الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
جامعة مصطفى اسطمبولي – معسكر
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

أطروحة دكتوراه

تخصّص : رياضيات

فرع : هندسة تفاضلية و تطبيقاتها

تقديم الطالبة: أويش نور

بعنوان

علاقات بين بعض البنى على المتنوعات الريمانية

Relations entre quelques structures sur les variétés Riemanniennes

المناقشة بتاريخ: 2024/11/21

لجنة المناقشة:

السيد: محمد شريف أحمد	أستاذ التعليم العالي	جامعة معسكر	رئيسا
السيد: بالجيلالي غريسي	أستاذ التعليم العالي	جامعة معسكر	مشرفا
السيد: بونزير حبيب	أستاذ محاضر (أ)	جامعة معسكر	مشرفا مساعدا
السيد: نرعقان عبد الرحيم	أستاذ محاضر (أ)	جامعة غيليزان	مناقشا
السيد: بيور بن عومر	أستاذ محاضر (أ)	جامعة معسكر	مناقشا
السيد: بن ذهيبة سنوسي	أستاذ محاضر (أ)	المدرسة العليا للأساتذة مستغانم	مناقشا

السنة الجامعية : 2023 – 2024

إهداء

إلى المعطاءة بلا حدود ... **أمي الغالية**
إلى معلمي الأول ... **أبي الحبيب**
إلى الذي وإن مالت الدنيا لا يميل ... **زوجي العزيز**
إلى عصفورتي، فلذة كبدي ... **بنيتي ليا**
إلى الذين بهم حلت أيامي ... **إخوتي وأخواتي**
إلى الطيبين الذين أعيش بينهم ... **عائلتي الثانية**
إلى كل هؤلاء أهدي هذا العمل ...

شكر وعرفان

الحمد لله الذي ما تم جهد إلا به، والشكر له جل في علاه، فإليه ينسب الفضل كله في إكمال هذا العمل، ويبقى الكمال له وحده لا يختص به إلا هو.

وفي هذا المقام إيمانا منا بفضل الإعتراف بالجميل، وقول سيد الخلق " لا يشكر الله من لا يشكر الناس "، فإننا نتقدم بأسمى آيات الشكر والتقدير والإمتنان لأصحاب الفضل والمعروف، وعلى رأسهم أستاذي الفاضل مشرفي ومعلمي الأستاذ الدكتور **بالجيلالي غريسي** على صبره معي طيلة الـ 4 سنوات ... وما خصني به من نصح وإرشاد ... وما علمني من حسن أخلاقه وفيض إنسانيته ومستواه الراقي.

فجزاه الله عني خير الجزاء.

كما لا يفوتني أن أشكر مشرفي المساعد الدكتور **بوزير الحبيب** على جهوده المبذولة في إثراء وتثمين هذا العمل، وكذا مسؤول فرقة تكوين الدكتوراه الأستاذ الدكتور **محمد شريف أحمد** على متابعته وتوجيهه لي طيلة المشوار و الذي نتشرف به رئيسا للجنة المناقشة.

الشكر موصول كذلك إلى أعضاء لجنة المناقشة الدكاترة زعقان عبد الرحيم، بيور بن عومر و بن ذهيبة سنوسي على صبرهم في قراءة وفحص وتمحيص هذه المذكرة وعلى ماقدموه من ملاحظات قيمة.

وفي الأخير أتقدم بجزيل الشكر إلى الطاقم الإداري وجميع أساتذة قسم الرياضيات بجامعة معسكر على رقي معاملتهم و طيب أخلاقهم، وإلى كل من ساهم في نجاح هذا العمل من قريب أو بعيد.

المحتويات

1 المنوّعات الريمانية

Riemannian manifold **10**

1.1 الموتّرات

Tensors 11

1.1.1 الحقل الشعاعي Vector field 11

1.1.2 الأشكال التفاضلية الأحادية One forms 12

1.1.3 الموتّرات Tensors 13

1.1.4 الموتر المتري الريماني Riemannian Metric tensor 14

1.1.5 وصلة ريمان Riemannian connection 15

1.2 بعض المؤثرات التفاضلية على المنوَّعة الريمانية

Some differential operators on Riemannian manifold 16

1.2.1 مؤثر التدرّج Gradient operator 16

1.2.2 مؤثر التباعد divergence operator 17

1.2.3 مؤثر التفاضل الخارجي Exterior differential operator 18

1.3 التقوُّسات على المنوعة الريمانية

Curvature of Riemannian manifold 19

1.3.1 التقوُّس الريماني Riemannian curvature 19

1.3.2 التقوُّس المقطعي Sectional curvature 20

1.3.3 تقوُّس ريتشي Ricci curvature 21

1.3.4 التقوُّس السلمي Scalar curvature 21

1.4 جبور لي

Lie algebra 22

1.4.1 تعاريف Definitions 22

1.4.2 جبر لي القابل للحل و غير القابل للنمو Solvable and nilpotent Lie algebra 23

1.5 المنوّعة الريمانية الجُداء
Riemannian Product manifold 24
1.5.1 المنوّعة الريمانية الجداء Riemannian Product manifold 24
1.5.2 الموتّر المتري الإلتفافي Warped metric tensor 26

2 بعض البنى على المنوعة الريمانية
Structures on a Riemannian manifold **32**
2.1 البنى المركّبة تقريبا
Almost complex structures 32
2.1.1 المنوعة المركبة Complex manifold 33
2.1.2 المنوعة الهرميسية Hermitian manifold 36
2.1.3 المنوعة الكاليرية Kähler manifold 37
2.1.4 المنوعة الكاليرية المحوّلة محليا Locally conformally Kähler manifold . . . 38
2.2 البنى المترية التلامسية تقريبا
Almost contact metric structures 45
2.2.1 البنى التلامسية Contact structures 45
2.2.2 البنى المترية التلامسية تقريبا Almost contact metric structures 46
2.2.3 تصنيف تشينيا و غونزلاز للبنى المترية التلامسية تقريبا 49
2.2.4 بعض البنى المترية التلامسية تقريبا الناظمية Some normal almost contact metric structures 51
2.2.5 المنوّعة ذات الرُّكن Corner manifold 58
2.2.6 بنية ماوراء–ساساكي المعمّمة Generalized Tran–Sasakian structure . 63

3 النتائـــج
Results **67**
3.1 نتائج على منوّعات كالير المحوّلة محليا
Results on locally conformal Kahler manifolds 67
3.1.1 حقل شعاعي الملتوي Torse forming vector field 68
3.1.2 منوّعات فيزمان المعمّمة Generalized Vaisman manifolds 71
3.1.3 بنية فيزمان المعمّمة على زمر لي رباعيّة الأبعاد Generalized Vaisman structure on four dimensional Lie groups 79
3.2 نتائج على المنوّعات ذات الركن
Results on corner manifolds 88
3.2.1 جسور نحو البنى ذات الركن Bridges towards corner structures 88
3.2.2 المنوَّعة ذات الأركان Corners manifold 91
3.2.3 التقوّسات على المنوّعات ذات الركن Curvature on corner manifolds . 93

3.3 جسور بين المنوّعة ذات الركن و منوّعة فيزمان المعمّمة
99 Bridges between the corner manifold and the generalized vaisman manifold

المقدمة

تمهيد

تعتبر الهندسة من أهم الانتصارات العلمية التي حققتها البشرية عبر تاريخها، ولا تعود قيمة الهندسة إلى ارتباطها بحياة الناس أو إلى دقة نتائجها فقط بل لأنها من العلوم التي تستطيع برهان عموم نتائج بنفسها.
لقد ظل مفهوم الهندسة الإقليدية سارياً دون تحد حقيقي حتى بدايات القرن التاسع عشر، حيث بدأت قوالب هندسية جديدة بالظهور تختلف مفاهيمها عن مفاهيم الإقليدية التقليدية، سميت بالهندسة اللاإقليدية التي هي شكل من أشكال الهندسة الرياضياتيّة تقوم أساسياتها على أي مسلمة تكافئ النقيض لمسلمة التوازي الإقليدية .
إنَّ ذكر الهندسة اللاإقليدية يقترن بأربعة أسماء أسطورية في المجال الرياضياتي: فريدريك غاوس(1855-1777)، لوباتشفيسكي(1856-1792)، بولياي(1860-1802)، وبرنارد ريمان(1866-1826).
من أهم هذه النماذج الهندسية هي الهندسة التفاضلية التي تُعنى بدراسة الخواص المحليّة والكليّة للمجموعات التفاضلية (المنحنيات والسطوح) في الفراغ الإقليدي، إذاً فهي علم يهتم بدراسة الخواص الهندسية اللامغيّرة لمجموعة تفاضلية دراسة محليّة وكليّة.
أما المجموعة التي تدور حولها هذه الدراسات فهي المنوّعة أو عديد الطيّات (ترجمة المشرق العربي) (manifold) ذات البُعد n، حيث يمكن القول أن المنوّعة هي مجموعة من العناصر التي ترمز لأي شيء من مكونات الكون الذي نعيش فيه مرتبطة معاً من خلال مفهوم موسّع للمجموعة، أي مُعّرف عليها طبولوجيا لها مواصفات خاصة و مُعّرف حول كل نقطة تماثل (homeomorphism) إلى منطقة من فضاء إقليدي مألوف لدينا، والحركة في هذه المجموعة محكومة بالمشتقات التفاضلية والعمليات الجبرية.
الهندسة الريمانية وتسمى أيضاً الهندسة الإهليلجية، هي واحدة من الهندسات اللاإقليدية التي ترفض تماماً صحّة فرضية إقليدس الخامسة و التي تنص على أنه من خلال نقطة لا تنتمي لمستقيم ما، يوجد مستقيم وحيد يشمل هذه النقطة و يوازي هذا المستقيم. هندسة ريمان ترفض هذه المسلّمة و تؤكد على أن كل المستقيمات تتقاطع و السر يكمن في **التقوّس** (curvature) إذ في الفضاء الإقليدي التقوّس معدوم أما في هندسة ريمان فالتقوّس يكون إما موجبا أو سالبا، و بهذا تكون هندسة إقليدس هي حالة خاصة، أي أن فضاء اقليدس ماهو إلا فضاء

ريمان تقوّسه معدوم.

و دعني هنا أنبه بأهمية فضاء ريمان، حسبنا أن نعلم أن الكون الذي نعيش فيه الحياة الدنيا هو فضاء ريماني رباعي الأبعاد و محدّب (تقوّسه موجب). هذه الحقيقة ظهرت بفضل النظرية النسبية لأنشتاين سنة (1915) و التي جمعت بين الزمان و المكان و المادة. و قد أيّدت كل الدراسات بعدئذ صحّة هذه النظرية و عزّزتها كل تكنولوجيات غزو الفضاء التي بدأت قبل خمسة عقود.

ظهرت أول الأعمال المنشورة حول الهندسة الريمانية حوالي عام (1830) ، لم تكن هذه المنشورات معروفة لعالم الرياضيات الألماني برنارد ريمان الذي قام في عام (1866) بتوسيع المفاهيم من بُعدين إلى ثلاثة أبعاد أو أكثر. بعد ذلك ظهر عالم رياضيات ألماني آخر اسمه فيليكس كلاين، أعطى دفعة أخرى لأفكار ريمان.

إذا كانت كلمة البُنية تذكرنا بمجموعة من المفاهيم الجبرية كالزمرة، الحقل، الجسم و غيرها فإن البُنية على منوّعة ريمانية ما هي إلا مجموعة من الأدوات الهندسية (حقول شعاعية، أشكال تفاضلية، موتّرات،...) متلائمة مع المترك الريماني و تحقق فيما بينها علاقات جبرية محدّدة.

تزويد فضاء ريماني ببُنية ما يؤدي حتماً إلى إيجاد كائن رياضياتي جديد، أكثر تنظيماً و تحكّماً. لنعتبر M منوّعة تفاضلية مزوّدة بموتّر متري ريماني g، عندما نعرّف بنية هندسية جديدة على M متلائمة مع الموتّر المتري g، نكون بذلك قد أنشأنا منوّعة ريمانية جديدة، هذه الأخيرة قد ترشدنا الى فرع جديد في الهندسة الريمانية تماماً كهندسة التماسك (simplectic)، هندسة كالير (Kähler)، هندسة ساساكي (Sasaki)...

منوّعة ريمان زوجية البُعد المزوّدة ببنية كالير هي واحدة من الفروع الهامة في الهندسة التفاضلية، لقد بدأت كحقل مستقل للدراسة في القرن التاسع عشر من خلال دراسة في فضاء الإسقاط المركّب و في الستينيات والسبعينيات من القرن الماضي ظهرت البنى التلامسية تقريبًا كنظير للبنى المركّبة تقريباً.

دراسات سابقة

في عام 1980، أ. كراي و ل. م. هيرفيلا قدما بحثا [27] بينا فيه أن للمنوّعات المركبة تقريبا ستة عشر صنفا. وقد كانت البنى الكاليرية هي المدخل واللبنة الأولى لدراسة البنى المركبة تقريبا على المنوّعات الريمانية، حيث تم دراسة هذا المفهوم أول مرة عام 1930 بواسطة أ.سكوتن و د.دانتزيج، ثم قدمه العالم إ. كالير عام 1933. ونظرا للخصائص الطبولوجيا الرائعة لهذه البنية فقد توسع نطاق دراستها على خلاف نظيراتها من البنى المركبة تقريبا. وفي عام 1954 ومن خلال الورقة البحثية [36] للعالم ب.ليبرمان ظهر مفهوم آخر يحمل في طياته مفهوم البنية الكاليرية عُرف بالبنية الكاليرية المحولة محليا، وقد تم دراسة هذه الأخيرة بشكل مكثف بعد الزخم الكبير الذي قدمه فيزمان [59]، ومنذ ذلك الحين ظهرت العديد من الأورق البحثية التي تدرس هذه البنية ... في عام 1998، كتب كلا من س. دراقومير و ل. أورنيا [25] كتابا جمعا فيه كل النتائج المعروفة إلى ذلك الحين.

وقد ساعد هذا العمل الجبار علماء الهندسة في مواصلة دراسة المنوّعات الكاليرية المحولة محليا، وأدى إلى ظهور العديد من النتائج الأخرى المثيرة للإهتمام.

في الأربعينيات من القرن الماضي ومن خلال البحث [63]، قدم ك. يانو مفهوم الحقل الشعاعي الملتوي، حيث ارتبط بعبارة مشتق التباين للحقل نفسه، وقد جاءت بعده أبحاث أخرى، تدرس خصائص هذا الحقل نجد مثلا البحث [64] لـ ج. كوليك. وفي عام 1979 قدم س. يمغوتشي رفقة زميله ن.يو المفهوم المركب المقابل لمفهوم الحقل الشعاعي الملتوي [61]،[62].

إن الإرتباط الوثيق بين جبور لي و المنوّعات التفاضلية بشكل عام يجعل من البديهي التساؤل حول إمكانية تعريف بنية مركبة تقريبا على جبر لي. وقد تمت الإجابة على هذا السؤال من قبل ساميلسون [51] ووانغ [60] حين أثبتا وجود بنى مركبة تقريبا لامتغيرة من اليسار في حالة المنوّعة المتراصّة. وكذلك كان الأمر في حالة المنوّعة غير المتراصّة بواسطة موريموتو [40]. في المرجع [3] قدم د. أنجيلا و م. أورغليا تصنيفا للبنى الكاليرية المحولة محليا على جبور لي ذات البعد الرابع. وفي المرجع [49] عرف المؤلف البنى المكافئة لجميع البنى الهرميسية اللا متغيرة من اليسار على زمر لي البسيطة القابلة للحل والمتصلة ذات البعد الرابع.

برزت فكرة البنى التلامسية تقريبا بداية الأمر مع بوثبي ووانج [15]، حيث درست كنظير للبنى المركبة تقريبا. وهنا لعب الجداء الإلتفافي دورا هاما في بناء منوّعات ريمانية جديدة انطلاقا من أخرى معطاة، وقد ظهر ذلك الدور في توضيحه للعلاقة بين الصنفين (المركبة تقريبا و التلامسية تقريبا)، حيث تم استخدامه لصنع أمثلة على المنوّعات التلامسية تقريبا انطلاقا من أخرى مركبة تقريبا كما تم إنشاء جسور للتنقل بينهما. ونجد أن هناك تصنيفات مختلفة للمنوّعات التلامسية تقريبا أهمها منوعة ماوراء–ساساكي، والتي تنقسم إلى ثلاث مجموعات وهي منوعة ساساكي، وكانموتسو وثنائية التماسك. كذلك، باستخدم أوبينا للجداء الإلتفافي عام 1985 تمكن ولأول مرة من تحديد الإصطفاف التقابلي بين البنيتين ساساكي وكالير [48]. وبتقنية مماثلة استطاع كلا من باروتشيكينا–ماتامبا [55] تأكيد هذا التقابل بين بنى ثلاثية ساساكي و بنى كالير الزائدية.

في المرجع [22]، بين كلا من تشينا وغونزليز أن هناك 12 صنفا للمنوّعات التلامسية تقريبا، وحددا الصيغة المميزة لكل صنف باستعمال مشتق التباين للشكل التفاضلي الثنائي الأساسي، ووضحا أيضا أن هناك أصنافا أخرى ماهي إلا مركب صنفين أو أكثر من تلك الموجود ضمن الإثنى عشرة صنفا المحددة. فمثلا نجد منوعة ماوراء–ساساكي هي $C_5 \oplus C_6$ حيث C_5 هي منوعة β–كانموتسو و C_6 هي منوعة α–ساساكي. معظم المنوّعات التي جاءت في التصنيف السابق نالت حظها من الدراسات، ولكن بقي القليل منها مهمشا إلى حين، من بين هذه القلة نجد منوّعات الصنف الثاني عشر فهي يمكن أن تكون قابلة للمكاملة لكن لايمكنها أبدا أن تكون ناظمية، ولعل هذا واحدا من الأسباب التي خلا بينها وبين الأبحاث.

مؤخرا، نُشرت عدة بحوث للأستاذ غ. بالجيلالي و زملائه [4, 5, 6, 7, 8, 16] درسوا من خلالها خصائص المنوّعات من الصنف 12 في البعد الثالث، وكذلك قدموا تمييزا شاملا لهذا الصنف في البُعد الفردي عموما، لكن هذه المرة باستعمال مشتق التباين للحقل الشعاعي φ، وبهذا استنبطوا تعريفا مبسطا ورائعا لهذه لمنوّعات.

تعرف منوّعات أشكال فضاء–كانموتسو على أنها منوّعات كانموتسو ذات تقوس φ–مقطعي ثابت. في المرجع [29]، قدم ك. كانموتسو عبارة لطيفة لموتر التقوس الريماني لمنوّعات أشكال فضاء–كانموتسو، وقبله قدمت عبارة التقوس الريماني لمنوّعات أشكال فضاء–ساساكي [41] وكذلك منوّعات أشكال فضاء–ثنائي التماسك من قبل د. أ. بلير (لم يتم نشر النتائج) [37].

أهداف العمل

نلخص أهداف هذه الأطروحة في أربع نقاط وهي كالتالي:

1. تعريف نوع جديد من المنوّعات المركبة تقريبا، أو بالتحديد من المنوّعات الكاليرية المحولة محليا، وهو عبارة على تعميم لمنوعة فيزمان، وتم ذلك بتوظيف مفهوم الحقل الشعاعي الملتوي. وكتطبيق لهذا، دراسة النوع الجديد من المنوّعات على جبور لي القابلة للحل ذات البُعد الرابع.
2. إنشاء بنية ذات الركن، مرة انطلاقا من بنية كالير وانطلاقا من بنية β–كانموتسو مرة أخرى. وتمّ ذلك بتوظيف الجداء الإلتفافي.
3. إدراج تعميم للمنوّعة ذات الركن باستعمال التحويل الملاءم و تعريف منوّعة ذات الأركان .
4. تقديم خواص حول التقوّس الريماني وتقوّس ريتشي للمنوّعات ذات الركن، وكذا تقديم عبارة التقوّس الريماني للمنوّعات ذات الركن والتي تقوسها φ–المقطعي ثابت.
5. إنشاء روابط بين المنوعة الجديدة وهي منوعة فيزمان المعمّمة ذات البعد الزوجي أيا كان و المنوعة ذات الركن ذات البعد الفردي أيا كان.

مخطط العمل

هذه المذكّرة مكوّنة من مقدمة و ثلاثة فصول مرتّبة كالآتي:

الفصل الأول:

قدمنا من خلاله مختلف المفاهيم والخواص المتعلقة بالمنوّعات التفاضلية بصفة عامة والريمانية بصفة خاصة. كما تطرقنا إلى مفاهيم حول جبور لي لها علاقة بموضوع الدراسة. وفي الأخير عقبنا على منوّعات الجُداء خاصة ما يُعرف بالجُداء الإلتفافي.

الفصل الثاني:

لخصنا فيه مختلف المفاهيم المتعلقة بالبُنى المرّكبة تقريبا والبُنى المترية التلامسية تقريبا على الترتيب، وعرّفنا من خلاله بعض أنواع الصنفين مع أمثلة ملموسة و مفصّلة.

الفصل الثالث:

و هو الفصل الأساسي، قدمنا من خلاله مختلف النتائج التي توصلنا إليها، وقد رُتبت وقُسّمت إلى ثلاثة أقسام. تضمن القسم الأول النتائج التي كانت على المنوّعات المركبة تقريبا وتحديدا على منوّعات كالير المحوّلة محليا، والقسم الثاني حوى النتائج التي كانت على المنوّعات ذات الركن، أما في القسم الأخير فقد جمعنا بين ما وصلنا إليه في القسمين الأول والثاني من خلال إنشاء جسور بين منوّعة فيزمان المعمّمة والمنوّعة ذات الركن. و قد حرصنا على تدعيم هذه النتائج بأمثلة مفصّلة و مخططات توضيحية.

Introduction in English

Preface

Differential geometry is a mathematical discipline that studies the geometry of smooth shapes and smooth spaces, otherwise known as smooth manifolds. It uses the techniques of differential calculus, integral calculus, linear algebra and multilinear algebra. The field has its origins in the study of spherical geometry as far back as antiquity. It also relates to astronomy, the geodesy of the Earth, and later the study of hyperbolic geometry by Lobachevsky. The simplest examples of smooth spaces are the plane and space curves and surfaces in the three-dimensional Euclidean space, and the study of these shapes formed the basis for development of modern differential geometry during the 18th and 19th centuries.
When a manifold is endowed with a geometric structure, we have more opportunities to explore its geometric properties. Affine geometry, Riemannian geometry, contact geometry, Kälher geometry, CR geometry, or Finsler geometry are only a few examples of such differential geometric structures.

Previous studies

Kahler structures were the entry point and the first building for the study of almost complex structures on Riemannian manifolds. This concept was born in 1930 by A.Schouten and D.Dantzig, then introduced by E.Kahler in .1933 Due to the nice topological properties of this structure, have been studied much more extensively than other kinds of almost complex structurs. In 1954, through the P. Libermann's paper [36] , locally conformal Kähler (l.c.K.) structures have been intensively studied only since 1976 after the impetus given by I. Vaisman in [59]. A great number of research papers has appeared since then studying the main properties of l.c.K.. In 1998, the monograph by S. Dragomir and L. Ornea [25] brought together all known results in

this field at that moment. After the book, the geometers continued to study l.c.K. manifolds and many other interesting results have appeared so far.
Torse forming vector fields were introduced by K.Yano [64]. The complex analogue of a torse forming vector field is called K−torse forming vector field and it was introduced in 1979, by S.Yamaguchi and W. N.Yu [61],[62].
From the point of view of Lie groups the existence problem of left invariant complex structures was treated by Samelson [51] and Wang [60] in the compact case and by Morimoto [40] in the non compact case. A Classification of l.c.K. structures on four-dimensional Lie algebras up to linear equivalence is found in [3]. And in [49], the author have determined all left invariant Hermition structures on simply connected four dimensional solvable real Lie groups.
The warped product provides a way to construct new pseudo−Riemannian manifolds from the given ones. In 1960s and 1970s, the notion of an almost contact structure has been initiated by Boothby and Wang [15], these manifolds were studied as an odd dimensional counterpart of almost complex manifolds, the warped product was used to make examples of almost contact manifolds. There are diferent classifications of almost contact structures which one of the most signifcant classes is Trans−sasakian manifolds. The Trans−sasakian manifolds are divided into three groups Sasakian, Kenmotsu and Cosymplectic manifolds. Also, In 1985, using the warped product, Oubina showed that there is a one−to−one correspondence between Sasakian and Kahlerian structures [48].
On the other hand, in the classification of Chinea and Gonzalez [22] of almost contact metric manifolds there is a class C_{12}−manifolds which can be integrable but never normal. Recently, in [16], the authors have study some properties of three dimensional C_{12}−manifolds and construct some relations between class C_{12} and other classes as C_6 and $C_2 \oplus C_9$ or $|C|$.
Kanmutsu space form Manifolds are defined as Kanmutsu manifolds with constant φ−sectional curvature. In [29], K. Kanmotsu provided a nice expression for the Riemannian curvature of Kanmutsu space form Manifolds, before him, The Riemannian curvature tensor of Sasakian space form is given by [41] and the Riemannian curvature tensor of cosymplectic space form is given by D. E. Blair (results not published)[37].

Objectives

The objectives of this research are summarized in the following four points :

1. We will Define of a new type of almost complex manifolds, or specifically of locally conformal Kahler manifolds, which is generalize the Vaisman manifold,

and this was done by employing the concept of a torse forming vector field. As an application, we study such structures on four dimensional solvable Lie algebra.

2. We will Create a C_{12} structure, once starting from the Kahler structure and again starting from the $\beta-$Kanmotsu structure. This was done by employing the concept of warped product.

3. We will Define another type of manifolds Depending on the definition of C_{12} manifold.

4. We will present properties about Riemannian curvature and Ricci curvature of $C_{12}-$manifolds, as well as present the expression for Riemannian curvature of $C_{12}-$manifolds whose $\varphi-$sectional curvature is constant.

5. we will Create links between the new manifold, which is generalized Viseman manifold for any even$-$dimensio, and the corner manifold of any odd$-$dimension, whatever it is.

Planing

This work consists an introduction and three chapters, organized as follows :

Chapter1

Through it, we presented different concepts and properties related to differential manifolds in general and Riemannian manifolds in particul. We also defined some concepts about Lie algebra that are related to the subject of the study.

Chapter2

In it, we summarized the different concepts related to almost complex structures and almost contact metric structures, respectively, and through it we presented some types of the two structures.

Chapter3

We presented the different resultas which we have arrived , it has been arranged and divided into three sections. In the first one, we submitted the results that were on the almost complex Manifolds, specifically on the locally conformal Kahler manifolds, and the second section contained the results that were on the almost contact metric

manifold, specifically on corner manifolds. In the last section, We linked the results of the first and second sections by creating a bridge between the Vaisman generalized manifolds and corner manifolds.

الفصل 1

المنوّعات الريمانية
Riemannian manifold

يرجع تاريخ الهندسة إلى الماضي السحيق حيث ظهرت في محاولات البابليون و المصريون القداما لتأسيس حضارتهم العريقة. وفي القرن الثالث قبل الميلاد ظهر عمل إقليدس الشهير تحت مسمى الأصول (The elements)، وضم هذا الأخير المفاهيم الأساسية في الهندسة، وقسم هذا العمل إلى ثلاث مجموعات: التعاريف (Definitions)، المسلمات (Postulates) والفرضيات (Axioms)، واحتوت المجموعة الأخيرة على خمس فرضيات. أثارت الفرضية الخامسة (The Fifth postulate) أو ماتعرف بمسلمة التوازي جدلا كبيرا في الوسط العلمي، بعدما اعتبر الأصول نموذجا جيدا لمدة طويلة من الزمن.

سميت الهندسة التي تدرس الأشكال مع تبني الفرضية الخامسة بالهندسة الإقليدية(Euclidean geometry)، وظهرت بعد ذلك هندسات جديدة تدحض مسلمة التوازي عرفت بالهندسة اللاإقليدية (Non-Euclidean geometry). بدأت هذه الهندسة مع لوباتشفيسكي في مطلع القرن التاسع، ولم يكن الوحيد الذي أسس لهندسة جديدة، بل عمل على ذلك جاوس وكذلك العالم المجري بوي ...

في عام 1854 وصل العالم ريمان إلى نتيجة هامة تربط هندسة لوباتشفيسكي بهندسة إقليدس، ممّا مكنه من التوصّل إلى نظام هندسي مختلف عن سابقيه، أطلق عليه إسم الهندسة الريمانية (Riemannian geometry). تهتم هذه الهندسة بدراسة المنوّعات الريمانية، التي تعرف في الهندسة التفاضلية على أنها منوّعات تفاضلية مزودة بموتّر متري ريماني.

في هذا الباب، سنتطرق إلى أهم المفاهيم المتعلقة بالمنوّعة الريمانية التي نحتاجها في الفصول القادمة لإثبات النتائج المحصّل عليها، والمتمثلة في: مفهوم الموتّر وكذا الموتّر المتري الريماني، بعض المؤثرات على المنوّعة الريمانية، التقوّسات على المنوّعة الريمانية (التقوّس الريماني، التقوّس المقطعي، تقوّس ريتشي والتقوّس السلّمي). و أدرجنا كذلك لمحة على جبور لي القابلة للحل و القابلة للنمو مرورا بزمر و جبور ليي وأخيرا بعض المفاهيم حول المنوّعة الريمانية الجُداء ونخص بالذكر منوّعة الجُداء الإلتفافي. للمزيد من التفاصيل يرجى الإطلاع على المصادر التالية [2]، [42]، [34]، [35]، [9]، [30]، [31]، [55]

1.1 الموتّرات Tensors

1.1.1 الحقل الشعاعي Vector field

لتكن M منوعة تفاضلية بعدها n، نسمي مجموعة الأشعة المماسية للمنوعة M عند النقطة p فضاءا مماسيا لـ M عند p، ونرمز لها بالرمز T_pM، وبالتالي يكون لدينا مجموعة أخرى هي مجموعة الفضاءات المماسية للمنوعة M، تشكل هذه الأخيرة منوعة تفاضلية يكون بعدها مساوي لضعف بعد المنوعة M، يطلق عليها اسم الليف المماسي، ونرمز لها بالرمز TM. كذلك نرمز إلى مجموعة الدوال الملساء أي التي من الصنف C^∞ على M بالرمز $\mathfrak{F}(M)$.

الحقل الشعاعي على منوعة تفاضلية M، هو مفهوم يربط كل نقطة p من M بشعاع مماسي وحيد من T_pM. ويمكن إعطاء تعريفا رياضيا أكثر دقة كالتالي:

تعريف 1.1.1. نقول عن X أنه حقل شعاعي على M إذا كان X تطبيقا معرفا بالشكل الآتي

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \end{aligned}$$

حيث $X_p \in T_pM$. أي: من أجل كل $f \in \mathfrak{F}(M)$، لدينا: $X_p(f) \in \mathbb{R}$.

قضية 1.1.1. إذا كان X حقلا شعاعيا على M وكان f عنصرا من $\mathfrak{F}(M)$، فإن $X(f)$ هي دالة حقيقية على M حيث:

$$X(f)(p) = X_p(f)$$

من أجل كل نقطة p من M.

إذا كانت الدالة $X(f)$ ملساء أي $X(f) \in \mathfrak{F}(M)$ من أجل كل عنصر f من $\mathfrak{F}(M)$، عندئذ نقول عن الحقل الشعاعي X أنه من الصنف C^∞ (أو أملس) على المنوعة M. نرمز لمجموعة حقول الأشعة الملساء على المنوعة M بالرمز $\mathfrak{X}(M)$ أو $\Gamma(TM)$.
في هذا العمل ، سنعتمد الترميز $\mathfrak{X}(M)$ لمجموعة حقول الأشعة الملساء على M.

تعريف 1.1.2. لتكن M منوعة تفاضلية. نسمي قوس لي على M كل تطبيق $\mathbb{R}-$ثنائي الخطية معرف كمايلي:

$$\begin{aligned} [,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] = XY - YX \end{aligned}$$

ويحقق الشروط التالية:

- $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

من أجل كل حقول الأشعة X، Y و Z على M، و f و g من $\mathfrak{F}(M)$ و a و b من $\mathbb{R}$.

إذا كانت $(x_1, x_2, ..., x_n)$ منظومة إحداثيات على جوار مفتوح U من M، فإنه من أجل كل نقطة p تنتمي إلى U ومن أجل كل دالة f من $\mathfrak{F}(M)$ يكون لدينا $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$، باعتبار $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ هي حقول أشعة ملساء، عند النقطة p تشكل أساسا للفضاء T_pM. نرمز لها اختصارا بـ $(\partial_1, \partial_2, ..., \partial_n)$. وبالتالي يمكن كتابة أي حقل شعاعي V على U كما يلي

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} V_i \partial_i$$

حيث $V_i = V(x_i)$ تسمى مركبات الحقل الشعاعي V.

1.1.2 الأشكال التفاضلية الأحادية One forms

الأشكال التفاضلية الأحادية على منوعة تفاضلية M هي عناصر ثنوية لحقول الأشعة. الفضاء الثنوي T_pM^* للفضاء المماسي T_pM عند النقطة p يسمى ثنوي الفضاء المماسي لـM عند p.

تعريف 1.1.3. نسمي شكلا تفاضليا أحاديا أو فقط شكلا أحاديا θ على منوعة تفاضلية M كل تطبيق يرفق بكل نقطة p من M عنصرا θ_p من ثنوي الفضاء المماسي T_pM^*.

إذا كان θ شكلا أحاديا على M و X حقلا شعاعيا على M، فإننا نرمز بـ $\theta(X)$ للدالة الحقيقية على M التي قيمتها عند كل نقطة p هي نفسها قيمة θ_p عند كل X_p أي:

$$\begin{aligned} \theta(X) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \theta(X)(p) = \theta_p(X_p) \end{aligned}$$

قضية 1.1.2. نقول عن شكل أحادي θ على منوعة M أنه أملس إذا وفقط إذا كانت الدالة $\theta(X)$ ملساء، من أجل كل حقل شعاعي X على M.

نرمز لمجموعة الأشكال الأحادية الملساء على منوعة M بالرمز $\mathfrak{X}^*(M)$.

تعريف 1.1.4. مؤثر التفاضل الخارجي لدالة f على M هو شكل تفاضلي أحادي نرمزله بالرمز $\mathrm{d}f$ حيث:

$$\mathrm{d}f(X) = X(f)$$

من أجل كل حقل شعاعي X على M.

والآن، نعتبر الخريطة المحلية (U, ϕ) على M والمرتبطة بمنظومة إحداثيات $(x_1, x_2, ..., x_n)$. إذن يمكن القول أن العائلة $(dx_1, dx_2, ..., dx_n)$ تشكل منظومة إحداثيات للأشكال الأحادية على الجوار المفتوح U، بالمقابل تمثل هذه العائلة أساسا ثنويا لإحداثيات حقول الأشعة $(\partial_1, \partial_2, ..., \partial_n)$ على U. وهذا يعني أن:

$$\mathrm{d}x_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}; \qquad i, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

وبالتالي، أي شكل تفاضلي أحادي θ على M يمكن كتابته كمايلي:

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \theta^i dx_i.$$

حيث $\theta^i = \theta(\partial_i)$ هي دوال ملساء، تسمى مركبات الشكل الأحادي θ.

1.1.3 الموتّرات Tensors

- إذا كان V فضاءا حلقيا على حلقة K، فإن مجموعة التطبيقات الخطية من V نحو K تشكل فضاءا حلقيا على K يسمى ثنوي الفضاء الحلقي لـV. نرمز له بالرمز V^*.
- الرمز V^r هو اختصار للجداء $\underbrace{V \times ... \times V}_{r\text{مرة}}$، بالمقابل الرمز $(V^*)^s$ هو اختصار للجداء $\underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{s\text{مرة}}$.

الآن وبعد ضبط الرموز، يمكن تعريف الموتّر على فضاء حلقي

تعريف 1.1.5. ليكن V فضاءا حلقيا على الحلقة K، وليكن r و s عددان طبيعيان. نسمي موترا من النوع (r, s) على V كل تطبيق K-متعدد الخطية A حيث:

$$A : (V^*)^r \times V^s \longrightarrow K$$

نرمز لمجموعة الموترات من النوع (r, s) على V بالرمز $\mathfrak{T}^r_s(V)$.

يمكن التأكد ببساطة من أن $\mathfrak{T}_s^r(V)$ يشكل فضاءا حلقيا على K. إذا أخذنا نفس التعريف السابق مع استبدال الفضاء الحلقي V بالفضاء $\mathfrak{X}(M)$ مع العلم أنه فضاء حلقي على الحلقة $\mathfrak{F}(M)$، نحصل على التعريف التالي

تعريف 1.1.6. لتكن M منوعة تفاضلية. نقول عن T أنه حقل موتر أو فقط موتر من النوع (r,s) على M إذا وفقط إذا كان T موترا من النوع (r,s) على $\mathfrak{F}(M)$-الفضاء الحلقي $\mathfrak{X}(M)$، أي T تطبيق $\mathfrak{F}(M)$-متعدد الخطية حيث:

$$T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$$

نرمز لمجموعة حقول الموترات على M بالرمز $\mathfrak{T}_s^r(M)$.

ملاحظات 1.1.1. 1. إذا كان $r = s = 0$، فإن $\mathfrak{T}_0^0(M) = \mathfrak{F}(M)$.

2. إذا كان $s = 0$ و $r = 1$، فإن $\mathfrak{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$.

3. إذا كان $r = 0$ و$s = 1$، فإن $\mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}(M)$.

لتكن $\xi = (x_1, x_2, ..., x_n)$ منظومة إحداثيات على جوار مفتوح U من M. إذا كان T عنصرا من $\mathfrak{T}_s^r(M)$ فإن مركبات الموتر T المرتبطة بـ ξ هي التطبيقات التالية

$$T^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} = T(dx_{i_1}, ..., dx_{i_r}, \partial_{j_1}, ..., \partial_{j_s}); \qquad i_1, ..., i_r, j_1, ..., j_s \in \{1, 2, ...n\}$$

ومنه، يمكن كتابة الموتر T على الجوار U بالشكل التالي:

$$T = \sum T^{i_1,...,i_r}_{j_1,...,j_s} \partial_{i_1} \otimes ... \otimes \partial_{i_s} \otimes dx_{j_1} \otimes ... \otimes dx_{j_r}.$$

1.1.4 الموتر المتري الريماني Riemannian Metric tensor

تعريف 1.1.7. لتكن M منوعة تفاضلية، وليكن g موترا على M. نقول عن g أنه موتر متري ريماني على M إذا كان g حقلا موترا من النوع $(0,2)$، تناظريا (*Symmetric*) و معرفا إيجابا(*Positive definite*). بعبارة أخرى؛
$g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ ومن أجل كل نقطة p من M التطبيق ثنائي الخطية g_p المعرف كالآتي :

$$g_p : T_pM \otimes T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

يحقق الشرطين التاليين:

1. $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p) \quad ; \quad \forall X_p, Y_p \in T_pM$ (تناظريا)
2. $g_p(X_p, X_p) > 0 \quad ; \quad \forall X_p \in T_pM - \{0\}$ (معرفا إيجابا)

تعريف 1.1.8. كل منوعة تفاضلية ملساء M مزودة بموتر متري ريماني g تسمى منوعة ريمانية، نرمز لها بالرمز (M, g).

تماما كما ذكرنا سابقا، باعتبار $(x_1, x_2, ..., x_n)$ منظومة إحداثيات على مفتوح U من M وg حقل موتر على M، يمكن كتابة g محليا كالتالي:

$$g = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

حيث g_{ij} هي مركبات الموتر g و $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. كذلك، يمكن القول أن $(g_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ هي المصفوفة المرفقة بالموتر المتري الريماني g.

1.1.5 وصلة ريمان Riemannian connection

أولا يجب أن نعرف معنى وصلة

تعريف 1.1.9. نسمي وصلة ∇ على منوعة تفاضلية M، التطبيق المعرفة كالآتي:

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

والتي تحقق الشروط التالية:

1. تكون $\nabla_X Y$، $\mathfrak{F}(M)$-خطية بالنسبة لـ X.
2. تكون $\nabla_X Y$، $\mathbb{R}$- خطية بالنسبة لـ Y.
3. $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

وذلك من أجل كل عنصرين X و Y من $\mathfrak{X}(M)$ و f من $\mathfrak{F}(M)$. تسمى $\nabla_X Y$ المشتقة الموافقة للتباين لـ Y بالنسبة لـ X.

تعريف 1.1.10. لتكن ∇ وصلة على منوعة ريمانية (M, g)، نقول عن ∇ أنها متوافقة مع الموتر g إذا كان $\nabla g = 0$. بمعنى آخر، من أجل كل حقول الأشعة X، Y وZ على M، يكون لدينا

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

مبرهنة 1.1.1. من أجل كل منوعة ريمانية (M, g) يوجد وصلة خطية وحيدة تحقق التالي :

1. ∇ متوافق مع الموتر الريماني g،
2. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

تسمى هذه الوصلة، وصلة **لوفي سيفيتا**. ويمكن تعريفها أيضا بعلاقة كوزيل والتي تعطى بـ

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) \\ &+ Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \end{aligned}$$

من أجل البرهان يمكن الإطلاع على [42] الصفحة 61.

تعريف 1.1.11. لتكن (M,g) منوعة ريمانية، ولتكن $(x_1,x_2,...,x_n)$ منظومة الإحداثيات على الجوار المفتوح $U \subset M$، التي يكون من أجلها $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ أساسا. رموز كريستوفل للوصلة ∇ الموافقة لهذه المنظومة هي الدوال Γ_{ij}^k المعرفة على U كما يلي:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

وعددها هو n^3.

بما أن $[\partial_i, \partial_j] = 0$ فإن $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$، وهذا يستلزم أن $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ حيث: $1 \leq i,j,k \leq n$.

قضية 1.1.3. لتكن (M,g) منوعة ريمانية، و $(x_1,x_2,...,x_n)$ منظومة إحداثيات على مجموعة مفتوحة U من M، لدينا:

1. $\nabla_{\partial_i}\left(\sum X^j\partial_j\right) = \sum\left\{\frac{\partial X^k}{\partial x_i} + \sum \Gamma_{ij}^k X^j \partial_k\right\}$ حيث $X = \sum X^j\partial_j$.
2. تعطى رموز كريستوفل بالعبارة التالية: $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m g^{km}\left\{\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right\}$.

1.2 بعض المؤثرات التفاضلية على المنوَّعة الريمانية
Some differential operators on Riemannian manifold

1.2.1 مؤثر التدرّج Gradient operator

تعريف 1.2.12. لتكن (M^n,g) منوعة ريمانية، و f دالة ملساء على M. مؤثر التدرج للدالة f هو الحقل الشعاعي الموافق للشكل التفاضلي الأحادي $\mathrm{d}f$. بمعنى، من أجل كل حقل شعاعي X على M يكون لدينا

$$g(\mathrm{grad}f, X) = \mathrm{d}f(X) = X(f)$$

باعتبار $\mathrm{grad}f$ هو الترميز المعتمد لمؤثر التدرج للدالة f.

إذا كانت $(x_1, x_2, ..., x_n)$ منظومة إحداثيات على مفتوح $U \subset M$. فإنه من أجل كل $f \in \mathfrak{F}(M)$ لدينا

$$\text{grad}f = \sum_{i,j} g^{ij}\partial_i(f)\partial_j.$$

حيث $(\partial_1, \partial_2, ..., \partial_n)$ هو أساس محلي لحقول الأشعة على M.

خواص 1.2.1. لتكن (M, g) منوعة ريمانية، ولتكن f وh عنصران من $\mathfrak{F}(M)$. إذن من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M يكون لدينا

$$\begin{aligned}
\text{grad}(f+h) &= \text{grad}f + \text{grad}h.\\
\text{grad}(fh) &= h\text{grad}f + f\text{grad}h.\\
(\text{grad}f)(h) &= (\text{grad}h)(f).\\
g(\nabla_X \text{grad}f, Y) &= g(\nabla_Y \text{grad}f, X).
\end{aligned}$$

1.2.2 مؤثر التباعد divergence operator

لتكن (M, g) منوعة ريمانية، وX حقل شعاعي على M. إذن

$$\begin{aligned}
\nabla X : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M)\\
Z &\longmapsto \nabla_Z X
\end{aligned}$$

هو تطبيق خطي من الصنف C^∞.

تعريف 1.2.13. إذا كان X حقلا شعاعيا على المنوعة M، فإن تباعد الحقل الشعاعي X هو أثر التطبيق الخطي ∇X. أي

$$\text{div}X = \text{trace}\nabla X$$

باعتبار div هو الترميز المعتمد لتباعد الحقل الشعاعي X.

تماما كما كان الأمر مع مؤثر التدرج، نجد العبارة التحليلية لـ $\text{div}X$ من أجل كل حقل شعاعي X على M

$$\text{div}X = \sum_{i=0}^{n} g^{ii} g(\nabla_{\partial_i} X, \partial_i)$$

إذا كان $(e_1, e_2, ...e_n)$ أساس متعامد متجانس على M، يكون لدينا

$$\text{div}X = \sum_{i=0}^{n} g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

أما عن تباعد شكل تفاضلي أحادي η فيعرف كالتالي

$$\begin{aligned} \text{div}\eta &= \text{trace}(\nabla_Z \eta), \qquad Z \in \mathfrak{X}(M) \\ &= \sum_{i,j} g^{ij}(\nabla_{\partial_i}\eta)(\partial_j) \\ &= \sum_{i,j} (\nabla_{e_i}\eta)(e_j). \end{aligned}$$

خواص 1.2.2. لتكن (M,g) منوعة ريمانية، وليكن η وω شكلان تفاضليان أحاديان على M وf دالة ملساء على M. إذن من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M يكون لدينا

$$\begin{aligned} \text{div}(X+Y) &= \text{div}X + \text{div}Y. \\ \text{div}(fX) &= f\text{div}X + X(f). \\ \text{div}(\eta+\omega) &= \text{div}\eta + \text{div}\omega. \\ \text{div}(f\omega) &= f\text{div}\omega + \omega(\text{grad}f). \end{aligned}$$

1.2.3 مؤثر التفاضل الخارجي Exterior differential operator

عرفنا في فقرة سابقة مؤثر التفاضل على فضاء الدوال الملساء على منوعة، والآن سنعرفه على فضاء الأشكال التفاضلية من أي رتبة.

تعريف 1.2.14. نعتبر $\Omega^r(M)$ الفضاء الشعاعي للأشكال التفاضلية من الرتبة r على M. مؤثر التفاضل على $\Omega^r(M)$ هو التطبيق الخطي

$$\text{d} : \Omega^r(M) \longmapsto \Omega^{r+1}(M)$$

المعرف من أجل كل شكل تفاضلي $\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_r} \alpha_{i_1,i_2,\ldots,i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$ من $\Omega^r(M)$ بـ

$$\text{d}\alpha = \sum_{i_1,\ldots,i_r} \text{d}\alpha_{i_1,i_2,\ldots,i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

باعتبار $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ منظومة إحداثيات على مفتوح $U \subset M$.

خواص 1.2.3. من أجل كل عنصرين α وβ من الفضائين $\Omega^r(M)$ و $\Omega^s(M)$ على الترتيب، لدينا

1. $d \circ \text{d} = 0$
2. $\text{d}(\alpha \wedge \beta) = (\text{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (\text{d}\beta)$

3. إذا كان $r = 1$ أي α شكلا تفاضليا أحاديا فإن

$$2\mathrm{d}\alpha(X,Y) = X\big(\alpha(Y)\big) - Y\big(\alpha(X)\big) - \alpha\big([X,Y]\big), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

4. إذا كان $r = 2$ أي α شكلا تفاضليا ثنائيا فإن

$$\begin{aligned} 3\mathrm{d}\alpha(X,Y,Z) &= X\big(\alpha(Y,Z)\big) + Y\big(\alpha(Z,X)\big) + Z\big(\alpha(X,Y)\big) \\ &- \alpha\big([X,Y],Z\big) - \alpha\big([Y,Z],X\big) - \alpha\big([Z,X],Y\big). \end{aligned}$$

1.3 التقوُّسات على المنوعة الريمانية
Curvature of Riemannian manifold

عندما نعرف الإنحناء (التقوس) بشكل طبيعي نقول، الإنحناء هو المقدار الذي يخرف به المنحنى عن كونه مستقيما، أو يخرف به السطح عن كونه مستويا. لكن، عندما يتعلق الأمر بالمنوّعات الريمانية يبدو مفهوم الإنحناء أكثر تعقيدا، وقد وجدت عدة طرق لوصف أو تحدد انحناء هذا النوع من المنوّعات. في هذا المبحث سنتعرف على بعض التقوُّسات على المنوعة الريمانية.

1.3.1 التقوُّس الريماني Riemannian curvature

لتكن (M,g)منوعة ريمانية و ∇ وصلة لوفي سيفيتا على M، نسمي موتر التقوُّس الريماني أو فقط التقوُّس الريماني للمنوعة M، حقل الموتر R من النوع $(1,3)$ الذي يعطي بالشكل التالي:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

خواص 1.3.4. من أجل كل Y, X و Z حقول أشعة على المنوعة M، و f, h و k دوال ملساء على M. يكون لدينا:

.1 $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$

.2 $R(fX,hY)kZ = fhkR(X,Y)Z$

.3 $g\left(R(X,Y)Z,W\right) = -g\left(R(X,Y)W,Z\right)$

.4 $g\left(R(X,Y)Z,W\right) = g\left(R(Z,W)X,Y\right)$

.5 $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

.6 $\nabla_Z(R)(X,Y) + \nabla_X(R)(Y,Z) + \nabla_Y(R)(Z,X) = 0$

ملاحظة 1.3.1. تسمى الخاصية الرابعة متطابقة أولر، والخاصية الخامسة متطابقة بيونتشي الأولى.

وككل موتر يمكن تعريف التقوُّس الريماني R محليا على جوار مفتوح U من M، مرفقا بمنظومة الإحداثيات $(x_1, x_2, ..., x_n)$ كالتالي:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum R^l_{ijk}\partial_l$$

حيث تعطى مركبات الموتر R بدلالة رموز كريستوفل كالآتي:

$$R^l_{ijk} = \partial_i(\Gamma^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik}) + \sum_{m=1}^{n}\{\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}\}$$

1.3.2 التقوُّس المقطعي Sectional curvature

لتكن (M, g) منوعة ريمانية ذات البعد $n \geq 2$، و ليكن P فضاءا جزئيا للفضاء المماسي T_pM، بعده 2 حيث p نقطة من M، يسمى الفضاء P المستوي المماسي لـ M عند النقطة p.
والآن، إذا كان v و w شعاعين من T_pM وكانت العائلة $\{v, w\}$ مولدة لـP، فإنه يمكن تعريف النسبة الموجبة تماما التالية:

$$Q(v, w) = g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2$$

انطلاقا من هذا نقدم التعريف التالي

تعريف 1.3.15. ليكن $P = vect\{v, w\}$ مستوي مماسي لمنوعة ريمانية (M, g) عند النقطة p. نسمي التقوُّس المقطعي $K(P)$ للمستوي P النسبة المعرفة بـ:

$$K(P) = K(v, w) = \frac{g\big(R(v, w)v, w\big)}{Q(v, w)}$$

ملاحظة 1.3.2. العدد $K(P)$ مستقل عن اختيار الأساس $\{v, w\}$ لـ P

قضية 1.3.4. لتكن (M, g) منوعة ريمانية بعدها $n \geq 2$. إذا كان التقوس المقطعي لـ M عند كل نقطة p من M و من أجل كل مستوي مماسي P من T_pM ثابتا قيمته c، فإن التقوس الريماني R لـM يحقق ما يلي:

$$R(X, Y)Z = c\,(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

من أجل كل Y, X و Z من $\mathfrak{X}(M)$. وفي هذه الحالة نقول عن M أنها منوعة ذات تقوس مقطعي ثابت.

1.3.3 تقوُّس ريتشي Ricci curvature

تعريف 1.3.16. لتكن (M,g) منوعة ريمانية، تقوس ريتشي للمنوعة M هو أثر التماثل الداخلي $Z \longmapsto R(Z,X)Y$، و نرمز له بالرمز S. أي: من أجل كل X و Y من $\mathfrak{X}(M)$، S يحقق ما يلي:

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \text{trace}\,(Z \longmapsto R(Z,X)Y) \\ &= \sum g\,(R(e_i,X)Y,e_i) \end{aligned}$$

حيث (e_i) هو أساس محلي متعامد ومتجانس على M.

خواص 1.3.5. لتكن (M,g) منوعة ريمانية، وليكن X وY حقلين شعاعيين على M و λ ثابت. لدينا الخواص والتعاريف التالية:

1. نقول عن M أنها منوعة أينشتاين، إذا وفقط إذا كان $S(X,Y) = \lambda g(X,Y)$
2. نقول عن M أنها ريتشي سوليتون، إذا وجد حقل شعاعي V على M يحقق:

$$(L_V g)(X,Y) + 2S(X,Y) = 2\lambda g(X,Y)$$

حيث $L_V g$ هي مشتقة ليي على طول الحقل الشعاعي V

3. تقوُّس ريتشي هو موتر تناظري. أي: $S(X,Y) = S(Y,X)$.

1.3.4 التقوُّس السلمي Scalar curvature

تعريف 1.3.17. التقوُّس السلمي لمنوعة ريمانية (M,g) بعدها n، هو العدد r المعرفة كالتالي

$$\begin{aligned} r &= \text{trace}\,(X,Y \longmapsto S(X,Y)) \\ &= \sum g\,(R(e_i,e_j)e_j,e_i)\,. \end{aligned}$$

نتيجة 1.3.1. لتكن (M,g) منوَّعة ريمانية بعدها n ذات تقوُّس مقطعي ثابت c. إذن من أجل كل X و Y من $\mathfrak{X}(M)$ يكون لدينا:

.1 $S(X,Y) = (n-1)cg(X,Y)$.

.2 $r = n(n-1)c$.

1.4 جبور لي
Lie algebra

1.4.1 تعاريف Definitions

تعريف 1.4.18. (**زمرة لي** لتكن G منوعة تفاضلية. إذن، نقول عن G أنها زمرة لي إذا كانت G منوعة ملساء وتشكل زمرة بالمعنى الجبري. وهذا يعني أن تكون الدالتان

$$\begin{array}{rcl} m : G \times G & \longrightarrow G, & \text{و} \quad i : G \longrightarrow G \\ (g,h) & \longmapsto gh, & \qquad g \longmapsto g^{-1} \end{array}$$

ملساوان.

تعريف 1.4.19. (**جبر لي**) نسمي جبر لي كل فضاء شعاعي $\mathfrak{g}$ مزود بالتطبيق ثنائي الخطية التالي

$$[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

التطبيق ثنائي الخطية المعرف هنا هو نفسه قوس لي الذي سبق وعرفناه.

نعتبر الآن، التطبيق $L_a : G \longrightarrow G$ الذي يرفق كل عنصر g بالعنصر ag من G من أجل كل a من G ، نلاحظ أن التطبيق L_a هو تماثل تفاضلي (Diffeomorphism)، يسمى L_a الإنسحاب اليساري (أو الإنسحاب إلى اليسار) على زمرة لي G.

تعريف 1.4.20. إذا كان X حقلا شعاعيا على زمرة لي G، يحقق $dL_a(X) = X_a$ من أجل كل a من G. عندئذ نقول عن الحقل الشعاعي X أنه لا متغير يسارا(أو من اليسار).

نرمز بالرمز $\mathfrak{g}$ إلى مجموعة حقول الأشعة اللامتغيرة يسارا على G. إذا زودنا المجموعة $\mathfrak{g}$ بالجمع والضرب في سلمي الإعتياديين لحقول الأشعة، بهذا تكون $\mathfrak{g}$ فضاءا شعاعيا. وبالتالي يمكن استنتاج القضية التالية:

قضية 1.4.5. الفضاء الشعاعي $\mathfrak{g}$ المزود بالتطبيق ثنائي الخطية (قوس لي) هو جبر لي. يسمى جبر لي المرافق لزمرة لي G.

كذلك، يمكن ربط جبور لي بشكل طبيعي مع زمر لي؛ فإذا كان e هو العنصر الحيادي لزمرة لي G فإن الفضاء المماسي لـ G عند e يشكل جبر لي. القضية التالية تبرهن ذلك:

قضية 1.4.6. التطبيق المعرف من $\mathfrak{g}$ نحو T_eG، والذي يرفق كل حقل شعاعي X من $\mathfrak{g}$ بالشعاعي X_e من T_eG هو تماثل، أي أن الفضائين متكافئين.

باعتبار زمرة لي G هي منوّعة تفاضلية أيضا، نقدم التعريف التالي

تعريف 1.4.21. نقول عن موتر ريماني g على زمرة لي G أنه لا متغير يسارا إذا كانت كل الإنسحابات اليسارية هي تساوي قياس *isometries*) (.بمعنى

$$g(X_a, Y_a) = g((dL_a(X), dL_a(Y))$$

من أجل كل a من G و $X, Y \in TG$.

1.4.2 جبر لي القابل للحل و غير القابل للنمو Solvable and nilpotent Lie algebra

تعريف 1.4.22. لتكن $\mathfrak{h}$ مجموعة جزئية من جبر لي $\mathfrak{g}$، إذا كانت $\mathfrak{h}$ فضاءا شعاعيا جزئيا من $\mathfrak{g}$ مستقر بالنسبة لقوس لي (أي $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$) ، عندئذ نقول عن $\mathfrak{h}$ أنه جبر لي جزئي. إضافة إلى ذلك، نقول عن جبر لي الجزئي $\mathfrak{h}$ أنه مثالي إذا تحقق التالي

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$$

ملاحظة 1.4.3. المجموعة الصفرية $\{0\}$ والجبر $\mathfrak{g}$ نفسه هما مثاليين لـ $\mathfrak{g}$. نسمي كلا منهما مثالي تافه.

تعريف 1.4.23. نقول عن جبر لي $\mathfrak{g}$ أنه بسيط إذا كان غير قابل للتفكيك. بمعنى آخر لا يقبل أي مثالي سوى المثاليين التافهين.

تعريف 1.4.24. (سلسلة المشتقات) نسمي سلسلة المشتقات لجبر لي $\mathfrak{g}$ المتوالية من الأمثال المعرفة كالتالي:

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1]...$$

نعرف الآن جبر لي القابل للحل

تعريف 1.4.25. نقول عن جبر لي $\mathfrak{g}$ أنه قابل للحل إذا وجد عدد طبيعي n يكون من أجله الجبر المشتق $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}]$ معدوما.

قضية 1.4.7. إذا كان $\mathfrak{g}$ جبر لي قابل للحل، فإن كل جبر جزئي (مثالي) لـ $\mathfrak{g}$ يكون قابل للحل.

تعريف 1.4.26. نقول عن جبر لي $\mathfrak{g}$ أنه غير قابل للنمو إذا وجد عدد طبيعي n يكون من أجله الجبر المشتق $[...[[\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2], \mathfrak{g}^3], ...\mathfrak{g}^n]$ معدوما.

وبشكل أكثر دقة، نُعرّف C_i كما يلي

$$C_0 = \mathfrak{g} \quad \text{و} \quad C_{i+1} = [C_i, \mathfrak{g}]$$

فإذا وُجدت قيمة لـ i بحيث يكون $C_i = 0$ نقول أن $\mathfrak{g}$ هو جبر لي غير قابل للنمو.

1.5 المنوّعة الريمانية الجُداء
Riemannian Product manifold

المنوّعات الريمانية الجُداء هي فضاءات موجودة طبيعيا و يمكن رؤيتها مثلا من خلال السطح الدوراني إذ يمكن الحصول عليه من خلال تدوير منحن حول مستقيم و كذلك الطارة يمكن رأيتها على أساس أنها جُداء دائرتين. كما يمكن التماس دور المنوّعات الجُداء من خلال فضاء فريد مان-روبتسون-والكر.

في هذه الفقرة ، نقدم مفهوم المنوّعة الريمانية الجُداء، و بعض الأدوات الهندسية التي يمكن تعريفها عليها، على غرار المترك القطري، المترك الإلتفافي. سنقدم وصلة لوفي-سيفيتا المرفقة بكل نوع من هذين المرتّرات مع تقوّس ريمان و تقوّس ريتشي بشيئ من الإختصار. و من أجل التفصيل يرجى الرجوع للمراجع [19, 20]

1.5.1 المنوّعة الريمانية الجُداء Riemannian Product manifold

المنوّعة الريمانية الجُداء

تعريف 1.5.27.
لتكن $(M_1, \mathcal{A}_1), (M_2, \mathcal{A}_2)$ منوّعتين من الصنف C^∞، مزوّدتين بالأطلسين $\mathcal{A}_1$ و $\mathcal{A}_2$ بعُداهما n_1, n_2 على الترتيب. إذن، الجُداء $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ المُعطى بـ

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \,|\, (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1, (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2\}$$

حيث

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 & \longrightarrow & \varphi_1(U_1) \times \varphi_2(U_2) \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2)) \end{array}$$

هو أطلس على المنوّعة $M_1 \times M_2$ ذات البُعد $n_1 + n_2$ و الصنف C^∞.

المنوّعة $(M_1 \times M_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ تُسمى **المنوّعة الجُداء** لـM_1 و M_2.

قضية 1.5.8.

(1) إذا كان M_1 و M_2 منوّعتين من الصنف C^∞ فإن الإسقاطين النموذجيين $\pi_1 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ و $\pi_2 : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ هما من الصنف C^∞.

(2) إذا كان M_1، M_2 و M_3 ثلاث منوّعات فإن التطبيق $f : M_3 \longrightarrow M_1 \times M_2$ المعرّف بـ $f = (\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f)$ يكون من الصنف C^∞ إذا و فقط إذا كان $\pi_1 \circ f$ و $\pi_2 \circ f$ من الصنف C^∞.

قضية 1.5.9. لتكن M_1 و M_2 منوّعتين كيفيتين، إذن من أجل كل $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ لدينا :

$$T_{(x_1,x_2)}M_1 \times M_2 \cong T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2 \,.$$

قضية 1.5.10. لتكن $X = (X_1, X_2)$ و $Y = (Y_1, Y_2)$ حقلي أشعة على المنوّعة الجُداء $M_1 \times M_2$، من أجل كل $f_1 \in C^\infty(M_1)$ و $f_2 \in C^\infty(M_2)$ لدينا

$$\left\{ \begin{array}{l} X(f_1 \circ \pi_1) = Y(f_1 \circ \pi_1) \\ X(f_2 \circ \pi_2) = Y(f_2 \circ \pi_2) \end{array} \right. \Rightarrow X = Y$$

قضية 1.5.11. لتكن ω، η شكلين تفاضليين على المنوّعة الجُداء $M_1 \times M_2$. من أجل كل $X_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$،

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(X_1, 0) = \eta(X_1, 0) \\ \omega(0, X_2) = \eta(0, X_2) \end{array} \right. \Rightarrow \omega = \eta$$

قضية 1.5.12. إذا كان ∇^1 و ∇^2 وصلتين خطيتين على M_1 و M_2 على الترتيب فإنه يوجد وصلة خطية وحيدة ∇ على المنوّعة $M_1 \times M_2$ بحيث

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla^1_{X_1} Y_1, 0) \\ \nabla_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0, \nabla^2_{X_2} Y_2) \\ \nabla_{(X_1,0)}(0, X_2) = \nabla_{(0,X_2)}(X_1, 0) = 0 \end{array} \right.$$

و ذلك من أجل كل $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.

2. الموتّر المتري القطري على المنوّعة الجُداء

قضية 1.5.13. إذا كان (M_1, g_1) و (M_2, g_2) منوّعتين ريمانيتين بُعداهما n_1 و n_2 على الترتيب، فإن الموتّر $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ هو موتر متري ريماني على $M_1 \times M_2$ بحيث

$$\begin{array}{rcl} g((X_1, 0), (Y_1, 0)) & = & g_1(X_1, Y_1) \circ \pi_1 \\ g((0, X_2), (0, Y_2)) & = & g_2(X_2, Y_2) \circ \pi_2 \\ g((X_1, 0), (0, X_2)) & = & 0 \end{array}$$

و ذلك من أجل كل $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$.

يكفي أن نلاحظ المصفوفة المرفقة لـ g،

$$\begin{pmatrix} (g_{1_{ij}}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & (g_{2_{ab}}) \end{pmatrix}$$

تعريف 1.5.28. نسمي المنوّعة الريمانية $(M_1 \times M_2, g)$ **المنوّعة الريمانية الجُداء.**

قضية 1.5.14. الوصلة على $M_1 \times M_2$ و المرفقة بالموتر المتري $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$ هي الوصلة نفسها المعرّفة في القضية (12.5.1).

موتّر التقوّس الريماني و موتّر ريتشي على المنوّعة الريمانية الجُداء

قضية 1.5.15. لتكن $(M_1 \times M_2, g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ منوّعة ريمانية جُداء و موتّر تقوسها الريماني هو R. إذا كان $X_1, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2, Y_2, Z_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$ فإن

$$\begin{cases} R\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(Z_1,0) = \big(R^1(X_1,Y_1)Z_1,0\big) \\ R\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(0,Z_2) = \big(0,R^2(X_2,Y_2)Z_2\big) \\ R\big((X_1,0),(0,Y_2)\big)(Z_1,0) = R\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(0,Z_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = R\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(Z_1,0) = 0 \\ R\big((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\big)(Z_1,Z_2) = \big(R^1(X_1,Y_1)Z_1, R^2(X_2,Y_2)Z_2\big). \end{cases}$$

قضية 1.5.16. لتكن $(M_1 \times M_2, g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ منوّعة ريمانية جُداء مع S هو موتّر تقوس ريتشي. إذا كان $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$، فإن

$$\begin{cases} S((X_1,0),(Y_1,0)) = S^1(X_1,Y_1) \circ \pi_1 \\ S((0,X_2),(0,Y_2)) = S^2(X_2,Y_2) \circ \pi_2 \\ S((X_1,0),(0,X_2)) = 0. \end{cases}$$

1.5.2 الموتّر المتري الإلتفافي Warped metric tensor

الموتّر المتري الإلتفافي

قضية 1.5.17. لتكن (M_1, g_1) و (M_2, g_2) منوّعتين ريمانيتين بُعداهما n_1 و n_2 على الترتيب و f دالة موجبة تماما على M_1. نعتبر المنوّعة الجُداء $M_1 \times M_2$ مع الاسقاطين النموذجيين π_1 و π_2، إذن

$$\tilde{g} = \pi_1^* g_1 + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^* g_2 \,,$$

هو موتّر متري على $M_1 \times M_2$.

ملاحظة 1.5.4. المصفوفة المرفقة بـ $\tilde{g}$ هي

$$\begin{pmatrix} (g_{1_{ij}}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & f^2(g_{2_{ab}}) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (\tilde{g})_{\alpha\beta} = \begin{cases} g_{1_{\alpha\beta}}, & \alpha,\beta \in \{1,...,m\}; \\ f^2 g_{2_{\alpha\beta}}, & \alpha,\beta \in \{m+1,...,m+n\}; \\ 0, & \text{حالات أخرى} \end{cases}$$

تعريف 1.5.29. لتكن (M_1, g_1) و (M_2, g_2) منوّعتين ريمانيتين بُعداهما n_1 et n_2 على الترتيب، و f دالة موجبة تماما على M. الجُداء الإلتفافي الذي نرمز له بـ $M_1 \times_f M_2$ يُعرّف باعتباره المنوّعة الجُداء $M_1 \times M_2$ المزوّدة بالموتر المتري $\tilde{g}$.

الزوج $(M_1 \times_f M_2, \tilde{g})$ يسمى **المنوّعة الريمانية للجُدء الإلتفافي** و f تُسمى **دالة الإلتفاف.**

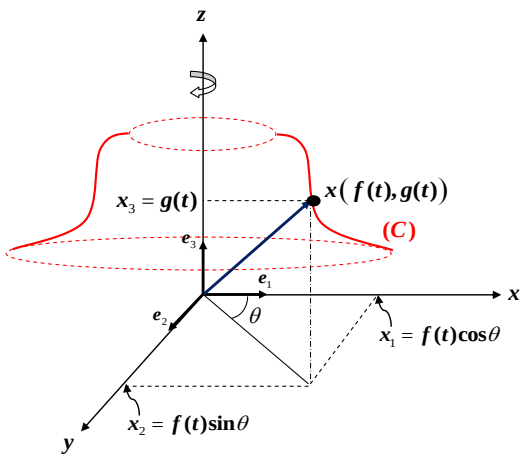
مثال 1.5.1. السطح الدوراني

السطح الدوراني M الناتج عن دوران منحنى مستوي (C) حول محور D هو مثال طبيعي عن منوّعة ريمان للجُداء الإلتفافي. لنشرح ذلك بالتفصيل بالنسبة لسطح دوراني في $\mathbb{R}^3$.

السطح الدوراني يتولد من دوران خط (C) (مستقيم أو منحني) حول خط مستقيم ثابت (D)، في هذه الحالة نطلق على الخط المتحرك (C) اسم راسم السطح وعلى (D) محور الدوران. يجب الأخذ بعين الاعتبار أن معظم أنواع السطوح الدورانية تنتج في حالة انتماء الخطوط (C) و (D) إلى نفس المستوى.

المنحني الذي يتم الحصول عليه كنتيجة لتقاطع السطح الدوراني بسطح عمودي على محور الدوران، يسمى منحني موازي و المنحني الذي يتم الحصول عليه كنتيجة لتقاطع السطح الدوراني بسطح يمر بمحور الدوران، يسمى منحنى الطول.

سنحسب عبارة الصيغة الأساسية الأولى و عبارة الصيغة الأساسية الثانية.



عبارة الموتّر المتري الريماني :

من الشكل أعلاه، لدينا

$$X = \begin{cases} x_1 = f(t)\cos\theta \\ x_2 = f(t)\sin\theta \\ x_3 = g(t) \end{cases}$$

مع $f > 0$. و بالتالي يمكننا حساب مركبات الموتّر المتري g كمايلي

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial t} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta \\ f'(t)\sin\theta \\ g'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta \\ f'(t)\sin\theta \\ g'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f'^2(t) + g'^2(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12} = g_{21} &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial X}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f'(t)\cos\theta \\ f'(t)\sin\theta \\ g'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -f(t)\sin\theta \\ f(t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22} = g &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial \theta}, \frac{\partial X}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -f(t)\sin\theta \\ f(t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -f(t)\sin\theta \\ f(t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f^2(t). \end{aligned}$$

و عليه،

$$g = \big(f'^2(t) + g'^2(t)\big)dt^2 + f^2(t)d\theta^2,$$

أي أن

$$g = g_0 + f^2(t)g_1,$$

حيث $g_0 = \big(f'^2(t) + g'^2(t)\big)dt^2$ و $g_1 = d\theta^2$.

و بالتالي نقول، إذا حصلنا على سطح دوراني M (منوّعة ريمانية) بتدوير منحنى مستوي (C) حول محور L في $\mathbb{R}^3$ و كانت $f : (C) \to \mathbb{R}^+$ تعبّر عن المسافة بين المنحنى و المحور فإن $M = (C) \times_f S^1$.

مثال 1.5.2. الطارات

* الطارة T^2 هي منوّعة جُداء $S^1 \times S^1$ مع $g_u = \frac{4}{(1+u^2)^2}du^2$ موتّر متري ريماني على دائرة الوحدة S^1 إذن،

$$\tilde{g} = g_u + f^2 g_v\,,$$

هو مترك ريماني إلتفافي على الطارة T^2 حيث f دالة من الصنف C^∞ على S^1 موجبة تماما.

* الطارة T^3 هي المنوّعة الجداء $S^1\times S^1\times S^1$ و بالتالي يمكننا تعريف موتّرين متريين إلتفافيين على هذه المنوّعة الجُداء

$$\tilde{g_1}=g_u+f_1^2\big(g_v+g_w\big)\quad et\quad \tilde{g_2}=\big(g_u+g_v\big)+f_2^2 g_w,$$

حيث f_1 دالة من الصنف C^∞ على S^1 و f_2 هي دالة من الصنف C^∞ على $S^1\times S^1$ و هما موجبتان تماما.

قضية 1.5.18. لتكن (M_1,g_1)، (M_2,g_2) منوّعتين ريمانيتين و $(M_1\times_f M_2,\tilde{g})$ منوّعة الجُداء. إذا كان $X_1,Y_1\in\mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2,Y_2\in\mathfrak{X}(M_2)$، فإن

1. $\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0)=(\nabla^1_{X_1}Y_1,0)$
2. $\tilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0,X_2)=\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(X_1,0)=X_1(\ln f)(0,X_2)$
3. $\tilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0,Y_2)=(0,\nabla^2_{X_2}Y_2)-\frac{1}{2}g_2(X_2,Y_2)(\mathrm{grad}^1 f^2,0)$

حيث $\tilde{\nabla}$ ، ∇^1 و ∇^2 هي وصلات لوفي سيفيتا الموافقة لـ $\tilde{g}$ ، g_1 و g_2 على الترتيب.

موتّر التقوّس الريماني و موتّر ريتشي على المنوّعة الريمانية للجُداء الإلتفافي

قضية 1.5.19. لتكن $\tilde{M}=M_1\times_f M_2$ منوّعة الجُداء الإلتفافي $\tilde{R}$ موتّر تقوّسها الريماني. إذا كان $X_1,Y_1,Z_1\in\mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2,Y_2,Z_2\in\mathfrak{X}(M_2)$، فإن

1. $\tilde{R}\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(Z_1,0)=\big(R^1(X_1,Y_1)Z_1,0\big)$
2. $\tilde{R}\big((0,X_2),(Y_1,0)\big)(Z_1,0)=-\frac{1}{f}g_1\big(\nabla^1_{Y_1}\mathrm{grad}f,Z_1\big)(0,X_2)$
3. $\tilde{R}\big((X_1,0),(Y_1,0)\big)(0,Z_2)=R\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(Z_1,0)=0$
4. $\begin{aligned}\tilde{R}\big((X_1,0),(0,Y_2)\big)(0,Z_2)&=R\big((X_1,0),(0,Z_2)\big)(0,Y_2)\\&=-f\,g_2(Y_2,Z_2)\big(\nabla^1_{X_1}\mathrm{grad}f,0\big)\end{aligned}$
5. $\tilde{R}\big((0,X_2),(0,Y_2)\big)(0,Z_2)=\big(0,R^2(X_2,Y_2)Z_2\big)-|\mathrm{grad}f|^2\big((0,X_2\wedge_2 Y_2)Z_2\big)$

مع $(X\wedge Y)Z=g(Y,Z)X-g(X,Z)Y$.

البرهان 1.5.1. البرهان يتم بطريقة مباشرة من خلال استعمال تعريف التقوّس الريماني و استعمال القضية (18.5.1).

قضية 1.5.20. لتكن $M_1 \times_f M_2$ منوّعة الجُداء الإلتفافي و $\tilde{S}$ تقوّس ريتشي عليها. من أجل كل $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M_1)$ و $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M_2)$ لدينا

1. $\tilde{S}\big((X_1,0),(Y_1,0)\big) = S^1(X_1,Y_1) - \frac{n_2}{f}\, g_1(\nabla^1_{X_1}\text{grad}f, Y_1)$
2. $\tilde{S}\big((X_1,0),(0,Y_2)\big) = 0$
3. $\tilde{S}\big((0,X_2),(0,Y_2)\big) = S^2(X_2,Y_2) - g_2(X_2,Y_2)\big(f\triangle^1(f) + (n_2-1)|\text{grad}f|^2\big)$,

حيث $\triangle^1(f)$ هو مؤثّر لابلاس للدالة f على M_1.

تذكير:

$$\triangle f = \sum_i \nabla df(e_i,e_i) = \text{div}(\text{grad}f) = g(\nabla_{e_i}\text{grad}f, e_i).$$

البرهان 1.5.2. البرهان يتم بطريقة مباشرة من خلال استعمال تعريف تقوّس ريتشي و استعمال القضية (19.5.1) مع الأساس المتعامد و المتجانس $\{e_i, \frac{1}{f}f_k\}$ مع $\{e_i\}_{1\le i\le n_1}$ أساس متعامد و متجانس على (M^1,g_1) و $\{f_i\}_{1\le i\le n_2}$ أساس متعامد و متجانس على (M^2,g_2).

مثال 1.5.3. (**المخروط على منوّعة ريمانية**)
لتكن (M,g) منوّعة ريمانية بُعدها n.
نقول عن منوّعة الجُداء الإلتفافي $\big(\tilde{M} = M\times_r R^+, \tilde{g} = r^2g + dr^2\big)$ أنها مخروط على منوّعة.
و بالتالي وصلة لوفي سيفيتا $\tilde{\nabla}$ المرفقة للمترك $\tilde{g}$ تحقق مايلي

$$\tilde{\nabla}_{\partial r}\partial r = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\partial r}X = \tilde{\nabla}_X\partial r = \frac{1}{r}X, \quad \tilde{\nabla}_XY = \nabla_XY - rg(X,Y)\partial_r, \quad (\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}),$$

مع X ، Y هما حقلين شعاعيين على M.
مركبات تقوّسي ريمان و ريتشي $\tilde{R}$ و $\tilde{S}$ على الترتيب تعطى كمايلي:

* $\tilde{R}(\partial r,X)\partial r = \tilde{R}(\partial r,X)Y = \tilde{R}(X,Y)\partial r = 0,$

* $\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \big(X\wedge Y\big)Z,$

** $\tilde{S}(\partial r,\partial r) = \tilde{S}(X,\partial r) = 0,$

** $\tilde{S}(X,Y) = S(X,Y) - (n-2)g(X,Y).$

ملاحظة 1.5.5. باعتبار وجود تشاكل تقابلي بين الفضاءين المماسين

$$T_{(x_1,x_2)}M_1 \times M_2 \quad \text{و} \quad T_{x_1}M_1 \oplus T_{x_2}M_2$$

فلا بأس أن نستعمل الجمع عوضا عن الثنائيات و الأقواس تبسيطا للحسابات. فمثلا نكتب $X = X_1 + X_2$ عوضا عن $X = (X_1, X_2)$. هذا الترميز يسمح لنا بمعالجة العبارات منفصلة أي نتناول الجزء الخاص بالمنوّعة M_1 ثم الجزء الثاني الخاص بالمنوّعة M_2 تماما كما فعلنا مع مثال المخروط أعلاه.

الفصل 2

بعض البنى على المنوعة الريمانية
Structures on a Riemannian manifold

من بين الطرق التي اشتُهرت في إنشاء منوّعات ريمانية جديدة هي إدراج بُنية جديدة. إذا اعتبرنا M منوّعة تفاضلية مزوّدة بموتّر متري ريماني g وعرّفنا عليها بُنية هندسية جديدة متلائمة مع الموتّر g، نكون بذلك قد أنشأنا منوّعة ريمانية جديدة، قد ترشدنا هذه الأخيرة إلى فرع جديد تماما في الهندسة الريمانية كالذي يعرف بهندسة التماسك مثلا، أو هندسة كالير، أو هندسة ساساكي و غيرهم ...

في القرن التاسع عشر بدأت نظرية المنوّعة الريمانية زوجية البُعد والمزوّدة ببُنية كاليرية، كحقل مستقل من خلال دراسة في فضاء الإسقاط المركّب، وبذلك برزت البُنى المركّبة في الساحة العلمية. وقد ظهرت في الستينيات و السبعينيات من القرن الماضي البُنى التلامسية تقريبا المعرّفة على فضاءات فردية البُعد كنظير للبنى المركّبة تقريبا. في هذا الفصل سنتناول في جزئه الأول أهم المفاهيم المتعلقة بالبُنى المركّبة تقريبا، وفي جزئه الآخر المفاهيم المتعلقة بالبُنى التلامسية تقريبا، مع تقديم أمثلة عن كليهما. للمزيد من التفاصيل يرجى الإطلاع على المصادر التالية [1]، [22]، [12]، [16]، [25].

2.1 البنى المركّبة تقريبا
Almost complex structures

قبل الخوض في تعريف البنية المركبة تقريبا على منوعة تفاضلية نتطرق وبدون إسهاب إلى تعريف البنية المركبة تقريبا على فضاء شعاعي.

نسمي بنية مركبة على فضاء شعاعي V بعده n، التشاكل الخطي $J : V \longrightarrow V$ حيث $J^2 = -I$ و I هو التطبيق الحيادي على V. عندما نلحق الفضاء V بالبنية السابقة J يكون لدينا فضاء شعاعي مركب، حيث يعرف الضرب في $i = \sqrt{-1}$ كمايلي

$$\forall a, b \in \mathbb{R}; \quad (a + ib)X \longrightarrow av + bJX$$

من أجل كل شعاع X من V. من الملاحظ أن بعد V كفضاء شعاعي حقيقي يكون زوجيا، لأن: $det(J^2) = det(J)^2 = (-1)^n$ وعكسيا،

⋆ إذا كان V فضاءا شعاعيا مركبا بعده n،

⋆ وكان J هو التشاكل الخطي المعرف على V بـ: $JX = iX$ من أجل كل X من V،

⋆ وأخيرا، إذا اعتبرنا V فضاءا حقيقيا بعده $2n$،

يمكن الفصل في القول بأن J هي بنية مركبة على V.

قضية 2.1.21. إذا كانت J بنية مركبة على فضاء شعاعي حقيقي V بعده $2n$، فإنه يوجد عدد من الأشعة $X_1, X_2, ..., X_n$ من V بحيث تمثل الجماعة $\{X_1, X_2, ..., X_n, JX_1, JX_2, ..., JX_n\}$ أساسا للفضاء الشعاعي V.

مثال 2.1.4. ليكن $\mathbb{C}^n$ الفضاء الشعاعي المركب. من أجل كل z_k من $\mathbb{C}^n$ نضع:

$$z_k = x_k + iy_k, \qquad x_k, y_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n}$$

إذن نستطيع مقابلة الفضاء الشعاعي المركب $\mathbb{C}^n$ بالفضاء الشعاعي الحقيقي $\mathbb{R}^{2n}$ بحيث نرفق بكل عنصر $(z_1, z_2, ..., z_n)$ من $\mathbb{C}^n$ العنصر $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ من $\mathbb{R}^{2n}$، وبالتالي يمكن تعريف بنية مركبة على $\mathbb{R}^{2n}$ كالتالي

$$(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n) \longmapsto (-y_1, -y_2, ..., -y_n, x_1, x_2, ..., x_n)$$

وتعرف بالبنية النموذجية لـ $\mathbb{R}^{2n}$، ويمكن التعبير عنها بالمصفوفة التالية:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

حيث I_n هي مصفوفة الوحدة من النوع n.

2.1.1 المنوعة المركبة Complex manifold

أولا، سنقدم مفهوم البنية المركبة تقريبا على المنوعة التفاضلية، وذلك بتطبيق النتائج الجبرية المحصل عليها سابقا على الفضاء المماسي للمنوعة التفاضلية. نسمي بنية مركبة تقريبا J على منوعة تفاضلية حقيقية M بعدها زوجي $2n$، كل موتر من النوع $(1, 1)$ يعرف تشاكلا على الفضاء المماسي T_xM عند كل نقطة x من M، بحيث $J^2 = -I$ و I هو التطبيق الحيادي للفضاء T_xM.

تعريف 2.1.30. لتكن M منوعة تفاضلية بعدها $2n$. إذا كانت J بنية مركبة تقريبا على M، عندئذ نسمي الثنائية (M, J) منوعة مركبة تقريبا.

وجود البنية المركبة تقريبا J يستلزم وجود تشاكل J_p على الفضاء T_pM عند كل نقطة p من M، يحقق $J_p^2 = -I$. وبما أن J موتر من النوع $(1,1)$ فإنه يمكن التعبير عنه محليا ضمن منظومة إحداثيات $(x_1, x_2, ...x_{2n})$ على جوار مفتوح U يحوي النقطة p، بالشكل التالي:

$$J_p = \sum J_i^j(p)\partial x_j \otimes dx_i.$$

موتر نيجن هيز Nijenhuis tensor

تعريف 2.1.31. لتكن M منوعة تفاضلية مزودة ببنية مركبة تقريبا J. نسمي موتر نيجن هيز الموتر N_J من النوع $(1,1)$ المعرف كما يلي:

$$N_J(X,Y) = 2\{[JX, JY] - [X,Y] - J[X, JY] - J[JX, Y]\}$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M.

خواص 2.1.6. إذا كانت M منوعة تفاضلية مزودة ببنية مركبة تقريبا J، وكان N هو موتر نيجن هيز الخاص بالبنية J، من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M يكون لدينا

1. $N_J(X,Y) = -N_J(Y,X)$
2. $N_J(X,X) = 0$
3. $N_J(X, JX) = 0$
4. $N_J(JX, Y) = -JN_J(X,Y).$

مبرهنة 2.1.2. لتكن M منوعة تفاضلية مزودة ببنية مركبة تقريبا J. تكون الثنائية (M, J) منوعة مركبة إذا وفقط إذا كان $N_J \equiv 0$.

ملاحظة 2.1.6. المنوعة المركبة هي منوعة تفاضلية تكون من أجلها تطبيقات تحويل الإحداثيات هي دوال هولومرفية من مفتوح من $\mathbb{C}^n$ نحو آخر.

مبرهنة 2.1.3. تكون بنية مركبة تقريبا J على منوعة تفاضلية M قابلة للمكاملة إذا وفقط إذا كان $N_J = 0$.

مبرهنة 2.1.4. لتكن M منوعة تفاضلية مزودة ببنية مركبة تقريبا J. تكون الثنائية (M, J) منوعة مركبة إذا وفقط إذا كانت M تقبل وصلة خطية ∇ بموتر فتل معدوم تحقق: $\nabla J = 0$.

البرهان 2.1.3. إذا كانت (M,J) منوعة مركبة فإنه حسب المبرهنة (2.1.2) لدينا $N_J=0$.
نفرض أنه يوجد وصلة خطية ∇ على M بموتر فتل معدوم. نضع:

$$A(X,Y)=(\nabla_X J)Y-(\nabla_Y J)X \qquad S(X,Y)=(\nabla_X J)Y+(\nabla_Y J)X$$

ونعرف انطلاقا من الموترين السابقين الوصلة الخطية ∇' كالتالي:

$$\nabla'_X Y=\nabla_X Y+\frac{1}{4}\left(A(X,JY)-JS(X,Y)\right)$$

الآن سنبرهن على أن الوصلة ∇' ذات موتر فتل T' معدوم و أن $\nabla' J=0$. بحساب مباشر نجد:

$$\begin{aligned}
T'(X,Y) &= \nabla'_X Y-\nabla'_Y X-[X,Y]\\
&= T(X,Y)+\frac{1}{4}[A(X,JY)-A(Y,JX)]\\
&= \frac{1}{4}(-[X,Y]-J[X,JY]-J[JX,Y]+[JX,JY])\\
&= \frac{1}{2}N_J(X,Y)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
(\nabla'_X J)Y &= \nabla_X JY+\frac{1}{4}[A(X,-Y)-JS(X,JY)]-J\nabla_X Y-\frac{1}{4}[JA(X,JY)+S(X,Y)]\\
&= (\nabla_X J)Y-\frac{1}{2}((\nabla_X J)Y\\
&= -J\nabla_X Y+\nabla_X JY)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

عكسيا، نفرض أن المنوعة M تقبل وصلة خطية ∇ بموتر فتل معدوم و $\nabla J=0$. من أجل كل X و Y حقلين شعاعيين على M لدينا:

$$\begin{aligned}
2N_J(X,Y) &= [JX,JY]-J[X,JY]-J[JX,Y]-[X,Y]\\
&= \nabla_{JX}JY-J\nabla_{JX}Y-\nabla_{JY}JX+J\nabla_{JY}X-J\nabla_X JY-\nabla_X Y\\
&+ J\nabla_Y JX+\nabla_Y X\\
&= 0 \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

إذن حسب المبرهنة (2.1.2)، الثنائية (M,J) هي منوعة مركبة.

2.1.2 المنوعة الهرميسية Hermitian manifold

نسمي موترا متريا هرميسيا على منوعة مركبة تقريبا (M,J) كل موتر ريماني g على M متوافق (متلائم) مع البنية J، أي

$$g(JX,JY)=g(X,Y)$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M.

تعريف 2.1.32. لتكن (M,J) منوعة مركبة تقريبا (مركبة)، إذا كانت M مزودة بموتر هرميسي g نقول عنها أنها منوعة هرميسية تقريبا (هرميسية)، وعندئذ نرمز لها بالرمز (M,J,g).

تعريف 2.1.33. لتكن M منوعة هرميسية تقريبا مزودة ببنية مركبة تقريبا J وبموتر هرميسي g. نسمي شكلا ثنائيا أساسيا أو فقط شكلا أساسيا أو شكل كالير، التطبيق Ω المعرف على M كما يلي:

$$\Omega(X,Y)=g(X,JY)$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M.

خواص 2.1.7. لتكن (M,J,g) منوعة هرميسية تقريبا مزودة بموتر هرميسي g، وليكن Ω الشكل الثنائي الأساسي الموافق لها. إذن من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M لدينا

- الشكل الثنائي الأساسي Ω ضد متناظر أي : $\Omega(X,Y)=-\Omega(X,Y)$ ،
- $\Omega(JX,JY)=\Omega(X,Y)$.

قضية 2.1.22. [31], لتكن (M,J,g) منوعة هرميسية تقريبا، ولتكن ∇ وصلة ريمان على المنوعة M وΩ الشكل الثنائي الأساسي. من أجل كل حقول أشعة X، Y وZ على M لدينا:

$$2g((\nabla_X J)Y,Z)-\frac{1}{2}g(JX,N(Y,Z))=3\mathrm{d}\Omega(X,JY,JZ)-3\mathrm{d}\Omega(X,Y,Z).$$

مبرهنة 2.1.5. [31], [63] لتكن (M,J,g) منوعة هرميسية، ولتكن ∇ وصلة ريمان على المنوعة M وΩ الشكل الثنائي الأساسي. القضايا التالية متكافئة:

(a) $\nabla J=0$

(b) $\nabla\Omega=0$

(c) $N=0$ و $\mathrm{d}\Omega=0$

برهان. 1. $(a) \Leftrightarrow (b)$ من أجل كل X، Y وZ من $\mathfrak{X}(M)$، لدينا:

$$\begin{aligned}(\nabla_X\Omega)(Y,Z) &= X\Omega(Y,Z) - \Omega(\nabla_X Y, Z) - \Omega(Y, \nabla_X Z)\\ &= g(Y, \nabla_X JZ) - g(Y, J\nabla_X Z)\\ &= g(Y, (\nabla_X J)Z).\end{aligned}$$

ومنه $\nabla J = 0$ تكافئ $\nabla\Omega = 0$.

2. $(b) \Leftrightarrow (c)$ (بديهية)

□

2.1.3 المنوعة الكاليرية Kähler manifold

تعريف 2.1.34. لتكن (M, J, g) منوعة هرميسية تقريبا، نقول عن M أنها منوعة كاليرية تقريبا إذا وفقط إذا كان الشكل الثنائي الأساسي Ω مغلقا أي: $\mathrm{d}\Omega = 0$

ويمكن تمييز المنوّعات الكاليرية باستعمال مشتق التباين للبنية J، القضية التالية تبين ذلك.

قضية 2.1.23. من أجل كل حقول الأشعة X، Y وZ على المنوعة الهرميسية (M, J, g) لدينا:

$$\mathrm{d}\Omega = 0 \Leftrightarrow g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)Z, X) + g((\nabla_Z J)X, Y) = 0 \qquad (2.2)$$

تعريف 2.1.35. (موتر كالير) لتكن (M, J, g) منوعة هرميسية تقريبا، نسمي الموتر الهرميسي g موترا كاليريا إذا وفقط إذا كان الشكل الثنائي الأساسي Ω مغلقا. وفي هذه الحالة تسمى المنوعة M المزودة بالبنية J والموتر الكاليري g، منوعة كاليرية.

ملاحظة 2.1.7. إذا كان $\nabla J = 0$، تكون المنوعة الهرميسية تقريبا منوعة كاليرية.

مثال 2.1.5. (*Exemple d'olszak 2003*) لتكن (x, y, z, t) الإحداثيات الديكارتية لـ $\mathbb{R}^4$، وليكن $\{e_i\}$ و $\{\theta_i\}$ حيث $i = \overline{1,4}$ أساسان للفضاء $\mathbb{R}^4$ و لثنوي الفضاء على الترتيب ، معرفان كالتالي:

$$\theta^1 = e^t dx, \quad \theta^2 = e^t dy, \quad \theta^3 = e^{-t}(-2xdy + dz), \quad \theta^4 = e^{3t}dt$$

و

$$e_1 = e^{-t}\frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = e^{-t}(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}), \quad e_3 = e^t\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = e^{-3t}\frac{\partial}{\partial t}$$

الآن، نعرف على $\mathbb{R}^4$ البنية المركبة تقريبا J والموتر الريماني g كالآتي

$$J = e_2 \otimes \theta^1 - e_1 \otimes \theta^2 + e_4 \otimes \theta^3 - e_3 \otimes \theta^4, \quad g = \sum \theta^i \otimes \theta^i$$

وبالتالي يكون لدينا $Je_1 = e_2, Je_2 = -e_1, Je_3 = e_4, Je_4 = -e_3$ و الموتر g متوازي مع البنية J.
بحسابات بسيطة يمكن التحقق من أن $N_J(e_1, e_3) = 0$، وباستعمال خواص موتر نيجن هيز (2.1.6) نجد أن $N_J(e_i, e_j) = 0$ من أجل كل $1 \leqslant i, j \leqslant 4$ ومنه نستنتج أن $N_J = 0$ وهذا يعني أن $(\mathbb{R}^4, J, g)$ هي منوعة مركبة.
مما سبق يمكن تعريف الشكل الثنائي الأساسي Ω كما يلي

$$\begin{aligned}\Omega &= -2(\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4) \\ &= 2e^{2t}(-dx \wedge dy - dz \wedge dt + 2xdy \wedge dt)\end{aligned}$$

من الواضح أن $\mathrm{d}\Omega = 0$ أي أن Ω مغلقة، وعليه يمكن القول أن الثنائية (J, g) تشكل بنية كاليرية على المنوعة $\mathbb{R}^4$.

قضية 2.1.24. لتكن (M, J, g) منوعة كاليرية، وليكن R التقوس الريماني وS تقوس ريتشي الموافقين للموتر g. من أجل كل حقول الأشعة X، Y وZ على M، تكون القضايا التالية محققة:

1. $R(JX, Y) + R(X, JY) = 0,\ R(JX, JY) = R(X, Y),\ R(X, Y)J = JR(X, Y)$
2. $S(JX, Y) + S(X, JY) = 0,\ S(JX, JY) = S(X, Y)$
3. $S(X, Y) = \frac{1}{2}\mathrm{trace}_g(J \circ R(X, JY))$

قضية 2.1.25. لتكن (M, J, g) منوعة كاليرية ذات بعد حقيقي $2n$، إذا كان التقوس المقطعي للمنوعة M ثابتا قيمته c، فإن تقوسها الريماني R يعطى بالشكل التالي:

$$R(X, Y)Z = c(X \wedge Y)Z; \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

2.1.4 المنوعة الكاليرية المحوّلة محليا Locally conformally Kähler manifold

المنوعة الكاليرية المحوّلة محليا Locally conformally Kähler manifold

لتكن (M^{2n}, J, g) منوعة هرميسية، حيث J هي بنية مركبة و g هو موتر هرميسي. نقول عن M^{2n} أنها منوعة كاليرية محولة محليا إذا وجدت عائلة جوارات مفتوحة $\{U_i\}$ على M وعائلة دوال $\{f_i\}$ من الصنف C^∞ (ملساء) على M بحيث يكون كل موتر محلي g_i والذي يعطى بالشكل التالي

$$g_i = exp(-f_i)g_{|U_i} \tag{3.2}$$

هو موتر كاليري على U_i.
الآن، سنقدم مفهوم المنوعة الكاليرية المحولة محليا بتوظيف الشكل الأساسي. ومن أجل ذلك، نعتبر Ω الشكل

الثنائي الأساسي الموافق لـ g أي $\Omega(X,Y) = g(X,JY)$ من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M.
إذا رمزنا إلى الشكل الثنائي الأساسي الموافق لـ g_i بالرمز Ω_i، فإنه حسب العلاقة (3.2) يكون لدينا:

$$\Omega_i = exp(f_i)\Omega_{|U_i} \tag{4.2}$$

مبرهنة 2.1.6. [25] نقول عن منوعة هرميسية (M^{2n}, J, g) أنها منوعة كاليرية محولة محليا إذا وفقط إذا وجد شكل أحادي مغلق ω على M يحقق:

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \tag{5.2}$$

عندئذ نرمز لهذه المنوعة بالرمز (M^{2n}, J, ω, g)، ويسمى ω شكل ليي.

برهان. إذا كانت (M^{2n}, J, g) منوعة كاليرية محولة محليا فإنه، بحسب ما سبق يوجد عائلة جوارات مفتوحة U_i وعائلة دوال ملساء f_i على M تكون من أجلها الموترات المعرف بـ(3.2) كاليرية. أي $\mathrm{d}\Omega_i = 0$، ومن العلاقة (4.2) يكون لدينا

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}f_i \wedge \Omega$$

على كل جوار مفتوح U_i.
بالمقابل، على $U_{ij} = U_i \cap U_j$ نجد أن

$$\mathrm{d}f_i - \mathrm{d}f_j \wedge \Omega = 0$$

وبما أن Ω غير منحل فإن: $\mathrm{d}f_i = \mathrm{d}f_j$ على U_{ij}. إذن يمكن القول أنه يوجد شكل أحادي شامل ومغلق ω على M بحيث

$$\omega_{|U_i} = \mathrm{d}f_i$$

عكسيا، إذا وجد شكل أحادي مغلق يحقق العلاقة (5.2)، فإنه حسب مبرهنة بوانكريه (أنظر الملاحظة أسفل البرهان) يوجد عائلة جوارات مفتوحة $\{U_i\}$ تغطي M، وعائلة دوال $\{f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}\}$ ملساء على M، بحيث $\omega = \mathrm{d}f_i$ على U_i.
من العلاقة (5.2)، نجد

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}f_i \wedge \Omega$$

على كل جوار U_i، وبالضرب في $exp(-f_i)$ نحصل على

$$exp(-f_i)(\mathrm{d}\Omega - \mathrm{d}f_i \wedge \Omega) = 0$$

أي

$$\mathrm{d}\big(exp(-f_i)\Omega\big) = 0$$

على كل جوار مفتوح U_i. بمعنى، $\mathrm{d}\Omega_i = 0$ وهذا يكافئ القول، المترك $exp(-f_i)g$ هو موتر كاليري على U_i. وهو المطلوب. □

ملاحظة 2.1.8. نذكر أنه من نتائج مبرهنة بوانكريه الشهيرة، كل شكل مغلق على منوعة تفاضلية يكون بالضرورة تام محليا (أنظر [35] الصفحة 297).

ترميز 2.1.0. لتكن (M^{2n}, J, ω, g) منوعة كاليرية محولة محليا، نرمز إلى الحقل الشعاعي الموافق للشكل الأحادي ω بالرمز B أي
$g(X, B) = \omega(X)$ من أجل كل حقل شعاعي X على M. يسمى B حقل ليي.

مبرهنة 2.1.7. لتكن ∇ وصلة لوفي سيفيتا على المنوعة M. ولتكن $\{D^i\}$ وصلات لوفي سيفيتا الموافقة للموترات الكاليرية المحلية $\{g_i\}$. إذن الوصلات $\{D^i\}$ تعرف وصلة خطية D شاملة على M تعطى بالعلاقة

$$D_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}\big(\omega(X)Y + \omega(Y)X - g(X,Y)B\big) \tag{6.2}$$

من أجل كل حقليين شعاعيين X وY على M. إضافة إلى ذلك D تحقق

$$Dg = \omega \otimes g. \tag{7.2}$$

برهان. لتكن (N, g) منوعة ريمانية، وليكن $\tilde{g}$ موترا ريمانيا معرفا على N بـ $\tilde{g} = \mathrm{e}^u g$ حيث u هي دالة ملساء على N. نرمز بـ ∇ و$\tilde{\nabla}$ إلى وصلتي لوفي سيفيتا الموافقتين لـ g و$\tilde{g}$ على الترتيب. باستعمال علاقة كوزيل، من أجل كل حقول الأشعة X, Y وZ على N يكون لدينا

$$\begin{aligned}
2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= -\tilde{g}(X,[Y,Z]) + \tilde{g}(Y,[Z,X]) + \tilde{g}(Z,[X,Y]) + X\tilde{g}(Y,Z) \\
&\quad + Y\tilde{g}(X,Z) - Z\tilde{g}(X,Y) \\
&= \mathrm{e}^u\Big(- g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) + Xg(Y,Z) \\
&\qquad + Yg(X,Z) - Zg(X,Y)\Big) \\
&+ \mathrm{e}^u X(u)g(Y,Z) + \mathrm{e}^u Y(u)g(X,Z) - \mathrm{e}^u Z(u)g(X,Y) \\
&= 2\tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \tilde{g}(X(u)Y, Z) + \tilde{g}(Y(u)X, Z) - \tilde{g}(g(X,Y)\mathrm{grad}u, Z)
\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}(X(u)Y + Y(u)X - g(X,Y)\mathrm{grad}u) \tag{8.2}$$

الآن، نعتبر المنوعة الكاليرية المحولة محليا (M^{2n}, J, ω, g)، حسب ما سبق يوجد عائلة جوارات مفتوحة $\{U_i\}$ و عائلة دوال $\{f_i\}$ ملساء على M حيث الموترات $g_i = exp(-f_i)g_{|U_i}$ موترات كاليرية.
بالمطابقة مع الفرض الأول، أي بوضع $N = U_i$ و$u = f_i$، ينتج لدينا وصلات محلية D_i تعطى بالعلاقة

$$D^i_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}(df_i(X)Y + df_i(Y)X - g(X,Y)\mathrm{grad}f_i)$$

ويمكن استنتاج أن الوصلات المحلية $\{D^i\}$ تعرف وصلة خطية شاملة على D انطلاقا من تعميم df_i و$gradf_i$، تعطي هذه الوصلة بالعلاقة (6.2).

إضافة إلى ذلك، من أجل كل حقول الأشعة X، Y وZ على M لدينا

$$\begin{aligned}(D_Xg)(Y,Z) &= Xg(Y,Z)-g(D_XY,Z)-g(Y,D_XZ)\\ &= Xg(Y,Z)-g(\nabla_XY,Z)-g(Y,\nabla_XZ)-\omega(X)g(Y,Z)\\ &= (-\omega\otimes g)(X,Y,Z)\end{aligned}$$

□

مبرهنة 2.1.8. لتكن (M^{2n},J,g) منوعة هرميسية، تكون M منوعة كاليرية محولة محليا إذا وفقط إذا وجد شكل أحادي مغلق ω على M تكون من أجله البنية المركبة J متوازية وفق الوصلة D المعرفة بالعلاقة (6.2)

من أجل البرهان أنظر المرجع [25] الصفحة 3.

نتيجة 2.1.2. [25] تكون المنوعة الهرميسية (M^{2n},J,g) منوعة كاليرية محولة محليا إذا وفقط إذا كان من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على M لدينا:

$$2(\nabla_XJ)Y=\theta(Y)X-\omega(Y)JX-g(X,Y)A-\Omega(X,Y)B \qquad (9.2)$$

حيث: $\theta=\omega\circ J$ و$A=-JB$.

برهان. لتكن (M^{2n},J,ω,g) منوعة كاليرية محولة محليا، إذن حسب المبرهنة (2.1.7) يوجد وصلة خطية D تحقق العلاقة (6.2).

إذن، من أجل كل حقول أشعة Y,X وZ على M لدينا:

$$\begin{aligned}g(\nabla_XJY,Z) &= g(D_XJY,Z)+\frac{1}{2}\Big(\omega(X)g(JY,Z)+\omega(JY)g(X,Z)\\ &\qquad -g(X,JY)g(B,Z)\Big)\\ &= g(JD_XY,Z)+\frac{1}{2}\Big(\omega(X)g(JY,Z)+\omega(JY)g(X,Z)\\ &\qquad -g(X,JY)g(B,Z)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\omega(JY)g(X,Z)-\omega(Y)g(JX,Z)+g(JB,Z)g(X,Y)\\ &\qquad -g(X,JY)g(B,Z)\Big)-g(J\nabla_XY,Z), \qquad (10.2)\end{aligned}$$

أي

$$g\big((\nabla_XJ)Y,Z\big)=\frac{1}{2}\big(\theta(Y)g(X,Z)-\omega(Y)g(JX,Z)-g(A,Z)g(X,Y)-\Omega(X,Y)g(B,Z)\big)$$

ومنه، نستنتج أن ∇J تعطى بالعلاقة (9.2). □

نتيجة 2.1.3. من أجل كل منوعة كاليرية محولة محليا يكون لدينا

$$\nabla_B J = \nabla_A J = 0.$$

نتيجة 2.1.4. ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي بعده $2n$ مزود ببنية كاليرية محولة محليا (J, ω, g). إذن الحقل B يمكن صياغته بالشكل التالي

$$B = -\frac{1}{n} J \sum_{i}^{2n} (\nabla_{e_i} J) e_i. \tag{11.2}$$

حيث $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ أساس شامل متعامد ومتجانس على $\mathfrak{g}$.

برهان. بما أن (J, ω, g) بنية كاليرية محولة محليا فإن ∇J تعطى بالعلاقة

$$2(\nabla_X J)Y = \theta(Y)X - \omega(Y)JX - g(X,Y)A - \Omega(X,Y)B,$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على $\mathfrak{g}$. ومنه، من أجل كل حقل شعاعي e_i ضمن الأساس الشامل لدينا

$$2(\nabla_{e_i} J)e_i = \theta(e_i)e_i - \omega(e_i)Je_i - g(e_i, e_i)A - \Omega(e_i, e_i)B,$$

أي

$$2(\nabla_{e_i} J)e_i = -g(e_i, JB)e_i - g(e_i, B)Je_i + JB, \tag{12.2}$$

إذن، لمّا يمسح i كل القيم نحصل على معادلات عددها $2n$ ومماثلة لـ (12.2)، بجمعها نجد

$$2\sum (\nabla_{e_i} J)e_i = -\sum g(e_i, JB)e_i - \sum g(e_i, B)Je_i + \sum JB,$$

وبالتالي

$$2\sum (\nabla_{e_i} J)e_i = -JB - JB + 2nJB,$$

معناه

$$B = -\frac{1}{n} J \sum (\nabla_{e_i} J)e_i.$$

وهو المطلوب. □

منوّعة فيزمان Vaisman manifold

ظهر مفهوم منوّعات فيزمان مع إ. فيزمان [58] حيث أطلق عليها في بداية الأمر اسم "المنوّعات الكاليرية المحولة محليا ذات شكل لي متوازٍ"، وبعد فترة من الزمن اختار لها اسم آخر وهو "منوّعات هوبف المعمّمة" [56] ظنا منه أنه الإسم الملائم، لكنه لم يكن كذلك، فقد اتضح فيما بعد أنه ليست كل منوعة هوبف هي منوّعة فيزمان. في [25] اقترح المؤلفون اسم "منوّعات فيزمان" وهو الإسم الذي يشيع استخدامه إلى الآن.

تعريف 2.1.36. نقول عن منوعة هرميسية (M^{2n}, J, g) أنها منوعة فيزمان إذا وجد شكل أحادي متوازي ω يحقق

$$\mathrm{d}\Omega = \omega \wedge \Omega$$

حيث Ω هو الشكل التفاضلي الثنائي الموافق لـ g.

ملاحظة 2.1.9. على منوعة فيزمان لدينا $\nabla\omega = 0$ وهذا يستلزم $\mathrm{d}\omega = 0$ وبالتالي " كل منوعة فيزمان هي منوعة كاليرية محولة محليا".

يمكن صياغة تعريف منوّعات فيزمان على النحو التالي

تعريف 2.1.37. نقول عن منوعة كاليرية محولة محليا (M^{2n}, J, ω, g) أنها منوعة فيزمان إذا وفقط إذا كان

$$\nabla\omega = 0$$

حيث ∇ هي وصلة لوفي سفيتا الموافقة للموتر g.

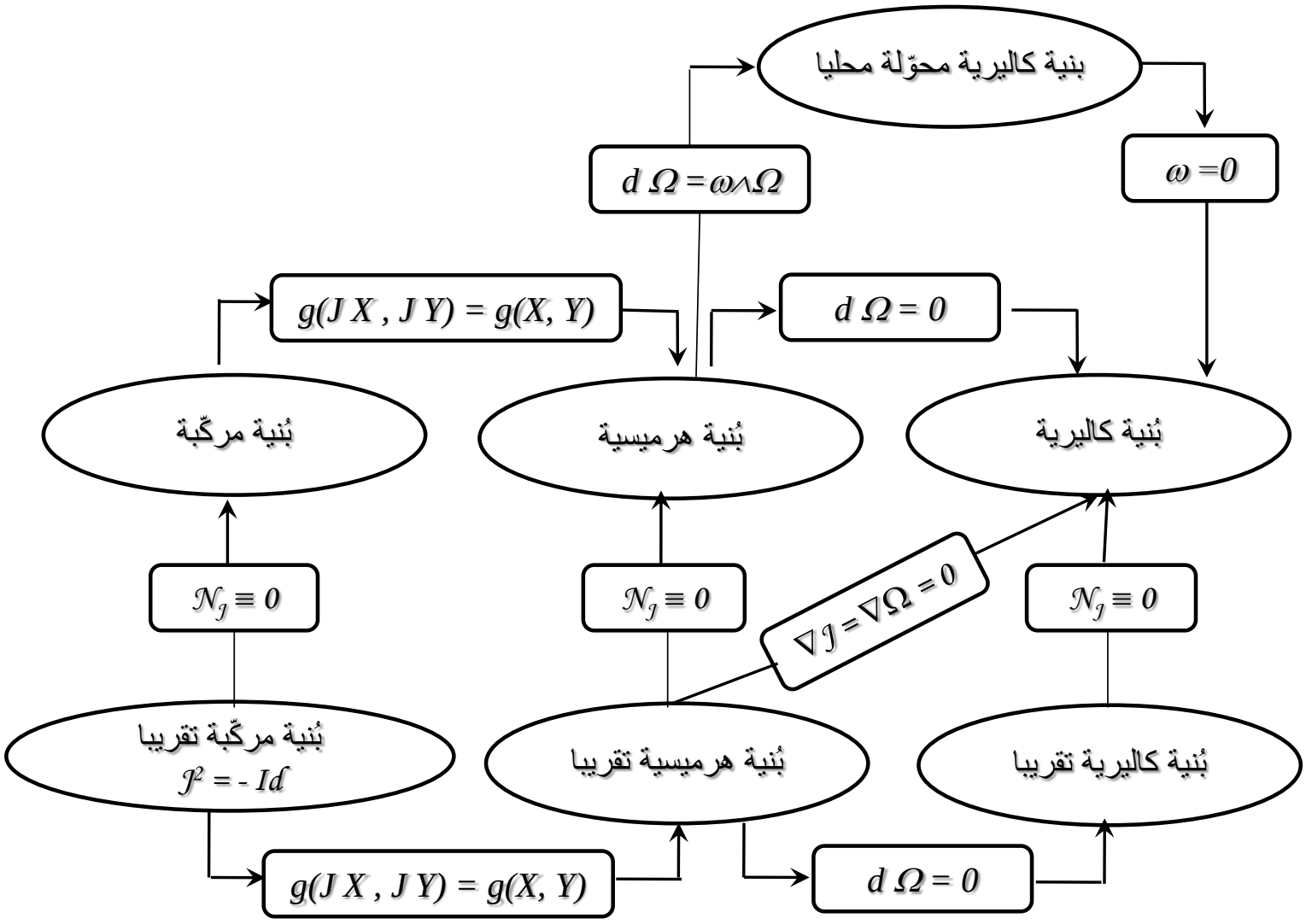
قضية 2.1.26. إذا كانت (M^{2n}, J, ω, g) منوعة كاليرية محولة محليا هي منوعة فيزمان، فإن حقل لي B يكون حقل كِلنغ.

قضية 2.1.27. من أجل كل منوعة فيزمان العلاقة التالية محققة

$$\Omega = \mathrm{d}\theta - \omega \wedge \theta$$

نُذكّر بأن ω هو شكل لي و θ هو الشكل المساوي لـ $\omega \circ J$.

مبرهنة 2.1.9. لتكن (M^{2n}, J, ω, g) منوعة كاليرية محوّلة محليا متراصّة. إذا كان للموتّرات المترية الكاليرية المحلية على M تقوّس ريتشي موجب أو معدوم، فإن الموتر g يكون متوافق شموليا مع موتر كاليري محول محليا ذي شكل لي متوازٍ.



مخطط يلخص البُنى المركبة تقريبا

2.2 البنى المترية التلامسية تقريبا
Almost contact metric structures

ترجع أصول هندسة التلامس إلى عام 1872، عندما أدرج مفهوم التحويل التلامسي لدراسة أنظمة المعادلات التفاضلية من طرف العالم سوفيس ليي. لكن لم تنل هذه الهندسة حظها من البحوث والدراسات إلا في أواخر السبعينيات من القرن الماضي، رغم دورها الهام و ارتباطها الوثيق بالميادين التطبيقية المختلفة مثل الميكانكا والبصريات والديناميكا الحرارية ونظرية التحكم...
ما يهمنا في هذه الدراسة من هندسة التلامس هي البنى التلامسية، وفي هذا الجزء من الفصل سنقدم مجموعة أساسية من التعاريف والخواص المتعلقة بهذه البنية.

2.2.1 البُنى التلامسية Contact structures

ترتبط البنى التلامسية ارتباطا وثيقا بالأشكال التفاضلية، ولذلك قبل تقديم مفهوم المنوعة التلامسية كان من الضروري تقديم تعريف لشكل تفاضلي أحادي محدد، يسمى الشكل التلامسي.

تعريف 2.2.38. نقول عن شكل تفاضلي أحادي η على منوعة تفاضلية M ذات البعد الفردي $2n+1$ أنه شكل تلامسي إذا وفقط إذا كان $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ هو شكل التفاضلي للحجم.

تعريف 2.2.39. لتكن M منوعة تفاضلية ذات البعد $2n+1$ وليكن η شكل تفاضلي شامل على M. إذا كان η شكلا تلامسيا نقول عن الثنائية (M,η) أنها منوعة تلامسية.

إنّ وجود الشكل التلامسي η على المنوعة التفاضلية M يفرض عليها أن تكون موجهة، وهذا يستلزم وجود فضائين شعاعيين جزئيين هما: الفضاء $\mathcal{D} = \{X \in \mathfrak{X}(M)/\eta(X) = 0\}$ ذو البعد $2n$، ومتممه أحادي البعد $\mathcal{D}^{\perp} = \{X \in \mathfrak{X}(M)/\eta(X) \neq 0\}$ ، و هذا الأخير يعرف لنا حقلا شعاعيا نرمز له بالرمز ξ حيث:

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{و} \quad d\eta(\xi, X) = 0$$

يسمى ξ الحقل الشعاعي لريب أو الحقل الشعاعي المميز وذلك لأنه يميز لنا بين البنى التلامسية.

مبرهنة 2.2.10. [63] لتكن M منوعة تفاضلية ذات البعد $2n+1$، وليكن η شكل تلامسي على M.
من أجل كل نقطة p من M و من منظومة إحداثيات محلية $(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2, ..., y^n, z)$، يمكن كتابة العبارة التحليلية لـ η كالتالي

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i.$$

2.2.2 البنى المترية التلامسية تقريبا Almost contact metric structures

البنى التلامسية تقريبا Almost contact structures

تعريف 2.2.40. لتكن M منوعة تفاضلية ذات البعد الفردي $2n+1$، وليكن φ موترا من النوع $(1,1)$، ξ حقلا شعاعيا مميزا(حقل ريب) و η شكلا أحاديا على M. نسمي الثلاثية (φ,ξ,η) بنية تلامسية تقريبا إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. $\eta(\xi)=1$
2. $\varphi^2X=-X+\eta(X)\xi$

من أجل كل حقل شعاعي X على M. ونقول عن المنوعة M المزودة بالبنية التلامسية تقريبا (φ,ξ,η) أنها منوعة تلامسية تقريبا. ونرمز لها بالرمز (M,φ,ξ,η).

خواص 2.2.8. لتكن (M,φ,ξ,η) منوعة تلامسية تقريبا. إذن، الخواص التالية محققة:

1. $\varphi\xi=0$
2. $\eta\circ\varphi=0$
3. $rang\varphi=2n.$

برهان. يرجى الرجوع إلى المصدر [10] الصفحة 20. □

تعريف 2.2.41 (رتبة بنية تلامسية تقريبا). لتكن (φ,ξ,η) بنية تلامسية تقريبا، نقول أن:

- الشكل η من الرتبة $r=2n$، إذا كان $(d\eta)^n\neq 0$ و $\eta\wedge(d\eta)^n=0$
- الشكل η من الرتبة $r=2n+1$، إذا كان $(d\eta)^{n+1}=0$ و $\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$

ونقول عندئذ أن r هو رتبة البنية (φ,ξ,η).

الموتر الريماني المرفق Associated Riemannian metric

مبرهنة 2.2.11. كل منوعة تلامسية تقريبا (M,φ,ξ,η) تقبل موترا ريمانيا g بحيث:

$$g(X,\xi)=\eta(X),$$

من أجل كل حقل شعاعي X على M.

برهان. أنظر [12]. □

قضية 2.2.28. [10] كل منوعة تلامسية تقريبا (M, φ, ξ, η) تقبل موترا ريمانيا g يحقق:

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

وفي هذه الحالة نقول عن g أنه متوافق مع البنية (φ, ξ, η).

تعريف 2.2.42. إذا كانت المنوعة التلامسية تقريبا (M, φ, ξ, η) مزودة بموتر ريماني g متوافق مع البنية (φ, ξ, η)، نقول عندئذ عن M أنها منوعة مترية تلامسية تقريبا، و نرمز لها بالرمز $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$.

نعرف الآن الشكل الثنائي الأساسي الموافق للبنية التلامسية تقريبا.

تعريف 2.2.43. من أجل كل بنية مترية تلامسية تقريبا (φ, ξ, η, g) على منوعة تفاضلية M نعرف الشكل الثنائي الأساسي ϕ بالعلاقة التالية:

$$\phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

قضية 2.2.29. لتكن M^{2n+1} منوعة تفاضلية مزودة بشكل تلامسي η، إذن يوجد بنية مترية تلامسية (φ, ξ, η, g) بحيث الشكل الثنائي الأساسي الموافق لها يعرف بالعلاقة

$$\phi = d\eta$$

بمعنى من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M لدينا

$$\begin{aligned} g(X, \varphi Y) &= \phi(X, Y) \\ &= d\eta(X, Y) \\ &= \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\} \end{aligned}$$

برهان. يرجى الرجوع إلى المصدر [12] الصفحة 47. □

خواص 2.2.9. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، و ليكن ϕ الشكل الثنائي الأساسي. إذن من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M لدينا

1. $\phi(X, Y) = -\phi(Y, X)$
2. $\phi(\varphi X, \varphi Y) = \phi(Y, X)$

البنى المترية التلامسية تقريبا الناظمية Normal almost contact metric structures

تعريف 2.2.44. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوعة مترية تلامسية تقريبا و $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ المنوعة الجداء. نرمز لحقل شعاعي على $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ بالرمز $(X,f\frac{d}{dt})$ حيث X حقل شعاعي على M، و f دالة على $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ و t منظومة إحداثيات على $\mathbb{R}$. نعرف البنية المركبة تقريبا J على $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ كالآتي

$$J\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=\left(\varphi X-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}\right) \tag{13.2}$$

من أجل كل حقل شعاعي X على M لدينا

$$\begin{aligned}J^2\left(X,f\frac{d}{dt}\right) &= J\left(\varphi X-f\xi,\eta(x)\frac{d}{dt}\right)\\ &= \left(\varphi^2X-\eta(X)\xi,-f\eta(\xi)\frac{d}{dt}\right)\\ &= -\left(X,f\frac{d}{dt}\right),\end{aligned}$$

وهذا يؤكد أن البنية J مركبة تقريبا.

تعريف 2.2.45. نقول عن البنية المترية التلامسية تقريبا (φ,ξ,η,g) أنها ناظمية إذا كانت البنية المركبة تقريبا J قابلة للمكاملة.

وهذا الأخير يبين الشرط الذي من أجله تكون البنية المترية التلامسية ناظمية وذلك باللجوء إلى البنية المركبة تقريبا الموافقة لها، وفي مايلي سنطرح وبدون إسهاب شرط الناظمية باستعمال عناصر البنية المترية التلامسية نفسها (لتفاصيل أكثر يرجى الرجوع إلى [63] صفحة 264).

علما أن موتر نيجن هيز للبنية التلامسية φ يعطى بالعلاقة

$$N_\varphi(X,Y)=\varphi^2[X,Y]+[\varphi X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]$$

و

$$2d\eta(X,Y)=X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y]\xi)$$

يمكن بسهولة التحقق من أن

$$\begin{aligned}N_J((X,0),(Y,0)) &= \left(N^1(X,Y),N^2(X,Y)\right).\\ N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right) &= \left(N^3(X),N^4(X)\right)\end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned} N^1(X,Y) &= N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi, \qquad N^3(X) = (\mathfrak{L}_\xi\varphi)X, \\ N^2(X,Y) &= (\mathfrak{L}_{\varphi X}\eta)Y - (\mathfrak{L}_{\varphi Y}\eta)X, \qquad N^4(X) = (\mathfrak{L}_\xi\eta)X. \end{aligned}$$

ملاحظة 2.2.10. تكون البنية المترية التلامسية تقريبا ناظمية إذا كان

$$N^1 = N^2 = N^3 = N^4 = 0$$

لكن المبرهنة التالية تبين أنه لإثبات أن بنية تلامسية تقريبا ناظمية يكفي إثبات أن $N^1 = 0$.

مبرهنة 2.2.12. [63] لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، إذا كان $N^1 = 0$ فإن

$$N^2 = N^3 = N^4 = 0.$$

قضية 2.2.30. من أجل كل بنية مترية تلامسية تقريبا (φ, ξ, η, g)، المشتقة الموافقة للتباين للموتر φ تعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \varphi Y, \varphi Z) - d\Phi(X, Y, Z) + g(N^1(Y, Z), \varphi X) \\ &+ N^2(Y, Z)\eta(X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y). \end{aligned}$$

نتيجة 2.2.5. من أجل كل بنية مترية تلامسية تقريبا، العلاقة المعطاه في القضية السابقة تتحور إلى

$$2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) = g(N^1(Y, Z), \varphi X) + 2d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y).$$

2.2.3 تصنيف تشينيا و غونزلاز للبنى المترية التلامسية تقريبا

في سنة 1990 قدم العالمان تشينا و غونزلاز بحثا قيما بينا فيه أن هناك اثنى عشرة صنفا للبنى المترية التلامسية تقريبا، وقد تم التصنيف بناءً على الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي ϕ كما هو موضح في المبرهنة التالية.

مبرهنة 2.2.13. [22] لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، وليكن ϕ الشكل الثنائي الأساسي الموافق لها. إذا كانت $n \geqslant 3$ فإن الصيغة المميزة لكل صنف تعطى كما في الجدول الموالي

التسمية	الخاصية
C_1	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=0, \qquad \nabla\eta=0$
C_2	$\mathrm{d}\phi=\nabla\eta=0$
C_3	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)-(\nabla_{\varphi X}\phi)(\varphi Y,Z)=0, \qquad \delta\phi=0$
C_4	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=-\frac{1}{2(n-1)}\Big(g(\varphi X,\varphi Y)\delta\phi(Z)-g(\varphi X,\varphi Z)\delta\phi(Y)$ $-\phi(X,Y)\delta\phi(\varphi Z)+\phi(X,Z)\delta\phi(\varphi Y)\Big),$ $\delta\phi(\xi)=0$
C_5	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=\frac{1}{2n}\Big(\phi(X,Z)\eta(Y)-\phi(X,Y)\eta(Z)\Big)\delta\eta$
C_6	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=\frac{1}{2n}\Big(g(X,Z)\eta(Y)-g(X,Y)\eta(Z)\Big)\delta\phi(\xi)$
C_7	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=\eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X+\eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z, \qquad \delta\phi=0$
C_8	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=-\eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X+\eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z, \quad \delta\eta=0$
C_9	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=\eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X-\eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z$
C_{10}	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=-\eta(Z)(\nabla_Y\eta)\varphi X-\eta(Y)(\nabla_{\varphi X}\eta)Z$
C_{11}	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=-\eta(X)(\nabla_\xi\phi)(\varphi Y,\varphi Z)$
C_{12}	$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=\eta(X)\eta(Z)(\nabla_\xi\eta)\varphi Y-\eta(X)\eta(Y)(\nabla_\xi\eta)\varphi Z$

الجدول 1.2

حيث

$$\delta\phi(X)=-\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\phi)(e_i,X)+(\nabla_{\varphi e_i}\phi)(\varphi e_i,X)-(\nabla_\xi\phi)(\xi,X).$$

إذا كانت $n=2$ فإن $C_1=C_3=|C|$، وإذا كانت $n=1$ فإن $C_i=|C|$، من أجل كل $i=\{1,2,3,4,7,8,10,11\}$ حيث $|C|$ يرمز لصنف من البنى يسمى البنى ثنائية التماسك.

ومن بين أشهر البنى نذكر بنية ساساكي و بنية كانموتسو اللتان تنتميان للصنف C_6 و C_5 على الترتيب. ولا يفوتنا التنويه إلى أن بعض البنى لا تنتمي إلى صنف محدد، بل هي عبارة عن اتحاد صنفين أو أكثر، فمثلا بنى شبه ساساكي هي $|C|\oplus C_6$.

ملاحظة 2.2.11. من المبرهنة السابقة نستخلص أن في البعد الثلاثي يوجد خمسة أصناف من البنى المترية التلامسية تقريبا، ثلاثة منها يمكن أن تكون ناظمية وهي C_6، C_5 و$|C|$، أما الصنفان C_9 و C_{12} فلا يمكن أبدا أن يكونا ناظميين.

2.2.4 بعض البنى المترية التلامسية تقريبا الناظمية Some normal almost contact metric structures

في سنة 1985 قدم العالم ج.أوبينا دراسة [48] حول الصنف $C_5 \oplus C_6$، جمع فيها الأصناف الثلاثة الأولى C_5،C_6 و$|C|$. في هذا الباب سنقدم وبدون إسهاب دراسة حول بنية ماوراء−ساساكي ثم نستخلص الخواص الأساسية للبنى المشكلة لها ونقصد بذلك بنية ساساكي، بنية كانموتسو والبنية ثنائية التماسك.

بنية ماوراء−ساساكي Trans−Sasakian structure

بنية ماوراء−ساساكي هي تلك التي تقابل البنية الكاليرية المحولة محليا في مجموعة البنى التلامسية تقريبا. بمعنى، إذا كانت (φ, ξ, η, g) بنية مترية تلامسية تقريبا ناظمية على منوعة تفاضلية M^{2n+1}، وكان J الموتر المعرف بالعلاقة (13.2) بنية كاليرية محولة محليا على المنوعة $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$، فإننا نقول عندئذ عن (φ, ξ, η, g) أنها بنية ماوراء−ساساكي. في التعريف التالي، نميز بنية ماوراء−ساساكي باستعمال الشكل الثنائي الأساسي ϕ و الشكل الأحادي η.

تعريف 2.2.46. [48] لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، وليكن ϕ الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي. إذا كانت الثلاثية (φ, ξ, η) ناظمية، و كان

$$\mathrm{d}\eta = \alpha\phi, \quad \mathrm{d}\phi = 2\beta\eta \wedge \phi$$

عندئذ نقول عن M أنها منوعة ماوراء−ساساكي. حيث $\alpha = \frac{1}{2n}\sigma\phi(\xi)$ و $\beta = \frac{1}{2n}\mathrm{div}\xi$ هما دالتان تفاضليتان على M، و $\sigma\phi$ هو موافق التفاضل لـ ϕ معرف كما يلي:

$$\sigma\phi(X) = -\sum_{i=1}^{2n}\big((\nabla_{e_i}\phi)(e_i, X) + (\nabla_{\varphi e_i}\phi)(\varphi e_i, X)\big) - (\nabla_{\xi}\phi)(\xi, X).$$

من أجل كل حقل شعاعي X على M، مع $\{e_1, e_2, ..., e_n, \varphi e_1, \varphi e_2, ..., \varphi e_n\} - \varphi$ أساس على M. باعتبار الدالتان α و β مميزتان للبنية (φ, ξ, η, g) فالأنسب أن نسميها بنية ما وراء−ساساكي من النوع (α, β).

يمكن تمييز بنية ماوراء−ساساكي باستعمال الموتر φ كالتالي

مبرهنة 2.2.14. [12] لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، و∇ وصلة لوفي سيفيتا على M. نقول عن M أنها منوعة ما وراء−ساساكي من النوع (α, β) إذا وفقط إذا كان

$$(\nabla_X\varphi) = \alpha\big(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big)$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M.

ملاحظات 2.2.2. – لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة ماوراء–ساساكي من النوع (α, β). إذن

- إذا كان $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ فإن M تسمى منوعة ساساكي.
- إذا كان $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta = 0$ فإن M تسمى منوعة α–ساساكي.
- إذا كان $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ فإن M تسمى منوعة كانموتسو.
- إذا كان $\alpha = 0$ و $\beta \in \mathbb{R}$ فإن M تسمى منوعة β– كانموتسو.
- إذا كان $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ فإن M تسمى منوعة ثنائية التماسك.

– سنقدم تفاصيل أكثر حول بنية ساساكي، وبنية كانموتسو و البنية ثنائية التماسك في أجزاء أخرى من المذكرة.

– نعني هنا بالبنية ثنائية التماسك تلك التي عرفها بلير، لأنه يوجد تعريف آخر لها عند ليبرمان (أنظر [12] صفحة 95).

قضية 2.2.31. [38] إذا كان بعد بنية ماوراء–ساساكي أكبر من 3 فإنها حتما إما α–ساساكي أو β– كانموتسو أو ثنائية التماسك.

ملاحظة 2.2.12. من القضية السابقة نستنتج أن البعد الثلاثي هو الوحيد الذي يمكن أن تكون من أجلها α و β دالتين غير معدومتين معا.

في المثال التالي سنقدم نموذجا عن بنية ماوراء–ساساكي ثلاثية الأبعاد أي يكون من أجلها الدالتان α و β دالتين غير معدومتين معا.

مثال 2.2.6. نعرف على الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ البنية التلامسية تقريبا (φ, ξ, η, g) كما يلي

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^z + y^2 & 0 & -y \\ 0 & e^z & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi = 2(\frac{\partial}{\partial z}), \qquad \eta = \frac{1}{2}(dz - ydx).$$

حيث تمثل (x, y, z) الإحداثيات الديكارتية على الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$. إذن $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوعة ماوراء–ساساكي من النوع $(-\frac{1}{2}e^{-z}, \frac{1}{2})$

مبرهنة 2.2.15. إذا كانت $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا ناظمية ثلاثية الأبعاد، إذن هي منوعة ماوراء−ساساكي من النوع (α,β) حيث $2\alpha = tr(\varphi\nabla\xi)$ و $2\beta = \mathrm{div}\xi$.

برهان. أنظر [1]. □

هذا الأخير يدفعنا لتقديم تعريف مبسط لبنية ماوراء−ساساكي ثلاثية البعد، وهو كالتالي

تعريف 2.2.47. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية البعد. نقول عن M أنها منوعة ماوراء−ساساكي من النوع (α,β) إذا وفقط إذا كان ξ يحقق

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X - \beta\varphi^2 X.$$

من أجل كل حقل شعاعي X على M.

مبرهنة 2.2.16. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة ماوراء−ساساكي من النوع (α,β)، إذن من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M لدينا

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (\alpha^2-\beta^2)\big((X\wedge Y)\xi\big) - 2\alpha\beta\big(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y\big) \\ &+ Y(\alpha)\varphi X - X(\alpha)\varphi Y + Y(\beta)\varphi^2 X - X(\beta)\varphi^2 Y, \\ S(X,\xi) &= \big(2n(\alpha^2-\beta^2) - \xi\beta\big)\eta(X) - (2n-1)X(\beta) - \varphi x(\alpha), \\ Q\xi &= \big(2n(\alpha^2-\beta^2) - \xi\beta\big)\xi - (2n-1)grad\beta + \varphi(grad\alpha), \end{aligned}$$

حيث R هو موتر التقوس الريماني، و S تقوس ريتشي و Q هو مؤثر ريتشي الذي يعطى بالعلاقة

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

برهان. يرجى الرجوع إلى المصدر [24]. □

نقدم الآن مفهوم التقوس المقطعي المتعلق بالموتر φ، والمسمى بالتقوس φ−المقطعي.

تعريف 2.2.48. إذا كانت $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، وكان P مستوي من الفضاء المماسي T_pM ذو الأساس المتعامد و المتجانس $\{X,\varphi X\}$ حيث p نقطة من M و X حقل شعاعي على M عمودي على ξ. نسمى التقوس φ−المقطعي التقوس المقطعي للمستوي P والذي يعطى بالعلاقة

$$K(P) = g\big(R(X,\varphi X)\varphi X, X\big).$$

ملاحظة 2.2.13. التقوس φ−المقطعي لا يتعلق بالأساس المختار.

تعريف 2.2.49. نسمي كل منوعة ما وراء−ساساكي M^{2n+1} ذات تقوس φ−مقطعي ثابت c، منوعة فضاء أشكال ما وراء−ساساكي. نرمز لها بالرمز $M^{2n+1}(c)$.

مبرهنة 2.2.17. [1] لتكن $(M^{2n+1}(c),\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة فضاء أشكال ماوراء−ساساكي من النوع (α,β)، إذن من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M، التقوس الريماني R، و تقوس ريتشي S و التقوس السلمي r تعطى بالعلاقات التالية

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \frac{\alpha(c-1)+\beta(c+1)}{4}\big(\varphi^2X\wedge\varphi^2Y+\varphi^2X\wedge\varphi^2Y+2g(X,\varphi Y)\varphi\big)\\ &+ (\alpha-\beta)(X\wedge Y),\\ S(X,Y) &= 2n(\alpha-\beta)g(X,Y)+\frac{n+1}{2}\big(c(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)\big)g(\varphi X,\varphi Y)\\ r &= n((n+1)(\alpha+\beta)c+(3n+1)(\alpha-\beta)). \end{aligned}$$

بنية ساساكي Sasakian structure

كما أشرنا سابقا، بنى ساساكي تنطوي تحت بنى ماوراء−ساساكي وهي من النوع $(1,0)$.

تعريف 2.2.50. لتكن M^{2n+1} منوعة مترية تلامسية مزودة ببنية مترية تلامسية (φ,ξ,η,g)، إذا كانت هذه الأخيرة ناظمية على M، نقول عنها أنها بنية ساساكي، وكذلك نقول عن M أنها منوعة ساساكي.

ملاحظة 2.2.14. إذا كانت (M,φ,ξ,η,g) منوعة مترية تلامسية تقريبا، و كان ϕ هو الشكل الثنائي الأساسي الموافق لها فإننا نقول عن M أنها من الصنف ساساكي إذا وفقط إذا كان $\phi=d\eta$ و كانت الثلاثية (φ,ξ,η) ناظمية.

كذلك، يمكن تعريف وتمييز هذا الصنف من المنوّعات باستخدام مشتق التباين للبنية φ، المبرهنة التالية توضح ذلك.

مبرهنة 2.2.18. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، ولتكن ∇ وصلة لوفي سيفيتا الموافقة للموتر المتري الريماني g. نقول عن M أنها من الصنف ساساكي إذا وفقط إذا كان

$$(\nabla_X\varphi)Y=g(X,Y)\xi-\eta(Y)X, \tag{14.2}$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M.

برهان. أنظر [63] الصفحة 273 □

خواص 2.2.10. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة من الصنف ساساكي، إذن موتر التقوس R و موتر ريتشي S الموافقين لها يحققان الخواص التالية

1. $R(X,Y)\varphi Z=\varphi R(X,Y)Z+g(\varphi X,Z)Y-g(Y,Z)\varphi X,$
2. $R(X,Y)Z=-\varphi R(X,Y)\varphi Z-g(X,Z)Y+g(Y,Z)X+g(\varphi X,Z)\varphi Y-g(\varphi Y,Z)\varphi X,$

.3 $g\big(R(\varphi X,\varphi Y)\varphi Z,\varphi W\big)=g\big(R(X,Y)Z,W\big)+\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)$
$+\eta(Y)\big(\eta(W)g(X,Z)-\eta(Z)g(X,W)\big),$

.4 $R(\xi,X)\xi=-X,$

.5 $R(X,\xi)X=-\xi,$

.6 $R(X,Y)\xi=\eta(Y)X-\eta(X)Y,$

.7 $S(\varphi X,\varphi Y)=S(X,Y)-2n\eta(X)\eta(Y),$

برهان. يرجى الرجوع إلى المصدرين [10] صفحة 93 و [63] صفحة 277. □

تعريف 2.2.51. نسمي كل منوعة M^{2n+1} من الصنف ساساكي ذات تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت c، منوعة فضاء الشكل الساساكي. نرمز لها بالرمز $M^{2n+1}(c)$.

مبرهنة 2.2.19. إذا كانت $M^{2n+1}(c)$ منوعة فضاء الشكل الساساكي، فإن تقوسها الريماني R و تقوس ريتشي S يعطيان بالصيغتين التاليتين:

$$R(X,Y) = X\wedge Y+\frac{c-1}{4}\left(\varphi^2X\wedge\varphi^2Y+\varphi X\wedge\varphi Y+2g(X,\varphi Y)\varphi\right) \quad (15.2)$$

$$S(X,Y) = \frac{1}{2}\big((n+1)c+3n-1\big)g(X,Y)-\frac{1}{2}(n+1)(c-1)\eta(X)\eta(Y) \quad (16.2)$$

حيث $(X\wedge Y)Z=g(Y,Z)X-g(X,Z)Y$ من أجل كل Y,X و Z حقول أشعة على M.

مثال 2.2.7. [63] عرف بلير بنية هامة على $\mathbb{R}^{2n+1}$ كمايلي:

$$g=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sigma_{ij}+y^iy^j & 0 & -y^i\\ 0 & \sigma_{ij} & 0\\ -y^j & 0 & 1\end{pmatrix}$$

,

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & \sigma_{ij} & 0\\ -\sigma_{ij} & 0 & 0\\ 0 & y^j & 0\end{pmatrix}$$

$$\xi=2(\frac{\partial}{\partial Z}),\qquad \eta=\frac{1}{2}(dZ-y^idx).$$

وهي بنية ساساكي ذات تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت $c=-3$

ملاحظات 2.2.3. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة من الصنف ساساكي. نقول عن M أنها

1. منوعة من الصنف ساساكي–أنشتاين إذا كان g موتر أنشتاين. بمعنى، $S=\lambda g$ حيث λ ثابت. بما أن
$$R(X,\xi)Y=g(X,\xi)Y-g(X,Y)\xi$$
فإنه يمكن وبسهولة إثبات أن $\lambda=2n$.
2. منوعة من الصنف η–أنشتاين إذا كان g يحقق العلاقة $S=ag+b\eta\otimes\eta$، حيث a وb هما دالتان على M، لكن إذا كان بعد المنوعة M يفوق أو يساوي 5 فإن a وb يكونا ثابتين ويمكننا بسهولة التحقق من أن $a+b=2n$.

من خلال المبرهنة (2.2.19) نلاحظ أن عبارة تقوس ريتشي تكتب من الشكل $S=ag+b\eta\otimes\eta$ وبالتالي يكون لدينا القضية الآتية

قضية 2.2.32. كل منوعة فضاء الشكل الساساكي هي منوعة η–أنشتاين حيث
$$a=\frac{1}{2}\big((n+1)c+3n-1\big)\quad\text{و}\quad b=-\frac{1}{2}(n+1)(c-1)$$

بنية كانموتسو Kenmotsu structure

تعريف 2.2.52. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، و ليكن ϕ الشكل الثنائي الأساسي الموافق لها. إذا كان الشكل η مغلقا (أي $\mathrm{d}\eta=0$) و $\mathrm{d}\phi=2\phi\wedge\eta$ وكانت الثلاثية (φ,ξ,η) ناظمية، عندئذ نقول عن المنوعة M أنها من صنف كانموتسو.

وكما كان الحال مع منوعة ساساكي، تميز منوعة كانموتسو باستعمال البنية φ كالتالي

مبرهنة 2.2.20. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، و ∇ وصلة لوفي سيفيتا الموافقة للموتر الريماني g. تكون المنوعة M من صنف كانموتسو إذا وفقط إذا كان
$$(\nabla_X\varphi)Y=g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X,$$
من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M (أنظر [29]).

قضية 2.2.33. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، و ∇ وصلة لوفي سيفيتا الموافقة للموتر الريماني g. إذا كانت M من صنف كانموتسو فإن
$$\begin{aligned}(\nabla_X\eta)(Y)&=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y).\\ \mathfrak{L}_\xi g&=2(g-\eta\otimes\eta).\end{aligned}$$

خواص 2.2.11. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة من صنف كانموتسو، إذن موتر التقوس الريماني R يحقق الخواص التالية

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \eta(X)Y-\eta(Y)X.\\ R(X,Y)\varphi Z &= \varphi R(X,Y)Z+(Y\wedge X)\varphi Z+(\varphi X\wedge\varphi Y)\varphi Z.\\ R(\varphi X,\varphi Y)Z &= R(X,Y)Z+(X\wedge Y)Z+(\varphi X\wedge\varphi Y)\varphi^2 Z. \end{aligned}$$

ومن أجل منوعة كانموتسو ذات تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت لدينا

مبرهنة 2.2.21. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة من صنف كانموتسو ذات تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت c، إذن التقوس الريماني R يعطى بالشكل التالي [29]

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \frac{c-3}{4}(X\wedge Y) \\ &+\frac{c+1}{4}\left(\eta(X)(Y\wedge\xi)-\eta(Y)(X\wedge\xi)-(\varphi X\wedge\varphi Y)\varphi^2+2g(X,\varphi Y)\varphi\right). \end{aligned} \tag{17.2}$$

مثال 2.2.8. لتكن (x,y,z) الإحداثيات الديكارتية على $\mathbb{R}^3$. البنية المعرفة بالعناصر التالية

$$\xi=\frac{\partial}{\partial z},\quad \eta=dz,\quad \text{و}\quad g=2e^{2z}(dx^2+dy^2),\phi=-2e^{2z}dx\wedge dy.$$

هي بنية كانموتسو على $\mathbb{R}^3$ ذات تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت $c=-1$.

بنية ثنائية التماسك Cosymplectic structure

تعريف 2.2.53. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا و ϕ الشكل الأساسي الموافق لها، نقول عن M أنها منوعة من الصنف ثنائي التماسك (منوعة ثنائية التماسك) إذا كان الشكلين η و ϕ مغلقين (أي $\mathrm{d}\eta=0$ و$\mathrm{d}\phi=0$) وكانت الثلاثية (φ,ξ,η) ناظمية.

مبرهنة 2.2.22. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا و ϕ الشكل التفاضلي الأساسي الموافق لها، نرمز بـ ∇ لوصلة لوفي سيفيتا على M. تكون M منوعة ثنائية التماسك إذا وفقط إذا كان

$$(\nabla_X\phi)(Y,Z)=0$$

من أجل كل X,Y و Z حقول أشعة على M.

برهان. يرجى الرجوع إلى المصدر [14]. □

قضية 2.2.34. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة ثنائية التماسك، نرمز بـ ∇ لوصلة لوفي سيفيتا على M. من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M لدينا

$$(\nabla_X\varphi)Y=0$$

ومن أجل منوعة ذات تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت لدينا

مبرهنة 2.2.23. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ منوعة ثنائية التماسك ذات تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت c. إذن التقوس الريماني يعطى بالصيغة التالية [37]

$$R(X,Y)=\frac{c}{4}\left(X\wedge Y-(\varphi X\wedge\varphi Y)\varphi+\eta(X)(Y\wedge\xi)-\eta(Y)(X\wedge\xi)+2g(X,\varphi Y)\varphi\right)$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M.

2.2.5 المنوّعة ذات الرُّكن Corner manifold

مؤخرا، وتحديدا في سنة 2019 قدم الباحثان س. كانديا و م. فالسيتيلي بحثا درسا فيه خصائص الصنف $C_5\oplus C_{12}$. وفي سنة 2021 قدم الأستاذ الباحث غ. بلجيلالي رفقة زميليه ح. بوزير و ب. بايور بحثا حول المنوّعات من الصنف C_{12} ذات البعد الثالث . في المرجع ([5]) توصل المؤلفون إلى تعميم للمنوّعات من الصنف C_{12} وبينو أن هذا التعميم هو بالضبط المنوّعات من الصنف $C_5\oplus C_{12}$. استنادا إلى هذه البحوث سنقدم دراسة موجزة حول البنى من الصنف C_{12}.
نبدأ بالحالة العامة ثم الخاصة

المنوعة من الصنف C_{12} المعمّمة Generalized C_{12} manifold

تعريف 2.2.54. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوعة مترية تلامسية تقريبا ذات البعد $2n+1$. نسمي M منوعة من الصنف C_{12} معمّمة إذا تحققت الشروط التالية

$$\mathrm{d}\eta=\eta\wedge\omega,\qquad \mathrm{d}\phi=2\beta\eta\wedge\phi\qquad\text{و}\qquad N_\varphi=0, \tag{18.2}$$

حيث $\omega=\left(\nabla_\xi\xi\right)^\flat=\nabla_\xi\eta$ و $\beta=\frac{1}{2n}\mathrm{div}\xi$.

ويمكن تمييز هذا الصنف من المنوّعات باستعمال الموتر φ كما في المبرهنة الموالية

مبرهنة 2.2.24. تكون منوعة مترية تلامسية تقريبا (M,φ,ξ,η,g) من الصنف C_{12} معمّمة إذا وفقط إذا كان

$$(\nabla_X\varphi)Y=\beta\big(g(\varphi X,Y)\xi-\eta(Y)\varphi X\big)-\eta(X)\big(\omega(\varphi Y)\xi+\eta(Y)\varphi\psi\big), \tag{19.2}$$

حيث نرمز بـ ψ إلى الحقل الشعاعي $\nabla_\xi\xi$.

برهان. يرجى الإطلاع على المصدر [5]. □

بالنسبة للمنوّعات من الصنف C_{12} المعمّمة ذات البعد الثالث لدينا المبرهنة التالية

مبرهنة 2.2.25. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا ثلاثية البعد، القول أن M من الصنف C_{12} معمّمة يكافئ

$$\nabla_X \xi = -\beta\varphi^2 X + \eta(X)\psi. \tag{20.2}$$

من أجل كل حقل شعاعي X على M.

ننتقل الآن إلى الحالة الخاصة، وهي المنوّعات من الصنف C_{12}.

المنوُّعة ذات الرُّكن Corner manifold

ننوّه إلى أن هذا الصنف من المنوّعات نحصل عليه بأخذ $\beta = 0$ في تعريف المنوّعات من الصنف C_{12} المعمّمة، وبالتالي يكون لدينا التعريف الآتي

تعريف 2.2.55. [16] لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا، نقول عن M أنها منوعة من الصنف C_{12} تقريبا إذا وُجِد شكل تفاضلي أحادي ω بحيث

$$\mathrm{d}\eta = \eta \wedge \omega \quad \text{و} \quad \mathrm{d}\phi = 0$$

إضافة على هذا، إذا كان $N_\varphi = 0$ نقول عن المنوّعة M أنها من الصنف C_{12}. وعندئذ، نرمز لها بالرمز $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$.

ومنه المبرهنة (2.2.24) تصبح بالشكل التالي

مبرهنة 2.2.26. لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوعة مترية تلامسية تقريبا من الصنف C_{12}، إذن

$$(\nabla_X \varphi)Y = \eta(X)(\omega(\varphi Y)\xi + \eta(Y)\varphi\psi), \tag{21.2}$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M.

برهان. يرجى الرجوع إلى المصدر [16]. □

قضية 2.2.35. إذا كانت $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوعة من الصنف C_{12} فإن الحقلين الشعاعيين ξ وψ يكونا دوما متعامدان.

مما سبق نستنتج وجود ثلاثية حقول أشعة شاملة $\{\xi, \psi, \varphi\psi\}$ متعامدة مثنى مثنى، أي تشكل ركنا على هذا النوع من المنوّعات. وهذا ما خول الأستاذ غ. بالجيلالي تسمية هذا الصنف بالمنوّعات ذات الركن. بناءا على هذا، سنصطلح في قادم المذكرة على المنوّعات من الصنف C_{12} بالمنوّعات ذات الركن وبالانجليزية (Corner manifolds). إذا كانت المنوعة ثلاثية البعد وكان الحقلان ξ و ψ واحديين، نتحصل على القضية التالية

قضية 2.2.36. من أجل كل منوعة ذات الركن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ ثلاثية البعد لدينا

1. $\nabla_X \xi = -\eta(X)\psi$
2. $\nabla_\xi \psi = \xi$
3. $\nabla_\xi \varphi\psi = \nabla_\psi \psi = 0$
4. $(\nabla_X \eta)Y = -\eta(X)\omega(Y)$

من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M.

مثال 2.2.9. ليكن $\mathbb{R}^5$ فضاء إقليديا مزوّدا بالإحداثيات الديكارتية $\{x_i, z\}_{1\leq i\leq 4}$ و نعتبر $\{e_i\}_{1\leq i\leq 5}$ حقول الأشعة المستقلة خطيا عند كل نقطة من $\mathbb{R}^5$ و المعطاة كمايلي

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}, \quad e_5 = \xi = \frac{\partial}{\partial z}$$

وليكن g المترك الريماني في $\mathbb{R}^5$ معرف بـ:

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

حيث

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

نعتبر θ^i الأشكال الأحادية المرفق بحقول الأشعة e_i التي وجب أن تكون كالتالي

$$\theta^1 = dx_1, \quad \theta^2 = dx_2, \quad \theta^3 = dx_3, \quad \theta^4 = dx_4, \quad \theta^5 = dz - zdx_1 - zdx_3.$$

ومنه

$$g = \begin{pmatrix} 1+z^2 & 0 & z^2 & 0 & -z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z^2 & 0 & 1+z^2 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & -z & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

علما أن

$$g = \sum_{i=1}^{5} \theta^i \otimes \theta^i$$

و عليه $\eta = dz - zdx_1 - zdx_3$ و

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & -z & 0 \end{pmatrix}.$$

و بالتالي، الرباعية (φ, ξ, η, g) هي بنية مترية تلامسية تقريبا.
الآن، بما أن $\eta = dz - zdx_1 - zdx_3$ فإنه يمكن استنتاج أن

$$\omega = dx_1 + dx_3.$$

مع ملاحظة أنّ $\mathrm{d}\eta = \omega \wedge \eta$ مع $d\omega = 0$. و كذلك

$$\omega = \theta^1 + \theta^3 \quad \Leftrightarrow \quad \psi = e_1 + e_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} + 2z\frac{\partial}{\partial z}.$$

يمكن بسهولة اثبات أن الشكل الثنائي الأساسي ϕ مغلق حيث $\phi = -2\theta^1 \wedge \theta^2 - 2\theta^3 \wedge \theta^4$.
وختاما، نستنتج أن المنوّعة $(\mathbb{R}^5, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي منوّعة ذات الركن خماسية الأبعاد.

مبرهنة 2.2.27. لتكن $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوعة ذات الركن، إذن التقوس الريماني R و تقوس ريتشي S يحققان التالي

$$R(X,Y)\xi = -2\mathrm{d}\eta(X,Y)\psi - \eta(Y)\nabla_X\psi + \eta(X)\nabla_Y\psi, \tag{22.2}$$
$$R(X,\xi)Y = \omega(X)\big(\omega(Y)\xi - \eta(Y)\psi\big) + g(\nabla_X\psi, Y)\xi - \eta(Y)\nabla_X\psi, \tag{23.2}$$
$$S(X,\xi) = -\eta(X)\mathrm{div}\psi. \tag{24.2}$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M.

برهان. من أجل كل حقول الأشعة X ، Y و Z على M. يعرف التقوس الريماني كالتالي

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \tag{25.2}$$

لما نعوض Z بـ ξ نجد

$$R(X,Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi, \tag{26.2}$$

لدينا

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y\xi &= \nabla_X\big(-\eta(Y)\psi\big)\\ &= -\big((\nabla_X\eta)(Y)\psi+\eta(\nabla_XY)\psi+\eta(Y)\nabla_X\psi\big)\\ \nabla_Y\nabla_X\xi &= \big((\nabla_Y\eta)(X)\psi+\eta(\nabla_YX)\psi+\eta(X)\nabla_Y\psi\big)\end{aligned}$$

وكذلك لدينا

$$\nabla_{[X,Y]} = -\eta(\nabla_XY)\psi+\eta(\nabla_YX)\psi$$

بالتعويض في العلاقة (26.2)، ينتج

$$\begin{aligned}R(X,Y)\xi &= -\big((\nabla_X\eta)(Y)-(\nabla_Y\eta)(X)\big)\psi+\eta(X)\nabla_Y\psi-\eta(Y)\nabla_X\psi\\ &= -2\mathrm{d}\eta(X,Y)\psi+\eta(X)\nabla_Y\psi-\eta(Y)\nabla_X\psi.\end{aligned}$$

وهو المطلوب. أما بالنسبة للعلاقة الثانية، لدينا

$$g\big(R(X,\xi)Y,Z\big) = -g\big(R(Y,Z)\xi,X\big),$$

علما أن $\mathrm{d}\eta=\omega\wedge\eta$ وباستعمال العلاقة الأولى، نجد

$$\begin{aligned}g\big(R(X,\xi)Y,Z\big) &= 2\mathrm{d}\eta(Y,Z)g(\psi,X)-\eta(Y)g(\nabla_Z\psi,X)+\eta(Z)g(\nabla_Y\psi,X)\\ &= \omega(X)\big(\omega(Y)g(\xi,Z)-\eta(Y)g(\psi,Z)\big)-\eta(Y)g(\nabla_X\psi,Y)\\ &+ g(\xi,Z)g(\nabla_Y\psi,X),\end{aligned}$$

ومنه

$$R(X,\xi)Y = \omega(X)\big(\omega(Y)\xi-\eta(Y)\psi\big)-\eta(Y)\nabla_X\psi+g(\nabla_Y\psi,X)\xi,$$

والتي تكافئ

$$R(X,\xi)Y = \omega(X)\big(\xi\wedge\psi\big)Y-\eta(Y)\nabla_X\psi+g(\nabla_Y\psi,X)\xi.$$

حيث $\big(\xi\wedge\psi\big)Y=g(\psi,Y)\xi-g(\xi,Y)\psi$ من أجل الخاصية الثالثة، نعرف تقوس ريتشي S من أجل حقل شعاعي X على M، و $\{e_1,...,e_{2n+1}\}$ أساس محلي متعامد ومتجانس

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n+1} g\big(R(e_i,X)Y,e_i\big), \tag{27.2}$$

إذن باستعمال الخاصية الأولى نجد

$$\begin{aligned} S(X,\xi) &= \sum_{i=1}^{2n+1} -2\mathrm{d}\eta(e_i,X)\omega(e_i) + \eta(e_i)g(\nabla_X\psi,e_i) - \eta(X)g(\nabla_{e_i}\psi,e_i), \\ &= -2\mathrm{d}\eta(\psi,X) - g(\nabla_X\psi,\xi) - \eta(X)\mathrm{div}\psi \\ &= -\eta(X)\mathrm{div}\psi. \end{aligned}$$

وبهذا ننهي البرهان. □

2.2.6 بنية ماوراء−ساساكي المعمّمة Generalized Tran−Sasakian structure

في السنة الماضية (2023)، نُشر بحث [54] للدكاترة م. ع. سي ناصر، غ. بالجيلالي و ب. بيور يدرسون فيه صنفا جديدا من المنوّعات المترية التلامسية تقريبا أسموه منوّعات ماوراء−ساساكي المعمّمة، وهو تعميم لمنوّعات ثنائية التماسك، كانموتسو، ساساكي و كذلك منوّعات ذات الركن. في هذه الفقرة سنعرِّف بالصنف الجديد ونعدّد بعض خصائصه.

ظهر مفهوم التحويل المماثل للبنى المترية التلامسية تقريبا مع إ. فيزمان [57]، و أ. شرف الدين و س. إ. حسين [52].
التحويل الملائم لبنية مترية تلامسية تقريبا (φ,ξ,η,g) هو التحويل

$$\overline{\varphi} = \varphi, \qquad \overline{\xi} = \mathrm{e}^{\sigma}\xi, \qquad \overline{\eta} = \mathrm{e}^{-\sigma}\eta, \qquad \overline{g} = \mathrm{e}^{-2\sigma}g, \tag{28.2}$$

حيث σ هي دالة ملساء على M. ويعرّف أيضا بنية مترية تلامسية تقريبا. لكن، إذا طبقنا نفس الأمر على بنية ماوراء−ساساكي لا نحصل بالضرورة على بنية مماثلة. انطلاقا من هذا نقدم التعريف التالي

تعريف 2.2.56. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوعة مترية تلامسية تقريبا، نقول عن M أنها منوعة ماوراء−ساساكي معمّمة من النوع (α,β) إذا كانت $(M,\overline{\varphi},\overline{\xi},\overline{\eta},\overline{g})$ منوعة ماوراء−ساساكي من النوع $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$.

باستعمال علاقة كوزيل، يمكن استخلاص معادلة تربط بين المشتق الموافق للتباين $(\nabla_X\varphi)Y$ للموتر g والمشتق الموافق للتباين $(\overline{\nabla}_X\overline{\varphi})Y$ للموتر $\overline{g}$ (أنظر [54]). وهذا مهد لتقديم تمييز مناسب لصنف منوّعات ماوراء−ساساكي المعمّمة، المبرهنة التالية تثبت ذلك

مبرهنة 2.2.28. نقول عن منوعة مترية تلامسية تقريبا (M,φ,ξ,η,g) أنها منوعة ماوراء−ساساكي معمّمة من النوع (α,β)، إذا وفقط إذا وجد شكل أحادي تام ω على M يحقق

$$\begin{aligned} (\nabla_X\varphi)Y &= \alpha\big(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\big) + \beta\big(g(\varphi X,Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\big) \\ &+ \omega(\varphi Y)X - \omega(Y)\varphi X - g(X,\varphi Y)\psi + g(X,Y)\varphi\psi. \end{aligned} \tag{29.2}$$

حيث ψ هو حقل شعاعي على M يعرف بـ $g(X,\psi)=\omega(X)$.

نتيجة 2.2.6. من أجل كل منوعة ماوراء−ساساكي معمّمة من النوع (α,β)، لدينا

$$\nabla_X\xi = -\alpha\varphi X-\big(\beta+\omega(\xi)\big)\varphi^2X+\eta(X)\varphi^2\psi. \tag{30.2}$$

برهان. نستعمل العبارة (29.2) بتعويض ξ مكان Y. □

قضية 2.2.37. تكون منوعة ماوراء−ساساكي المعمّمة من نوع (α,β) ناظمية فقط إذا كان الحقلان الشعاعيان ξ و ψ متعامدان ، وتحديدا إذا كان $\psi=\omega(\xi)\xi$.

المبرهنة التالية تعطينا تمييز آخر لمنوّعات ماوراء−ساساكي المعمّمة

مبرهنة 2.2.29. لتكن (M,φ,ξ,η,g) منوعة مترية تلامسية تقريبا، نقول عن M أنها منوعة ماوراء−ساساكي المعمّمة من نوع (α,β) إذا وفقط إذا وجد شكل أحادي مغلق ω بحيث

$$\mathrm{d}\eta=\omega\wedge\eta+\alpha\phi,\quad \mathrm{d}\phi=2(\omega+\beta\eta)\wedge\phi,\quad N^{(1)}=2(\omega\wedge\eta)\otimes\xi. \tag{31.2}$$

كما ذكرنا سابقا و نؤكده هنا، بُنية ماراء−ساساكي البحتة حيث α و β لا تنعدمان معا تظهر فقط في البُعد الثلاثي. ويبقى هذا ساريا بالنسبة لبُنية ماراء−ساساكي المعمّمة، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 2.2.10. نعتبر (x,y,z) الإحداثيات الديكارتية للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$، ونعرف الموتر المتري الريماني g على $\mathbb{R}^3$ كما يلي

$$g=\begin{pmatrix}\rho^2+\tau^2 & 0 & -\tau\\ 0 & \rho^2 & 0\\ -\tau & 0 & 1\end{pmatrix},$$

حيث $\rho=\mathrm{e}^z$ و $\tau=xz-2y$ هما دالتان لا تنعدم أبدا على $\mathbb{R}^3$. نعرف أيضا على $\mathbb{R}^3$، البنية التلامسية تقريبا التالية

$$\varphi=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix},\quad \xi=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \eta=(-\tau,0,1).$$

إذن الشكل الأحادي η والشكل الأساسي ϕ يكونان كالتالي

$$\eta=dz-\tau dx \qquad \text{و} \qquad \phi=-2\rho^2dx\wedge dy,$$

وعليه

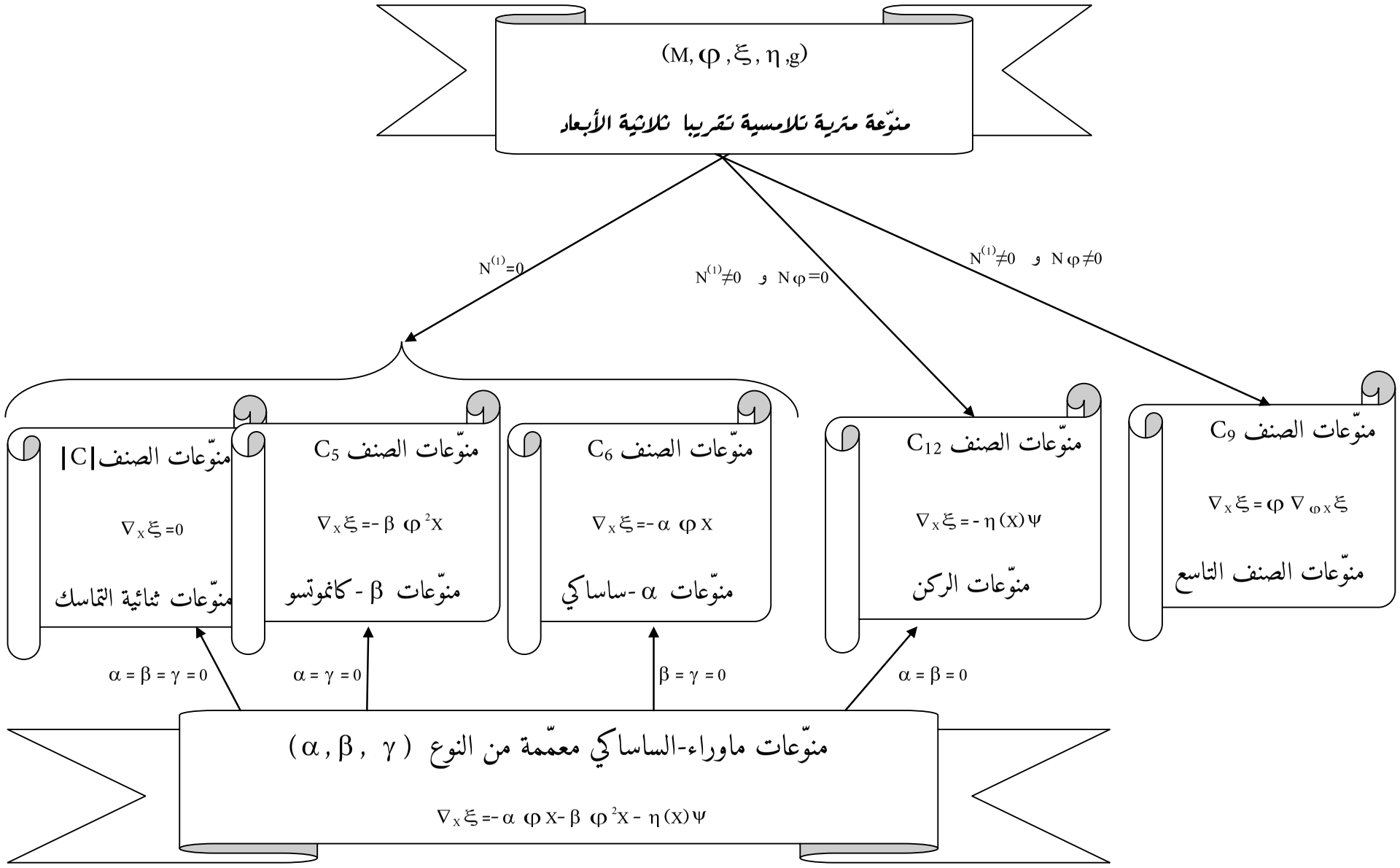
$$\begin{cases} \mathrm{d}\eta = \tau_3 dx \wedge \eta - \frac{\tau_2}{2\rho^2}\phi \\ \mathrm{d}\phi = 2dz \wedge \phi, \end{cases}$$

حيث $\tau_i = \frac{\partial \tau}{\partial x_i}$.

بتوظيف العلاقة (31.2) نستنتج أن، (φ, ξ, η, g) هي بنية ماراء–ساساكي معمّمة من النوع

$$(\alpha = \mathrm{e}^{-2z}, \beta = 1)$$

مع $\omega = xdx$.



مخطط (2) يُلخّص المنوّعات المترية التلامسية تقريبا ثلاثية

الفصل 3

النتائـــج
Results

يضم هذا الفصل مختلف النتائج المحصّل عليها خلال السنوات الأربع الماضية، وقد ارتأينا تقسيمه إلى ثلاث أجزاء، الأول يحوي النتائج التي كانت على المنوّعات المركّبة تقريبا وتحديدا على المنوّعات الكاليرية المحوّلة محليا. سنفصل في المنوّعة التي عرّفناها و التي سميناها " منوّعة فايزمان المعمّمة ". ويحوي الثاني تلك التي كانت على المنوّعات المترية التلامسية تقريبا وتحديدا على المنوّعات ذات الركن. أما الأخير فجمعنا فيه بين المنوّعة الجديدة منوّعة فيزمان المعمّمة والمنوّعة ذات الركن وذلك بإنشاء جسور للتنقل بينهما.

3.1 نتائج على منوّعات كالير المحوّلة محليا
Results on locally conformal Kahler manifolds

بدأت دراسة الهندسة الكاليرية لأول مرة عام 1930 مع العالمان ج. أرنولدوس شوتن و د. فان دانتزيج، لكن لم تبرز هذه الدراسة حتى عام 1933 مع العالم إ. كالر، أما عن المصطلح (الهندسة الكاليرية) فقد ثبته العالم أ. ويل، للدلالة على دراسة المنوّعات الكاليرية هندسيا وطبولوجيا على حد سوا. وقد نال هذا الفرع حظا أوفر من الدراسة.

استمر فرع الهندسة الكاليرية في التطور إلى أن ظهر نوع آخر من المنوّعات يدرس الخصائص الكاليرية في تفاصيل المنوعة لا في مجملها، وهو المنوّعات الكاليرية المحولة محليا، عرف هذا الأخير عام 1954 من خلال الورقة البحثية للعالم ب. ليبرمان، إلا أن الدراسات المكثفة عليه بدأت فقط منذ عام 1976 مع الزخم الكبير الذي قدمه العالم إ. فيزمان. ومنذ ذلك الحين ظهرت أبحاث عديدة لدراسة الخصائص الرئيسية للمنوّعات الكاليرية المحولة محليا.

في هذا المبحث سنقدم أولى النتائج المحصل عليها وهي صنف جديد من المنوّعات ينطوي تحت المنوّعات الكاليرية المحولة محليا، تم الحصول عليه باستخدام مفهوم حقل الأشعة الملتوي. وقد رتبنا عناصر هذا المبحث في ثلاث أجزاء كالتالي:

الجزء الأول، سنقدم من خلاله مفهوم الحقل الشعاعي الملتوي وأهم خصائصه، ونطرح إضافة إلى ذلك مفهوم جديد وهو الحقل الشعاعي الملتوي الخاص مع مثال توضيحي يؤكد وجوده.

الجزء الثاني، سنتطرق فيه إلى التعريف بالصنف الجديد من البنى الكاليرية المحولة محليا مع تقديم بعض خصائصه.

الجزء الأخير، هو عبارة على جزء تطبيقي، ندرس فيه البنية الجديد على جبور لي القابلة للحل ذات البعد الرابع.

نشير إلى أن هذه النتائج قد نشرت عام 2023 في المجلة المحكمة Mediterranean Journal of Mathematics [47].

3.1.1 حقل شعاعي الملتوي Torse forming vector field

حقل شعاعي ملتوي

ظهر مفهوم الحقل الشعاعي الملتوي في الأربعينيات من القرن الماضي مع العالم ك. يانو [64] حيث عرّفه على الفضاء الريماني كالتالي

تعريف 3.1.57. لتكن (M,g) منوعة ريمانية و ∇ وصلة لوفي سيفيتا الموافقة للموتر g، وليكن ξ حقل شعاعي على M. نقول أن ξ هو حقل شعاعي ملتوي إذا تحقق مايلي

$$\nabla_X \xi = aX + \eta(X)\xi,$$

حيث a هي دالة ملساء و η هو شكل تفاضلي أحادي على M، نسمي الدالة a سلمي ملائم و الشكل η شكل مولد.

بالمقابل، قدم العالم س. يمغوتشي رفقة زميله و. ن. يو [61] المفهوم المركب المماثل لمفهوم الحقل الشعاعي الملتوي ونقصد هنا بالمفهوم المركب أي على المنوعة الريمانية المزودة ببنية مركبة، وقد سمي هذا الكائن الجديد حقل شعاعي كاليري ملتوي، وعرّف على النحو التالي

تعريف 3.1.58. لتكن (M,g) منوعة ريمانية مزودة ببنية مركبة J و ∇ هي وصلة لوفي سيفيتا الموافقة للموتر g، وليكن ξ حقل شعاعي على M. نقول أن ξ هو حقل شعاعي كاليري ملتوي إذا وفقط إذا كان

$$\nabla_X \xi = aX + bJX + \eta_1(X)\xi + \eta_2(X)J\xi, \tag{1.3}$$

حيث a و b هما دالتان ملساوان، نسمي كلا منهما سلميا ملائما. و η_1 و η_2 هما شكلان تفاضليان أحاديان على M، نسمي كلا منهما شكلا مولدا.

ملاحظة 3.1.15. إذا حقق السلميين الملائمين a و b الشرط $a^2 + b^2 \neq 0$، عندئذ نسمي ξ حقلا شعاعيا كاليريا ملتويا صرفا.

حقل شعاعي كاليري ملتوي خاص Special K−torse fotming vector field

تعريف 3.1.59. لتكن (M, J, g) منوعة هرميسية، وليكن ξ حقل شعاعي على M. نقول عن ξ أنه حقل شعاعي كاليري ملتوي خاص إذا حقق العلاقة التالية

$$\nabla_X \xi = aX + bJX + \alpha g(X,\xi)\xi + \mu g(X, J\xi)\xi + \lambda g(X,\xi)J\xi + \beta g(X, J\xi)J\xi. \quad (2.3)$$

ملاحظة 3.1.16. الشكلان المولدان للحقل الشعاعي الكاليري الملتوي الخاص هما $\eta_1 = \alpha\xi^\flat + \mu(J\xi)^\flat$ و $\eta_2 = \lambda\xi^\flat + \beta(J\xi)^\flat$

بوضع $\eta(X) = g(X,\xi)$ و $\tilde{\eta} = \eta \circ J$، ينتج $\tilde{\xi} = -J\xi$، حيث $\tilde{\eta}(X) = g(\tilde{\xi}, X)$
عندئذ العلاقة (2.3) تصبح على الشكل

$$\nabla_X \xi = aX + bJX + \alpha\eta(X)\xi + \beta\tilde{\eta}(X)\tilde{\xi} - \lambda\eta(X)\tilde{\xi} - \mu\tilde{\eta}(X)\xi. \quad (3.3)$$

عندما نمعن النظر في العبارة الأخيرة يتضح لنا أنه يمكن تجزئتها إلى جزأين، الأول تدرجي (type gradient) أي يحقق $g(\nabla_X\xi, Y) = g(\nabla_Y\xi, X)$ ونتحصل عليه بأخذ $b = \lambda = \mu = 0$ بمعنى

$$\nabla_X \xi = aX + \alpha\eta(X)\xi + \beta\tilde{\eta}(X)\tilde{\xi}, \quad (4.3)$$

أما الجزءالثاني فهو حقل كيلينغ من أجل $\lambda + \mu = 0$ ونتحصل عليه بأخذ $a = \alpha = \beta = 0$ أي

$$\nabla_X \xi = bJX - \lambda\eta(X)\tilde{\xi} - \mu\tilde{\eta}(X)\xi, \quad (5.3)$$

وعليه، نستخلص النتيجة التالية

نتيجة 3.1.7.
- إذا كانت عبارة $\nabla_X\xi$ تعطى بالعلاقة (4.3)، فإن ξ في هذه الحالة يسمى حقلا شعاعيا كاليريا ملتويا خاصا من النوع الأول. ونجد أن

$$2\mathrm{d}\eta(X,Y) = g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_Y\xi, X) = 0.$$

- إذا كانت عبارة $\nabla_X\xi$ تعطى بالعلاقة (5.3)، فإن ξ في هذه الحالة يسمى حقلا شعاعيا كاليريا ملتويا خاصا من النوع الثاني. ونجد أن

$$\mathrm{d}\eta = -b\Omega + (\lambda - \mu)\eta \wedge \tilde{\eta}.$$

فيما يلي سنقدم مثال يؤكد وجود حقول أشعة كاليرية ملتوية خاصة من النوعين الأول و الثاني

مثال 3.1.11. لتكن $(\mathbb{R}^{2n}, J)$ منوعة مركبة، باعتبار $\{\partial_1, ..., \partial_{2n}\}$ هي حقول أشعة مستقلة خطيا عند كل نقطة من الفضاء $\mathbb{R}^{2n}$ (أساسا محليا)، يمكن تعريف البنية المركبة J كالآتي $J\partial_{2i} = -\partial_{2i-1}$ $J\partial_{2i-1} = \partial_{2i}$ من أجل كل $i \in \{1, ..., n\}$.
وبذلك تكون الثلاثية $(\mathbb{R}^{2n}, J, g_0 = I_{2n})$ منوعة كاليرية، حيث يعطى شكلها الثنائي الأساسي كالتالي

$$\Omega_0 = -2\sum_{i=1}^{n} dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}.$$

إضافة إلى ذلك، كل تحويل ملائم من الشكل $g = \mathrm{e}^{2\rho} g_0$ حيث ρ هي دالة ملساء على $\mathbb{R}^{2n}$، يؤدي إلى منوعة كاليرية محولة محليا $(\mathbb{R}^{2n}, J, g)$، شكلها الثنائي الأساسي Ω يحقق

$$\mathrm{d}\Omega = 2\mathrm{d}\rho \wedge \Omega.$$

الآن، إذا أخذنا على سبيل المثال لا الحصر $\rho = \rho(x_1)$ فإن عناصر هذه المنوعة الكاليرية المحولة محليا (عد إلى (2.1.6، 2.1.0) الصفحة 29) تعرف كالتالي

- $\omega = 2\rho_1 dx^1$ ببساطة لأن $(\mathbb{R}^{2n}, J, g)$ منوعة كاليرية محولة محليا، أي أن $\mathrm{d}\Omega = \omega \wedge \Omega$.
- $B = 2\mathrm{e}^{-2\rho}\rho_1\partial_1$ لأننا عرفنا B على أنه الحقل الشعاعي الموافق للشكل ω (حقل ليي).
- $\theta = -2\rho_1 dx^2$، $A = -2\rho_1\mathrm{e}^{-2\rho}\partial_2$ وهذا لأن $\theta = \omega \circ J$ و$A = -JB$.

نذكر أن الهدف من المثال هو إثبات وجود حقول أشعة كاليرية ملتوية خاصة، وفي هذه الحالة الحقلان B و A هما المخصوصان بالدراسة، لذلك نجدنا في حاجة إلى حساب ∇B و ∇A حيث ∇ هي وصلة لوفي سيفيتا الموافقة لـ g، و من أجل هذا كان من الضروري حساب وصلة ريمان الموافقة للموتر g. حسب علاقة كوزل لدينا من أجل كل X, Y و Z

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) \\
&\quad + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \\
&= 2\mathrm{d}\rho(X)g(Y,Z) + \mathrm{e}^{2\rho}Xg(Y,Z) + 2\mathrm{d}\rho(Y)g(Z,X) + \mathrm{e}^{2\rho}Yg(Z,X) \\
&\quad + \mathrm{e}^{2\rho}\big(-g_0(X,[Y,Z]) + g_0(Y,[Z,X]) + g_0(Z,[X,Y])\big) \\
&\quad - 2\mathrm{d}\rho(Z)g(X,Y) - \mathrm{e}^{2\rho}Zg(X,Y) \\
&= 2\left(\mathrm{d}\rho(X)g(Y,Z) + \mathrm{d}\rho(Y)g(X,Z) - \mathrm{d}\rho(Z)g(Y,X)\right) + 2\mathrm{e}^{2\rho}g_0(\nabla^{\mathbb{R}}_X Y, Z)
\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\nabla_X Y = \nabla^{\mathbb{R}}_X Y + \mathrm{d}\rho(X)Y + \mathrm{d}\rho(Y)X - g(X,Y)\mathrm{grad}\rho.$$

حيث $\nabla^{\mathbb{R}}_X Y$ هي وصلة ريمان الموافقة للموتر الريماني g_0. وبالتالي، من أجل كل $i,j \in \{1,2,...,n\}$

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla^{\mathbb{R}}_{\partial_i}\partial_j + \rho_i\partial_j + \rho_j\partial_i - \delta_{ij}\rho_1\partial_1.$$

نأخذ بعين الإعتبار أن $\nabla^{\mathbb{R}}_{\partial_i}\partial_j = 0$، أي

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \rho_i\partial_j + \rho_j\partial_i - \delta_{ij}\rho_1\partial_1.$$

ومنه نستطيع حساب $\nabla_{\partial_i}B$ بكل سهولة كالتالي

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}B &= -4\rho_1^2 e^{-2\rho}\partial_1 + 2\rho_{11}e^{-2\rho}\partial_1 + 2\rho_1 e^{-2\rho}\nabla_{\partial_i}\partial_1 \\
&= -4\rho_1^2 e^{-2\rho}\partial_1 + 2\rho_{11}e^{-2\rho}\partial_1 + 2\rho_1 e^{-2\rho}(\rho_i\partial_1 + \rho_1\partial_i - \delta_{1i}\rho_1\partial_1) \\
&= 2\rho_1^2 e^{-2\rho}\partial_i + (-4\rho_1 + \frac{\rho_{11}}{\rho_1} + \rho_1 - \delta_{1i}\rho_1) \\
&= 2\rho_1^2 e^{-2\rho}\partial_i - \frac{2\rho_1^2 - \rho_{11}}{2\rho_1^2}(2\rho_1)B \\
&= 2\rho_1^2 e^{-2\rho}\partial_i - \frac{2\rho_1^2 - \rho_{11}}{2\rho_1^2}\omega(\partial_i)B
\end{aligned}$$

حيث $\rho_{11} = \partial_1(\partial_1(\rho))$. إذن B هو حقل شعاعي كاليري ملتوي خاص من النوع الأول حيث

$$a = 2\rho_1^2 e^{-2\rho}, \quad \alpha = \frac{\rho_{11}}{2\rho_1^2} - 1, \quad \text{و} \quad \beta = 0.$$

أيضا، لدينا

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i}A &= -\nabla_{\partial_i}(JB) \\
&= -J\nabla_{\partial_i}B - (\nabla_{\partial_i}J)B \\
&= \frac{-\rho_1^2 + \rho_{11}}{2\rho_1^2}\omega(\partial_i)A - \frac{1}{2}\theta(\partial_i)B.
\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن A هو حقل شعاعي كاليري ملتوي خاص من النوع الثاني، حيث

$$b = 0, \quad \lambda = \frac{\rho_{11} - \rho_1^2}{2\rho_1^2}, \quad \text{و} \quad \mu = \frac{1}{2}.$$

3.1.2 منوّعات فيزمان المعمّمة Generalized Vaisman manifolds

في البداية، بما أن المنوّعات الكاليرية المحولة محليا هي محور الدراسة فلا بأس بالتذكير بأهم المفاهيم وترميزات المتعلقة بها، وذلك لتسهيل القراءة وتيسير ربط المفاهيم. نقول عن منوعة هرميسية (M,J,g) أنها منوعة كاليرية

محولة محليا إذا وجد شكل أحادي مغلق ω يحقق

$$\mathrm{d}\Omega = \omega \wedge \Omega$$

حيث Ω هو الشكل التفاضلي الأساسي للمنوعة M. نرمز بالرمز B للحقل الشعاعي الموافق للشكل الأحادي ω، وبالرمز A للحقل الشعاعي $-JB$، وكذلك بالرمز θ للشكل الأحادي الموافق له أي $\theta = \omega \circ J$.
من أجل كل منوعة كاليرية محولة محليا يكون لدينا

$$2(\nabla_X J)Y = \theta(Y)X - \omega(Y)JX - g(X,Y)A - \Omega(X,Y)B \tag{6.3}$$

هنا سنقدم دراسة وافية عن منوّعات فيزمان المعمّمة بإعتباره مفهوم جديد استخلصناه من مفهوم المنوّعات الكاليرية المحولة محليا وكذا تعريفنا للحقل الشعاعي الكاليري الملتوي الخاص، هذا المفهوم وكما سنوضح في قادم البحث ماهو إلا تعميم لمنوعة فيزمان. ونعرفه كالتالي

تعريف 3.1.60. لتكن (M, J, ω, g) منوعة كاليرية محولة محليا، نقول عن M أنها منوعة فيزمان معمّمةإذا وفقط إذا كان حقل ريب B هو حقل شعاعي كاليري ملتوي خاص من النوع الأول. أي

$$\nabla_X B = fX + \alpha\omega(X)B + \beta\theta(X)A, \tag{7.3}$$

وهذا يكافئ

$$(\nabla_X \omega)Y = fg(X,Y) + \alpha\omega(X)\omega(Y) + \beta\theta(X)\theta(Y), \tag{8.3}$$

من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M مع f، α وβ دوال ملساء على M.

ملاحظة 3.1.17. كل منوعة فيزمان هي منوعة فيزمان معمّمة حيث المعاملات f، α وβ كلها معدومة.

من النتيجة (3.1.7) لدينا

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\omega(B,X) \\ &= g(\nabla_B B, X) - g(\nabla_X B, B), \end{aligned} \tag{9.3}$$

ونعلم أن

$$g(\nabla_X B, B) = X\big(\omega(B)\big) - g(B, \nabla_X B),$$

وبالتالي

$$\nabla_B B = \frac{1}{2}\mathrm{grad}\big(\omega(B)\big). \tag{10.3}$$

بوضع $X = B$ في العلاقة (7.3)، نجد

$$\nabla_B B = fB + \alpha\omega(B)B, \tag{11.3}$$

وأخيرا، من العلاقتين (10.3) و (11.3) نستنتج أن

$$\frac{1}{2}B\big(\mathrm{grad}(\omega(B))\big) = \omega(B)\big(f + \alpha\omega(B)\big)$$

أي

$$f = -\alpha\omega(B) + \frac{1}{2}B\Big(\ln\big(\omega(B)\big)\Big),$$

وعليه الشرط (7.3) يصبح يكافئ

$$\nabla_X B = \Big(-\alpha\omega(B) + \frac{1}{2}B\Big(\ln\big(\omega(B)\big)\Big)\Big)X + \alpha\omega(X)B + \beta\theta(X)A. \tag{12.3}$$

ملاحظة 3.1.18. من الملاحظ أنه يمكن التمييز بين منوّعات فيزمان المعمّمة من خلال المعاملين α وβ، لذلك ارتأينا تسمية هذا الصنف من المنوّعات باسم منوّعات فيزمان المعمّمة من النوع (α, β).

قضية 3.1.38. لتكن (M, J, ω, g) منوعة فيزمان معمّمة، إذن الحقل الشعاعي A يكون كاليري ملتوي خاص من النوع الثاني. إضافة إلى ذلك، يكون لدينا

$$\mathrm{d}\theta = \Big(f - \frac{1}{2}\omega(B)\Big)\Omega + (\alpha + \beta + 1)\omega \wedge \theta. \tag{13.3}$$

برهان. لتكن (M, J, ω, g) منوعة كاليرية محولة محليا خاصة. من جهة لدينا

$$\nabla_X B = fX + \alpha\omega(X)B + \beta\theta(X)A, \tag{14.3}$$

حيث $f = -\alpha\omega(B) + \frac{1}{2}B\Big(\ln\big(\omega(B)\big)\Big)$. ومن جهة أخرى نعلم أن

$$\nabla_X B \;=\; \nabla_X JA = (\nabla_X J)A + J\nabla_X A,$$

باستعمال العلاقة 6.3، نجد

$$2(\nabla_X J)A = \omega(B)X - \omega(X)B - \theta(X)A. \tag{15.3}$$

والآن باستعمال العلاقة السابقة والتي قبلها أي (14.3) و (15.3)، نجد

$$J\nabla_X A = \Big(f - \frac{1}{2}\omega(B)\Big)X + \Big(\alpha + \frac{1}{2}\Big)\omega(X)B + \Big(\beta + \frac{1}{2}\Big)\theta(X)A,$$

وهذا يكافئ

$$\nabla_X A = \Big(\frac{1}{2}\omega(B) - f\Big)JX + \Big(\alpha + \frac{1}{2}\Big)\omega(X)A - \Big(\beta + \frac{1}{2}\Big)\theta(X)B, \qquad (16.3)$$

وهذا يعني أن A هو حقل شعاعي ملتوي خاص من النوع الثاني.
بما أن

$$\mathrm{d}\theta(X,Y) = \frac{1}{2}\big(g(\nabla_X A, Y) - g(\nabla_Y A, X)\big)$$

فإنه وباستعمال العلاقة (16.3)، نجد

$$\mathrm{d}\theta = \Big(f - \frac{1}{2}\omega(B)\Big)\Omega + (\alpha + \beta + 1)\omega \wedge \theta.$$

□

ملاحظات 3.1.4. إذا كان الحقل الشعاعي B واحدي أي $|B| = 1$ فإن

$$\nabla_X B = \alpha\big(-X + \omega(X)B\big) + \beta\theta(X)A. \qquad (17.3)$$

وبالتالي يكون الحقل الشعاعي $A = -JB$ كذلك واحدي. وعن هذا ينتج

$$\nabla_X A = \Big(\alpha + \frac{1}{2}\Big)\big(JX + \omega(X)A\big) - \Big(\beta + \frac{1}{2}\Big)\theta(X)B.$$

نتيجة 3.1.8. يكون حقل شعاعي ملتوي خاص من النوع الثاني، حقل كِلنغ إذا وفقط إذا كان كلا المعاملين α و β معدومين.

برهان. نعلم أن القول أن حقل شعاعي A هو حقل كِلنغ يكافئ أن $\mathcal{L}_A g = 0$ حيث نرمز بـ $\mathcal{L}_A g$ لمشتقة لي الموافقة لـ A. إذن مباشرة وباستخدام العلاقة (16.3) نحسب المشتق من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M كالتالي

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}_A g\big)(X,Y) &= g(\nabla_X A, Y) + g(\nabla_Y A, X) \\
&= (\alpha + \frac{1}{2})\omega(X)\theta(Y) + (\alpha + \frac{1}{2})\omega(Y)\theta(X) \\
&\quad -(\beta + \frac{1}{2})\omega(Y)\theta(X) - (\beta + \frac{1}{2})\omega(X)\theta(Y) \\
&= (\alpha - \beta)\big(\omega(X)\theta(Y) + \omega(Y)\theta(X)\big).
\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن $\mathcal{L}_A g = 0$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = \beta$. □

مثال 3.1.12. نعتبر الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^4$. ليكن (e_i) أساسا متعامدا ومتجانسا عند كل نقطة من الفضاء $\mathbb{R}^4$ معرف كالتالي

$$e_1 = \mathrm{e}^{-(\rho+t)}\frac{\partial}{\partial x},\ \ e_2 = \mathrm{e}^{-(\rho+t)}\Big(\frac{\partial}{\partial y} + 2x\frac{\partial}{\partial z}\Big),\ \ e_3 = \mathrm{e}^{-\rho+t}\frac{\partial}{\partial z},\ \ e_4 = \mathrm{e}^{-(\rho+3t)}\frac{\partial}{\partial t},$$

حيث (x, y, z, t) تمثل الإحداثيات الديكارتية في الفضاء $\mathbb{R}^4$، و $\rho = \rho(t)$ دالة ملساء على $\mathbb{R}^4$.
وليكن (θ^i) ثنوي الأساس (e_i) والذي يعطى كالتالي

$$\theta^1 = \mathrm{e}^{\rho+t}dx, \quad \theta^2 = \mathrm{e}^{\rho+t}dy, \quad \theta^3 = \mathrm{e}^{\rho-t}(-2xdy + dz), \quad \theta^4 = \mathrm{e}^{\rho+3t}dt,$$

الهدف من المثال هو إنشاء منوعة فيزمان معمّمة، ولأجل هذا علينا أولا: تعريف بنية مركبة تقريبا J على M والتحقق من أن موتر نيجن هيز الموافق لها N_J معدوما. وقد عرفنا البنية J على النحو التالي

$$Je_1 = e_2\ ,\ Je_2 = -e_1\ ,\ Je_3 = e_4\ ,\ Je_4 = -e_3.$$

ولحساب الموتر N_J وجب علينا حساب أقواس لي غير المعدومة

$$[e_1, e_2] = 2\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_3, \qquad [e_1, e_4] = (\rho' + 1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_1,$$

$$[e_2, e_4] = (\rho' + 1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_2, \qquad [e_3, e_4] = (\rho' - 1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_3.$$

وبالتالي

$$\begin{aligned} N(e_2, e_3) &= [Je_2, Je_3] - J[e_2, Je_3] - J[Je_2, e_3] + J^2[e_2, e_3] \\ &= [-e_1, e_4] - J[e_2, e_4] \\ &= (\rho' + 1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}(-e_1 - Je_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

من النتيجة السابقة وباستخدام الخواص موتر نيجن هيز (أنظر 2.1.6) نجد

$$N(e_1, e_2) = N(e_1, Je_1) = 0 \qquad N(e_3, e_4) = N(e_3, Je_3) = 0$$

وكذلك

$$\begin{aligned} N(e_1, e_2) &= N(e_1, Je_1) = 0 \\ N(e_3, e_4) &= N(e_3, Je_3) = 0 \\ N(e_2, e_4) &= N(e_2, Je_3) = -JN(e_2, e_3) = 0 \\ N(e_1, e_4) &= JN(e_2, e_4) = 0 \\ N(e_1, e_3) &= JN(e_1, e_4) = 0 \end{aligned}$$

إذن $N_J = 0$. وهذا يعني أن J هي بنية مركبة على M.

ثانيا: نعرف الموتر الريماني g على M الذي يتوافق مع البنية وتكون من أجله الثنائية (J, g) بنية هرميسية على M.

إذن يعرف الموتر الريماني g كمايلي

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^{i=4} \theta^i \otimes \theta^i \\ &= \mathrm{e}^{2(\rho+t)}dx^2 + \mathrm{e}^{2(\rho+t)}dy^2 + \mathrm{e}^{2(\rho-t)}(-2xdy + dz) \otimes (-2xdy + dz) + \mathrm{e}^{2(\rho+3t)}dt^2 \\ &= \mathrm{e}^{2(\rho+t)}dx^2 + \mathrm{e}^{2(\rho+t)}(1 + 4\mathrm{e}^{-4t}x^2)dy^2 + \mathrm{e}^{2(\rho-t)}dz^2 + \mathrm{e}^{2(\rho+3t)}dt^2 - 2\mathrm{e}^{2(\rho-t)}dy \otimes dz \\ &\quad -2\mathrm{e}^{2(\rho-t)}dz \otimes dy \end{aligned}$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\begin{aligned} \Omega &= -2\big(\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^3 \wedge \theta^4\big) \\ &= -2\mathrm{e}^{2(\rho+t)}(dx \wedge dy - 2xdy \wedge dt + dz \wedge dt). \end{aligned}$$

حيث Ω هو الشكل التفاضلي الثنائي و$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$. ومنه

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Omega &= -4\rho'\mathrm{e}^{2(\rho+t)}dt \wedge dx \wedge dy \\ &= -4\rho'\mathrm{e}^{2(\rho+t)}dt \wedge (dx \wedge dy - 2xdy \wedge dt + dz \wedge dt) \\ &= -4\rho' dt \wedge \Omega. \end{aligned}$$

حيث $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial t}$. تحت الشرط $\rho' \neq 0$ تكون $(\mathbb{R}^4, J, \omega, g)$ منوعة كاليرية محولة محليا حيث $\omega = 2\rho' dt = 2\rho'\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}\theta^4$.

أخيرا، نحسب ∇B حيث B هو حقل ريب للتحقق من أن $(\mathbb{R}^4, J, \omega, g)$ منوعة كاليرية محولة محليا خاصة.

قبل البدأ بالحساب، نعرف الحقل B. بما أن $g(B, X) = \omega(X) = 2\rho' dt$ فإن

$$B = 2\rho'\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_4, \quad A = -JB = 2\rho'\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_3 \quad \text{و} \quad \theta = 2\rho'\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}\theta^3.$$

والآن نحسب وصلة ريمان الموافقة للموتر g، باستخدام علاقة كوزيل نجد

$$\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_{e_2}e_2 = -(\rho' + 1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_4, \qquad \nabla_{e_1}e_2 = -\nabla_{e_2}e_1 = \mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_3,$$

$$\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_3}e_1 = -\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_2, \qquad \nabla_{e_1}e_4 = (\rho' + 1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_1,$$

$$\nabla_{e_2}e_3 = \nabla_{e_3}e_2 = \mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_1, \qquad \nabla_{e_2}e_4 = (\rho' + 1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_2,$$

$$\nabla_{e_3}e_3 = -(\rho'-1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_4, \qquad \nabla_{e_3}e_4 = (\rho'-1)\mathrm{e}^{-(\rho+3t)}e_3,$$
$$\nabla_{e_4}e_1 = \nabla_{e_4}e_2 = \nabla_{e_4}e_3 = \nabla_{e_4}e_4 = 0.$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}B &= 2\rho'(\rho'+1)\mathrm{e}^{-2(\rho+3t)}e_1,\\
\nabla_{e_2}B &= 2\rho'(\rho'+1)\mathrm{e}^{-2(\rho+3t)}e_2,\\
\nabla_{e_3}B &= 2\rho'(\rho'-1)\mathrm{e}^{-2(\rho+3t)}e_3,\\
\nabla_{e_4}B &= 2(\rho''-\rho'^2-3\rho')\mathrm{e}^{-2(\rho+3t)}e_4,
\end{aligned}$$

باعتبار أن B هو حقل شعاعي كاليري ملتوي خاص من النوع الأول، فإنه يمكن كتابة ∇B بدلالة المعاملات α, β و f. أي

$$\nabla_{e_i}B = fe_i + \alpha\omega(e_i)B + \beta(e_i)A \tag{18.3}$$

من أجل $1 \leq i \leq 4$. نعيد حساب $\nabla_{e_3}B$ و $\nabla_{e_4}B$ باستخدام العلاقة (18.3) نجد

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_3}B &= fe_4 + \alpha\omega(e_4)B\\
\nabla_{e_4}B &= fe_3 + \beta\theta(e_3)A
\end{aligned}$$

الآن بمطابقة العلاقتين الأخيرتين مع المقابلتين لهما في العلاقات (18.3) ينتج لدينا

$$f = 2\rho'(\rho'+1)\mathrm{e}^{-2(\rho+3t)}, \quad \alpha = \frac{\rho''-4\rho'-2\rho'^2}{2\rho'^2}, \quad \beta = \frac{-1}{\rho'}$$

وهذا الأخير يؤكد أن الرباعية $(\mathbb{R}^4, J, \omega, g)$ تشكل منوعة فيزمان معمّمة.

نتيجة 3.1.9. لتكن (M, J, ω, g) منوعة فيزمان معمّمة. إذن التقوس الريماني R وتقوس ريتشي S الموافقان للمنوعة M يحققان التالي

$$\begin{aligned}
R(X,Y)B &= -(X\wedge Y)\mathrm{grad}f + \beta(\frac{1}{2}\omega(\beta) - f)(JX\wedge JY)B + 2(\mathrm{d}\alpha\wedge\omega)(X,Y)B\\
&+ f\alpha(X\wedge Y)B + 2(\mathrm{d}\beta\wedge\theta)(X,Y)A + 2\beta(\alpha+\beta+\frac{3}{2})(\omega\wedge\theta)(X,Y)A\\
&+ 2\beta(f - \frac{1}{2}\omega(B))\Omega(X,Y)A. \qquad (19.3)\\
S(X,B) &= (1-2n)(X(f) - \alpha f\omega(X)) + \beta\big(\omega(\beta) - 3f\big)\omega(X) + 2(\mathrm{d}\alpha\wedge\omega)(B,X)\\
&- 2\beta(\alpha+\beta+\frac{3}{2})(\omega\wedge\theta)(A,X) + 2(\mathrm{d}\beta\wedge\theta)(A,X). \qquad (20.3)
\end{aligned}$$

برهان. بالنسبة للعلاقة الأولى نحصل عليها مباشرة بتوظيف العلاقة

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

إذن، لما نعوض Z بـ B نجد

$$R(X,Y)B = \nabla_X\nabla_Y B - \nabla_Y\nabla_X B - \nabla_{[X,Y]}B,$$

حيث B هو حقل ريب. بما أن M هي منوعة فيزمان المعمّمة فإن

$$\nabla_X B = fX + \alpha\omega(X)B + \beta\theta(X)A$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y B &= \nabla_X\big(fY + \alpha\omega(Y)B + \beta\theta(Y)A\big)\\
&= X(f)Y + f\nabla_X Y + X(\alpha)\omega(Y)B + \alpha\nabla_X\big(\omega(Y)\big)B + \alpha\omega(Y)\nabla_X B\\
&\quad + X(\beta)\theta(Y)A + \beta\nabla_X\big(\theta(Y)\big)A + \beta\theta(Y)\nabla_X A\\
&= X(f)Y + f\nabla_X Y + \alpha\omega(\nabla_X Y)B + \beta\theta(\nabla_X Y)A + X(\alpha)\omega(Y)B\\
&\quad + \alpha f\omega(Y)X + X(\beta)\theta(Y)A + \beta\big(\frac{1}{2}\omega(B) - f\big)JX + 2\alpha^2\omega(X)\omega(Y)B\\
&\quad + \alpha f g(X,Y)B + \beta(\alpha - \beta - \frac{1}{2})\theta(X)\theta(Y)B + \beta(\alpha - \beta - \frac{1}{2})\theta(X)\omega(Y)A\\
&\quad + 2\beta(\alpha + \frac{1}{2})\omega(X)\theta(Y)A - \beta\big(\frac{1}{2}\omega(B) - f\big)\Omega(X,Y)A.
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\nabla_Y\nabla_X B &= Y(f)X + f\nabla_Y X + \alpha\omega(\nabla_Y X)B + \beta\theta(\nabla_Y X)A + Y(\alpha)\omega(X)B\\
&\quad + \alpha f\omega(X)Y + Y(\beta)\theta(X)A + \beta\big(\frac{1}{2}\omega(B) - f\big)JY + 2\alpha^2\omega(Y)\omega(X)B\\
&\quad + \alpha f g(X,Y)B + \beta(\alpha - \beta - \frac{1}{2})\theta(Y)\theta(X)B + \beta(\alpha - \beta - \frac{1}{2})\theta(Y)\omega(X)A\\
&+ \ 2\beta(\alpha + \frac{1}{2})\omega(Y)\theta(X)A + \beta\big(\frac{1}{2}\omega(B) - f\big)\Omega(X,Y)A.
\end{aligned}$$

ولدينا أيضا

$$\begin{aligned}
\nabla_{[X,Y]}B &= f[X,Y] + \alpha\omega([X,Y])B + \beta\theta([X,Y])A\\
&= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + \alpha\omega(\nabla_X Y)B - \alpha\omega(\nabla_Y X)B + \beta\theta(\nabla_X Y)A\\
&\quad - \beta\theta(\nabla_Y X)A.
\end{aligned}$$

ممّا سبق نستنتج أن $R(X,Y)B$ يعطى بالعلاقة (19.3).
أما بالنسبة للعلاقة الثانية، نوظف الدستور

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{2n} g\big(R(e_i,X)Y,e_i\big).$$

بوضع B مكان Y نجد

$$S(X,B)=\sum_{i=1}^{2n} g\big(R(e_i,X)B,e_i\big).$$

لما نعوض بالعبارة الأولى في المعادلة الأخيرة نجد

$$\begin{aligned}
S(X,B) &= g\big(-(e_i\wedge X)\mathrm{grad}f,e_i\big)+\beta\big(\frac{1}{2}\omega(\beta)-f\big)g\big((Je_i\wedge JX)B,e_i\big)\\
&+ 2(\mathrm{d}\alpha\wedge\omega)(e_i,X)g(B,e_i)+2\beta(\alpha+\beta+\frac{3}{2})(\omega\wedge\theta)(e_i,X)g(A,e_i)\\
&+ 2(\mathrm{d}\beta\wedge\theta)(e_i,X)g(A,e_i)+2\beta\big(f-\frac{1}{2}\omega(B)\big)\Omega(e_i,X)g(A,e_i)\\
&+ f\alpha g\big((e_i\wedge X)B,e_i\big)
\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
S(X,B) &= (1-2n)X(f)+\beta\big(\frac{1}{2}\omega(\beta)-f\big)\omega(X)+2(\mathrm{d}\alpha\wedge\omega)(B,X)+(2n-1)\omega(X)\\
&+ 2(\mathrm{d}\beta\wedge\theta)(A,X)-2\beta(\alpha+\beta+\frac{3}{2})\omega(X)\theta(A)-2\beta\big(f-\frac{1}{2}\omega(B)\big)\omega(X)\\
&= (1-2n)\big(X(f)-\alpha f\omega(X)\big)+\beta\big(\omega(\beta)-3f\big)\omega(X)+2(\mathrm{d}\alpha\wedge\omega)(B,X)\\
&- 2\beta(\alpha+\beta+\frac{3}{2})(\omega\wedge\theta)(A,X)+2(\mathrm{d}\beta\wedge\theta)(A,X).
\end{aligned}$$

وهو المطلوب. □

3.1.3 بنية فيزمان المعمّمة على زمر لي رباعيّة الأبعاد Generalized Vaisman structure on four dimensional Lie groups

قبل دراسة بنية فيزمان المعمّمة على جبور لي القابلة للحل نقدم بعض القضايا الهامة والضرورية لإثبات النتائج المحصل عليها. نبدأ مع تعريف البنية الهرميسية اللامتغيرة يسارا(أو من اليسار).

تعريف 3.1.61. لتكن G زمرة ليي و $\mathfrak{g}$ جبر لي المرافق لها. نسمي بنية هرميسية لا متغيرة يسارا كل تشاكل J من $\mathfrak{g}$ نحو $\mathfrak{g}$ يحقق مايلي

$$J^2 = -Id, \qquad N_J = 0, \qquad g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

حيث g هو موتر ريماني لا متغير يسارا على $\mathfrak{g}$.

سنعتبر فيما يلي G هي زمرة ليي ذات البعد الرابع مزودة بموتر متري ريماني لا متغير يسارا g. ونعتبر $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ أساس شامل متعامد ومتجانس و $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ الأساس التفاضلي الموافق له.

نتيجة 3.1.10. ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي رباعي الأبعاد مزود ببنية كاليرية محولة محليا لامتغيرة يسارا (J, ω, g). نقول عن (J, ω, g) أنها بنية فيزمان معمّمة لا متغيرة يسارا إذا كان الحقل الشعاعي اللامتغير يسارا B يعطى بالصيغة التالية

$$\nabla_{e_i} B = \alpha\big(-\omega(B)e_i + \omega(e_i)B\big) - \beta\omega(Je_i)JB. \qquad (21.3)$$

قضية 3.1.39. [49] لتكن G زمرة ليي بسيطة قابلة للحل ومترابطة ذات البعد الحقيقي 4. كل جبر ليي على الزمرة G يكافئ واحدا و واحد فقط من الجدول أدناه مرفقا ببُنية هرميسية ملائمة لا متغيرة يسارا

البنية الهرميسية	علاقات قوس لي	$\mathfrak{g}$
$Je_1 = e_2, Je_3 = e_4.$	$[e_1, e_2] = e_2.$	$\mathfrak{rr}_{3,0}$
$Je_1 = e_2, Je_3 = e_4.$	$[e_1, e_2] = e_3.$	$\mathfrak{rh}_3$
$Je_1 = e_4, Je_2 = e_3.$	$[e_1, e_2] = -e_3,\ [e_1, e_3] = e_2.$	$\mathfrak{rr}'_{3,0}$
$Je_1 = e_2, Je_3 = e_4.$	$[e_1, e_2] = e_2,\ [e_3, e_4] = e_4.$	$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$
$J_1e_1 = e_2, J_1e_3 = e_4.$ $J_2e_1 = -e_2, J_2e_3 = e_4.$	$[e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = e_4.$	$\mathfrak{r}'_2$
$Je_4 = e_1, Je_2 = e_3.$	$[e_1, e_4] = -e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,$ $[e_3, e_4] = e_3.$	$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$
$Je_4 = e_2, Je_1 = e_3.$	$[e_1, e_4] = -e_1,\ [e_2, e_4] = e_2,$ $[e_3, e_4] = -e_3.$	$\mathfrak{r}_{4,-1,1}$
$J_1e_4 = e_1, J_1e_2 = e_3.$ $J_1e_4 = e_1, J_1e_2 = -e_3.$	$[e_1, e_4] = -e_1,\ [e_2, e_4] = \delta e_3,$ $[e_3, e_4] = \delta e_2.$	$\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$ $\delta > 0$
$Je_1 = e_4, Je_2 = e_3.$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_3, e_4] = -e_3,$ $[e_1, e_4] = -e_1.$	$\mathfrak{d}_{4,1}$
$J_1e_4 = -e_2, J_1e_1 = e_3.$ $J_2e_4 = -2e_1, J_2e_2 = e_3.$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_3, e_4] = -e_3,$ $[e_1, e_4] = -2e_1,\ [e_2, e_4] = e_2.$	$\mathfrak{d}_{4,2}$
$J_1e_1 = e_2, J_1e_4 = e_3.$ $J_2e_2 = e_1, J_2e_4 = e_3.$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_3, e_4] = -e_3,$ $[e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1,\ [e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2.$	$\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$
$J_1e_1 = e_2, J_1e_4 = e_3.$ $J_2e_1 = e_2, J_2e_3 = e_4.$ $J_3e_2 = e_1, J_3e_3 = e_4.$	$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_4] = -\frac{\delta}{2}e_1 + e_2,$ $.[e_3, e_4] = -\delta e_3,\ [e_2, e_4] = -e_1 - \frac{\delta}{2}e_2$	$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ $\delta > 0$

الجدول 1.3

مبرهنة 3.1.30. بنى فيزمان المعمّمة من النوع (α,β) على جبور لي القابلة للحل ذات البعد الرابع مصنفة في الجدول الموالي

النوع	حقل لي	البنى الهرميسية	$\mathfrak{g}$
$(0,0)$	$B=-e_4$	$Je_1=e_2, Je_3=e_4$	$\mathfrak{rh}_3$
$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$B=-2e_1$	$Je_1=e_2, Je_3=e_4$	$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$
$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$	$B=-2e_1$	$J_1e_1=e_2, J_1e_3=e_4$ $J_2e_1=-e_2, J_2e_3=e_4$	$\mathfrak{r}'_2$
$(-\frac{1}{2},-1)$	$B=2e_4$	$Je_4=e_1, Je_2=e_3$	$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$
$(-\frac{1}{2},-1)$	$B=-2e_4$	$Je_4=e_2, Je_1=e_3$	$\mathfrak{r}_{4,-1,1}$
$(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	$B=-2e_4$	$Je_1=e_3, Je_2=e_4$	$\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$
$(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	$B=-2e_4$	$Je_4=-2e_1, Je_2=e_3$	$\mathfrak{d}_{4,2}$
$(\frac{-\delta}{2(\delta+1)},\frac{\delta}{2(\delta+1)})$	$B=-(1+\delta)e_4$	$J_3e_1=e_2, J_3e_3=e_4$	$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ $\delta>0$
$(\frac{-\delta}{2(\delta-1)},\frac{\delta}{2(\delta-1)})$	$B=(1-\delta)e_4$	$Je_1=e_2, Je_4=e_3$ $Je_1=-e_2, Je_3=e_4$	$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ $\delta\neq 1$

الجدول 2.3

برهان. القضية (3.1.39) تثبت أن كل جبر لي مرفق لزمرة بسيطة وقابلة للحل رباعية البعد بالضرورة فهو مكافئ لجبر واحد من تلك المصنفة في الجدول (1.3)، إذن لإثبات المبرهنة يكفي حساب الحقل B وكذا ∇B لكل بنية مصنفة في الجدول. ثم نستخدم النتيجة (3.1.10) لتأكد من ما إن كانت البنية هي بنية فيزمان معمّمة أم لا، مع حساب المعاملان α وβ إن كانت كذلك.

1. $\mathfrak{rr}_{3,0}$ مع $(Je_1=e_2, Je_3=e_4)$: باستعمال دستور كوزيل، مركبات وصلة ريمان غير المعدومة هي

$$\nabla_{e_2}e_1=-e_2, \quad \nabla_{e_2}e_2=e_1,$$

وباستعمال العلاقة (11.2) نجد

$$B=-J\sum_{i=1}^{4}\nabla_{e_i}(Je_i)-\sum_{i=1}^{4}\nabla_{e_i}e_i=-Je_2-e_1=0.$$

ومنه، نستنتج أن البنية (J,ω,g) كاليرية.

2. $\mathfrak{rh}_3$ مع $(Je_1 = e_2, Je_3 = e_4)$: بنفس الطريقة، باستعمال علاقة كوزيل نجد مركبات وصلة ريمان غير المعدومة كالتالي

$$\nabla_{e_1}e_2 = -\nabla_{e_2}e_1 = \frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1.$$

وباستعمال العلاقة (11.2) نجد

$$B = -e_4, \quad \text{و} \quad \nabla_{e_i}B = 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

بمعنى $\nabla B = 0$ ومنه، نستنتج أن (J, ω, g) هي بنية فيزمان معمّمة من النوع $(0,0)$. أي هي بنية فيزمان بحتة.

3. $\mathfrak{rr}'_{3,0}$ مع $(Je_1 = e_4, Je_2 = e_3)$: باستعمال دستور كوزيل، مركبات وصلة ريمان غير المعدومة تكون كالآتي

$$\nabla_{e_1}e_2 = -e_3, \quad \nabla_{e_1}e_3 = e_2,$$

وباستعمال العلاقة (11.2) نجد

$$B = -J\sum_{i=1}^{4}\nabla_{e_i}(Je_i) - \sum_{i=1}^{4}\nabla_{e_i}e_i = 0.$$

ومنه، نستنتج أن البنية (J, ω, g) هي كاليرية.

4. $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ مع $(Je_1 = e_2, Je_3 = e_4)$: باستعمال دستور كوزيل، نجد مركبات وصلة ريمان كالآتي

$$\nabla_{e_2}e_1 = -e_2, \quad \nabla_{e_2}e_2 = e_1, \quad \nabla_{e_4}e_3 = -e_4, \quad \nabla_{e_4}e_4 = e_3.$$

وفي باقي الحالات تكون معدومة أي $\nabla_{e_i}e_j = 0$.
باستعمال العلاقة (11.2) نجد $B = 0$ ومعناه أن البنية (J, ω, g) كاليرية.

5. $\mathfrak{r}'_2$ مع $(Je_1 = e_2, Je_3 = e_4)$ أو $(Je_1 = -e_2, Je_3 = e_4)$: باستعمال دستور كوزيل، مركبات وصلة ريمان غير المعدومة تكون كالتالي

$$\nabla_{e_2}e_3 = e_4, \quad \nabla_{e_2}e_4 = -e_3, \quad \nabla_{e_3}e_1 = -e_3,$$
$$\nabla_{e_3}e_3 = e_1, \quad \nabla_{e_4}e_1 = -e_4, \quad \nabla_{e_4}e_4 = e_1.$$

وباستعمال العلاقة (11.2) نجد

$$B = -J\sum_{i=1}^{4}\big(\nabla_{e_i}J\big)e_i = -2e_1.$$

من جهة لدينا

$$\nabla_{e_1}B=0,\quad \nabla_{e_2}B=0,\quad \nabla_{e_3}B=2e_3,\quad \nabla_{e_4}B=2e_4.$$

من جهة أخرى، نضع

$$T(e_i)=\alpha\big(-\omega(B)e_i+\omega(e_i)B\big)-\beta\omega(Je_i)B,$$

نقوم بالحساب من أجل كل e_i فنجد

$$T(e_1)=0,\ T(e_2)=-4(\alpha-\beta)e_2,\ T(e_3)=-4\alpha e_3,\ T(e_4)=-4\alpha e_4.$$

وبالتالي يكون $\nabla_{e_i}B=T(e_i)$ مع $i\in\{1,2,3,4\}$. إذا وفقط إذا كان

$$\alpha=\beta=-\frac{1}{2},$$

وهذا معناه أن (J,ω,g) هي بنية فيزمان معمّمة من النوع $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

6. $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$ مع $(Je_1=-e_4,Je_2=e_3)$: باستعمال دستور كوزيل، نجد مركبات وصلة ريمان غير المعدومة كالآتي

$$\nabla_{e_1}e_1=e_4,\qquad \nabla_{e_1}e_4=-e_1,\qquad \nabla_{e_2}e_2=-e_4,$$

$$\nabla_{e_2}e_4=e_2,\qquad \nabla_{e_3}e_3=-e_4,\qquad \nabla_{e_3}e_4=e_3.$$

وباستعمال العلاقة (11.2) نجد

$$B=-J\sum_{i=1}^{4}\big(\nabla_{e_i}J\big)e_i=2e_4.$$

وبالتالي

$$\nabla_{e_1}B=-2e_1,\quad \nabla_{e_2}B=2e_2,\quad \nabla_{e_3}B=2e_3,\quad \nabla_{e_4}B=0.$$

وكذلك لدينا

$$T(e_1)=-4(\alpha-\beta)e_1,\quad T(e_2)=-4\alpha e_2,\quad T(e_3)=-4\alpha e_3,\quad T(e_4)=0.$$

ومنه حتى يكون $\nabla_{e_i}B=T(e_i)$ من أجل $i\in\{1,2,3,4\}$، يجب أن يكون $\alpha=-\frac{1}{2},\beta=-1$.
وهذا معناه أن (J,ω,g) هي بنية فيزمان معمّمة من النوع $(-\frac{1}{2},-1)$.

7. $\mathfrak{r}_{4,-1,1}$ مع $(Je_1 = -e_3, Je_2 = -e_43)$: باستعمال دستور كوزيل، تكون مركبات وصلة ريمان غير المعدومة كالآتي

$$\nabla_{e_1}e_1 = e_4, \qquad \nabla_{e_1}e_4 = -e_1, \qquad \nabla_{e_2}e_2 = -e_4,$$
$$\nabla_{e_2}e_4 = e_2, \qquad \nabla_{e_3}e_3 = e_4, \qquad \nabla_{e_3}e_4 = -e_3.$$

وباستعمال العلاقة (11.2) نجد

$$B = -J\sum_{i=1}^{4}\big(\nabla_{e_i}J\big)e_i = -2e_4.$$

ومنه

$$\nabla_{e_1}B = 2e_1, \quad \nabla_{e_2}B = -2e_2, \quad \nabla_{e_3}B = 2e_3, \quad \nabla_{e_4}B = 0.$$

وكذلك لدينا

$$T(e_1) = -4\alpha e_1, \quad T(e_2) = -4(\alpha-\beta)e_2, \quad T(e_3) = -4\alpha e_3, \quad T(e_4) = 0.$$

حتى يكون $\nabla_{e_i}B = T(e_i)$ من أجل $i \in \{1,2,3,4\}$، يجب ويكفي أن يكون $\alpha = -\frac{1}{2}$،$\beta = -1$. وهذا معناه أن (J,ω,g) هي بنية فيزمان معمّمة من النوع $(-\frac{1}{2},-1)$.

8. $\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$ مع $\delta > 0$: باستعمال دستور كوزيل، نحصل على مركبات وصلة ريمان غير المعدومة وهي

$$\nabla_{e_1}e_1 = e_4, \quad \nabla_{e_1}e_4 = -e_1, \quad \nabla_{e_4}e_2 = -\delta e_3, \quad \nabla_{e_4}e_3 = \delta e_2.$$

بالرجوع إلى [3] نجد أنه يمكن تعريف بنيتين هرميسيتين ملائمتين لا متغيرتين يساريا مختلفتين على هذا الجبر، الأولى $(J_1e_1 = -e_4, J_1e_2 = e_3)$ أما الثاني $(J_2e_1 = -e_4, J_2e_2 = -e_3)$. وفي كلا الحالتين نجد أن $B = 0$. وهذا معناه أن البنية ليست بنية فيزمان معمّمة .

9. $\mathfrak{d}_{4,\lambda}$ مع $\lambda \in \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$: يعرف هذا الجبر بعلاقات أقواس لي التالية :

$$[e_1,e_2] = e_3, \quad [e_3,e_4] = -e_3, \quad [e_1,e_4] = -\lambda e_1, \quad [e_2,e_4] = (\lambda-1)e_2.$$

باستعمال دستور كوزيل، مركبات وصلة ريمان غير المعدومة تكون كالآتي

$$\nabla_{e_1}e_1 = \lambda e_4, \qquad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_3, \qquad \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2, \qquad \nabla_{e_1}e_4 = -\lambda e_1,$$
$$\nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_2 = (1-\lambda)e_4, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_2}e_4 = (\lambda-1)e_2,$$
$$\nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2, \qquad \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1, \qquad \nabla_{e_3}e_3 = e_4, \qquad \nabla_{e_3}e_4 = -e_3.$$

بما أن λ يأخذ ثلاث قيم فإنه يوجد ثلاث حالات قابلة للدراسة.

من أجل $\lambda = 1$ يكون لدينا الجبر $\mathfrak{d}_{4,1}$ مع $(Je_1 = e_4, Je_2 = e_3)$: في هذه الحالة نجد $B = -e_4$. ومنه

$$\nabla_{e_1} B = e_1, \quad \nabla_{e_2} B = 0, \quad \nabla_{e_3} B = e_3, \qquad \nabla_{e_4} B = 0,$$

وبالتالي يكون لدينا جملة المعادلات

$$T(e_1) = (-\alpha + \beta)e_1, \quad T(e_2) = -\alpha e_2, \quad T(e_3) = -\alpha e_3, \quad T(e_4) = 0.$$

والتي تستلزم $\alpha = 0$ و $\alpha = -1$ وهذا تناقض، إذن (J, ω, g) ليست بنية فيزمان معمّمة.

من أجل $\lambda = \frac{1}{2}$ يكون لدينا الجبر $\mathfrak{d}_{4,\frac{1}{2}}$ مع $(Je_1 = e_2, Je_3 = -e_4)$ أو $(Je_1 = -e_2, Je_3 = -e_4)$: إذا كان جبر لي في هذه الحالة مزود بالبنية J المعرفة بـ $Je_1 = e_2, Je_3 = -e_4$ فإن $B = 0$ وبالتالي (J, ω, g) هي بنية كاليرية.
أما إذا كان الجبر مزود بالبنية J المعرفة بـ $Je_1 = -e_2, Je_3 = -e_4$ فإن $B = -2e_4$. ومنه

$$\nabla_{e_1} B = e_1, \quad \nabla_{e_2} B = e_2, \quad \nabla_{e_3} B = 2e_3, \qquad \nabla_{e_4} B = 0,$$

ويكون لدينا جملة المعادلات التالية

$$T(e_1) = -4\alpha e_1, \quad T(e_2) = -4\alpha e_2, \quad T(e_3) = -4(\alpha - \beta)e_3, \quad T(e_4) = 0.$$

وهذا يستلزم $\alpha = -\frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4}$. إذن، نستنتج أن (J, ω, g) هي بنية فيزمان معمّمة من النوع $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

من أجل $\lambda = 2$ يكون لدينا الجبر $\mathfrak{d}_{4,2}$ مع $(Je_1 = e_3, Je_2 = e_4)$ أو $(Je_4 = -e_1, Je_2 = e_3)$: إذا كان جبر لي في هذه الحالة مزودة بالبنية J المعرفة بـ $Je_1 = e_3, Je_2 = e_4$ فإن $B = -3e_4$. ومنه

$$\nabla_{e_1} B = 6e_1, \quad \nabla_{e_2} B = -3e_2, \quad \nabla_{e_3} B = 3e_3, \qquad \nabla_{e_4} B = 0,$$

و بالتالي يكون لدينا

$$T(e_1) = -9\alpha e_1, \quad T(e_2) = -9(\alpha - \beta)e_2, \quad T(e_3) = -9\alpha e_3, \quad T(e_4) = 0.$$

وهذا يستلزم $\alpha = -\frac{2}{3}$ و $\alpha = -\frac{1}{3}$ وهذا تناقض، إذن (J, ω, g) هي ليست بنية فيزمان معمّمة. أما إذا كان الجبر مزود بالبنية J المعرفة بـ $Je_4 = -e_1, Je_2 = e_3$ فإن $B = 0$ وبالتالي (J, ω, g) هي بنية كاليرية.

10. $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ مع $\delta > 0$: يعرف هذا الجبر بعلاقات أقواس لي التالية :

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_4] = -\frac{\delta}{2}e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = -\delta e_3, \quad [e_2, e_4] = -e_1 - \frac{\delta}{2}e_2.$$

باستعمال دستور كوزيل، تكون مركبات وصلة ريمان غير المعدومة كالتالي

$$\nabla_{e_1}e_1 = \frac{\delta}{2}e_4, \qquad \nabla_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_3, \qquad \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2, \qquad \nabla_{e_1}e_4 = -\frac{\delta}{2}e_1,$$

$$\nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, \quad \nabla_{e_2}e_2 = \frac{\delta}{2}e_4, \quad \nabla_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \quad \nabla_{e_2}e_4 = -\frac{\delta}{2}e_2,$$

$$\nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2, \qquad \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1, \qquad \nabla_{e_3}e_3 = \delta e_4, \qquad \nabla_{e_3}e_4 = -\delta e_3,$$

$$\nabla_{e_4}e_1 = -e_2, \qquad \nabla_{e_4}e_2 = e_1, \qquad \nabla_{e_4}e_3 = \nabla_{e_4}e_4 = 0.$$

بالرجوع إلى [3] نجد أن هناك حالتين

- $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ مع $(Je_1 = e_2, Je_3 = -e_4)$ أو $(Je_1 = -e_2, Je_3 = e_4)$: لما نزود هذا الجبر بكلا البنيتين نجد أن
$B = (1-\delta)e_4$ وبالتالي يكون لدينا حالتين
الأولى، إذا كان $\delta \neq 1$، ونجد

$$\nabla_{e_1}B = \frac{\delta}{2}(\delta-1)e_1,\ \nabla_{e_2}B = \frac{\delta}{2}(\delta-1)e_2,\ \nabla_{e_3}B = \delta(\delta-1)e_3,\ \nabla_{e_4}B = 0,$$

و

$$T(e_i) = -\alpha(\delta-1)^2 e_i, i = \overline{1,2}, \qquad T(e_3) = -(\delta-1)^2(\alpha-\beta)e_3, \quad T(e_4) = 0.$$

ومنه (J, ω, g) هي بنية فيزمان معمّمة من النوع $(\frac{-\delta}{2(\delta-1)}, \frac{\delta}{2(\delta-1)})$.
أما الثانية، إذا كان $\delta = 1$ ومنه $B = 0$. أي (J, ω, g) هي ليست بنية فيزمان معمّمة.

- $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ مع $(Je_1 = e_2, Je_3 = e_4)$ في هذه الحالة نجد أن $B = -(1+\delta)e_4$. وبالتالي

$$\nabla_{e_1}B = \frac{\delta}{2}(\delta+1)e_1, \quad \nabla_{e_2}B = \frac{\delta}{2}(\delta+1)e_2, \quad \nabla_{e_3}B = \delta(\delta+1)e_3, \quad \nabla_{e_4}B = 0,$$

و

$$T(e_i) = -\alpha(\delta+1)^2 e_i, i = \overline{1,2}, \qquad T(e_3) = -(\delta+1)^2(\alpha-\beta)e_3, \quad T(e_4) = 0.$$

ومنه (J, ω, g) هي بنية فيزمان معمّمة من النوع $(\frac{-\delta}{2(\delta+1)}, \frac{\delta}{2(\delta+1)})$.

□

ملاحظة 3.1.19. من خلال البرهان الأخير نلاحظ أنه في بعض الحالات يكون $B \neq 0$ و $\nabla B \neq 0$ أي البنية ليست كاليرية ولا بنية فيزمان، وكذلك نجد أن البنية ليست هي بنية فيزمان معمّمة، وإن دل هذا على شيء فإنما يدل على أن مجموعة بنى فيزمان المعمّمة محتواة في مجموعة البنى الكاليرية المحولة محليا.

3.2 نتائج على المنوّعات ذات الركن
Results on corner manifolds

بدأت فكرة البنى المترية التلامسية تقريبا على المنوّعات الريمانية في الستينيات والسبعينيات من القرن الماضي مع العالمان بوشي و وانج، وتمت دراسة هذه المنوّعات أول مرة كنظائر فردية البعد للمنوّعات المركبة تقريبا. وكان ذلك انطلاقا من جُداء المنوّعات ذات البعد الزوجي مع المحور الحقيقي و العكس وعرف هذا المفهوم باسم الجداء الإلتفافي.

في هذا المبحث سنسير على نفس المنهج لكن هذه المرة لإنشاء منوّعة ذات الركن. بعدها، سنطرح مفهوم جديد وهو المنوّعات ذات الأركان. وفي الأخيرا، نقدم علاقات خاصة بالتقوس الريماني وتقوس ريتشي على المنوّعة ذات الركن وكذا على المنوّعة ذات الركن التي تقوسها $\varphi-$مقطعي ثابت. نشير إلى أن هذه النتائج قد نشرت عام 2023 في المجلة المحكمة Communications of the Korean Mathematical Society [8].

3.2.1 جسور نحو البنى ذات الركن Bridges towards corner structures

في هذا المطلب سنعمل على إنشاء جسور، إحداها بين بنى مترية تلامسية تقريبا وأخرى بين بنى مترية تلامسية تقريبا و بنى مركبة تقريبا أو سنتنقل تحديدا من منوّعة كاليرية إلى أخرى ذات الركن، وذلك باستعمال الجداء بين المنوّعات الريمانية الذي قدمه بشوب –أونيل وهو ما يعرف بالجداء الإلتفافي.
نبدأ الآن مع أول إنشاء، والذي سيكون بين منوّعة كاليرية ومنوّعة ذات الركن

من منوّعة كاليرية إلى منوّعة ذات الركن From Kähler manifold to corner manifold

لتكن (N, J, h) منوّعة كاليرية بعدها $2n$، وليكن L مجال مفتوح من $\mathbf{R}$ و ρ دالة لا تنعدم أبدا على L. باعتبار المنوّعة M هي الجداء الإلتفافي $N \times_\rho L$ بعدها $2n+1$ نعرف عليها موترا ريمانيا g، حقلا شعاعيا ξ، شكلا تفاضليا أحاديا η، وموترا φ من النوع $(1,1)$ كالآتي

$$g = h + \mathrm{e}^{2\rho} dt^2, \quad \xi = \mathrm{e}^{-\rho}\partial_t, \quad \eta = \mathrm{e}^{\rho} dt, \quad \varphi X = JX \quad and \quad \varphi\partial_t = 0, \quad (22.3)$$

من أجل كل حقل شعاعي X على N و ∂t يرمز لحقل شعاع الوحدة الوحيد على L.

مبرهنة 3.2.31. البنية $(\varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي بنية ذات الركن على المنوّعة M، حيث $\omega = \mathrm{d}\rho$ و $\psi = grad\rho$.

برهان. لإثبات أن (φ, ξ, η, g) هي بنية ذات الركن على المنوّعة M تحقق أولا من أنها مترية تلامسية تقريبا.
من أجل كل حقلين شعاعيين X وY على N وa وb سلميين من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} \varphi^2(X, a\partial_t) &= \varphi(JX, 0) \\ &= (J^2, 0) \\ &= -(X, 0) \end{aligned}$$

و من جهة أخرى

$$\begin{aligned} (-I + \eta \otimes \xi)(X, a\partial_t) &= -(X, a\partial_t) + \eta(X, a\partial_t)(0, e^{-\rho}\partial_t) \\ &= -(X, a\partial_t) + (0, a\partial_t) \\ &= -(X, 0) \end{aligned}$$

ومنه

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

و كذلك لدينا

$$\begin{aligned} g(\varphi(X, a\partial_t), \varphi(Y, b\partial_t)) &= g((JX, 0), (JY, 0)) \\ &= h(JX, JY) \\ &= h(X, y) \end{aligned}$$

من جهة أخرى

$$\begin{aligned} (g - \eta \otimes \eta)((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) &= g((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t)) - ab\mathrm{e}^{2\rho} \\ &= h(X, Y) \end{aligned}$$

ومنه

$$g(\varphi(X, a\partial_t), \varphi(Y, b\partial_t)) = (g - \eta \otimes \eta)((X, a\partial_t), (Y, b\partial_t))$$

وبالتالي نستنتج أن (φ, ξ, η, g) هي بنية مترية تلامسية تقريبا.
زيادة على ذلك

$$\mathrm{d}\eta = \mathrm{e}^{\rho}\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}t$$

يكافئ

$$\mathrm{d}\eta = -\eta \wedge \mathrm{d}\rho$$

وهذا يستلزم

$$\omega = -\mathrm{d}\rho$$

أيضا، نعلم أن الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي للبنية (φ, ξ, η, g) يعطى بالعلاقة

$$\phi\big((X\ , a\partial t), (Y, b\partial t)\big) = g\big((X, \partial t), \varphi(Y, \partial t)\big),$$

ومنه

$$\begin{aligned}\phi\big((X\ , a\partial t), (Y, b\partial t)\big) &= g\big((X\ , a\partial t), (JY, 0)\big)\\ &= h(X, JY)\\ &= \Omega(X, Y)\end{aligned}$$

وبما أن (N, J, h) منوّعة كاليرية أي $\mathrm{d}\omega = 0$ و $N_J = 0$ فإن $\mathrm{d}\phi = 0$ و $N_\varphi = 0$. نأخذ بعين الإعتبار أن $N_\varphi\big((X\ , a\partial t), (Y, b\partial t)\big) = N_J(X, Y)$.
وعليه نستنتج أن $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي منوّعة ذات الركن. □

والآن مع الإنشاء الآخر، و الذي سيكون من منوّعة $\beta-$كانموتسو إلى منوّعة ذات الركن

من منوّعة $\beta-$كانموتسو إلى منوّعة ذات الركن From $\beta-$Kanmotso manifold to corner manifold

فكرة أخرى نوضح من خلالها كيفية الحصول على منوّعة ذات الركن انطلاقا من منوّعة مترية تلامسية تقريبا أخرى، هذه المرة مع منوّعة $\beta-$كانموتسو، مع العلم أن هذه الأخيرة ماهي إلا تعميم لبنية كانموتسو $(\beta = 1)$ وكذلك بنية ثنائية التماسك $(\beta = 0)$.
والآن، باعتبار $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة $\beta-$ كانموتسو أي منوّعة مترية تلامسية تقريبا تحقق الشرطين $\mathrm{d}\phi = 2\beta\eta \wedge \phi$، و$N^1 = 0$ و$\mathrm{d}\eta = 0$ حيث β دالة ملساء على M. فإنه يمكن إجراء التحويل التالي

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\xi} = \mathrm{e}^{-\rho-\tau}\xi, \quad \tilde{\eta} = \mathrm{e}^{\rho+\tau}\eta, \quad \tilde{g} = \mathrm{e}^{2\rho}g + \mathrm{e}^{2\rho}(\mathrm{e}^{2\tau} - 1)\eta \otimes \eta,$$

حيث ρ وτ هما دالتان قابلتان للتفاضل على M. وبالتالي من أجل كل حقلين شعاعيين X و Y على M يكون لدينا $\tilde{\eta}(\tilde{\xi}) = 1$ و

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) &= \mathrm{e}^{2\rho}g(\varphi X, \varphi Y)\\ &= \mathrm{e}^{2\rho}g(X, Y) - \mathrm{e}^{2\rho}\eta(X)\eta(Y)\\ &= \tilde{g}(X, Y) - \mathrm{e}^{2\rho}\eta(X)\eta(Y) - \mathrm{e}^{2\rho}(\mathrm{e}^{2\tau} - 1)\eta(X)\eta(Y)\\ &= \tilde{g}(X, Y) + \tilde{\eta}(X)\tilde{\eta}(Y)\end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^2X &= \varphi^2X = -X + \eta(X)\xi \\ &= -X + \tilde{\eta}(X)\tilde{\xi}\end{aligned}$$

ومنه نستنتج أن البنية $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$ هي مترية تلامسية تقريبا.
إذا رمزنا بـ $\tilde{\phi}$ للشكل التفاضلي الثنائي الأساسي، فإن

$$\tilde{\phi}(X,Y) = \tilde{g}(X, \tilde{\varphi}Y) = \mathrm{e}^{2\rho}\phi(X,Y),$$

ومنه

$$\mathrm{d}\tilde{\phi} = 2\mathrm{d}\rho \wedge \tilde{\phi} + \mathrm{e}^{2\rho}\mathrm{d}\phi,$$

من جهة أخرى لدينا

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{d}(\rho + \tau) \wedge \tilde{\eta} + \mathrm{e}^{\rho+\tau}\mathrm{d}\eta,$$

مادام (φ, ξ, η, g) بنية $-\beta$ كانموتسو فإن

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{d}(\rho + \tau) \wedge \tilde{\eta}, \\ \mathrm{d}\tilde{\phi} = 2(\mathrm{d}\rho + \beta\eta) \wedge \tilde{\phi}. \end{cases} \tag{23.3}$$

وعليه

$$N_{\tilde{\varphi}} = N_{\varphi} = 0$$

اعتمادا على النتيجتين الأخيرتين نحصل على المبرهنة التالية

مبرهنة 3.2.32. لتكن $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ منوّعة مترية تلامسية تقريبا

- إذا كانت $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة ثنائية التماسك إي $(\beta = 0)$ ،و ρ دالة ثابتة. فإن $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, \tilde{\omega}, \tilde{g})$ هي منوّعة ذات الركن مع $\tilde{\omega} = \mathrm{d}\tau$ و $\tilde{\psi} = \mathrm{grad}\tau$.
- إذا كانت $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ هي منوّعة $-\beta$ كانموتسو مع $\eta = -\frac{1}{\beta}\mathrm{d}\rho$. فإن $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\psi}, \tilde{\eta}, \tilde{\omega}, \tilde{g})$ هي منوّعة ذات الركن مع $\tilde{\omega} = \mathrm{d}\tau$ و $\tilde{\psi} = \mathrm{grad}\tau$.

3.2.2 المنوَّعة ذات الأركان Corners manifold

لتكن $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوّعة ذات الركن تقريبا. نعتبر البنية التلامسية تقريبا التالية

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \quad \tilde{\xi} = \mathrm{e}^{-\sigma}\xi, \quad \tilde{\eta} = \mathrm{e}^{\sigma}\eta, \quad \tilde{g} = \mathrm{e}^{2\sigma}g. \tag{24.3}$$

من أجل كل دالة قابلة للتفاضل σ على M. لنرى إلى أي صنف من المنوّعات تنتمي الخماسية $(M, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$.
أولا، لدينا

$$\mathrm{d}\tilde{\eta} = \mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{d}\sigma \wedge \eta + \mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{d}\eta$$

ثانيا، باعتبار $\tilde{\phi}$ هو الشكل التفاضلي الثنائي الأساسي للبنية $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{g})$، يكون لدينا $\tilde{\phi} = \mathrm{e}^{2\sigma}\phi$ وهذا يستلزم

$$\mathrm{d}\tilde{\phi} = 2\mathrm{e}^{2\sigma}\mathrm{d}\sigma \wedge \phi$$

نضع $\theta = \mathrm{d}\sigma$، مع العلم أن

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta &= \omega \wedge \eta \\ &= \mathrm{e}^{-\sigma}\omega \wedge \tilde{\eta} \end{aligned}$$

فينتج

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{\eta} &= \mathrm{e}^{\sigma}\theta \wedge \eta + \mathrm{e}^{\sigma}\mathrm{d}\eta \\ &= (\theta + \omega) \wedge \tilde{\eta} \end{aligned}$$

وعليه يمكن صياغة التعريف التالي

تعريف 3.2.62. لتكن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوّعة ذات الركن تقريبا، نقول عن M أنها منوّعة ذات الركنين تقريبا، إذا وجد شكل تفاضلي أحادي مغلق θ بحيث

$$\mathrm{d}\eta = (\omega + \theta) \wedge \eta. \qquad \text{و} \qquad \mathrm{d}\phi = 2\theta \wedge \phi$$

إضافة إلى ذلك، إذا كان $N_{\varphi} = 0$ نقول عن M أنها منوّعة ذات الركنين.

كحالة خاصة : إذا كانت $\theta = 0$ فإننا نحصل على منوّعة ذات الركن.
الآن، نفرض أن $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي منوّعة ذات الركن تقريبا. بتطبيق التحويل الذي سبق وعرفناه (24.3)، مرتين متعاقبتين وبتوظيف الدالتين σ و μ، نحصل على التالي

$$\overline{\eta} = \mathrm{e}^{\sigma+\mu}\eta, \qquad \text{و} \qquad \overline{\phi} = \mathrm{e}^{2(\sigma+\mu)}\phi$$

وهذا يستلزم

$$\mathrm{d}\overline{\eta} = (\omega + \theta_1 + \theta_2) \wedge \overline{\eta} \qquad and \qquad \mathrm{d}\overline{\phi} = 2(\theta_1 + \theta_2) \wedge \overline{\phi},$$

حيث $\theta_1 = \mathrm{d}\sigma$ و $\theta_2 = \mathrm{d}\mu$.
بمواصلة تطبيق التحويل (24.3) $p-1$ مرة بالضبط، يمكن تعريف منوّعة ذات p ركن على النحو التالي

تعريف 3.2.63. لتكن $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الركن تقريبا. نقول عن M أنها منوّعة ذات p ركن تقريبا ($p-$*Corner manifold*) إذا وجد $p-1$ شكل تفاضلي أحادي مغلق $\{\theta_i\}$ تحقق التالي

$$\mathrm{d}\eta=\Big(\omega+\sum_{i=1}^{p-1}\theta_i\Big)\wedge\eta, \qquad \text{و} \qquad \mathrm{d}\phi=2\sum_{i=1}^{p-1}\theta_i\wedge\phi$$

حيث $0\leq p\leq n-1$.

إضافة إلى ذلك، إذا كان $N_\varphi=0$ نقول عن المنوّعة M أنها منوّعة ذات p رُكن. ونرمز لها بالرمز $(M,\varphi,\theta_1,...\theta_p,\omega,\eta,g)$.

3.2.3 التقوُّسات على المنوّعات ذات الركن Curvature on corner manifolds

في الختام، نقدم واحدة من أهم النتائج المتوصّل إليها والمتمثلة في مبرهنات تحوي علاقات خاصة بتقوّس ريمان وتقوّس ريتشي للمنوّعات ذات الركن، ومن بينها واحدة تَعرض وتبرهن عبارة التقوّس الريماني وكذا تقوّس ريتشي لمنوّعة فضاء الأشكال ذي الركن، والتي نعني بها المنوّعة ذات الركن التي لها تقوّس $\varphi-$مقطعي ثابت. نبدأ بالقضية التالية:

قضية 3.2.40. لتكن $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الركن، لدينا العلاقات الآتية

$$\begin{aligned}
R(X,Y)\varphi Z &= \varphi R(X,Y)Z+2(\omega\wedge\eta)(X,Y)\big(\omega(\varphi Z)\xi+\eta(Z)\varphi\psi\big)\\
&+ \eta(Y)g(\nabla_X\varphi\psi,Z)\xi-\eta(X)g(\nabla_Y\varphi\psi,Z)\xi, \qquad (25.3)\\
R(\varphi X,Y)Z &= -R(X,\varphi Y)Z+2(\eta\wedge\omega\circ\varphi)(X,Y)\big(\omega(Z)\xi-\eta(Z)\psi\big)\\
&+ \eta(Y)g(\nabla_{\varphi X}\psi,Z)\xi-\eta(Y)\eta(Z)\nabla_{\varphi X}\psi, \qquad (26.3)\\
R(\varphi X,\varphi Y)Z &= R(X,Y)Z+\eta(X)\omega(Y)\big(\omega(Z)\xi-\eta(Z)\psi\big), \qquad (27.3)
\end{aligned}$$

من أجل كل حقول الأشعة X ، Y و Z على M.

برهان. من أجل كل حقول الأشعة X ، Y و Z على M. يعرف التقوس الريماني كالتالي

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z, \qquad (28.3)$$

نستخلص العلاقة الأولى انطلاقا من توظيف عبارة $\nabla\varphi$ في العلاقة (28.3)، وبالتالي يكون لدينا

$$\begin{aligned}
\nabla_X\nabla_Y\varphi Z &= \nabla_X\big((\nabla_Y\varphi)(Z)+\varphi\nabla_YZ\big)\\
&= \big((\nabla_X\eta)(Y)+\eta(\nabla_XY)\big)\big(\omega(\varphi Z)\xi+\eta(Z)\varphi\psi\big)\\
&\quad+\eta(Y)\eta(Z)\big((\nabla_X\varphi)\psi+\varphi\nabla_X\psi\big)+\eta(Y)\big((\nabla_X\omega)(\varphi Z)\xi\\
&\quad+\omega(\nabla_X\varphi Z)\xi+\omega(\varphi Z)\nabla_X\xi+(\nabla_X\eta)(Z)\varphi\psi\big)\\
&\quad+\eta(Y)\eta(\nabla_XZ)\varphi\psi+\eta(X)\big(\omega(\varphi\nabla_YZ)\xi+\eta(\nabla_YZ)\varphi\psi\big)+\varphi\nabla_X\nabla_YZ.
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\nabla_Y\nabla_X\varphi Z &= \big((\nabla_Y\eta)(X)+\eta(\nabla_Y X)\big)\big(\omega(\varphi Z)\xi+\eta(Z)\varphi\psi\big)\\ &\quad+\eta(X)\eta(Z)\big((\nabla_Y\varphi)\psi+\varphi\nabla_Y\psi\big)+\eta(X)\big((\nabla_Y\omega)(\varphi Z)\xi\\ &\quad+\omega(\nabla_Y\varphi Z)\xi+\omega(\varphi Z)\nabla_Y\xi+(\nabla_Y\eta)(Z)\varphi\psi\big)+\eta(X)\eta(\nabla_Y Z)\varphi\psi\\ &\quad+\eta(Y)\big(\omega(\varphi\nabla_X Z)\xi+\eta(\nabla_X Z)\varphi\psi\big)+\varphi\nabla_Y\nabla_X Z.\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\nabla_{[X,Y]}\varphi Z &= (\nabla_{[X,Y]}\varphi)Z+\varphi\nabla_{[X,Y]}Z\\ &= \eta([X,Y])\big(\omega(\varphi Z)\xi+\eta(Z)\varphi\psi\big)+\varphi\nabla_{[X,Y]}Z.\end{aligned}$$

بجمع المعادلات السابقة نجد أن $R(X,Y)\varphi Z$ تعطى بالعلاقة (25.3). أما بالنسبة للثانية، لدينا

$$g\big(R(\varphi X,Y)Z,W\big)=g\big(R(Z,W)\varphi X,Y\big).$$

من أجل كل حقول الأشعة X ، Y ، Z و W على M. إذن باستعمال العلاقة الأولى ينتج

$$\begin{aligned}g\big(R(\varphi X,Y)Z,W\big) &= g\big(\varphi R(Z,W)X,Y\big)\\ &\quad+\eta(Y)\big(\eta(W)g(\nabla_{\varphi X}\psi,Z)-\eta(Z)g(\nabla_{\varphi X}\psi,W)\big)\\ &\quad+\big(\omega(\varphi X)\eta(Y)-\eta(X)\omega(\varphi Y)\big)\big(\omega(Z)\eta(W)-\omega(W)\eta(Z)\big).\end{aligned}$$

إذن، يمكن استنتاج عبارة $R(\varphi X,Y)Z$ والتي تعطى بالعلاقة (26.3).
بالنسبة للعلاقة الأخيرة، نعلم أن

$$g\big(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W\big) = g\big(R(Z,W)\varphi X,\varphi Y\big),$$

بتوظيف العلاقة (25.3) نجد

$$\begin{aligned}g\big(R(\varphi X,\varphi Y)Z,W\big) &= g\big(\varphi R(Z,W)X,\varphi Y\big)\\ &\quad+\eta(\varphi Y)\big(\eta(W)g(\nabla_{\varphi X}\psi,Z)-\eta(Z)g(\nabla_{\varphi X}\psi,W)\big)\\ &\quad+\big(\omega(\varphi X)\eta(\varphi Y)-\eta(X)\omega(Y)\big)\big(\omega(Z)\eta(W)-\omega(W)\eta(Z)\big)\\ &= g\big(R(X,Y)Z,W\big)+\eta(X)\omega(Y)\big(\omega(Z)\eta(W)-\omega(W)\eta(Z)\big).\end{aligned}$$

ومنه عبارة $R(\varphi X,\varphi Y)Z$ تعطى بالعلاقة (27.3). □

كما كان الأمر بالنسبة للمنوّعات المترية التلامسية تقريبا من الأصناف الأخرى، سنطرح هنا مفهوم المنوّعة ذات الركن التي لها تقوس $\varphi-$مقطعي ثابت.

تعريف 3.2.64. لتكن $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الركن، تقوسها $\varphi-$مقطعي ثابت قيمته c. في هذه الحالة نسمي M منوّعة فضاء الأشكال ذي الركن. و نرمز لها بالرمز $M(c)$

مبرهنة 3.2.33. لتكن $(M(c),\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة فضاء الأشكال ذي الركن. إذن تقوسها الريماني يعطى بالعلاقة التالية:

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \frac{c}{4}\big((\varphi^2X\wedge\varphi^2Y)+(\varphi X\wedge\varphi Y)+2g(X,\varphi Y)\varphi\big) \\ &+ 2\mathrm{d}\eta(X,Y)(\xi\wedge\psi)-\eta(X)(\xi\wedge\nabla_Y\psi)+\eta(Y)(\xi\wedge\nabla_X\psi). \end{aligned} \tag{29.3}$$

برهان. إذا كانت $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة ذات الركن وكان H هو تقوّسها $\varphi-$المقطعي، فإنه من أجل كل حقل شعاعي X على M عمودي على ξ لدينا

$$H=K(X,\varphi X)=\frac{g\big(R(X,\varphi X)\varphi X,X\big)}{g(X,X)^2}.$$

وهذا يكافئ

$$-Hg(X,X)^2=g\big(R(X,\varphi X)X,\varphi X\big). \tag{30.3}$$

باعتبار $\mathcal{D}:=\{\bar{X}\in\mathfrak{X}(M)/\eta(\bar{X})=0\}$ مجموعة حقول الأشعة من M العمودية على ξ، إذن يمكن كتابة كل حقل شعاعي X على M بطريقة فريدة على النحو التالي

$$X=\overline{X}+\eta(X)\xi, \tag{31.3}$$

حيث $\overline{X}$ عنصر من $\mathcal{D}$ وبالتالي من أجل كل حقول الأشعة X، Y وZ العلاقات (22.2)، (23.2)، (24.2) تصبح

$$R(\overline{X},\overline{Y})\varphi\overline{Z} = \varphi R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}, \tag{32.3}$$
$$R(\varphi\overline{X},\overline{Y})\overline{Z} = -R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Z}, \tag{33.3}$$
$$R(\varphi\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Z} = R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z}. \tag{34.3}$$

بتوظيف خواص التقوس الريماني و العلاقة (32.3) نجد

$$g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)=g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big), \tag{35.3}$$

و

$$g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)=g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big). \tag{36.3}$$

باستبدال $\overline{X}$ بـ $\overline{X+Y}$، ينتج

$$\begin{aligned}
&-H\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+2g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{X},\overline{Y})+2g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Y},\overline{Y})+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big)\\
&=\frac{1}{2}g\big(R(\overline{X}+\overline{Y},\varphi\overline{X}+\varphi\overline{Y})(\overline{X}+\overline{Y}),\varphi\overline{X}+\varphi\overline{Y}\big)+\frac{1}{2}H\big(g(\overline{X},\overline{X})^2+g(\overline{Y},\overline{Y})^2\big),
\end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا

$$\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}g\big(R(\overline{X}+\overline{Y},\varphi\overline{X}+\varphi\overline{Y})(\overline{X}+\overline{Y}),\varphi\overline{X}+\varphi\overline{Y}\big)\\
=&g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{X}\big)\\
&+g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{Y}\big)\\
&+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{Y}\big)
\end{aligned}$$

بالإستفادة من العلاقات (30.3)، (32.3) و (36.3) ، وتوظيف متطابقة بيونتشي الأولى نحصل على

$$\begin{aligned}
&-H\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+2g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{X},\overline{Y})+2g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Y},\overline{Y})+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big)\\
=&2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+2g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)-g\big(R(\varphi\overline{Y},\overline{X})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)\\
&-g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\varphi\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big),
\end{aligned}$$

باستعمال العلاقتين (34.3) و (35.3) نجد

$$\begin{aligned}
&-H\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+2g(\overline{X},\overline{X})g(X,\overline{Y})+2g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Y},\overline{Y})+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big)\\
=&2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+2g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)\\
&+g\big(R(\varphi\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)\\
=&2g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{X})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)+2g\big(R(\overline{Y},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+3g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)\\
&+g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big). \qquad (37.3)
\end{aligned}$$

عندما نعوض Y بـ $-Y$ في العلاقة (37.3)، ثم نجمع المعادلة الناتجة مع (37.3) نحصل على

$$\begin{aligned}
3g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)\ &+\ g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)\\
&=\ -H\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big). \qquad (38.3)
\end{aligned}$$

بتعويض بـ في المعادلة الأخيرة واستعمال العلاقتين (34.3) و (36.3) ينتج

$$\begin{aligned}
&-H\big(2g(\overline{X},\varphi\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\varphi\overline{Y},\varphi\overline{Y})\big)\\
=\ &-3g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\varphi\overline{Y},\varphi\overline{X}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)\\
=\ &3g\big(R(\varphi\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{X},\varphi\overline{Y}\big)\\
=\ &3g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)+g\big(R(\overline{X},\varphi\overline{Y})\overline{Y},\varphi\overline{X}\big).
\end{aligned}$$

بتوظيف العلاقة (38.3) المعادلة الأخيرة تصبح تكافئ

$$\begin{aligned}&-H\big(2g(\overline{X},\varphi\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\varphi\overline{Y},\varphi\overline{Y})\big)\\&=3g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)-\frac{1}{3}g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)\\&-\frac{H}{3}\big(2g(\overline{X},\overline{Y})^2+g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big).\end{aligned}$$

وعليه

$$4g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{X},\overline{Y}\big)=H\big(g(\overline{X},\overline{Y})^2-3g(\overline{X},\varphi\overline{Y})^2-g(\overline{X},\overline{X})g(\overline{Y},\overline{Y})\big). \quad (39.3)$$

والآن لنحسب

$$g\big(R(\overline{X}+\overline{Z},\overline{Y}+\overline{W})(\overline{X}+\overline{Z}),\overline{Y}+\overline{W}\big)$$

وذلك باستعمال العلاقات (39.3)،(25.3) و (27.3)، فينتج

$$\begin{aligned}&4g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\big)+4g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Y},\overline{Z}\big)\\=\;&H\big(g(\overline{X},\overline{Z})g(\overline{Y},\overline{W})+g(\overline{X},\overline{W})g(\overline{Y},\overline{Z})-3g(\overline{X},\varphi\overline{Z})g(\overline{Y},\varphi\overline{W})\\&-3g(\overline{X},\varphi\overline{W})g(\overline{Y},\varphi\overline{Z})-2g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Z},\overline{W})\big), \quad (40.3)\end{aligned}$$

نبدل بين $\overline{Y}$ و $\overline{Z}$ في المعادلة (40.3)، ثم نطرح الناتج من (40.3) نحصل على

$$\begin{aligned}&g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\big)-g\big(R(\overline{X},\overline{Z})\overline{Y},\overline{W}\big)+2g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big)\\=\;&\frac{3H}{4}\big(g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Z},\overline{W})-g(\overline{X},\overline{Z})g(\overline{Y},\overline{W})+g(\overline{X},\varphi\overline{Z})g(\overline{Y},\varphi\overline{W})\\&-g(\overline{X},\varphi\overline{Y})g(\overline{Z},\varphi\overline{W})-2g(\overline{X},\varphi\overline{W})g(\overline{Z},\varphi\overline{Y})\big),\end{aligned}$$

بتوظيف متطابقة بيونتشي الأولى نجد

$$g\big(R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z},\overline{W}\big)-g\big(R(\overline{X},\overline{Z})\overline{Y},\overline{W}\big)+2g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big)=3g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big),$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}g\big(R(\overline{X},\overline{W})\overline{Z},\overline{Y}\big)\;=\;&\frac{H}{4}\big(g(\overline{X},\overline{Y})g(\overline{Z},\overline{W})-g(\overline{X},\overline{Z})g(\overline{Y},\overline{W})\\&+g(\overline{X},\varphi\overline{Z})g(\overline{Y},\varphi\overline{W})-g(\overline{X},\varphi\overline{Y})g(\overline{Z},\varphi\overline{W})\\&-2g(\overline{X},\varphi\overline{W})g(\overline{Z},\varphi\overline{Y})\big), \quad (41.3)\end{aligned}$$

وعليه، نستنتج

$$\begin{aligned} R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z} &= \frac{H}{4}\big(g(\overline{Y},\overline{Z})\overline{X} - g(\overline{X},\overline{Z})\overline{Y} + g(\varphi\overline{Y},\overline{Z})\varphi\overline{X} - g(\varphi\overline{X},\overline{Z})\varphi\overline{Y} \\ &\quad +2g(\overline{X},\varphi\overline{Y})\varphi\overline{Z}\big), \end{aligned} \tag{42.3}$$

هذه النتيجة أكيد هي محققة فقط من أجل حقول الأشعة العمودية على ξ، لتعميم النتيجة على أي حقول أشعة X، Y و Z على M نستعمل العلاقات (31.3) و (22.2)-(23.2) فنحصل على

$$\begin{aligned} R(\overline{X},\overline{Y})\overline{Z} &= R(X,Y)Z - \big(\omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(Y)\big)\eta(Z)\psi \\ &\quad +\big(\omega(X)\eta(Y) - \omega(Y)\eta(Y)\big)\omega(Z)\xi \\ &\quad -\eta(Y)\big(\eta(Z)\nabla_X\psi - g(\nabla_X\psi,Z)\xi\big) \\ &\quad +\eta(X)\big(\eta(Z)\nabla_Y\psi - g(\nabla_Y\psi,Z)\xi\big) \\ &= R(X,Y)Z - 2\mathrm{d}\eta(X,Y)(\xi\wedge\psi)Z \\ &\quad +\eta(X)(\xi\wedge\nabla_Y\psi)Z - \eta(Y)(\xi\wedge\nabla_X\psi)Z, \end{aligned} \tag{43.3}$$

وأخيرا بالتعويض في العلاقة (42.3) نحصل على العلاقة المطلوبة. □

قضية 3.2.41. لتكن $(M,\varphi,\xi,\psi,\eta,\omega,g)$ منوّعة فضاء الأشكال ذي الركن. إذن تقوس ريتشي S و التقوس السلمي r يعرفان كالتالي:

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= -\frac{c}{2}(n+1)g(X,Y) + \big(\mathrm{div}\psi + \omega(\psi) + \frac{c}{2}(n+1)\big)\eta(X)\eta(Y) \\ &\quad + \omega(X)\omega(Y) + g(\nabla_X\psi,Y), \end{aligned} \tag{44.3}$$

$$r = -nc(n+1) + 2\big(\mathrm{div}\psi + \omega(\psi)\big). \tag{45.3}$$

برهان. البرهان مباشر يكفي استعمال العلاقتين

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n+1} g\big(R(e_i,X)Y,e_i\big), \quad \text{و} \quad r = \sum_{i=1}^{2n+1} S(e_i,e_i).$$

□

3.3 جسور بين المنوّعة ذات الركن و منوّعة فيزمان المعمّمة
Bridges between the corner manifold and the generalized vaisman manifold

أهم ما تضمنته هذه الأطروحة من نتائج أصلية ما كان يدور حول بنيتين ملائمتين على منوّعة ريمانية. الأولى كانت منوّعة فيزمان المعمّمة ذات البُعد الزوجي و الثانية كانت منوّعة الركن ذات البُعد الفردي. في ختام هذه المذكرة نقدم دراسة أصلية عن كيفية إنشاء إحدى هاتين المنوّعتين إنطلاقا من الأخرى و ذلك باستعمال مفهوم الجُداء الإلتفافي.

لتكن $(\mathbb{R}^2, J_0, g_0)$ المنوّعة الكاليرية الاعتيادية حيث $g_0 = dx^2 + dy^2$ و البنية المركبة تقريبا J_0 معرّفة بـ $J_0\partial_x = \partial_y, J_0\partial_y = -\partial_x$ و التي شكلها الثنائي الأساسي هو $\Omega_0 = -2dx \wedge dy$.

مبرهنة 3.3.34. المنوّعة الجُداء الإلتفافي $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_r$ المزوّدة بالموتّرات التالية

$$g = g_0 + \mathrm{e}^{2\rho}dr^2, \quad \xi = \mathrm{e}^{-\rho}\partial_r, \quad \eta = \mathrm{e}^{\rho}dr, \quad \varphi(X, a\partial_r) = (J_0X, 0), \qquad (46.3)$$

حيث ρ دالة ملساء على $\mathbb{R}^2$ و ∂_r هو الحقل الشعاعي المحلي الوحيد على $\mathbb{R}_r$، هي منوّعة ذات الركن.

برهان. بداية لاحظ أن $\eta(\xi) = 1$ و أيضا، من السهولة التحقق من أن $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$.
بالنسبة لشرط التلاؤم لدينا

$$\begin{aligned} g\big(\varphi(X, \partial_r), \varphi(Y, \partial_r)\big) &= g\big((J_0X, 0), (J_0Y, 0)\big) \\ &= g_0(J_0X, J_0Y) \\ &= g_0(X, Y) \\ &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \end{aligned}$$

طبعا لدينا

$$\eta(X) = \mathrm{e}^{\rho}dr(X) = 0.$$

و عليه نقول عن الرباعية (φ, ξ, η, g) أنها بُنية مترية تلامسية تقريبا.
بالإضافة الى ذلك، لدينا $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}\rho \wedge \eta$ هذا ما يستلزم $\omega = \mathrm{d}\rho$.

بالنسبة للشكل الأساسي ϕ للبُنية (φ, ξ, η, g) لدينا

$$\begin{aligned} \phi\big((X\ , a\partial_r), \big(Y, b\partial_r\big)\big) &= g\big((X, \partial_r), \varphi(Y, \partial_r)\big) \\ &= g\big((X, \partial_r), (JY, 0)\big) \\ &= g_0(X, JY) \\ &= \Omega(X, Y) = -2dx \wedge dy, \end{aligned}$$

مباشرة ينتج

$$\mathrm{d}\phi = 0.$$

$\mathrm{d}\phi = 0$ من جهة، و من جهة أخرى و اعتمادا على تعريف الموتّر φ، يمكننا بسهولة الحصول على

$$N_\varphi\big((X\ , a\partial_r), \big(Y, b\partial_r)\big) = N_{J_0}(X, Y) = 0.$$

و بالتالي $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي عائلة من منوّعات ذات الركن. □

الإنشاء الموالي يعتمد على المنوّعة ذات الركن المحصّل عليها في المبرهنة أعلاه لبناء منوّعة فيزمان معمّمة. نعتبر $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ منوّعة ذات الركن حيث $\omega = \mathrm{d}\rho$ مع ρ هي الدالة المعرّفة آنفا على $\mathbb{R}^2$. قصد انجاز المطلوب بأقل مجهود يكفي أخذ $\rho = \rho(x)$.

على $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}_t$ مع $\mathbb{R}_t$ هو المحور الحقيقي الذي حقله الشعاعي المحلي ∂_t، نعرف الموتر المتري الريماني $\tilde{g}$ كمايلي

$$\tilde{g} = g + \mathrm{e}^{2\rho} dt^2, \tag{47.3}$$

حيث X و Y حقلين شعاعيين على M.

هذا معناه أن المصفوفة المرفقة بالموتر الريماني $\tilde{g}$ هي على النحو التالي

$$(\tilde{g}_{ij})_{1\leq i,j\leq 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\rho} \end{pmatrix}.$$

بما أن بُعد المنوّعة الريمانية $\tilde{M}$ هو 4، يمكننا تزويدها ببُنية مركبة تقريبا على النحو التالي:

$$\tilde{J}(X, a\partial_t) = \big(\varphi X - a\mathrm{e}^{\rho}\xi\ ;\ \mathrm{e}^{-\rho}\eta(X)\partial_t\big), \tag{48.3}$$

من أجل كل X حقل شعاعي على M. أي أن

$$\tilde{J}X = \varphi X + \mathrm{e}^{-\rho}\eta(X)\partial_t \qquad \text{و} \qquad \tilde{J}\partial t = -\mathrm{e}^{\rho}\xi.$$

و المصفوفة المرفقة بالموتّر J هي من الشكل

$$(\tilde{J}_{ij})_{1\leq i,j\leq 4} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

بناء على هذه المعطيات، لدينا مايلي

قضية 3.3.42. الثلاثية $(\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ المعرّفة أعلاه هي منوّعة هرميسية تقريبا.

برهان. أولا، باستعمال المصفوفة المرفقة بالموتّر J يمكننا بسهولة التحقق من أن $\tilde{J}^2 = -I$. بالنسبة لشرط التلاؤم، يمكننا توظيف المصفوفات و التحقق من أن $\tilde{J}^t\tilde{g}\tilde{J} = g$ أي أن

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\rho} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\rho} \\ 0 & 0 & -\mathrm{e}^{2\rho} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\rho} \end{pmatrix}.$$

و هو المطلوب. □

قصد تصنيف هذه المنوّعة الهرميسية تقريبا الناتجة نحتاج لحساب الشكل الأساسي $\tilde{\Omega}$ و موتّر نيجن هيز N_J. لاحظ انه يمكننا توظيف الأساس المحلي التالي $\{\partial_x, \partial_y, \partial_r, \partial_t\}$ فينتج

$$\tilde{J}\partial_x = \partial_y, \qquad \tilde{J}\partial_r = \partial_t$$

و بالتالي نحصل مباشرة على

$$\tilde{\Omega} = -2dx \wedge dy - 2\mathrm{e}^{2\rho} dr \wedge dt, \tag{49.3}$$

و عليه نستنتج أن

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = -4\rho' \mathrm{e}^{2\rho} dx \wedge dr \wedge dt,$$

حيث $\rho' = \frac{\partial \rho}{\partial x}$ مع التذكير أننا أخذنا $\rho = \rho(x)$ لتبسيط الحساب و انجاز الإنشاء بأقل مجهود. و بالتالي نجد

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = 2\rho' dx \wedge \tilde{\Omega},$$

نضع $\tilde{\omega} = 2\rho' dx$، فنتحصّل على

$$\mathrm{d}\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\Omega}. \tag{50.3}$$

من جهة أخرى، باستعمال عبارة N_J

$$N_J(\partial_i, \partial_j) = [J\partial_i, J\partial_j] - J[J\partial_i, \partial_j] - J[\partial_i, J\partial_j].$$

من أجل كل $\partial_i, \partial_j \in \{\partial_x, \partial_y, \partial_r, \partial_t\}$.
يمكننا بسهولة التحقق من أن

$$N_{\tilde{J}}(\partial_i, \partial_j) = 0,$$

هذا معناه $N_{\tilde{J}} = 0$.
بتجميع ما سبق من المعلومات نستطيع تقديم المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.3.35. المنوّعة الهرميسية تقريبا $(\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ المعرّفة أعلاه هي منوّعة كاليرية محوّلة محليا مع شكل ليي $\tilde{\omega} = \rho' dx$ إذا و فقط إذا كانت $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي منوّعة ذات الركن.

و نتساءل بعدئذ، من أجل أية شروط إضافية تكون المنوّعة الكاليرية المحوّلة محليا الناتجة هي منوّعة فيزمان المعمّمة؟
الإجابة على هذا التساؤل تستدعي حساب $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{B}$ مع $\tilde{X}$ أي حقل شعاعي على $\tilde{M}$. و عليه، لدينا من أجل كل $\partial_i \in \{\partial_y, \partial_r, \partial_t\}$.

$$\tilde{g}(\tilde{B}, \partial_i) = \tilde{\omega}(\partial_i) = 2\rho' dx(\partial_i) = 0.$$

و أيضا

$$\tilde{g}(\tilde{B}, \partial_x) = 2\rho'.$$

أي أن

$$\tilde{B} = 2\rho' \partial_x.$$

و منه نتحصّل على

$$\tilde{A} = -J\tilde{B} = -2\rho' \partial_y \qquad \text{و} \qquad \tilde{\theta} = \tilde{\omega} \circ J = -2\rho' dy.$$

لاحظ أن

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i}\tilde{B} = 2\tilde{\nabla}_{\partial_i}(\rho' \partial_x) = 2\partial_i(\rho')\partial_x + 2\rho' \tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_x,$$

هذا معناه أننا بحاجة لحساب مركبات وصلة لوفي سيفيتا المرفقة بالمترك الريماني $\tilde{g}$ و تحديد المركبات $\tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_x$ من أجل $\partial_i \in \{\partial_x, \partial_y, \partial_r, \partial_t\}$. من أجل ذلك، سنتعمل دستور كوتزيل

$$2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \partial_i \tilde{g}_{jk} + \partial_j \tilde{g}_{ik} - \partial_k \tilde{g}_{ij}.$$

ببساطة نجد

$$\tilde{\nabla}_{\partial_x}\partial_x = \tilde{\nabla}_{\partial_y}\partial_x = 0,$$

بالنسبة للمركبة $\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_x$ لدينا

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_x, \partial_x) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_x, \partial_y) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_x, \partial_t) = 0,$$

لكن

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_x,\partial_r) &= \partial_x\tilde{g}(\partial_r,\partial_r) \\ &= \partial_x(\mathrm{e}^{2\rho}) \\ &= 2\rho'\mathrm{e}^{2\rho} \\ &= 2\rho'\tilde{g}(\partial_r,\partial_r), \end{aligned}$$

و بالتالي

$$\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_x = \rho'\partial_r.$$

بالمثل نجد

$$\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_x = \rho'\partial_t.$$

و الآن نعود لحساب $\tilde{\nabla}_{(\partial_t,X)}\tilde{B}$. لدينا

$$\begin{cases} \tilde{\nabla}_{\partial_x}\tilde{B} = 2\partial_x(\rho')\partial_x + 2\rho'\tilde{\nabla}_{\partial_x}\partial_x = 2\rho''\partial_x, \\ \tilde{\nabla}_{\partial_y}\tilde{B} = 2\partial_x y(\rho')\partial_x + 2\rho'\tilde{\nabla}_{\partial_y}\partial_x = 0, \\ \tilde{\nabla}_{\partial_r}\tilde{B} = 2\partial_r(\rho')\partial_x + 2\rho'\tilde{\nabla}_{\partial_r}\partial_x = 2\rho'^2\partial_r, \\ \tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{B} = 2\partial_t(\rho')\partial_x + 2\rho'\tilde{\nabla}_{\partial_t}\partial_x = 2\rho'^2\partial_t. \end{cases} \tag{51.3}$$

من جهة أخرى، و حتى تكون المنوّعة الكاليرية المحوّلة محليا هي منوّعة فيزمان معمّمة يجب و يكفي أن يكون

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i}\tilde{B} = f\partial_i + \tilde{\alpha}\tilde{\omega}(\partial_i)\tilde{B} + \tilde{\beta}\tilde{\theta}(\partial_i)\tilde{A},$$

بتعويض $\tilde{B}$، $\tilde{A}$، $\tilde{\omega}$ و $\tilde{\theta}$ يصبح هذا الشرط كمايلي

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i}\tilde{B} = f\partial_i + 4\tilde{\alpha}\rho'^2 dx(\partial_i)\partial_x + 4\tilde{\beta}\rho'^2 dy(\partial_i)\partial_y,$$

مع العلم أن

$$\begin{aligned} f &= -\tilde{\alpha}\|B\|^2 + \tilde{B}\big(\ln(\|B\|)\big) \\ &= -4\tilde{\alpha}\rho'^2 + 2\rho'', \end{aligned}$$

أي الشرط يصبح

$$\tilde{\nabla}_{\partial_i}\tilde{B} = 2(\rho'' - 2\tilde{\alpha}\rho'^2)\partial_i + 4\tilde{\alpha}\rho'^2 dx(\partial_i)\partial_x + 4\tilde{\beta}\rho'^2 dy(\partial_i)\partial_y. \tag{52.3}$$

و الآن من خلال العلاقات (51.3) و (52.3) نتحصّل على جملة المعادلات التفاضلية التالية

$$\begin{cases} \rho'' = 2(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta})\rho'^2 \\ \rho'^2 = \rho'' - 2\tilde{\alpha}\rho'^2. \end{cases} \tag{53.3}$$

بجمع المساوتين ينتج $\tilde{\beta} = -\frac{1}{2}$ و من المساواة الثانية في الجملة نتحصّل على

$$\frac{\rho''}{\rho'^2} = 1 + 2\tilde{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{\rho'}\right)' = -1 - 2\tilde{\alpha},$$

باستعمال التكامل بالنسبة للمتغير x ينتج

$$\frac{1}{\rho'} = -x - 2\int \tilde{\alpha} dx,$$

و باستعمال التكامل مرّة أخرى نجد

$$\rho = -\int \frac{dx}{x + 2\int \tilde{\alpha} dx}.$$

و بهذا نكون قد أثبتنا المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.3.36. المنوّعة الهرميسية تقريبا $(\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ المعرّفة أعلاه هي منوّعة فيزمان معمّمة إذا و فقط إذا كانت $(M, \varphi, \xi, \psi, \eta, \omega, g)$ هي منوّعة ذات الركن مع

$$\rho = -\int \frac{dx}{x + 2\int \tilde{\alpha} dx}.$$

لاحظ أنه من أجل $\tilde{\alpha} = 0$ يمكننا أخذ $\rho = \frac{1}{x}$ و هي عبارة بسيطة للدالة ρ نتحصّل من خلالها على منوّعة فيزمان معمّمة.
كما يمكننا أخذ $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = -\frac{1}{2}$ فيكون $2\int \tilde{\alpha} dx = -x + a$، مع a ثابت حقيقي و بالتالي نحصل على

$$\rho = -\int \frac{dx}{c} = b - \frac{x}{a}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

و تكون بذلك $\rho = x$ هي أبسط عبارة للدالة ρ نتحصّل باستعمالها على منوّعة فيزمان معمّمة.
الخطوة الثالثة سننشئ من خلالها منوّعة ذات الركن أنطلاقا من منوّعة فيزمان المعمّمة المحصّل عليها سابقا مع أخذ $\rho = x$. أي سننشئ بُنية ذات الركن على المنوّعة الجُداء الإلتفافي $\overline{M} = \tilde{M} \times \mathbb{R}_u$.
بداية لاحظ أن منوّعة فيزمان المعمّمة $(\tilde{M}, \tilde{J}, \tilde{g})$ تتمع بالشرطين التاليين

$$N_{\tilde{J}} = 0 \quad \text{و} \quad \mathrm{d}\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\Omega} = 2dx \wedge \tilde{\Omega}.$$

و بالتالي يمكننا ببساطة تبيان أن الشكل الثنائي الأساسي للبُنية الهرميسة $(\tilde{J}, \mathrm{e}^{2x}\tilde{g})$ هو مغلق. هذا معناه أن المنوّعة $(\tilde{M}, \tilde{J}, \mathrm{e}^{2x}\tilde{g})$ هي منوّعة كاليرية.

الآن، نعرّف على المنوّعة $\overline{M}$ البُنية المترية التلامسية التالية

$$\overline{g} = \mathrm{e}^{2x}(\tilde{g} + du^2), \quad \overline{\xi} = \mathrm{e}^{-x}\partial_u, \quad \overline{\eta} = \mathrm{e}^{x}du, \quad \overline{\varphi}(X, a\partial_u) = (\tilde{J}X, 0), \qquad (54.3)$$

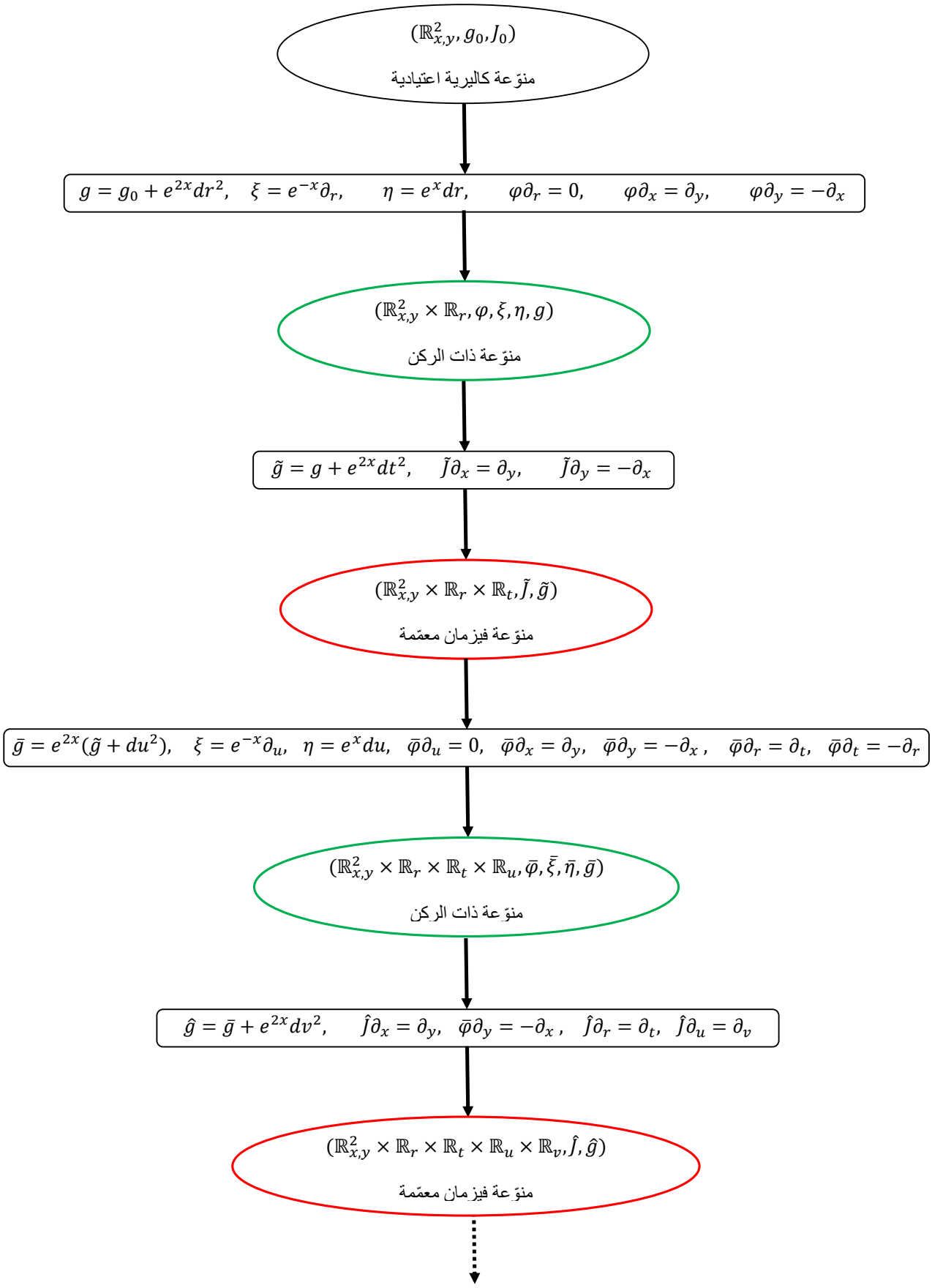
حيث ∂_u هو الحقل الشعاعي المحلي الوحيد على $\mathbb{R}_u$.

بنفس التقنيات المتّبعة في اثبات البرهنة 3.3.34، نثبت أن $(\overline{M} = \tilde{M} \times \mathbb{R}_u, \overline{\varphi}, \overline{\xi}, \overline{\eta}, \overline{g})$ هي منوّعة ذات الركن خماسية الأبعاد.

باستعمال هذه الأخيرة أي المنوّعة ذات الركن خماسية الأبعاد الناتجة و الانشاء المتّبع في الخطوة الثانية (أنظر المبرهنة 3.3.36) نُنشئ مرّة أخرة منوّعة فيزمان سداسية البُعد.

و هكذا بنفس المنطق و المنهجية نستطيع إنشاء سلسلة متتابعة من المنوّعات ذات الركن في كل الأبعاد الفردية و من منوّعات فيزمان المعمّمة في كل الأبعاد الزوجية باستثناء البُعد الثنائي.

في الختام، نشير أن التقنيات المستعملة في هذه الإنشاءات ليست هي الوحيدة، فحتما هناك طرق أخرى. على الأقل من أجل قيم أخرى للدالة ρ، و إنما استعملنا هنا ما رأيناه أبسط و أقصر الطرق.



مخطط إنشاء المنوّعات ذات الركن ومنوّعات فيزمان المعمّمة إحداها من الأخرى باستعمال جُداء المنوّعات الإلتفافي

الخاتمة

خلاصة ما توصلنا إليه هو أن موضوع البُنى الملائمة على المنوّعات الريمانية هو موضوع هام جدا و فسيح، ذلك أن تحضير فضاء و توفير خواصه الهندسية يعتبر أرضية ضرورية لأي بحث علمي. و حسبنا كمثال، المنوّعة الريمانية المزوّدة ببُنية ساساكي و تطبيقاتها في كثير من الميادين.

أملنا مستقبلا أن نواصل دراسة بُنى أخرى على غرار البُنى الذهبية، البُنى ثنائية التلامس، البُنى المركّبة الزائدية، البُنى المركّبة التلامسية... و التعرّف على العلاقات بينها و كيفية إنشاء إحداها من الأخرى باعتبار أنه يمكن تعريف بعضها في آن واحد على نفس المنوّعة الريمانية.

المصطلحات

الإنجليزية	الفرنسية	العربية
trace	trace	أثر
Cartesian coordinates	Coordonnées Cartésiennes	إحداثيات ديكارتية
Orthonormal base	Base orthonormé	أساس متعامد ومتجانس
Local base	Base local	أساس محلي
Global base	Base globale	أساس شامل
Projection	Projection	إسقاط
Trivial, Banal	Trivial	اعتيادي، تافه
homeomorphism	homéomorphisme	تشاكل
Linear map	Application linéaire	تطبيق الخطي
Transition maps	Aplications de changement de cartes	تطبيقات تحويل الإحداثيات
cotangent space	espace cotangent	ثنوي الفضاء المماس
dual space	espace dual	ثنوي فضاء
simpl Lie algebra	algébre de Lie simple	جبر لي البسيط
derived algebra	Algèbre dérivé	جبر مشتق
Reeb vector field	Champ de Reeb	حقل ريب
Killing vector field	Champ de Killing	حقل كيلنغ
Ring	Anneau	حلقة
Chart	Carte	خريطة محلية
Function	Fonction	دالة
Differentiable	Dérivable	قابل للتفاضل
Lie group	Groupe de Lie	زمرة لي
Scalar	Scalaire	سلمي
Conformal scalar	Scalaire conforame	سلمي ملائم

الإنجليزية	الفرنسية	العربية
Volume form	Forme volume	شكل تفاضلي للحجم
Fondamental form	Forme fondamental	شكل أساسي
Closed form	Forme fermée	شكل مغلق
Generating form	Forme génératrice	شكل مولّد
Generating family	Famille génératrice	عائلة مولّدة
Identity element	Elément neutre	عنصر حيادي
Not degenerate	Non dégénérée	غير منحل
Space form	Espace des formes	فضاء الأشكال
Module	Module	فضاء حلقي
Complementary space	Espace complémentair	فضاء متمّم
Tangent space	Espace tangent	فضاء مماس
Integrable	Intégrable	قابل للمكاملة
Lie bracket	Crochet de Lie	قوس ليي
Left invariant	Invariant à gauche	لا متغير من اليسار
Tangent bundle	Fibré tangent	ليف مماس
Diffeomorphism	Difféomorphisme	متشاكل تفاضليا
Connected	Connexe	مترابط
parallelizable	parallélisable	متوازي
Compatible	Compatible	متوافق
Ideal	Idéal	مثالي
Cone	Cone	مخروط
Componets	Composantes	مركبات
Tangent plane	Plan tangent	مستوي مماسي
Linearly independent	Linéairement indépendants	مستقل خطيا
Lie Derivative	Dérivée de Lie	مشتقة ليي
Matrix	Matrice	مصفوفة
Positive definite	Défini positive	معرّف إيجابا
Open set	Ouvert	مفتوح
Coordinates system	systeme de coordonnées	منظومة إحداثيات
Codifferential	Codifferentielle	موافق التفاضل
Torsion Tensor	Tenseur de Torsion	موتّر الفتل
Normal	Normal	ناظمي
Homeomorphic	Homéomorphe	هوميومورفي

المصادر

[1] غ. بلجيلالي، البنى المترية التلامسية تقريبا ثلاثية الأبعاد، جامعة معسكر 2022.

[2] ن. السلمي، الهندسة التفاضلية، مكتبة الرشيد، الرياض 2008.

[3] D. Angella, M. Origlia, Locally conformally Kähler structures on four-dimensional solvable Lie algebras, Complex Manifolds 7, (2020), .1-35 https ://doi.org/101515./coma-2020-0001.

[4] B. Bayour, G. Beldjilali, Ricci solitons on 3-dimensional C_{12}-Manifolds. Balkan Journal of Geometry and its Applications, Vol.27, No.2, (2022), 26-36.

[5] B. Bayour, G. Beldjilali, M. A. Sinacer, Almost contact metric manifolds with certain condition, Annals of Global Analysis and Geometry (2023), https ://doi.org/101007./s10455-023-09917-w.

[6] G. Beldjilali, 3-dimensional C_{12}-Manifolds, Revista Uni. Mat. Argentina,Vol. 67, No.1, (2024), .1-14 https ://doi.org/1033044./revuma.3088 .

[7] G. Beldjilali, Slant curves on 3-dimensional C_{12}-Manifolds, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.27, No.2, (2022), 13-25.

[8] G. Beldjilali, N. Oubbiche, C_{12}-space forms, Commun. Korean Math. Soc. 38 (2023), No. 2, pp. 629–641 https ://doi.org/104134./CKMS.c220210.

[9] R. Bishop , and B. O'Neill, Manifolds of negative curvature, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 46, (1969) 1-49.

[10] D. E. Blair, Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Springer-verlag, Berlin. Heidelberg, New York 1976.

[11] D. E. Blair, J. A. Oubina, Conformal and related changes of metric on the product of two almost contact metric manifolds, Publication Mathematiques, Vol 34 (1990).

[12] D. E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics Vol.203, (2002), Birhauser, Boston.

[13] D. E. Blair, T. Koufogirgos and R. Sharma, A classification of 3-dimensional contact metric manifolds with $Q\varphi = \varphi Q$, Kodai Math. J., **13** (1990), 391-401.

[14] D. E. Blair, The theory of wuasi-Sasaki structures, J. Diff. Geo., 1 (1967) 331-345.

[15] W. M. Boothby and H. C. Wang, On contact manifolds, Ann. of Math. (2) 68 (1958), 721-734.

[16] H. Bouzir, G. Beldjilali, B. Bayour, On Three Dimensional C12-Manifolds. Mediterr. J. Math. 18, 239 (2021). https ://doi.org/101007./s00009-021-01921-3.

[17] C. P. Boyer, K. Galicki, and P. Matzeu, On Eta-Einstein Sasakian Geometry, Comm. Math. Phys., 262 (2006) 177-208.

[18] S. de Candia and M. Falcitelli, Curvature of $C_5 \oplus C_{12}$-Manifolds, Mediterr. J. Math. (2019). https ://doi.org/101007./s00009-019-1382-2.

[19] B. Y. Chen Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds, World Scientific Publishing Company, (2017), 1-84.

[20] B. Y. Chen, Geometry of warped products as Riemanniann submanifolds and related problems, Soochow J.Math. 28 (2002), 125-156.

[21] B. Y. Chen, Rectifying submanifolds of Riemannian manifolds and torqued vector fields. Kragujevac J. Math. 41(1), (2017)93-103.

[22] D. Chinea, C. Gonzalez, A classification of almost contact metric manifolds, Ann. Mat. Pura Appl. 156(4) (1990), 15-36.

[23] U. C. De, B. K. De, Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold. Istanbul Univ. Fen Fak. Mat. Der. 54,(1995)111-117.

[24] U. C. De, M. Tripathi,Ricci Tensor in 3-dimensional Trans-Sasakian manifolds, Kyungbook Math. J. 43(2003), 247-255.

[25] S. Dragomir, L. Ornea, Locally Conformally Kähler Manifolds, Progress in Math., vol. 55, Birkhäuser, 1998.

[26] P. Gauduchon, A. Moroianu, L. Ornea, Compact homogeneous lcK manifolds are Vaisman, Math. Ann. 361 (2015), 1043-1048.

[27] A. Gray and L. M. Hervella, The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 123 (1980), 35-58.

[28] Y. Kamishima, L. Ornea, Geometric flow on compact locally conformally Kähler manifolds, Tohoku Math. J. 57 (2005), 201-221.

[29] K. Kenmotsu, A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J. **24** (1972), 93-103.

[30] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. I, Interscience and Wiley, New York, 1963.

[31] S. Kobayashi et K. Nomuzu, foundations of Differential Geometry, Vol. II, Interscience and Wiley, New York, 1969.

[32] S. Kots, Some theorems on almost Kählerian spaces, J. Math. Soc. Japan, vol. 12(1960), pp. 422-433.

[33] J. Kowolik, On some Riemannian manifolds admitting torse-forming vector fields. Dem. Math. .18 3, (1985) 885-891.

[34] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses universitaires de Grenoble(Grenoble), 1996.

[35] J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Second Edition, New York, 2013.

[36] P. Libermann, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales régulières. Ann. Mat. Pura Appl. 36 (1954), .27-120 (In French).

[37] G. D. Ludden, Submanifolds of cosymplectic manifolds, J. Diff. Geo., 4(1970), 237-244.

[38] J. C. Marrero, The local structure of Trans-Sasakian manifolds, Annali di Matematica Pura ed Applicata , Vol 162, Issue 1, (1992),77-86.

[39] A. Morimoto, Structures complexes sur les groupes de Lie semi-simples , C.R., 242 (1956), .1101-1103

[40] A. Moroianu, Compact lcK manifolds with parallel vector fields, Complex Manifolds 2 (2015), 26-33.

[41] K. Ogiue, On almost contact manifolds admiting axiom of planes or axion of free mobility, Kodai Math. Sem. Rep., 16(1964), 223-232.

[42] B. O'neill, Semi-Riemannian geometry, Acad. Press, New York, 1983.

[43] Z. Olszak, Curvature properties of four-dimensional Hermitian manifolds, Ann. Soc. Math. Polonae, Series 1, commentations mathematicae XXVII (1987), 169-179.

[44] Z. Olszak, Normal almost contact manifolds of dimension three, Annales Pol. Math. XLVII (1986), 41-50.

[45] L. Ornea and M. Verbitsky, Structure theorem for compact Vaisman manifolds, Math. Res. Lett. 10 (2003), 799-805.

[46] L. Ornea and M. Verbitsky, Locally conformally Kähler manifolds with potential, athematische Annalen, **148**, (2010), 25-33.

[47] N. Oubbiche, G. Beldjilali, H.Bouzir, A.Delloum, New Class of Locally Conformal Kähler Manifolds, Mediterr. J. Math. (2023).

[48] J. A. Oubiña, New classes of almost contact metric structures, Publ. Math. Debrecen, **32**, (1985), 187-193.

[49] G. Ovando, Complex, symplectic and Kähler structures on four dimensional Lie groups, Rev. Un. Mat. Argentina 45, no. 2,(2004), 55-67.

[50] J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus, Invariants of real low dimension Lie algebras, J. Mathematical Phys. 17, (1976), 986-994.

[51] H. Samelson, A class of complex-analytic manifolds, Port. Math., (1953), 129 - 132.

[52] A. Sharfuddin, S. I. Husain, Almost contact structures induced by a conformal transformation, Pub. Inst. Math., T. 32 (46), (1982),155-159.

[53] M. Shoeb, M.H. Shahid, A. Sharfuddin, On submanifolds of a Cosymplectic manifold. Soochow J. Math **27**, (2001),161-174 .

[54] M. L. Sinacer, G. Beldjilali, B. Bayour, H. Bouzir, Generalized Tran-Sasakian manifolds, Differential Geometry and its Aplications 87 (2023), 101-976.

[55] T. Tshikuna-Matamba, Quelques classes des variétés métriques à 3-structures presque de contact, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 31, (2004), 94-101.

[56] I. Vaisman, A survey of generalized Hopf manifolds, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino 1983, Special Issue (1984) 205-221.

[57] I. Vaisman, Conformal Changes of Almost Contact Metric Structures, Lecture Notes in Mathematics,vol .792 Springer, Berlin, Heidelberg. https ://doi.org/101007./BFb0088694.

[58] I Vaisman, Locally conformal Kähler manifolds with parallel Lee form, Rend. Mat. (6) 12 (1979), no. 2, 263-284.

[59] I. Vaisman, On locally conformal almost Kähler manifolds. Isr. J. Math. 24 (1976), 338-351.

[60] H. C. Wang, Closed manifolds with homogeneous complex structure, Amer. J. Math., 76 (1954), 1-37.

[61] S. Yamaguchi, Kählerian torse forming vector fields. Kodai Math. J. 2 (1979), 103-115.

[62] S. Yamaguchi, , W. N. Yu, Geometry of holomorphically subprojective Kählerian manifolds. Annali di Matematica 121, 263-276 (1979). https ://doi.org/101007./BF02412007.

[63] K. Yano, M. Kon, Structures on Manifolds, Series in Pure Math., World Sci, Vol **3** (1984).

[64] K. Yano, On the torse-forming directions in Riemannian spaces. Proc. Imp. Acad. Tokyo. 20, (1944), 340-345 .