennes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *ϕ est un morphisme harmonique ;*
2. *ϕ est harmonique et semi-conforme ;*
3. *Pour toute fonction v définie sur un ouvert V de N tel que $\phi^{-1}(V)$ soit non vide,*
$$\Delta_M(v \circ \phi) = \lambda^2(\Delta_N v) \circ \phi,$$
où λ est une fonction positive sur M.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1.7 Applications bi-harmoniques

1.7.1 Première variation de la bi-énergie

Soit $\mathrm{M} = (\mathrm{M}^m, g)$ et $\mathrm{N} = (\mathrm{N}^n, h)$ deux variétés riemanniennes, et soit $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ une application différentiable. La fonctionnelle bi-énergie de φ sur un domaine compact D dans M est définie par

$$E_2(\varphi, D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g.$$

Où $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de φ et v_g est la forme volume sur M associée à la métrique g.

Definition 1.7.1 *L'application $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ est dite bi-harmonique si*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = 0$$

pour tout domaine compact D dans M *et pour tout variation (φ_t) à support inclue dans D.*

Wondershare PDFelement

Proposition 1.7.1 *(Première variation de la bi-énergie).*
Soit $\varphi : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ une application différentiable et $\{\varphi_t\}_{t\in I}$, $I =]-\epsilon, \epsilon[$ une variation de φ à support inclue dans D. Alors

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = \int_D h(v, \tau_2(\varphi))v_g.$$

Où $v(x) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x)|_{t=0}$ et $\tau_2(\varphi) = \mathrm{tr}_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) + \mathrm{tr}_g\, R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi$, est le champ de bi-tension de l'application φ. Où

$$\mathrm{tr}_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) = \nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i}\tau(\varphi),$$

et

$$\mathrm{tr}_g\, R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)$$

et R^{N} désigne le tenseur de courbure de la variété N.

Preuve:
Soit $\{\varphi_t\}$ une variation de φ à support inclue dans un domaine compact D dans M, *on a*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t))v_g.$$

Supprimer filigrane
Wondershare PDFelement

et pour tout $(x,t) \in \mathrm{M} \times]-\epsilon, \epsilon[$, *on a*

$$\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0))_{(x,t)} = \tau(\varphi_t)_x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} h(\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)))|_{t=0} = h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)),$$
$$\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)))|_{t=0}$$

et

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \left\{ \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,0) - d\phi(\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)) \right\} \\
&= \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,0) - \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)) \\
&= R((0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)) d\phi(e_i,0) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0) \\
&\quad + \nabla^{\phi}_{[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]} d\phi(e_i,0) - \nabla^{\phi}_{\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt})
\end{aligned}$$

comme $\left[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)\right] = 0$ *et on pose* $\nabla_{(e_i,0)}(e_i,0) = (\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i} e_i, 0) = 0$ *en* $(x,0)$, *donc*

$$\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) = R^{\mathrm{N}}(d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0)) d\phi(e_i,0) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt})$$

d'où,

$$\begin{aligned}
h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)))|_{t=0} &= h(R^{\mathrm{N}}(v, d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) + \\
&\quad h(\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi)) \\
&= h(R^{\mathrm{N}}(d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) v, d\varphi(e_i)) \\
&\quad + e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi))) - h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi)) \\
&= h(R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i), v) \\
&\quad + e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi))) - e_i(h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi))) \\
&\quad + h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} \tau(\varphi))
\end{aligned}$$

si on pose $\omega(.) = h(\nabla^{\varphi}_{.} v, \tau(\varphi))$ *et* $\eta(.) = h(v, \nabla^{\varphi}_{.} \tau(\varphi))$ *deux 1-formes sur* M, *alors*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$div\,\omega = e_i(\omega(e_i)) = e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v, \tau(\varphi))),$$
$$div\,\eta = e_i(\eta(e_i)) = e_i(h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi))),$$

d'où,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t, D)|_{t=0} &= \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial}{\partial t}h(\tau(\varphi_t), \tau(\varphi_t))|_{t=0}v_g \\
&= \int_D \left\{h(tr_g R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi, v) + h(tr_g(\nabla^{\varphi})^2\tau(\varphi), v)\right\} v_g \\
&= \int_D h(\tau_2(\varphi), v)v_g.
\end{aligned}$$

Théorème 1.7.1 *Une application différentiable* $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ *est bi-harmonique si et seulement si* $\tau_2(\varphi) = 0$.

Remarque 1.7.1 *Soit l'application* $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ *et* $(U, x^i), (V, y^\alpha)$ *deux cartes locales en* p *dans* M *et en* $\varphi(p)$ *dans* N *respectivement. Alors*

$$\tau_2(\varphi) = g^{ij}(\frac{\partial^2\tau^{\varphi}}{\partial x^i\partial x^j} + 2\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x^j}\Gamma^{\tau^{\mathrm{N}}}_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial x^i\partial x^j}\Gamma^{\tau^{\mathrm{N}}}_{\alpha\beta} + \tau^\alpha\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\Gamma^{\sigma^{\mathrm{N}}}_{\alpha\beta}}{\partial x^j}$$
$$+\tau^\alpha\frac{\partial\tau^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\tau^\rho}{\partial x^j}\Gamma^{v^{\mathrm{N}}}_{\alpha\beta}\Gamma^{\sigma^{\mathrm{N}}}_{v\rho} - \Gamma^{k^{\mathrm{M}}}_{ij}(\frac{\partial\tau^\sigma}{\partial x^k} + \tau^\alpha\frac{\partial^\beta}{\partial x^k}\Gamma^{\sigma^{\mathrm{N}}}_{\alpha\beta}) - \tau^v\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}R^{\sigma^{\mathrm{N}}}_{\beta\alpha v})\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\circ\varphi$$

où

$$\tau^\alpha = \triangle\varphi^\alpha + g^{ij}\Gamma^{\alpha^{\mathrm{N}}}_{\beta\delta}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\delta}{\partial x^j}$$

l'application φ *est bi-harmonique si et seulement si* $\tau(\varphi) \in Ker J_\varphi$, *où*

$$J_\varphi : \Gamma(\varphi^{-1}(\mathrm{TN})) \longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}(\mathrm{TN}))$$
$$V \longmapsto J_\varphi(V) = \mathrm{tr}_g(\nabla^\varphi)^2V + \mathrm{tr}_g\, R^{\mathrm{N}}(V, d\varphi)d\varphi$$

1.7.2 Exemples d'applications bi-harmoniques

Exemple 1.7.1 *Toute application harmonique est bi-harmonique.*

Exemple 1.7.2 *Considérons l'application différentiable*

$$\varphi(\mathrm{M}, g) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$p \longmapsto \varphi(p) = (\varphi^1(p), ..., \varphi^n(p))$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Alors $\tau_2(\varphi) = (\tau_2(\varphi^1), ..., \tau_2(\varphi^n))$, *donc* φ *est bi-harmonique si et seulement si les applications* $\varphi^i, i = 1, ..., n$ *sont bi-harmonique.*

Exemple 1.7.3 *Le simple exemple d'une application bi-harmonique, les polynômes de degrés 3 et 2 sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.7.4 *Soit l'application*

$$\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, h),$$

φ *est bo-harmonique si et seulement si :*

$$\mathrm{tr}_g(\nabla^{\varphi})^2\tau(\varphi) + 2e(\varphi)\tau(\varphi) - tr_h h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi = 0.$$

En effet, remarquons que la sphère unité $\mathbb{S}^n$ *à courbure constante égale à 1 d'oà d'aprés la formule :*

$$R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z} = g(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})\mathrm{X} - g(\mathrm{X}, \mathrm{Z})\mathrm{Y}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_g\, R^{\mathbb{S}^n}(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi &= \mathrm{tr}_g\,(h(d\varphi, d\varphi)\tau\varphi - h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi) \\ &= |d\varphi|^2\tau(\varphi) - \mathrm{tr}_g\, h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \\ &= 2e(\varphi)\tau(\varphi) - \mathrm{tr}_g\, h(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Exemple 1.7.5 *Soit* M^{n-1} *une hypersurface de la sphère unité* $(\mathbb{S}^n, h)$, *alors l'injection canonique* $i : \mathrm{M}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ *muni de la métrique induite* g *est bi-harmonique. En effet on a*

$$\tau(i) = \mathrm{tr}_g\, \nabla\, \mathrm{di} = \mathrm{tr}_g\, B = H$$

$$\tau_2(i) = \mathrm{tr}_g(\nabla^i)^2 H + \mathrm{tr}_g\, R^{\mathbb{S}^n}(H, \mathrm{di})\, \mathrm{di}$$

on a :

$$H = (1 - n)\mathcal{N}$$

Alors, pour une base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ *sur* M *avec* $(\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i} e_j)_x = 0$ $x \in \mathrm{M}$, *on a*

$$\mathrm{tr}_g(\nabla^i)^2 = (1-n)\nabla^i_{e_i}\nabla^i_{e_i}\mathcal{N} = (1-n)\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\mathcal{N} = (1-n)\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i$$

$$= (1-n)((\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)^{\perp} + (\nabla^{\mathbb{S}^n}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i)^{\top})$$

$$= (1-n)(H + \nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i) = (1-n)H,$$

et, comme $\mathbb{S}^n$ *est de courbure constante on a*

$$\operatorname{tr}_g R^{\mathbb{S}^n}(H, \mathrm{di})\,\mathrm{di} = R^{\mathbb{S}^n}(H, \mathrm{di}(e_i))\,\mathrm{di}(e_i) = R^{\mathbb{S}^n}(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i$$

$$= h(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)H - h(H, \tilde{e}_i)\tilde{e}_i$$

$$= (n-1)H - (1-n)g(\mathcal{N}, e_i)e_i = (n-1)H.$$

D'où : $\tau_2(i) = 0$.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement
Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Chapter 2

Géometrie du fibré tangent d'ordre 1

2.1 Introduction

Notation 2.1.1 *Soit* M *une variété de dimension* n*, on note*

$$\begin{aligned} i : \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M}) &\longrightarrow C^\infty(\mathrm{TM}) \\ \omega &\longrightarrow i\omega \end{aligned}$$

l'application définie par:

$$\begin{aligned} i\omega : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\longrightarrow \omega_x(v) \end{aligned}$$

i *est une application* $C^\infty(\mathrm{M})$*-linéaire.*

Localement, on a

$$i\omega(x, v) = \omega_i(x) y^i \tag{2.1}$$

où $\quad \omega = \omega_i dx^i \quad$ *et* $\quad v = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

Proposition 2.1.1 *Soient* $\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}} \in \Gamma(\mathrm{T}(\mathrm{TM}))$*; alors* $\tilde{\mathrm{X}} = \tilde{\mathrm{Y}}$ *si et seulement si pour tout* $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*, on a:*

$$\tilde{\mathrm{X}}(i\omega) = \tilde{\mathrm{Y}}(i\omega)$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane
Wondershare PDFelement

Preuve: Il suffit de démontrer que si $\tilde{\mathrm{X}}(i\omega) = 0$, pour tout $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$, alors $\tilde{\mathrm{X}} = 0$

Localement si $\tilde{\mathrm{X}} = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i \frac{\partial}{\partial y^i}$, on a:

$$\tilde{\mathrm{X}}(i\omega) = A^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} y^j + B^i \omega_i$$

d'où $\tilde{\mathrm{X}}(i\omega) = 0$, pour tout $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ si et seulement si

$$A^i = B^i = 0, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Remarque 2.1.1 *Si* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$ *et* $\tilde{\mathrm{X}} \in \Gamma(\mathrm{T}(\mathrm{TM}))$, *alors localement on a:*

$$i(df)(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) y^i \tag{2.2}$$

$$\tilde{\mathrm{X}}(i(df)) = A^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} y^j + B^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{2.3}$$

où $\tilde{\mathrm{X}} = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + B^i \frac{\partial}{\partial y^i}$

De la remarque 2.1.1, on déduit:

Proposition 2.1.2 *Soient* $\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}} \in \Gamma(\mathrm{T}(\mathrm{TM}))$; *Alors* $\tilde{\mathrm{X}} = \tilde{\mathrm{Y}}$ *si et seulement si pour tout* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$, *on a:*

$$\tilde{\mathrm{X}}(i(df)) = \tilde{\mathrm{Y}}(i(df))$$

Definition 2.1.1 *Soient* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *un champ de vecteur sur* M. *On définit les applications*

$$\begin{aligned} \gamma : &\mathfrak{L}_p^q(TM) \longrightarrow \mathfrak{L}_p^{q-1}(TM) \\ &F \longmapsto \gamma(F) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_X : &\mathfrak{L}_p^q(TM) \longrightarrow \mathfrak{L}_p^{q-1}(TM) \\ &F \longmapsto \gamma_X(F) \end{aligned}$$

où γ *est un opérateur de contraction qui agit sur les champs de tenseurs de type* (p, q) *sur le fibré tangent* TM *d'une variété différentiable* M.

La définition locale montre que γ *contracte le premier indice covariant* h_1 *de* F *avec les coordonnées* y^{h_1} *de l'espace tangent (représentant une direction dans* TM*).*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$\gamma(F) = F^{k_1..k_p}_{h_1..h_q} y^{h_1} \frac{\partial}{\partial y^{k1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial y^{kp}} \otimes dx^{h2} \otimes ... \otimes dx^{hq} \tag{2.4}$$

$$\gamma_X(F) = F^{k_1..k_p}_{h_1..h_q} X^{h1} \frac{\partial}{\partial y^{k1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial y^{kp}} \otimes dx^{h2} \otimes ... \otimes dx^{hq} \tag{2.5}$$

où: $q \geq 1$, $F = F^{k_1..k_p}_{h_1..h_q} \frac{\partial}{\partial x^{k1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^p} \otimes dx^{h1} \otimes ... \otimes dx^{hq}$ *et* $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Propriétés 2.1.1 .

1. *la Définition 2.1.1 est indépendante de la carte choisie .*
2. *Si F est un champ de tenseurs de type $(1,1)$ sur la variété M, alors $\gamma(F)$ (resp $\gamma_X(F)$) est un champ de vecteurs sur TM, tel que localement:*

   $$\gamma(F) = F^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \quad resp \quad \gamma_X(F) = F^i_j X^j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

   où : $F = F^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ *et* $X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$
3. *Si $G \in \Gamma(\mathrm{T^*M})$ est une 1-forme sur la variété M, alors $\gamma(G) = iG$ (resp $\gamma_X(G) = G(X) \circ \pi$) est une fonction de classe C^∞ sur TM.*
4. *Si $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ et $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, on pose : $\gamma(f) = \gamma_X(f) = 0$.*
5. *Si ∇ est une connexion linéaire sur la variété M et $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, alors*

   $$\nabla f = df, \;\; \gamma(df) = \gamma(\nabla f) = i(df).$$

Proposition 2.1.3 *Si $F, G \in \mathfrak{T}^1_1(\mathrm{M})$ et $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$, alors:*

1. $[\gamma_X F, \gamma_X G] = 0$.
2. $[\gamma_X F, \gamma G] = \gamma_X(G \circ F)$.
3. $[\gamma F, \gamma G] = \gamma(G \circ F) - \gamma(F \circ G)$.

Preuve: Localement on a:

$$
\begin{aligned}
[\gamma F, \gamma G] &= [F^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^i}, G^s_k y^k \frac{\partial}{\partial y^s}] \\
&= F^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^i}(G^s_k y^k) \frac{\partial}{\partial y^s} - G^s_k y^k \frac{\partial}{\partial y^s}(F^i_j y^j) \frac{\partial}{\partial y^i} \\
&= F^i_j y^j \delta^k_i G^s_k \frac{\partial}{\partial y^s} - G^s_k y^k \delta^j_s F^i_j \frac{\partial}{\partial y^i} \\
&= y^j G^s_k F^k_j \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k F^i_s G^s_k \frac{\partial}{\partial y^i} \\
&= y^j (G \circ F)^s_j \frac{\partial}{\partial y^s} - y^k (F \circ G)^i_k \frac{\partial}{\partial y^i}.
\end{aligned}
$$

Pour plus de détail voir K. Yano et S. Ihihara [12]

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.2 Relèvement vertical

2.2.1 Relèvement vertical d'une fonction

Definition 2.2.1 *Soient* M *une variété de dimension m et* $(\mathrm{TM}, \pi, \mathrm{M})$ *le fibré vectoriel tangent associé. soit $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$, on définit le relèvement vertical f^V par :*

$$\begin{aligned} f^V = f \circ \pi : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v \in \mathrm{T}_x\mathrm{M} &\longmapsto f^V(v) = f \circ \pi(v) \\ &\qquad\qquad = f(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.2 Relèvement vertical d'un champ de vecteurs

Definition 2.2.2 *Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \Gamma(\mathrm{T}(\mathrm{TM}))$ est dit vertical si et seulement si pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ on a*

$$\tilde{X} f^V = 0 \tag{2.7}$$

Si $\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^h \\ \tilde{X}_2^k \end{pmatrix}$ sont les composantes de $\tilde{X}$ relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(\mathrm{U}), x^h, y^h)$ sur TM, *alors pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ On a :*

$$\tilde{X} f^V = \tilde{X}_1^h \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

d'où

Proposition 2.2.1 *Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \Gamma(\mathrm{T}(\mathrm{TM}))$ est vertical sur* TM *si et seulement si relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(\mathrm{U}), x^h, y^h)$ sur* TM, *les composantes de $\tilde{X}$ verifient la condition*

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1^h \\ \tilde{X}_2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}_2^k \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Remarque 2.2.1 .

1. $$d_v\pi : \mathrm{T}_v(\mathrm{TM}) \longrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{M}$$

$$Z = Z_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_v + Z_2^j \frac{\partial}{\partial y^i}|_v \longmapsto d\pi(Z) = Z_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x \tag{2.9}$$

2. *$\mathcal{N}_v = Ker(d_v\pi)$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{T}_v\mathrm{TM}$, appelé sous espace vertical.*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

3. *Localement* $\mathcal{N}_v$ *est engendré par* $(\frac{\partial}{\partial y^1}|_v, ..., \frac{\partial}{\partial y^m}|_v)$.

4. $\mathcal{N} = \bigcup_{v \in \mathrm{TM}} \mathcal{N}_v$ *est un sous fibré vectoriel de* $\Gamma(\mathrm{TM})$

5. $\tilde{\mathrm{X}} \in \Gamma(\mathrm{T}(\mathrm{TM}))$ *est un champ de vecteurs vertical si et seulement si* $d\pi(\tilde{\mathrm{X}}) = 0$

6. *Si* $F \in \mathfrak{T}_1^1(\mathrm{M})$ *et* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, *alors* $\gamma(F)$ *et* $\gamma_X(F)$ *sont des champs de vecteur verticaux.*

Proposition 2.2.2 *Si* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *est un champ de vecteur sur* M, *alors il existe un unique champ de vecteur* X^V *sur* TM *verifiant:*

$$\mathrm{X}^V(i\omega) = (\omega(\mathrm{X}))^V \tag{2.10}$$

pour tout $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$.

Preuve: L'unicité découle de la proposition 2.1.1 et de la formule(2.10)
.
Localement si $(\mathrm{X}^i)_i$ et $(\omega_i)_i$ et $(\tilde{\mathrm{X}}_1^h, \tilde{\mathrm{X}}_2^k)$ désignent les composantes de X , ω et X^V respectivement. Alors de la formule (2.10) on obtient :

$$\tilde{\mathrm{X}}_1^h(\frac{\partial}{\partial x_h}\omega_i)y^i \;+\; \tilde{\mathrm{X}}_2^k\omega_k \;=\; \omega_k\mathrm{X}^k$$

d'où

$$\tilde{\mathrm{X}}_1^h = 0, \qquad \tilde{\mathrm{X}}_2^k = \mathrm{X}^k.$$

pour tout $h, k = 1...m$.

Definition 2.2.3 *Soit* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *un champ de vecteurs sur* M, *le champ de vecteurs* X^V *qui vérifie l'équation* (3.10) *est appelé relèvement vertical de* X *à* TM.
Localement si le champ de vecteurs X *a pour composantes* $(\mathrm{X}^h)_{h=1,\dots,m}$ *relativement à une carte* $(U, x^h)_h$ *sur* M. *Alors le relèvement vertical* X^V *a pour composantes*

$$\mathrm{X}^V : \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{X}^h \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM.

Remarque 2.2.2 *Le relèvement vertical* X^V *de* X *au fibré tangent* TM *est un champ de vecteurs vertical, et on a :*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$\mathrm{X}^V f^V = 0 \qquad (2.12)$$

pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *et* $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$

Propriétés 2.2.1 *Soient* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ $\mathrm{F} \in \mathfrak{T}_1^1(\mathrm{M})$ *et* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$*, on a:*

- $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})^V = \mathrm{X}^V + \mathrm{Y}^V$
- $(f\mathrm{X})^V = f^V \mathrm{X}^V$
- $[\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V] = 0$
- $[\mathrm{X}^V, \gamma F] = \gamma_X F$

En effet: pour tout $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*, on a*

$[\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V](i\omega) = \mathrm{X}^V(\mathrm{Y}^V(i\omega)) - \mathrm{Y}^V(\mathrm{X}^V(i\omega)) = \mathrm{X}^V(\omega(\mathrm{Y})^V) - \mathrm{Y}^V(\omega(\mathrm{X})^V) = 0$

Localement, on a :

$$[\mathrm{X}^V, \gamma F] = [\mathrm{X}^i \frac{\partial}{\partial y^i}, y^j F_j^s \frac{\partial}{\partial y^s}] = \mathrm{X}^i F_j^s \frac{\partial}{\partial y^s} = \gamma_X F$$

Remarque 2.2.3 .

- $\mathcal{N}_v = \{\mathrm{X}_v^V, \mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})\}$
- *Soient* $u \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *et* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *tel que* $\mathrm{X}_x = u$*, on ,note :*

  $$u^V = \mathrm{X}^V_{(x,u)} \qquad (2.13)$$

  appelé relèvement vertical de u*. D'aprés la formule* (2.11)*, cette définition est indépendante du choix de* X*.*
- *L'application :*

  $$\begin{array}{ccc} \mathrm{TM} & \mapsto & \subset \mathrm{TTM} \\ (x,u) & \mapsto & u^V \in \mathrm{T}_{(x,u)}\mathrm{TM} \end{array}$$

  est une section de classe C^∞ *sur* TM*, donc un champ de vecteurs sur* TM.
- *Soient* $x \in \mathrm{M}$ *et* $v \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *, alors L'application :*

  $$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}_x\mathrm{M} & \rightarrow & \mathcal{N} \\ u & = & u^V \end{array}$$

  est un isomorphisme linéaire.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.2.3 Relèvement vertical d'une 1-forme

Definition 2.2.4 *Une 1- forme $\tilde{\omega} \in \Gamma(\mathrm{T}^*(\mathrm{TM}))$ sur TM, est dite verticale si :*

$$\tilde{\omega}(\mathrm{X}^V) = 0 \qquad (2.14)$$

pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$.

Localement, si $(\tilde{\omega}_i^1, \tilde{\omega}_j^2)$ *désignent les composantes de* $\tilde{\omega}$ *par rapport à une carte induite* $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM*. Alors de la formule* (2.14)*, on obtient :*

$$\tilde{\omega}(\mathrm{X}^V) = \tilde{\omega}_j^2 \mathrm{X}^j = 0$$

pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *, d'où localement*

$$\tilde{\omega} : \begin{pmatrix} \tilde{\omega}_i^1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

Proposition 2.2.3 *Si* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$ *est une fonction de classe* C^∞ *sur* M*, alors* $d(f^V)$ *est une 1-forme verticale sur le fibré tangent* TM*.*

Preuve: De la relation (2.12) , on a :

$$d(f^V)(\mathrm{X}^V) = \mathrm{X}^V(f^V) = 0$$

pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$

Definition 2.2.5 *Soit* $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*. Le relévement vertical* ω^V *de la 1-forme* ω *est définit localement par*

$$\omega^V = (\omega_i)^V dx^i \qquad (2.16)$$

où $\omega = \omega_i dx^i$*, relativement à une carte* (U, x^i) *sur* M*.*

Cette définition est independante de la carte choisie, en tenant compte que si $(dx^i)_i$ *est une base locale de* $\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*, elle induit alors* $(dx^i, dy^j)_{i,j}$ *une base locale de* $\Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*.*

Remarque 2.2.4 *Le relèvement vertical* ω^V *de* ω *au fibré* TM *est une 1-forme verticale :*

$$\omega^V(\mathrm{X}^V) = 0 \qquad (2.17)$$

pour tout $\omega \in \Gamma(\mathrm{TM}^*)$ *et* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Proposition 2.2.4 *Soient* $f, g \in C^{\infty}(\mathrm{M})$. *Alors:*

$$(df)^V = d(f^V) \qquad (2.18)$$

$$(gdf)^V = g^V d(f^V) \qquad (2.19)$$

Preuve: Localement, on a :

$$d(f^V) = \frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial y^i} dy^i = \frac{\partial(f \circ \pi)}{\partial x^i} dx^i = (df)^V$$

Remarque 2.2.5 *De la Proposition 2.2.4, on obtient :*

$$d((fg)^V) = d(f^V.g^V) = g^V.d(f^V) + f^V.d(g^V) = (d(fg))^V$$

Propriétés 2.2.2 *on a pour tout* $\omega, \theta \in \Gamma(\mathrm{TM}^*)$ *et* $f \in C^{\infty}(\mathrm{M})$ *:*

$$(\omega + \theta)^V = \omega^V + \theta^V \qquad (2.20)$$

$$(f\omega)^V = f^V \omega^V \qquad (2.21)$$

Si (U, x^h) est une carte sur la variété M, alors de la formule (2.16) on obtient :

$$(dx^h)^V = dx^h \qquad (2.22)$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM.

Wondershare PDFelement

2.2.4 Relèvement vertical des champs de tenseurs

Soient $P, Q, R, S \in \mathfrak{T}_p^q(\mathrm{M})$ des champs de tenseurs. On pose :

$$(P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V \qquad (2.23)$$

$$(R + S)^V = R^V + S^V$$

Si $f \in \mathfrak{T}_1^1(\mathrm{M})$ est un tenseur de type $(1,1)$, tel que $F_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i$ relativement à une carte (U, x^i) sur M, alors de la relation (2.23), on a :

$$F^v = (F_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i)^V$$

$$= (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x_h})^V \otimes (dx^i)^V$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$= (F_i^h)^V (\frac{\partial}{\partial x_h}) \otimes (dx^i)$$

d'où F^v a pour composantes :

$$F^v : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.24)$$

De même, si $G \in \mathfrak{T}_2^0(\mathrm{M})$ tel que $G = G_{ij}dx^i \otimes dx^j$ et $H \in \mathfrak{T}_0^2$ tel que $H = H^{ih}\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_h}$, alors :

$$G^v : \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

$$H^v : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{ih} \end{pmatrix} \qquad (2.26)$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM.

Proposition 2.2.5 *Pour tout $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(\mathrm{M})$ on a :*

$$d\omega^V = (d\omega)^V \qquad (2.27)$$

Preuve: Si $\omega = \omega_i dx^i$ par rapport à la carte (U, x^i) sur M, alors

$$\omega^V = (\omega_i dx^i)^V = \omega_i dx^i$$

$$d\omega^V = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^i$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i})dx^i \otimes dx^j$$

et

$$(d\omega)^V = (d\omega_i \wedge dx^i)^V$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i})dx^i \otimes dx^j$$

Relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$,$d(\omega^V)$ a pour composantes :

$$d(\omega^V) : \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Proposition 2.2.6 *Soit* $F \in \mathfrak{T}_1^1(\mathrm{M})$ *un champ de tenseurs de type* $(1,1)$ *sur la variété* M, *alors*

$$F^v : \mathrm{TM} \to \mathrm{T(TM)}$$

$$(x,u) \mapsto F^v(x,u) = (F_x(u))^V \tag{2.28}$$

est un champ de vecteurs sur TM.
Relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j)$*,on a:*

$$F^v = y^i F_j^i \frac{\partial}{\partial y^j} = y^i(F(\frac{\partial}{\partial x^i}))^V = \gamma(F)$$

2.3 Relèvement complet

2.3.1 Relèvement complet d'une fonction

Definition 2.3.1 *Soit* f *une fonction de* M*.On définit le Relèvement Complet de* f*, noté* f^C *de* M *au fibré* TM *par*

$$f^C = idf \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} f^C : \mathrm{TM} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto df(v) \end{aligned}$$

Relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM*,on a:*

$$f^C(x,y) = y^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = (\partial f)(x).$$

De la Proposition 2.1.2, on conclus que cette famille de fonctions joue un rôle important dans la caractérisation des champs de vecteurs sur le fibré tangent TM et on a :

Proposition 2.3.1 *Soient* $\tilde{\mathrm{X}}$ *et* $\tilde{\mathrm{Y}}$ *deux champs de vecteurs sur* TM*. Si pour tout fonction* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$ *on a :*

$$\tilde{\mathrm{X}}(f^C) = \tilde{\mathrm{Y}}(f^C),$$

alors

$$\tilde{\mathrm{X}} = \tilde{\mathrm{Y}}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Propriétés 2.3.1 *Soit* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $F \in \mathfrak{T}_1^1(\mathrm{M})$ *et* $g, f \in C^\infty(\mathrm{M})$ *on a:*

$$\mathrm{X}^V(f^C) = (\mathrm{X}(f))^V \tag{2.30}$$

$$(gf)^C = g^C f^V + g^V f^C \tag{2.31}$$

$$(g+f)^C = g^C + f^C \tag{2.32}$$

$$(\gamma F)(f^C) = \gamma(df \circ F) \tag{2.33}$$

Localement, si $F = F_i^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$ *alors :*

$$(\gamma F)(f^C) = y^i F_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}(y^s \frac{\partial f}{\partial x^s}) = y^i F_i^j \delta_j^s \frac{\partial f}{\partial x^s} = \gamma(df \circ F)$$

Remarque 2.3.1 *Si* (U, x^i) *est une carte sur la variété* M, *alors* $(\pi^{-1}(U), (x^i)^V, (x^j)^C)$ *est la carte induite sur le fibré tangent* TM.

2.3.2 Relèvement complet d'un champ de vecteurs

Definition 2.3.2 *Le relèvement Complet d'un champ de vecteurs* X *sur* M *est l'unique champ de vecteurs* X^C *sur le fibré tangent* TM *tel que*

Wondershare PDFelement

$$\mathrm{X}^C f^C = (\mathrm{X}f)^C \tag{2.34}$$

pour tout $f \in C^\infty(\mathrm{M})$.

L'unicité découle de la Proposition 2.3.1 et l'existence provient de la proprsition suivante :

Proposition 2.3.2 *Si* X *est un champ de vecteurs de composantes* $(\mathrm{X}^h)_h$ *par rapport à une carte* (U, x^h) *sur* M, *alors le relèvement complet* X^C *a pour composantes*

$$\mathrm{X}^C = \begin{pmatrix} \mathrm{X}^h \\ \partial \mathrm{X}^h \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM , *où* $\partial \mathrm{X}^h = y^i \frac{\partial \mathrm{X}^h}{\partial x_i}$. .

Preuve: Soient $\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{X}}_1^h \\ \tilde{\mathrm{Y}}_2^k \end{pmatrix}$ les composantes de X^C par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM. De la formule (2.34), on a:
pour tout $f \in C^\infty(\mathrm{M})$,

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$
\begin{aligned}
X^C(f^C) &= \tilde{X}_1^i(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})y^j + \tilde{X}_2^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= (Xf)^C \\
&= y^i \frac{\partial}{\partial x_i}(X^j \frac{\partial f}{\partial x_j}) \\
&= X^j y^i (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}) + (y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial x_j}
\end{aligned}
$$

d'où $\tilde{X}_1^i = X^i$ et $\tilde{X}_2^j = y^i \dfrac{\partial X^j}{\partial x_i}$; $(i, j = 1, ..., m)$.

Proposition 2.3.3 *Soient* $f \in C^\infty(M)$, $X \in \Gamma(TM)$ *et* $\omega \in \Gamma(TM^*)$, *on a :*

$$X^C + Y^C = (X+Y)^C \tag{2.36}$$

$$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C \tag{2.37}$$

$$X^C f^V = (Xf)^V \tag{2.38}$$

$$\omega^V(X^C) = (\omega(X))^V \tag{2.39}$$

Preuve: .

1. Les formules (2.36) et (2.37) sont des conséquences directes de la définition 2.3.2 et des Propriétés 2.3.1.
2. Localement, on a :
   - $X^C f^V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \pi) + y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y^i}(f \circ \pi) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \pi) = (Xf)^V$
   - $$\begin{aligned}\omega^V(X^C) &= \omega_s dx^s (X^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} + y^i \tfrac{\partial X^j}{\partial x_i} \tfrac{\partial}{\partial y^i}) = \omega_s dx^s (X^i \tfrac{\partial}{\partial x^i}) \\ &= (\omega_s X^s) \circ \pi = (\omega(X))^V\end{aligned}$$

Proposition 2.3.4 *Soient* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, *on a :*

$$[X^V, Y^V] = 0 \tag{2.40}$$

$$[X^V, Y^C] = [X, Y]^V \tag{2.41}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$\left[X^C, Y^C\right] = [X, Y]^C \tag{2.42}$$
$$\left[X^C, \gamma F\right] = \gamma(\mathcal{L}_X F) \tag{2.43}$$

Preuve: En utilisant la proposition de caractérisation (Proposition 2.3.1), on a pour tout $f \in C^\infty(M)$, :

- $$\begin{aligned}\left[X^V, Y^V\right](f^C) &= X^V(Y^V(f^C)) - Y^V(X^V(f^C)) \\ &= X^V(Yf)^V - Y^V(Xf)^V \\ &= 0\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\left[X^V, Y^C\right](f^C) &= X^V(Y^C(f^C)) - Y^C(X^V(f^C)) \\ &= X^V(Yf)^C - Y^C(Xf)^V \\ &= (X(Yf))^V - (Y(Xf))^V \\ &= ([X, Y]\, f)^V \\ &= [X, Y]^V f^C\end{aligned}$$
- De même, on obtient :
$$\begin{aligned}\left[X^C, Y^C\right](f^C) &= X^C(Y^C(f^C)) - Y^C(X^C(f^C)) \\ &= X^C(Yf)^C - Y^C(Xf)^C \\ &= (X(Yf))^C - (Y(Xf))^C \\ &= ([X, Y]\, f)^C \\ &= [X, Y]^C f^C\end{aligned}$$
- Localement, on a :
d'une part
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X F &= \mathcal{L}_X F(\frac{\partial}{\partial x^i}) \otimes dx^i \\ &= \left\{\left[X, F(\frac{\partial}{\partial x^i})\right] - F\left[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right\} \otimes dx^i \\ &= \left\{\left[X^s \frac{\partial}{\partial x^s}, F_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right] - F\left[X^s \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right\} \otimes dx^i \\ &= \left\{X^s \frac{\partial F_i^k}{\partial x^s} - F_i^j \frac{\partial X_k}{\partial x^j} + F_s^k \frac{\partial X_s}{\partial x^i}\right\} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

- et d'autre part:

$$[\mathrm{X}^C,\gamma F]=\left[\mathrm{Xs}\frac{\partial}{\partial x^s}+y^i\frac{\partial \mathrm{X}^s}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s},y^kF_k^j\frac{\partial}{\partial y^j}\right]$$

$$=y^k\mathrm{X}^s\frac{\partial F_k^j}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial y^j}+y^i\frac{\partial \mathrm{X}^s}{\partial x^i}\delta_s^kF_k^j\frac{\partial}{\partial y^j}-y^kF_k^j\delta_j^i\frac{\partial \mathrm{X}^s}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}$$

$$=y^i\mathrm{X}^s\frac{\partial F_i^k}{\partial x^s}\frac{\partial}{\partial y^k}+y^i\frac{\partial \mathrm{X}^s}{\partial x^i}F_s^j\frac{\partial}{\partial y^j}-y^kF_k^i\frac{\partial \mathrm{X}^s}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^s}$$

$$=y^i\left\{\mathrm{X}^s\frac{\partial F_i^k}{\partial x^s}+\frac{\partial \mathrm{X}^s}{\partial x^i}F_s^k-F_i^j\frac{\partial \mathrm{X}^k}{\partial x^j}\right\}\frac{\partial}{\partial y^k}$$

$$=\gamma(\mathcal{L}_{\mathrm{X}}F)$$

Remarque 2.3.2 *Relativement à une carte induite* $(\pi^{-1}(U),x^h,y^h)$ *sur* TM *, pour tout* $i=1,...,m$*, on a :*

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^C=\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.44}$$

2.3.3 Relèvement complet d'une 1-forme

Théorème de caractérisation des formes différentielles

Théorème 2.3.1 *Soient* $\tilde{\omega},\tilde{\theta}\in\Gamma(\mathrm{T}^*(\mathrm{TM}))$ *deux formes sur* TM. *Alors* $\tilde{\omega}=\tilde{\theta}$ *Si et seulement si pour tout* $\mathrm{X}\in\Gamma(\mathrm{TM})$ *on a:*

$$\tilde{\omega}(\mathrm{X}^C)\;=\;\tilde{\theta}(\mathrm{X}^C)$$

Preuve :
Il suffit de démontrer que si $\tilde{\omega}(\mathrm{X}^C)=0$ pour tout $\mathrm{X}\in\Gamma(\mathrm{TM})$, alors $\tilde{\omega}=0$.

Localement si $\mathrm{X}=\mathrm{X}^i\frac{\partial}{\partial x_i}$ (resp $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_i^1dx^i+\tilde{\omega}_j^2dy^j$) relativement à la carte (U,x^i) sur M (resp à la carte induite $(\pi^{-1}(U),x^h,y^h)$ sur TM), alors

$$\tilde{\omega}(\mathrm{X}^C)=\tilde{\omega}_h^1\mathrm{X}^h+\tilde{\omega}_k^2y^i\frac{\partial \mathrm{X}^k}{\partial x_i}=0$$

d'où $\tilde{\omega}_h^1=0=\tilde{\omega}_k^2$; $h,k=1,...,m.$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Théorème 2.3.2 *Si* $\tilde{\omega}, \tilde{\theta} \in \mathfrak{T}_p^0(\mathrm{TM})$ *(rsp* $\in \mathfrak{T}_p^1(\mathrm{TM})$ *), tels que pour tout* $\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_p \in \Gamma(\mathrm{TM})$*:*

$$\tilde{\omega}(\mathrm{X}_1^C, ..., \mathrm{X}_p^C) = \tilde{\theta}(\mathrm{X}_1^C, ..., \mathrm{X}_p^C)$$

Alors $\quad \tilde{\omega} = \tilde{\theta}.$

Proposition 2.3.5 *Soit* $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*, il existe une unique* $\omega^C \in \Gamma(\mathrm{T}^*(\mathrm{TM}))$ *telle que pour tout* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*, on a*

$$\omega^C(\mathrm{X}^C) = (\omega(\mathrm{X}))^C \tag{2.45}$$

Preuve :
L'unicité découle du Théorème 3.3.1.
Localement: si $\mathrm{X} = \mathrm{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega = \omega_i dx^i$ et $\omega^C = \tilde{\omega}_i dx^i + \tilde{\omega}_j dy^j$, alors

$$\omega^C(\mathrm{X}^C) = \tilde{\omega}_i(\mathrm{X}^i) + \tilde{\omega}_j(y^i \frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x_i})$$

$$= (\omega \mathrm{X})^C$$

$$= y^i \frac{\partial(\omega_h \mathrm{X}^h)}{\partial x_i}$$

$$= (y^i \frac{\partial \omega_h}{\partial x_i})\mathrm{X}^h + \omega_h(y^i \frac{\partial \mathrm{X}^h}{\partial x_i})$$

$$\text{d'où} \quad \tilde{\omega}_i = \partial\omega_i = (y^i \frac{\partial \omega_h}{\partial x_i}) \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_j = \omega_j \quad i, j = 1, ..., m.$$

On pose alors, localement

$$\mathrm{X}^C = \partial\omega_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \omega_j \frac{\partial}{\partial y^j}$$

Definition 2.3.3 *Soit* $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$*, l'unique forme* $\omega^C \in \Gamma(\mathrm{T}^*(\mathrm{TM}))$ *qui vérifie la formule* (2.45) *est appelée relèvement complet de* ω*.*

Proposition 2.3.6 *Si* ω *est une 1-forme sur* M *de composantes* (ω_i) *par rapport à une carte* (U, x^h) *, alors le relèvement complet* ω^C *a pour composantes*

$$\omega^C : (\partial\omega_i, \omega_j) = (y^i \frac{\partial \omega_h}{\partial x_i}, \omega_j) \tag{2.46}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM

Remarque 2.3.3 *Relativement à une carte induite* $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ *sur* TM, *on a:*

$$(dx^i)^C = dy^i \tag{2.47}$$

Proposition 2.3.7 *Si* $\omega, \theta \in \Gamma(\mathrm{TM}^*)$ *et* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, *alors :*

1. $(\omega + \theta)^C = \omega^C + \theta^C$
2. $(f\omega)^C = f^C\omega^V + f^V\omega^C$
3. $\omega^C(\mathrm{X}^V) = (\omega(\mathrm{X}))^V$

Preuve : Soit $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, on a:

1. $$(\omega + \theta)^C(\mathrm{X}^C) = ((\omega + \theta)(\mathrm{X}))^C = (\omega(\mathrm{X}) + \theta(\mathrm{X}))^C$$
$$= (\omega(\mathrm{X}))^C + (\theta(\mathrm{X}))^C$$
$$= (\omega^C + \theta^C)(\mathrm{X}^C)$$

2. $$((f\omega)^C)(\mathrm{X}^C) = (f\omega(\mathrm{X}))^C = f^V(\omega(\mathrm{X}))^C + f^C(\omega(\mathrm{X}))^V$$
$$= f^V\omega^C(\mathrm{X}^C) + f^C\omega^V(\mathrm{X}^C)$$

3. Localement si $\mathrm{X} = \mathrm{X}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\omega = \omega_i dx^i$, alors des formules (2.11) et (2.46), on obtient :
$$\omega^C(\mathrm{X}^V) = (\omega_i\mathrm{X}^i) \circ \pi = (\omega(\mathrm{X}))^V$$

2.3.4 Relèvement complet d'un champ de tenseurs

Definition 2.3.4 *Le relèvement complet peut être prolonger à un tenseur quelconque de maniére unique tel que pour tout* $P, Q \in \mathfrak{T}^q_p(\mathrm{M})$ *et* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$, *on a :*

$$(P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C \tag{2.48}$$
$$(P + Q)^C = P^C + Q^C \tag{2.49}$$
$$(fP)^C = f^C P^V + f^V P^C \tag{2.50}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Si $F \in \mathfrak{T}_1^1(\mathrm{M})$ *tel que localement* $F = F_i^h \frac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i$*, alors:*

$$\begin{aligned} F^C &= (F_i^h \tfrac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i)^C \\ &= (F_i^h)^C (\tfrac{\partial}{\partial x_h})^V \otimes (dx^i)^V + (F_i^h)^V (\tfrac{\partial}{\partial x_h})^C \otimes (dx^i)^V \\ &\qquad + (F_i^h)^V (\tfrac{\partial}{\partial x_h})^V \otimes (dx^i)^C \\ &= (F_i^h)^C \tfrac{\partial}{\partial y_h} \otimes dx^i + (F_i^h)^V \tfrac{\partial}{\partial x_h} \otimes dx^i + (F_i^h)^V \tfrac{\partial}{\partial y_h} \otimes dy^i \end{aligned}$$

d'où F^C *a pour composantes*

$$F^C : \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ \partial F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

De même si $G \in \mathfrak{T}_2^0(\mathrm{M})$ *tel que* $G = G_{ij} dx^i \otimes dx^j$ *, alors* G^C *a pour coordonnées :*

$$G^C : \begin{pmatrix} \partial G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

Proposition 2.3.8 *Soient* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *et* $G \in \mathfrak{T}_2^0(\mathrm{M})$*, on a*

$$G^C(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V) = 0 \tag{2.53}$$

$$G^C(\mathrm{X}^C, \mathrm{Y}^V) = (G(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))^V \tag{2.54}$$

$$G^C(\mathrm{X}^C, \mathrm{Y}^C) = (G(\mathrm{X}, \mathrm{Y}))^C \tag{2.55}$$

Preuve : En vertu de la Définition 2.3.4, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $G = \omega \otimes \bar{\omega}$, on a :

- $$\begin{aligned} G^C(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V) &= (\omega^C + \bar{\omega}^V)(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V) + (\omega^V + \bar{\omega}^C)(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V) \\ &= \omega^C(\mathrm{X}^V)\bar{\omega}^V(\mathrm{Y}^V) + \omega^V(\mathrm{X}^V)\bar{\omega}^C(\mathrm{Y}^V) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} G^C(\mathrm{X}^C, \mathrm{Y}^V) &= \omega^C(\mathrm{X}^C)\bar{\omega}^V(\mathrm{Y}^V) + \omega^V(\mathrm{X}^C)\bar{\omega}^C(\mathrm{Y}^V) \\ &= (\omega(\mathrm{X}))^V (\bar{\omega}(\mathrm{Y}))^V \end{aligned}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$= (G(X,Y))^V$$

- $$G^C(X^C,Y^C) = \omega^C(X^C)\bar{\omega}^V(Y^C) + \omega^V(X^C)\bar{\omega}^C(Y^C)$$
$$= (\omega(X))^C(\bar{\omega}(Y))^V + (\omega(X))^V(\bar{\omega}(Y))^C$$
$$= (\omega(X)\bar{\omega}(Y))^C$$
$$= (G(X,Y))^C$$

Proposition 2.3.9 *Pour tout $\omega \in \Gamma^*(TM)$ on a :*

$$d(\omega^C) = (d\omega)^C \qquad (2.56)$$

Preuve : En utilisant le théorème 2.3.2, la Proposition 2.3.8, les Propriétés 2.3.1, la formule (3.42) et la formule de dérivation suivante:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

on obtient :

$$\begin{aligned} d(\omega^C)(X^C,Y^C) &= X^C(\omega^C(Y^C)) - Y^C(\omega^C(X^C)) - \omega^C\left([X^C,Y^C]\right) \\ &= (X(\omega(Y)))^C - (Y(\omega(X)))^C - (\omega([X,Y]))^C \\ &= ((d\omega)(X,Y))^C \\ &= (d\omega)^C(X^C,Y^C) \end{aligned}$$

2.4 Relèvement horizontal

Dans cette section, on suppose que M est une variété de dimension m munie d'une connexion linéaire ∇.

Definition 2.4.1 *On définit la connexion opposée à ∇ notée $\widehat{\nabla}$, par :*

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$$

$\forall\, X,Y \in \Gamma(TM)$.

Remarque 2.4.1 .

1. *Soient T et $\widehat{T}$ les tenseurs de torsion associés à ∇ et $\widehat{\nabla}$ respectivement, alors pour tout $X,Y \in \Gamma(TM)$, on a* $\widehat{T}(X,Y) = T(Y,X)$.
2. *Si ∇ est sans torsion, alors $\widehat{\nabla} = \nabla$.*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.4.1 Relèvement horizontal d'une fonction

De la Propriété 2.1.1 (5), on rappel que, pour tout $f \in C^\infty(\mathrm{M})$, on a :

$$\gamma(df) = \gamma(\nabla f) = \gamma(\widehat{\nabla} f) = i(df) = f^C = \partial f.$$

Definition 2.4.2 *Si f est une fonction sur* M*, on pose*

$$f^H = f^C - \gamma(\widehat{\nabla}) = 0. \tag{2.57}$$

application de classe C^∞ sur TM *dite relèvement horizontal de la fonction f.*

2.4.2 Relèvement horizontal d'un champ de vecteurs

Definition 2.4.3 *Soit* X *un champ de vecteurs sur* M*. On définit le relèvement Horizontal de* X *noté* X^H *au fibré tangent* TM *par*

$$\mathrm{X}^H = \mathrm{X}^C - \nabla_\gamma \mathrm{X} \tag{2.58}$$

Localement si $\mathrm{X} = \mathrm{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$*, alors*

Wondershare PDFelement

$$\nabla \mathrm{X} = (\frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^j} + \mathrm{X}^k \Gamma^i_{jk}) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

$$\nabla_\gamma \mathrm{X} = (\frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^j} + \mathrm{X}^k \Gamma^i_{jk}) y^j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\widehat{\nabla}^\nabla \mathrm{X} = (\frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^j} + \mathrm{X}^k \Gamma^i_{kj}) y^j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\mathrm{X}^C = \mathrm{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \frac{\partial \mathrm{X}^i}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Proposition 2.4.1 *Si* X *un champ de vecteurs sur* TM *de composantes* (X^h) *par rapport à une carte* (U, X^h) *sur* M*, alors le relèvement horizontal* X^H *a pour composantes*

$$\mathrm{X}^H = \begin{pmatrix} \mathrm{X}^h \\ -\mathrm{X}^j \Gamma^k_{ij} y^i \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^H = \frac{\partial}{\partial x_i} - y^j \Gamma^h_{ji} \frac{\partial}{\partial y^h} \tag{2.60}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

On note :

$$\frac{\delta}{\delta x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} - y^j \Gamma^h_{ji} \frac{\partial}{\partial y^h}\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^H \tag{2.61}$$

relativement à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$ *sur* TM.

Remarque 2.4.2 *Pour tout* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *on a* $d\pi \circ \mathrm{X}^H = \mathrm{X} \circ \pi$.

Definition 2.4.4 *Soit* $v \in \Gamma(\mathrm{TM})$, *alors*

$$\mathcal{H}_v = \{\ \mathrm{X}^H_v \ ; \ \mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})\ \} \tag{2.62}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathrm{T}_v(\mathrm{TM})$ *appelé espace horizontal associé à* ∇.

$$\mathcal{H} = \bigcup_{v \in \mathrm{TM}} \mathcal{H}_v \tag{2.63}$$

est un sous fibré vecoriel de $\mathrm{T}(\mathrm{TM})$ *appelé fibré horizontal associé à* ∇.

Remarque 2.4.3 .
D'après les formules (2.59) *et* (2.62), *localement pour tout* $v \in \mathrm{TM}$, *on obtient :*

$$\mathcal{H}_v = \left\{\ a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_v - \Gamma^k_{ji} a^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}|_v \ ; \ a^1, ..., a^m \in \mathbb{R}\ \right\} \tag{2.64}$$

De la Remarque 2.2.1 et la Définition 2.4.4 découle la proposition suivante :

Proposition 2.4.2 .

$$\mathrm{T}(\mathrm{TM}) = \mathcal{H} \otimes \mathcal{N}$$

$$\mathrm{T}_w(\mathrm{TM}) = \mathcal{H}_w \otimes \mathcal{N}_w$$

où $w \in \mathrm{TM}$.
En effet localement si $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *et* $\tilde{\mathrm{X}} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \in \mathrm{T}_v(\mathrm{TM})$, *alors*

$$\tilde{\mathrm{X}} = (a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - a^i w^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k}) + \left\{b^k + a^i w^j \Gamma^k_{ij}\right\} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

avec :

$$\tilde{\mathrm{X}}^h = (a^i \frac{\partial}{\partial x^i} - a^i w^j \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial y^k}) \in \mathcal{H}_v \text{ est la partie horizontale de } \tilde{\mathrm{X}}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

et

$$\tilde{X}^v = \left\{b^k + a^i w^j \Gamma^k_{ij}\right\} \frac{\partial}{\partial y^k} \in \mathcal{N}_w \text{ est la partie verticale de } \tilde{X}.$$

Definition 2.4.5 *Soit $w \in T_x M$, le relèvement horizontal de w est defini par*

$$w^H = X^H_w \tag{2.65}$$

où $X \in \Gamma(TM)$ telque $X_x = w$. De la formule (2.59) cette définition est indépendante du champ de vecteurs X choisi, et on a la proposition :

Proposition 2.4.3 *L'application*

$$\begin{aligned} T_x M &\longrightarrow \mathcal{H}_v \\ w &\longmapsto w^H \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire

Definition 2.4.6 *Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est dit horizontal, si pour tout $v \in TM$ on a $\tilde{X}_v \in \mathcal{H}_v$*

Proposition 2.4.4 *Un champ de vecteurs $\tilde{X} \in \Gamma(T(TM))$ est horizontal, si et seulement si, localement, pour $h = 1 \ldots m.$, on a :*

$$\tilde{X}^h_2 + \Gamma^h_{ij} \tilde{X}^j_1 y^i = 0 \tag{2.66}$$

où $\tilde{X} = \tilde{X}^i_1 \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}^j_2 \frac{\partial}{\partial y^j}$.

Proposition 2.4.5 *Pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*

- $(X+Y)^H = (X)^H + (Y)^H$
- $(fX)^H = (f)^V X^H$
- $X^H f^V = (Xf)^V$
- $X^H f^C = (Xf)^C - \gamma(df \circ (\nabla X))$
- $\left[X^V, Y^H\right] = [X, Y]^V - (\nabla_X Y)^V = -(\widehat{\nabla}_Y X)^V$
- $\left[X^H, Y^V\right] = (\widehat{\nabla}_X Y)^V$
- $\left[X^H, Y^H\right] = [X, Y]^H - \gamma \widehat{R}(X, Y)$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

où $\widehat{R}$ *est le champs de vecteurs de courbure associé à* $\widehat{\nabla}$.

Lemme 2.4.1 .
$(\nabla Y)\circ(\nabla X)-(\nabla X)\circ(\nabla Y) = \left\{\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X - \widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y\right\} - \mathcal{L}_Y\nabla X + \mathcal{L}_X\nabla Y + [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X]$
pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve :
Soit $Z \in \Gamma(TM)$, on a :
$(\nabla Y)\circ(\nabla X)Z = (\nabla Y)(\nabla_Z X)$

$$
\begin{aligned}
&= (\nabla Y)(\widehat{\nabla}_X Z + [Z, Y]) \\
&= (\nabla Y)(\widehat{\nabla}_X Z) - (\nabla Y)(\mathcal{L}_X(Z)) \\
&= \widehat{\nabla}_Y(\widehat{\nabla}_X Z) - (\mathcal{L}_Y)(\widehat{\nabla}_X Z) - (\nabla Y)(\mathcal{L}_X(Z)) \\
&= \widehat{\nabla}_Y(\widehat{\nabla}_X Z) - (\mathcal{L}_Y)(\mathcal{L}_X Z) - (\mathcal{L}_Y)((\nabla X)(Z)) \\
&\quad -(\nabla Y)(\mathcal{L}_X(Z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla Y)\circ(\nabla X)Z-(\nabla X)\circ(\nabla Y)Z &= \left\{\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z\right\} - \{\mathcal{L}_Y((\nabla X)(Z)) - \nabla X(\mathcal{L}_Y(Z))\} \\
&\quad + \mathcal{L}_X((\nabla Y)(Z)) - \nabla Y(\mathcal{L}_X(Z)) \\
&\quad - \{\mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X(Z)) - \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y(Z))\} \\
&= \left\{\widehat{\nabla}_Y\widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_X\widehat{\nabla}_Y Z\right\} - (\mathcal{L}_Y\nabla X)(Z) + (\mathcal{L}_X\nabla Y)(Z) \\
&\quad - [\mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_X](Z).
\end{aligned}
$$

Ici on a utilisé la propriété $\mathcal{L}_X(F(Z)) = (\mathcal{L}_X \circ F)(Z) + F(\mathcal{L}_X Z)$

Preuve de la Proposition 2.4.5
on a :

$$
\begin{aligned}
\bullet\ X^H(f^V) &= (X^C - \nabla_\gamma X)(f^V) \\
&= X^C(f^V) - (\nabla_\gamma X)(f^V)
\end{aligned}
$$

Puisque $\nabla_\gamma X$ est un champ de vecteur vertical, alors

$$X^H(f^V) = X^C(f^V)$$

$$= (\mathrm{X}f)^V$$

- $\mathrm{X}^H(f^C) = \mathrm{X}^C(f^C) - (\nabla_\gamma \mathrm{X})(f^C)$

De la Propriété 2.3.1 (formule (2.33)), on obtient :

$$\mathrm{X}^H(f^C) = (\mathrm{X}f)^C - \gamma(df \circ \nabla \mathrm{X})$$

- $\left[\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^H\right] = \left[\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^C\right] - \left[\mathrm{X}^V, \gamma(\nabla \mathrm{Y})\right],$ (de la Propriété 2.2.1)

$$= [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^{\mathrm{V}} - \gamma_{\mathrm{X}}(\nabla \mathrm{Y})$$

$$= [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^{\mathrm{V}} - (\nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{Y})^V$$

- $\left[\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^H\right] = \left[\mathrm{X}^C, \mathrm{Y}^C\right] - \left[\gamma(\nabla \mathrm{X}), \mathrm{Y}^C\right] - \left[\mathrm{X}^C, \gamma(\nabla \mathrm{Y})\right] + \left[\gamma(\nabla \mathrm{X}), \gamma(\nabla \mathrm{Y})\right]$

$$= [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^C + \gamma \left\{\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} \nabla \mathrm{X} - \mathcal{L}_{\mathrm{X}} \nabla \mathrm{Y} + (\nabla \mathrm{Y}) \circ (\nabla \mathrm{X}) - (\nabla \mathrm{X}) \circ (\nabla \mathrm{Y})\right\}$$

$$= [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^H + \gamma(\nabla [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) + \gamma \left\{\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} \nabla \mathrm{X} - \mathcal{L}_{\mathrm{X}} \nabla \mathrm{Y}\right\}$$

$$+ \gamma \left\{(\nabla \mathrm{Y}) \circ (\nabla \mathrm{X}) - (\nabla \mathrm{X}) \circ (\nabla \mathrm{Y})\right\}$$

Du Lemme 2.4.1 on obtient

$$\left[\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^H\right] = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^H + \gamma \left\{\widehat{\nabla}_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]} - \mathcal{L}_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\right\} + \gamma \left\{\mathcal{L}_{\mathrm{Y}} \nabla \mathrm{X} - \mathcal{L}_{\mathrm{X}} \nabla \mathrm{Y}\right\}$$

$$+ \gamma \left\{(\nabla \mathrm{Y}) \circ (\nabla \mathrm{X}) - (\nabla \mathrm{X}) \circ (\nabla \mathrm{Y})\right\}$$

$$= [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^H - \gamma \widehat{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) - \gamma \left\{\mathcal{L}_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]} + [\mathcal{L}_{\mathrm{Y}}, \mathcal{L}_{\mathrm{X}}]\right\}$$

$$= [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^H - \gamma \widehat{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.4.3 Relèvement horizontal d'une 1-forme

Definition 2.4.7 *Soit ω une 1-forme dans* M. *on définit le Relèvement Horizontal de ω noté ω^H de* M *au fibré* TM *par :*

$$\omega^H = \omega^C - \nabla_\gamma \omega \qquad (2.67)$$

où $\nabla_\gamma \omega = \gamma(\nabla \omega)$.

Expressions Locale. Si (ω_i) désignent les coordonées de $\omega \in \Gamma(\mathrm{T}^*\mathrm{M})$ et Γ_{ji}^h les coefficients de Christoffel associés à la connexion ∇ relativement à la carte (U, x^h) sur M on a :

$$\omega^C : (\partial\omega_i, \omega_i)$$

$$\nabla_\gamma \omega : (y^j \partial_j \omega_i - y^j \Gamma_{ji}^h \omega_h, 0)$$

$$\widehat{\nabla}_\gamma \omega : (y^j \partial_j \omega_i - y^j \Gamma_{ij}^h \omega_h, 0)$$

$$\omega^H : (y^j \Gamma_{ji}^h \omega_h, \omega_i)$$

par rapport à la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM.

Definition 2.4.8 *Une 1-forme $\tilde{\omega} \in \Gamma(\mathrm{T}^*(\mathrm{TM}))$ est dite **horizontale** si on a :*

$$\tilde{\omega}(\mathrm{X}^H) = 0 \qquad (2.68)$$

pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$.

Expressions Locale.
Si $(\tilde{\omega}_i^1, \tilde{\omega}_j^2)$ désignent les composantes de $\tilde{\omega} \in \Gamma(\mathrm{T}^*(\mathrm{TM}))$ par rapport à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^h, y^h)$ sur TM, alors pour tout $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, on a :

$$\tilde{\omega}(\mathrm{X}^H) = \tilde{\omega}_i^1 \mathrm{X}^i - \tilde{\omega}_h^2 y^j \Gamma_{ji}^h \mathrm{X}^i = 0$$

d'où

$$\tilde{\omega}_i^1 \tilde{\omega}_h^2 y^j \Gamma_{ji}^h = 0 \qquad (2.70)$$

pour tout $i = 1..m$
Localement, on peut démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés 2.4.1 *Soient $\omega \in \Gamma(\mathrm{TM}^*)$ et $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, on a :*

$$\omega^H(\mathrm{X}^V) = (\omega(\mathrm{X}))^V \qquad (2.71)$$

$$\omega^H(\mathrm{X}^C) = \omega^C(\nabla_\gamma \mathrm{X}) \qquad (2.72)$$

$$\omega^H(\mathrm{X}^H) = 0 \qquad (2.73)$$

Remarque 2.4.4 *De la formuule 2.68, localement on obtient*

$$(dx^h)^H = y^j \Gamma_{ji}^h dx^i + dy^h \qquad (2.74)$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.4.4 Relèvement horizontal d'un champ de tenseurs

Definition 2.4.9 *Soit S un champ de tenseurs sur* M *de type* $(0,s)$ *(resp* $(1,s)$*). On définit le* ***Relèvement Horizontal*** *de S au fibré* TM *noté S^H par*

$$S^H = S^C - \nabla_\omega S \tag{2.75}$$

Definition 2.4.10 *D'une manière générale le relèvement Horizontal peut être prolonger à un tenseur quelconque de maniére unique tel que pour tout* $P, Q \in \mathfrak{T}^q_p(\mathrm{M})$ *,on a*

$$(P \otimes Q)^H = P^H \otimes Q^V + P^V \otimes Q^H \tag{2.76}$$

$$(P + Q)^H = P^H + Q^H \tag{2.77}$$

Expressions Locale.
Si $F \in \mathfrak{T}^1_1(\mathrm{M})$ tel que $F = F^i_j \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx^j$, alors :

$$F^H : \begin{pmatrix} F^i_k & 0 \\ -y^j F^t_k \Gamma^i_{jt} + y^j F^i_t \Gamma^t_{jk} & F^i_k \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

Si $G \in \mathfrak{T}^0_2(\mathrm{M})$ tel que $G = G_{ij} dx^i \otimes dx^j$ alors :

$$G^H : \begin{pmatrix} y^t \Gamma^h_{tj} G_{hi} + y^t \Gamma^h_{ti} G_{jh} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

Si $H \in \mathfrak{T}^2_0(\mathrm{M})$ tel que $H = H^{ih} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_h}$ alors :

$$H^H : \begin{pmatrix} 0 & H^{ih} \\ H^{ih} & -\, y^t \Gamma^i_{tj} H^{jh} - y^t \Gamma^h_{tj} H^{ij} \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

Proposition 2.4.6 *Soit* $F \in \mathfrak{T}^1_1(\mathrm{M})$ *un champ de tenseurs de type* $(1,1)$ *sur la variété* M, *alors*

$$F^h : \mathrm{TM} \longrightarrow \mathrm{TTM}$$

$$(x,u) \longmapsto F^h(x,u) = F^h_{(x,u)}(u^H) \tag{2.81}$$

est un champ de vecteurs sur TM.
Localement, relativement à une carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i)$, *on a*

$$F^h = y^i F^j_i \frac{\partial}{\partial x^j} - y^i y^k F^l_i \Gamma^s_{lk} \frac{\partial}{\partial y^s} = y^i \Big(F\big(\frac{\partial}{\partial x^i}\big)\Big)^H$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.5 Métrique Naturelle

2.5.1 Métrique Naturelle

Definition 2.5.1 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. Une métrique Riemannienne* $\bar{g}$ *sur le fibré tangent* TM *de* M *est dite naturelle par rapport à* g *si*

$$\bar{g}(\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^H) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \circ \pi$$

$$\bar{g}(\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^V) = 0$$

pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$

Remarque 2.5.1 *De la Définition 2.5.1, on déduit que pour tout champ de vecteurs vertical* $\tilde{\mathrm{Y}} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *et* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*, on a*

$$\bar{g}(\mathrm{X}^H, \tilde{\mathrm{Y}}) = 0$$

où $\bar{g}$ *est une métrique naturelle sur le fibré tangent* TM*.*

Wondershare PDFelement

Proposition 2.5.1 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne de connexion de Levi-Civita* ∇*. Si* $\bar{g}$ *est une métrique naturelle sur* TM *de connexion de Levi-Civita* $\bar{\nabla}$*, alors*

1. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^H) = g_{(x,u)}((\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})^H, \mathrm{Z}^H) = g_x((\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}), \mathrm{Z}) \circ \pi$

2. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^V) = -\dfrac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})u\}^V, \mathrm{Z}^V)$

3. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^V) = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{X}^H(\bar{g}(\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^V)) + \bar{g}(\mathrm{Z}^V, (\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})^V) - \bar{g}(\mathrm{Y}^V, (\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z})^V)\right]_{(x,u)}$

4. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^H) = -\dfrac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(\mathrm{Z}, \mathrm{X})u\}^V, \mathrm{Y}^V)$

5. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^H) = \dfrac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})u\}^V, \mathrm{X}^V)$

6. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^V) = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{Y}^H(\bar{g}(\mathrm{X}^V, \mathrm{Z}^V)) - \bar{g}(\mathrm{Z}^V, (\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{X})^V) - \bar{g}(\mathrm{X}^V, (\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z})^V)\right]_{(x,u)}$

7. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^H) = \dfrac{1}{2}\left[-\mathrm{Z}^H(\bar{g}(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V)) + \bar{g}(\mathrm{Y}^V, (\nabla_{\mathrm{Z}}\mathrm{X})^V) + \bar{g}(\mathrm{X}^V, (\nabla_{\mathrm{Z}}\mathrm{Y})^V)\right]_{(x,u)}$

8. $\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^V) = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{X}^V(\bar{g}(\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^V)) + \mathrm{Y}^V(\bar{g}(\mathrm{Z}^V, \mathrm{X}^V)) - \mathrm{Z}^V(\bar{g}(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V))\right]_{(x,u)}$

où $(x, u) \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *tel que* $\pi(u) = x$*.*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

La preuve découle immédiatement de la formule de Kozul, la Définition 2.5.1 et de la Proposition 2.4.5

Preuve de la Proposition 2.5.1

1. $2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^H) = X^H(\bar{g}(Y^H, Z^H)) + Y^H(\bar{g}(Z^H, X^H)) - Z^H(\bar{g}(X^H, Y^H))$

$$+\bar{g}(Z^H, [X^H, Y^H]) + \bar{g}(Y^H, [Z^H, X^H]) - \bar{g}(X^H, [Y^H, Z^H])$$

$$= X^H(g(Y,Z)^V) + Y^H(g(Z,X)^V) - Z^H(g(X,Y)^V) + \bar{g}(Z^H, [X,Y]^H)$$

$$+\bar{g}(Y^H, [Z,X]^H) - \bar{g}(X^H, [Y,Z]^H)$$

$$= \{X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])\}^V$$

$$= 2g(\nabla_X Y, Z) \circ \pi$$

2. $2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) = X^H(\bar{g}(Y^H, Z^v)) + Y^H(\bar{g}(Z^v, X^H)) - Z^v(\bar{g}(X^H, Y^H))$

$$+\bar{g}(Z^V, [X^H, Y^H]) + \bar{g}(Y^H, [Z^V, X^H]) - \bar{g}(X^H, [Y^H, Z^V])$$

$$= -Z^v(g(X,Y)^V) + \bar{g}(Z^V, [X,Y]^H) - \bar{g}(Z^V, \gamma(\widehat{R}(X,Y)) - \bar{g}(Y^H, (\widehat{\nabla}_X Z)^V) - \bar{g}(X^H, (\widehat{\nabla}_Y Z)^V)$$

$$= -\bar{g}(Z^V, \gamma(\widehat{R}(X,Y))$$

$$= -\bar{g}(Z^V, \gamma(R(X,Y))$$

puisque la connexion est symetrique $\widehat{\nabla} = \nabla$ et $\widehat{R} = R$. Comme $\gamma(R(X,Y))_{(x,u)} = \gamma(R_x(X,Y),u))^V$, on déduit

$$\bar{g}_{(x,u)}(\bar{\nabla}_{X^H}Y^H, Z^V) = -\frac{1}{2}\bar{g}_{(x,u)}(\{R(X,Y)u\}^V, Z^V)$$

Les autres égalités se démontrent de la même façon. [15]

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.5.2 Métrique de Sasaki

Definition 2.5.2 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne. La métrique de Sasaki associée est l'unique métrique naturelle* $\widehat{g}$ *sur le fibré tangent* TM *telle que :*

1. $\widehat{g}(\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^H) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \circ \pi$
2. $\widehat{g}(\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^V) = 0$ (2.83)
3. $\widehat{g}(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \circ \pi$

pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$

Dans toute la suite, la métrique de Sasaki sera notée g^S.
De la Proposition 2.5.1 et la Définition 2.5.1, on déduit:

Proposition 2.5.2 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne et* g^S *la métrique de Sasaki associée à* g *sur* TM*. Si* ∇ *(resp.* $\widehat{\nabla}$*) désigne la connexion de Levi-Civita sur* (M, g) *(resp. sur* (TM, g^S)*) alors on a :*

1. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^H) = g^S_{(x,u)}((\nabla_X Y)^H, Z^H);$
2. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) = -\frac{1}{2} g^S_{(x,u)}((R(X,Y)u)^V, Z^V);$
3. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) = \frac{1}{2} g^S_{(x,u)}((R(u,Y)X)^H, Z^H);$
4. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) = g^S_{(x,u)}((\nabla_X Y)^V, Z^V);$
5. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^H) = \frac{1}{2} g^S_{(x,u)}((R(u,X)Y)^H, Z^H);$
6. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H, Z^V) = 0;$
7. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^H) = 0;$
8. $g^S_{(x,u)}(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V, Z^V) = 0;$

pour tous champs de vecteurs $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *et* $(x, u) \in TM$*, où* R *désigne le tenseur de courbure de* (M, g)*.*

De la Proposition 2.5.2, découle:

Proposition 2.5.3 *Soit (M, g) une variété Riemannienne et g^S la métrique de Sasaki associée à g sur TM. Si ∇ (resp. $\widehat{\nabla}$) désigne la connexion de Levi-Civita sur (M, g) (resp. sur (TM, g^S)) alors on a :*

1. $(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^H)_{(x,u)} = (\nabla_X Y)^H_{(x,u)} - \frac{1}{2}(R_x(X,Y)u)^V$;
2. $(\widehat{\nabla}_{X^H} Y^V)_{(x,u)} = (\nabla_X Y)^V_{(x,u)} + \frac{1}{2}(R_x(u,Y)X)^H$;
3. $(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^H)_{(x,u)} = \frac{1}{2}(R_x(u,X)Y)^H$;
4. $(\widehat{\nabla}_{X^V} Y^V)_{(x,u)} = 0$;

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $(x, u) \in TM$, où R désigne le tenseur de courbure de (M, g).

La preuve découle immédiatement de la Proposition 2.5.3.

2.6 Métrique de Cheeger-Gromoll

Definition 2.6.1 *Soit (M, g) une variété Riemannienne. La métrique de Cheeger-Gromoll $\widehat{g}$ est une métrique naturelle définie sur le fibré tangent TM par :*

1. $\widehat{g}_p(X^H, Y^H) = g_x(X, Y)$;
2. $\widehat{g}_p(X^H, Y^V) = 0$;
3. $\widehat{g}_p(X^V, Y^V) = \frac{1}{1+r^2}(g_x(X,Y) + g_x(X,u)g_x(Y,u))$;

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $p = (x, u) \in TM$ et $r = \|u\| = \sqrt{g(u,u)}$. Par la suite, on pose $\lambda = 1 + r^2$.

Lemme 2.6.1 *Soient (M, g) une variété Riemannienne et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour tous $X \in \Gamma(TM)$, $p = (x, u) \in TM$ et $r^2 = g(u, u)$, on a :*

1. $X^H_p(f(r^2)) = 0$,
2. $X^V_p(f(r^2)) = 2f'(r^2)g_x(X, u)$.

Preuve
Localement, si $U : x \in M \mapsto U_x = u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in TM$ est un champ de vecteurs constant sur chaque fibre T_xM, alors d'après les formules (2.11) et (2.59) on obtient :

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

1. Pour le premier point :

$$\begin{aligned}
X_p^H(f(r^2)) &= \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(f(r^2)) - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}(f(r^2))\right)_p \\
&= \left(X^i f'(r^2) \frac{\partial}{\partial x^i}(r^2) - f'(r^2)\Gamma_{ij}^k X^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}(r^2)\right)_p \\
&= f'(r^2)\left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{st}y^s y^t) - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}(g_{st}y^s y^t)\right)_p \\
&= f'(r^2)\left((Xg(U,U))_x - 2(\Gamma_{ij}^k X^i y^j g_{sk} y^s)_p\right) \\
&= f'(r^2)\left[Xg(U,U)_x - 2g(U,\nabla_X U)_x\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Pour le deuxième point :

$$\begin{aligned}
X_p^V(f(r^2)) &= \left[X^i f'(r^2) \frac{\partial}{\partial y^i}(g_{st}y^s y^t)\right]_p \\
&= 2f'(r^2) X^i g_{it} u^t \\
&= 2f'(r^2) g(X,u)_x
\end{aligned}$$

Wondershare PDFelement

Lemme 2.6.2 *Soit (M,g) une variété Riemannienne. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, $p = (x,u) \in TM$, on a :*

1. $X_p^H(g(u,u)) = 0$,
2. $X_p^V(g(u,u)) = 2g_x(X,u)$,
3. $X_p^H(g(Y,u)) = g_x(\nabla_X Y, u)$,
4. $X_p^V(g(Y,u)) = g_x(X,Y)$.

Preuve

Les propriétés 1. et 2. sont des conséquences directes du Lemme 2.6.1.

3. Pour le troisième point :

$$\begin{aligned}
X_p^H(g(Y,u)) &= \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{st}Y^s y^t) - \Gamma_{ij}^k X^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k}(g_{st}Y^s y^t)\right)_p \\
&= (Xg(Y,u))_x - (\Gamma_{ij}^k X^i y^j g_{sk} Y^s)_p \\
&= Xg(Y,u)_x - g(Y,\nabla_X u)_x \\
&= g(\nabla_X Y, u)_x
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

4. Pour le quatrième point :

$$\begin{aligned} X_p^V(g(Y,u)) &= \left[X^i \frac{\partial}{\partial y^i}(g_{st}Y^s y^t)\right]_p \\ &= X^i g_{si} Y^s \\ &= g(X,Y)_x \end{aligned}$$

2.7 Métrique de Cheeger-Gromoll généralisée

Dans cette section, nous considérons la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée sur le fibré tangent TM, comme métrique naturelle sur TM.

Definition 2.7.1 .
Soit (M, g) *une variété Riemannienne et* $\alpha, \beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \alpha > 0$. *Sur le fibré tangent* TM, *on définit la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée notée* $\bar{g}$ *par:*

1. $\bar{g}(\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^H)_p = g_x(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.
2. $\bar{g}(\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^V)_p = 0$.
3. $\bar{g}(\mathrm{X}^V, \mathrm{Y}^V)_p = \alpha(r)g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \beta(r)g(\mathrm{X}, u)g(\mathrm{Y}, u)$.

où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $p = (x, u)$ *et* $r = g(u, u)$.
pour plus de détails voir [2]

Remarque 2.7.1 .

1. *Si* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 0$ *alors* $\bar{g}$ *est La métrique de Sasaki [26].*
2. *Si* $\alpha = \beta = \dfrac{1}{r+1}$ *alors* $\bar{g}$ *est La métrique de Cheeger-Gromoll [10] [15].*

Lemme 2.7.1 *[1] [14]*
Soit (M, g) *une variété riemannienne et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable. Pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $p = (x, u) \in \mathrm{TM}$ *où* $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *et* $r = g(u, u)$, *on a les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{X}^H(f(r))_p = 0$,
2. $\mathrm{X}^V(f(r))_p = 2f'(r)g(\mathrm{X}, u)_x$,
3. $\mathrm{X}^H(g(\mathrm{Y}, u))_p = g(\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}, u)_x$,

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

4. $X^V(g(Y,u))_p = g(X,Y)_x$.

Preuve
Rappelons que, si $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, alors les relèvements vertical et horizontal s'écrivent:

$$X^V = X^i\frac{\partial}{\partial u^i} \quad \text{et} \quad X^H = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - X^i u^j \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}$$

1.

$$\begin{aligned}
X^H(f(r))_p &= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(f(r)) - X^i u^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}(f(r)) \\
&= f'(r)\left[X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(g(u,u)) - X^i u^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}(g(u,u))\right] \\
&= f'(r)\left[X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(u^l u^s g_{ls}) - X^i u^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}(u^l u^s g_{ls})\right] \\
&= f'(r)u^l u^s\left[X^i\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^i} - X^i\Gamma^k_{il}g_{sk} - X^i\Gamma^k_{is}g_{lk}\right] \\
&= f'(r)u^l u^s X^i\left[\frac{\partial g_{ls}}{\partial x^i} - \Gamma^k_{il}g_{sk} - \Gamma^k_{is}g_{lk}\right] = 0
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient des identités de Christoffel.

2.

$$\begin{aligned}
X^V(f(r))_p &= X^i\frac{\partial}{\partial u^i}(f(r)) \\
&= X^i f'(r)\frac{\partial}{\partial u^i}(u^l u^s g_{ls}) \\
&= 2X^i f'(r)u^s g_{is} \\
&= 2f'(r)g(X,u)_x
\end{aligned}$$

3. Soient $u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, alors :

$$\begin{aligned}
X^H(g(Y,u))_p &= \left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - X^i u^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}\right)(g_{ab}Y^a u^b) \\
&= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{ab}Y^a u^b) - X^i u^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial u^k}(g_{ab}Y^a u^b) \\
&= g(\nabla_X Y, u) + g(Y, \nabla_X u) - X^i u^j\Gamma^k_{ij}g_{ak}Y^a \\
&= g(\nabla_X Y, u) + g(Y, X^i u^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}) - g(Y, X^i u^j\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}) \\
&= g(\nabla_X Y, u)_x
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

4.

$$\begin{aligned}
X^V(g(Y,u))_p &= X^i \frac{\partial}{\partial u^i}(g_{ab}Y^a u^b) \\
&= X^i g_{ab} Y^a \frac{\partial u^b}{\partial u^i} \\
&= X^i g_{ai} Y^a \\
&= g(X,Y)_x
\end{aligned}$$

Lemme 2.7.2
Soit (M, g) *une variété riemannienne et* $(TM, \bar{g})$ *le fibré tangent muni de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée. Pour tous champs de vecteurs* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$*, on a :*

1. *La dérivée horizontale de la métrique vérifie :*

$$X^H \bar{g}(Y^V, Z^V) = \bar{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V) + \bar{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V)$$

2. *La dérivée verticale de la métrique s'exprime comme :*

$$\begin{aligned}
X^V \bar{g}(Y^V, Z^V) &= 2\alpha' g(X,u)g(Y,Z) + 2\beta' g(X,u)g(Y,u)g(Z,u) \\
&\quad + \beta\left[g(Z,u)g(X,Y) + g(Y,u)g(X,Z)\right]
\end{aligned}$$

Preuve :
En utilisant le lemme 2.7.1, on obtient:

1. $$\begin{aligned}
X^H \bar{g}(Y^V, Z^V) &= X^H\left[\alpha g(Y,Z) + \beta g(Y,u)g(Z,u)\right] \\
&= \alpha X^H g(Y,Z) + \beta X^H g(Y,u)g(Z,u) \\
&= \alpha\left[g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\right] + \\
&\quad \beta\left[g(\nabla_X Y, u)g(Z,u) + g(Y,u)g(\nabla_X Z, u)\right] \\
&= \bar{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V) + \bar{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V)
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
X^V \bar{g}(Y^V, Z^V) &= X^V\left[\alpha g(Y,Z) + \beta g(Y,u)g(Z,u)\right] \\
&= X^V(\alpha)g(Y,Z) + X^V(\beta)g(Y,u)g(Z,u) + \beta X^V(g(Y,u)g(Z,u)) \\
&= 2\alpha' g(X,u)g(Y,Z) + 2\beta' g(X,u)g(Y,u)g(Z,u) \\
&\quad + \beta\left[g(Z,u)g(X,Y) + g(Y,u)g(X,Z)\right]
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

2.7.1 Connexion de Levi-Civita de la métrique de Cheeger-Gromoll généraliseé

Lemme 2.7.3 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne et* $(\mathrm{TM}, \bar{g})$ *son fibré tangent muni de la métrique de Cheeger-Gromoll généraliseé.*
Si ∇ *(resp* $\bar{\nabla}$ *) désigne la connexion de Levi-Civita de* (M, g) *(resp* $(\mathrm{TM}, \bar{g})$*), alors nous avons les relations suivantes:*

1. $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^H) = \bar{g}((\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})^H, \mathrm{Z}^H)$
2. $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^V) = -\dfrac{1}{2}\bar{g}((R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})u)^V, \mathrm{Z}^V)$
3. $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^H) = \dfrac{\alpha(r)}{2}\bar{g}((R(u, \mathrm{Y})\mathrm{X})^H, \mathrm{Z}^H)$
4. $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^V) = \bar{g}((\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})^V, \mathrm{Z}^V)$
5. $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^H) = \dfrac{\alpha(r)}{2}\bar{g}((R(u, \mathrm{X})\mathrm{Y})^H, \mathrm{Z}^H)$
6. $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^V) = 0$
7. $\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^H) = 0$
8. $$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^V, \mathrm{Z}^V) = \bar{g}\Big(\frac{\alpha'}{\alpha}\left[g(\mathrm{X}, u)\mathrm{Y}^V + g(\mathrm{Y}, u)\mathrm{X}^V\right] + \left[\frac{\beta + \alpha'}{\alpha + r\beta}g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + r\beta)}g(\mathrm{X}, u)g(\mathrm{Y}, u)\right]U^V, \mathrm{Z}^V\Big)$$

pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, U \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $U_x = u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *et* $(u, x) \in \mathrm{TM}$.

preuve:
En utilisant le Lemme 2.7.1 , le Lemme 2.7.2 et la formule de Kozule, on obtient:

1. $$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^H) &= \mathrm{X}^H\bar{g}(\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^H) + \mathrm{Y}^H\bar{g}(\mathrm{Z}^H, \mathrm{X}^H) - \mathrm{Z}^H\bar{g}(\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^H) \\ &+\bar{g}(\mathrm{Z}^H, [\mathrm{X}^H, \mathrm{Y}^H]) + \bar{g}(\mathrm{Y}^H, [\mathrm{Z}^H, \mathrm{X}^H]) - \bar{g}(\mathrm{X}^H, [\mathrm{Y}^H, \mathrm{Z}^H]) \\ &= \mathrm{X}g(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) + \mathrm{Y}g(\mathrm{Z}, \mathrm{X}) - \mathrm{Z}g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + g(\mathrm{Z}, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) \\ &+g(\mathrm{Y}, [\mathrm{Z}, \mathrm{X}]) - g(\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]) \end{aligned}$$

$$= 2g(\nabla_X Y, Z)$$

$$= 2\bar{g}((\nabla_X Y)^H, Z^H)$$

2. $$2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^H, Z^V) = X^H\bar{g}(Y^H, Z^V) + Y^H\bar{g}(Z^V, X^H) - Z^V\bar{g}(X^H, Y^H)$$

$$+\bar{g}(Z^V, [X^H, Y^H]) + \bar{g}(Y^H, [Z^V, X^H]) - \bar{g}(X^H, [Y^H, Z^V])$$

$$= \bar{g}(Z^V, [X^H, Y^H])$$

$$= -\bar{g}((R(X, Y)u)^V, Z^V)$$

3. $$2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^H) = X^H\bar{g}(Y^V, Z^H) + Y^V\bar{g}(Z^H, X^H) - Z^H\bar{g}(X^H, Y^V)$$

$$+\bar{g}(Z^H, [X^H, Y^V]) + \bar{g}(Y^V, [Z^H, X^H]) - \bar{g}(X^H, [Y^V, Z^H])$$

$$= -\bar{g}((R(Z, X)u)^V, Y^V)$$

$$= -\alpha g((R(Z, X)u), Y) - \beta g(Y, u)g((R(Z, X)u), u)$$

$$= \alpha g(R(u, Y)X, Z)$$

$$= \alpha\bar{g}((R(u, Y)X)^H, Z^H)$$

4. $$2\bar{g}(\bar{\nabla}_{X^H} Y^V, Z^V) = X^H\bar{g}(Y^V, Z^V) + Y^V\bar{g}(Z^V, X^H) - Z^V\bar{g}(X^H, Y^V)$$

$$+\bar{g}(Z^V, [X^H, Y^V]) + \bar{g}(Y^V, [Z^V, X^H]) - \bar{g}(X^H, [Y^V, Z^V])$$

$$= X^H\bar{g}(Y^V, Z^V) + \bar{g}(Z^V, [X^H, Y^V]) + \bar{g}(Y^V, [Z^V, X^H])$$

$$= \bar{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V) + \bar{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V)$$

$$+\bar{g}(Z^V, (\nabla_X Y)^V) - \bar{g}(Y^V, (\nabla_X Z)^V)$$

$$= 2\bar{g}((\nabla_X Y)^V, Z^V)$$

les autres formules sont obtenues par un calcul similaire.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Théorème 2.7.1 *[14], [22] Soit* (M, g) *une variété Riemannienne et* $(\mathrm{TM}, \bar{g})$ *son fibré tangent muni de la métrique de Cheeger-Gromoll généraliseé. Si* ∇ *(resp* $\bar{\nabla}$ *) désigne la connexion de Levi-Civita de* (M, g) *(resp* $(\mathrm{TM}, \bar{g})$ *), alors on a:*

1. $(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^H)_p = (\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})_p^H - \dfrac{1}{2}(R_x(\mathrm{X}, \mathrm{Y})u)^V$

2. $(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^H}\mathrm{Y}^V)_p = (\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Y})_p^V + \dfrac{\alpha}{2}(R_x(u, \mathrm{Y})\mathrm{X})^H$

3. $(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^H)_p = \dfrac{\alpha}{2}(R_x(u, \mathrm{X})\mathrm{Y})^H$

4. $(\bar{\nabla}_{\mathrm{X}^V}\mathrm{Y}^V)_p = \dfrac{\alpha'}{\alpha}\left[g_x(\mathrm{X}, u)\mathrm{Y}_p^V + g_x(\mathrm{Y}, u)\mathrm{X}_p^V\right]$

$$+\left[\frac{\beta-\alpha'}{\alpha+r\beta}g_x(\mathrm{X},\mathrm{Y}) + \frac{\alpha\beta'-2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha+r\beta)}g_x(\mathrm{X},u)g_x(\mathrm{Y},u)\right]U_p^V.$$

pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, U \in \Gamma(\mathrm{TM})$, $U_x = u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathrm{T}_x\mathrm{M}$ *et* $p = (x, u) \in \mathrm{TM}$. *où* R *désigne le tenseur de courbure de* (M, g).

Preuve:
La preuve est une conséquence directe de lemme 2.7.1.

2.8 Métrique de Cheeger-Gromoll généraliseé et harmonicité

Nous établissons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un champ de vecteurs soit harmonique par rapport à la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée. Nous construisons également quelques exemples de champs de vecteurs harmoniques.

2.8.1 Harmonicité d'un champ de vecteurs $\mathrm{X} : (\mathrm{M}, g) \to (\mathrm{TM}, \bar{g})$

Lemme 2.8.1 *Soit* (M, g) *une variété riemannienne. Si* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *sont des champs de vecteurs sur* M *et* $(x, u) \in \mathrm{TM}$ *tels que* $Y_x = u$*, alors on a :*

$$d_xY(X_x) = X^H_{(x,u)} + (\nabla_X Y)^V_{(x,u)}. \tag{2.1}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane
Wondershare PDFelement

Preuve
Soit (U, x^i) une carte locale de M au voisinage de $x \in M$ et $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j)$ la carte induite sur TM.
Si $X_x = X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ et $Y_x = Y^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = u$, alors:

$$d_xY(X_x) = X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{(x,u)} + X^i(x)\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(x) \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_{(x,u)}. \tag{2.2}$$

La composante horizontale est donnée par :

$$(d_xY(X_x))^h = X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{(x,u)} - X^i(x)Y^j(x)\Gamma^k_{ij}(x) \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_{(x,u)} = X^H_{(x,u)}, \tag{2.3}$$

et la composante verticale par :

$$(d_xY(X_x))^v = \left\{X^j(x)\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(x) + X^i(x)Y^j(x)\Gamma^k_{ij}(x)\right\} \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_{(x,u)} = (\nabla_X Y)^V_{(x,u)}. \tag{2.4}$$

Wondershare PDFelement

Lemme 2.8.2
Soit (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* m *et* $(\mathrm{TM}, \bar{g})$ *le fibré tangent munie de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée.*
Si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*, alors la densité d'énergie associée à* X *est donnée par:*

$$e(\mathrm{X}) = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}_g\left[\alpha g(\nabla \mathrm{X}, \nabla \mathrm{X}) + \beta g(\nabla \mathrm{X}, u)^2\right] \tag{2.84}$$

Preuve:
Soit $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ et $(E_1, ..., E_m)$ est une base orthonormée locale sur M, alors:

$$e(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \tilde{g}(d\mathrm{X}(E_i), d\mathrm{X}(E_i)).$$

En utilisant le Lemme 2.8.1, on obtient:

$$\begin{aligned}
e(\mathrm{X}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \tilde{g}(E_i^H + (\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V, E_i^H + (\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} [\tilde{g}(E_i^H, E_i^H) + \tilde{g}((\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V, (\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V)] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} [g(E_i, E_i) + \alpha g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \nabla_{E_i}\mathrm{X}) + \beta g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, u)^2]
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$= \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{trace}_g\left[\alpha g(\nabla \mathrm{X}, \nabla \mathrm{X}) + \beta g(\nabla \mathrm{X}, u)^2\right]$$

Théorème 2.8.1 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* m *et* $(\mathrm{TM}, \bar{g})$ *le fibré tangent munie de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée. Si* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*, alors le champ de tension associé à* X *est donné par:*

$$\tau(\mathrm{X}) = [\operatorname{trace}_g(\alpha R(\mathrm{X}, \nabla \mathrm{X})*)]^H + [\operatorname{trace}_g A(\mathrm{X})]^V \qquad (2.85)$$

où $A(\mathrm{X})$ *est une application bilinéaire définie par :*
$$A(\mathrm{X}) = \nabla^2\mathrm{X} + \frac{2\alpha'}{\alpha} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X})\nabla \mathrm{X} + [\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta} g(\nabla \mathrm{X}, \nabla \mathrm{X}) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta)} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X})^2]\mathrm{X}.$$
avec $||\mathrm{X}||^2 = g(\mathrm{X}, \mathrm{X})$.

Preuve:
Soit $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ et $(E_i)_{i=1..m}$ est une base orthonormée locale sur M tel que $(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i)_x = 0$ et $\mathrm{X}_x = u$, alors:

$$\tau(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} \left\{\nabla^{\mathrm{X}}_{E_i} d\mathrm{X}(E_i) - d\mathrm{X}(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i)\right\}_x$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{\tilde{\nabla}_{d\mathrm{X}(E_i)} d\mathrm{X}(E_i)\right\}_{(x,u)}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{\tilde{\nabla}_{[E_i^H + (\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V]}[E_i^H + (\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V]\right\}_{(x,u)}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{\tilde{\nabla}_{E_i^H} E_i^H + \tilde{\nabla}_{E_i^H}(\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V + \tilde{\nabla}_{(\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V}(E_i)^H + \tilde{\nabla}_{(\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V}(\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V\right\}_{(x,u)}$$

En utilisant le Théoreme 2.7.1, on obtient:

$$\tau(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} \Big[(\nabla_{E_i} E_i)^H - \frac{1}{2}(R(E_i, E_i)\mathrm{X})^V + (\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V$$
$$+ \frac{\alpha}{2}(R(\mathrm{X}, \nabla_{E_i}\mathrm{X})E_i)^H + \frac{\alpha}{2}(R(\mathrm{X}, \nabla_{E_i}\mathrm{X})E_i)^H$$
$$+ \frac{\alpha'}{\alpha}[g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \mathrm{X})(\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V + g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \mathrm{X})(\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V]$$
$$+ [\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta} g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \nabla_{E_i}\mathrm{X}) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta)} g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \mathrm{X}) g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \mathrm{X})]\mathrm{X}^V\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{m} [\alpha(R(\mathrm{X}, \nabla_{E_i}\mathrm{X})E_i)^H + (\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V + \frac{2\alpha'}{\alpha} g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \mathrm{X})(\nabla_{E_i}\mathrm{X})^V$$
$$+ [\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta} g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \nabla_{E_i}\mathrm{X}) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta)} g(\nabla_{E_i}\mathrm{X}, \mathrm{X})^2]\mathrm{X}^V]$$
$$= \Big[\operatorname{trace}_g(\nabla^2\mathrm{X} + \frac{2\alpha'}{\alpha} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X})\nabla \mathrm{X} + [\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta} g(\nabla \mathrm{X}, \nabla \mathrm{X}) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta)} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X})^2]\mathrm{X})\Big]^V$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$+ [\mathrm{trace}_g(\alpha R(\mathrm{X}, \nabla \mathrm{X})*)]^H$

Théorème 2.8.2 *Soit* (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* m *et* $(\mathrm{TM}, \tilde{g})$ *le fibré tangent munie de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée.* $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$, *alors* X *est harmonique si et seulement les conditions suivantes sont vérifiées:*

$$\mathrm{trace}_g(\alpha R(\mathrm{X}, \nabla \mathrm{X})*) = 0 \qquad (2.86)$$

et

$$\mathrm{trace}_g \Big(\nabla^2 \mathrm{X} + \frac{2\alpha'}{\alpha} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X}) \nabla \mathrm{X}$$
$$+ [\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\mathrm{X}||^2 \beta} g(\nabla \mathrm{X}, \nabla \mathrm{X}) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\mathrm{X}||^2\beta)} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X})^2] \mathrm{X}\Big) = 0 \qquad (2.87)$$

Preuve:
Le résultat est une conséquence directe du Théorème 2.8.1.

Corollaire 2.8.1
Soit (M, g) *une variété Riemannienne de dimension* m *et* $(\mathrm{TM}, \tilde{g})$ *le fibré tangent munie de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée.*
Si $\mathrm{X} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *est parallèle (i.e* $\nabla \mathrm{X} = 0$), *alors* X *est harmonique.*

Wondershare PDFelement

Exemple 2.8.1 *Soit* $\mathbb{R}^n$ *muni de la métrique canonique et soit le champ de vecteurs:*

$$\mathrm{X} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{T}\mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \mathrm{X}_x = (\mathrm{X}^1_x, ..., \mathrm{X}^n_x)$$

on obtient:

$$\tau(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial^2 \mathrm{X}^1}{\partial x_i^2}, ..., \frac{\partial^2 \mathrm{X}^n}{\partial x_i^2})$$

1. *Si* X *est constant , alors* X *est harmonique.*
2. *Si* $\mathrm{X}^i = a_i x_i$ *avec* $= a_i \neq 0$, *alors* X *est harmonique.* $(\tau(\mathrm{X} = 0))$, *mais*

$$\nabla \mathrm{X} = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_i \neq 0$$

En effet:

$$\nabla \mathrm{X}(\partial x_j) = \nabla_{\partial x_j} \mathrm{X} = \sum_i a_i \nabla_{\partial x_j} (x_i \frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_i a_i \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} = a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Exemple 2.8.2 *Soit* $\mathbb{S}^1$ *le cercle unité munie de la métrique*

$$g_{\mathbb{S}^1} = \frac{4}{(1+x^2)^2}dx^2.$$

Comme $\mathbb{S}^1$ *est compact alors:*
Le champ de vecteurs $X = a(x)\frac{\partial}{\partial x}$, $a \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ *est harmonique si et seulement s'il est parallèle. De plus on a*

$$\begin{aligned}\nabla X = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} a\frac{\partial}{\partial x} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial a}{\partial x} + a\Gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{2x}{1+x^2}a = 0 \\ \Leftrightarrow a(x) = k(1+x^2), k \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow X = k(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x}, k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Wondershare PDFelement

Théorème 2.8.3 *Soit* $(\mathbb{R}^m, g_0)$ *l'espace euclidien réel et* $(T\mathbb{R}^m, \tilde{g}_0)$ *le fibré tangent munie de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée.*
Si $X = (X^1, ..., X^m) \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$, *alors* X *est harmonique si et seulement si* X *vérifie le système d'équations suivant:*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 X^k}{\partial (x^i)^2} + \sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{2\alpha'}{\alpha}X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \frac{\beta-\alpha'}{\alpha+||X||^2\beta}X^k(\frac{\partial X^j}{\partial x^i})^2\Big)$$

$$+\frac{\alpha\beta'-2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha+||X||^2\beta)}X^k\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}X^j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)^2 = 0$$

Preuve:
Soit $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1...m}$ une base orthonormée locale sur $\mathbb{R}^m$. Utilisant le Théoreme 2.8.2, on obtient:
$\tau(X) = 0$ i.e les équations (2.86) et (2.87) sont vérifiés.

Supprimer filigrane
Wondershare PDFelement

comme $\mathbb{R}^m$ est plat, alors l'équation (2.86) est évidente. par conséquent:

$$
\begin{aligned}
\tau(\mathrm{X}) = 0 \Leftrightarrow\ & trace_g(\nabla^2 \mathrm{X} + \frac{2\alpha'}{\alpha} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X})\nabla \mathrm{X} \\
& + [\frac{\beta-\alpha'}{\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta} g(\nabla \mathrm{X}, \nabla \mathrm{X}) + \frac{\alpha\beta'-2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta)} g(\nabla \mathrm{X}, \mathrm{X})^2]\mathrm{X}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X} + \frac{2\alpha'}{\alpha} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X}, \mathrm{X})(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X}) \\
& + [\frac{\beta-\alpha'}{\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X}) + \frac{\alpha\beta'-2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta)} g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \mathrm{X}, \mathrm{X})^2]\mathrm{X}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial^2 \mathrm{X}^k}{\partial (x^i)^2} \frac{\partial}{\partial x^k}) + \frac{2\alpha'}{\alpha} \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x^i} \mathrm{X}^j) \sum_{k=1}^{m} (\frac{\partial \mathrm{X}^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k}) \\
& + [\frac{\beta-\alpha'}{\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta} \sum_{j=1}^{m} (\frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x^i})^2 + \frac{\alpha\beta'-2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta)} (\sum_{j=1}^{m} \mathrm{X}^j \frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x^i})^2] \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{X}^k \frac{\partial}{\partial x^k})) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 \mathrm{X}^k}{\partial (x^i)^2} + \sum_{i,j=1}^{m} (\frac{2\alpha'}{\alpha} \mathrm{X}^j \frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \mathrm{X}^k}{\partial x^i} + \frac{\beta-\alpha'}{\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta} \mathrm{X}^k (\frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x^i})^2) \\
& + \frac{\alpha\beta'-2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta)} \mathrm{X}^k \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{m} \mathrm{X}^j \frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x^i})^2 = 0,
\end{aligned}
$$

pour tout $k = 1, ..., m$.

Corollaire 2.8.2 *Soit $(\mathbb{R}^m, g_0)$ l'espace euclidien réel et $(\mathrm{T}\mathbb{R}^m, \tilde{g}_0)$ le fibré tangent munie de la métrique de Cheeger-Gromoll généralisée.*
Si $\mathrm{X} = (\mathrm{X}^1, ..., \mathrm{X}^m) \in \Gamma(\mathrm{T}\mathbb{R}^m)$, Si α et β sont des fonctions constantes, alors X est harmonique si et seulement si pour tout $k = 1, ..., m$:

$$
\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 \mathrm{X}^k}{\partial (x^i)^2} + \frac{\beta}{\alpha+||\mathrm{X}||^2\beta} \mathrm{X}^k \sum_{i,j=1}^{m} \left(\frac{\partial \mathrm{X}^j}{\partial x^i}\right)^2 = 0 \qquad (2.88)
$$

Remarque 2.8.1 *En utilisant le corollaire 2.8.2 nous pouvons construire de nombreux exemples de champs de vecteurs harmoniques non triviaux.*

Exemple 2.8.3 *Si $\mathbb{R}^n$ muni de la métrique canonique et $\mathrm{T}\mathbb{R}^m$ son fibré tangent équipé de la métrique de cheeger-gromoll généralisée . Du corollaire 2.8.2, on en déduit que:*

1. *$\mathrm{X} = (y(x_1), 0, ..., 0) \in \Gamma(\mathrm{T}\mathbb{R}^m)$ est un champ de vecteurs harmonique si et seulement la fonction y est solution de l'équation différentielle:*

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$y'' + \frac{\beta y' y}{\alpha + \beta y^2} y' = 0 \qquad (2.89)$$

2. $X = (y(x_1, x_2), 0, ..., 0) \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$ *est un champ de vecteurs harmonique si et seulement la fonction* y *est solution de l'équation aux dérivées partielles:*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\beta y}{\alpha + \beta y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = 0 \qquad (2.90)$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

2.8.2 Harmonicité de l'application $\sigma : (M, g) \to (TN, \tilde{h})$

Lemme 2.8.3 .
Soit (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variétés riemanniennes et* $(TN, \tilde{h})$ *le fibré tangent de* N *équipé de la métrique de cheeger-gromoll généralisée. Soit l'appliation*

$$\sigma : (M, g) \longrightarrow (TN, \tilde{h})$$
$$x \longmapsto (\varphi(x), v)$$

tel que $\varphi = \pi_{TN} \circ \sigma$, $v = Y_{\varphi(x)} \in T_{\varphi(x)}N$ *où* $Y \in \Gamma(TN)$, *et* $\pi_{TN} : TN \to N$ *est la projection canonique. Alors, pour tout* $X \in \Gamma(TM)$*:*

$$d\sigma(X) = (d\varphi(X))^H + (\nabla^{\varphi}_X \sigma)^V \qquad (2.91).$$

Preuve:
En utilisant le Lemme 2.8.1, on obtient:

$$\begin{aligned} d_x\sigma(X_x) &= d_x(Y \circ \varphi)(X_x) \\ &= d_{\varphi(x)} Y(d\varphi(X_x)) \\ &= (d\varphi(X))^H_{(\varphi(x),v)} + (\nabla_{d\varphi(X)} Y)^V_{(\varphi(x),v)} \\ &= (d\varphi(X))^H_{(\varphi(x),v)} + (\nabla^{\varphi}_X \sigma)^V_{(\varphi(x),v)}. \end{aligned}$$

Théorème 2.8.4 *Soit* (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variétés riemanniennes et* $(TN, \tilde{h})$ *le fibré tangent de* N *équipé de la métrique de cheeger-gromoll généralisée. Le champ de tension de l'application*

$$\sigma : (M, g) \longrightarrow (TN, \tilde{h})$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$x \longmapsto (\varphi(x), v)$$

tel que $\varphi = \pi_{\mathrm{TN}} \circ \sigma$, *est donnée par:*

$$\tau(\sigma) = [\tau(\varphi) + \mathrm{trace}_g(\alpha R^{\mathrm{N}}(\sigma, \nabla^{\varphi}\sigma)d\varphi(*))]^H + [\mathrm{trace}_g(A(\sigma))]^V \qquad (2.92).$$

où $(A(\sigma))$ *est une application bilinéaire définie par*

$$A(\sigma) = (\nabla^{\varphi})^2\sigma + \frac{2\alpha'}{\alpha}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \sigma)\nabla^{\varphi}\sigma + [\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\sigma||^2\beta}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \nabla^{\varphi}\sigma) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\sigma||^2\beta)}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \sigma)^2]\sigma.$$

avec $||\sigma||^2 = h(\sigma, \sigma) = r$.

Preuve:
Soit $x \in \mathrm{M}$ et $\{E_i\}_{i=1..m}$ une base orthonormée locale sur M tel que $(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i}E_i)_x = 0$ et $\sigma(x) = U_{\varphi(x)} = v$. Du Lemme 2.8.3 et Théorème 2.7.1, on obtient:

$\tau(\sigma)_x = \mathrm{trace}_g(\nabla d\sigma)_x$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \tilde{\nabla}_{d\sigma(E_i)} d\sigma(E_i) \right\}_{(\varphi(x),v)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \tilde{\nabla}_{[(d\varphi(E_i))^H + (\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V]}[(d\varphi(E_i))^H + (\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V] \right\}_{(\varphi(x),v)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (\tilde{\nabla}_{(d\varphi(E_i))^H}(d\varphi(E_i))^H + \tilde{\nabla}_{(d\varphi(E_i))^H}(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V + \tilde{\nabla}_{(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V}(d\varphi(E_i))^H$$
$$+ \tilde{\nabla}_{(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V}(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V)_{(\varphi(x),v)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} ((\nabla^{\mathrm{N}}_{d\varphi(E_i)}d\varphi(E_i))^H - \frac{1}{2}(R^N(d\varphi(E_i), d\varphi(E_i))\sigma)^V + (\nabla^{\mathrm{N}}_{d\varphi(E_i)}\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V$$
$$+ \frac{\alpha}{2}(R^N(v, \nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)d\varphi(E_i))^H + \frac{\alpha}{2}(R^N(v, \nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)d\varphi(E_i))^H$$
$$+ \frac{\alpha'}{\alpha}[h(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma, v)(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V + h(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma, v)(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V] +$$
$$(\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + r\beta}h(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma, \nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + r\beta)}h(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma, v)^2)U^V)_{(\varphi(x),v)}.$$

Après compensation des valeurs de $r = h(\sigma, \sigma) = ||\sigma||^2$ et $\sigma(x) = U_{\varphi(x)} = v$, on obtient:

$$\tau(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} ((\nabla^{\varphi}_{E_i}d\varphi(E_i))^H + \alpha(R^N(\sigma, \nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)d\varphi(E_i))^H$$
$$+ (\nabla^{\varphi}_{E_i}\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V + \frac{2\alpha'}{\alpha}h(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma, \sigma)(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma)^V +$$
$$(\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\sigma||^2\beta}h(\nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma, \nabla^{\varphi}_{E_i}\sigma) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\sigma||^2\beta)}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \sigma)^2)\sigma^V).$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$\tau(\sigma) = \left[\tau(\varphi) + \mathrm{trace}_g(\alpha R^{\mathrm{N}}(\sigma, \nabla^{\varphi}\sigma)d\varphi(*))\right]^H$$
$$+[\mathrm{trace}_g((\nabla^{\varphi})^2 + \frac{2\alpha'}{\alpha}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \sigma)\nabla^{\varphi}\sigma$$
$$+(\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\sigma||^2\beta}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \nabla^{\varphi}\sigma) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\sigma||^2\beta)}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \sigma)^2)\sigma)]^V.$$

Théorème 2.8.5 *Soit* (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variétés riemanniennes et* $(\mathrm{TN}, \tilde{h})$ *le fibré tangent de* N *équipé de la métrique de cheeger-gromoll généralisée. L'application*

$$\begin{aligned} \sigma : (\mathrm{M}, g) &\longrightarrow (\mathrm{TN}, \tilde{h}) \\ x &\longmapsto (\varphi(x), v) \end{aligned}$$

tel que $\varphi = \pi_{\mathrm{TN}} \circ \sigma$, *est harmonique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:*

$$\tau(\varphi) = -\,\mathrm{trace}_g(\alpha R^{\mathrm{N}}(\sigma, \nabla^{\varphi}\sigma)d\varphi(*)) \qquad (2.93)$$

et $0 = \mathrm{trace}_g\Big[(\nabla^{\varphi})^2 + \frac{2\alpha'}{\alpha}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \sigma)\nabla^{\varphi}\sigma$

$$+\Big(\frac{\beta - \alpha'}{\alpha + ||\sigma||^2\beta}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \nabla^{\varphi}\sigma) + \frac{\alpha\beta' - 2\alpha'\beta}{\alpha(\alpha + ||\sigma||^2\beta)}h(\nabla^{\varphi}\sigma, \sigma)^2\Big)\sigma\Big] \qquad (2.94)$$

2.8.3 Harmonicité de l'application $\phi : (\mathrm{TM}, \tilde{g}) \to (\mathrm{N}, h)$

Lemme 2.8.4 *Soit* (M^m, g) *une variété riemannienne de dimension* m *et* $(\mathrm{TM}, \tilde{g})$ *le fibré tangent de* N *équipé de la métrique de cheeger-gromoll généralisée. La projection canonique:*

$$\begin{aligned} \pi : (\mathrm{TM}, \tilde{g}) &\longrightarrow (\mathrm{M}, g) \\ (x, u) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est harmonique i.e $\tau(\pi) = 0$.

Preuve:
Soit $(x, u) \in \mathrm{TM}$ et $\{E_i\}_{i=1..m}$ tel que $E_1 = \frac{u}{||u||}$ est une base orthonormale sur M en x, alors :

$$\left\{E_i^H, \frac{1}{\sqrt{\alpha + r\beta}}E_1^V, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_j^V\right\}_{i=1..m, j=2..m}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

est une base orthonormale sur TM en (x,u).
$\tau(\pi) = \mathrm{trace}_{\tilde g}\, \nabla d\pi$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left\{ \nabla^{\pi}_{E_i^H} d\pi(E_i^H) - d\pi(\nabla^{\mathrm{TM}}_{E_i^H} E_i^H) \right\}$$

$$+\nabla^{\pi}_{(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}}E_1^V)} d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}}E_1^V) - d\pi\nabla^{\mathrm{TM}}_{(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}}E_1^V)}(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}}E_1^V))$$

$$+\sum_{j=2}^{m} \left\{ \nabla^{\pi}_{(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_j^V)} d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_j^V) - d\pi(\nabla^{\mathrm{TM}}_{(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_j^V)}(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_j^V)) \right\},$$

comme $d\pi(E_i^V) = 0$ et $d\pi(E_i^H) = E_i \circ \pi$ alors :

$$\tau(\pi) = \sum_{i=1}^{m} \{ (\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i) \circ \pi - d\pi(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i)^H \}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}} d\pi[E_1^V(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}})E_1^V + \frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}} \nabla^{\mathrm{TM}}_{E_1^V} E_1^V]$$

$$-\sum_{j=2}^{m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} d\pi[E_j^V(\frac{1}{\sqrt{\alpha}})E_j^V + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \nabla^{\mathrm{TM}}_{E_j^V} E_j^V] \right\}$$

$$= -\frac{1}{\alpha+r\beta} d\pi(\nabla^{\mathrm{TM}}_{E_1^V} E_1^V) - \sum_{j=2}^{m} \left\{ \frac{1}{\alpha} d\pi(\nabla^{\mathrm{TM}}_{E_j^V} E_j^V) \right\}$$

$= 0.$

Théorème 2.8.6 *Soit* (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variétés riemanniennes et* $(\mathrm{TM}^m, \tilde g)$ *le fibré tangent de* M *équipé de la métrique de cheeger-gromoll généralisée.*
Soit $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$ *une application lisse. Le champ de tension de l'application:*

$$\phi : (\mathrm{TM}, \tilde g) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$$

$$(x,y) \longmapsto \varphi(x)$$

est donné par :

$$\tau(\phi) = \tau(\varphi) \circ \pi$$

Preuve:
Soit $(x,u) \in \mathrm{TM}$ et $\{E_i\}_{i=1..m}$ tel que $E_1 = \frac{u}{||u||}$ est une base orthonormale sur M en x, alors:

$$\left\{ E_i^H, \frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}}E_1^V, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}E_j^V \right\}_{i=1..m, j=2..m}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

est une base orthonormale sur TM en (x,u).
Comme ϕ est défini par:

$$\phi : (\mathrm{TM}, \tilde{g}) \underset{\rightarrow}{\pi} (\mathrm{M}, g) \underset{\rightarrow}{\varphi} (\mathrm{N}, h)$$

$$(x,y) \longmapsto x \longmapsto \varphi(x)$$

i.e $\quad \phi = \varphi \circ \pi$, on obtient:
$\tau(\phi) = \tau(\varphi \circ \pi) = d\varphi(\tau(\pi)) + \mathrm{trace}_{\tilde{g}} \nabla d\varphi(d\pi, d\pi)$.
Nous avons:
$\mathrm{trace}_{\tilde{g}} \nabla d\varphi(d\pi, d\pi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \left\{ \nabla^{\varphi}_{d\pi(E_i^H)} d\varphi(d\pi(E_i^H)) - d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{d\pi(E_i^H)} d\pi(E_i^H)) \right\}$
$+ \displaystyle\sum_{j=2}^{m} \left\{ \nabla^{\varphi}_{d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_j^V)} d\varphi(d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_j^V)) \right\}$
$- \displaystyle\sum_{j=2}^{m} \left\{ d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_j^V)} d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} E_j^V)) \right\}$
$+ \nabla^{\varphi}_{d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}} E_1^V)} d\varphi(d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}} E_1^V))$
$- d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}} E_1^V)} d\pi(\frac{1}{\sqrt{\alpha+r\beta}} E_1^V))$
$= \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \{ (\nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i)) \circ \pi - d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i) \circ \pi \}$
$= \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \{ \nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) - d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i) \} \circ \pi$
$= \tau(\varphi) \circ \pi$.
En utilisant le Lemme 2.7.4, on obtient:

$$\tau(\phi) = \tau(\varphi) \circ \pi$$

Corollaire 2.8.3 *Soit* (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variétés riemanniennes et* $(\mathrm{TM}, \tilde{g})$ *le fibré tangent de* M *équipé de la métrique de cheeger-gromoll généralisée. Alors l'application*

$$\phi : (\mathrm{TM}, \tilde{g}) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$$

$$(x,y) \longmapsto \varphi(x)$$

est harmonique si et seulement si φ *est harmonique.*

Les résultats précédents sont publiés dans l'article:
ON GENERALIZED CHEEGER-GROMOLL METRIC AND HARMONICITY,
Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.
Vol 69, N$^{\underline{o}}$ 1, 629-645. (2020).

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Chapter 3

Géometrie de la Métrique Mus-gradient et Harmonicité

3.1 Géometrie de la Métrique Mus-gradient

3.1.1 Métrique Mus-gradient

Definition 3.1.1 *Soient* (M^m, g) *une variété Riemannienne et* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ *telle que* $\operatorname{grad} f \neq 0$*. Sur* M*, nous définissons une nouvelle métrique appelée Mus-gradient notée* $\tilde{g}$ *par:*

$$\tilde{g}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = (g + df \otimes df)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \mathrm{X}(f)\mathrm{Y}(f) \tag{3.1}$$

où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*,* f *est appelé fonction Mus-gradient déformation.*
Dans la suite, $||.||$ *désigne la norme par rapport à* g*.*

Wondershare PDFelement

Notons que $\tilde{g}$ est une métrique conforme à g sur la distribution orthogonale à $\operatorname{grad} f$, ou si M est une variété riemannienne unidimensionnelle.

Remarque 3.1.1 .
Soit $(E_i)_{i=1,\dots,m}$ *avec* $E_1 = \dfrac{\operatorname{grad}\ f}{||\operatorname{grad}\ f||}$*, une base orthonormale de champs de vecteurs associée à* g*, on a:*
$\tilde{g}(E_1, E_1) = 1 + ||\operatorname{grad}\ f||^2$,
$\tilde{g}(E_i, E_1) = 0 \qquad i = 2, \dots, m$,
$\tilde{g}(E_i, E_j) = \delta_{ij} \qquad i, j = 2, \dots, m,$.
On pose : $\tilde{E}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{1 + ||\operatorname{grad}\ f||^2}} E_1, \ \ \tilde{E}_i = E_i \ \ i = 2, \dots, m.$
Alors $(\tilde{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ *est une base orthonormale de champ de vecteurs associée à*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$\tilde{g}$. Relativement à la base $(\tilde{E}_i)_{i=1,\ldots,m}$, la matrice associée à $\tilde{g}$ est la matrice unitaire.

Dans la suite, on pose $\alpha = 1 + ||\operatorname{grad} \ f||^2$.

Remarque 3.1.2 *Soient* $X \in \Gamma(TM)$ *et* grad *(resp* $\widetilde{\operatorname{grad}}$*) désigne le gradient associée à g (resp $\tilde{g}$), alors:*

$$\widetilde{\operatorname{grad}}\, f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{grad} \ f \qquad (3.2)$$

En effet:
$X(f) = \tilde{g}(X, \widetilde{\operatorname{grad}}\, f)$,
d'autre part
$X(f) = g(X, \operatorname{grad} \ f) = \tilde{g}(X, \operatorname{grad} \ f) - X(f)(\operatorname{grad} \ f)(f)$.
Donc

$$\tilde{g}(X, \widetilde{\operatorname{grad}}\, f) = \tilde{g}(X, \operatorname{grad} \ f) - X(f)(\operatorname{grad} \ f)(f).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\tilde{g}(X, \widetilde{\operatorname{grad}}\, f) = \tilde{g}(X, \operatorname{grad} \ f) - \tilde{g}(X, \widetilde{\operatorname{grad}}\, f)||\operatorname{grad} \ f||^2$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\tilde{g}(X, \widetilde{\operatorname{grad}}\, f(1 + ||\operatorname{grad} \ f||^2)) = \tilde{g}(X, \operatorname{grad} \ f).$$

d'où

$$\widetilde{\operatorname{grad}}\, f = \frac{1}{1 + ||\operatorname{grad} \ f||^2} \operatorname{grad} \ f = \frac{1}{\alpha} \operatorname{grad} \ f$$

3.1.2 Connexion de Levi-Civita

Théorème 3.1.1 *Soient* (M^m, g) *une variété Riemannienne et* $\tilde{g}$ *une métrique Mus-gradient définie sur* M.
Si ∇ *(rsp* $\tilde{\nabla}$*) désigne la connexion de Levi-Civita associée à g (resp $\tilde{g}$), Alors pour tout* $X, Y \in \Gamma(TM)$*, nous avons:*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \tfrac{1}{\alpha} \operatorname{Hess}_f(X, Y) \operatorname{grad} f, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \qquad (3.3)$$

où $\quad \alpha = 1 + ||\operatorname{grad} \ f||^2$.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Preuve: Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. En utilisant la formule de Kozul, on obtient:

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= X\tilde{g}(Y,Z)+Y\tilde{g}(Z,X)-Z\tilde{g}(X,Y)+\tilde{g}(Z,[X,Y])+\tilde{g}(Y,[Z,X]) \\
&\quad -\tilde{g}(X,[Y,Z]) \\
&= X[g(Y,Z)+Y(f)Z(f)]+Y[g(Z,X)+Z(f)X(f)] \\
&\quad -Z[g(X,Y)+X(f)Y(f)]+g(Z,[X,Y])+Z(f)[X,Y](f)+g(Y,[Z,X]) \\
&\quad +Y(f)[Z,X](f)-g(X,[Y,Z])-X(f)[Y,Z](f) \\
&= Xg(Y,Z)+X(Y(f))Z(f)+Y(f)X(Z(f))+Yg(Z,X)+Y(Z(f))X(f) \\
&\quad +Z(f)Y(X(f))-Zg(X,Y)-Z(X(f))Y(f)-X(f)Z(Y(f)) \\
&\quad +g(Z,[X,Y])+Z(f)[X(Y(f))-Y(X(f))]+g(Y,[Z,X]) \\
&\quad +Y(f)[Z(X(f))-X(Z(f))]-g(X,[Y,Z])-X(f)[Y(Z(f))-Z(Y(f))] \\
&= Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)+g(Z,[X,Y]) \\
&\quad +g(Y,[Z,X])-g(X,[Y,Z])+2X(Y(f))Z(f) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z)+2X(Y(f))Z(f) \\
&= 2\tilde{g}(\nabla_X Y, Z)-2(\nabla_X Y)(f)Z(f)+2X(Y(f))Z(f) \\
&= 2\tilde{g}(\nabla_X Y, Z)+2[X(Y(f))-(\nabla_X Y)(f)]\tilde{g}(\widetilde{\mathrm{grad}}\, f, Z) \\
&= 2\tilde{g}(\nabla_X Y+[X(Y(f))-(\nabla_X Y)(f)]\widetilde{\mathrm{grad}}\, f, Z) \\
&= 2\tilde{g}(\nabla_X Y+g(\nabla_X \,\mathrm{grad}\; f, Y)\widetilde{\mathrm{grad}}\, f, Z)
\end{aligned}$$

donc $\qquad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(\nabla_X \,\mathrm{grad}\; f, Y)\widetilde{\mathrm{grad}}\, f.$
De la formule (3.2), on obtient:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{Hess}_f(X,Y)\,\mathrm{grad}\, f$$

où $\qquad \alpha = 1 + ||\,\mathrm{grad}\; f||^2.$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Corollaire 3.1.1 *Soient* (M^m, g) *une variété Riemannienne et* $\tilde{g}$ *une métrique Musgradient définie sur* M.
Si ∇ *(rsp* $\tilde{\nabla}$*) désigne la connexion de Levi-Civita associée à* g *(resp* $\tilde{g}$*), Alors pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*, nous avons:*

$$\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f = \nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f + \frac{1}{2\alpha}\mathrm{X}(\alpha) \operatorname{grad} f. \qquad (3.4)$$

où $\quad \alpha = 1 + ||\operatorname{grad} f||^2.$

Preuve: De la formule (3.2), on a

$$\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f = \nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f + \frac{1}{\alpha} g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) \operatorname{grad} f$$

D'autre part

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) = \frac{1}{2}\mathrm{X}g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) &= \frac{1}{2}\mathrm{X}(||\operatorname{grad} f||^2) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{X}(\alpha - 1) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{X}(\alpha) \end{aligned}$$

d'où

$$\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f = \nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f + \frac{1}{2\alpha}\mathrm{X}(\alpha) \operatorname{grad} f$$

3.2 Tenseur de Courbure de la métrique Mus-gradient

3.2.1 Tenseur de Courbure

Théorème 3.2.1 *Soient* (M^m, g) *une variété Riemannienne et* $\tilde{g}$ *la métrique Mus-gradient définie sur* M.
Si R *(rsp* $\tilde{\mathrm{R}}$*) désigne le tenseur de courbure associée à* g *(resp* $\tilde{g}$*), Alors pour tout* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{TM})$*, nous avons:*

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z &- \frac{1}{\alpha} g\big(R(X,Y)Z, \operatorname{grad} f\big) \operatorname{grad} f \\ &+ \frac{1}{2\alpha^2}\big[Y(\alpha)\operatorname{Hess}_f(X,Z) - X(\alpha)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)\big] \operatorname{grad} f \\ &+ \frac{1}{\alpha}\big[\operatorname{Hess}_f(Y,Z)\nabla_X \operatorname{grad} f - \operatorname{Hess}_f(X,Z)\nabla_Y \operatorname{grad} f\big]. \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Preuve: Pour tous $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{TM})$

$$\tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z} = \tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}\tilde{\nabla}_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z} - \tilde{\nabla}_{\mathrm{Y}}\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}\mathrm{Z} - \tilde{\nabla}_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\mathrm{Z}.$$

$$
\begin{aligned}
i)\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}\tilde{\nabla}_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z} &= \tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}(\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z} + \frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\operatorname{grad} f) \\
&= \tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}(\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z}) + \tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}(\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\operatorname{grad} f) \\
&= \nabla_{\mathrm{X}}\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z} + \frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z})\operatorname{grad} f \\
&+\mathrm{X}[\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})]\operatorname{grad} f + \frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f \\
&= \nabla_{\mathrm{X}}\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z}+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z})\operatorname{grad} f-\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{X}(\alpha)\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\operatorname{grad} f \\
&+\frac{1}{\alpha}[g(\nabla_{\mathrm{X}}\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})+g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z})]\operatorname{grad} f+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f \\
&+\frac{1}{2\alpha^2}\mathrm{X}(\alpha)g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\operatorname{grad} f \\
&= \nabla_{\mathrm{X}}\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z}+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z})\operatorname{grad} f-\frac{1}{2\alpha^2}\mathrm{X}(\alpha)g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\operatorname{grad} f \\
&+\frac{1}{\alpha}[g(\nabla_{\mathrm{X}}\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})+g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z})]\operatorname{grad} f+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii)\tilde{\nabla}_{\mathrm{Y}}\tilde{\nabla}_{\mathrm{X}}\mathrm{Z} &= \nabla_{\mathrm{Y}}\nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z}+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \nabla_{\mathrm{X}}\mathrm{Z})\operatorname{grad} f-\frac{1}{2\alpha^2}\mathrm{Y}(\alpha)g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\operatorname{grad} f \\
&+\frac{1}{\alpha}[g(\nabla_{\mathrm{Y}}\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})+g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{Z})]\operatorname{grad} f+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f.
\end{aligned}
$$

$$iii)\tilde{\nabla}_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\mathrm{Z} = \nabla_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\mathrm{Z} + \frac{1}{\alpha}g(\nabla_{[\mathrm{X},\mathrm{Y}]}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\operatorname{grad} f.$$

D'où, pour tous $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \Gamma(\mathrm{TM})$,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z} &= \mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z} - \frac{1}{\alpha}g(\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z}, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&+\frac{1}{2\alpha^2}[\mathrm{Y}(f)g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z}) - \mathrm{X}(\alpha)g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})]\operatorname{grad} f \\
&+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f - \frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{X}}\operatorname{grad} f, \mathrm{Z})\nabla_{\mathrm{Y}}\operatorname{grad} f.
\end{aligned}
$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

3.2.2 Courbure sectionnelle

Proposition 3.2.1 *Soient* (M^m, g) *une variété Riemannienne et* $\tilde{g}$ *une métrique Musgradient définie sur* M.
Si K *(rsp* $\tilde{K}$*) désigne la courbure sectionnelle associée à* g *(resp* $\tilde{g}$*) du plan engendrée par* $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\}$*, où* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ *deux champs de vecteurs orthonormés par rapport à* g*, alors on a:*

$$\tilde{K} = \frac{1}{1 + \mathrm{X}(f)^2 + \mathrm{Y}(f)^2}\left[K + \frac{1}{\alpha}[g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{X}) g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) - g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{X})^2]\right]$$

où $\quad \alpha = 1 + ||\operatorname{grad} f||^2$

Preuve: La courbure sectionnelle définie par:

$$\tilde{K} = \frac{\tilde{g}(\tilde{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X})}{\tilde{g}(\mathrm{X}, \mathrm{X})\tilde{g}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}) - \tilde{g}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^2}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X}) &= g(\tilde{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X}) + g(\tilde{R}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \operatorname{grad} f)\mathrm{X}(f) \\
&= g(R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X}) - \frac{1}{\alpha} g(R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z}, \operatorname{grad} f)\mathrm{X}(f) \\
&+ \frac{1}{2\alpha^2}[\mathrm{Y}(\alpha) g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) - \mathrm{X}(\alpha) g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y})]\mathrm{X}(f) \\
&+ \frac{1}{\alpha} g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{X}) - \frac{1}{\alpha} g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \mathrm{X}) \\
&+ g(R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \operatorname{grad} f)\mathrm{X}(f) - \frac{1}{\alpha} g(R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Z}, \operatorname{grad} f)\mathrm{X}(f)\,(\alpha - 1) \\
&+ \frac{1}{2\alpha^2}[\mathrm{Y}(\alpha) g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) - \mathrm{X}(\alpha) g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y})]\mathrm{X}(f)\,(\alpha - 1) \\
&+ \frac{1}{\alpha} g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\mathrm{X}(f) \\
&- \frac{1}{\alpha} g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\mathrm{X}(f) \\
&= g(R(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\mathrm{Y}, \mathrm{X}) + \frac{1}{\alpha}[g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{X}) g(\nabla_{\mathrm{Y}} \operatorname{grad} f, \mathrm{Y}) - g(\nabla_{\mathrm{X}} \operatorname{grad} f, \mathrm{X})^2].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\mathrm{X}, \mathrm{X})\tilde{g}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}) - \tilde{g}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^2 &= [g(\mathrm{X}, \mathrm{X}) + \mathrm{X}(f)^2]\,[g(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}) + \mathrm{Y}(f)^2] - [g(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) + \mathrm{X}(f)\mathrm{Y}(f)] \\
&= 1 + \mathrm{X}(f)^2 + \mathrm{Y}(f)^2.
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

d'où, la division de $\tilde{g}(\tilde{R}(\mathrm{X},\mathrm{Y})\mathrm{Y},\mathrm{X})$ par $\tilde{g}(\mathrm{X},\mathrm{X})\tilde{g}(\mathrm{Y},\mathrm{Y})-\tilde{g}(\mathrm{X},\mathrm{Y})^2$ donne le résultat.

3.2.3 Tenseur de courbure Ricci

Proposition 3.2.2 *Soient* (M^m, g) *une variété Riemannienne et* $\tilde{g}$ *une métrique Musgradient définie sur* M.
Si Ricci (*resp* $\widetilde{\mathrm{Ricci}}$) *désigne le tenseure de courbure de Ricci associée à* g (*resp* $\tilde{g}$). *Alors pour tout* $\mathrm{X}\in\Gamma(\mathrm{TM})$, *nous avons:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\mathrm{X}) = \mathrm{Ricci}(\mathrm{X}) - \frac{1}{\alpha}R(\mathrm{X},\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f - \frac{1}{\alpha}g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{X}),\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f \\
+\frac{1}{2\alpha^2}\left[g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ \alpha)-\mathrm{X}(\alpha)\triangle(f)\right]\mathrm{grad}\ f \\
+\frac{1}{\alpha}\left[\triangle(f)-\frac{1}{2\alpha}g(\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ \alpha)\right]\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f \\
+\frac{1}{4\alpha^2}\mathrm{X}(\alpha)\,\mathrm{grad}\ \alpha-\frac{1}{\alpha}\nabla_{(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f)}\,\mathrm{grad}\ f.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où $\quad \alpha = 1+||\,\mathrm{grad}\ f||^2$.

Preuve:.
Soit $(E_i)_{i=1,\dots,m}$ tel que $E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-1}}||\,\mathrm{grad}\ f||$ une base orthonormale de champs de vecteurs associée à g, alors $(\tilde{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ est une base orthonormale de champs de vecteurs associée à $\tilde{g}$
où $\tilde{E}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\,\mathrm{grad}\ f$, $\tilde{E}_i = E_i\ \ i=2,\dots,m.$
De la définition du tenseur de Ricci, nous avons:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\mathrm{X}) &= \tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{X},\tilde{E}_1)\tilde{E}_1+\sum_{i=2}^{m}\tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{X},E_i)\tilde{E}_i \\
&= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}[\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f-\frac{1}{\alpha}g(R(\mathrm{X},\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f \\
&+\frac{1}{2\alpha^2}[(\mathrm{grad}\ f)(\alpha)g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ f)-\mathrm{X}(\alpha)g(\nabla_{\mathrm{grad}\ f}\,\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ f)]\,\mathrm{grad}\ f \\
&+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{grad}\ f}\,\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ f)\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f-\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ f)\nabla_{\mathrm{grad}\ f}\,\mathrm{grad}\ f]
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=2}^{m}[\mathrm{R}(\mathrm{X},E_i)E_i-\frac{1}{\alpha}g(\mathrm{R}(\mathrm{X},E_i)E_i,\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f\\
&+\frac{1}{2\alpha^2}[E_i(\alpha)g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f,E_i)-\mathrm{X}(\alpha)g(\nabla_{E_i}\,\mathrm{grad}\ f,E_i)]\,\mathrm{grad}\ f\\
&+\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{E_i}\,\mathrm{grad}\ f,E_i)\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f-\frac{1}{\alpha}g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f,E_i)\nabla_{E_i}\,\mathrm{grad}\ f]\\
&=\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\,\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f+\frac{1}{2\alpha^2(\alpha-1)}g(\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ \alpha)\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f\\
&-\frac{1}{4\alpha^2(\alpha-1)}\mathrm{X}(\alpha)\,\mathrm{grad}\ \alpha+\mathrm{Ricci}(\mathrm{X})-\frac{1}{\alpha-1}\,\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{grad}\ f)grad\,f\\
&-\frac{1}{\alpha}g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{X}),\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f+\frac{1}{2\alpha^2}g(\nabla_{\mathrm{X}}grad\,f,\mathrm{grad}\ \alpha)\,\mathrm{grad}\ f\\
&-\frac{1}{2\alpha^2}\mathrm{X}(\alpha)\triangle(f)+\frac{1}{\alpha}\triangle(f)\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f-\frac{1}{2\alpha(\alpha-1)}g(\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ \alpha)\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f\\
&-\frac{1}{\alpha}\nabla_{(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f)}\,\mathrm{grad}\ f+\frac{1}{4\alpha(\alpha-1)}\mathrm{X}(\alpha)\,\mathrm{grad}\ \alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\mathrm{X})=\mathrm{Ricci}(\mathrm{X})&-\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{R}(\mathrm{X},\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f-\frac{1}{\alpha}g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{X}),\mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f\\
&+\frac{1}{2\alpha^2}\,[g(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ \alpha)-\mathrm{X}(\alpha)\triangle(f)]\,\mathrm{grad}\ f\\
&+\frac{1}{\alpha}\left[\triangle(f)-\frac{1}{2\alpha}g(\mathrm{grad}\ f,\mathrm{grad}\ \alpha)\right]\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f\\
&+\frac{1}{4\alpha^2}\mathrm{X}(\alpha)\,\mathrm{grad}\ \alpha-\frac{1}{\alpha}\nabla_{(\nabla_{\mathrm{X}}\,\mathrm{grad}\ f)}\,\mathrm{grad}\ f.
\end{aligned}
$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

3.2.4 La courbure scalaire

Proposition 3.2.3 *Soient* (M^m, g) *une variété Riemannienne et* $\tilde{g}$ *une métrique Musgradient définie sur* M.
Si σ *(rsp* $\tilde{\sigma}$*) désigne la courbure scalaire associée à* g *(resp* $\tilde{g}$*). Alors*

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{2}{\alpha} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), \mathrm{grad}\ f) + \frac{1}{\alpha}\triangle(f)^2 - \frac{1}{\alpha}||\nabla\,\mathrm{grad}\ f||^2 \\
+\frac{1}{\alpha^2} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)\triangle(f). \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Preuve:.
Soit $(E_i)_{i=1,\dots,m}$ tel que $E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha-1}}||\,\mathrm{grad}\ f||$ une base orthonormale de champs de vecteurs associée à g, alors $(\tilde{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ est une base orthonormale de champs de vecteurs associée à $\tilde{g}$
où $\tilde{E}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\mathrm{grad}\ f, \tilde{E}_i = E_i\ \ i = 2, \dots, m.$
De la définition de la courbure scalaire, nous avons:

$$
\tilde{\sigma} = \tilde{g}(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1), \tilde{E}_1) + \sum_{i=2}^{m} \tilde{g}(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(E_i), E_i)
$$

$$
= g(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1), \tilde{E}_1) + \widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1)(f)\tilde{E}_1(f) + \sum_{i=2}^{m}[g(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(E_i), E_i) + \widetilde{\mathrm{Ricci}}(E_i)(f)E_i(f)]
$$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1), \tilde{E}_1) &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f) - \frac{1}{\alpha}R(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f \\
&- \frac{1}{\alpha} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), \mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f \\
&+ \frac{1}{2\alpha^2}[g(\nabla_{\mathrm{grad}\ f}\,\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha) - (\mathrm{grad}\ f)(\alpha)\triangle(f)]\,\mathrm{grad}\ f \\
&+ \frac{1}{\alpha}[\triangle(f) - \frac{1}{2\alpha} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)]\nabla_{\mathrm{grad}\ f}\,\mathrm{grad}\ f \\
&+ \frac{1}{4\alpha^2}(\mathrm{grad}\ f)(\alpha)\,\mathrm{grad}\ \alpha - \frac{1}{\alpha}\nabla_{(\nabla_{\mathrm{grad}\ f}\mathrm{grad}\ f)}, \mathrm{grad}\ f) \\
&= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}[\frac{1}{\alpha} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), \mathrm{grad}\ f) - \frac{1}{4\alpha^2}||\,\mathrm{grad}\ f||^2 \\
&+ \frac{1}{2\alpha^2} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)\triangle(f)]
\end{aligned}
$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha^2(\alpha-1)} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), \mathrm{grad}\ f) - \frac{1}{4\alpha^3(\alpha-1)} ||\,\mathrm{grad}\ f||^2 \\
&+ \frac{1}{2\alpha^3(\alpha-1)} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)\triangle(f).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1)(f)\tilde{E}_1(f) &= g(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1), \mathrm{grad}\ f)\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\,[\frac{1}{\alpha} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), \mathrm{grad}\ f) - \frac{1}{4\alpha^2} ||\,\mathrm{grad}\ f||^2 \\
&+ \frac{1}{2\alpha^2} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)\triangle(f)] \\
&= \frac{1}{\alpha^2} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), \mathrm{grad}\ f) - \frac{1}{4\alpha^3} ||\,\mathrm{grad}\ f||^2 \\
&+ \frac{1}{2\alpha^3} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)\triangle(f).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{m} g(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(E_i), E_i) &= \sum_{i=2}^{m} g(\mathrm{Ricci}(E_i) - \frac{1}{\alpha} R(E_i, \mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f \\
&- \frac{1}{\alpha} g(\mathrm{Ricci}(E_i), \mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f \\
&+ \frac{1}{2\alpha^2}[g(\nabla_{E_i}\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha) - E_i(\alpha)\triangle(f)]\,\mathrm{grad}\ f \\
&+ \frac{1}{\alpha}[\triangle(f) - \frac{1}{2\alpha} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)]\nabla_{E_i}\mathrm{grad}\ f \\
&+ \frac{1}{4\alpha^2} E_i(\alpha)\,\mathrm{grad}\ \alpha - \frac{1}{\alpha}\nabla_{(\nabla_{E_i}\mathrm{grad}\ f)}, E_i). \\
&= \sigma - \frac{2\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)} g(\mathrm{Ricci}(\mathrm{grad}\ f), \mathrm{grad}\ f) + \frac{1}{\alpha}\triangle(f)^2 \\
&- \frac{1}{\alpha}||\nabla\,\mathrm{grad}\ f||^2 - \frac{2\alpha-1}{2\alpha^2(\alpha-1)} g(\mathrm{grad}\ f, \mathrm{grad}\ \alpha)\triangle(f) \\
&+ \frac{1}{4\alpha^2(\alpha-1)}||\,\mathrm{grad}\ \alpha||^2.
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(E_i)(f)E_i(f) = 0.
$$

La somme de $g(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1), \tilde{E}_1), \widetilde{\mathrm{Ricci}}(\tilde{E}_1)(f)\tilde{E}_1(f)$ et $\sum_{i=2}^{m} g(\widetilde{\mathrm{Ricci}}(E_i), E_i)$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

donne le résultat.

3.3 Harmonicité et métrique Mus-gradient

Soient (M^m, g), (N^n, h) deux variétés Riemanniennes et $\tilde{g}$ (*resp* $\tilde{h}$) désigne la métrique Mus-gradient définie sur M (*resp* N).

3.3.1 L'harmonicité d'une app $\varphi : (\mathrm{M}, \tilde{g}) \longrightarrow (\mathrm{N}, h)$

Proposition 3.3.1 *Soit* $\varphi : (\mathrm{M}^m, \tilde{g}) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, h)$ *une application de clasee* C^∞ *et* f *une fonction lisse non constante sur* M. *Alors le champs de tension de* φ *associé à* $\tilde{g}$ *est donné par:*

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(\varphi) = \tau(\varphi) - \frac{1}{\alpha}\Big[&\nabla^{\varphi}_{\mathrm{grad}\, f} d\varphi(\mathrm{grad}\, f) - \frac{1}{2\alpha} d\varphi(\mathrm{grad}\, \alpha) \\ &+\big(\frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{grad}\, f(\alpha) + \triangle(f)\big) d\varphi(\mathrm{grad}\, f)\Big]. \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Preuve:.
Soit $(E_i)_{i=1,\dots,m}$ tel que $E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} ||\,\mathrm{grad}\, f||$ une base orthonormale de champs de vecteurs associée à g, alors $(\tilde{E}_i)_{i=1,\dots,m}$ est une base orthonormale de champs de vecteurs associée à $\tilde{g}$
où $\tilde{E}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} E_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\,\mathrm{grad}\, f, \tilde{E}_i = E_i \;\; i = 2, ..., m$.
Par définition du champs de tension, nous avons:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(\varphi) &= \textstyle\sum_{i=1}^m \Big[\nabla^{\varphi}_{\tilde{E}_i} d\varphi(\tilde{E}_i) - d\varphi(\tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{\tilde{E}_i} \tilde{E}_i)\Big] \\ &= \nabla^{\varphi}_{\tilde{E}_1} d\varphi(\tilde{E}_1) - d\varphi(\tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{\tilde{E}_1} \tilde{E}_1) + \textstyle\sum_{i=2}^m [\nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) - d\varphi(\tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_1 &= \nabla^{\varphi}_{\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}} grad\ f} d\varphi(\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\,\mathrm{grad}\, f) \\ &\quad - d\varphi(\tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\,\mathrm{grad}\, f} \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\,\mathrm{grad}\, f) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\,\mathrm{grad}\, f(\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}) d\varphi(\mathrm{grad}\, f) + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \nabla^{\varphi}_{\mathrm{grad}\, f} d\varphi(\mathrm{grad}\, f) \\ &\quad - d\varphi(\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\,\mathrm{grad}\, f(\frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}})\,\mathrm{grad}\, f + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{grad}\, f}\,\mathrm{grad}\, f) \\ &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\left[\nabla^{\varphi}_{\mathrm{grad}\, f} d\varphi(\mathrm{grad}\, f) - d\varphi\left(\nabla^{\mathrm{M}}_{\mathrm{grad}\, f}\,\mathrm{grad}\, f + \frac{1}{2\alpha} g(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\ \alpha)\,\mathrm{grad}\, f\right)\right]\end{aligned}$$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\left[\nabla^{\varphi}_{\text{grad}\, f} d\varphi(\text{grad}\, f) - \frac{1}{2} d\varphi(\text{grad}\ \alpha) - \frac{1}{2\alpha} g(\text{grad}\, f, \text{grad}\ \alpha) d\varphi(\text{grad}\, f)\right].$$

$T_2 = \sum_{i=2}^{m} [\nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) - d\varphi(\tilde{\nabla}^{M}_{E_i} E_i)]$

$= \sum_{i=2}^{m} [\nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) - d\varphi(\nabla^{M}_{E_i} E_i) - \frac{1}{\alpha} g(\nabla_{E_i} \text{grad}\, f, E_i) d\varphi(\text{grad}\, f)]$

$= \tau(\varphi) - [\nabla^{\varphi}_{E_1} d\varphi(E_1) - d\varphi(\nabla^{M}_{E_1} E_1)] - \frac{1}{\alpha}[\triangle(f) - g(\nabla_{E_1} \text{grad}\, f, E_1)] d\varphi(\text{grad}\, f)$

$= \tau(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \text{grad}\, f(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}) d\varphi(\text{grad}\, f) - \frac{1}{\alpha-1} \nabla^{\varphi}_{\text{grad}\, f} d\varphi(\text{grad}\, f)$

$+ d\varphi(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \text{grad}\, f(\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}) \text{grad}\, f + \frac{1}{\alpha-1} \nabla^{M}_{\text{grad}\, f} \text{grad}\, f)$

$- \frac{1}{\alpha}[\triangle(f) - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} g(\nabla_{\text{grad}\, f} \text{grad}\, f, \text{grad}\, f)] d\varphi(\text{grad}\, f)$

$= \tau(\varphi) - \frac{1}{\alpha} \triangle(f) d\varphi(\text{grad}\, f) - \frac{1}{\alpha-1}[\nabla^{\varphi}_{\text{grad}\, f} d\varphi(\text{grad}\, f) - \frac{1}{2} d\varphi(\text{grad}\ \alpha)$

$- \frac{1}{2\alpha} g(\text{grad}\, f, \text{grad}\ \alpha) d\varphi(\text{grad}\, f)].$

La somme de T_1 et T_2 donne le résultat.

Corollaire 3.3.1 *L'application $\varphi : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique si et seulement si*

$$\tau(\varphi) - \frac{1}{\alpha}\left[\nabla^{\varphi}_{\text{grad}\, f} d\varphi(\text{grad}\, f) - \frac{1}{2\alpha} d\varphi(\text{grad}\, \alpha) + \left(\frac{1}{2\alpha} \text{grad}\, f(\alpha) + \Delta(f)\right) d\varphi(\text{grad}\, f)\right] = 0.$$

Corollaire 3.3.2 *Soit $\varphi : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de clasee C^∞. Si $\|\text{grad}\, f\|$ est constant alors, φ est harmonique si et seulement si*

$$\tau(\varphi) - \frac{1}{\alpha}\Big(\Delta(f) d\varphi(\text{grad}\, f) + \nabla^{\varphi}_{\text{grad}\, f} d\varphi(\text{grad}\, f)\Big) = 0$$

Remarque 3.3.1 *1) L'application identité $\varphi = Id_M : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (M^m, g)$ est harmonique si et seulement si*

$$\frac{\alpha-1}{2\alpha} \text{grad}(\alpha) + \left[\frac{1}{2\alpha} \text{grad}\, f(\alpha) + \Delta(f)\right] \text{grad}\, f = 0.$$

2) Si $\|\text{grad}\, f\|$ est constant, alors L'application identité $\varphi = Id_M : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (M^m, g)$ est harmonique si et seulement si , f est une fonction harmonique.

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Exemple 3.3.1 *Soit* $M = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *munie de la métrique riemannienne*

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + dt^2,$$

où $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ *est l'espace hyperbolique à 2 dimensions et soit*

$$f(x, y, t) = at + b, \quad for \quad (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

Selon les remarques 3.3.1, L'application identité
$\varphi = Id_M : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (M^m, g)$ *est harmonique, avec*

$$\widetilde{g} = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + (1 + a^2)dt^2.$$

3.3.2 L'harmonicité d'une app $\varphi : (\mathrm{M}, g) \longrightarrow (\mathrm{N}, \tilde{h})$

Lemme 3.3.1 *Soit* $\varphi : (\mathrm{M}^m, g) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, \tilde{h})$ *une application de clasee* C^∞ *sur* M. *Alors:*

$$\tilde{\nabla}^{\varphi}_{\mathrm{X}} V = \nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}} V + \frac{1}{\alpha} h(\nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}}(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f) \circ \varphi, V)(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f) \circ \varphi. \tag{3.9}$$

où $\quad \alpha = 1 + ||\,\mathrm{grad}\, f||^2_h$ *et* $f \in C^\infty(\mathrm{M})$.

Preuve:.
Soient $\tilde{\mathrm{X}}, \tilde{\mathrm{Y}} \in \Gamma(\mathrm{TM})$ tels que $\tilde{V} \circ \varphi = d\varphi(\mathrm{X})$ et $\tilde{\mathrm{X}} \circ \varphi = V$, alors

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}^{\varphi}_{\mathrm{X}} V &= (\tilde{\nabla}^{\mathrm{N}}_{\tilde{\mathrm{X}}} \tilde{V}) \circ \varphi \\
&= [\nabla^{\mathrm{N}}_{\tilde{\mathrm{X}}} \tilde{V} + \frac{1}{\alpha} h(\nabla^{\mathrm{N}}_{\tilde{\mathrm{X}}}(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f), \tilde{V})(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f)] \circ \varphi \\
&= \nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}} V + \frac{1}{\alpha} h(\nabla^{\varphi}_{\mathrm{X}}(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f) \circ \varphi, V)(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f) \circ \varphi.
\end{aligned}$$

Proposition 3.3.2 *Soit* $\varphi : (\mathrm{M}^m, g) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, \tilde{h})$ *une application de clasee* C^∞. *Alors le champs de tension de* φ *associé à* $\tilde{h}$ *est donné par:*

$$\tilde{\tau}(\varphi) = \tau(\varphi) + \frac{1}{\alpha} trace_g h(\nabla^{\varphi}(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f) \circ \varphi, d\varphi)(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f) \circ \varphi.$$

Preuve:.
Soit $(E_i)_{i=1,\ldots,m}$ une base orthonormale de champs de vecteurs associé à $\tilde{g}$.

$\tilde{\tau}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m}[\tilde{\nabla}^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) - d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i)]$

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$= \sum_{i=1}^{m}[\nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) + \frac{1}{\alpha} h(\nabla^{\varphi}_{E_i}(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f)\circ\varphi, d\varphi(E_i))(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f)\circ\varphi - d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i)]$
$= \sum_{i=1}^{m}[\nabla^{\varphi}_{E_i} d\varphi(E_i) - d\varphi(\nabla^{\mathrm{M}}_{E_i} E_i)]$
$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\alpha} h(\nabla^{\varphi}_{E_i}(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f)\circ\varphi, d\varphi(E_i))(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f)\circ\varphi$

$$= \tau(\varphi) + \frac{1}{\alpha} trace_g h(\nabla^{\varphi}(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f)\circ\varphi, d\varphi)(\mathrm{grad}^{\mathrm{N}} f)\circ\varphi.$$

3.4 Harmonique morphisme

Soit (M^m, g), (N^n, h) deux variétés riemanniennes, $\widetilde{g} = g + df \otimes df$ la métrique Mus-gradiant, où $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse non constante.

Proposition 3.4.1 *Soit $\varphi : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$, pour toute fonction harmonique $u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ défini sur un sous-ensemble ouvert V du N avec $\varphi^{-1}(V)$ non vide, nous avons*

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta}^M(u\circ\varphi) = \Delta^M(u\circ\varphi) - \frac{1}{\alpha}\mathrm{Hess}_{u\circ\varphi}(\mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, f)\\ - \frac{1}{\alpha}\big[\Delta(f) - \frac{1}{2\alpha}\mathrm{grad}\, f(\alpha)\big]\, \mathrm{grad}\, f(u\circ\varphi).\end{aligned}$$

Preuve:.
Rappelons que $\{e_i\}_{i=1,..,m}$ telle que $e_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}\mathrm{grad}\, f$ est une base orthonormale sur M par rapport à g et $\{\widetilde{e}_i\}_{i=1,..,m}$, telle que $\widetilde{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha-1)}}\mathrm{grad}\, f$ et $\widetilde{e}_i = e_i$ *pour* $i = 2, .., m$ est un base orthonormé sur M par rapport à $\widetilde{g}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^M(u\circ\varphi) &= \sum_{i=1}^{m}\big[\widetilde{e}_i(\widetilde{e}_i(u\circ\varphi)) - (\widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e}_i}\widetilde{e}_i)(u\circ\varphi)\big]\\
&= \widetilde{e}_1(\widetilde{e}_1(u\circ\varphi)) - (\widetilde{\nabla}^M_{\widetilde{e}_1}\widetilde{e}_1)(u\circ\varphi)\\
&+ \sum_{i=2}^{m}\big[e_i(e_i(u\circ\varphi)) - (\widetilde{\nabla}^M_{e_i} e_i)(u\circ\varphi)\big]\\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e_1(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} e_1(u\circ\varphi)) - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\widetilde{\nabla}^M_{e_1}\frac{1}{\sqrt{\alpha}} e_1)(u\circ\varphi)\\
&+ \sum_{i=1}^{m}\big[e_i(e_i(u\circ\varphi)) - (\widetilde{\nabla}^M_{e_i} e_i)(u\circ\varphi)\big] - e_1(e_1(u\circ\varphi)) + (\widetilde{\nabla}^M_{e_1} e_1)(u\circ\varphi)\\
&= (\frac{1}{\alpha} - 1) e_1(e_1(u\circ\varphi)) + (1 - \frac{1}{\alpha})(\widetilde{\nabla}^M_{e_1} e_1)(u\circ\varphi)
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$+ \quad \sum_{i=1}^{m} \big[e_i(e_i(u\circ\varphi)) - (\widetilde{\nabla}^M_{e_i} e_i)(u\circ\varphi)\big].$$

En utilisant le Théoreme 3.1.1, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}^M(u\circ\varphi) &= \frac{\alpha-1}{\alpha}\Big[-e_1(e_1(u\circ\varphi)) + (\nabla^M_{e_1}e_1)(u\circ\varphi) + \frac{1}{\alpha}g(\nabla_{e_1}\operatorname{grad} f, e_1)\operatorname{grad} f(u\circ\varphi)\Big]\\
&+ \sum_{i=1}^{m}\big[e_i(e_i(u\circ\varphi)) - (\nabla^M_{e_i}e_i)(u\circ\varphi) - \frac{1}{\alpha}g(\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f, e_i)\operatorname{grad} f(u\circ\varphi)\big]\\
&= -\frac{\alpha-1}{\alpha}\big[\frac{1}{\alpha-1}\operatorname{grad} f(\operatorname{grad} f(u\circ\varphi))\\
&- \frac{1}{\alpha-1}(\nabla^M_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f)(u\circ\varphi) - \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}g(\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f(u\circ\varphi)\big]\\
&- \frac{1}{\alpha}\Delta(f)\operatorname{grad} f(u\circ\varphi) + \Delta^M(u\circ\varphi)\\
&= \Delta^M(u\circ\varphi) - \frac{1}{\alpha}\big[\operatorname{grad} f\big(g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(u\circ\varphi))\big) - g(\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(u\circ\varphi))\big]\\
&+ \frac{1}{2\alpha^2}\operatorname{grad} f(\alpha)\operatorname{grad} f(u\circ\varphi) - \frac{1}{\alpha}\Delta(f)\operatorname{grad} f(u\circ\varphi)\\
&= \Delta^M(u\circ\varphi) - \frac{1}{\alpha}\operatorname{Hess}_{u\circ\varphi}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\\
&- \frac{1}{\alpha}\big[\Delta(f) - \frac{1}{2\alpha}\operatorname{grad} f(\alpha)\big]\operatorname{grad} f(u\circ\varphi)
\end{aligned}$$

Corollaire 3.4.1 *Soit (M^m, g), (N^n, h) deux variétés riemanniennes, $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ un morphisme harmonique et $\widetilde{g} = g + df \otimes df$, où f est une fonction lisse non constante sur M, alors $\varphi : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme harmonique si et seulement si*

$$\operatorname{Hess}_{u\circ\varphi}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + \big[\Delta(f) - \frac{1}{2\alpha}\operatorname{grad} f(\alpha)\big]\operatorname{grad} f(u\circ\varphi) = 0,$$

pour toute fonction harmonique $u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ défini sur un sous-ensemble ouvert V de N avec $\varphi^{-1}(V)$ non vide.

Corollaire 3.4.2 *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ un morphisme harmonique et $\widetilde{g} = g + df \otimes df$, où f est une fonction lisse non constante sur M. Si $\|\operatorname{grad} f\|$ est constant, alors $\varphi : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (N^n, h)$ est un morphisme harmonique si et seulement si*

$$\operatorname{Hess}_{u\circ\varphi}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + \Delta(f)\operatorname{grad} f(u\circ\varphi) = 0,$$

pour toute fonction harmonique $u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ défini sur un sous-ensemble ouvert V de N avec $\varphi^{-1}(V)$ non vide.

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Du Corollaire 3.4.2, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 3.4.3 *Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ un morphisme harmonique et $\widetilde{g} = g + df \otimes df$, où f est une fonction lisse non constante sur M, telle que $\|\operatorname{grad} f\|$ est constant, alors l'application identité*

$$\varphi = Id_M : (M^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (M^m, g)$$

est un morphisme harmonique si et seulement si

$$\mathrm{Hess}_u(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) + \Delta(f) \operatorname{grad} f(u) = 0,$$

pour toute fonction $u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ défini sur un sous-ensemble ouvert V (non vide) de N.

3.5 Bi-harmonicité et la métrique Mus-gradient

Wondershare PDFelement

Théorème 3.5.1 *Soient $\varphi : (\mathrm{M}^m, g) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, h)$ une application de clasee C^∞, $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $||grad\ f|| = 1$ et*

$$\tilde{g} = g + df \otimes df,$$

alors le champ de bi-tension de φ est donné par:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tau}_2(\varphi) = \tau_2(\varphi) + \frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tau(\varphi) + \frac{1}{2}R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi(grad\ f))d\varphi(grad\ f)\\
&+\frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tau(\varphi) + \frac{1}{2}[\triangle(\triangle(f)) - \frac{1}{2}grad\ f(grad\ f(\triangle(f)))\\
&-\frac{1}{2}\triangle(f)grad\ f(\triangle(f))]d\varphi(grad\ f) - \frac{1}{2}\triangle(f)J_{\varphi}(d\varphi(grad\ f)) - \frac{1}{2}J_{\varphi}(\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f))\\
&-\frac{1}{4}R^{\mathrm{N}}(\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f), d\varphi(grad\ f))d\varphi(grad\ f) + \nabla^{\varphi}_{grad\ f(\triangle(f))}d\varphi(grad\ f)\\
&-\frac{1}{2}\left[grad\ f(\triangle(f)) + \frac{1}{2}(\triangle(f))^2\right]\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f).
\end{aligned}$$

où $J_\varphi(V) = \triangle^\varphi(V) + trace_g R^{\mathrm{N}}(V, d\varphi)d\varphi$, pour tout $V \in \varphi^{-1}(\mathrm{TN})$ est l'opérateur de jacobi de φ.

Preuve:.
Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,m}$ tel que $e_1 = grad\ f$ une base locale orthonormale sur M associée à g et $\{\tilde{e}_i\}_{i=1,\dots,m}$ tel que $\tilde{e}_1 = \dfrac{\operatorname{grad} f}{\sqrt{2}}$ une base locale orthonormale sur M associée à $\tilde{g}$. le champ de bi-tension de φ est donné par:

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_2(\varphi) &= -\left[\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\tilde{\tau}(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{\tilde{\nabla}^{M}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i}\tilde{\tau}(\varphi)\right] - R^{N}(\tilde{\tau}(\varphi), d\varphi(\tilde{e}_i))d\varphi(\tilde{e}_i)\\
&= -\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\tilde{\tau}(\varphi) + \nabla^{\varphi}_{\tilde{\nabla}^{M}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i}\tilde{\tau}(\varphi) - R^{N}(\tilde{\tau}(\varphi), d\varphi(\tilde{e}_i))d\varphi(\tilde{e}_i). \qquad (3.10)\end{aligned}$$

pour le premier terme du côté droit de (3.10), nous avons

$$\begin{aligned}-\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\tilde{\tau}(\varphi) &= -\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_1}\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_1}\tilde{\tau}(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tilde{\tau}(\varphi)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tilde{\tau}(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tilde{\tau}(\varphi). \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Rappelons que $\tilde{\tau}(\varphi) = \tau(\varphi) - \frac{1}{2}\triangle(f)d\varphi(grad\ f) - \frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f)$,

alors,

$$\begin{aligned}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tilde{\tau}(\varphi) = \nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tau(\varphi) &- \frac{1}{2}grad\ f(\triangle(f))d\varphi(grad\ f) - \frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f)\\
&- \frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f),\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tilde{\tau}(\varphi) = -\frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tau(\varphi) &+ \frac{1}{4}grad\ f(grad\ f(\triangle(f)))d\varphi(grad\ f)\\
&+ \frac{1}{2}grad\ f(\triangle(f))\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f) + \frac{1}{4}(\triangle(f))\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f)\\
&+ \frac{1}{4}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f). \qquad (3.12)\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tilde{\tau}(\varphi) = \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) &- \frac{1}{2}e_i(\triangle(f))d\varphi(grad\ f) - \frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(grad\ f)\\
&- \frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f).\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}-\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tilde{\tau}(\varphi) = -\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) &+ \frac{1}{2}e_i(e_i(\triangle(f)))d\varphi(grad\ f) + e_i(\triangle(f))\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(grad\ f)\\
&+ \frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(grad\ f) + \frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f). \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Remplaçons (3.12) et (3.13) dans (3.11), alors

$$\begin{aligned}
-\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\nabla^{\varphi}_{\tilde{e}_i}\tilde{\tau}(\varphi) = &-\frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tau(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) + \frac{1}{4}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f)\\
&+\left[\frac{1}{4}grad\ f(grad\ f(\triangle(f))) + \frac{1}{2}e_i(e_i(\triangle(f)))\right]d\varphi(grad\ f)\\
&+\frac{1}{2}grad\ f(\triangle(f))\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f) + e_i(\triangle(f))\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(grad\ f)\\
&+\frac{1}{4}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f) + \frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}d\varphi(grad\ f)\\
&+\frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f). \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

pour le deuxième terme du côté droit de (3.10), nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i &= \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{grad\ f}grad\ f + \tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i\\
&= \tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i\\
&= \nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i + \frac{1}{2}\triangle(f)grad\ f
\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\nabla^{\varphi}_{\tilde{\nabla}^{\mathrm{M}}_{\tilde{e}_i}\tilde{e}_i}\tilde{\tau}(\varphi) &= \nabla^{\varphi}_{\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i}\tilde{\tau}(\varphi) + \frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tilde{\tau}(\varphi)\\
&= \nabla^{\varphi}_{\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i}\tau(\varphi) - \frac{1}{2}(\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i)(\triangle(f))d\varphi(grad\ f) - \frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i}d\varphi(grad\ f)\\
&-\frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f) + \frac{1}{2}\triangle(f)[\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tau(\varphi) - \frac{1}{2}grad\ f(\triangle(f))d\varphi(grad\ f)\\
&-\frac{1}{2}\triangle(f)\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f) - \frac{1}{2}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f)]. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

maintenant, nous calculons le troisième terme du côté droit de (3.10)

$$\begin{aligned}
-R^{\mathrm{N}}(\tilde{\tau}(\varphi), d\varphi(\tilde{e}_i))d\varphi(\tilde{e}_i) &= -\frac{1}{2}R^{\mathrm{N}}(\tilde{\tau}(\varphi), d\varphi(grad\ f))d\varphi(grad\ f) - R^{\mathrm{N}}(\tilde{\tau}(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)\\
&= -\frac{1}{2}R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi(grad\ f))d\varphi(grad\ f) - R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)\\
&+\frac{1}{4}R^{\mathrm{N}}(\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f), d\varphi(grad\ f))d\varphi(grad\ f)
\end{aligned}$$

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\triangle(f)R^{\mathrm{N}}(d\varphi(grad\ f), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)\\
&+\frac{1}{2}R^{\mathrm{N}}(\nabla^{\varphi}_{grad\ f}d\varphi(grad\ f), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i). \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Rappelons que

$$
\begin{aligned}
\tau_2(\varphi) = &-\left[\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\nabla^{\varphi}_{grad\ f}\tau(\varphi) + \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^{\varphi}_{\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i}\tau(\varphi)\right]\\
&-R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi(grad\ f))d\varphi(grad\ f) - R^{\mathrm{N}}(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),
\end{aligned}
$$

l'opérateur de Jacobi est défini par

$$
J_{\varphi}(V) = \triangle^{\varphi}(V) - trace_g R^{\mathrm{N}}(V, d\varphi)d\varphi.
$$

et

$$
\triangle(\triangle(f)) = \left[grad\ f(grad\ f(\triangle(f))) + e_i(e_i(\triangle(f))) - (\nabla^{\mathrm{M}}_{e_i}e_i)(\triangle(f))\right].
$$

alors, en substituant (3.16), (3.15) et (3.14) dans (3.10), on obtient le résultat de Théoreme (3.5.1).

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

3.6 Applications bi-harmoniques propres

de Théoreme (3.5.1), en déduit les resultats suivants

Corollaire 3.6.1 *Soient* (M^m, g), (N^n, h) *deux variétés riemanniennes, avec* M *connexe,* $\varphi : (\mathrm{M}^m, g) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, h)$ *une application harmonique,* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction lisse non constante telle que* $||(grad\ f|| = 1$ *et* $\tilde{g} = g + df \otimes df$ *la métrique Mus-gradient. Alors* $\varphi : (\mathrm{M}^m, \widetilde{g}) \longrightarrow (\mathrm{N}^n, g)$ *est bi-harmonique si et seulement si*

$$\frac{1}{2}[\triangle(\triangle(f)) - \frac{1}{2} grad\ f(grad\ f(\triangle(f))) - \frac{1}{2}\triangle(f) grad\ f(\triangle(f))] d\varphi(grad\ f)$$
$$-\frac{1}{2}\triangle(f) J_\varphi(d\varphi(grad\ f)) - \frac{1}{2} J_\varphi(\nabla^\varphi_{grad\ f} d\varphi(grad\ f))$$
$$-\frac{1}{4} R^{\mathrm{N}}(\nabla^\varphi_{grad\ f} d\varphi(grad\ f), d\varphi(grad\ f)) d\varphi(grad\ f) + \nabla^\varphi_{grad\ f(\triangle(f))} d\varphi(grad\ f)$$
$$-\frac{1}{2}\left[grad\ f(\triangle(f)) + \frac{1}{2}(\triangle(f))^2\right] \nabla^\varphi_{grad\ f} d\varphi(grad\ f) = 0.$$

Exemple 3.6.1 *Soit* $n \geq 2$, $M = \mathbb{R}^n$ *muni de la métrique cannonique* $g = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$ *et* $N = \mathbb{H} = \{(y_1, y_2, .., y_n)\ / y_n > 0\}$ *est l'espace hyperbolique à n dimensions, équipé de la métrique*

$$h = y_n^2(dy_1^2 + dy_2^2 + .. + dy_n^2).$$

on considère l'application harmonique

$$\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h),$$

$$\varphi(x_1, x_2, .., x_n) = \left(x_1, x_2, .., x_{n-1}, \sqrt{n-1}\sqrt{x_n^2 + 1}\right),$$

et soit la fonction $f(x_1, x_2, .., x_n) = x_n$. *Ainsi, par rapport à la métrique riemannienne*

$$\widetilde{g} = g + df \otimes df = g + dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + 2dx_n^2.$$

Alors, l'application $\varphi : (M, \widetilde{g}) \longrightarrow (N, h)$ *est bi-harmonique propre.*

D'après le corollaire (3.6.1) et la remarque (3.3.1), nous obtenons le résultat suivant:

Exemple 3.6.2 *Soit* (M^m, g) *une variété riemannienne,* $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction lisse non constante telle que* $||(grad\ f|| = 1$ *, et* $\tilde{g} = g + df \otimes df$*. alors l'application d'identité* $\varphi = Id_{\mathrm{M}} : (\mathrm{M}, \tilde{g}) \longrightarrow (\mathrm{M}, g)$ *est bi-harmonique*

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

si et seulement si

$$[\triangle(\triangle(f)) - \frac{1}{2} grad\, f(grad\, f(\triangle(f))) - \frac{1}{2}\triangle(f) grad\, f(\triangle(f))] grad\, f$$
$$-\triangle(f) J_{Id_{\mathrm{M}}}(grad\, f) + 2\nabla^{\mathrm{M}}_{grad\ f(\triangle(f))} grad\, f = 0.$$

Remarque 3.6.1 *Si* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction non harmonique* ($\Delta(f) = k \neq 0$)*, telle que* $||(grad\, f|| = 1$*, alors l'application identité* $\varphi = I_{dM} : (M, \widetilde{g}) \longrightarrow (M, g)$ *est bi-harmonique propre si et seulement si*

$$\Delta(\mathrm{grad}\, f) + \tilde{\mathrm{Ric}}(\mathrm{grad}\, f) = 0.$$

Les résultats précédents sont publiés dans l'article:
THE GEOMETRY OF A NON-CONFORMAL DEFORMATION OF A METRIC AND BI-HARMONICITY,
Palestine Journal of Mathematics
Vol 13(4), 1397-1405. (2024).

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

Bibliography

[1] M.T.K. Abbassi and M.Sarih, On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds, Arch. Math. 41 (2005) 71-92

[2] M. Anastasiei, Locally conformal Kaehler structures on tangent bundle of a space form, Libertas Math. 19 (1999) 71-76.

[3] K. Aso, Notes on some Properties of the Sectional Curvature of the Tangent Bundle,Yokohama Math. J. 29 (1981), 1-5.

[4] M. BENYOUNES, E. LOUBEAU and C.M. WOOD, The Geometry of Generalised Cheeger-Gromoll Metrics, TOKYO J. MATH. VOL. 32, NO. 2, (2009) 287-312.

[5] P. Baird and J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannain manifolds, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[6] P. Baird and D. Kamissoko, On constructing biharmonic maps and metrics, Ann. Global Anal. Geom., 23(1)(2003), 65-75.

[7] A. Benkartab and A. Mohammed Cherif, New Methods of Construction for Biharmonic Maps, KYUNGPOOK Math. J. 59(2019), 135-147

[8] E. Boeckx, and Vanhecke, L., Harmonic and minimal vector fields on unit tangent bundles, Differential Geometry and Applications Vol 13, Issue 1, (2000), 77-93.

[9] N. Cengiz, Salimov, A.A., Diagonal lift in the tensor bundle and its applications. Appl. Math. Comput. 142, no.2-3, (2003), 309-319.

[10] J. Cheeger, and D. Gromoll, On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature, Ann. of Math. (2) 96 (1972), 413-443.

[11] M. Djaa, and J. Gancarzewicz, The geometry of tangent bundles of order r, Boletin Academia, Galega de Ciencias,Espagne, 4 (1985), 147-165

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

[12] N.E.H. Djaa, S. Ouakkas, and M. Djaa, Harmonic sections on the tangent bundle of order two. Annales Mathematicae et Informaticae 38 (1) (2011) pp15-25

[13] P. Dombrowski, On the geometry of tangent bundle, J. Reine Angew. Math.210 (1962), pp.73-8.

[14] A. Gezer, and M. Altunbas, Some notes concerning Riemannian metrics of Cheeger-Gromoll type, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012) 119-132.

[15] S. Gudmunsson, and E. Kappos, On the Geometry of Tangent Bundles, Expo.Math. 20 (2002),1-41.

[16] T. Ishihara, Harmonic sections of tangent bundles. J.Math. Tokushima Univ. 13 (1979), 23-27.

[17] R. Kada Ben Otmane, A. Zagane, and M. Djaa, ON GENERALIZED CHEEGER-GROMOLL METRIC AND HARMONICITY, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. Vol 69, Nº 1, (2020), 629-645.

[18] R. Kada Ben Othmane and K. Zegga, THE GEOMETRY OF A NON-CONFORMAL DEFORMATION OF A METRIC AND BI-HARMONICITY, Palestine Journal of Mathematics Vol 13(4)(2024), 1397-1405

[19] J.J. Konderak, On Harmonic Vector Fields, Publications Mathematiques.Vol 36, (1992), 217-288.

[20] O. Kowalski, Curvature of the Induced Riemannian Metric on the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold, J. Reine Angew. Math. 250 (1971), 124-129.

[21] F. Latti, M. Djaa, and A. Zagane, Mus-Sasaki Metric and Harmonicity. Mathematical Sciences and Applications E-Notes 6 (1) (2018), 29-36.

[22] M. Munteanu, Some Aspects on the Geometry of the Tangent Bundles and Tangent Sphere Bundles of Riemannian Manifold, Mediterr. J. Math. 5 (2008) 43-59.

[23] E. Musso and F. Tricerri, Riemannien metrics on tangent bundles, Ann.Mat.Purz Appl.(4), 150(1988), 1-10.

[24] B. O'Neil, Semi-Riemannian geometry, Academic Press, New York, 1983.

Wondershare PDFelement

Supprimer filigrane Wondershare PDFelement

[25] V. Opriou, On Harmonic Maps Between tangent bundles. Rend. Sem.Mat, Vol 47, 1(1989).

[26] S. Sasaki, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J. 10, 338-354, (1958).

[27] K. yano and S. Ishihara , Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker.Inc. New York 1973.

Wondershare PDFelement