

République Algérienne Démocratique Et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
**Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche
scientifique**
جامعة مصطفى اسطمبولي معسكر

Université Mustapha STAMBOULI de Mascara



Faculté des sciences et de la technologie

Département de Génie Mécanique

Polycopié de Cours et travaux pratiques

Module :

**Modélisation et simulation des
matériaux.**

Présenté par :

Dr. DRAI Ahmed

**Ce cours est destiné aux étudiants de Master
et classes d'ingénieurs en Génie Mécanique.**

Option : Génie des Matériaux et autres.

2024

Présentation de l'unité d'enseignement :

Modélisation et simulation des matériaux

Objectifs de l'enseignement:

En sciences techniques, la complexité pratique des problèmes nécessite le recours aux méthodes numériques. En mécanique des matériaux, la méthode universellement utilisée est celle des éléments finis. Elle permet à l'étudiant une connaissance de la modélisation et de la démarche par éléments finis et elle lui donne la capacité nécessaire de pouvoir utiliser des logiciels de calculs pour la résolution de problèmes liés au comportement des matériaux. Cette composante qui s'appuie sur des éléments de l'analyse numérique, a pour objectif d'initier l'étudiant à la simulation et à la modélisation des comportements mécaniques de matériaux. Elle a pour but la présentation de procédures de calculs pour l'étude préliminaire et conceptuelle, des codes de machines et d'analyses initiales et de techniques expérimentales de performances des matériaux.

Unité d'enseignement: UEM 1.2

Matière: Modélisation et simulation des matériaux

VHS: 45h (Cours: 1h.30, TP: 1h30)

Crédits: 4

Coefficient:2

Cette formation a pour objectif de former des spécialistes de haut niveau dans le domaine de la modélisation et simulation en mécanique, avec apprentissage poussé d'un code industriel, des matériaux et des structures. Le titulaire du master possède une solide formation dans les domaines de la mécanique des milieux continus et la modélisation pour la mécanique, ainsi qu'aux techniques les plus avancées en simulation numérique. Il a également une bonne pratique de la simulation sur ordinateurs.

Connaissances préalables recommandées:

Mécanique des milieux continus, méthodes numériques, simulation numérique par codes de calcul en éléments finis et maîtrise d'un code de calcul (Marc, Abaqus, Ansys...etc.)

Contenu de la matière:

- I. Rappels sur la Mécanique des milieux continus :
 - Formulations compatibles des éléments : solide, poutre, plaque et coque.
 - Corps axisymétriques avec les chargements généraux.
 - Problèmes de contraintes et déformations, analyses dynamique et statique.
 - Formulation Problèmes de contraintes, de déplacement et Formulations mixtes.
- II. Rappels sur le comportement mécanique des matériaux et rhéologie des solides
 - I. Identification analytique et expérimentale des lois de comportement
 - II. Modélisation et simulation numérique par éléments finis
- III. Approche directe d'analyse matricielle, principe d'énergie potentielle minimum et théorie de Rayleigh-Ritz.
- IV. Méthodes de moindre carrée.
- V. Formulation de quelques modèles phénoménologiques des lois de comportement pour les élastomères.
- VI. Caractérisation et identification des paramètres mécanique de ces modèles en travaux pratiques par un code de calcul (ex. Marc. Msc. Mentat)
- VII. Comparaison avec les résultats expérimentaux

Table des matières

Avant propos	01
Introduction générale	03
1^{ère} PARTIE : « COURS DE MODELISATION ET SIMULATION DES MATERIAUX »	
CHAPITRE I. RAPPELS DE QUELQUES ELEMENTS DE LA MECANIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES.	
I.1. Introduction	06
I.2. Mécanique des corps rigides	06
I.3. Mécanique des solides déformables	06
I.4. Analyse des contraintes et déformations	07
I.4.1. Notion de contrainte	07
I.4.2. Contrainte, déformation et déplacement	07
I.4.2.1. Déplacement	07
I.4.2.2. Contrainte	08
I.4.2.3. Déformation	08
I.4.2.4. Loi géométrique	09
I.4.2.5. Équation du mouvement	10
I.4.2.6. Équations constitutives	10
I.5. Formulation de l'hypothèse des petites perturbations	11
I.5.1. élasticité linéaire isotrope	11
I.5.2. Relations contrainte élastique – déformation	11
I.5.2.1. Isotrope	11
I.5.2.2. Homogène	11
I.5.2.3. Loi de Hooke généralisée	12
I.5.2.4. Contraintes planes	15
I.5.2.5. Déformation plane	15
I.5.3. Constantes élastiques	15
I.5.4. Relation entre les constantes élastiques	16
I.5.4.1. Relation entre E, G et μ	16
I.5.4.2. Relation entre E, K et μ	18
I.5.4.3 Relation entre E, G et K	19
I.5.4.4 Relation entre E, G et γ	19
I.5.5. Note d'ingénierie sur les constantes élastiques	19
I.5.5.1. Détermination du coefficient de Poisson	19
I.5.6. Caractéristiques des matériaux	20
I.5.6.1. Propriétés mécaniques	20
I.5.6.1.1. Statique	20
I.5.6.1.2. Dynamique	20
I.5.6.1.3. Fatigue	20
I.5.6.2. Test de traction uniaxiale	21
I.5.6.2.1. Eprouvette I	21
I.5.6.2.2. Eprouvette II	21
I.5.6.3. Contrainte nominale – Déformation ou contrainte conventionnelle – Diagrammes de déformation	22
I.5.6.4. Courbe vraie Contrainte-déformation	22
I.5.6.5. Points importants de la courbe	22
I.5.6.6. Pourcentage d'allongement 'δ'	23
I.5.6.7. Action élastique	24

I.5.7. Matériaux ductiles	24
I.5.8. Matériaux ductiles	24
I.5.9. Matériaux fragiles	24
I.5.10. Conditions influant sur les propriétés mécaniques	25
I.6. Dureté (Hardness)	25
I.6.1. Essais d'indentation de balle (dureté)	25
I.7. Résistance aux chocs	27
Annexes	27
I.A. Équations de la mécanique des milieux continus en coordonnées cartésiennes	27
I.B. Équations de la mécanique des milieux continus en coordonnées cylindriques	29

CHAPITRE II. COMPORTEMENT MECANIQUE ET CLASSIFICATION RHEOLOGIQUE DES MATERIAUX.

II.1. Introduction	30
II.2. Comportement élastique	30
II.2.1. Domaine de validité et d'emploi	30
II.2.2. Formulation	31
II.2.3. Potentiel thermodynamique	31
II.2.4. Elasticité linéaire isotrope	32
II.3. Cas de l'hypothèse des contraintes planes	33
II.4. Généralisation	34
II.5. Schématisation des comportements réels	35
II.5.1. Modèles analogiques	35
II.5.2. Solide rigide et fluide parfait	36
II.5.3. Fluide visqueux	36
II.5.4. Solides élastiques	37
II.5.4.1. Solide élastique parfait	37
II.5.4.2. Solide viscoélastique	37
II.5.5. Solides plastiques	38
II.5.5.1. Solide rigide parfaitement plastique	38
II.5.5.2. Solide élastique parfaitement plastique	38
II.5.5.3. Solide élasto-plastique écrouissable	39
II.5.6. Solides viscoplastiques	40
II.5.6.1. Solide parfaitement viscoplastique	40
II.5.6.2. Solide élastique parfaitement viscoplastique	41
II.5.6.3. Solide élasto-visco-plastique écrouissable	41
II.5.7. Caractérisation de l'écrouissage	42
II.5.7.1. Ecrouissage isotrope	42
II.5.7.2. Ecrouissage cinématique	42

CHAPITRE III. METHODES D'IDENTIFICATION DE COMPORTEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX.

III.1. Introduction	44
III.2. Méthodes d'identification des paramètres mécaniques des matériaux	44
III.2.1. Méthodes statiques	44
III.2.1.1. Cas de l'élasticité linéaire isotrope	44
III.2.1.2. Cas de l'élasticité orthotrope	44
III.2.2. Méthodes dynamiques	45

III.3. Techniques et Méthode phénoménologique globale	46
III.4. Méthodes expérimentales	47
III.4.1. Essais de caractérisation	47
III.4.2. Essai d'écroutissage en traction ou compression simple	48
III.4.3. Essai de fluage en traction ou compression simple	49
III.4.4. Essai de relaxation en traction ou compression simple	49
III.4.5. Essai d'écroutissage-relaxation multiple	50
III.4.6. Essais cycliques	50
III.4.7. Essais de rupture	50
III.4.8. Essais multidimensionnels	51
III.4.9. Problème des matériaux anisotropes	51
III.5. Formulation en contraintes et déformations des essais	51
III.5.1. Machines d'essais	51
III.5.2. Essais unidimensionnels monotones et cycliques	51
III.5.3. Essais multidimensionnels	52
III.5.3.1. Essais en traction-compression-torsion interne ou externe d'éprouvettes cylindriques creuses	53
III.5.3.2. Essais en traction-compression-torsion sur éprouvettes cylindriques creuses	53
III.5.4. Essais bi-axiaux sur éprouvettes cruciformes	54
III.5.5. Essais en compression triaxiale	54
III.6. Techniques de mesure des variables caractéristiques	55
III.6.1. Forces et contraintes	55
III.6.2. Déplacements et déformations	55
III.6.3. Déformation plastique : Longueur utile des éprouvettes	55
III.7. Technique de la température	57
III.8. Endommagement	58
III.8.1. Longueur ou surface de fissure	58
III.9. Mesures optiques	58
III.9.1. Jauges à fils coupés	58
III.9.2. Méthode du potentiel	58
III.10. Eprouvettes	59
III.11. Méthodes d'identification analytiques	60
III.11.1. Formulation analytique des modèles	61
III.11.2. Rapport qualité-prix	61
III.11.3. Modélisation des non-linéarités	61
III.11.4. Règle de cumul linéaire	62
III.12. Dispersion, coefficients aléatoires	63
III.13. Méthodes d'identification numériques	64
III.13.1. Généralités	64
III.13.2. Méthode des moindres carrés linéaire	65
III.13.3. Méthode de Gauss-Newton	66
III.13.4. Variation des paramètres caractéristiques en fonction de la température	67
III.13.5. Méthode des éléments finis	68
III.13.5.1. Notions sur la méthode des éléments finis	68
III.13.5.3. Assemblage	70
2^{ème} PARTIE : TRAVAUX PRATIQUES. CHAPITRE IV. SIMULATION	72
NUMERIQUE DES PARAMETRES MECANIQUE DES MATERIAUX:	
CAS DES ELASTOMERES.	

IV.1. Définition des matériaux hyperélastiques	72
IV.2. Etat d'art sur les méthodes d'identification des paramètres mécaniques des matériaux	72
IV.3. Relation contrainte-déformation à partir de la fonction de densité d'énergie de déformation	74
IV.4. Identification des paramètres de modèle « d'Ogden »	76
IV.4.1. Modèle analytique d'Ogden	76
IV.4.2. Identification des coefficients du modèle « d'Ogden »	76
IV.4.2.1. Tube cylindrique en caoutchouc	76
IV.4.3. Compression d'un tube cylindrique	76
IV.4.3.1. Données expérimentales du matériau	77
IV.4.3.2. Effet du maillage	77
IV.4.4. Compression d'un tube cylindrique sous une pression interne	78
IV.5. Identification des paramètres de modèle de « Mooney 2 »	81
IV.5.1. Modèle de « Mooney 2 »	81
IV.5.2. Essais expérimentaux	82
IV.5.3. Flexion d'une poutre arc en caoutchouc	83
IV.5.3.1. Distribution de la contrainte équivalente	84
IV.5.3.2. Identification des constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de test uni-axial	85
IV.5.3.3. Identification les constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de test bi-axial	86
IV.5.3.4. Identification les constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de test cisaillement plan	87
IV.5.3.5. Identification les constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de 03 tests : uni-axiaux, bi-axial et cisaillement plan	88
IV.5.3.6. Conclusion	89
IV.6. Identification des paramètres de modèle Arruda – Boyce	90
IV.6.1. Introduction	90
IV.6.2. Expressions alternatives du modèle Arruda-Boyce	91
IV.6.3. Condition de cohérence	91
IV.6.4. Relations contrainte-déformation	92
IV.6.5. Extension ou traction uni-axiale	92
IV.6.6. Extension équibi-axiale	92
IV.6.7. Cisaillement plan	93
IV.6.8. Identification les constantes de modèle « d'Arruda-Boyce » utilisant les données de la traction uni-axial	93
IV.6.9. Identification les constantes de modèle « d'Arruda-Boyce » utilisant les données des 03 tests	94
IV.6.8. Conclusion	95
V. Références bibliographiques	97

Avant-propos

Avant-propos

Conforme aux programmes LMD (Licence-Master-Doctorat) défini par arrêté ministériel du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique, Ce support de cours de *modélisation et simulation des matériaux* s'adresse aux étudiants de première et deuxième année Master de la filière de Génie Mécanique, option de Génie des matériaux et construction mécanique du domaine des sciences et techniques (ST), de l'université Mustapha STAMBOULI de Mascara et autres universités. Il est conçu de façon à résoudre les difficultés inhérentes au discours scientifique dans cette branche d'identification et de simulation numérique tout en conservant la rigueur nécessaire. Cet ouvrage conçu pour le module de *modélisation et simulation des matériaux*, présente l'ensemble des notions base de ce cours et des travaux pratiques abordées en simulation des matériaux, et résume les méthodes d'identification expérimentales et numériques des lois de comportement et les paramètres mécaniques des matériaux durant la première année et deuxième année de Master Génie mécanique (option génie des matériaux en première degré et construction mécanique), et même de l'utiliser dans ses projets de fin d'études et ses recherches en Doctorat pour simuler les caractéristiques des différents matériaux. Ainsi des applications par le code de simulation numérique Marc Msc. Mentat sont proposés en fin de ce polycopie permettent à l'étudiant de tester ses connaissances et de se préparer aux examens de ses études en Génie des Matériaux surtout en post-graduation et en Doctorat.

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur les notions de base de la mécanique des milieux continus d'une manière générale. L'objectif de cette partie est d'introduire des définitions claires et des notations appropriées sur les problèmes des matériaux déformables.

Le deuxième chapitre est dédié à rappeler d'une façon général le comportement des différents matériaux. Son but est de décrire les différentes lois de comportement puis nous nous intéressons à la classification de la rhéologie des matériaux et les notions des modèles rhéologiques des solides réel, linéaires et non linéaires.

Suite à l'intérêt de l'identification des paramètres mécanique dans n'importe étude de modélisation des solides déformables, le troisième chapitre est dédié aux méthodes analytiques, expérimentales et numériques utilisé pour identifier les lois de comportement. Il est consacré à illustrer l'identification des paramètres mécanique des matériaux. Une grande importance est donnée aux essais mécaniques, la méthode de moindres carrées et la méthode des éléments finis.

Le quatrième chapitre a pour objectif d'orienter le lecteur vers les méthodes et les techniques numériques de caractérisation des matériaux. Des applications importantes par le code de simulation numérique 'Marc Msc. Mentat' pour identifier les paramètres mécanique des matériaux élastomères.

Le cours présenté dans ce polycopié est le fruit de huit ans d'enseignement et d'encadrement dans le domaine de la mécanique des solides déformables et l'identification des lois de comportement des matériaux, il est dispensé aux étudiants élèves-ingénieurs d'ancien système et les étudiants de master et doctorat en génie mécanique d'une façon générale, et

Avant-propos

spécialement en Génie des Matériaux du système LMD et classes des ingénieurs en génie mécanique à l'université Mustapha STAMBOULI de Mascara et autres universités.

Ce support, dans sa 1ère version, peut contenir des fautes d'ordre scientifiques ou techniques d'inattention, de frappe, des fautes d'orthographe...

Je remercie mes chers lecteurs de m'en les faire part. Ainsi, leurs questions et leurs suggestions seront les bienvenus en vue d'améliorer le contenu et la forme de ce présent support.

Je remercie bien mes chers collègues et professeurs ; Abdelhak Benaoum, Mohammed Lasheb, Ahmed Amine Daikh, Benaoumeur Aour, Noureddine Della, Abderrahmane Aissa, Noureddine Bouelem, Abbess Ouadeh, Ali Merdji, Laid Aminallah, Habib Khellafi, Habib Houari, Abdelkader Ghazi, Mostefa Bendouba, Ali Benhamena, Sid Ahmed Houari, et tous les enseignants de département de Génie Mécanique et de l'université de Mascara, sans oublier bien sûr notre cher professeur de l'université de Biskra Monsieur Mohamed Oudjedi Belarbi.

Mes grands remerciements à mes amis, surtout, Hachemi G. Yacine B., Kader F., Ilies D., Oussama B., Walid M., Djalil H. et Sofiane A., durant la préparation et la rédaction de ce support de cours.

J'espère bien que ce support de cours soit à la hauteur pour mes chers collègues et de mes chers étudiants pour leurs aider à bien connaître la mécanique des solides déformables et l'identification des lois de comportement.

Introduction générale

L'ingénieur mécanicien a besoin de connaître le comportement mécanique des matériaux utilisés pour concevoir diverses structures. Ce sont les essais mécaniques qui peuvent lui fournir ces données nécessaires. Elles sont tout d'abord indispensables pour la mise au point des procédés de mise en forme. En effet, si, pendant longtemps, l'empirisme et l'habitude suffisaient pour mener les opérations de laminage, de filage, d'extrusion, de forgeage, d'usinage, etc., l'augmentation de la dimension des demi-produits, les exigences accrues de qualité et de précision, les économies d'énergie à réaliser concourent à rendre nécessaires les calculs détaillés de ces diverses opérations. Il est évident qu'ils ne peuvent être menés à bien sans une connaissance précise des lois de comportement mécanique des matériaux faisant intervenir la vitesse de sollicitation et la température, ainsi que les interactions entre les propriétés mécaniques et les évolutions de la structure microscopique.

Les propriétés mécaniques des matériaux sont d'un grand intérêt puisqu'elles conditionnent non seulement les problèmes de mise en forme des matériaux mais également leur comportement en service dans des applications industrielles extrêmement diversifiées. Le choix du matériau d'une pièce industrielle dépendra de propriétés mécaniques, résistance, dureté, ductilité ...etc. Il est donc nécessaire de mesurer ces grandeurs physiques par des essais mécaniques. A titre d'exemple, L'essai de traction est le procédé expérimental le plus largement utilisé dans l'étude du comportement mécanique, il permet l'étude des propriétés mécaniques de base.

La plupart des matériaux solides ont un comportement élastique, que l'on va caractériser par une déformation proportionnelle à la contrainte appliquée (comme un ressort parfait où l'allongement relatif est proportionnel à la force de traction). Cependant, lorsque les forces augmentent, la déformation peut devenir irréversible (et l'on parlera de plasticité ou de viscoélasticité), elle peut engendrer des microfissures (endommagement) ou encore donner lieu à une fracture. La formalisation de ces notions en une description mathématiquement et physiquement satisfaisante est tout l'art de la mécanique des solides.

Les lois de comportement donc sont le reflet des propriétés mécaniques d'un matériau et sont aussi des données d'entrée indispensables pour les logiciels de simulation par éléments finis. Pour pouvoir identifier le comportement d'un matériau, il existe plusieurs méthodes (traction statique, barres Hopkinson...) mais la plupart de ces essais sont coûteux et exigent des dimensions spécifiques d'éprouvettes.

Une loi de comportement a pour objet de rendre compte de la manière dont se déforme un volume élémentaire de solide dans une histoire de sollicitation. L'aspect historique est important car souvent le passé influe très sensiblement sur le présent (par le biais des déformations irréversibles ou de l'endommagement subis par le volume considéré). Elle a l'intérêt majeur d'être intrinsèque, générique et de pouvoir rendre compte de toutes les actions (ou au moins un ensemble représentatif d'entre elles) auxquelles est soumis un volume élémentaire représentatif du milieu. Ainsi il sera possible de prédire le comportement d'un solide de géométrie arbitraire et soumis à des efforts ou des déplacements imposés divers.

L'objectif est donc de présenter le formalisme et les bases physiques des principales lois utilisées pour décrire le comportement mécanique des différentes classes de matériaux (métaux, céramiques, polymères).

Il est donc nécessaire de disposer d'une évaluation quantitative des paramètres de la loi de comportement du matériau de façon à déterminer une géométrie qui garantira une certaine durée de vie à l'objet. De plus, cette quantification doit généralement être validée, d'abord sur des échantillons de géométries simples, puis par des tests sur l'objet dans sa forme finale ou proche de celle-ci. Aujourd'hui, on a également souvent recours à la simulation numérique à des fins de tests virtuels pour diminuer le nombre d'essais effectués dans la phase de conception.

Pour quantifier les paramètres d'une loi de comportement, la stratégie classique consiste à concevoir des géométries d'éprouvette (échantillon du matériau à étudier) et des sollicitations telles que les champs de déformation et de contrainte soient les plus homogènes possibles. Ainsi, on pourra apprécier, par le biais de quelques mesures locales ou globales, ces états de contraintes et de déformation et donc construire facilement la loi de comportement. La puissance des techniques de mesures de champ est alors de pouvoir aborder le problème de la mesure de la loi de comportement dans un cadre plus large d'essais mécaniques, sans recourir à une exigence d'homogénéité.

Le cœur du problème n'est que très rarement concentré sur l'évaluation des déplacements en tant que tels. La finalité la plus fréquente est d'appréhender les paramètres intrinsèques (du matériau) qui vont caractériser son comportement mécanique, opération que l'on qualifie souvent « d'identification ». L'identification fait intervenir le cadre générique formel d'une loi de comportement. L'expérience nous a appris à distinguer quelques grandes familles de comportement. Selon le caractère réversible (ou non) des déformations du solide, on parlera d'élasticité (ou d'inélasticité) pour qualifier comportement. Si la vitesse de sollicitation conditionne la réponse du solide on qualifiera son comportement de visqueux... Bref, l'ensemble de ces critères nous conduira à formuler des lois de comportement plus ou moins complexes qui relieront contraintes et déformations (incluant le cas échéant leurs histoires) par le biais d'équations constitutives dont les paramètres sont caractéristiques du matériau étudié.

L'identification des paramètres mécaniques consiste alors à évaluer ces paramètres à partir d'essais mécaniques. C'est cette identification qui a conduit à élaborer des tests mécaniques bien balisés qui permettent d'ajuster les paramètres de ces lois à partir de sollicitations contraintes par le faible nombre de mesures cinématiques.

La sophistication poussée des lois de comportement alliées à la puissance croissante des ordinateurs, et aux algorithmes puissants développés pour traiter cette complexité croissante nous conduisent aujourd'hui souvent à des situations où le recours à la simulation numérique est indispensable pour pouvoir apprécier le champ de déplacement développé dans un essai. L'identification consiste alors à ajuster les paramètres des lois constitutives pour reproduire au mieux le résultat d'un essai. On conçoit ainsi aisément que les mesures de champ nous posent un nouveau problème : la comparaison entre champs de déplacement mesuré et calculé devient considérablement plus exigeante et donc plus discriminante sur l'identification, mais

elle interdit de fait la plupart des approches habituelles fondées sur un faible nombre de mesures, pour nous inviter à un traitement informatique de ces données sous la forme de champs. On perçoit donc l'intérêt de choisir une base de description des champs qui assure une parfaite continuité entre mesure et calcul, comme la base de fonctions de type éléments finis que l'on pourra mettre en œuvre.

La simulation numérique des matériaux ou de comportement mécanique des solides joue un rôle primordiale dans l'identification des paramètres mécanique des matériaux, elle part habituellement de données d'entrées relatives à la géométrie et aux sollicitations mécaniques, mais aussi à la loi de comportement pour produire différents résultats dont le champ de déplacement. La formulation de l'identification en tant que problème « inverse », consiste à échanger ce sens traditionnel, pour admettre maintenant le champ de déplacement comme une entrée du problème, où les inconnues sont alors les paramètres constitutifs. Nous ne rentrerons pas dans le détail du traitement adapté à ce renversement de perspectives qui devient vite très technique, mais nous nous bornerons à mentionner que différentes méthodes existent, dont certaines sont optimales pour des lois simples, et que dans le cadre général des lois non linéaires de nombreux développements et progrès sont attendus dans les années à venir.

1^{ère} PARTIE : COURS DE MODULE DE MODELISATION SIMULATION DES MATERIAUX

CHAPITRE I. RAPPELS DE QUELQUES ELEMENTS DE LA MECANIQUE DES SOLIDES DEFORMABLES.

I.1. Introduction

La mécanique des milieux continus est un cadre physique et mathématique permettant de modéliser un problème concret. Une fois le modèle mathématique établi, il pourra être résolu par une méthode analytique ou numérique. La modélisation suivie de la résolution du modèle forment ce que l'on appelle la simulation du problème concret. Cette simulation devra être validée par des expérimentations lorsque celles-ci sont disponibles et le modèle, corrigé, le cas échéant. Dans certains cas, les expérimentations sont très limitées voire inexistantes d'où l'importance capitale de la simulation. Par exemple, l'étude de la résistance des structures en béton protégeant le cœur des réacteurs nucléaires peut difficilement passer par des expérimentations. La simulation numérique, qui s'affine de plus en plus avec les progrès en modélisation et la puissance des ordinateurs, permet également de réduire le nombre d'essais nécessaires pour mettre au point un produit. C'est le cas notamment de la conception des voitures au crash. Le nombre de voitures sacrifiées en essai a fortement baissé depuis trente ans et les voitures sont néanmoins de plus en plus sûres.

La science de l'ingénieur est généralement subdivisée en un certain nombre de sujets tels que :

1. Mécanique des solides.
2. Mécanique des fluides.
3. Transfert de chaleur.

Les propriétés des matériaux et bientôt bien qu'il existe des liens étroits entre eux en termes des principes physiques impliqués et des méthodes d'analyse employées. La mécanique des solides en tant que matière peut être définie comme une branche de la mécanique appliquée qui traite des comportements de corps solides soumis à différents types de chargements. C'est généralement subdivisé en deux autres courants, à savoir la mécanique des corps rigides ou simplement mécanique et mécanique des solides déformables. La mécanique des solides déformables qui est une branche de la mécanique appliquée est connue par plusieurs noms, c'est-à-dire la résistance des matériaux, la mécanique des matériaux, etc.

I.2. Mécanique des corps rigides

La mécanique des corps rigides s'intéresse principalement à la statique et au dynamique où le comportement sous des composants de forces externes et systèmes d'ingénierie qui sont traités comme infiniment résistants et indéformables. Nous traitons principalement ici des forces et mouvements associés aux particules et aux corps rigides.

I.3. Mécanique des solides déformables

La mécanique des solides déformables s'intéresse d'avantage aux forces internes et modifications associées de la géométrie des composants concernés. D'une importance particulière sont les propriétés des matériaux utilisés, dont la résistance déterminera si les composants échouent par rupture en service, et dont la rigidité déterminera si la quantité de déformation qu'ils subissent est acceptable. Par conséquent, le sujet de la mécanique des matériaux ou la résistance des matériaux est au cœur de toute l'activité de conception

technique. Habituellement, les objectifs de l'analyse ici seront la détermination des contraintes, déformations, et les déviations produites par les charges. Les analyses théoriques et les résultats expérimentaux ont un rôle important dans ce domaine.

I.4. Analyse des contraintes et déformations

I.4.1. Notion de contrainte

Introduisons le concept de contrainte car nous savons que le principal problème de la mécanique de l'ingénierie des matériaux est l'étude de la résistance du corps, c'est-à-dire la nature des forces mises en place dans un corps pour équilibrer l'effet des forces appliquées de l'extérieur. Les forces appliquées de l'extérieur sont appelées charges. Ces forces appliquées de l'extérieur peuvent être en raison de l'une des raisons.

- (i) en raison des conditions de service.
- (ii) en raison de l'environnement dans lequel le composant fonctionne.
- (iii) par contact avec d'autres membres.
- (iv) en raison des pressions de fluide.
- (v) en raison des forces de gravité ou d'inertie.

Comme nous savons qu'en mécanique des solides déformables, les forces appliquées de l'extérieur agissent sur un le corps et le corps subit une déformation. Du point de vue de l'équilibre, cette action devrait être opposés ou réagir par des forces internes qui s'établissent à l'intérieur des particules de matériau grâce à la cohésion. Ces efforts internes donnent naissance à un concept de contrainte. Définissons donc une contrainte par conséquent, définit un terme contrainte.

I.4.2. Formulation mathématique des déplacements, des contraintes et des déformations

A partir de la relation entre la contrainte et la déformation et déplacement, nous pouvons dériver une équation d'onde élastique 3D. La figure I.1 montre les relations entre chaque couple de paramètres.

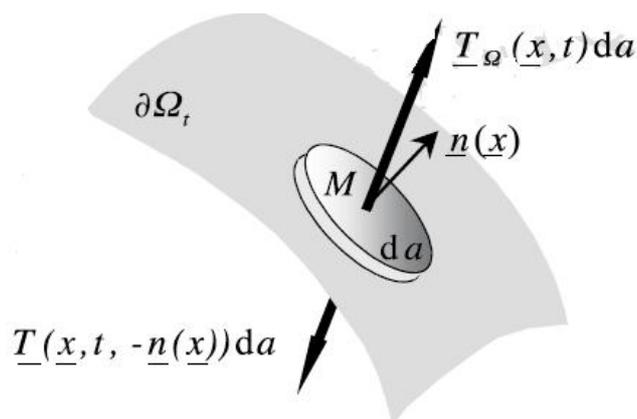


Fig. I.1. La relation entre la contrainte et la déformation et déplacement

I.4.2.1. Déplacements

Le déplacement, caractérise les vibrations, est la distance d'une particule à sa position d'équilibre :

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ u_3(x, t) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1})$$

I.4.2.2. Contraintes

La contrainte caractérise la réaction du matériau où solide sous les forces appliquées à un :

$$\sigma_{ij} = \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

qui est un tenseur, et le premier indice indique la surface appliquée et le second la direction (Figure I.2).

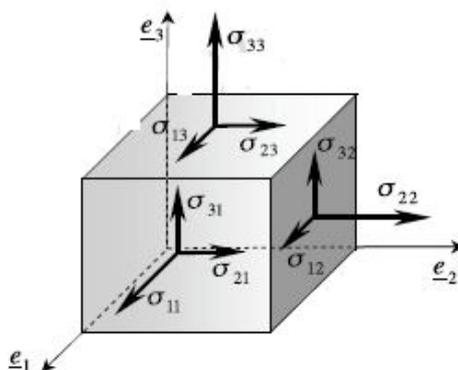


Fig. I.2. Etat de contraintes dans un solide

I.4.2.3. Déformations

La déformation caractérise les déformations sous contrainte. Si des contraintes sont appliquées à un matériau qui n'est pas parfaitement rigide, les points à l'intérieur se déplacent avec l'un par rapport à l'autre et il en résulte une déformation. Considérons un matériau élastique qui se déplace $u(x)$ (figure 1.3). Lorsque l'emplacement d'origine du matériau est x , le déplacement d'un le point voisin à l'origine à $x + dx$ peut être écrit comme :

$$u_i(x + \delta x) \approx u_i(x) + \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \delta x_j = \underbrace{u_i(x)}_{\text{translation}} + \underbrace{\delta u_i}_{\text{rotation+déformation}} \quad (\text{I.3})$$

Donc dans l'hypothèse du premier ordre :

$$\begin{aligned} \delta u_i &= \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \delta x_j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta x_j \\ &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \delta x_j + \frac{1}{2} (\nabla \times u \times \delta x)_i \\ &= (e_{ij} + \omega_{ij}) \delta x_j \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

où ω_{ij} est un terme de translation rotationnelle (le terme diagonale est nul, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$). Alors $e_{ij} = \underline{e}$ est le tenseur de déformation, qui contient les dérivées spatiales du champ de déplacement. Avec la définition de, e_{ij} le tenseur est symétrique et possède 6 composantes indépendantes.

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 1/2(u_{1,2} + u_{2,1}) & 1/2(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ 1/2(u_{2,1} + u_{1,2}) & u_{22} & 1/2(u_{2,3} + u_{3,2}) \\ 1/2(u_{3,1} + u_{1,3}) & 1/2(u_{3,2} + u_{2,3}) & u_{3,3} \end{pmatrix} \quad (I.5)$$

Si les termes diagonaux de e_{ij} sont nuls, on n'a pas de changements de volume. L'augmentation de volume, la dilatation, est donnée par la somme des extensions dans les directions x_i . Cette dilatation donne la variation de volume par unité de volume associée à la déformation. $\partial u_i / \partial x_i$ mentionne le déplacement des changements de la direction (x_i) le long de la direction de (x_i).

$$e_{ij} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = tr(e) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \theta \quad (1.6)$$

$$\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) dx_1 \left(1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) dx_2 \left(1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_3 \approx \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1.7)$$

$$= (1 + \theta)V = \Delta V,$$

Ou

$$\theta = \Delta V / V \quad (I.8)$$

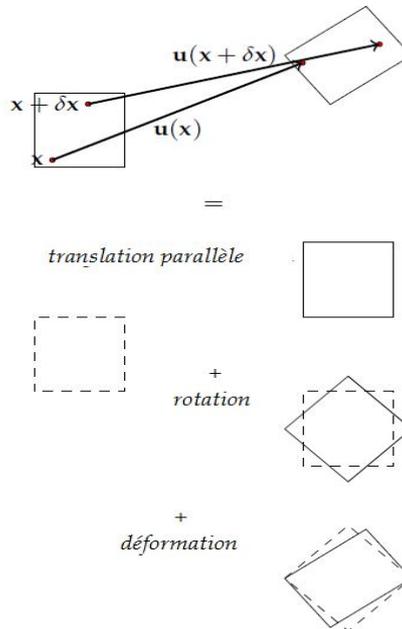


Fig. I.3. Schématisation de déplacements et déformations

I.4.2.4. Loi géométrique

La relation entre le déplacement et la déformation représente les propriétés géométriques (déformation). Comme nous l'avons déjà trouvé dans l'équation (1.4).

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (\text{I.9})$$

I.4.2.5. Équation du mouvement

La relation entre le déplacement et la contrainte, qui représente les propriétés dynamiques (mouvement). Nous écrivons la deuxième loi de Newton en termes de forces de masse et contraintes. Si on considère les contraintes dans la direction (x_2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\sigma_{12}(x + dx_1 \hat{n}_1) - \sigma_{12}(x)\} dx_2 dx_3 \\ + \{\sigma_{22}(x + dx_2 \hat{n}_2) - \sigma_{22}(x)\} dx_1 dx_3 \\ + \{\sigma_{32}(x + dx_3 \hat{n}_3) - \sigma_{32}(x)\} dx_1 dx_2 \\ + f_2 dV = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} dV \end{array} \right. \quad (\text{I.10})$$

où $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Avec une extension de Taylor :

$$\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \right) dV + f_2 dV = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} dV \quad (\text{I.11})$$

Nous avons également des équations similaires pour les directions x_1 et x_2 , et en utilisant la convention de sommation :

$$\underbrace{\sigma_{ij,j}(x,t)}_{\text{forces superficielles}} + \underbrace{f_i(x,t)}_{\text{forces du corps}} = \rho \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.12})$$

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} + F = \rho \ddot{u} \quad (\text{I.13})$$

C'est l'équation du mouvement, qui est satisfaite partout dans un milieu continu. Lorsque le terme droit de l'équation (1.11) est nul, on a l'équation d'équilibre suivante :

$$\sigma_{ij,j}(x,t) = -f_i(x,t). \quad (\text{I.14})$$

Et les forces massiques (du corps) sont appliquées, nous avons l'équation homogène du mouvement suivante :

$$\sigma_{ij,j}(x,t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2}. \quad (\text{I.15})$$

I.4.2.6. Équations constitutives

La relation entre la contrainte et la déformation représente les propriétés du matériau (résistance, rigidité). Ici, on considère que le matériau a une relation linéaire entre contrainte et déformation (élastique linéaire). L'élasticité linéaire est valable pour la courte échelle de temps impliquée dans la propagation d'ondes sismiques.

Selon la loi de Hooke, la relation entre la contrainte et la déformation est :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{I.16})$$

$$\underline{\sigma} = \underline{c} \underline{\varepsilon} \quad (\text{I.17})$$

Où la constante c_{ijkl} est le module d'élasticité, qui décrit les propriétés du matériau.

Tous les composants de c_{ijkl} ne sont pas indépendants, parce que les tenseurs de contraintes et de déformations sont des considérations symétriques et thermodynamiques ;

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij} \quad (\text{I.18})$$

Par conséquent, nous avons 21 composants indépendants pour c_{ijkl} . Avec la notation de Voigt, on change les indices comme suite:

$$11 \longrightarrow 1, 22 \longrightarrow 2, 33 \longrightarrow 3, 23 \longrightarrow 4, 13 \longrightarrow 5, 12 \longrightarrow 6, \quad (\text{I.19})$$

et on peut écrire les modules élastiques comme c_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$). Avec ces 21 composants. L'énergie de déformation est définie par w :

$$w = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{I.20})$$

On obtient par substitution de la contrainte par sa formule :

$$= \frac{1}{2} \int c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV \quad (\text{I.21})$$

I.5. Formulation de l'hypothèse des petites perturbations

I.5.1. élasticité linéaire isotrope

Les outils mathématiques pour décrire des déformations quelconques entre un domaine de référence V et un domaine actuel v viennent d'être introduits. Cette déformation peut être faible ou énorme (crash de voiture par exemple).

I.5.2. Relations contraintes – déformations

Auparavant, les relations contrainte-déformation étaient considérées pour le cas particulier d'une charge uni-axiale, c'est-à-dire une seule composante de la contrainte, c'est-à-dire, la composante axiale ou normale de la contrainte faisait son apparition. Dans cette section, nous allons généraliser le comportement élastique, donc pour arriver aux relations qui relient les six composantes de contraintes aux six composants de la déformation élastique. Avant d'écrire les relations nous introduisons le terme « isotropie ».

I.5.2.1. Isotropie

Si la réponse du matériau est indépendante de l'orientation de l'axe de l'échantillon, on dit alors que le matériau est isotrope ou en d'autres termes on peut dire cette isotropie d'un matériau dans une caractéristique, qui nous donne l'information que les propriétés sont les mêmes dans les trois directions orthogonales x , y et z , par contre si la réponse dépend de l'orientation, elle est connue sous le nom d'anisotrope. Exemples de matériaux anisotropes, dont les propriétés sont différentes dans différentes directions sont :

- (i) Bois.
- (ii) Plastique renforcé de fibres.
- (iii) Béton armé.

I.5.2.2. Homogénéité

Un matériau est homogène s'il a la même composition à travers tous le corps. Par conséquent, les propriétés élastiques sont les mêmes en tout point du corps. Cependant, il n'est pas

nécessaire que les propriétés soient les mêmes dans toutes les directions pour que le matériau soit homogène. Les matériaux isotropes ont les mêmes propriétés élastiques dans toutes les directions. Par conséquent, le matériau doit être à la fois homogène et isotrope pour que les déformations latérales soient les mêmes à chaque point.

I.5.2.3. Loi de Hooke généralisée

Nous savons que la relation simple entre les contraintes et les déformations est :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (\text{I.22})$$

et

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{transversale}}}{\varepsilon_{\text{axiale}}} \quad (\text{I.23})$$

Cette équation exprime la relation entre la contrainte et la déformation (loi de Hooke) pour un état de contrainte uni-axial uniquement lorsque la contrainte n'est pas supérieure à la limite d'élasticité. Afin d'analyser les effets de déformation produits par l'ensemble des contraintes, nous considérerons les effets d'une contrainte axiale à la fois. Puisque nous avons vraisemblablement affaire à des déformations de l'ordre d'un pour cent ou moins. Ces effets peuvent être superposés arbitrairement. La figure ci-dessous montre l'état général de contrainte triaxiale.

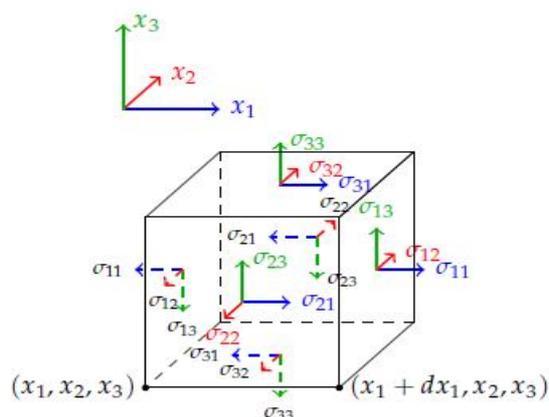


Fig. I.10. L'état général de contraintes triaxiales.

Considérons un cas où σ_x seul agit. Cela entraînera une augmentation de la dimension dans direction x, tandis que les dimensions dans les directions y et z seront diminuées.

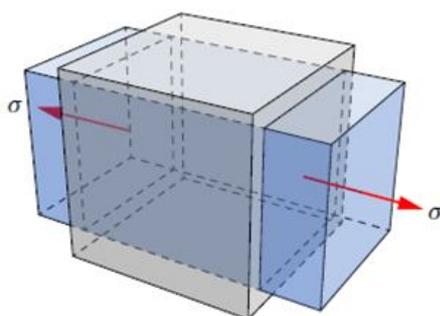


Fig. I.11. Traction uni-axiale suivant (Ox).

Par conséquent, les déformations résultantes dans les trois directions sont de même, si nous considérons que la contrainte normale σ_y seule ou σ_z seule agit et donc les déformations résultantes sont en trois cas sous la forme suivante:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x, \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \quad (\text{I.24})$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{I.25})$$

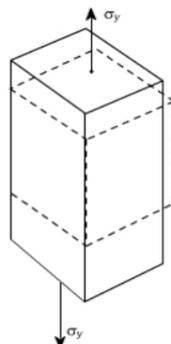


Fig. I.12. Traction uni-axiale suivant (Oy)

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y, \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_y}{E}, \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

(I.26)

Considérons maintenant la contrainte σ_z agissant seule, donc les déformations produites sont :

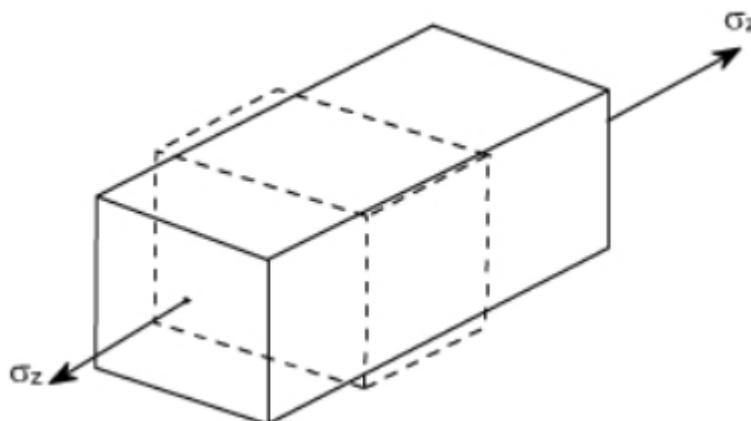


Fig. I.13. Traction uniaxiale suivant (Oz)

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z, \varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}, \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$$

(I.27)

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \quad (\text{I.28})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) \quad (\text{I.29})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{I.30})$$

Avec E est le module d'Young, et ν est le coefficient de Poisson.

Dans l'analyse suivante, les contraintes de cisaillement n'ont pas été prises en compte. On peut montrer que pour une contrainte de cisaillement dans un matériau isotrope ne produira que sa déformation de cisaillement correspondante et n'influencent pas à la déformation axiale. Ainsi, nous pouvons écrire la loi de Coulomb pour le cisaillement:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (\text{I.31})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (\text{I.32})$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (\text{I.33})$$

Donc ces équations sont connues sous le nom de loi de Hooke généralisée et sont les équations constitutives pour les matériaux isotropes élastiques linéaires. Lorsque ces équations sont utilisées telles qu'elles sont écrites, les déformations peuvent être complètement déterminées à partir des valeurs connues des contraintes. Pour les ingénieurs la situation de contraintes planes est très pertinente (c'est-à-dire $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$), donc l'ensemble des équations se réduites à :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad (\text{I.34})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \quad (\text{I.35})$$

$$\varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{G} \quad (\text{I.36})$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (\text{I.37})$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (\text{I.38})$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \quad (\text{I.39})$$

La loi de Hooke est probablement l'équation constitutive la plus connue et la plus largement utilisée pour un matériau dans d'ingénierie. Cependant, nous ne pouvons pas dire que tous les matériaux d'ingénierie sont isotropes élastiques linéaires. Parce que maintenant, à l'époque actuelle, les nouveaux matériaux sont se développe chaque jour. De nombreux matériaux utiles présentent une réponse non linéaire et ne sont pas élastique aussi.

I.5.2.4. Contraintes planes

Dans de nombreux cas, la situation de contrainte est moins compliquée, par exemple si nous tirons un long fil fin de section uniforme et examinons un petit parallélépipède où x – l'axe coïncide avec l'axe du fil.

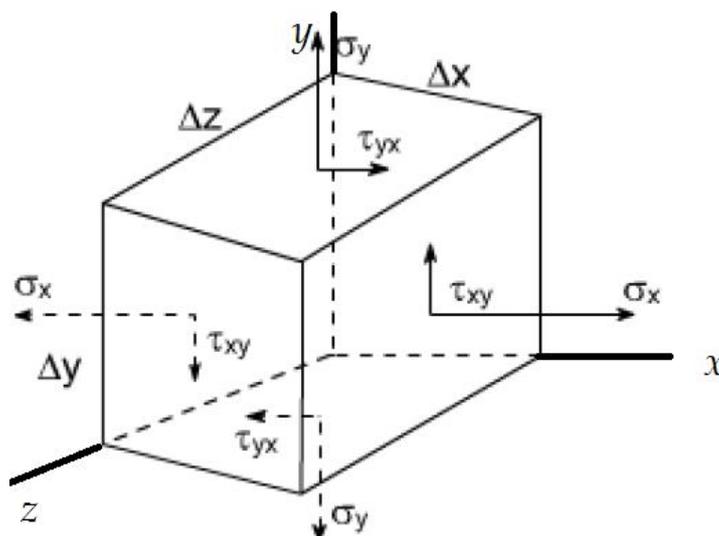


Fig. I.14. Etat de contraintes planes

Donc, si nous prenons le plan (xy) , alors $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ seront les seules composantes de contraintes agissant sur le parallélépipède. Cette combinaison de composantes de contraintes est appelée situation de contraintes planes. Une contrainte plane peut être définie comme une condition de contrainte dans laquelle tous les composants associés avec une direction donnée (c'est-à-dire la direction z dans cet exemple) sont nuls.

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad (\text{I.40})$$

I.5.2.5. Déformations planes

Si nous concentrons notre attention sur un corps dont les particules se trouvent toutes dans le même plan et qui ne se déforme que dans ce plan. Celle-ci se déforme uniquement dans ce plan. Ce type de la déformation est appelée déformation plane, donc pour une telle situation nous avons :

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0, \text{ et les termes non nuls seraient } \varepsilon_x, \varepsilon_y \text{ et } \varepsilon_{xy}$$

I.5.3. Constantes élastiques

En considérant le comportement élastique d'un matériau isotrope sous, chargement normal, de cisaillement et chargement hydrostatique, nous introduisons en total quatre constantes élastiques à savoir E, G, K et ν . Il s'avère que tous ne sont pas indépendants les uns des autres. En fait, étant donné deux, les deux autres peuvent être trouvés. Définissons ces constantes élastiques comme suit :

- (i) E = module d'Young ou d'élasticité.
= Contrainte / déformation.
- (ii) G = module de cisaillement ou module de rigidité.

= Contrainte de cisaillement / Déformation de cisaillement

(iii) ν = Coefficient de Poisson.

= - déformation latérale / déformation longitudinale.

(iv) K = module d'élasticité de masse.

= Contrainte volumétrique / Contrainte volumétrique.

Où :

Déformation volumétrique = somme des contraintes linéaires dans les directions x, y et z.

Contrainte volumétrique = contrainte qui provoque le changement de volume. Nous trouvons les relations entre eux dans les paragraphes suivants :

I.5.4. Relation entre les constantes élastique

I.5.4.1. Relation entre E, G et μ

Établissons une relation entre les constantes élastiques E, G et ν . Considérez un cube de matériau de la face "a" soumis à l'action des contraintes de cisaillement et de cisaillement complémentaires comme indiqué sur la figure et produisant la forme tendue comme indiqué sur la figure ci-dessous. En supposant que les déformations sont faibles et que l'angle A C B peut être pris égal à 45

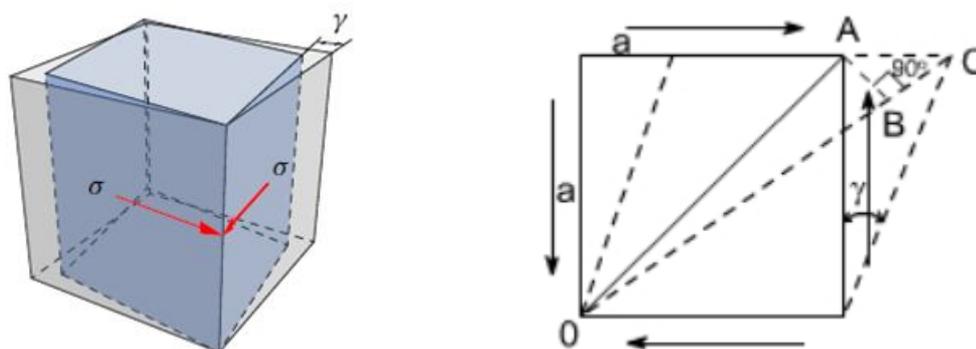


Fig. I.15. Contraintes de cisaillement

Donc contrainte sur la diagonale OA = Changement de longueur / longueur d'origine. Puisque l'angle entre OA et OB est très petit donc OA @ OB donc BC, est le changement de la longueur de la diagonale OA.

$$OA = \frac{BC}{OA} \quad (\text{I.41})$$

$$= \frac{AC \cos 45^\circ}{OA}$$

$$OA = \frac{a}{\sin 45^\circ} = a\sqrt{2} \quad (\text{I.42})$$

$$\text{Deformation} = \frac{AC}{a\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{I.43})$$

$$= \frac{AC}{2a}$$

Mais $AC = a\gamma$

Ou γ = déformation de cisaillement

$$= \frac{a\gamma}{2a} = \frac{\gamma}{2} \quad (\text{I.44})$$

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \text{ or } \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (\text{I.45})$$

$$= \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G}$$

Ou ce système de contrainte de cisaillement est équivalent ou peut être remplacé par un système de contraintes à 45 comme indiqué ci-dessous. Un ensemble sera compressif, l'autre tendu, et les deux sera égale en valeur à la déformation de cisaillement appliquée.

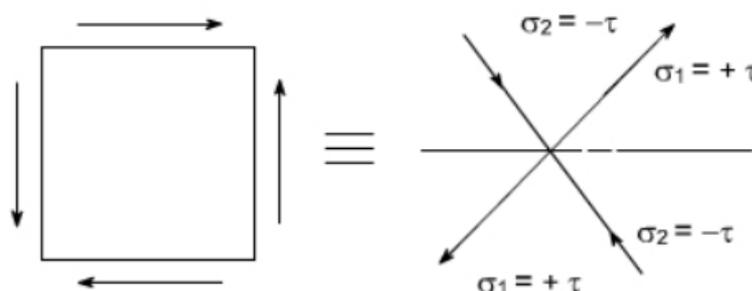


Fig. I.16. Système représentatif de contrainte de cisaillement

Ainsi, pour le système d'état de contrainte qui s'applique le long des diagonales :

$$= \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}$$

$$= \frac{\tau}{E} - \mu \frac{(-\tau)}{E}$$

$$= \frac{\tau}{E}(1 + \mu)$$

$$\frac{\tau}{2G} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu) \quad (\text{I.46})$$

Ou

$$E = 2\mu(1 + \nu) \quad (\text{I.47})$$

Nous avons introduit un total de quatre constantes élastiques, à savoir E, G, K et g. Il s'avère que non tout cela est indépendant des autres. En fait, étant donné deux d'entre eux, les deux autres peuvent être trouvés.

$$E = 3K(1 - 2\gamma) \quad (\text{I.48})$$

$$\rightarrow \frac{E}{3(1 - 2\gamma)} = K$$

$$\gamma = 0.5K = \infty \quad (\text{I.49})$$

$$\varepsilon_v = \frac{(1 - 2\gamma)}{E} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 3 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\gamma) \quad (\text{I.50})$$

Pour $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ état de contrainte hydrostatique :

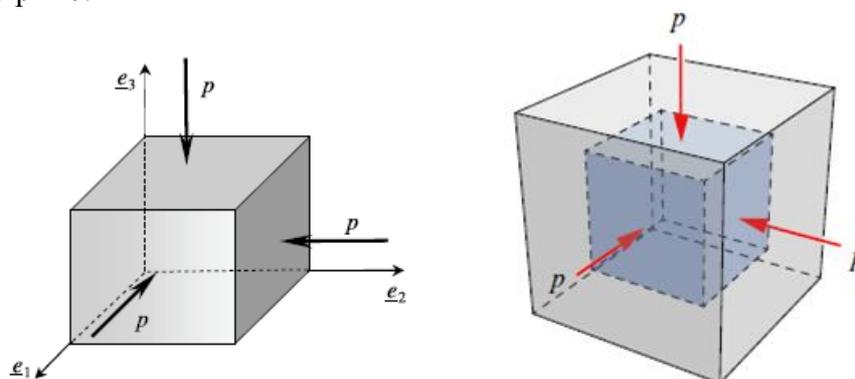
$$\varepsilon_v = 0 \text{ si } \gamma = 0.5 \quad (\text{I.51})$$

Quelles que soient les contraintes, c'est-à-dire que le matériau est incompressible.

Lorsque $\nu = 0,5$ La valeur de k est infinie, plutôt qu'une valeur nulle de E et la déformation volumétrique est zéro, ou en d'autres termes, le matériau est incompressible.

I.5.4.2. Relation entre E , K et ν

Considérons un cube soumis à trois contraintes égales σ comme la montre la figure ci-dessous, avec $p = \sigma$.



(a) Etat initial.

(b) Etat final.

Fig. I.17. Solide sous traction triaxiale

La déformation totale dans une direction ou le long d'un bord due à l'application de la contrainte ou la contrainte volumétrique s'est donnée par :

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} \\ &= \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu) \end{aligned} \quad (\text{I.52})$$

Déformation volumétrique = 3. déformation linéaire.

$$\text{Déformation volumétrique} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Ou alors

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z \quad (\text{I.53})$$

$$\text{Déformation volumétrique} = 3 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu) \quad (\text{I.54})$$

Par définition :

$$\text{Module d'élasticité de masse } (k) = \frac{\text{contraintes volumique } (\sigma)}{\text{déformation volumique}} \quad (\text{I.55})$$

Ou

$$\text{Déformation volumétrique} = \frac{\sigma}{k} \quad (\text{I.56})$$

Assimilant les deux déformations que nous obtenons :

$$\frac{\sigma}{k} = 3 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu) \quad (\text{I.57})$$

$$E = 3K(1 - 2\nu) \quad (\text{I.58})$$

I.5.4.3 Relation entre E, G et K

La relation entre E, G et K peut être facilement déterminée en éliminant ν de la relations déjà dérivées :

$$E = 2 G (1 + \nu) \text{ et } E = 3 K (1 - \nu) \quad (\text{I.59})$$

Ainsi, la relation suivante peut être obtenue.

$$E = \frac{9GK}{(3K + G)} \quad (\text{I.60})$$

I.5.4.4 Relation entre K, G et γ

Des relations déjà dérivées, E peut être éliminé :

$$E = 2G(1 + \gamma)$$

$$E = 3K(1 - 2\gamma)$$

$$3K(1 - 2\gamma) = 2G(1 + \gamma)$$

$$\gamma = \frac{(3K - 2G)}{2(G + 3K)} \quad (\text{I.61})$$

Ou

$$\gamma = 0.5(3K - 2G)/(G + 3K) \quad (\text{I.62})$$

I.5.5. Note d'ingénierie sur les constantes élastiques

Nous avons introduit un total de quatre constantes élastiques, à savoir E, G, K et ν . On peut voir que tous ne sont pas indépendants les uns aux autres. En fait, étant donné deux d'entre eux, les deux autres peut être déterminé. De plus, on peut noter que.

$$E = 3K(1 - 2\gamma) \quad (\text{I.63})$$

Ou

$$K = \frac{E}{(1 - 2\gamma)} \quad (\text{I.64})$$

$$\gamma = 0.5; K = \infty \quad (\text{I.65})$$

$$\varepsilon_v = \frac{(1 - 2\gamma)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (\text{I.66})$$

$$= \frac{(1 - 2\gamma)}{E} .3\sigma \quad \text{avec } (\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma)$$

Donc si $\gamma = 0.5$, la valeur de K devient infinie, plutôt qu'une valeur nulle de E et la déformation volumétrique est nulle ou en d'autres termes, le matériau devient incompressible.

De plus, on peut noter que sous condition de traction simple et de cisaillement simple, tout réel les matériaux ont tendance à subir des déplacements dans les directions des forces appliquées et Sous une charge hydrostatique, ils ont tendance à augmenter de volume. En d'autres termes, la valeur de là les constantes élastiques E, G et K ne peuvent pas être négatives. Par conséquent, les relations :

$$E = 2 G (1 + \nu)$$

$$E = 3 K (1 - \nu)$$

En pratique aucun matériau réel n'a de valeur de coefficient de Poisson négatif.

I.5.5.1. Détermination du coefficient de Poisson

Le coefficient de Poisson peut être déterminé facilement par utilisation simultanée de deux jauges de contrainte sur une éprouvette soumise à une traction uni-axiale ou charge de compression. Une jauge est montée parallèlement à l'axe longitudinal de l'échantillon et l'autre est monté perpendiculairement à l'axe longitudinal comme indiqué ci-dessous :

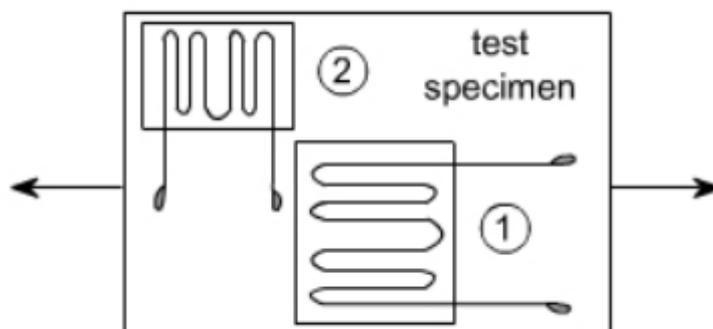


Fig. I.18. Jauges de contraintes

I.5.6. Caractéristiques des matériaux

I.5.6.1. Propriétés mécaniques

En cours de fonctionnement ou d'utilisation des structures, tous les solides et les structures sont soumis à l'action des forces externes, qui créent des contraintes qui entraînent inévitablement des déformations. Pour garder ces contraintes, et, par conséquent déformation dans les limites admissibles, il est nécessaire de sélectionner des matériaux appropriés pour les composants de différentes conceptions et d'appliquer le plus efficace traitement thermique, c'est-à-dire une connaissance approfondie des principales caractéristiques des produits métalliques semi-finis et des articles métalliques finis (telles que la résistance, la ductilité, la ténacité etc.) sont essentiels à cet effet. Pour cette raison, la spécification des métaux, utilisés dans la fabrication de divers produits et la structure, sont basés sur les résultats des essais mécaniques ou nous disons que en mécanique les essais effectués sur des éprouvettes spécialement préparées (éprouvettes) de forme normalisée et taille sur des machines spéciales pour obtenir les caractéristiques de résistance, de ductilité et de ténacité du métal. Les conditions dans lesquelles sont réalisés les essais mécaniques sont de trois types.

I.5.6.1.1. Statique

Lorsque la charge est augmentée lentement et progressivement et que le métal est chargé par traction, compression, torsion ou flexion.

I.5.6.1.2. Dynamique

Lorsque la charge augmente rapidement comme lors d'un impact.

I.5.6.1.3. fatigue

À la fois de type statique et d'impact, c'est-à-dire lorsque la charge à plusieurs reprises varie au cours du test soit en valeur, soit à la fois en valeur et en direction considérer le test de traction uni axiale. Pour une application où une force entrante et sortante dans la structure, un

certain nombre de fois, le matériau ne peut pas résister à la contrainte ultime d'un outil statique. Dans de tels cas, la force ultime dépend du non de fois la force est appliquée lorsque le matériau travaille à un niveau de contrainte. L'une des expériences menées pour calculer le nombre de cycles nécessaires pour rompre l'échantillon à une contrainte particulière lorsque la fatigue ou la charge fluctuante agit. Les tests sont connus sous le nom de tests de fatigue.

I.5.6.2. Test de traction uni-axiale

Ce test est de type statique, c'est-à-dire que la charge est augmentée lentement de zéro à une certaine valeur. Des éprouvettes standard sont utilisées pour l'essai de traction. Il existe deux types d'échantillons standards qui sont généralement utilisés à cette fin, qui ont été montrés ci-dessous:

I.5.6.2.1. Epreuve I

Cet échantillon à une section circulaire.

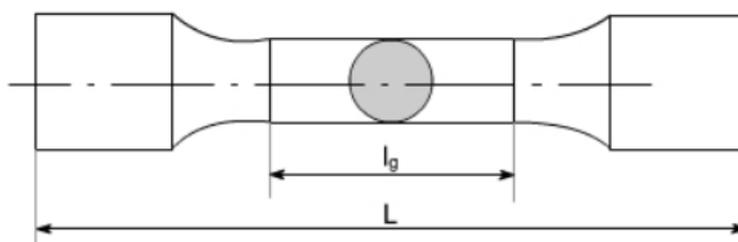


Fig. I.19. Epreuve de section circulaire

I.5.6.2.2. Epreuve II

Cet échantillon à une section rectangulaire.

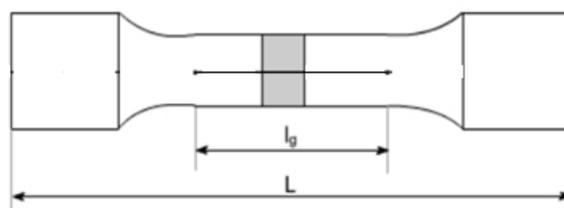


Fig. I.20. Epreuve de section rectangulaire

Avec l_g est la longueur entre repères, c'est-à-dire la longueur de l'éprouvette sur laquelle on veut déterminer les propriétés mécaniques. Le test de tension uni-axiale est effectué sur une machine d'essai de traction et les étapes suivantes sont effectuées pour effectuer ce test.

- (i) Les extrémités des spécimens sont fixées dans les poignées de la machine d'essai.
- (ii) Il y a une unité pour appliquer une charge à l'échantillon avec un système hydraulique ou mécanique.
- (iii) Il doit y avoir un appareil d'enregistrement par lequel vous devriez pouvoir mesurer la sortie finale sous forme de charge ou de contrainte. Ainsi, les machines d'essai sont souvent équipées du levier type pendule, manomètre et capsule hydraulique et le diagramme contrainte-déformation est tracé. Une courbe d'essai de traction typique pour l'acier doux est présentée ci-dessous :

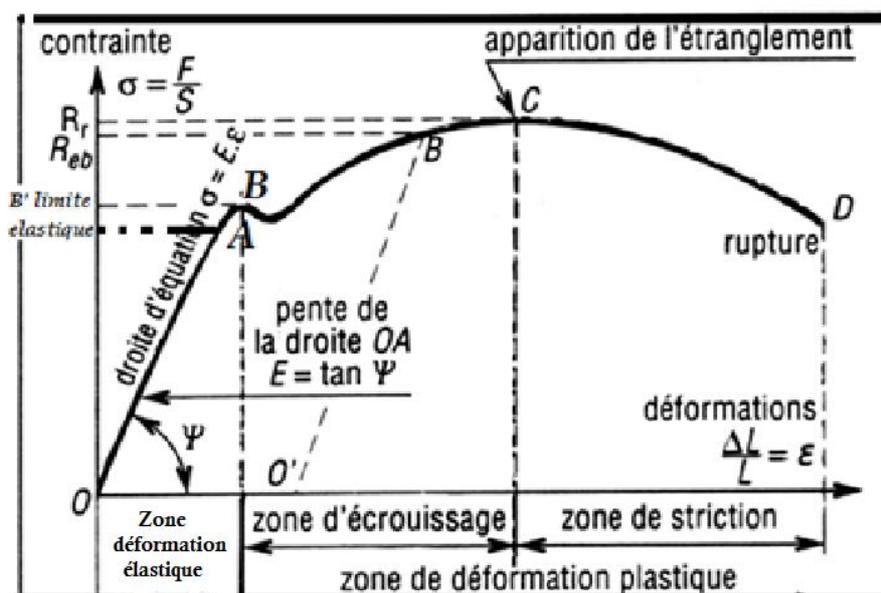


Fig. I.21. Courbe d'essai de traction typique pour l'acier doux

I.5.6.3. Contrainte nominale – Déformation ou Contrainte conventionnelle – Diagrammes de déformation

Les contraintes sont généralement calculées sur la base de la surface d'origine de l'éprouvette; les contraintes sont souvent appelées contraintes conventionnelles ou nominales.

I.5.6.4. Courbe vraie de contrainte-déformation

Depuis qu'un matériau est soumis à une charge uniaxiale, une certaine contraction ou expansion a toujours lieu. Ainsi, en divisant la force appliquée par la surface réelle correspondante de l'échantillon au même instant donne la contrainte dite vraie.

I.5.6.5. Points important de la courbe

(A) : Il est donc évident que le graphique indique que la contrainte est proportionnelle à la déformation ou que l'allongement est proportionnel à la charge donnant une relation bien déterminée. Cette loi de proportionnalité est valable jusqu'à un point A où nous pouvons dire que le point A est un point ultime lorsque la nature linéaire du graphe cesse ou s'écarte de la nature linéaire. Ce point est connu comme la limite de proportionnalité ou la limite de proportionnalité.

(B) : Pendant une courte période au-delà du point A, le matériau peut encore être élastique dans le sens que les déformations sont complètement récupérées lorsque la charge est supprimée. Le point B est appelé *limite élastique*.

(C) et (D) : Au-delà de la limite d'élasticité, la déformation plastique se produit et les déformations ne sont pas totalement récupérables. Il y aura donc une déformation permanente ou cette déformation permanente est lorsque la charge est supprimée. Ces deux points sont appelés points de limite supérieure et inférieure respectivement. La contrainte à la limite d'élasticité est appelée limite d'élasticité. Une étude des diagrammes contrainte-déformation montre que la limite d'élasticité est si proche de la limite proportionnelle dans la plupart des cas, les deux peuvent être considérés comme un seul. Cependant, il est beaucoup plus facile

de localiser le premier. Pour les matériaux qui ne possèdent pas de limite d'élasticité bien définie, afin de trouver la limite d'élasticité ou la limite d'élasticité, une méthode de décalage est appliquée. Dans cette méthode, une ligne est tracée parallèlement à la portion de ligne droite du diagramme de contrainte initial en le décalant d'une quantité égale à 0,2 % de la déformation comme indiqué ci-dessous et ce se produit surtout pour l'acier à faible teneur en carbone.

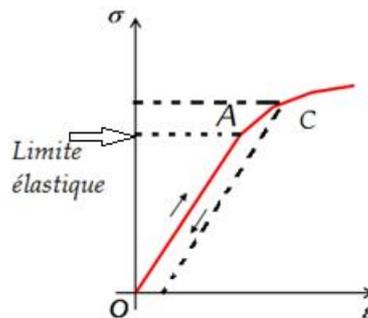


Fig. I.22. Courbe d'essai de traction typique pour l'acier dur à faible teneur en carbone.

(E) : Une augmentation supplémentaire de la charge entraînera une déformation marquée dans tout le volume du métal. La charge maximale que l'éprouvette peut supporter sans défaillance est appelée la charge à la résistance ultime. Le point "E" le plus élevé du diagramme correspond à la résistance ultime d'un matériau. σ_u = Contrainte que l'échantillon peut supporter sans défaillance et est connue sous le nom d'Ultime Résistance ou résistance à la traction. σ est égal à la charge divisée par l'aire de la section transversale d'origine de la barre.

(F) : Au-delà du point E, la barre commence à former un col. La charge tombant du maximum jusqu'à ce que la fracture se produise en F. [Au-delà du point E, la section transversale de l'éprouvette commence à se réduire rapidement sur une longueur de barre relativement petite et on dit que la barre forme un col. Cette rétrécissement a lieu tandis que la charge diminue, et la rupture de la barre se produit finalement au point F].

Remarque : En raison de la grande réduction de la surface produite par le processus de striction, la contrainte réelle à la rupture est souvent supérieure à la valeur ci-dessus. Comme les concepteurs s'intéressent à charges maximales pouvant être supportées par la section transversale complète, d'où la contrainte à fracture est rarement d'une valeur pratique.

I.5.6.6. Pourcentage d'allongement ' δ '

La ductilité d'un matériau en traction peut être caractérisée par son allongement et par la réduction de la surface à la section transversale où se produit la rupture.

C'est le rapport de l'extension en longueur de l'éprouvette après rupture à son calibre initial longueur, exprimée en pourcentage.

$$\delta = \frac{(I_f - I_g)}{I_g} \times 100 \quad (\text{I.67})$$

I_f = longueur de référence de l'échantillon après rupture (ou la distance entre les marques de jauge à fracture).

I_g = longueur entre repères avant rupture (c'est-à-dire longueur entre repères initiale). Pour une longueur entre repères de 50 mm, l'acier peut ici avoir un % d'allongement δ de l'ordre de 10 % à 40 %.

I.5.6.7. Action élastique

L'élastique est un adjectif signifiant capable de retrouver taille et forme après déformation. La plage élastique est la plage de contrainte inférieure à la limite élastique.

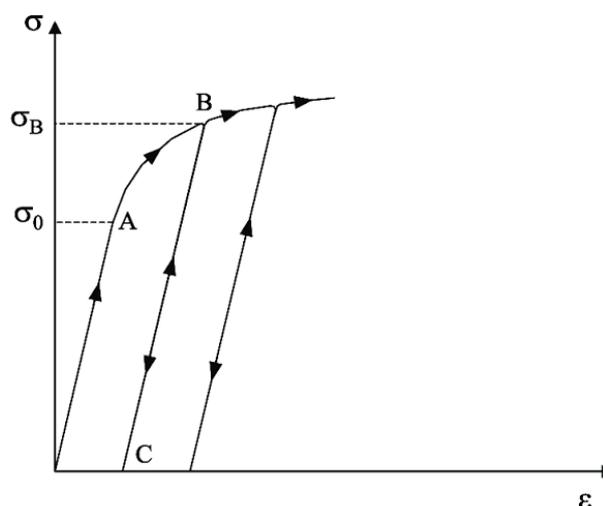


Fig. I.23. Phénomène de réversibilité et linéarité

La Figure I.23 illustre l'idée de déformation élastique et plastique. Si un matériau est soumis à une contrainte de niveau (1) puis relâché la déformation reviendra à zéro au delà de cette déformation plastique. Si un matériau est sollicité au niveau (2) puis relâché, le matériau récupérera la quantité $(\hat{I}_2 - \hat{I}_{2p})$, où \hat{I}_{2p} est la déformation plastique restante après suppression de la charge. De même pour le niveau (3), et la déformation plastique sera \hat{I}_{3p}

I.5.7. Matériaux ductiles et cassants

Sur la base de ce comportement, les matériaux peuvent être classés comme matériaux ductiles ou fragiles.

I.5.8. Matériaux ductiles

Si nous examinons simplement la courbe de tension précédente, nous pouvons remarquer que l'extension des matériaux sur la gamme plastique est considérablement supérieure à celui associé à l'élastique. La capacité des matériaux à permettre ces grandes déformations ou grandes extensions sans défaillance est appelé ductilité. Les matériaux à haute ductilité sont appelés matériaux ductiles.

I.5.9. Matériaux fragiles

Un matériau fragile est un matériau qui présente des extensions ou des déformations relativement faibles pour fracture, de sorte que la région partiellement plastique du graphique d'essai de traction est beaucoup plus réduite. Ce type de graphique est représenté par les fontes ou les aciers à haute teneur en carbone ou béton.

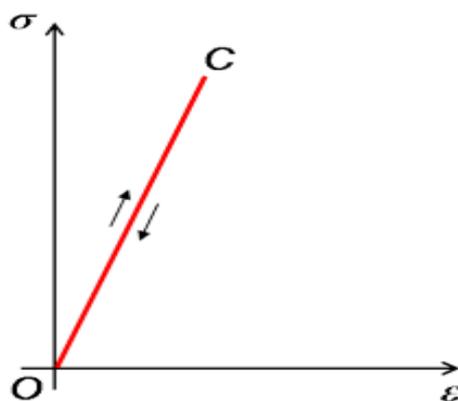


Fig. I.24. Courbe d'un matériau fragile (béton).

I.5.10. Conditions influant sur les propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques dépendent des conditions d'essai.

(1) : Il a été établi que l'abaissement de la température ou l'augmentation du taux de la déformation augmente considérablement la résistance à la déformation plastique. Ainsi, à faible température (ou des taux de déformation plus élevés), les métaux et les alliages, qui sont ductiles à température ambiante normale peut échouer avec une rupture fragile.

(2) : Les concentrations, c'est-à-dire les fortes charges dans les sections transversales, ont un grand effet sur les propriétés mécaniques des métaux. Une concentration entraînera une répartition non uniforme des contraintes. Ils contribueront toujours à diminuer la ductilité des matériaux. Une concentration réduit la résistance ultime des matériaux à haute résistance. En raison de la distribution non uniforme des contraintes ou en raison de la concentration des contraintes.

(3) : Taille de grain : La taille de grain affecte également les propriétés mécaniques.

I.6. Dureté (Hardness)

La dureté est la résistance d'un métal à la pénétration d'un autre corps plus dur qui ne pas recevoir un ensemble permanent. Les essais de dureté consistent à mesurer la résistance à la déformation plastique des couches de métaux près de la surface de l'échantillon, c'est-à-dire qu'il y a des tests d'indentation à la bille.

I.6.1. Essais d'indentation de bille (dureté)

Cette méthode consiste à presser une bille d'acier trempé sous une charge constante P dans une surface plane spécialement préparée sur l'éprouvette comme indiqué dans les figures ci-dessous :

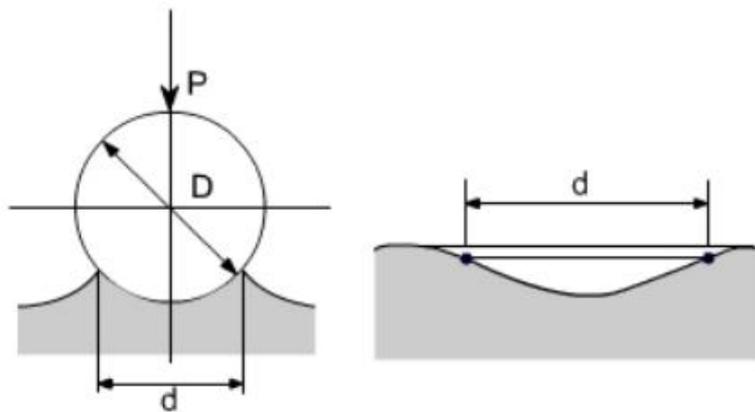


Fig. I.25. Essais d'indentation de balle

Après le retrait de la charge, une indentation reste à la surface de l'éprouvette. Si la trace de la surface sphérique dans l'indentation est appelée la Dureté de Brinell, et elle est défini comme suite:

$$Bhn = P / F$$

F est exprimé en termes de D et d

D = diamètre de bille

d = diamètre de l'indentation et le nombre de dureté Brinell est donné par

$$Bhn = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})} \tag{I.68}$$

Ensuite, il y a aussi d'autres essais de dureté (Rockwell A et B et Vickers) dans lequel la boule à différentes formes.

Méthode d'essai	Géométrie du pénétrateur	Charge F	Principe de l'essai	Paramètre mesuré	Dureté
Brinell	Bille d'acier dur ou de carbure (10 mm de diam.)	500 ou 3000 kgf		Diamètre de l'empreinte (d)	$HB = \frac{2F}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$
Vickers	Pyramide de diamant à base carrée; angle entre les faces opposées: 136° 	5 à 100 kgf (microdureté: 5 à 1000 gf)		Diagonale de l'empreinte (d)	$HV = \frac{1,854 F}{d^2}$
Rockwell C	Cône de diamant d'angle au sommet de 120° 	Précharge f de 10 kgf; F = 150 kgf		Profondeur de l'empreinte (Z)	HRC = f(Z)
Rockwell B	Bille d'acier dur (1,59 mm de diam.)	Précharge f de 10 kgf; F = 100 kgf	Même principe que Rockwell C	Profondeur de l'empreinte (Z)	HRB = f(Z)

Tableau. I.1. les différents essais de la dureté

I.7. Résistance aux chocs

Les tests de tension statique des éprouvettes non entaillées ne révèlent pas toujours la sensibilité des métaux à la rupture fragile. Ce facteur important est déterminé dans les essais d'impact. En tests d'impact nous utilisons l'éprouvette entaillée. Cette éprouvette est posée sur ses supports sur enclume de manière à ce que le coup du percuteur soit opposé à l'entaille. La résistance au choc est définie comme l'énergie w nécessaire pour rompre l'échantillon.

La résistance aux chocs = A / f ; Où f = est la section transversale de l'éprouvette en cm^2 .

La résistance aux chocs est une caractéristique complexe qui prend en compte à la fois la ténacité et la résistance d'un matériau. L'objectif principal des essais à barres entaillées est d'étudier l'effet simultané de la concentration de contraintes et de l'application d'une charge à grande vitesse. Les essais d'impact sont du type le plus sévère et facilitent les frottements fragiles. Les valeurs de résistance aux chocs ne peuvent pas encore être utilisées pour les calculs de conception mais ces essais comme règle prévue dans spécifications pour les aciers en carbone et alliés. En outre, il peut être noté que dans les tests d'impact la rupture peut être fragile ou ductile. Dans le cas d'une rupture fragile, la rupture se produit par séparation et ne s'accompagne pas d'une déformation plastique notable comme cela se produit dans le cas de rupture ductile.

Annexes

I.A. Équations de la mécanique des milieux continus en coordonnées cartésiennes

Dans ce qui précède, nous nous sommes implicitement référés à un système d'axes cartésien $(Ox_1x_2x_3)$, les points de l'espace étant repérés par leurs coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , et le vecteur déplacement ayant pour composantes (u_1, u_2, u_3) . Une telle notation est bien adaptée au calcul tensoriel ou Matriciel. Une autre notation usuellement utilisée par l'ingénieur consiste à noter $(Oxyz)$ le système d'axes. Les coordonnées des points sont (x, y, z) et les composantes du vecteur déplacement sont notées (u, v, w) . Nous reprenons les diverses relations dans le cadre de cette notation.

✓ Contraintes. Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{A.1}$$

Et la matrice colonne des contraintes est :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad \text{A.2}$$

Déformations. Le tenseur des déformations à la même forme que celui du tenseur des contraintes et les éléments de la matrice colonne sont donnés par les expressions :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\
 \varepsilon_2 &= \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y}, \\
 \varepsilon_3 &= \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z}, \\
 \varepsilon_4 &= \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
 \varepsilon_5 &= \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\
 \varepsilon_6 &= \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

✓ Les équations d'équilibre:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + f_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + f_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + f_z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
 \end{aligned}
 \tag{A.4}$$

✓ Conditions de compatibilité :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z}, \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right), \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right), \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \right),
 \end{aligned}
 \tag{A.5}$$

✓ Conditions aux limites. Les conditions sur les contraintes sont :

$\vec{t}(M, t) = \vec{t}_s(M, t)$ sur la frontière (S_σ) Si (t_{sx}, t_{sy}, t_{sz}) sont les composantes du vecteur contrainte St imposé en M et (n_x, n_y, n_z) les composantes du vecteur unitaire de la normale au point M orientée de l'intérieur vers l'extérieur du solide, la condition sur les contraintes s'écrit :

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{Sx} \\ t_{Sy} \\ t_{Sz} \end{bmatrix} \quad \text{A.6}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z &= t_{Sx}, \\ \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z &= t_{Sy}, \\ \sigma_{xz}n_x + \sigma_{yz}n_y + \sigma_{zz}n_z &= t_{Sz}, \end{aligned} \quad \text{A.7}$$

I.B. Équations de la mécanique des milieux continus en coordonnées cylindriques

L'utilisation de coordonnées cylindriques s'impose dans de nombreux problèmes, en particulier lorsque le problème est de révolution. Le point M est repéré par ses coordonnées (r, θ, z) (figure II.1). Les matrices des contraintes et déformations sont de la forme :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \varepsilon(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{A.8}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \\ 2\varepsilon_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}, \end{aligned} \quad \text{A.9}$$

En introduisant les composantes (u_r, u_θ, w) du vecteur déplacement \vec{u} dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ obtenue à partir de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes, par rotation θ autour de la direction \vec{k} . Les relations entre les composantes des matrices des contraintes exprimées dans la base des coordonnées cartésiennes et des coordonnées cylindriques. Les relations fondamentales en coordonnées cylindriques sont ensuite déduites en transposant les relations (I.4) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ et s'écrivent dans le cas d'un problème de statique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + f_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\sigma_{r\theta} \right) + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + f_\theta &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz} \right) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z &= 0, \end{aligned} \quad \text{A.10}$$

CHAPITRE II. COMPORTEMENT MECANIQUE ET CLASSIFICATION RHEOLOGIQUE DES MATERIAUX

II.1. Introduction

R. Hooke (1676), T. Young (1807), A. L. Cauchy (1822), Timoshenko (1934)... tout a été dit, ou presque sur le comportement élastique linéaire des matériaux. Dans ce domaine, on se bornera donc à des rappels sous forme de formulaire, en insistant sur l'élasticité anisotrope si importante pour les matériaux composites et sur l'identification des coefficients. Le terme élasticité est employé ici au sens de réversibilité des déformations. Il n'exclut ni la dissipation thermique (thermoélasticité) ni la dissipation mécanique par viscosité (viscoélasticité).

La thermo-élasticité introduit plusieurs coefficients supplémentaires dans la loi de comportement, dont le coefficient de dilatation, et permet de traiter les problèmes liés aux variations de température comme les problèmes de contraintes d'origine thermique.

La théorie de la viscoélasticité s'est considérablement développée avec la rhéologie dans les années 1960. On se restreint, dans ce chapitre, à la viscoélasticité linéaire, suffisante pour traiter les problèmes de comportement mécanique de certains polymères.

Ces théories sont des théories de milieux continus, les hétérogénéités sont supposées suffisamment petites par rapport à la taille de l'élément de volume pour que les résultats d'expériences effectuées sur ce dernier, soient « bien caractéristiques du comportement macroscopique moyen. Ceci vaut aussi pour les composites et les bétons dont les comportements peuvent être approchés plus finement par les techniques d'homogénéisation.

II.2. Comportement élastique

II.2.1. Domaine de validité et d'application

Tous les matériaux solides possèdent un domaine de l'espace des contraintes à l'intérieur duquel une variation des sollicitations n'entraîne qu'une variation de déformation élastique. Comme on l'a vu au chapitre 1, il s'agit de mouvements réversibles d'atomes, de molécules ou de cellules, qui correspondent à des déformations n'excédant pas 0,2 à 0,5. 10^{-2} pour les matériaux métalliques, les composites, les bétons, les bois, ce qui justifie l'hypothèse des petites déformations. La dissipation est nulle.

La limite de ce domaine d'élasticité, dont une étude précise est faite, dépend de la température et des sollicitations mécaniques antérieures, dues aux procédés d'élaboration ou au service des pièces mécaniques. La température, favorisant les mouvements irréversibles, diminue la taille de ce domaine jusqu'à le rendre nulle à la fusion. Les sollicitations mécaniques, au contraire, par le phénomène d'écrouissage peuvent l'augmenter considérablement.

Avant d'utiliser la théorie de l'élasticité pour telle ou telle application, il y a donc lieu de s'assurer que l'ordre de grandeur des contraintes est bien compatible avec le domaine d'élasticité du matériau considéré, tel qu'il est défini au chapitre V. Ce travail n'est pas toujours réalisable « a priori » mais il l'est toujours « a posteriori ».

L'hypothèse d'isotropie élastique est très bien vérifiée pour les matériaux métalliques, elle l'est un peu moins pour le béton alors que pour les composites et les bois, il faut utiliser des théories à anisotropies particulières.

II.2.2. Formulation

On suit la méthode de l'état local exposée au chapitre 2. La schématisation du solide élastique, définie au chapitre 3, montre que les variables d'état à faire intervenir sont la température et la déformation élastique. Si l'on se restreint aux transformations isothermes, seule la déformation élastique, égale à la déformation totale ε , intervient comme variable d'état; la température intervient comme un paramètre dont dépendent les coefficients d'élasticité. Le comportement est décrit en petites déformations; configuration initiale et configuration actuelle sont donc confondues.

II.2.3. Potentiel thermodynamique

Pour obtenir une théorie linéaire, il suffit de choisir comme potentiel thermodynamique convexe, une forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations:

Soit :

$$\Psi = \frac{1}{2\rho} \mathbf{a} : \varepsilon : \varepsilon \quad (II.1)$$

ρ étant la masse volumique, \mathbf{a} est un tenseur du 4^e ordre, dont les composantes sont les coefficients d'élasticité isotherme éventuellement fonctions de la température.

Par définition de la variable associée, le tenseur des contraintes σ dérive du potentiel pour donner la loi d'état:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = \mathbf{a} : \varepsilon \quad (II.2)$$

Le tenseur \mathbf{a} vérifié certaines propriétés de symétrie. En effet :

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{et} \quad \sigma_{kl} = a_{klij} \varepsilon_{ij} \quad (II.3)$$

en dérivant de nouveau on obtient :

$$a_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = a_{klij} \quad (II.4)$$

$$\sigma = \mathbf{a} : \varepsilon$$

est la loi de Hooke généralisée du milieu élastique linéaire isotrope, qui dépend des 21 coefficients, composantes indépendantes du tenseur symétrique de rigidité élastique.

Par inversion, ou par définition d'un potentiel dual :

$$\Psi^* = \frac{1}{2\rho} \mathbf{A} : \sigma : \sigma \quad (II.5)$$

on introduit de même, le tenseur de souplesse, du 4^e ordre, symétrique, \mathbf{A} :

$$\varepsilon = \mathbf{A} : \sigma \quad (II.6)$$

Le cas de l'élasticité non linéaire se traite par le choix d'autres formes du potentiel Ψ . qui doivent bien entendu assurer la convexité.

II.2.4. Elasticité linéaire isotrope

L'isotropie et la linéarité imposent que le potentiel Ψ soit un invariant quadratique du tenseur des déformations, c'est-à-dire une combinaison linéaire du carré du premier invariant $\varepsilon_1^2 = [\text{Tr}(\varepsilon)]^2$ du second invariant :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\varepsilon^2)$$

$$\Psi = \frac{1}{2\mu} (i\varepsilon_1^2 + 4\mu\varepsilon_{11}) \quad (\text{II.7})$$

Et

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = \lambda \text{Tr}(\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon \quad (\text{II.8})$$

ou

$$\sigma_{ij} = i\varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.9})$$

λ et μ sont les deux coefficients de Lamé.

En travaillant avec la forme duale :

$$\varepsilon = \mathbf{A} : \sigma \quad (\text{II.10})$$

On obtient :

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \mathbf{1} \quad (\text{II.11})$$

Ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.12})$$

E est le module d'Young,

ν est le coefficient de Poisson dont les valeurs sont données sur le tableau du paragraphe précédent du chapitre I pour différents matériaux. Les relations entre parties sphériques :

$$\sigma_H = \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma)$$

$$\varepsilon_H = \frac{1}{3} \text{Tr}(\varepsilon) \quad (\text{II.13})$$

Et déviateurs :

$$\sigma' = \sigma - \sigma_H \mathbf{1}$$

$$\varepsilon' = \varepsilon - \varepsilon_H \mathbf{1} \quad (\text{II.14})$$

sont également utiles :

$$\varepsilon_H = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_H$$

$$\varepsilon' = \frac{1+\nu}{E} \sigma' \quad (\text{II.15})$$

Enfin, indiquons les relations classiques entre les coefficients de Lamé, le module d'Young, le coefficient de Poisson, le module de cisaillement G et le module de compression hydrostatique K .

$\mathbf{1}$ est la tenseur unité.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}, \quad \nu = \frac{i}{2(i+\mu)} \quad (\text{II.16})$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{3\lambda+2\mu}{3}$$

Pour que la loi d'élasticité dérive d'un potentiel quadratique, la seule condition que doivent vérifier les coefficients est (le module E est supposé positif) :

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (\text{II.17})$$

Ce résultat découle immédiatement de la démonstration générale du cas orthotrope

II.3. Cas de l'hypothèse des contraintes planes

(Valable par exemple pour les plaques minces).

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (\text{II.18})$$

De l'expression $\sigma_{33} = 0$, on tire facilement la relation contrainte-déformation en deux dimensions:

$$\sigma_{ij} = \lambda' \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i \text{ et } j = 1, 2) \quad (\text{II.19})$$

où

$$\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (\text{II.20})$$

La relation entre ε et σ devient :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

$$\varepsilon_{13} = 0$$

$$\varepsilon_{23} = 0.$$

Si l'axe d'isotropie transverse est repéré par 3 le matériau est « isotrope » dans tous les plans normaux à \vec{x}_3 . Un composite stratifié obtenu par collage de couches formées de fibres unidirectionnelles et disposées selon « toutes » les directions peut être considéré comme isotrope transverse. Il en est de même des alliages obtenus par solidification orientée.

Une démonstration analogue à celle indiquée plus haut pour le matériau orthotrope montre que seuls 5 coefficients de la matrice d'élasticité sont indépendants. Plus précisément, les conditions d'isotropie dans les plans normaux à \vec{x}_3 impliquent :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Par rapport au cas orthotrope, on a tenu compte des égalités suivantes :

$E_1 = E_2$, mêmes modules d'Young dans la direction 1 et 2.

$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$, même coefficient de Poisson suivant 1 et 2 pour une traction appliquée suivant 3.

$G_{13} = G_{23}$, mêmes modules de cisaillement autour des directions 2 et 1.

$2G_{12} = \frac{E_1}{1+\nu_{12}}$, module de cisaillement autour de 3.

Le matériau est alors caractérisé par 5 coefficients indépendants :

2 Modules de d'Young E_1, E_3 ,

1 Module de cisaillement G_{13} ,

2 Coefficient de Poisson ν_{12}, ν_{13} .

II.4. Généralisation

Voici deux points importants à retenir sur les matériaux élastiques isotropes:

- Dans le comportement élastique isotrope, les cisaillements et élongations sont tout à fait découplés. Ce n'est pas le cas dans les milieux anisotropes comme les matériaux composites;
- Le comportement n'est caractérisé que par deux paramètres scalaires. Ces deux paramètres peuvent être au choix: le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν , les deux coefficients de Lamé, λ et μ , ou les modules de cisaillement et de compressibilité K .
- Notez que l'on a forcément $-1 \leq \nu \leq 1/2$.

La loi de Hooke peut se mettre sous la forme:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{C}}} \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} ; \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ C_{ijkl} = \frac{E}{1+\nu} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Ou sous forme inverse:

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}} ; \varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl} ; D_{ijkl} = \frac{1+\nu}{E} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{II.24})$$

Le tenseur $\underline{\underline{\underline{C}}}$ d'ordre 4 est le tenseur d'élasticité et $\underline{\underline{\underline{D}}}$, son inverse.

Ces deux tenseurs s'expriment à l'aide de $3^4 = 81$ composantes. Il n'y a, en fait, que 36 composantes indépendantes car ces tenseurs possèdent les symétries suivantes (qui proviennent de la symétrie des tenseurs $\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}}$ et $\underline{\underline{\underline{\sigma}}}$ ainsi que de l'existence d'une énergie):

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} ; D_{ijkl} = D_{klij} = D_{jikl} = D_{ijlk} \quad (\text{II.25})$$

Les 36 composantes peuvent être rangées dans un tableau 6×6 et les lois de comportement s'écrivent alors:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

Et inversement:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Compte tenu du caractère isotrope de la loi de Hooke, les tableaux 6*6 seront les mêmes quelle que soit la base orthonormée choisie. Par exemple, ils seront les mêmes pour des coordonnées cylindriques ou sphériques.

Pour terminer, le tableau II.1 donne les modules élastiques approximatifs de quelques matériaux usuels. La plupart des métaux usuels sont, en bonne approximation, isotropes.

Matériaux	ν	E(Mpa)	μ (Mpa)	K(Mpa)
Acier	0.3	205000	78800	170800
Aluminium	0.33	70000	26300	68600
Verre ordinaire	0.22	60000	24600	35700
Béton	0.2	30000	12500	16667
Plomb	0.45	17000	5860	56700
Pléxiglas	0.36	3000	1100	3570
Bakélites (polypropylène)	0.37	1000	365	1280
Caoutchouc	0.5	2	0.67	∞

Tableau II.1. Modules élastiques approximatifs de quelques matériaux.

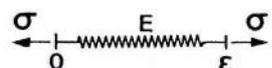
II.5. Schématisation des comportements réels

L'allure qualitative de la réponse des matériaux aux essais caractéristiques permet de les classer à l'aide des qualificatifs rigide, élastique, visqueux, plastique et parfaitement plastique. A chaque schéma type correspond une théorie mathématique qui est développée dans ce chapitre.

II.5.1. Modèles analogiques

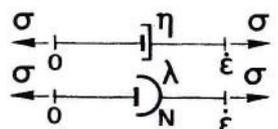
Les modèles analogiques sont des groupements d'éléments mécaniques dont les réponses à des sollicitations sont similaires à celles des matériaux. Ils sont utilisés, souvent à des fins didactiques, pour donner une image concrète des équations de comportement. L'analogie se limite là et ne porte en aucun cas sur les mécanismes physiques eux-mêmes.

- ❖ le ressort qui schématise l'élasticité linéaire



$$\sigma = E \varepsilon$$

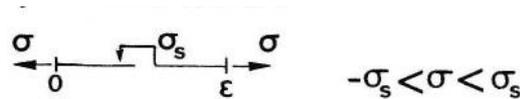
- ❖ l'amortisseur qui schématise la viscosité linéaire ou non



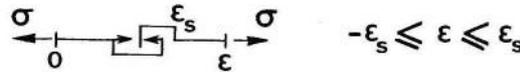
$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$$

$$\sigma = \lambda \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{N}}$$

- ❖ le patin qui schématise un seuil de contrainte



- ❖ la butée qui schématise un seuil de déformation



Ces différents éléments (indice i) peuvent être associés :

- soit en série:

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i \quad \sigma = \sigma_i \quad (II.28)$$

- soit en parallèle :

$$\sigma = \sum_i \sigma_i \quad \varepsilon = \varepsilon_i \quad (II.29)$$

- soit en groupements mixtes.

Les analogies mécanique-électrique permettent de réaliser ces modèles sous forme de réseaux électriques mais les calculateurs numériques ont sup-planté ces calculateurs analogiques.

II.5.2. Solide rigide et fluide parfait

Ils ne sont cités que pour mémoire puisqu'ils sortent du cadre de la mécanique des solides déformables. Dans la pratique, la distinction entre solide et fluide est subjective et ne peut être liée qu'au choix d'une échelle de temps:

- Un solide admet un état d'équilibre sous sollicitation:
- Un fluide subit un écoulement pour toute sollicitation aussi faible soit-elle.

Mais il n'est pas aisé de distinguer un écoulement infiniment lent d'un équilibre atteint pour un temps infini ! Une échelle de temps liée au phénomène étudié permet de lever l'ambiguïté mais les notions de fluide et de solide perdent alors leur sens objectif : tel polymère pourra être considéré comme un solide pour des problèmes de chocs et comme un fluide pour des problèmes de stabilité de longue durée.

II.5.3. Fluide visqueux

Un corps est appelé « fluide visqueux » si ses réponses aux essais caractéristiques ont les allures suivantes (fig. II.1). Ce corps est aussi quelquefois qualifié de solide viscoplastique:

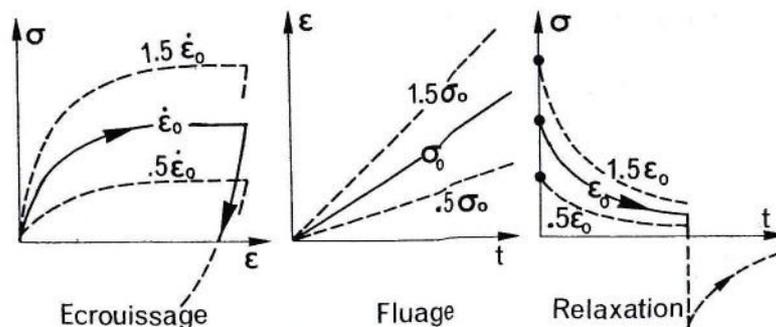
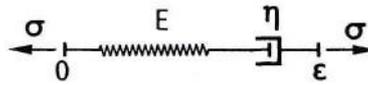


Fig. II.1. Fluide visqueux

- Il y a écoulement pour toute valeur de contrainte: $\dot{\varepsilon} = f(\sigma)$.
- Un modèle analogique simple est le modèle de Maxwell constitué d'un Ressort et d'un amortisseur linéaires en série. Son équation constitutive est :



$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{II.30}$$

Sa réponse au test de relaxation $\epsilon = H(t)$ où $H(t)$ est la fonction échelon d'Heaviside $H = 0$ si $t < 0$, $H=1$ si $t \geq 0$, est :

$$\sigma = E\epsilon_0 \exp\left(-\frac{E}{\eta} \cdot t\right) \tag{II.31}$$

Applications : aux solides « mous » :

- Polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion.
- Béton frais en négligeant son vieillissement.
- De nombreux métaux aux températures proches de la température de fusion.

II.5.4. Solides élastiques

La déformation est essentiellement réversible. L'étude détaillée de ces solides au chapitre 1.

II.5.4.1. Solide élastique parfait

Les réponses qualitatives aux trois essais caractéristiques sont les suivantes (fig. II.2).

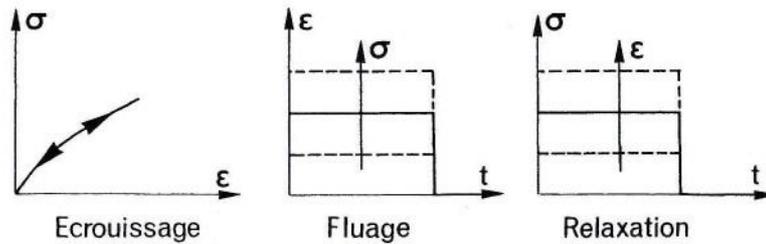


Fig. II.2. Solide parfaitement élastique

- ✓ La réversibilité est instantanée. La relation contrainte-déformation est :

$$\sigma = f(\epsilon) \tag{II.32}$$

- ✓ Le modèle analogique de l'élasticité linéaire est le ressort

$$\sigma = E\epsilon \tag{II.33}$$

- ✓ Applications dans les métaux, les bétons, les roches pour des sollicitations inférieures à la limite d'élasticité.

II.5.4.2. Solide viscoélastique

Ce comportement est illustré dans la figure ci-dessous (fig. II.3).

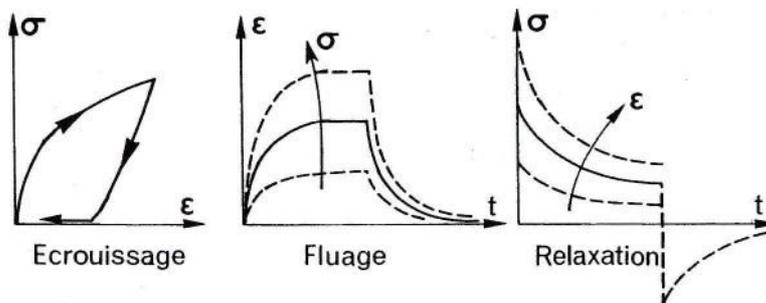
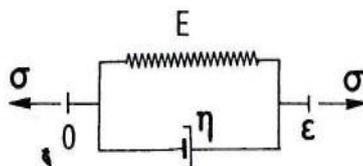


Fig. II.3. Solide visco-élastique.

- La réversibilité est « retardée » et n'intervient qu'après un temps infini $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$.

- Un modèle analogique simple est le modèle de Kelvin-Voigt: un ressort et un amortisseur linéaires en parallèle :



Sa réponse au test de fluage $\sigma = \sigma_0 H(t)$ est:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] \quad (\text{II.34})$$

Les modèles analogiques de Kelvin-Voigt généralisé et de Maxwell généralisé pour les solides sont décrits aux chapitres de *polycopie de cours de comportement mécanique des matériaux métalliques*. Le solide viscoélastique présente souvent du vieillissement :

Applications :

Aux polymères organiques, le caoutchouc, le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

II.5.5. Solides plastiques

On appelle ainsi des solides qui, après cessation des sollicitations, présentent des déformations permanentes instantanément stables et qui sont en équilibre sous sollicitation. Leur comportement ne dépend pas explicitement du temps.

Par définition la déformation plastique ε_p est celle qui correspond à la configuration relâchée: $\varepsilon_p = \varepsilon (\sigma = 0)$.

II.5.5.1. Solide rigide parfaitement plastique

La figure ci-dessous (fig. II.4) montre ce comportement.

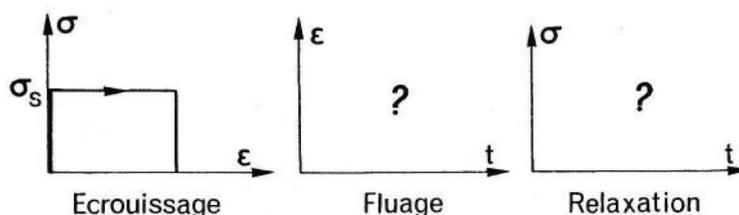


Fig. II.4. Solide rigide parfaitement plastique

La déformation est nulle ou négligeable en deçà d'un seuil de contrainte σ_s et arbitraire pour cette valeur, quelle que soit la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ dans les essais d'écrouissage ou le temps dans les essais de fluage et de relaxation :

$$|\sigma| < \sigma_s \rightarrow \varepsilon = 0 \quad (\text{II.35})$$

$$\sigma = \sigma_s \text{ Sgn}(\dot{\varepsilon}) \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_p \text{ (arbitraire)}. \quad (\text{II.36})$$

Le modèle analogique est le patin.

Applications:

- Mécanique des sols.
- Analyse de la mise en forme des métaux.

II.5.5.2. Solide élastique parfaitement plastique

La déformation est élastique linéaire en dessous du seuil σ_s , et arbitraire et indépendante de la vitesse de déformation pour cette valeur de contrainte comme figuré dans la figure II.5 :

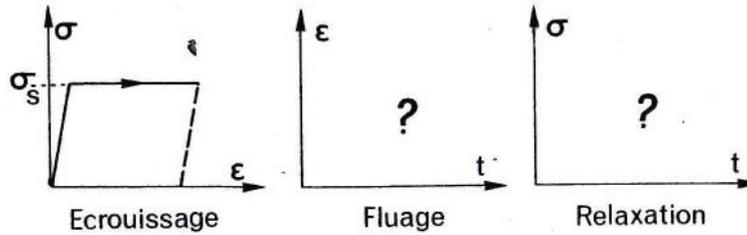


Fig. II.5. Solide élastique parfaitement plastique

$$\begin{aligned}
 |\sigma| < \sigma_s &\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\
 \sigma = \sigma_s \text{Sgn}(\dot{\varepsilon}) &\rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p \text{ (arbitraire)}
 \end{aligned}
 \tag{II.37}$$

Le modèle analogique du solide parfaitement élasto-plastique est le modèle de Saint-Venant, un ressort linéaire et un patin en série:



Applications :

Aciers à faible teneur en carbone (présentant un « palier ») pour $\varepsilon < 2.10^{-2}$ et $T < \frac{1}{4}T_M \cdot (T_M$ étant la température absolue de fusion en °K).

II.5.5.3. Solide élasto-plastique écrouissable

La déformation totale est la somme d'une déformation élastique linéaire et d'une déformation permanente, nulle en deçà du seuil σ_s (fig. II.6)

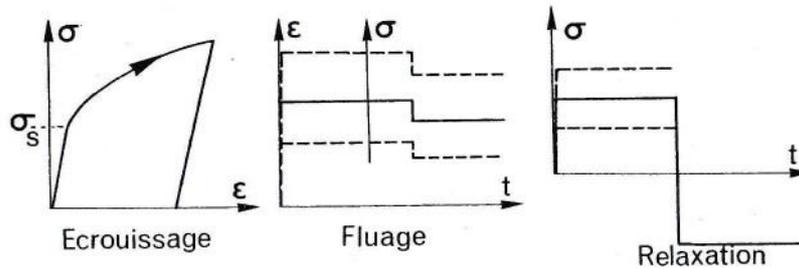
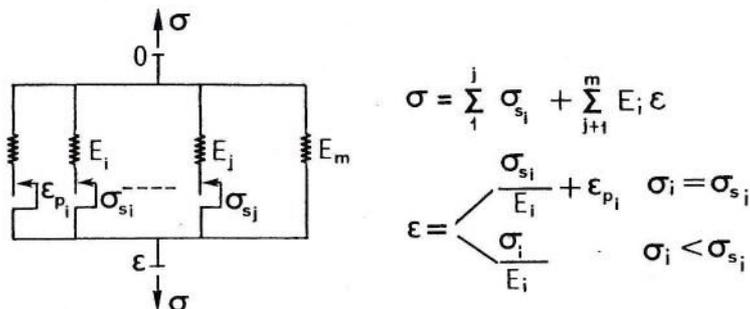


Fig. II.6. Solide élastoplastique écrouissable

$$\begin{aligned}
 |\sigma| < \sigma_s &\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\
 |\sigma| \geq \sigma_s &\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + g(\sigma).
 \end{aligned}
 \tag{II.38}$$

Le modèle analogique correspondant est le modèle de Saint-Venant généralisé. En supposant les seuils σ_{s_i} rangés dans l'ordre croissant et le seuil juste atteint pour l'élément j, son équation constitutive est la suivante :



La courbe de traction est linéaire par morceaux, les seuils en contrainte s'exprimant :

$$\sigma'_{s_j} = \sum_1^{j-1} \sigma_{s_i} + \frac{\sigma_{s_j}}{E_j} \sum_j E_i \tag{II.39}$$

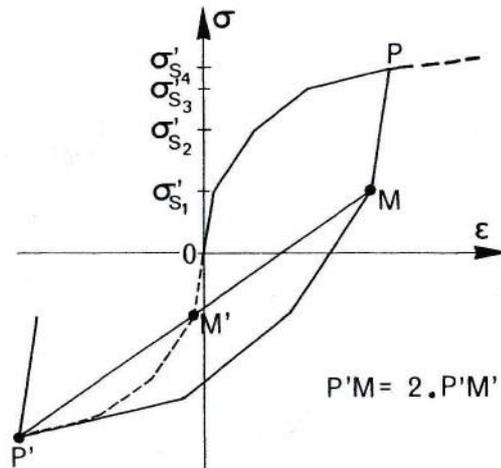


Fig. II.7. Courbe d'écrouissage du modèle de Saint-Venant généralisé

Sa courbe d'écrouissage de décharge après une traction se déduit de la courbe d'écrouissage en compression par une homothétie de rapport 2 et de centre P' symétrique du point de décharge P' par rapport à l'origine O (fig. II.7).

Applications :

Métaux et alliages aux températures inférieures au quart de leur température absolue de fusion (températures exprimées en °K).

II.5.6. Solides viscoplastiques

Les solides appelés viscoplastiques sont ceux qui présentent des déformations permanentes après cessation des sollicitations (comme les solides plastiques) mais qui subissent un écoulement de fluage, fonction du temps, sous sollicitation (équilibre impossible).

II.5.6.1. Solide parfaitement viscoplastique

Ce comportement est illustré ci-dessous (fig. II.8)

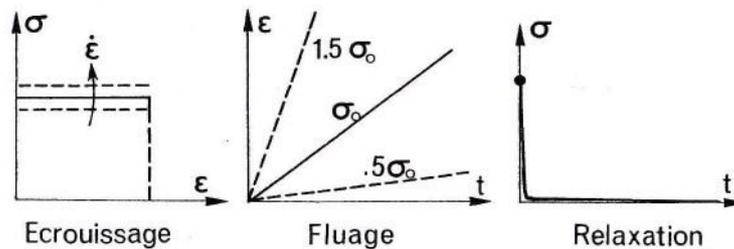


Fig. II.8. Solide parfaitement viscoplastique.

La vitesse de déformation permanente est une fonction de la contrainte comme pour les fluides visqueux : $\sigma(\dot{\epsilon})$.

- *Modèle de Norton :*

$$\sigma = \lambda \dot{\epsilon}^{1/N} \tag{II.40}$$

Applications :

Schématisation très grossière des métaux et alliages aux températures supérieures au tiers de leur température absolue de fusion (en °K).

II.5.6.2. Solide élastique parfaitement viscoplastique

L'élasticité n'est plus considérée comme négligeable mais la vitesse de déformation plastique ne dépend toujours que de la contrainte. Il n'y a pas d'influence de l'écoulement

$$\begin{aligned}
 |\sigma| < \sigma_s &\rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \\
 |\sigma| \geq \sigma_s &\rightarrow \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \dot{\varepsilon} = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma).
 \end{aligned}
 \tag{II.41}$$

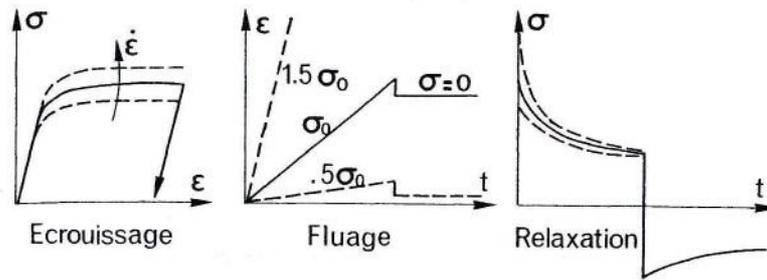
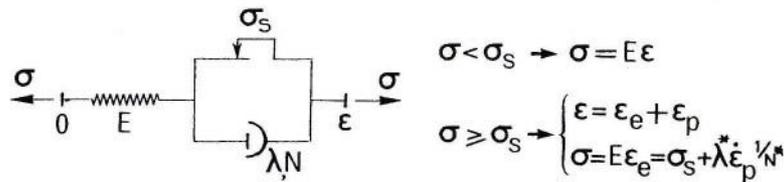


Fig. II.9. Solide élastique parfaitement viscoplastique.

- Modèle de Bingham-Norton.



Sa réponse à une sollicitation de relaxation est :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t) \rightarrow \sigma = \sigma_s + \frac{E \varepsilon_0 - \sigma_s}{\left[1 + \frac{(N-1)E}{\lambda N} (E \varepsilon_0 - \sigma_s)^{N-1} t\right]^{\frac{1}{N-1}}}
 \tag{II.42}$$

II.5.6.3. Solide élasto-visco-plastique écrouissable

C'est le schéma le plus complexe puisque la contrainte dépend de la vitesse de déformation plastique et de la déformation plastique elle-même ou d'une autre variable d'écoulement (II.10).

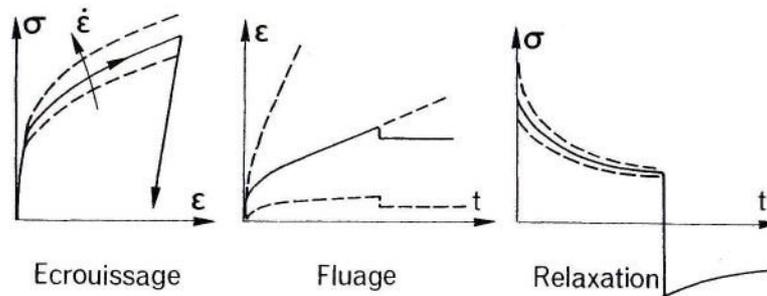


Fig. II.10. Solide élastoviscoplastique.

$$\begin{aligned}
 |\sigma| < \sigma_s &\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\
 |\sigma| \geq \sigma_s &\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \\
 \sigma &= E\varepsilon_e = f(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p).
 \end{aligned}
 \tag{II.43}$$

Applications :

- ✓ Métaux et alliages aux températures moyennes et élevées,
- ✓ Le bois pour des sollicitations élevées.

II.5.7. Caractérisation de l'écroutissage

Il existe plusieurs manières de schématiser le durcissement des matériaux engendré par les déformations.

II.5.7.1. Ecroutissage isotrope

Bien que la plupart des matériaux présentent une forte anisotropie d'écroutissage, le schéma de l'écroutissage isotrope est très utilisé à cause de sa simplicité et de sa bonne représentativité dans le cas du chargement radial, c'est-à-dire lorsque le vecteur représentatif des contraintes dans l'espace des contraintes garde une direction constante.

Pour mettre en évidence cette isotropie ou cette anisotropie, il faut avoir recours à des résultats expérimentaux effectués dans des directions de sollicitations différentes : essais de traction bi-axiale, essais de traction (ou compression) et torsion. L'anisotropie initiale se décèle par des essais sur éprouvettes usinées dans des directions différentes liées à la matière.

On dira qu'un matériau est justiciable de l'hypothèse d'écroutissage isotrope, si la frontière de son domaine d'élasticité ne dépend que d'un paramètre scalaire (fig. II.11):

- ☞ La courbe de compression succédant à une traction dans un essai d'écroutissage se déduit de la courbe de traction monotone par une homothétie de rapport 1 et de centre le point à contrainte nulle (point B de la figure II.11).
- ☞ Les courbes de charge, lieux des points représentant la limite d'élasticité dans l'espace à deux dimensions, contrainte normale et contrainte tangentielle (essais de traction-torsion sur tube pour différents états d'écroutissage), se déduisent les unes des autres par une homothétie de centre O (sur la figure II.11).

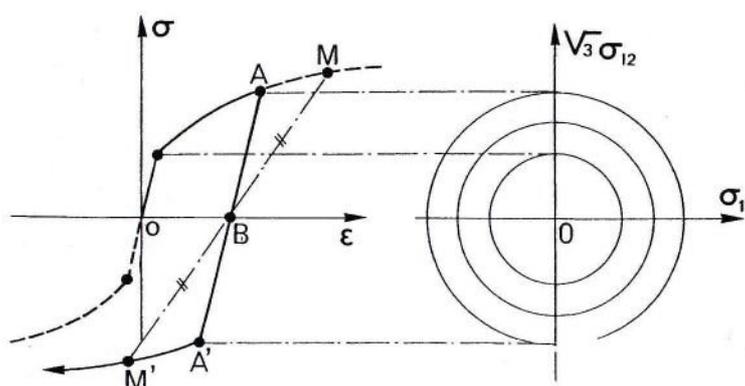


Fig. II.11. Ecroutissage isotrope : essai de traction-compression (à gauche) et essai de traction-torsion (à droite).

II.5.7.2. Ecroutissage cinématique

Une schématisation très utile de l'écroutissage anisotrope est l'écroutissage cinématique linéaire pour lequel le domaine d'élasticité garde une amplitude constante mais se déplace par

translation dans l'espace des contraintes. Le « centre du domaine d'élasticité » (C sur la figure II.12) représente la contrainte interne de l'état neutre.

- ✓ La courbe de compression unidimensionnelle se déduit de la nouvelle courbe de traction par une homothétie de rapport - 1 de centre C.
- ✓ Dans l'essai de traction-torsion les courbes de charge correspondant à des états d'érouissage différents se déduisent les unes des autres par des translations de vecteurs tels que \overrightarrow{OC} .

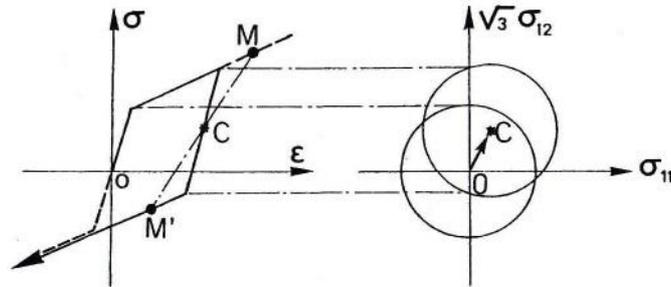


Fig. II.12. Erouissage cinématique Essai de traction-compression (à gauche) et essai de traction-torsion (à droite).

CHAPITRE III. METHODES D'IDENTIFICATION DE COMPORTEMENT MECANIQUE DES MATERIAUX.

III.1. Introduction

Suite à l'intérêt de l'identification des paramètres mécanique dans n'importe étude de modélisation des solides déformables, ce chapitre est dédié aux méthodes expérimentales et numériques utilisé pour l'identification des lois de comportement en mécanique des solides déformables puis nous nous intéressons à la classification de la rhéologie des matériaux et les notions des modèles rhéologiques des solides réel .

L'identification des coefficients caractéristiques de l'élasticité repose sur l'évaluation de raideurs dans des essais statiques de traction-compression, dans des essais de vibrations ou dans des essais de propagation d'ondes. Ces trois grands types de méthode ne donnent pas tout à fait les mêmes résultats pour un même matériau car les méthodes dynamiques ne prennent pas en compte certains mouvements « visqueux » d'atomes ou de molécules, et de ce fait, donnent des rigidités un peu plus grandes.

III.2. Méthodes d'identification des paramètres mécaniques des matériaux

III.2.1. Méthodes statiques

Ce sont celles qui sont conseillées pour les calculs de déformations et de résistance statique des structures. La caractérisation des matériaux aux températures ambiante ou inférieures à 200 à 300 °C se fait par des essais de traction ou compression uni-axiales sur éprouvettes classiques, sur lesquelles la mesure des déformations axiale ε_{11} et transversales ε_{22} , ε_{33} est réalisée par jauges électriques.

III.2.1.1. Cas de l'élasticité linéaire isotrope

La contrainte axiale σ_{11} étant connue par la mesure de la force sollicitatrice de l'éprouvette (voir chap. 1), on obtient :

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \text{ et } \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (\text{III.1})$$

La précision relative généralement obtenue est de la classe de 1%.

III.2.1.2. Cas de l'élasticité orthotrope

On peut obtenir les 9 coefficients caractéristiques par essais de traction ou compression sur des éprouvettes taillées dans les trois directions d'orthotropie et dans trois directions à $\pi/4$ (fig. III.1).

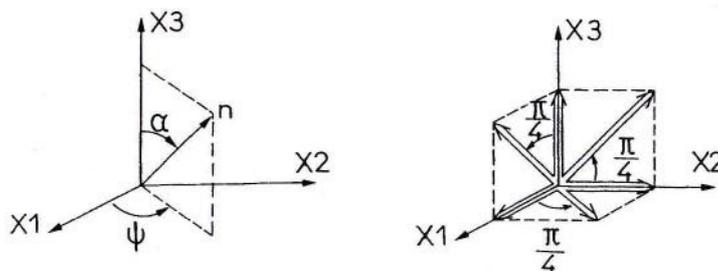


Fig. III.1. Directions pour la caractérisation de l'élasticité orthotrope

Pour cela il faut exprimer à l'aide de la loi de comportement orthotrope la relation entre la contrainte normale σ et la déformation normale \mathcal{E} dans une direction quelconque par rapport aux axes d'orthotropie (Fig. III.1).

$$\vec{n} = \vec{x}_1 \sin \alpha \cos \Psi + \vec{x}_2 \sin \alpha \sin \Psi + \vec{x}_3 \cos \alpha.$$

La contrainte uniaxiale dans un repère dont \vec{n} est vecteur de base a pour composantes dans le repère d'orthotropie $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est comme suite :

$$[\sigma] = \sigma^* \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha \cos^2 \Psi & \sin^2 \alpha \sin \Psi \cos \Psi & \sin \alpha \cos \alpha \cos \Psi \\ \sin \alpha \sin \Psi \cos \Psi & \sin^2 \alpha \sin^2 \Psi & \sin \alpha \cos \alpha \sin \Psi \\ \sin \alpha \cos \alpha \cos \Psi & \sin \alpha \cos \alpha \sin \Psi & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

La déformation correspondante σ s'en déduit par la loi de comportement orthotrope :

$$\varepsilon = A : \sigma \quad (\text{III.3})$$

On en déduit les expressions suivantes en fonction des mesures effectuées : $\sigma^{(n)}, \varepsilon_{11}^{(n)}, \varepsilon_{22}^{(n)}, \varepsilon_{33}^{(n)}$, pour six essais de traction réalisés dans les six directions particulières

$$\begin{aligned} \vec{n} = \vec{x}_1 &\rightarrow E_1 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}, \nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}}, \nu_{13} = -\frac{\varepsilon_{33}^{(n)}}{\varepsilon_{11}^{(n)}} \\ \vec{n} = \vec{x}_2 &\rightarrow E_2 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}, \nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}}, \nu_{23} = -\frac{\varepsilon_{33}^{(n)}}{\varepsilon_{22}^{(n)}} \\ \vec{n} = \vec{x}_3 &\rightarrow E_3 = \frac{\sigma^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}, \nu_{31} = -\frac{\varepsilon_{11}^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}}, \nu_{32} = -\frac{\varepsilon_{22}^{(n)}}{\varepsilon_{33}^{(n)}} \\ \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &\rightarrow \frac{1}{G_{12}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1-\nu_{21}}{E_2} - \frac{1-\nu_{12}}{E_1} \\ \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_2 + \vec{x}_3) &\rightarrow \frac{1}{G_{23}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1-\nu_{23}}{E_2} - \frac{1-\nu_{32}}{E_3} \\ \vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{x}_3 + \vec{x}_1) &\rightarrow \frac{1}{G_{31}} = 4 \frac{\varepsilon^{(n)}}{\sigma^{(n)}} - \frac{1-\nu_{13}}{E_1} - \frac{1-\nu_{31}}{E_3}. \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Des essais de cisaillement pur ou de cisaillement par torsion de tubes permettent des recoupements intéressants. La classe de précision relative obtenue est de l'ordre de 1 à 5%

III.2.2. Méthodes dynamiques

Dans le domaine des basses ou moyennes fréquences (10 à 100 Hz), on peut tirer le module d'Young de la mesure des premières fréquences propres d'une poutre en vibration de flexion.

Par exemple pour une poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre, la première fréquence f s'exprime par :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3,5156}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad \text{d'où} \quad E = \omega^2 \frac{\rho S L^4}{12,3596 I} \quad (\text{III.5})$$

où S est la section (constante) de la poutre, avec :

L est sa longueur,

I est son moment d'inertie de flexion.

ρ est la masse volumique du matériau,

ω est la première pulsation propre qui résulte de la mesure.

Dans le domaine des hautes fréquences ($> 20\,000$ Hz), on peut utiliser la mesure du temps de parcours des ondes ultrasonores. Par exemple, dans un milieu élastique linéaire isotrope de constantes élastiques E et ν et de masse volumique ρ , les vitesses des ondes longitudinales v_L , et transversales v_T s'expriment par :

$$v_L^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad v_T^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (\text{III.6})$$

d'où l'on tire :

$$E = \rho v_T^2 \frac{3v_L^2 - 4v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{v_L^2 - 2v_T^2}{v_L^2 - v_T^2} \quad (\text{III.7})$$

Les techniques ultrasonores permettent de mesurer des temps de parcours, et donc des vitesses, avec une précision relative de l'ordre de 10^{-4} ce qui conduit à une précision relative de $3 \cdot 10^{-3}$ sur le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

III.3. Techniques et Méthode phénoménologique globale

On distingue généralement trois grandes méthodes de formulation des lois de comportement des matériaux :

- L'approche microscopique qui tente de modéliser les mécanismes de déformation et de rupture aux échelles atomique et cristalline ou moléculaire, le comportement macroscopique étant le résultat d'une intégration ou d'une moyennisation des variables microscopiques à l'échelle de l'élément de volume de la mécanique.
- L'approche thermodynamique qui introduit un milieu continu homogénéisé équivalent au milieu réel et qui représente les phénomènes physiques microscopiques par des « variables internes » macroscopiques.
- L'approche fonctionnelle qui conduit à des lois héréditaires de type intégral faisant intervenir des fonctions caractéristiques des matériaux, exprimées elles aussi en termes de variables macroscopiques.

Aucune de ces trois approches ne permet des identifications directes : les variables microscopiques (densité de dislocations, densité de cavités, texture, ...) sont difficilement mesurables, et difficilement utilisables dans les calculs pratiques, les potentiels thermodynamiques sont pratiquement inaccessibles aux mesures ; les variables internes, par définition, ne sont pas directement mesurables ; les fonctions héréditaires nécessitent la connaissance de toute l'histoire des variables observables ce qui pose des problèmes tant d'ordre théorique que d'ordre expérimental.

La méthode phénoménologique globale consiste à étudier l'élément de volume de matière au travers des relations de cause à effet qui existent entre les variables physiquement accessibles constituant les entrées et les sorties du processus étudié. On détermine ainsi les réponses du matériau à des entrées spécifiques. Ces réponses sont suffisantes pour caractériser qualitativement les matériaux mais elles ne constituent pas (sauf pour les phénomènes linéaires) des lois de comportement.

Par élément de volume au sens de la mécanique physique des solides, il faut entendre un volume suffisamment important par rapport aux hétérogénéités de la matière et suffisamment

petit pour que les dérivées partielles des équations de la mécanique des milieux continus aient un sens. Ci-dessous le tableau donne l'ordre de grandeur de tailles raisonnables d'éléments de volume représentatifs en dessous desquels il est illusoire de donner un sens physique aux contraintes ou déformations autre que celui d'une moyenne sur le volume « homogénéisé » en question.

Matériaux	Hétérogénéités	Eléments de volume
Matériaux et alliages	Cristal $1\mu\text{m}$ à 0.1 mm	$0.5\times 0.5\times 0.5\text{ mm}$
Polymères	Molécule $10\mu\text{m}$ à 0.05mm	$1\times 1\times 1\text{ mm}$
Bois	Fibres 0.1 à 1 mm	$1\times 1\times 1\text{ cm}$
Béton	Granulats $\approx 1\text{cm}$	$10\times 10\times 10\text{ cm}$

Tableau III.1 . Ordre de grandeur des éléments de volume représentatifs.

Les variables physiquement accessibles de l'élément de volume sont celles que l'on peut déduire simplement des 4 grandeurs mesurables classiques de la mécanique : déplacements, force, temps, température.

- Les déformations et leurs vitesses
- déformation totale tridimensionnelle ou unidimensionnelle \mathcal{E} avec son expression en grandes déformations $\varepsilon_V = \ln(l + \varepsilon)$.
- déformation élastique réversible ε_e ou ε^e .
- déformation permanente ε_p ou ε^p
- La contrainte tridimensionnelle ou unidimensionnelle σ_a avec son expression approchée en grandes déformations $\sigma_a = (1 + \sigma)$.
- La température T.
- Le temps t ou le nombre de cycles à rupture t_R ou N_R .

La classification qui découle de la méthode phénoménologique globale ne doit pas être considérée comme intrinsèque ; il s'agit seulement des repères de caractéristiques d'ensemble. Le comportement d'un matériau donné ne peut être représenté par un modèle schématique qu'en fonction de l'utilisation souhaitée et de la précision désirée. Tel acier à température ambiante pourra être considéré comme :

- Élastique linéaire pour un calcul de déformation d'une structure.
- Viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations.
- Rigide parfaitement plastique pour un calcul de charges limites.
- Elastoplastique écrouissable pour un calcul précis de déformations permanentes.
- Elastoviscoplastique pour les problèmes de relaxation des contraintes.
- Endommageable par ductilité pour un calcul de limite de mise en forme.
- Endommageable par fatigue pour un calcul de durée de vie.

III.4. Méthodes expérimentales

III.4.1. Essais de caractérisation

Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en traction-compression simples, à température constante. C'est donc sur eux qu'est fondée la classification des solides réels. L'éprouvette est soumise à une sollicitation axiale (Force ou Déplacement) qui engendre un état de contrainte ou de déformation uniformes dans tout le

volume utile ce qui permet de l'assimiler à un élément de volume. Ce qui suit s'applique dans le cas des matériaux isotropes.

L'état uniaxial est défini par un état unidimensionnel en contrainte mais bidimensionnel en déformation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{pmatrix} \quad (III.8)$$

Où ν^* est le coefficient de contraction, égal au coefficient de Poisson ν en élasticité.

En élastoplasticité ou élastoviscoplasticité les hypothèses de découplage des déformations élastique et plastique ($\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$) et d'incompressibilité plastique ($Tr(\varepsilon^p) = 0$) permettent d'exprimer simplement le coefficient de contraction ν^*

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (III.9)$$

$$\nu^* = \nu \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} \quad (III.10)$$

avec la loi d'élasticité linéaire :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

$$\nu^* = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{E \varepsilon} \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \quad (III.11)$$

Le graphe de cette fonction, confronté à quelques résultats expérimentaux pour un alliage d'aluminium dont la courbe d'érouissage à l'allure de celle de la Figure III.2.

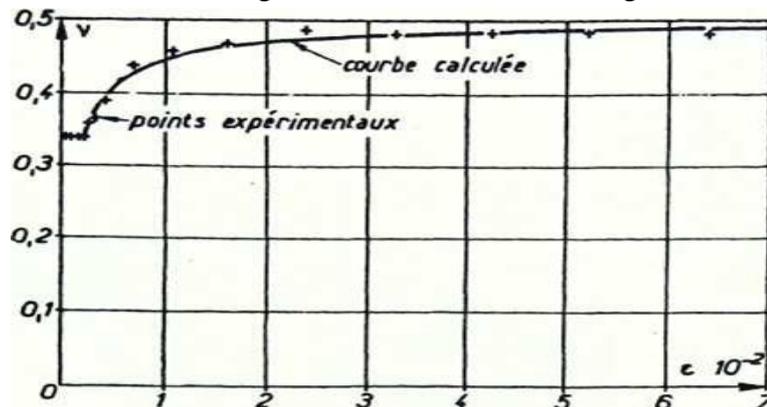


Fig. III.2. Coefficient de contraction élastoplastique Alliage d'aluminium AU4G.

III.4.2. Essai d'érouissage en traction ou compression simples

C'est l'essai le plus courant ou l'éprouvette est soumise à une déformation à vitesse constante. La réponse est constituée par la variation de la contrainte σ en fonction de la déformation ε qui met en évidence le durcissement du matériau (Fig. III.3).

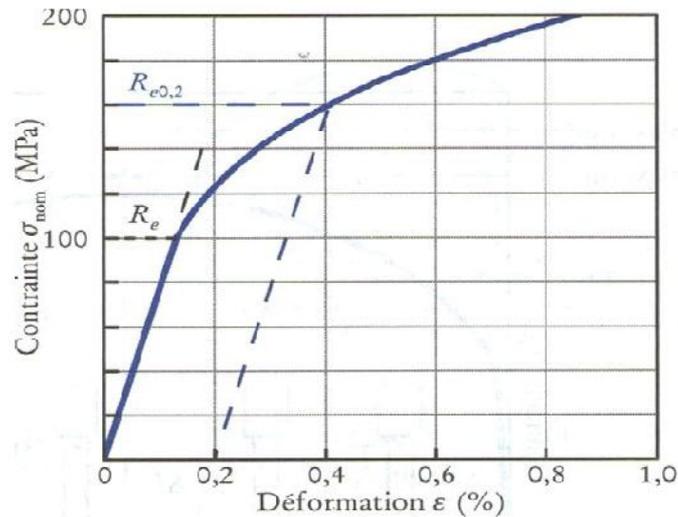


Fig. III.3 : Courbe de l'essai d'écroutissage.

III.4.3. Essai de fluage en traction ou compression simples

L'éprouvette est soumise à un échelon de contrainte (contrainte apparente) et l'on étudie comment varie la déformation \mathcal{E} en fonction du temps t , ce qui caractérise le durcissement et la viscosité du matériau (Figure III.4). L'attente à contrainte nulle (point B) correspond à l'essai de recouvrance. La recouvrance partielle de la déformation est schématisée sur la partie droite de la Figure III.4.

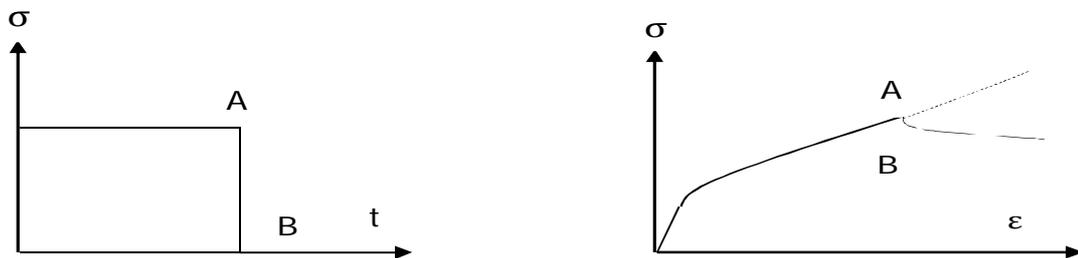


Fig. III.4. Essai de fluage puis de recouvrance.

III.4.4. Essai de relaxation en traction ou compression simples

C'est l'essai dual du précédent : la réponse en contrainte à un échelon de déformation ; elle est gouvernée principalement par la viscosité mais dépend du durcissement induit par le chargement initial (Figure III.5).

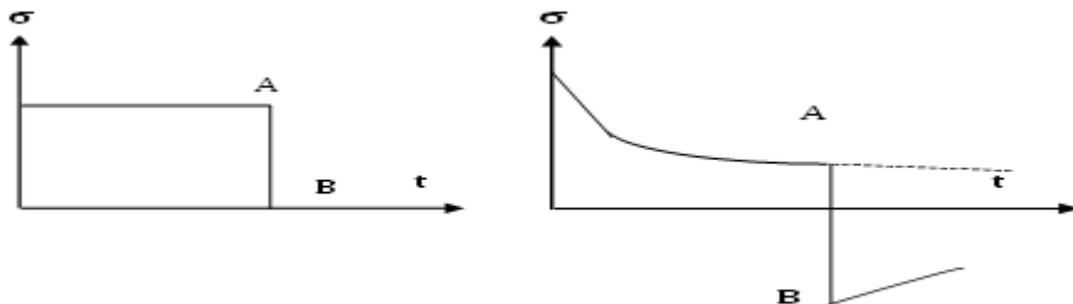


Fig. III. 5. Essai de relaxation.

III.4.5. Essai d'écroissage-relaxation multiple

Comme son nom l'indique il combine deux types d'essai et permet de caractériser par un seul essai sur une seule éprouvette l'écroissage du matériau et sa viscosité par des relaxations effectuées successivement à différentes valeurs de déformation (Fig. III.).

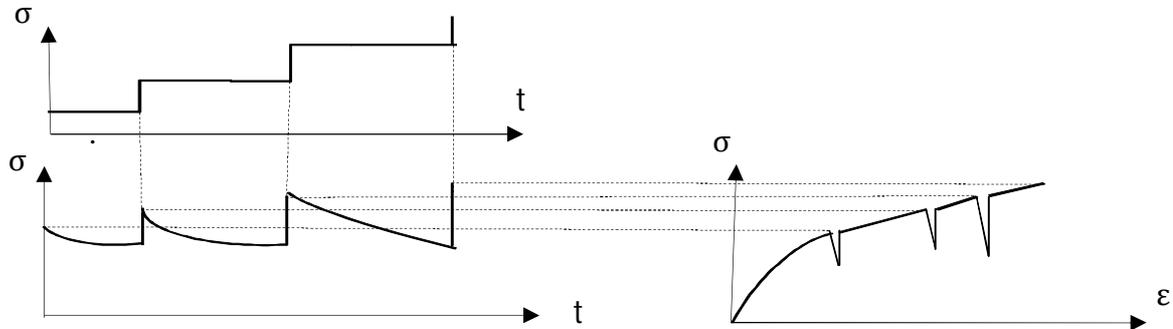


Fig. III.6. Essai d'écroissage relaxation-multiple.

III.4.6. Essais cycliques

L'éprouvette est soumise à une sollicitation (contrainte ou déformation) périodique et l'on étudie l'évolution des cycles réponses dans le graphe (σ , ϵ).

En général la réponse tend à se stabiliser au bout d'un certain nombre de cycles. On utilise alors la courbe cyclique qui représente le lieu des sommets des boucles stabilisées correspondant à différents niveaux de contrainte ou de déformation (Figure III.7). Dans le cas des matériaux polymères ou, plus généralement, des matériaux viscoélastiques, les sommets des boucles sont difficiles à définir. On parle alors d'essais « harmoniques ».

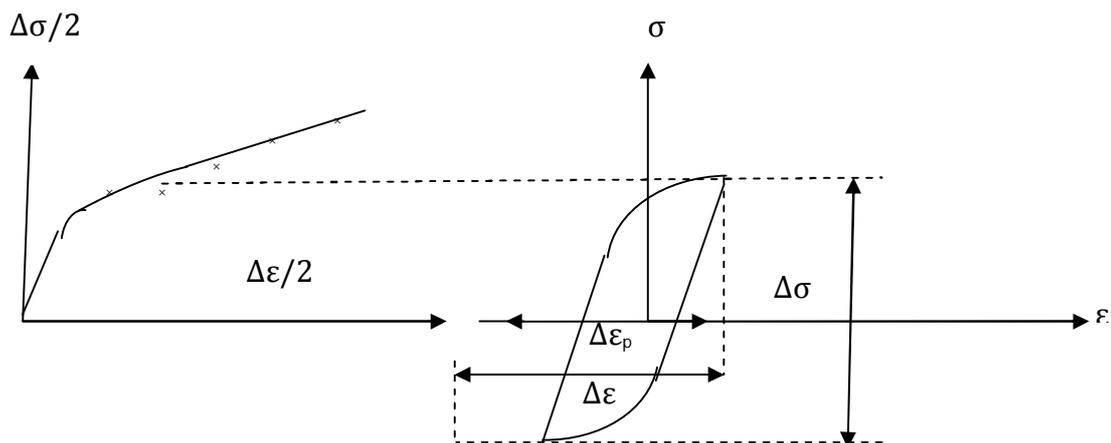


Fig. III.7. Courbe d'écroissage cyclique

III.4.7. Essais de rupture

On utilise les 4 types d'essais précédents en mesurant les conditions correspondantes à la rupture :

- Contrainte et déformation à rupture.
- Temps ou nombre de cycles à rupture.

- Energie dissipée à rupture.

Certaines caractéristiques nécessitent l'utilisation d'éprouvettes de géométries particulières (éprouvettes entaillées pour la mesure de la résilience dans l'essai Charpy, éprouvettes fissurées pour la mesure de la ténacité, etc...).

III.4.8. Essais multidimensionnels

Ils sont malheureusement peu pratiqués à cause des difficultés expérimentales. Parmi les essais possibles : traction-cisaillement (ou compression-cisaillement), traction biaxiale, compression triaxiale, c'est l'essai de traction- cisaillement par traction-torsion de tubes qui présente le plus d'intérêt pour la caractérisation de l'anisotropie. La force de traction et le couple de torsion sont appliqués soit simultanément, soit successivement et l'on enregistre la rotation et l'allongement correspondants.

III.4.9. Problème des matériaux anisotropes

Les difficultés sont encore plus grandes dans le cas des matériaux anisotropes, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe des directions privilégiées :

- l'essai de traction ou de compression est encore facile à interpréter lorsqu'il est réalisé dans une direction principale d'anisotropie.
- l'essai de torsion sur éprouvette creuse est déjà plus délicat : pour une éprouvette taillée dans une tôle anisotrope par exemple, les déformations de cisaillement ne sont plus uniformes sur la circonférence (les modules de cisaillement en travers long et en travers court sont différents).

D'une façon générale les essais multidirectionnels sur matériaux anisotropes ne peuvent être interprétés sans faire référence à une modélisation particulière. Seul l'essai bi-axial réalisé dans les directions principales d'anisotropie permet de s'en affranchir.

III.5. Formulation en contraintes et déformations des essais

III.5.1. Machines d'essais

La méthode phénoménologique nécessite la réalisation d'expériences sur un élément de volume de matière. Dans la mesure du possible les éprouvettes doivent être soumises à des champs uniformes de contrainte, déformation et température : c'est là une des difficultés des essais mécaniques de caractérisation.

III.5.2. Essais unidimensionnels monotones et cycliques

L'essai le plus couramment utilisé est l'essai en traction simple dans lequel la partie utile de l'éprouvette est soumise à un champ de contrainte uni-axial. La figure III.8 donne le schéma de principe d'une installation moderne, dont les parties essentielles sont :

- Le système d'amarrage des têtes d'éprouvettes.
- Le dynamomètre mesurant l'effort appliqué à l'éprouvette.
- Le capteur de mesure de l'allongement de l'éprouvette.
- Le bâti de la machine, dont la rigidité doit être aussi importante que possible.
- Le système de chauffage.
- le système d'application des efforts.

En fonction du type de chargement imposé, l'application des efforts se fait de diverses manières : système de masse pour les machines de fluage, système écrou-vis sans fin actionnée par moteur électrique, système hydraulique à servo-commande pour les installations plus sophistiquées.

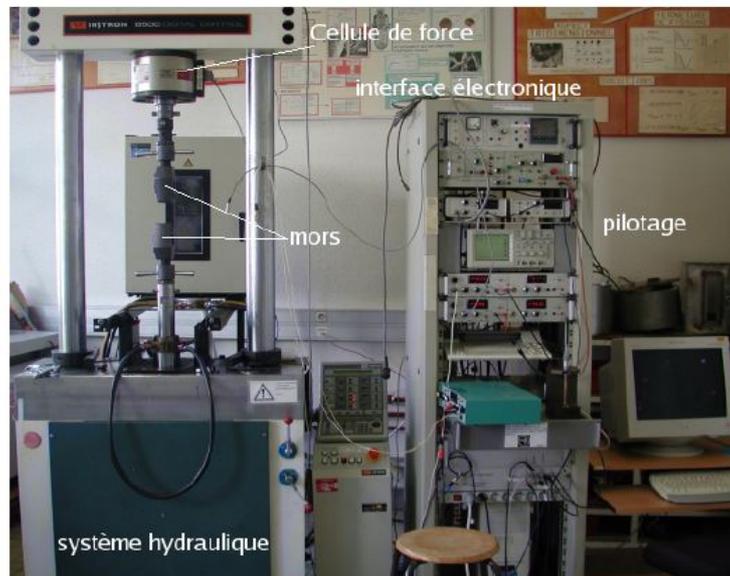


Fig. III.8. Machine d'essais en traction compression.

L'éprouvette elle-même comprend une partie utile constituée d'un fût cylindrique (Fig. III.9) des têtes de fixation et, entre les deux, des raccords conçus pour minimiser les concentrations de contrainte.

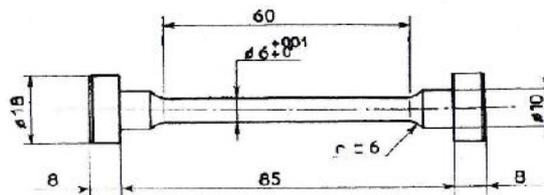


Fig. III.9. Epreuve de traction.

Pour les essais de traction la partie utile peut être très longue, les limitations proviennent de l'usinage et du système de chauffage. Au contraire, les essais de compression exigent des éprouvettes beaucoup plus compactes pour éviter les problèmes de flambement.

Pour les essais à température élevée, on utilise des fours à résistance, le chauffage par effet Joule (résistance électrique de l'éprouvette) ou le chauffage par induction haute fréquence qui est certainement la meilleure solution pour les essais de courte ou moyenne durée. Le choix de la technique dépend du type d'essai (monotone ou cyclique), et des températures à obtenir (température uniforme et constante ou température variable).

III.5.3. Essais multidimensionnels

Il s'agit de réaliser des états de contrainte complexes sur un élément de volume qui puisse être considéré comme isostatique. L'état de contrainte doit pouvoir être déterminé par les seules équations d'équilibre globales, indépendamment du comportement différentes techniques sont utilisées.

III.5.3.1. Essais en traction-compression-pression interne ou externe d'éprouvettes cylindriques creuses

Cette technique est intéressante car elle ne nécessite pas de machines spéciales. Les dispositifs de pressurisation hydrauliques (à température ambiante) ou à gaz (à température élevée) s'adaptent sur la plupart des machines de traction-compression. Si l'épaisseur e des parois de l'éprouvette est suffisamment petite par rapport au rayon R , on obtient des états biaxes quelconques, on peut même simuler un cisaillement pur ($\sigma_2 = -\sigma_1$) mais les directions principales des contraintes restent fixes (Fig. III.10).

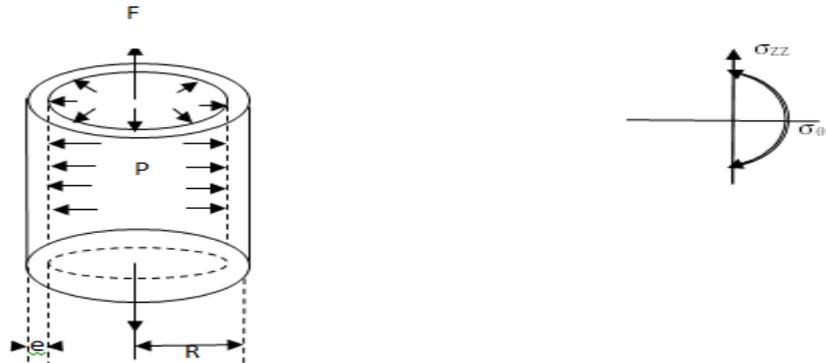


Fig. III.10. Cas de traction-compression et pression interne.

Le tenseur de contraintes est donné sous la forme suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} = \frac{P}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} = \frac{PR}{e} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \approx \frac{PR}{2e} + \frac{F}{S} \end{pmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Il est très utilisé en mécanique des sols et des roches on pratique beaucoup ce type d'essai mais sur des éprouvettes pleines avec pression externe produite par une cellule de pression.

III.5.3.2. Essais en traction-compression-torsion sur éprouvettes cylindriques creuses

Les états de contrainte possibles sont plus limités mais on peut étudier des trajets de chargement avec variation des directions principales des contraintes (Fig. III.11). La machine est constituée d'un vérin linéaire et d'un vérin torique avec dispositif de découplage. Les machines modernes hydrauliques asservies sont pilotées par ordinateur.

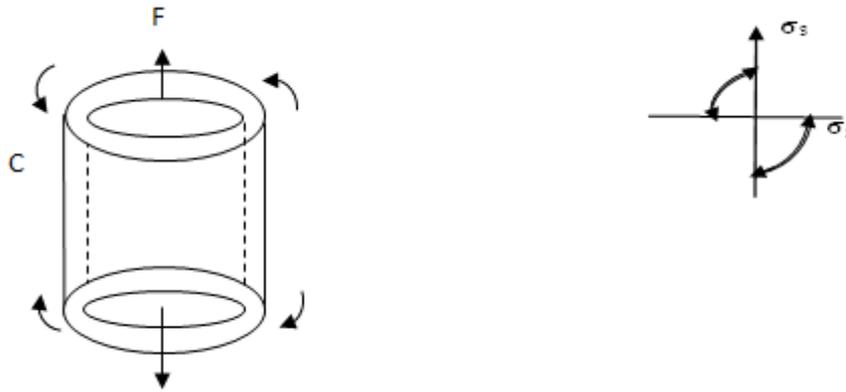


Fig. III.11. Cas de traction-compression et domaine de contraintes possible.

Dans ce cas le tenseur de contraintes est sous la forme suivante :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta x} = \frac{C}{J} \\ 0 & \sigma_{\theta x} = \frac{C}{J} & \sigma_{zz} = \frac{F}{S} \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

(C est le couple de torsion ; J est le moment d'inertie de torsion de l'éprouvette).

III.5.4. Essais bi-axiaux sur éprouvettes cruciformes

La machine nécessite deux ou quatre vérins linéaires placés à 90°. Pour réaliser des états de contrainte uniformes, il faut que les bras de la croix aient une rigidité transversale Assez faible. On peut par exemple pratiquer des évidements (Fig. III.12). Les chargements possibles sont tels que les contraintes principales sont positives, leur direction est constante. On peut aussi réaliser des cas de traction bi-axiale sur des éprouvettes en tôles planes ou en forme de calottes sphériques sollicitées par une pression, mais on ne peut décrire que des chemins de chargement radiaux ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi}$).

III.5.5. Essais en compression triaxiale

Ce type d'essai est surtout utilisé en mécanique des sols et des roches, il nécessite des machines de mise au point très délicate.

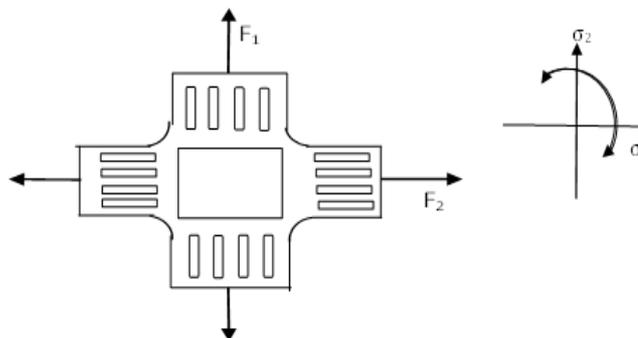


Fig. III.12. Cas de bi-traction et domaine de contraintes possible.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha F_1 - \beta F_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha F_2 - \beta F_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.14})$$

III.6. Techniques de mesure des variables caractéristiques

III.6.1. Forces et contraintes

Les contraintes se déduisent des forces sollicitatrices par les équations de la statique pour les cas isostatiques. Trois exemples sont donnés sur les Figure III.10 ,11 et 12. Les forces (ou couples) appliqués aux éprouvettes sont mesurés par des dynamomètres montés en série avec les éprouvettes. Les dynamomètres à jauges de Déformation permettent d'atteindre une précision relative de 10^{-3} ce qui est en général suffisant pour la caractérisation des matériaux.

III.6.2. Déplacements et déformations

La mesure du déplacement relatif de deux points d'une éprouvette est beaucoup plus délicate que la mesure de la force sollicitatrice car il s'agit de monter un capteur « en parallèle » avec l'éprouvette et non en série. On utilise essentiellement deux techniques : les mesures locales par jauges électriques de déformation et les mesures globales de déplacements.

✓ Jauges extensométriques

Un fil résistant bien collé sur une éprouvette subit le même allongement que cette dernière ; il s'ensuit donc une variation de résistance électrique qui se trouve être proportionnelle à la déformation ε . Une mesure précise de cette variation de résistance dans un pont de Wheatstone permet de déceler des déformations de l'ordre de $\varepsilon = 10^{-7}$. C'est le qualificatif de « bien collé » du début de ce paragraphe qui limite l'emploi de cette technique particulièrement commode. Les colles ne résistent pas aux températures élevées si bien que les mesures de déformation par jauges ne sont utilisées qu'à la température ambiante, au-dessous de la température ambiante et aux températures peu élevées ne dépassant pas 200 à 400 °C.

✓ Capteurs de déplacement

La déformation peut aussi se déduire, par les équations de la mécanique des milieux continus, du déplacement de deux points matérialisés de l'éprouvette. Le déplacement axial peut être mesuré par un extensomètre fixé soit sur le fût cylindrique de l'éprouvette par des couteaux, soit sur les têtes d'amarrage de l'éprouvette. On peut aussi mesurer la variation du diamètre de l'éprouvette en évitant d'utiliser des couteaux qui souvent induisent une amorce de rupture mais le dépouillement doit tenir compte de la variation du coefficient de Poisson avec la déformation plastique (paragraphe 0). Les extensomètres inductifs ou à jauges de déformation permettent d'atteindre une précision absolue de l'ordre de $1\mu\text{m}$. Les extensomètres optiques permettent d'abaisser à $0,2\mu\text{m}$ cette précision mais ils sont coûteux et d'emploi délicat.

III.6.3. Déformation plastique : Longueur utile des éprouvettes

On appelle longueur utile d'une éprouvette la longueur L_0 qui sous sollicitation dévient L et qui permet de calculer la déformation longitudinale ε par la simple relation :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (\text{III.15})$$

La déformation plastique se mesure en retranchant la déformation élastique à la déformation totale ε (mesurée par une jauge électrique par exemple). En traction (compression) on a ainsi :

$$\varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} = \varepsilon - \frac{F}{ES} \quad (\text{III.16})$$

S : étant la section de l'éprouvette.

Le module d'élasticité est donné par le début de l'essai, lorsque l'effort est suffisamment faible pour que l'éprouvette reste élastique ; on a alors :

$$E = \frac{F}{S\varepsilon_e} \quad (\text{III.17})$$

Lorsque l'extensomètre ne peut être monté directement sur la partie cylindrique de l'éprouvette, on a recours à une longueur utile équivalente corrigée pour tenir compte de la déformation plastique dans les zones de raccordement. Avec les notations de la figure 10, celle-ci est définie par :

$$L_p = \frac{u_p}{\varepsilon_{p(0)}} = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\varepsilon_p(x)}{\varepsilon_p(0)} d(x) \quad (\text{III.18})$$

On verra que la déformation plastique peut s'exprimer comme une fonction puissance de la contrainte $\varepsilon_p = (\sigma/K)^{1/M}$. Par une méthode de tranches, en négligeant les effets de triaxialité dans la zone de raccordement, on montre facilement que :

$$L_p = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{S_0}{S(x)} \right)^M d(x) \quad (\text{III.19})$$

La longueur utile plastique est donc définie à partir de la géométrie de l'éprouvette (loi des sections $S(x)$) et de l'exposant d'écrouissage. La façon de procéder pour mesurer la déformation plastique est donc la suivante :

- Etablir la relation Force-Déplacement par enregistrement direct dans l'essai de traction (par exemple)
- Retrancher les jeux U_j et le déplacement élastique pour obtenir le déplacement plastique, la raideur R de l'ensemble éprouvette et amarrages au niveau de l'extensomètre étant obtenue par l'enregistrement initial dans le domaine élastique (Figure III.13).

$$u_p = u - u_j - \frac{F}{R} \quad (\text{III.20})$$

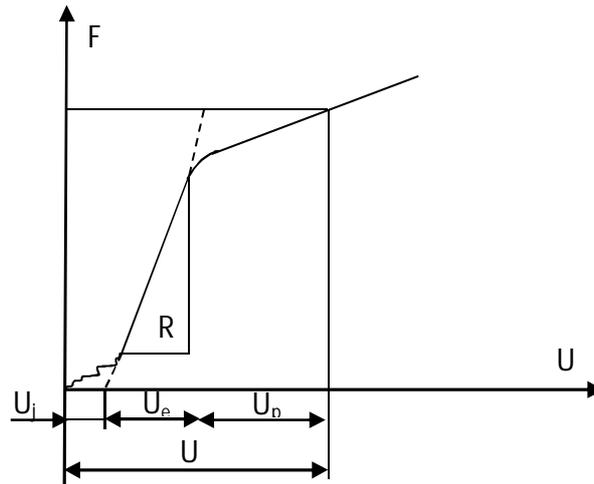


Fig. III.13. Enregistrement brut d'un essai d'écroutissage.

La relation $F(u_p)$ fournit une approximation de l'exposant d'écroutissage M . Il y a en effet identité entre les exposants des lois puissance :

$$\varepsilon_p = \frac{u_p}{L_p} \text{ et } F = K' u_p^M \quad (\text{III.21})$$

Puisque :

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ et } \varepsilon_p = \frac{u_p}{L_p} \quad (\text{III.22})$$

On en déduit la longueur utile équivalente L_p et donc :

$$\varepsilon_p = \frac{u_p}{L_p} \quad (\text{III.23})$$

Notons que cette longueur utile peut être définie au moyen d'un essai préalable pour une éprouvette, un matériau et une température donnés. Même si les hypothèses faites pour son établissement ne sont pas parfaitement rigoureuses elles sont suffisantes puisqu'il s'agit en fait d'une correction par rapport à la longueur de la zone cylindrique.

III.7. Technique de la température

La technique la plus utilisée est celle des thermocouples : la mesure de la force électromotrice qui naît par effet Pelletier entre une soudure « chaude » de deux fils, tels que Chromel-Alumel par exemple, et leurs extrémités placées à une même température de référence.

Si l'on dispose d'un appareil de mesure sensible au μV la précision théorique des thermocouples Chromel-Alumel est de $2,5 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}$. Cette précision est largement suffisante pour les essais de caractérisation des matériaux où l'on peut se satisfaire d'une précision absolue de l'ordre de $\pm 0,1$ à $0,5 \text{ }^\circ\text{C}$. C'est en viscoplasticité que la situation est la plus critique. Un calcul fondé sur la relation de Dom qui exprime la variation de vitesse de déformation plastique en fonction de la température :

$$\dot{\varepsilon}_p = f(\sigma, \dots) \exp\left(-\frac{\Delta H}{KT}\right) \quad (\text{III.24})$$

Permet de montrer que la précision relative à exiger sur la température doit être de l'ordre de 15 à 70 fois supérieure à la précision relative souhaitée sur la déformation.

$$\frac{\delta \varepsilon_p}{\varepsilon_p} \approx 15 \text{ à } 70 \frac{\delta T}{T} \quad (\text{III.25})$$

Une mesure de déformation de la classe de précision de 2 % impose à 500 °C une température uniforme sur l'éprouvette et contrôlée à environ 0,5 0 près. Les thermocouples doivent être soudés sur l'éprouvette, ce qui constitue une amorce de rupture. On ne peut donc les utiliser que pour les essais destinés à l'étude du comportement à la déformation. Pour les essais de rupture statique ou par fatigue on peut employer des capteurs optiques qui mesurent rémission infrarouge de l'éprouvette. Un inconvénient toutefois, le pouvoir émissif des éprouvettes varie avec leur état d'endommagement.

III.8. Endommagement

On verra que les mesures globales d'endommagement ne font appel qu'à des évaluations de contraintes et de déformations en fonction du temps ou du nombre de cycles.

III.8.1. Longueur ou surface de fissure

Il s'agit de mesures souvent délicates car la pointe ou le front de fissure ne sont pas toujours bien définis physiquement et correspondent à des zones fortement endommagées bourrées de microfissures.

III.9. Mesures optiques

C'est la mesure visuelle directe ou, plus précisément, par procédé photographique : un appareil à déclenchement automatique fournit une image à intervalles de temps réguliers. Après développement et agrandissement (il faut des repères dans la zone utile pour servir d'échelle) on obtient la longueur de fissure par mesure directe. La précision du résultat dépend de l'éclairage, de l'agrandissement, de la qualité des repères et de la bonne définition de la pointe de fissure. Elle varie entre 0,05 et 0,1 mm.

III.9.1. Jauges à fils coupés

Elles sont constituées de fils espacés de 0,5 à 1 mm collés sur un support que Ton peut lui-même coller en amont de la pointe de fissure à mesurer. Lorsque la fissure progresse, elle coupe les fils les uns après les autres, ce qui conduit à une variation de résistance de la jauge ou bien à un signal incrémental qui permet de déclencher un enregistreur. La précision de ce système sans interpolation est de l'ordre de l'espacement des fils.

III.9.2. Méthode du potentiel

L'éprouvette ou l'élément fissuré, conducteur. Mais isolé, est alimenté, loin de la fissure, par un courant de forte intensité ($i \approx 20$ A), continu, séquentiel de préférence. Une prise de potentiel, dont les deux points sont situés de part et d'autre et près de la fissure, mesure une tension V qui est fonction des dimensions de l'éprouvette, des positions des points d'alimentation en courant et de prise de potentiel et de la longueur de la fissure a . Une mesure de V permet donc de connaître a , si par un étalonnage préalable à l'aide d'autres moyens de mesure ou bien à l'aide d'un calcul, on connaît la fonction $a(V)$. Un schéma de cette technique de mesure est donné sur la Figure III.14.

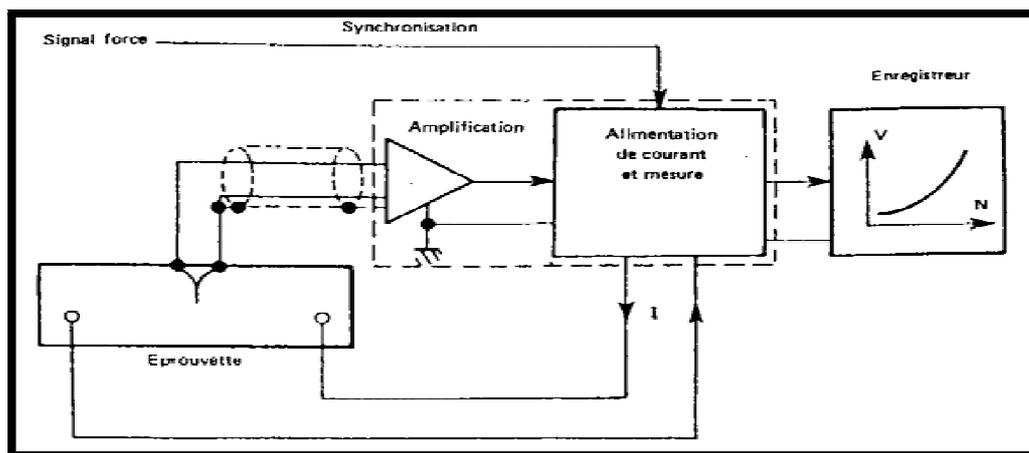


Fig. III.14. Schéma de mesure des longueurs de fissures par la méthode du potentiel

Bien que la tension à mesurer soit très faible, de l'ordre de quelques dizaines de μV la précision de la mesure peut atteindre quelques centièmes de millimètre sur les longueurs de fissures dans les tôles minces, à condition de synchroniser la mesure avec l'ouverture maximale de la fissure.

Cette méthode s'applique également à la mesure des profondeurs de fronts de fissures non traversantes dans les pièces massives. L'étalonnage, plus complexe, peut se faire à la cuve des analogies rhéo-électriques ; dans ce cas, la précision est de l'ordre de quelques dixièmes de millimètre sur les coordonnées de chaque point du front de fissure.

III.10. Epreuves

La mise au point de la forme d'une éprouvette est toujours une opération longue et délicate car si l'on n'y prend garde, la rupture peut intervenir prématurément et précisément là où l'on ne l'attend pas ! Il s'agit toujours d'un compromis entre les implications des caractéristiques de la machine (type de chargement, force maximale, rigidité, système de chauffage) et de celles des mesures à effectuer (sensibilité du dynamomètre, mesure des allongements par extensométrie, locale sur la partie utile de l'éprouvette ou externe sur les têtes d'amarrages). Quelques exemples de dessins côtés d'éprouvettes ayant fait leurs preuves sont donnés ci-dessous, Figure III.15 à Figure III.19.

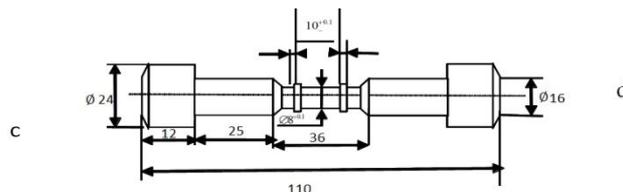
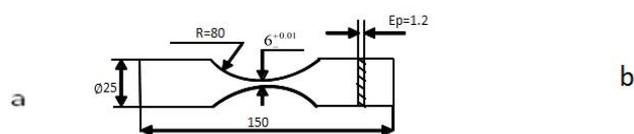
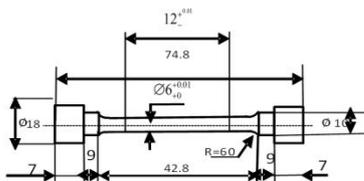
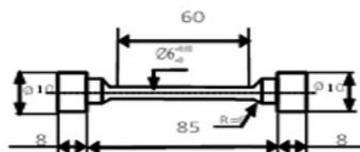


Fig. III.15.i. Epreuves de traction

Fig. III.15.ii. Epreuve de traction-compression

(a) A section circulaire; (b) Plate ; (c) Pour extensomètre extérieur ou jauge ; (d) Pour extensomètre local ou optique.

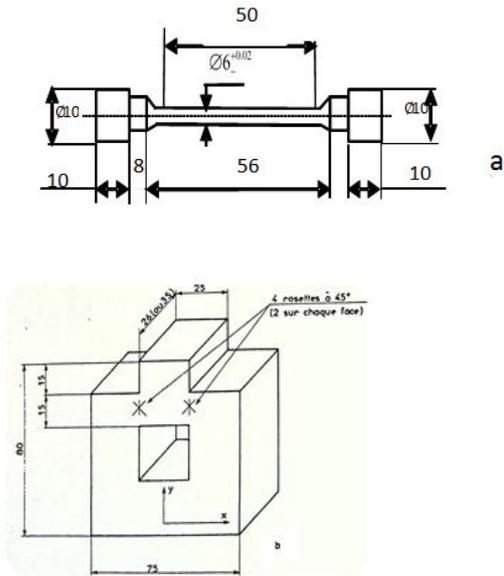


Fig. III.16 : (a) Eproutette de tension
(b) Eproutette de cisaillement pur en compression.

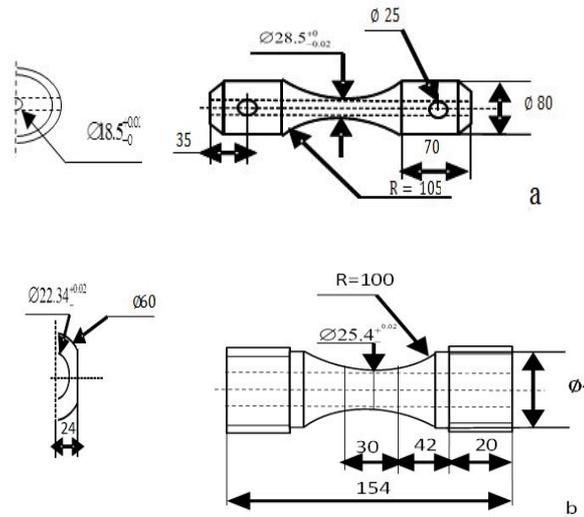


Fig. III.17: Eproutette de traction-torsion.
(a) Fixation par goupille
(b) Fixation par serrage

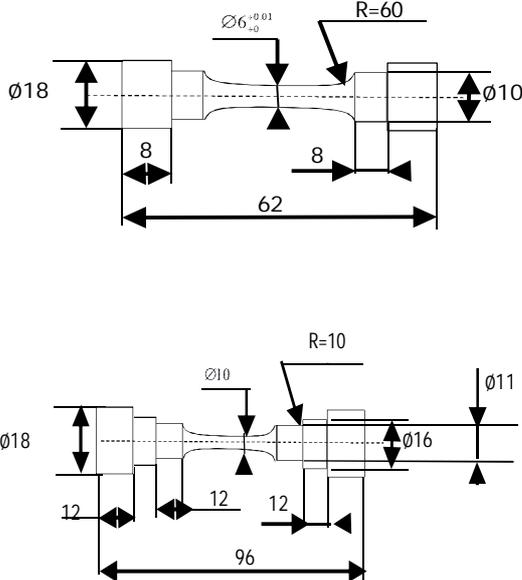


Fig. III.18 : (a) Eproutette d'endommagement ductile
(b) Eproutette de fatigue

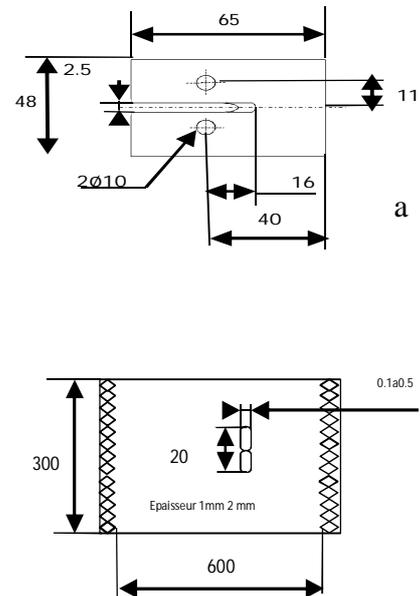


Fig. III.19. Eproutette de fissuration :
(a) Eproutette C.T ASTM
(b) Eproutette Irwin

III.11. Méthodes d'identification analytiques

La thermodynamique donne la formulation générale des modèles sans en préciser la forme analytique (sauf toutefois pour les comportements linéaires) ni les valeurs numériques. Les expériences fournissent, pour chaque matériau, les relations quantitatives que doivent vérifier les modèles pour être représentatifs des phénomènes étudiés. On appelle identification tout le

travail qui consiste à préciser les fonctions qui interviennent dans les modèles et à trouver les valeurs numériques des coefficients qui les définissent pour chaque matériau.

Il s'agit d'un travail difficile qui n'obéit pas à des règles rigoureuses et où l'expérience et « l'art du faiseur de modèles » jouent un grand rôle pour évoluer entre la théorie et l'expérience.

III.11.1. Formulation analytique des modèles

III.11.2. Rapport qualité-prix

Etant donné un ensemble de résultats expérimentaux, il est toujours, possible de trouver une fonction qui les représente avec une erreur ne dépassant pas la marge d'incertitude des mesures. C'est ce qu'on appelle le lissage pour lequel la fonction possède d'autant plus de coefficients représentatifs des résultats expérimentaux que ceux-ci sont plus nombreux.

Un modèle qui a l'ambition de devenir une loi, au contraire, doit avoir un caractère de généralité tel, qu'identifié sur un nombre restreint d'expériences, il soit aussi représentatif d'autres types d'expériences, avec un caractère prévisionnel. L'ensemble des situations vérifiées par un modèle est son domaine de validité. Celui-ci caractérise la qualité du modèle et s'exprime qualitativement par l'ensemble des histoires possibles de variation des variables et quantitativement par les bornes de leur domaine de variation à l'intérieur duquel le modèle s'accorde bien avec la physique. Par exemple la loi de plasticité de Hencky-Mises est valable pour un matériau isotrope en chargement radial dans le domaine des déformations inférieures au seuil d'endommagement.

Le prix à payer est le nombre de coefficients est très important dans cette démarche, car les difficultés d'identification sont essentiellement liées à ce nombre. Identifier deux coefficients se fait aisément « à la main ». Identifier cinq coefficients dans un modèle est déjà du domaine d'une procédure numérique, en identifier dix est vraiment du domaine de « l'art assisté par ordinateur ». Évaluation d'un modèle doit donc se faire en examinant lucidement ce rapport qualité/prix domaine de validité/nombre de coefficients.

III.11.3. Modélisation des non-linéarités

La plupart des phénomènes étudiés dans la plupart des phénomènes mécaniques (plasticité, viscoplasticité, endommagement, fissuration) sont non linéaires, c'est-à-dire qu'une linéarisation par un développement de Taylor limité au premier ordre ne représente le phénomène que pour un accroissement très petit de variables.

Parmi les possibilités analytiques de traduire des non-linéarités on retient essentiellement :

- L'exponentielle : $\exp(\alpha X)$ ou le logarithme $\ln(\alpha X)$.
- la fonction puissance αX^N où N est un coefficient qui peut prendre les valeurs 2, 5, 10, 20 et même Jusqu'à 100. Dans certains cas, il est nécessaire d'utiliser la fonction $\alpha X^{N(X)}$ où $N(X)$ est cette fois une fonction de la variable X .

Les raisons en sont essentiellement de deux ordres :

- La facilité d'identification par la transformation logarithme qui donne des relations linéaires.
- Les commodités de résolution analytique des modèles pour étudier leurs propriétés.

III.11.4. Règle de cumul linéaire

Une propriété importante que vérifie ou non un modèle est la règle de cumulation linéaire (règle de Robinson en fluage et règle de Palmgreen-Miner en fatigue) qui est en fait une propriété de toute équation différentielle linéaire ou non, à variables séparables. Les modèles issus des potentiels de dissipation sont toujours de la forme générale :

$$\dot{X} = f(X \cdot V(t)) \quad (\text{III.26})$$

Où X est la variable d'évolution du phénomène, fonction des variables causales V (ici on n'en prend qu'une seule pour simplifier).

Montrons que si cette équation différentielle est à variables séparables :

$$\dot{X} = g(X) \cdot h(V) \quad (\text{III.27})$$

(g et h étant des fonctions éventuellement non linéaires) elle entraîne la règle de cumulation linéaire. Avec la condition initiale : $t=0 \rightarrow X=0$, la solution de cette équation s'exprime par :

$$(g(X))^{-1} dx = h(V) dt \quad (\text{III.28})$$

Ou :

$$\int_0^X (g(X))^{-1} dx = \int_0^t h(V) dt \quad (\text{III.29})$$

Considérons d'abord le cas où V est constant, égal à V_0 , et soit $t(X, V_0)$ la solution Correspondante :

$$t(X, V_0) = (h(V_0))^{-1} \int_0^X (g(x))^{-1} dx \quad (\text{III.30})$$

Considérons ensuite le cas où V varie avec le temps et soit :

$$\tau(X, V) = (h(V))^{-1} \int_0^X (g(x))^{-1} dx \quad (\text{III.31})$$

La fonction de X et du temps, déduite de $t(X, V_0)$ en remplaçant V_0 par $V(t)$. dt s'exprimant par : $dt = (h(v))^{-1} g(X)^{-1} dX$, calculons :

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau(X^*, V(t))} \quad (\text{III.32})$$

Où t^* est le temps qui correspond à X^* , soit $X^* = X(t^*)$:

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau(X^*, V(t))} = \int_0^{t^*} \frac{h(V)^{-1} (g(x))^{-1} dx}{h(V)^{-1} \int_0^{X^*} (g(x))^{-1} dx} \int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau(X^*, V(t))} = \int_0^{t^*} \frac{h(V)^{-1} (g(x))^{-1} dx}{h(V)^{-1} \int_0^{X^*} (g(x))^{-1} dx} = 1 \quad (\text{III.33})$$

$$\int_0^{t^*} \frac{dt}{\tau(X^*, V(t))} = 1$$

Cette relation exprime que le cumul des temps réduits est égal à 1, dans cette solution obtenue en considérant un processus constant à la place de $V(t)$.

C'est la règle de cumulation linéaire, que vérifie toute équation différentielle. À variables séparables. Par exemple la règle de Miner en fatigue pour un chargement d'amplitude de contrainte $\Delta\sigma$ (N) variable, s'exprime par :

$$\int_0^{N_R} \frac{dN}{N_F(\Delta\sigma(N))} = 1 \quad (\text{III.34})$$

Où N_R est le nombre de cycles à rupture dans le chargement considéré et N_F est l'expression du nombre de cycles à rupture de référence, pour une sollicitation périodique d'amplitude $\Delta\sigma$.

III.12. Dispersion, coefficients aléatoires

Un autre aspect important est la dispersion des résultats expérimentaux qui peut être due :

- soit à la nature du phénomène, hétérogénéité (processus de croissance aléatoire, incertitude sur le chargement).
- soit à la dispersion propre à chaque échantillon, liée au procédé d'élaboration, de mise en forme, au traitement thermique, etc...

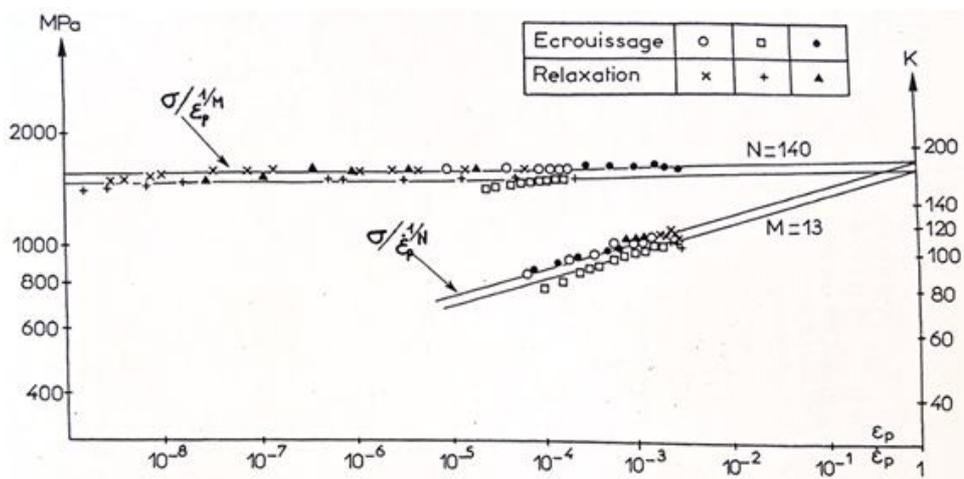


Fig. III.20. Identification de coefficient de la loi d'écrouissage-viscosité pour Alliage INCO 718 à 5500° C.

Les dispersions classiques sont de l'ordre de 1 à 5 % sur la déformation élastique, 10 à 50 % sur la déformation plastique ou viscoplastique 50 à 100% (facteur 2) sur le nombre de cycles à amorçage en fatigue oligocyclique ou en fissuration, 1 000 % (facteur 10) en fatigue à grand nombre de cycles.

On reconnaît d'emblée dans ces ordres de grandeur l'influence prononcée de la non-linéarité des phénomènes. Le moyen le plus simple et le plus efficace d'inclure cette dispersion dans

les modèles est de donner une définition statistique au coefficient multiplicatif qui intervient dans tout modèle, par exemple le coefficient A dans :

$$\dot{X} = AX^m V^n \quad (\text{III.35})$$

Un nombre suffisant de résultats expérimentaux permet de définir A par sa densité de probabilité, sa courbe de répartition ou, ce qui est le plus souvent suffisant, par sa moyenne et son écart-type.

La Fig. montre l'exemple du comportement viscoplastique de l'alliage INCO 718 à 550 °C, au travers de ses fonctions de viscosité et d'érouissage. La dispersion, d'une éprouvette à l'autre, joue sur l'ordonnée, c'est-à-dire sur la contrainte, et non sur la non-linéarité des deux fonctions.

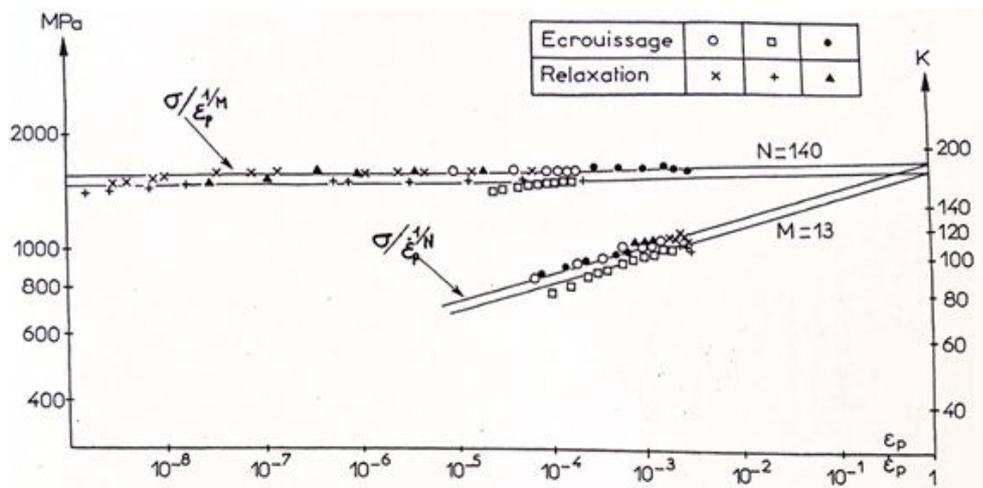


Fig. III.21. Probabilités relatives à la limite d'élasticités $\sigma_{0.2}$ et coefficient de résistance K , pour un Alliage INCO 718 à 550° C.

L'emploi de $M=13$ et $N = 140$ pour un plus grand nombre d'essais a permis d'obtenir la répartition statistique du coefficient de résistance K de la loi.

$$\sigma = K \varepsilon_p^M \cdot \frac{1}{\varepsilon_p^N} \quad (\text{III.36})$$

La Fig. III.21 montre que cette répartition est très voisine de celle observée pour la limite d'élasticité conventionnelle (à 0.2 %).

III.13. Méthodes d'identification numériques

Connaissant un modèle mathématique par son expression analytique et un ensemble de résultats expérimentaux dans lesquels toutes les variables du modèle ont été excitées, il s'agit de calculer les coefficients inconnus qui conduisent à la meilleure représentation possible des expériences.

III.13.1. Généralités

Notons tout de suite que ce problème se pose de différentes manières, suivant les essais dont on dispose ou le modèle étudié. Deux cas sont à distinguer :

1. On identifie directement la loi de comportement, c'est-à-dire l'entité (ou fonction de transfert) qui est représentative du matériau. Un exemple est celui d'une loi dans laquelle interviennent une variable X et sa vitesse \dot{X} .

$$H(X, \dot{X}, Y) = 0$$

Lorsque l'on a pu mesurer une série de triplets de valeurs (X, \dot{X}, Y) (au même instant), on peut obtenir les coefficients définissant la fonction H par lissage direct des points expérimentaux. Suivant les cas on fera appel à une méthode de moindres carrés linéaire ou non linéaire.

2. On identifie sur la réponse, c'est-à-dire que l'on cherche les coefficients caractéristiques de la fonction H en ajustant au mieux la réponse de l'équation de comportement à une sollicitation donnée (entrée), à la réponse observée expérimentalement pour la même sollicitation. Dans ce cas, on utilisera la méthode des moindres carrés non linéaires, les réponses étant le plus souvent non explicitées de façon analytique simple.

Remarque :

- Un modèle donné ne peut s'identifier correctement que si l'on dispose de résultats d'essais en nombre suffisant, mettant enjeu une plage de variation importante de chacun des paramètres (par exemple les paramètres X, \dot{X}, Y de la fonction H). Dans le cas contraire, on risque une indétermination plus ou moins nette d'un ou plusieurs coefficients.
- Pour un même matériau et un même modèle on peut être amené à définir plusieurs jeux de coefficients, chacun s'adaptant mieux à un domaine de variation ou à un type de chargement, Par exemple : chargements transitoires rapides, de courte durée, ou chargements de très longue durée, stationnaires.

III.13.2. Méthode des moindres carrés linéaire

Il s'agit de minimiser l'écart entre des valeurs expérimentales et des valeurs calculées obtenues par un modèle. Différentes normes d'erreur peuvent être employées : on aboutit généralement à un problème de minimisation d'une fonction écart : $h(a)$, Qui dépend des coefficients caractéristiques inconnus α_i ($i=1,2,\dots,n$).

Diverses méthodes de minimisation peuvent être employées : elles sont plus ou moins efficaces, la convergence peut être difficile en raison des grandes non- linéarités des phénomènes généralement étudiés. On se limite ici à l'exposé de la méthode des moindres carrés ou méthode de Gauss-Newton qui s'applique lorsque la fonction écart choisie est la somme des carrés des écarts :

$$h(a) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m E_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [y_j^C(a, x_j) - y_j^E(x_j)]^2 \quad (\text{III.37})$$

y_j^E et y_j^C représentent respectivement les valeurs expérimentales et calculées de l'un des paramètres en fonction des autres désignés par x_j (le j-ième point expérimental). La Fig. III.22 indique schématiquement comment est définie cette fonction.

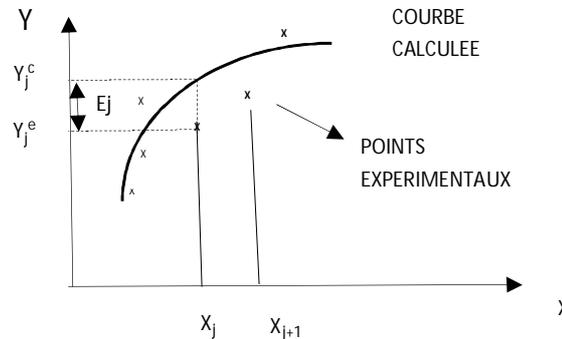


Fig. III.22. Graphe d'identification.

La méthode des moindres carrés linéaire s'emploie lorsque l'expression de y_c est linéaire en fonction des coefficients a_i .

$$y_j^C = A_0(x_j) + A_1(x_j)a_1 + \dots + A_n(x_j)a_n \tag{III.38}$$

Pour minimiser h il suffit d'écrire :

$$\frac{\partial h}{\partial a_k} = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n \tag{III.39}$$

Grâce à la linéarité on trouve immédiatement, avec $A_{ij} = A_i(X_j)$:

$$\sum_i \left(\sum_j A_{jk} A_{ji} \right) a_i = \sum_j A_{jk} (y_j^E - A_0) \tag{III.40}$$

La résolution de ce système linéaire, dont la matrice $\sum_j A_{jk} A_{ji}$ est symétrique, fournit facilement les inconnues a_i .

III.13.3. Méthode de Gauss-Newton

C'est la généralisation de la méthode précédente, Pour une expression non linéaire de la fonction y^C on introduit la linéarisation :

$$y_j^C(a) = y_j^C(a^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j^C}{\partial a_i}(a^0) \Delta a_i \tag{III.41}$$

Pour un jeu de coefficients a^0 donné, on calcule successivement la fonction écart en chaque point y_j^C et sa dérivée par rapport à chacun des coefficients (ce gradient peut rarement être établi explicitement, il faut alors procéder par petits accroissements finis sur chaque coefficient). Cette expression est formellement identique à l'expression du paragraphe

précédent : il suffit de remplacer pour obtenir un jeu de valeurs Δa_i qui conduit généralement à une moins mauvaise solution a^1 par :

$$a_i^1 = a_i^0 + \Delta a_i \tag{III.42}$$

On reprend alors de même à partir de cette nouvelle solution. Notons que la convergence de cette méthode itérative n'est pas toujours assurée. Quand elle converge, elle converge rapidement, ce qui fait qu'elle est assez pratique d'emploi et relativement peu coûteuse si le nombre de coefficients n'est pas trop élevé.

La Fig. montre l'exemple de l'identification de la loi de plasticité de l'acier 316 L par un essai de traction à 20 °C. La loi choisie fait intervenir trois coefficients :

$$\sigma = \sigma_y + K_y \varepsilon_p^{1/M_y} \tag{III.43}$$

On voit que, pour diverses solutions de départ, la convergence est correcte et assez rapide.

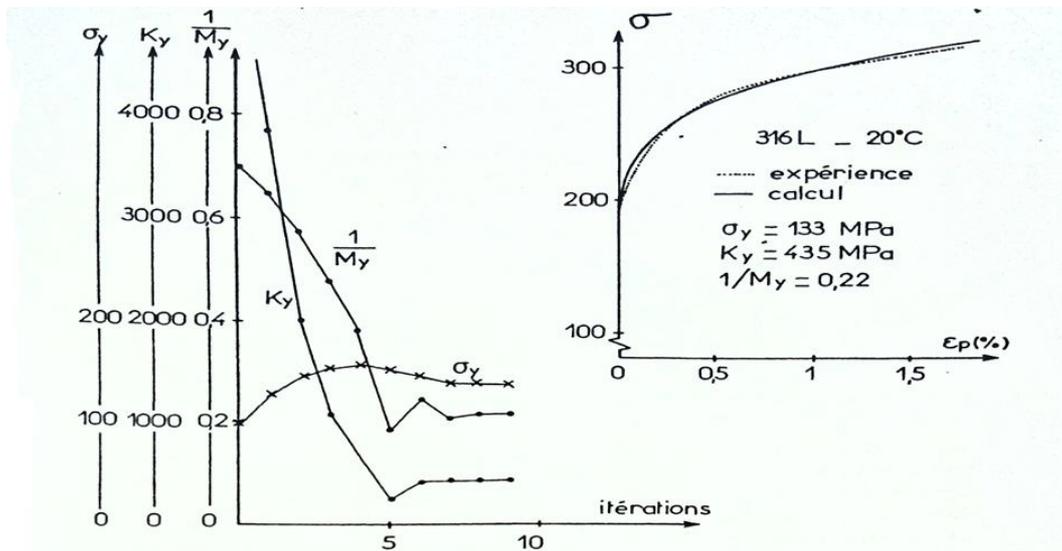


Fig. III.23. Identification de la loi de plasticité à 3 coefficients (Acier 316L).

III.13.4. Variation des paramètres caractéristiques en fonction de la température

Sauf exception, les paramètres caractéristiques d'un matériau, qui définissent chaque modèle de comportement, dépendent de la température. Une méthode générale permettant d'introduire cette dépendance consiste à écrire ces coefficients sous forme d'une fonction parabolique définie par morceaux. Soit par exemple, pour le paramètre α :

$$a(T) = a_i(T - T_i)^2 + b_i(T - T_i) + c_i \text{ pour } T_i < T < T_{i+1} \tag{III.44}$$

Les coefficients a_i, b_i, c_i Ci sont choisis de façon à assurer la continuité de α et de da/dT :

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= a_i(T_{i+1} - T_i)^2 + b_i(T_{i+1} - T_i) + c_i \\ b_{i+1} &= 2a_i(T_{i+1} - T_i) + b_i \end{aligned} \tag{III.45}$$

Ils sont déterminés de proche en proche par les valeurs mesurées du paramètre α , en introduisant éventuellement des valeurs intermédiaires pour assurer un bon lissage.

III.13.5. Méthode des éléments finis

III.13.5.1. Notions sur la méthode des éléments finis

On donne ici les bases de la méthode des éléments finis, considérée comme méthode standard de résolution des problèmes de champ en élasticité. D'autres méthodes existent, en particulier la méthode des équations intégrales, mais nous n'en parlerons pas.

Les méthodes numériques approchées de calcul des structures reviennent à trouver, dans une classe de champs de déplacements (ou de contraintes) « raisonnables », celui :

- Qui minimise l'énergie potentielle \mathcal{V} pour les champs cinématiquement admissibles,
- Ou qui maximise l'énergie potentielle complémentaire \mathcal{V}^* pour les champs statiquement admissibles.

La méthode des éléments finis consiste à calculer l'énergie potentielle \mathcal{V} ou \mathcal{V}^* comme la somme des énergies de tous les éléments de la structure divisée en éléments finis (lignes, surfaces ou volumes selon la schématisation de la structure).

Dans chaque élément les champs inconnus (les déplacements) sont représentés par une combinaison linéaire de fonctions des coordonnées d'espace. Les coefficients de cette combinaison dépendent des déplacements des nœuds de l'élément (les sommets par exemple). Ce sont ces derniers qui constituent les inconnues du problème (inconnues nodales ou degrés de liberté). En pratique, il est équivalent d'utiliser le principe des travaux virtuels comme on le fait plus loin.

Après avoir écrit l'égalité des déplacements aux nœuds communs des éléments, la minimisation de l'énergie potentielle conduit à la résolution d'un système linéaire. On a ainsi remplacé un problème d'équations aux dérivées partielles par un problème d'équations algébriques linéaires. Le système résolu, on remonte aux déplacements dans les éléments puis aux déformations et aux contraintes.

III.13.5.2. Formulation des caractéristiques d'un élément

De nombreux types d'éléments peuvent être développés. Une méthodologie générale existe pour l'écriture de tels éléments comportant beaucoup de degrés de liberté. On se contente ici d'illustrer le principe de la méthode des éléments finis sur le cas le plus simple, l'élément plan triangulaire à trois nœuds (Fig. III.24). Les déplacements d'un point M , repéré par ses coordonnées x_1, x_2 , se met sous la forme d'un vecteur colonne :

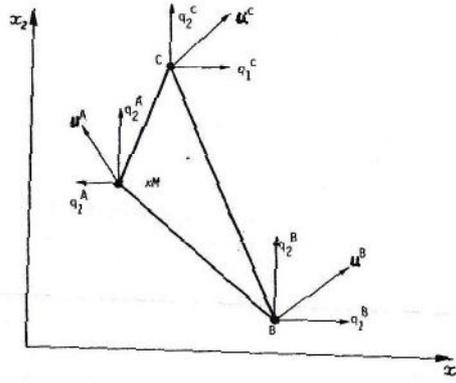


Fig. III.24. Triangle à 3 nœuds

$$U = \begin{bmatrix} U_1(x_1, x_2) \\ U_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{III.46})$$

Les degrés de liberté de l'élément sont les six composantes des déplacements des nœuds A,B,C :

$$q = \begin{Bmatrix} q_1^A \\ q_2^A \\ q_1^B \\ q_2^B \\ q_1^C \\ q_2^C \end{Bmatrix}. \quad (\text{III.47})$$

Les déplacements inconnus u sont représentés par une combinaison linéaire de fonctions de base :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 + C_2x_1 + C_3x_2 \\ C_4 + C_5x_1 + C_6x_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

Les coefficients $C_1 \dots C_6$ sont des fonctions linéaires des déplacements nodaux \vec{q} , fonctions que l'on obtient en écrivant l'identité entre u et q en chacun des nœuds. Le déplacement en tout point s'exprime par :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^{BC}(x_1, x_2)q_1^A + N^{CA}(x_1, x_2)q_1^B + N^{AB}(x_1, x_2)q_1^C \\ N^{BC}(x_1, x_2)q_2^A + N^{CA}(x_1, x_2)q_2^B + N^{AB}(x_1, x_2)q_2^C \end{Bmatrix}. \quad (\text{III.49})$$

Dans le cas présent, les fonctions $N(x_1, x_2)$ sont linéaires. Elles sont appelées fonctions de forme de l'élément. On écrira de façon abrégée

$$u = Nq. \quad (\text{III.50})$$

Les déformations s'expriment par la vectrice colonne :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix} = Bq \quad (\text{III.51})$$

Où B est la matrice 3×6 déduite de N par dérivation. La composante $2\varepsilon_{12}$ est utilisée afin que l'énergie de déformation puisse s'écrire simplement par le produit $\sigma^T \varepsilon$, où les contraintes σ sont représentées par le vecteur colonne *:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = a\varepsilon \quad (\text{III.52})$$

Si l'on est en élasticité isotrope et dans le cas d'un élément traité en contraintes planes.

Pour écrire l'équilibre de l'élément on considère un champ de déplacement cinématiquement admissible $u'(M)$ auquel est associé le champ de déformation $\varepsilon'(M)$ et l'on écrit le principe des travaux virtuels.

$$\left[\int_{\mathcal{D}} f^T u' dV + \int_{\partial\mathcal{D}} F^T u' dS - \int_{\mathcal{D}} \sigma^T \varepsilon' dV \right] = 0 \quad \forall u' \quad (\text{III.53})$$

Où f et F sont les efforts extérieurs appliqués dans le volume (ici la surface \mathcal{D} de l'élément) et à la frontière $\partial\mathcal{D}$. En tenant compte des relations portant sur les inconnues nodales on peut écrire:

$$\sigma^T \varepsilon' = \{a\varepsilon\}^T \varepsilon' = q^T B^T aB q' \quad (\text{III.54})$$

Où q' représente n'importe quel choix pour les valeurs des déplacements nodaux. En reportant on obtient facilement :

$$\left[\int_{\mathcal{D}} f^T N dV + \int_{\partial\mathcal{D}} F^T N dS - q^T \int_{\mathcal{D}} B^T aB dV \right] q' = 0 \quad (\text{III.55})$$

Ou

$$[-q^T K + Q^T] q' = 0 \quad \forall q'. \quad (\text{III.56})$$

Cette égalité est vérifiée quel que soit q' . Elle entraîne donc :

$$Kq = Q \quad (\text{III.57})$$

K est la matrice de rigidité de l'élément. Elle est symétrique

$$K = \int_{\mathcal{D}} B^T aB dV \quad (\text{III.58})$$

Q est la colonne des forces extérieures généralisées aux nœuds :

$$Q = \int_{\mathcal{D}} N^T f dV + \int_{\partial\mathcal{D}} N^T F dS. \quad (\text{III.59})$$

Si l'on connaît ces efforts extérieurs, la résolution du système linéaire $Kq = Q$ fournit les déplacements nodaux q . On en déduit les déplacements $u = Nq$, les déformations $\varepsilon = Bq$ et les contraintes $\sigma = a\varepsilon$.

III.13.5.3. Assemblage

Pour résoudre le problème de la structure entière (calcul de q relatif à tous les éléments) il faut écrire le travail virtuel de toute la structure en sommant sur tous les éléments. En même temps

on écrit que la structure est continue, c'est-à-dire que les déplacements aux nœuds communs à plusieurs éléments sont égaux. Notons que l'égalité aux nœuds assure l'égalité des déplacements en tout point de la frontière : on dit que les éléments sont conformes.

Dans la pratique cette opération d'assemblage revient à ajouter les contributions de rigidité (et d'efforts extérieurs) associées à chacun des éléments contenant un nœud donné. Plus précisément on peut appeler ${}^E q$ l'ensemble des degrés de liberté de tous les éléments sans tenir compte des liaisons et q l'ensemble de tous les degrés de liberté en tenant compte des liaisons; on a :

$$E q = A q \tag{III.60}$$

Où A est une matrice rectangulaire puisque la dimension de q est inférieure à celle de ${}^E q$. De même, on appelle ${}^E K$ et ${}^E Q$ la matrice et la colonne obtenues par juxtaposition simple des matrices de rigidité et des efforts nodaux de chacun des éléments :

$${}^E K = \begin{bmatrix} {}^1 K & & & & \\ & {}^2 K & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad {}^E Q = \begin{Bmatrix} {}^1 Q \\ {}^2 Q \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$[- {}^E q^{TE} K + {}^E Q^T] {}^E q' = 0 \tag{III.61}$$

Quel que soit ${}^E q'$ cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifiant les liaisons : ${}^E q' = A q'$. L'assemblage se fait par :

$$[-(A q)^T {}^E K + {}^E Q^T] A q' = 0 \quad \forall q' \tag{III.62}$$

Ce qui conduit à

$$-A^{TE} K A q + A^{TE} Q = 0 \tag{III.63}$$

Que l'on peut encore écrire :

$$K q = Q \tag{III.64}$$

Où K est la matrice de rigidité assemblée $K = A^{TE} K A$, Q et q respectivement la colonne des efforts extérieurs et la colonne des déplacements nodaux du système assemblé.

Résoudre un problème d'élasticité par la méthode des éléments finis nécessite donc l'établissement de la matrice K et du second membre Q et la résolution du système linéaire ci-dessus. Il est souvent nécessaire de décomposer une structure en un grand nombre d'éléments, avec de nombreux degrés de liberté (de 1000 à 10000 ou même plus). La matrice K peut donc être énorme : elle présente cependant une structure en bande de coefficients situés autour de la diagonale principale, ce qui diminue le nombre de termes non nuls et facilite la résolution. La largeur de bande de la matrice de raideur assemblée dépend de la numérotation choisie pour les nœuds de la structure (si un élément contient des nœuds dont les numéros sont très éloignés les uns des autres il induit une largeur de bande élevée).

2^{ème} PARTIE : TRAVAUX PRATIQUES DE « SIMULATION NUMERIQUE DES MATERIAUX ».

CHAPITRE IV. SIMULATION NUMERIQUE DES PARAMETRES MECANIQUE DES MATERIAUX : CAS DES ELASTOMERES.

Après une présentation très riche dans les méthodes d'identification des caractéristiques mécaniques dans le chapitre précédent, Dans ce chapitre de travaux pratique que nous consacrons à la simulation numérique de comportement des matériaux, nous utilisons le code de calcul numérique Marc Msc. Mentat pour identifier les paramètres mécaniques d'un matériau élastomère (Caoutchouc) et faire une comparaison avec les modèles phénoménologiques analytique et résultats expérimentaux.

IV.1. Définition des matériaux hyperélastiques

Les matériaux hyperélastiques sont la classe particulière des matériaux qui réagissent élastiquement même lorsqu'ils sont soumis à de grandes déformations. Ils montrent à la fois un comportement non linéaire du matériau ainsi que de grands changements de forme. Ils se caractérisent par :

- Peut subir de grandes déformations élastiques de l'ordre de 100 à 700% qui sont entièrement récupérables, c'est-à-dire que la forme initiale est récupérée lorsque la charge est supprimée.
- Sont presque incompressibles, ce qui signifie qu'ils peuvent changer de forme mais que le volume global reste presque constant.
- Montrer une relation contrainte-déformation hautement non linéaire.
- Le matériau se ramollit puis redevient plus rigide lorsqu'il est appliqué à la tension alors que, sous la compression, il a une réponse assez rigide.

De nombreux polymères présentent un comportement hyperélastique, tels que les élastomères, les caoutchoucs et d'autres matériaux flexibles souples similaires. Les matériaux hyperélastiques sont principalement utilisés dans des applications où une grande flexibilité, à long terme, est requise, en présence de charges élevées. Certains exemples typiques de leur utilisation sont les tampons élastomères dans les ponts, les tampons de rail, les joints de porte de voiture, les pneus de voiture et les joints fluides.

IV.2. Etat d'art sur les méthodes d'identification des paramètres mécaniques des élastomères

Les élastomères, également connus sous le nom de caoutchoucs, sont largement préférés en raison de leur comportement mécanique complexe et de leur résistance à long terme aux conditions extrêmes telles que les grandes déformations, les différentes vitesses de déformation et les températures élevées. Ils sont principalement utilisés dans les domaines de la fabrication additive, de l'électronique, de la construction et du biomédical. La sélection d'un élastomère approprié est une procédure complexe nécessite la caractérisation de la réponse mécanique à la déformation dans des conditions environnementales spécifiques. Par conséquent, il est nécessaire d'incorporer des conditions qui simulent l'application spécifique du comportement des élastomères.

Les caoutchoucs sont considérés comme des matériaux qui présentent un comportement hyperélastique et viscoélastique non linéaire. Plusieurs essais expérimentaux sont nécessaires

pour caractériser leur comportement mécanique, qui peut être classé en deux groupes : application de chargement/déchargement et maintenir une déformation constante pendant une période spécifique (entrée). La réponse des élastomères à ces conditions augmente/diminue la déformation et la relaxation des contraintes, respectivement (résultats). Plusieurs modèles hyperélastiques (par exemple, Ogden, Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Arruda Boyce) ont été développés pour le premier groupe, où un échantillon est soumis à un chargement ou un déchargement, et leurs paramètres doivent être déterminés. La sélection appropriée du modèle basée sur les fonctions de densité d'énergie de déformation dépend du caoutchouc sélectionné, de la plage de déformation et des conditions environnementales (par exemple, la température). Leurs courbes contrainte-déformation fournies par des essais expérimentaux assurent le meilleur ajustement. Pour le deuxième groupe, la relaxation des contraintes peut être modélisée à l'aide de la série de Prony pour plusieurs termes, où les paramètres doivent être déterminés.

D'autres facteurs déterminant le modèle de matériau hyperélastique incluent la stabilité du modèle sélectionné pour une plage de déformation représentative de l'application et la force de frottement. L'évaluation et le choix du ou des modèles stables peuvent être déterminés par les critères de stabilité de Drucker.

Compte tenu de tous ces facteurs, il est possible de sélectionner le caoutchouc spécifique à l'application approprié pour simuler avec précision plusieurs conditions. Cependant, la complexité de la configuration expérimentale et les exigences de main-d'œuvre supplémentaires pour effectuer les tests constituent certaines limites de la modélisation des matériaux hyperélastiques et évitent d'inclure des coefficients de frottement. De plus, l'obtention d'un modèle parfait pour s'adapter aux données expérimentales est un défi puisque la procédure analytique de détermination des paramètres du matériau implique la résolution d'un ensemble d'équations. Ainsi, la procédure traditionnelle mentionnée ci-dessus prend du temps et de l'argent car elle nécessite de nombreuses expériences qui pourraient devoir être répétées si le caoutchouc sélectionné n'est pas adapté à l'application. Des logiciels tiers ou des modules basés sur un principe d'ajustement de courbe sont souvent utilisés pour identifier les paramètres des matériaux hyperélastiques. D'autre part, au cours des dernières décennies, une approche d'ingénierie inverse utilisant des logiciels commerciaux pour diverses applications a été largement adoptée. Le modèle d'éléments finis itératif (FEM), l'apprentissage automatique et la méthode des champs virtuels (VFM : virtuel finite method) sont les méthodes inverses les plus connues en approches d'ingénierie. L'approche itérative (FEM : finite elements method) est basée sur la recherche de l'erreur minimale entre les données expérimentales et prédites en effectuant une analyse itérative par éléments finis (FEA) en utilisant des paramètres de matériau initiaux estimés. La FEA (finite elements analysis) est simulée en modifiant les paramètres de matériau initiaux à chaque itération selon une technique d'optimisation choisie, et l'itération se poursuit jusqu'à ce qu'elle atteigne l'erreur minimale. Une étude a utilisé une boucle d'optimisation conçue dans un logiciel commercial pour identifier les paramètres de matériau viscoélastique des composés de caoutchouc chargés. Les paramètres du matériau ont été déterminés en calibrant les données des tests de traction uniaxiale contrainte-déformation, volumétriques et de relaxation des contraintes. Dans un autre exemple, les paramètres de matériau visco-hyperélastique non linéaire de polymère ont été déterminés à l'aide du modèle de cadre rhéologique parallèle (PRF : parallel rheological

framework) dans le logiciel. Cependant, un script d'optimisation personnalisé ou un logiciel est requis pour l'optimisation dans cette approche. De plus, choisir la mauvaise technique d'optimisation peut amener à trouver un point minimum local au lieu d'un point minimum global, ou l'optimisation peut prendre plus de temps puisque la FEA est simulée à chaque itération.

Pour surmonter cet inconvénient considérable, un réseau de neurones artificiels (ANN : artificial neural network) peut être utilisé pour caractériser les élastomères, qui implique un processus de supposition et de vérification instruit. L'ANN est un outil puissant pour analyser les données et créer des relations complexes entre les variables. Par conséquent, certains chercheurs ont utilisé un modèle ANN pour accélérer ou prédire les propriétés des matériaux. Cette approche indirecte crée un modèle ANN à partir de l'Ensemble des données FEA pour accélérer l'optimisation au lieu d'utiliser FEA dans chaque itération. FEA est effectué en générant un ensemble de données à partir de paramètres de matériau aléatoire pour construire le modèle ANN. Il y a plusieurs tentatives par rapport à l'approche ANN. Par exemple, Le paramètre hyperélastique du caoutchouc de silicone a été identifié en utilisant l'approche mentionnée ci-dessus. FEA de traction uniaxiale à l'aide de paramètres prédéfinis a été simulé pour créer une base de données pour le modèle General Regression Neural Network (GRNN : general regression neural network). Une fois le modèle GRNN a été créé, les paramètres de matériau hyperélastique du caoutchouc de silicone ont été prédits en utilisant un Modèle GRNN et la technique d'optimisation. Une autre étude a estimé les différents paramètres hyperélastiques de matériau du caoutchouc néodyme butadiène (NDBR : Neodymium Butadiene rubber), Ogden-3, Neo-Hookeen, et Mooney-Rivlin à l'aide de réseaux de neurones [24]. Dans leur étude, des invariants de déformation ont été utilisés pour entraîner un modèle ANN, et la validation des paramètres du matériau hyperélastique a été effectuée par des tests uni-axial et équibi-axial. Dans cet axe d'utilisation des tests uni-axiaux, bi-axial et équibi-axial dans le code Marc, nous avons déterminés les propriétés mécaniques de ce matériau polymère dans les sections de travaux pratiques qui suit ce paragraphe.

IV.3. Relation contrainte-déformation à partir de la fonction de densité d'énergie de déformation

La relation contrainte-déformation pour les matériaux hyperélastiques est normalement calculée avec une fonction de densité d'énergie de déformation. Une brève description théorique suit.

Considérons un corps solide soumis à une grande déformation. Un point à l'intérieur du corps avec position X par rapport à la configuration d'origine est déplacé vers la position x dans la configuration finale par le vecteur de déplacement u :

$$x = X + u \quad (IV.1)$$

Le tenseur du gradient de la déformation F reliant la configuration initiale à la configuration finale est donné par :

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} = I + \nabla_X u \quad (IV.2)$$

La variation locale de volume J est donnée par son déterminant $J = \det(F)$. Ce tenseur s'avère ne pas être la meilleure façon de décrire les grandes déformations, donc le bon tenseur de Cauchy-Green est utilisé à la place :

$$C = F^T F \quad (IV.3)$$

Ce tenseur est symétrique, avec ses invariants donnés par :

$$\begin{aligned} I_C &= \text{tr}(C) \\ II_C &= \frac{1}{2}(\text{tr}(C)^2 - \text{tr}(C^2)) \\ III_C &= \det(C) \end{aligned} \quad (IV.4)$$

Le troisième invariant III_C concerne le changement de volume, et peut aussi s'écrire :

$$III_C = \det(F)^2 = J^2 \quad (IV.5)$$

Dans le cas d'un matériau incompressible, $J=1$.

D'un grand intérêt pour notre propos est d'exprimer le tenseur de Cauchy-Green droit et ses invariants en termes d'étirements principaux λ_i :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 1 + \varepsilon_i \\ C_{ii} &= \lambda_i^2 \\ C_{ij} &= 0, i \neq j \\ I_C &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ II_C &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ III_C &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (IV.6)$$

où ε_i sont les déformations nominales dans les directions principales (mesurées dans la configuration d'origine). Remarquons que les étirements λ_i sont les composantes du gradient du tenseur de déformation F.

On suppose qu'il existe une fonction de densité d'énergie de déformation U telle que le tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff hyperélastique (deuxième) S dans le matériau peut être lié au tenseur de déformation de Cauchy-Green droit :

$$S = 2 \frac{\partial U}{\partial C} \quad (IV.7)$$

Le vrai tenseur des contraintes sur le matériau est lié au deuxième tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Il peut être exprimé (après un peu d'algèbre, non montré ici) en termes de tenseur de Cauchy-Green droit et de fonction de densité d'énergie de déformation :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2 \frac{\partial U}{\partial I_1} C_{ij} - 2 \frac{\partial U}{\partial I_2} C_{ij}^{-1} \quad (IV.8)$$

Ici, p est la pression externe hydrostatique, qui provoque un changement volumétrique pur, et delta δ_{ij} est le delta de Kronecker. Notez qu'en raison de l'hypothèse d'incompressibilité, le terme J est supprimé.

Pour les modèles de matériaux disponibles, la fonction de densité d'énergie de déformation est donnée par :

$$\begin{aligned} U &= C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + \frac{1}{2}K(J - 1)^2 \\ I_1 &= I_C J^{-\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (IV.9)$$

Vous constaterez que dans l'interface utilisateur, la compressibilité est contrôlée par la constante D1, donnée par :

$$D_1 = \frac{2}{K} \quad (IV.10)$$

Dans cette présente application nous ciblons trois applications pour identifier les paramètres mécaniques des matériaux utilisant le code de calcul en éléments finis. Dans ce stade les paramètres mécaniques des trois modèles mécaniques des matériaux sont simulés et identifiés.

IV.4. Identification des paramètres de modèle d'Ogden

IV.4.1. Modèle analytique d'Ogden

Le modèle de matériau Ogden est un modèle de matériau hyperélastique utilisé pour décrire le comportement (relation contrainte-déformation) non linéaire de matériaux complexes tels que les caoutchoucs, les polymères et les tissus biologiques. Le modèle a été développé par Raymond Ogden en 1972. Le modèle d'Ogden, comme d'autres modèles de matériaux hyperélastiques, suppose que le comportement du matériau peut être décrit au moyen d'une fonction de densité d'énergie de déformation, à partir de laquelle les relations contrainte-déformation peuvent être dérivées. Dans le modèle de matériau d'Ogden, la densité d'énergie de déformation est exprimée en termes d'étirements principaux $\lambda_j, j = 1,2,3$ comme :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (\text{IV.11})$$

En général, le module de cisaillement résulte de

$$2\mu = \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p \quad (\text{IV.12})$$

Avec $N = 3$ et en ajustant les paramètres du matériau, le comportement du matériau des caoutchoucs peut être décrit de manière très précise. Pour des valeurs particulières de constantes de matériau, le modèle d'Ogden se réduira soit au solide néo-hookéen ($N = 1, \alpha = 2$) soit au matériau Mooney-Rivlin matériel ($N = 2, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$, avec la contrainte condition $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$).

En utilisant le modèle de matériau d'Ogden, les trois valeurs principales des contraintes de Cauchy peuvent maintenant être calculées comme

$$\sigma_j = -p + \lambda_j \frac{\partial W}{\partial \lambda_j} = -p + \sum_{p=1}^N \mu_p \lambda_j^{\alpha_p} \quad (\text{IV.13})$$

IV.4.2. Identification des coefficients du modèle « d'Ogden »

IV.4.2.1. Tube cylindrique en caoutchouc

Un exemple de compression d'un tube en caoutchouc utilisant un modèle « d'Ogden » utilisant à la fois des éléments quadrilatéraux et triangulaires est présenté en premier. L'ajustement de courbe des coefficients « d'Ogden » est ensuite démontré. Le tube est alors considéré comme tube fermé et rempli d'air. Une simulation de flexion d'un arc en caoutchouc est ensuite effectuée. Enfin, une courbe d'ajustement basé sur différents modèles de caoutchouc est effectuée.

IV.4.3. Compression d'un tube cylindrique

Un cylindre creux en caoutchouc sera pressé jusqu'à la fermeture et libéré à l'aide de l'option de contact. La symétrie est utilisée et seulement la moitié du cylindre est modélisée. Les données du matériau expérimental sont adaptées à un matériau élastomère utilisant le modèle « d'Ogden ».



Fig. IV.1. Compression d'un tube cylindrique en élastomère.

IV.4.3.1. Données expérimentales du matériau

Le comportement de matériaux est donné par la courbe des résultats d'un essai de traction uni-axiale montrée dans la figure IV.2. Cet ajustement de courbe des données brutes a été appliqué à ce matériau. Il est important d'indiquer que les autres modes de déformation (cisaillement biaxial et uniaxial) soient similaires à l'ajustement en tension. Bien sûr, il serait préférable d'avoir les données de matériau de cisaillement plan biaxial pour faire un ajustement en mode combiné. Plus à ce sujet plus tard.

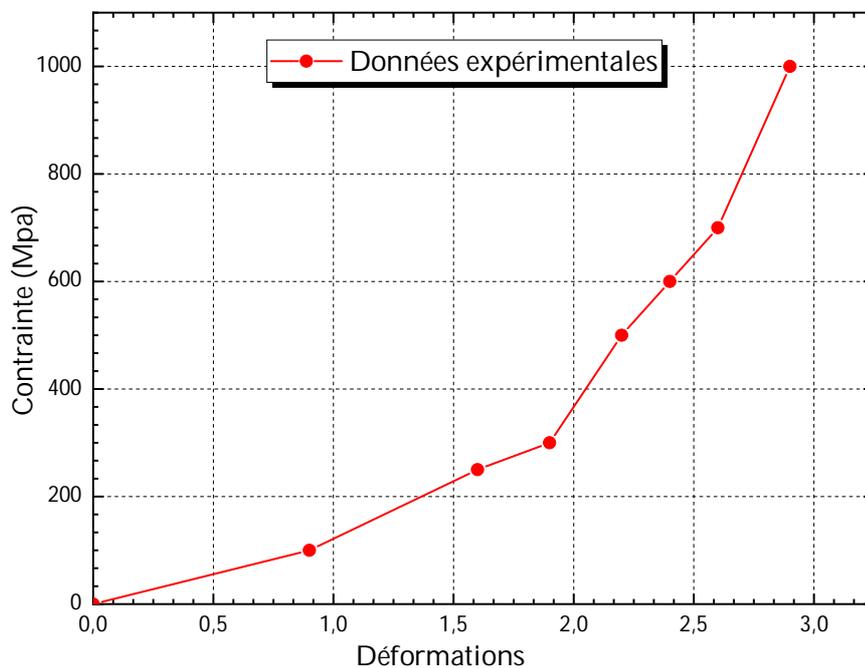


Fig. IV.2. Courbe de contrainte-déformation d'un essai de traction uni-axiale.

IV.4.3.2. Effet du maillage

Commençons par la compression d'un tube en caoutchouc en deux dimensions en supposant une déformation plane. Le tube est comprimé par deux corps rigides en haut et en bas, et est modélisé avec un plan de symétrie comme indique la figure IV.3.

Nous avons choisi deux types de maillage, un maillage avec des éléments quadratique et triangulaire il est très important d'indiquer que seulement le demi tube est pris en considération à cause de la symétrie

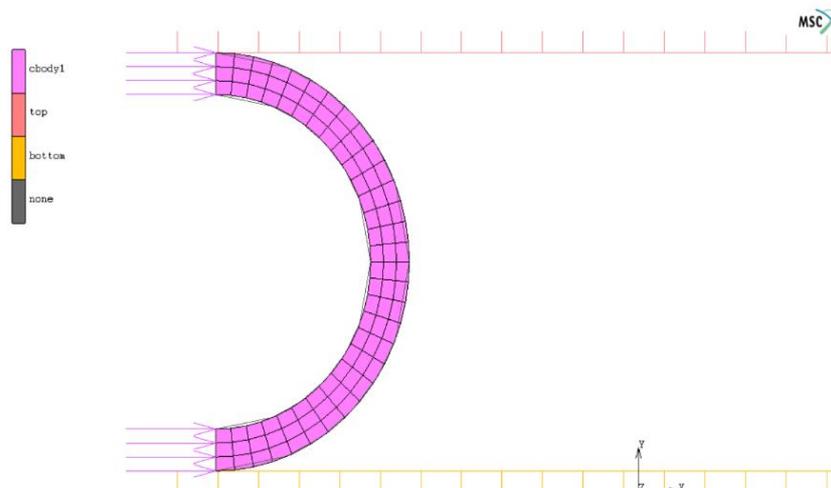


Fig. IV.3. Demi-tube comprimé utilisant un maillage avec des éléments quadratiques et conditions aux limites.

La figure IV.4 représente l'évolution de la force appliquée par le corps supérieur en fonction de position du corps inférieur pour les deux maillages, ou remarque que les mêmes résultats sont obtenus pour les deux types d'élément ; donc nous adaptions le maillage à élément quadratique dans notre calcul.

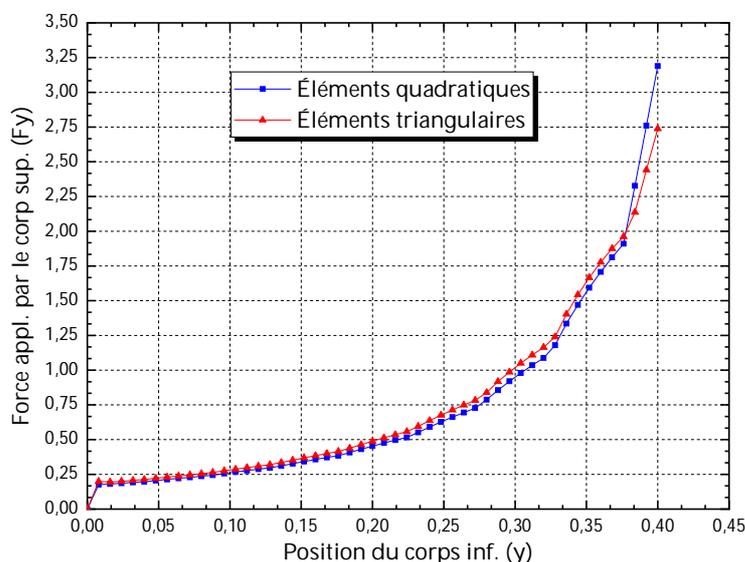


Fig. IV.4. Evolution de la force appliquée par le corps supérieur en fonction de position du corps inférieur pour les deux maillages.

IV.4.4. Compression d'un tube cylindrique sous une pression interne

Une autre modification intéressante de ce modèle sera simuler également, c'est le cas de la compression du tube sous pression interne. En supposant que le tube est fermé et que l'air ne peut pas s'échapper. Commençons par le modèle original et nous ajoutons une cavité fermée représentant l'air à l'intérieur du tube comme indique dans la figure IV.5. La force nécessaire

pour écraser le tube est considérablement plus grande (5x) qu'auparavant et presque égale à la pression de la cavité puisque la zone de contact est d'environ 1 Bar.

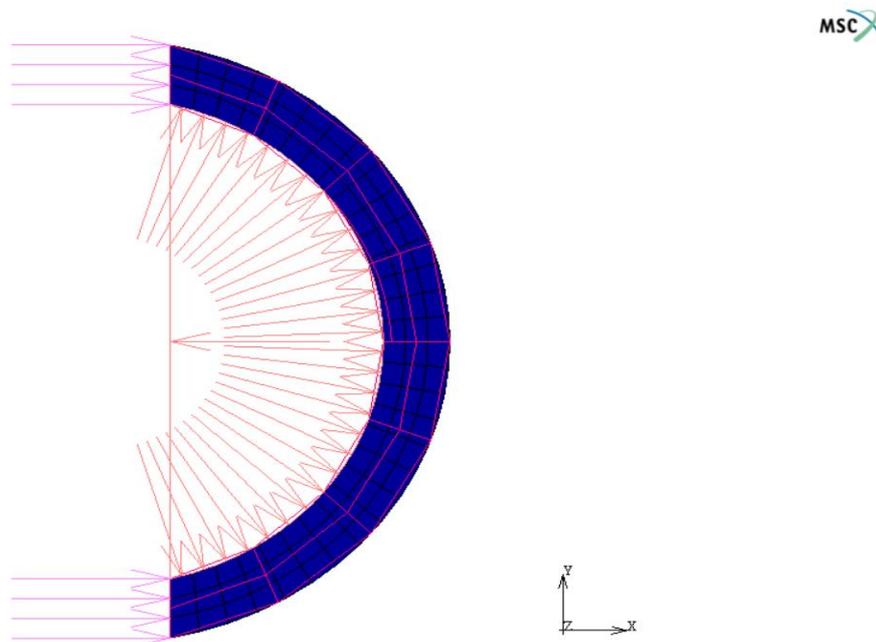


Fig. IV.5. Tube cylindrique comprimé sous pression interne.

Voici un cylindre creux en caoutchouc. Il sera pressé et relâché. Les propriétés du matériau seront ajustées à un modèle « d'Ogden ». La procédure de calcul est comme toutes autres méthodes en codes éléments finis, et l'objectif donc est de calculer ou identifier les deux constantes du model d'Ogden.

La figure IV.6 représente les paramètres du matériau obtenus selon le modèle « d'Ogden » ou les modules sont donc : 1,0498 et 371295 et les exposants sont 5,85423 et 2,31435 avec un module de cisaillement de 230192 MPa. L'erreur est environ de 0,0216877 entre le calcul numérique et les tests expérimentaux d'identification.

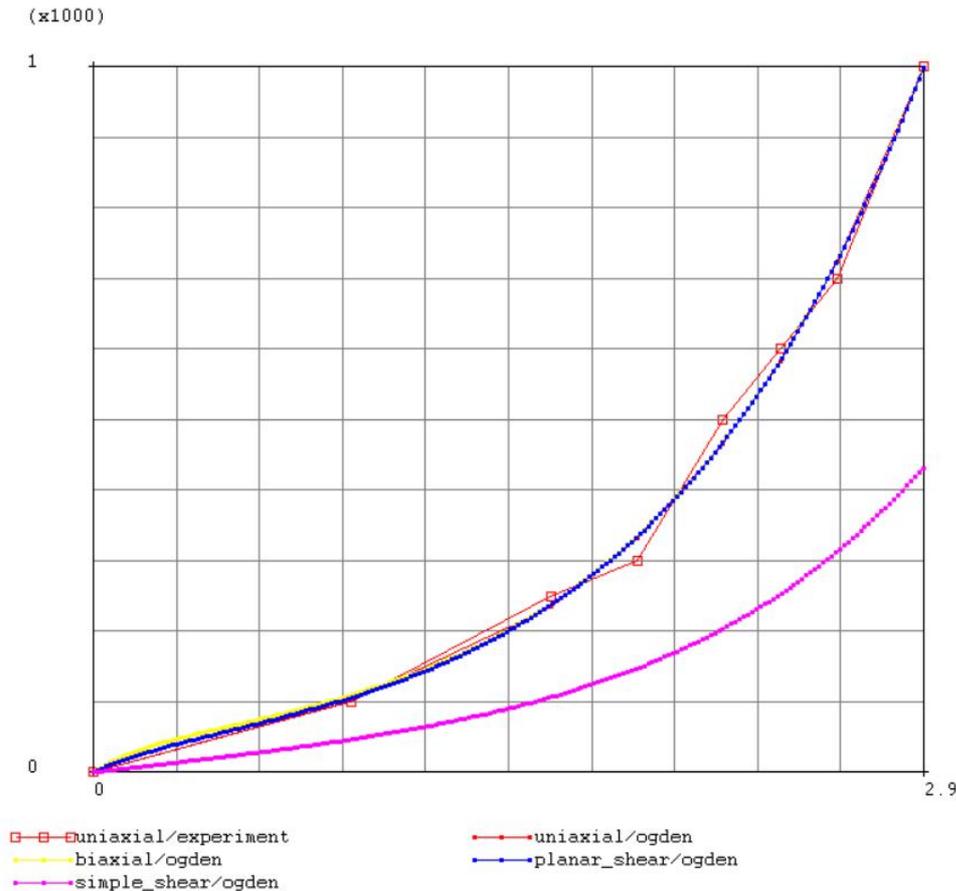


Fig. IV.6. Comparaison des résultats d'identification numérique entre le modèle expérimental (test uniaxial) et numérique obtenus par code Marc Msc. Mentat.

Test uniaxial	Modules	Exposants	Module de cisaillement (MPa)	Erreur (%)
Paramètre (d'Ogden)	37,1295	2,31435	230192	0,0216877
	1,0498	5,85423		

Tableau IV.1. Identification des paramètres d'Ogden du matériau.

Les résultats montrent une bonne concordance entre les résultats du modèle expérimentale et le modèle analytique d'Ogden et une erreur environs de 0,0216877, c.-à-d. environs de 2,16%.

Les figures IV.7 et IV.8 illustrent la distribution des contraintes dans les deux tubes cylindriques. La déformée à l'incrément 50 pour le deuxième cas montre que les parois intérieures doivent encore se fermer, alors qu'avec une pression interne les parois intérieures s'éloignent.

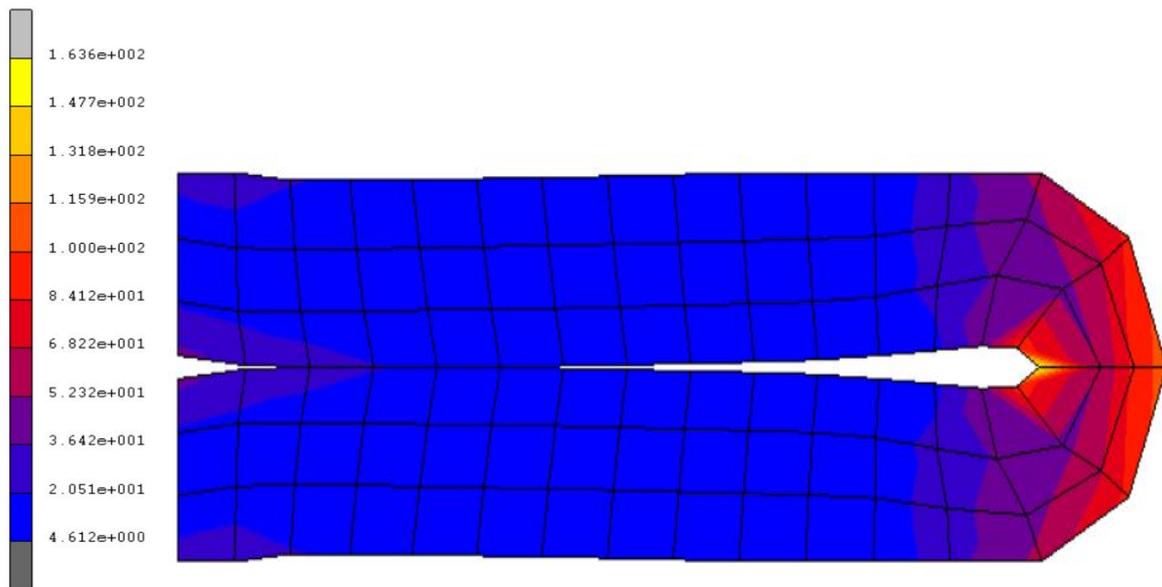


Fig. IV.7. Contours de contraintes équivalents de Cauchy dans le cas de compression sans pression interne.

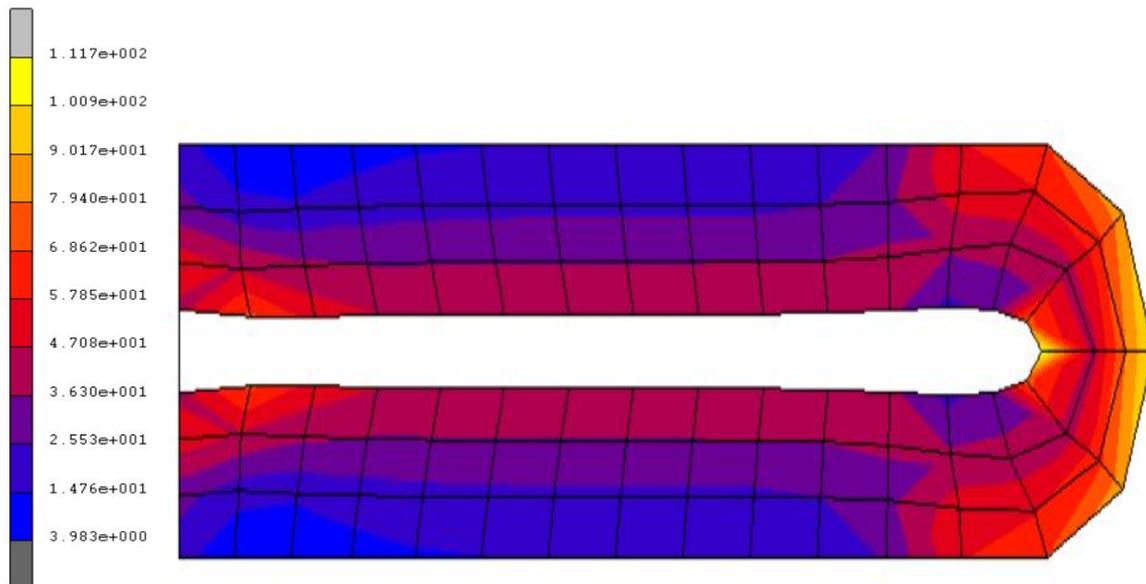


Fig. IV.8. Contours de contraintes équivalents de Cauchy dans la cas de compression avec pression interne.

IV.5. Identification des paramètres de modèle de « Mooney 2 »

IV.5.1. Modèle de « Mooney 2 »

Le modèle de matériau hyperélastique de « Mooney 2 » est un modèle phénoménologique pour la déformation de matériaux élastiques non linéaires presque incompressibles tels que le caoutchouc. Le modèle est basé sur l'observation de Ronald Rivlin selon laquelle les propriétés élastiques du caoutchouc peuvent être décrites à l'aide d'une fonction de densité d'énergie de déformation qui est une série de puissance dans les invariants de déformation des tenseurs de déformation de Cauchy-Green.

Autrement dit, le modèle de « Mooney 2 » est un modèle de matériau hyperélastique où la fonction de densité d'énergie de déformation W est une combinaison linéaire de deux

invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche B . Le modèle était proposé par Melvin Mooney en 1940 et exprimé en termes d'invariants par Ronald Rivlin en 1948. La fonction de densité d'énergie de déformation pour un matériau Mooney 2 incompressible est

$$W = C_1(\bar{I}_1 - 3) + C_2(\bar{I}_2 - 3) \quad (\text{IV.14})$$

où C_1 et C_2 sont des constantes matérielles déterminées empiriquement, et \bar{I}_1 et \bar{I}_2 sont le premier et le second invariant de $\bar{B} = (\det B)^{-1/3} B$ (la composante unimodulaire de B)

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= J^{-2/3} I_1, & I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ \bar{I}_2 &= J^{-4/3} I_2, & I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

où F est le gradient de déformation et $J = \det(F) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Pour un matériau incompressible, $J = 1$.

IV.5.2. Essais expérimentaux

Les caoutchoucs présentent une réponse hyperélastique à une déformation appliquée ; leur comportement peut être modélisé à l'aide de leur fonction de densité d'énergie. De nombreux modèles numériques ont été définis précédemment, nécessitant la détermination de leurs paramètres des matériaux, ce qui est réalisable en réalisant des essais expérimentaux comme indique la figure IV.9. La réponse des caoutchoucs doit être testée dans différentes directions de déformation ; par conséquent, des tests uni-axiaux, plans et équibi-axiaux sont généralement nécessaires. La procédure d'ajustement de la courbe est suivie pour déterminer les paramètres des matériaux du modèle hyperélastique sélectionné. Les paramètres de matériau définis par la procédure mentionnée ci-dessus peuvent être utilisés comme entrée pour la modélisation et la simulation par le code éléments fini « Marc Msc. Mentat », qui est considérée comme une "approche numérique" pour simuler le comportement des caoutchoucs.

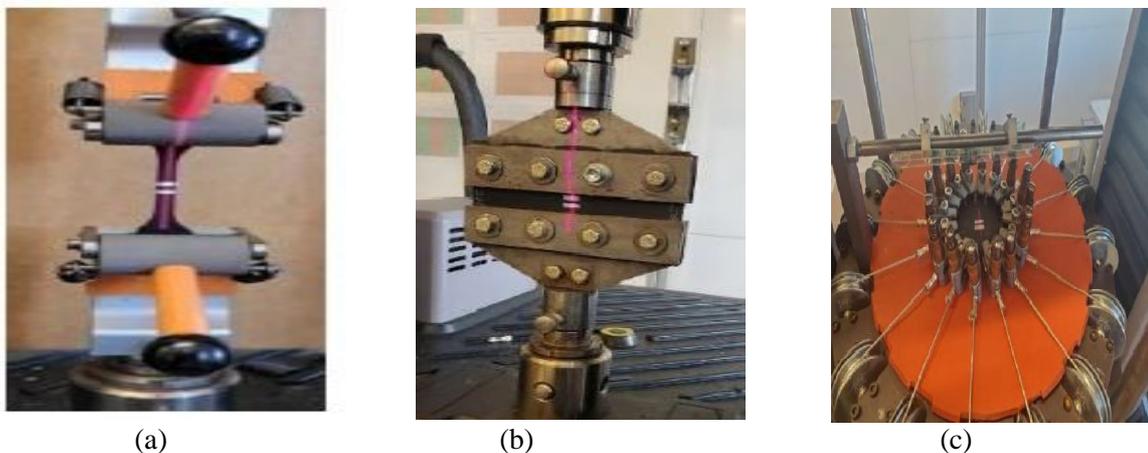


Fig. IV.9. Configuration de test expérimental : (a) test uni-axial, (b) test cisaillement plan et (c) test équibi-axial.

Chaque courbe représente le comportement contrainte-déformation pour trois états de sollicitation : traction, cisaillement pur (cisaillement planaire) et traction bi-axiale comme illustré à la Figure IV.10. Idéalement, il est préférable d'utiliser tous les états de déformation lors de la détermination des constantes utilisées dans les modèles analytiques tels que Mooney, Ogden, Boyce ou Gent.

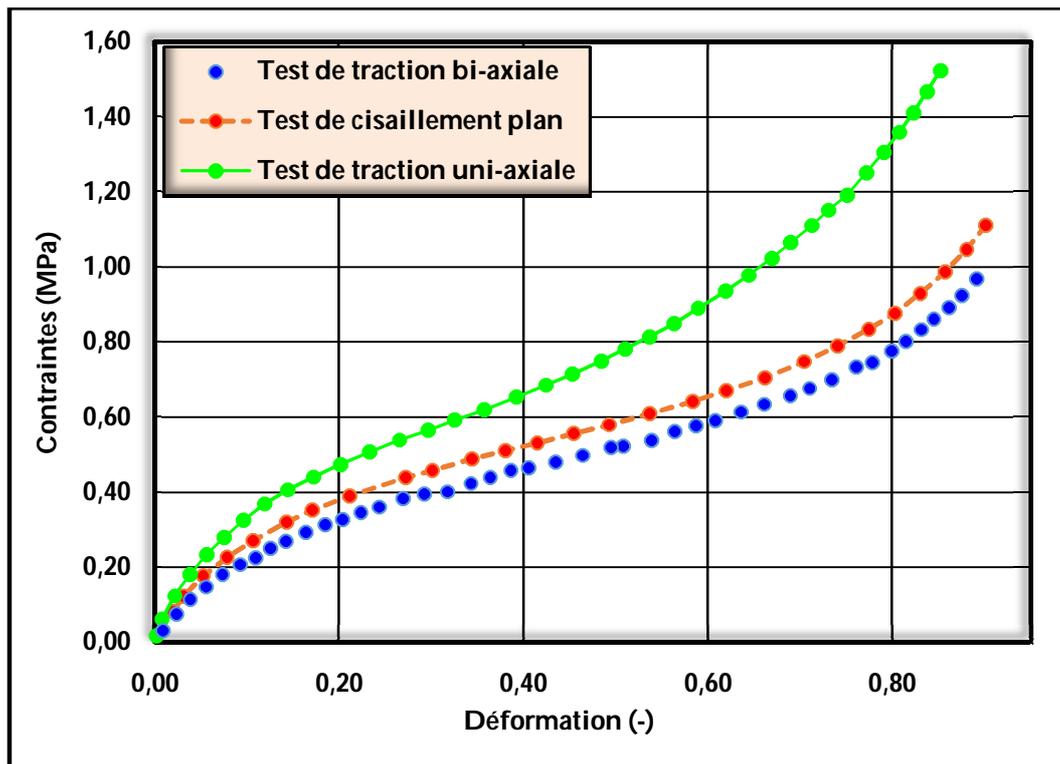


Fig. IV.10. Courbes contraintes-déformation d'un matériau (Caoutchouc_077) obtenus par les 03 essais de base.

Chacune des courbes ci-dessus provient de trois tests indépendants effectués sur le même matériau. Le processus d'utilisation de MSC.Marc Mentat pour déterminer les constantes de « Mooney 2 », « Ogden », « Boyce » ou Gent est appelé ajustement des courbes expérimentales avec les courbes du modèle analytique pour chaque modèle. Nous allons maintenant utiliser le code de calcul Marc Msc. Mentat pour déterminer les constantes et les paramètres mécaniques et comparer ces paramètres avec celui de modèle analytique.

IV.5.3. Flexion d'une poutre arc en caoutchouc

Une poutre sous forme d'arc en caoutchouc d'une épaisseur 0.1m soumise à une charge appliquée au centre comme indique la figure IV.11. L'objectif est l'analyse de la réponse de la structure en premier temps, et par la suite une identification des paramètres mécanique selon le modèle de « Mooney 2 » de ce matériau est effectuée. Le chargement et les conditions aux limites sont représentés dans la figure IV.12.

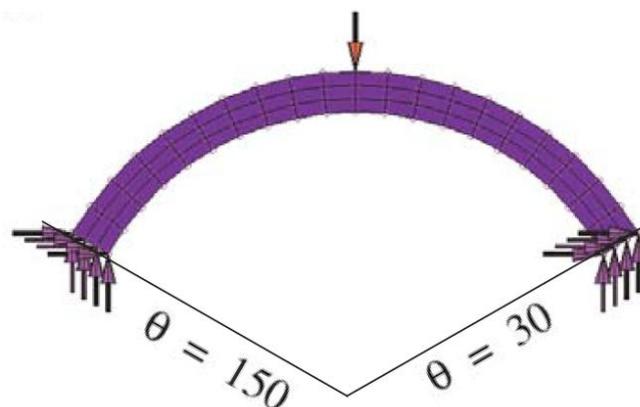


Fig. IV.11. Géométrie de la poutre arc sous flexion.

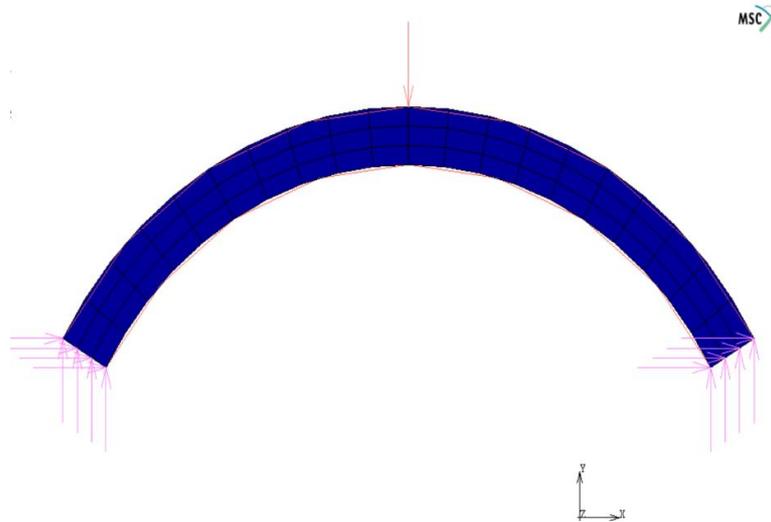


Fig. IV.12. Description de chargement et des conditions aux limites de la poutre.

Le protocole de la méthode des éléments finis est suivie et une méthode adaptative dans le code de calcul Marc MSC. Mentat appelée (*Modified Riks-Ramm Method*) est utilisée.

IV.5.3.1. Distribution de la contrainte équivalente de Cauchy

La figure IV.13 représente la distribution de la contrainte équivalente dans notre structure. On remarque la structure est très sollicitée dans les points de fixation et le point d'application la force (au milieu de l'arc en élastomère).

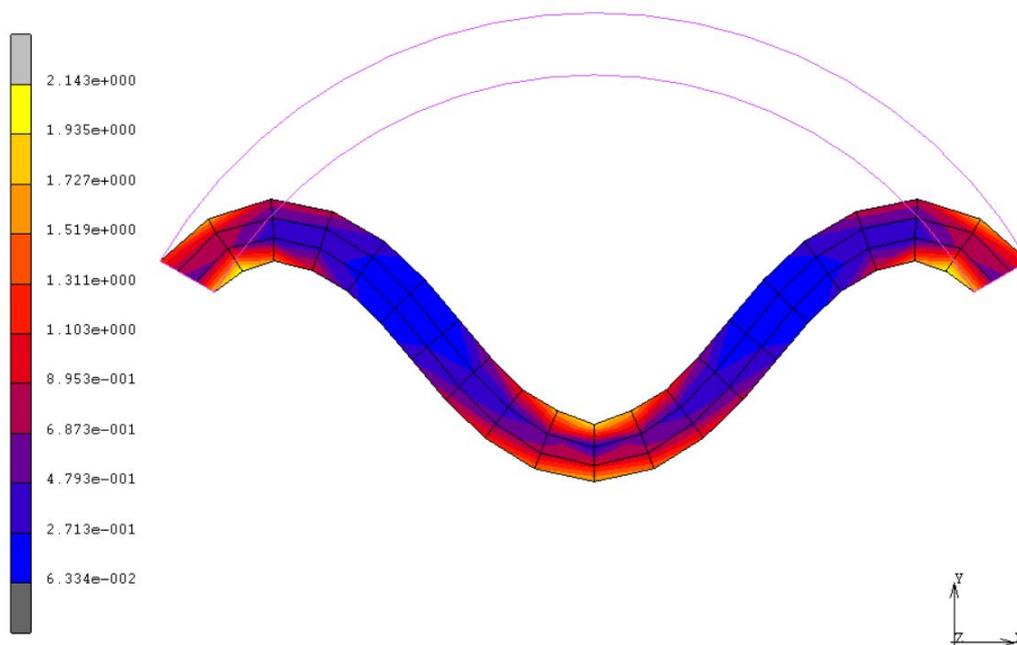


Fig. IV.13. Déformée et contours de contraintes équivalents.

La figure IV.14 montre évolution de la force externe en fonction de déplacement au nœud central de l'arc.

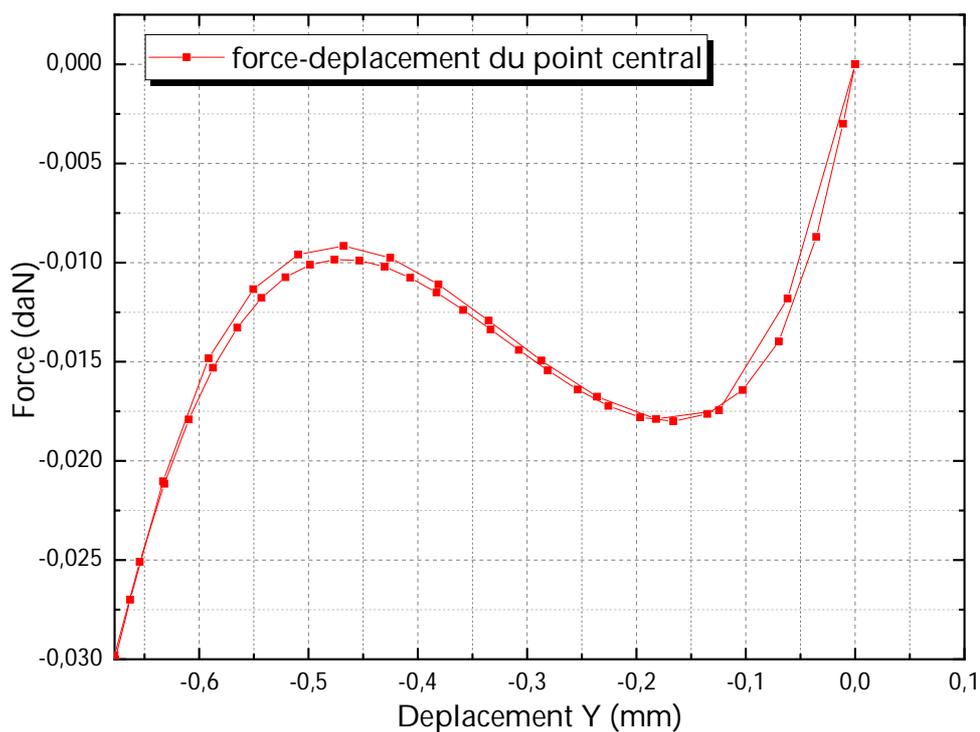


Fig. IV.14. Évolution de la courbe force-déplacement du nœud central.

IV.5.3.2. Identification des constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de test uni-axial

Dans ce premier cas nous utilisons seulement les données expérimentales de test de traction uni-axial. Les résultats sont obtenus et affichés dans la figure IV.15

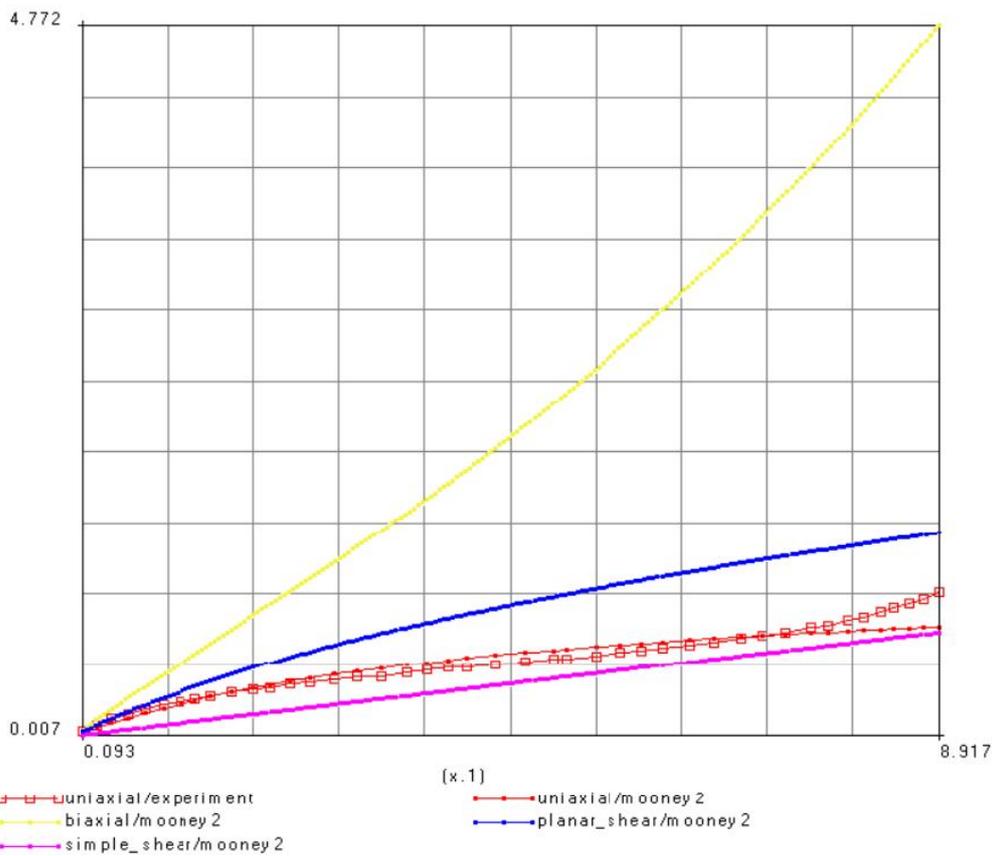


Fig. IV.15. Comparaison des résultats d'identification des paramètres de « Mooney 2 » obtenus par le code Marc Msc. Mentat et le test uniaxial (le modèle expérimentale et analytique).

Test / Paramètre (Mooney 2)	Paramètre 1 (C_{10})	Paramètre 2 (C_{01})	Erreur (%)
Test uni-axial	0,0434	0,3481	0,7363

(b)

Tableau IV.2. Identification numérique des paramètres C_{10} et C_{01} de « Mooney 2 ».

IV.5.3.3. Identification les constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de test bi-axial

Dans le deuxième cas nous utilisons seulement les données expérimentales de test de traction bi-axial. Les résultats sont obtenus et affichés dans la figure IV.16.

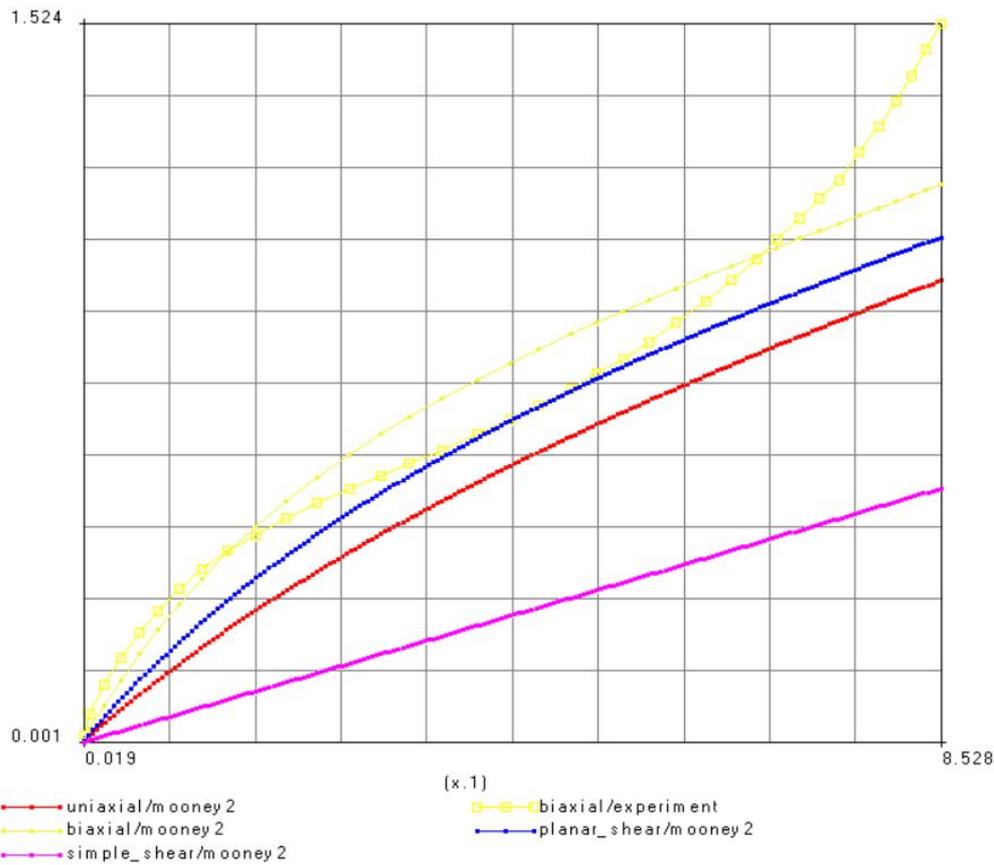


Fig. IV.16. Comparaison des résultats d'identification des paramètres de « Mooney 2 » obtenus par le test bi-axial et le code Marc Msc. Mentat (modèle expérimentale et analytique).

Test / Paramètre (Mooney 2)	Paramètre 1 (C_{10})	Paramètre 2 (C_{01})	Erreur (%)
Test bi-axial	0,3109	0,0046	1,3627

Tableau IV.3. Identification numérique des paramètres C_{10} et C_{01} .

IV.5.3.4. Identification les constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de test de cisaillement plan

Dans le troisieme cas nous utilisons seulement les données expérimentales de test de cisaillement plan. Les résultats sont obtenus et affichés dans la figure IV.17

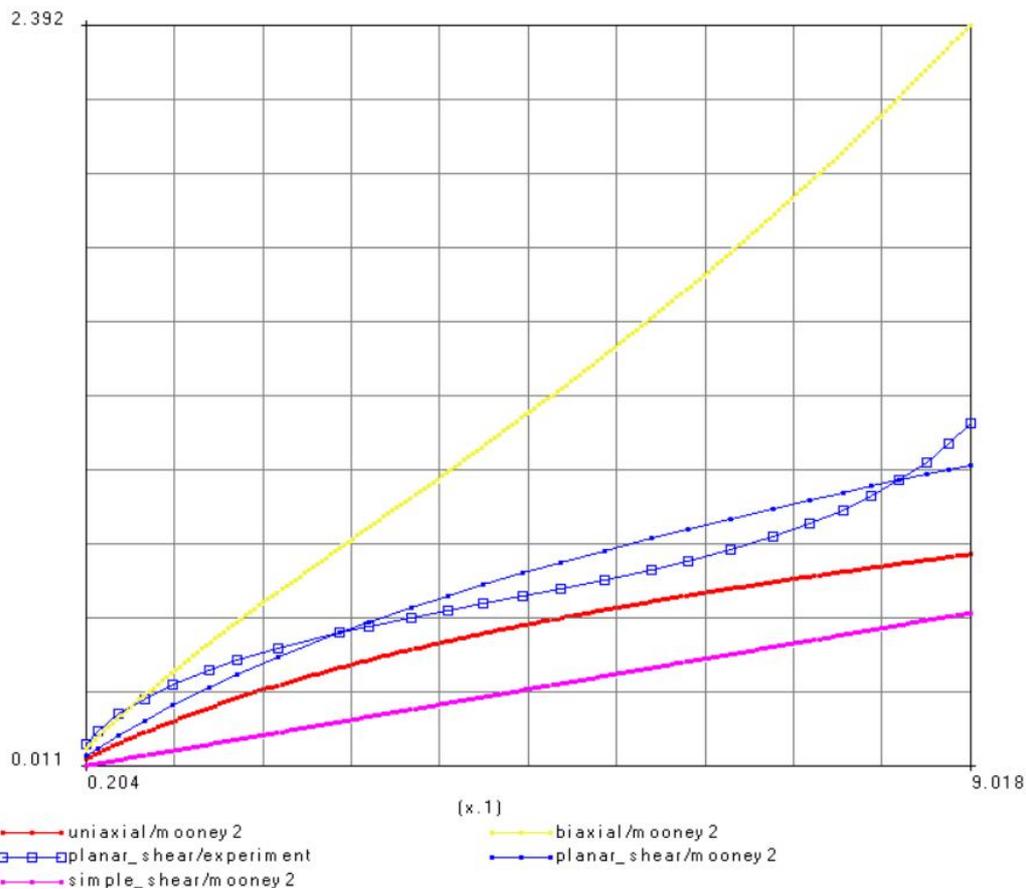


Fig. IV.17. Comparaison des résultats d’identification des paramètres de « Mooney 2 » obtenus par le test de cisaillement plan et le code Marc Msc. Mentat (modèle expérimentale et analytique).

Test / Paramètre (Mooney 2)	Paramètre 1 (C_{10})	Paramètre 2 (C_{01})	Erreur (%)
Cisaillement plan	0,1391	0,1391	0,9713

Tableau IV.4. Identification numérique des paramètres C_{10} et C_{01} .

IV.5.3.5. Identification les constantes de « Mooney 2 » utilisant les données de 03 tests : uni-axial, bi-axial et cisaillement plan

Dans le dernier cas nous utilisons les données expérimentales de 03 test. Les resultats sont obtenus et illustrés dans la figure IV.18.

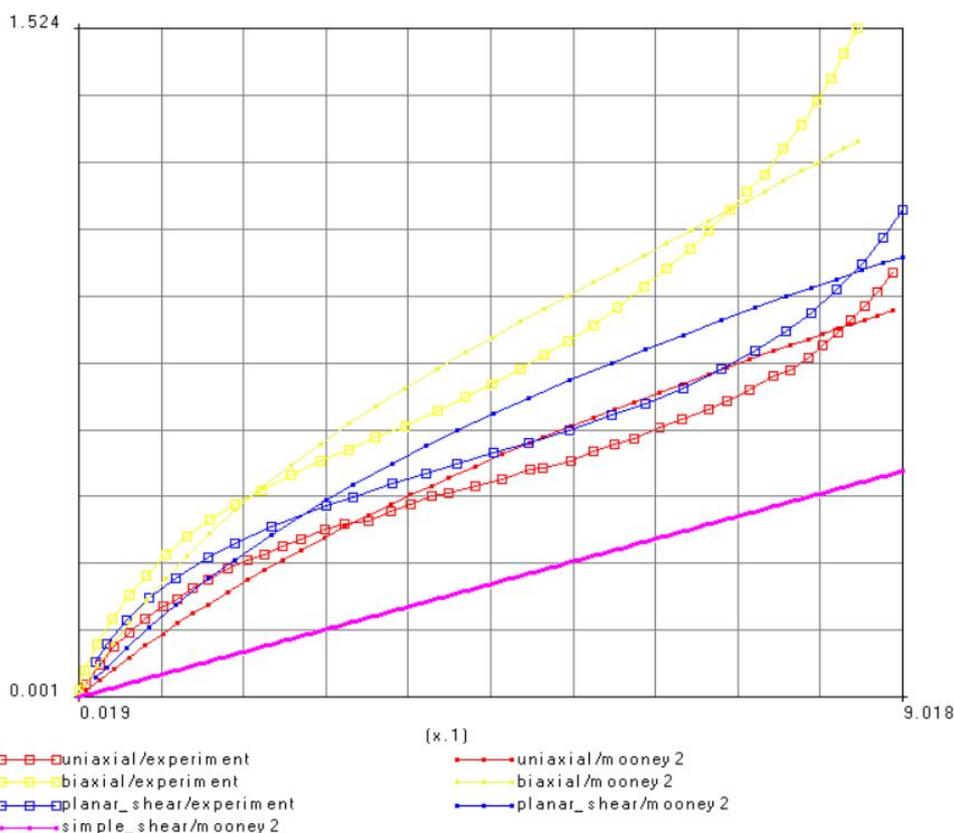


Fig. IV.18. Comparaison des résultats d'identification des paramètres de « Mooney 2 » obtenus par les 03 tests et le code Marc Msc. Mentat (modèle expérimentale et analytique).

Test / Paramètre	Paramètre 1 (C_{10})	Paramètre 2 (C_{01})	Erreur (%)
Test uni-axial	0,0434	0,3481	0,7363
Test bi-axial	0,3109	0,0046	1,3627
Test de cisaillement plan	0,1391	0,1391	0,9713
03 Tests	0,259132	0,268022	3,94084

Tableau IV.5. Identification numérique des paramètres mécaniques du matériau selon le modèle de « Mooney 2 » C_{10} et C_{01} à partir de 03 essais.

IV.5.3.6. Conclusion

Notez que lorsque MSC.Marc Mentat correspond à une seule courbe de données, il trace également les autres états de déformation prédits à l'aide du modèle élastomère actuel. Dans ce cas, seules les données uni-axiales ont été utilisées pour ajuster les deux constantes du modèle « Mooney 2 ». Notez qu'il s'agit d'un ajustement non fiable car ce modèle est trop rigide en déformation bi-axiale. Contrairement, avec les trois (03) tests qui correspondent à tous les états de déformation nous avons obtenus des résultats performantes dans l'identification des constatâtes de modèle de « Mooney 2 ». Donc, à partir des résultats, on peut conclure que nous avons réussi à simuler des matériaux hyperélastiques (Caoutchouc_077) avec des données expérimentales obtenus par 03 essais citées précédemment, et identifier d'une manière très efficace les paramètres mécaniques de modèle de « Mooney 2 » et les comparer avec les modèles analytiques.

IV.6. Identification des paramètres de modèle Arruda – Boyce

IV.6.1. Introduction

Le modèle d'Arruda-Boyce est basé sur la mécanique statistique des chaînes polymères. Dans cette approche, chaque macromolécule est décrite comme une chaîne de N segments, chacun de longueur l . Si nous supposons que la configuration initiale d'une chaîne peut être décrite par une marche aléatoire, alors la longueur initiale de la chaîne est sous la forme suivante :

$$r_0 = l\sqrt{N} \quad (\text{IV.16})$$

Si nous supposons qu'une extrémité de la chaîne est à l'origine, alors la probabilité qu'un bloc de taille $dx_1 dx_2 dx_3$ autour de l'origine contienne l'autre extrémité de la chaîne, (x_1, x_2, x_3) , en supposant une fonction de densité de probabilité gaussienne comme suite :

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{b^3}{\pi^2} \exp[-b^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)]; b = \sqrt{\frac{3}{2NI^2}} \quad (\text{IV.17})$$

L'entropie configurationnelle d'une seule chaîne de la mécanique statistique de Boltzmann est comme suite :

$$s = c - k_B b^2 \tau^2 \quad (\text{IV.18})$$

Où c est une constante. L'entropie totale dans un réseau de n chaînes est donc

$$\Delta S = -\frac{1}{2}nk_B(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = -\frac{1}{2}nk_B(I_1 - 3) \quad (\text{IV.19})$$

où une déformation affine a été supposée. Par conséquent, l'énergie de déformation du réseau déformé est

$$W = -\theta dS = \frac{1}{2}nk_B\theta(I_1 - 3) \quad (\text{IV.20})$$

où θ est la température.

Dans la mécanique un modèle Arruda - Boyce est un modèle constitutif hyper-élastique utilisé pour décrire le comportement mécanique du caoutchouc et d'autres matériaux polymères. Ce modèle est basé sur la mécanique statistique d'un matériau avec un élément de volume représentatif cubique contenant huit chaînes le long des directions diagonales. Le matériau est supposé incompressible. Le modèle porte le nom d'Ellen Arruda et Mary Cunningham Boyce, qui l'a publiée en 1993.

La fonction de densité d'énergie de déformation pour le modèle incompressible Arruda - Boyce est donnée par :

$$W = Nk_B\theta\sqrt{n} \left[\beta\lambda_{\text{chain}} - \sqrt{n} \ln \left(\frac{\sinh \beta}{\beta} \right) \right] \quad (\text{IV.21})$$

Où n est le nombre de segments de chaîne, k_B est la constante de Boltzmann, θ est la température en kelvins, N est le nombre de chaînes dans le réseau d'un polymère réticulé ;

$$\lambda_{\text{chain}} = \sqrt{\frac{I_1}{3}}, \beta = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_{\text{chain}}}{\sqrt{n}} \right) \quad (\text{IV.22})$$

Où I_1 est le premier invariant du tenseur de déformation de Cauchy–Green gauche, et \mathcal{L}^{-1} est la fonction de Langevin inverse qui peut être approchée par :

$$\mathcal{L}^{-1}(x) = \begin{cases} 1.31 \tan(1.59x) + 0.91x & \text{for } |x| < 0.841 \\ \frac{1}{\text{sgn}[x]-x} & \text{for } 0.841 \leq |x| < 1 \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Pour les petites déformations, le modèle Arruda-Boyce se réduit au modèle solide Néo-Hookéen basé sur un réseau gaussien. On peut montrer que le modèle de Gent est une approximation simple et précise du modèle d'Arruda-Boyce.

IV.6.2. Expression alternative du modèle Arruda-Boyce

Une forme alternative du modèle Arruda-Boyce, utilisant les cinq premiers termes de la fonction inverse de Langevin, est :

$$W = C_1 \left[\frac{1}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{20N} (I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050N^2} (I_1^3 - 27) + \frac{19}{7000N^2} (I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750N^4} (I_1^5 - 243) \right] \quad (\text{IV.24})$$

Où C_1 est une constante matérielle. La quantité N peut également être interprétée comme une mesure de l'étendue limite du réseau.

Si λ_m est l'étirement auquel le réseau de chaînes polymères se verrouille, nous pouvons exprimer la densité d'énergie de déformation Arruda – Boyce comme suite :

$$W = C_1 \left[\frac{1}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{20\lambda_m^2} (I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\alpha_m^4} (I_1^3 - 27) + \frac{19}{7000\lambda_m^6} (I_1^4 - 81) + \frac{519}{673750\lambda_m^9} (I_1^5 - 243) \right] \quad (\text{IV.25})$$

Nous pouvons également exprimer le modèle Arruda-Boyce sous la forme suivante :

$$W = C_1 \sum_{i=1}^5 \alpha_i \beta^{i-1} (I_1^i - 3^i) \quad (\text{IV.26})$$

Où

$$\beta := \frac{1}{N} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ et } \alpha_1 := \frac{1}{2}; \alpha_2 := \frac{1}{20}; \alpha_3 := \frac{11}{1050}; \alpha_4 := \frac{19}{7000}; \alpha_5 := \frac{519}{673750}. \quad (\text{IV.27})$$

Si le caoutchouc est compressible, une dépendance à $J = \det(\mathbf{F})$ peut être introduite dans la densité d'énergie de déformation ; \mathbf{F} étant le gradient de déformation. Plusieurs possibilités existent, parmi lesquelles l'extension de Kaliske–Rothert s'est avérée raisonnablement précise. Avec cette extension, la fonction de densité d'énergie de la déformation Arruda-Boyce peut être exprimée comme suite :

$$W = D_1 \left(\frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right) + C_1 \sum_{i=1}^5 \alpha_i \beta^{i-1} (\bar{I}_1^i - 3^i) \quad (\text{IV.28})$$

Où D_1 est une constante matérielle et $\bar{I}_1 = I_1 J^{-2/3}$. Pour être cohérent avec l'élasticité linéaire, nous devons avoir $D_1 = \frac{\kappa}{2}$ où κ est le module de masse.

IV.6.3. Condition de cohérence

Pour que le modèle incompressible d'Arruda-Boyce soit cohérent avec l'élasticité linéaire, avec μ comme module de cisaillement du matériau, la condition suivante doit être satisfaite :

$$\left. \frac{\partial W}{\partial I_1} \right|_{I_1=3} = \frac{\mu}{2} \quad (\text{IV.29})$$

À partir de la fonction de densité d'énergie de déformation d'Arruda-Boyce, nous avons :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_1 \sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \quad (\text{IV.30})$$

Donc, à $I_1 = 3$.

$$\mu = 2C_1 \sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \quad (\text{IV.31})$$

La substitution dans les valeurs de α_i conduit à la condition de cohérence suivante :

$$\mu = C_1 \left(1 + \frac{3}{5\lambda_m^2} + \frac{99}{175\lambda_m^4} + \frac{613}{875\lambda_m^6} + \frac{42039}{67375\lambda_m^9} \right) \quad (\text{IV.32})$$

IV.6.4. Relations contrainte-déformation

La contrainte de Cauchy pour le modèle incompressible d'Arruda-Boyce est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma = -p1 + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} B = -p1 + 2C_1 \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right] B \quad (\text{IV.33})$$

IV.6.5. Extension uniaxiale

Pour une extension uniaxiale dans la direction n_1 , les allongements principaux sont $\lambda_1 = \lambda_3, \lambda_2 = \lambda_3$. De l'incompressibilité $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. D'où $\lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1/\lambda$. Donc :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (\text{IV.34})$$

Le tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche peut alors être exprimé comme

$$B = \lambda^2 n_1 \otimes n_1 + \frac{1}{\lambda} (n_2 \otimes n_2 + n_3 \otimes n_3) \quad (\text{IV.35})$$

Si les directions des tronçons principaux sont orientées avec les vecteurs de base de coordonnées, nous avons l'expression de contraintes suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p + 2C_1 \lambda^2 \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right] \\ \sigma_{22} &= -p + \frac{2C_1}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right] = \sigma_{33}. \end{aligned} \quad (\text{IV.36})$$

Les courbes de contrainte-déformation sous extension uniaxiale pour le modèle Arruda-Boyce par rapport aux modèles de matériaux hyperélastiques.

$$\text{Si} \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad (\text{IV.37})$$

on a :

$$p = \frac{2C_1}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right] \quad (\text{IV.38})$$

Donc,

$$\sigma_{11} = 2C_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right] \quad (\text{IV.39})$$

La déformation technique est $\lambda-1$. La contrainte d'ingénierie est :

$$T_{11} = \sigma_{11} / \lambda = 2C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right]. \quad (\text{IV.40})$$

IV.6.6. Extension équi-biaxiale

Pour une extension équi-biaxiale dans les directions n_1 et n_2 , les allongements principaux sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. De l'incompressibilité $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Donc,

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 2\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^4}. \quad (\text{IV.41})$$

Le tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche peut alors être exprimé comme

$$B = \lambda^2 n_1 \otimes n_1 + \lambda^2 n_2 \otimes n_2 + \frac{1}{\lambda^4} n_3 \otimes n_3 \quad (\text{IV.42})$$

Si les directions des tronçons principaux sont orientées avec les vecteurs de base de coordonnées, nous avons donc :

$$\sigma_{11} = 2C_1 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right]; \sigma_{22} = 0; \sigma_{33} = 2C_1 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right] \quad (\text{IV.43})$$

La déformation technique est $\lambda-1$. La contrainte d'ingénierie est :

$$T_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\lambda} = 2C_1 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} I_1^{i-1} \right] \quad (\text{IV.44})$$

IV.6.7. Cisaillement plan

Le gradient de déformation pour une déformation de cisaillement simple à la forme suivante :

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \gamma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad (\text{IV.45})$$

Où $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sont des vecteurs de base orthonormés de référence dans le plan de déformation et la déformation de cisaillement est donnée par :

$$\gamma = \lambda - \frac{1}{\lambda}; \lambda_1 = \lambda; \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}; \lambda_3 = 1 \quad (\text{IV.46})$$

Sous forme matricielle, le gradient de déformation et le tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche peuvent alors être exprimés comme suite :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.47})$$

Donc,

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{B}) = 3 + \gamma^2 \quad (\text{IV.48})$$

Et la contrainte de Cauchy est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2C_1 \left[\sum_{i=1}^5 i \alpha_i \beta^{i-1} (3 + \gamma^2)^{i-1} \right] \mathbf{B} \quad (\text{IV.49})$$

IV.6.8. Identification les constantes de modèle « d'Arruda-Boyce » utilisant les données de la traction uni-axial

Il est clair que l'utilisation de tous les états de déformation est la meilleure. Cependant, il se peut que nous ne disposions souvent pas de toutes les données et que nous ne disposions que des données de test uni-axial. Dans ce cas, nous pouvons utiliser le modèle d'Arruda-Boyce.

Dans cette simulation on revient l'application de la poutre arc en caoutchouc, nous utilisons en première étape seulement les données expérimentales de test uni-axial. Les résultats obtenus sont présentés dans la figure IV.19

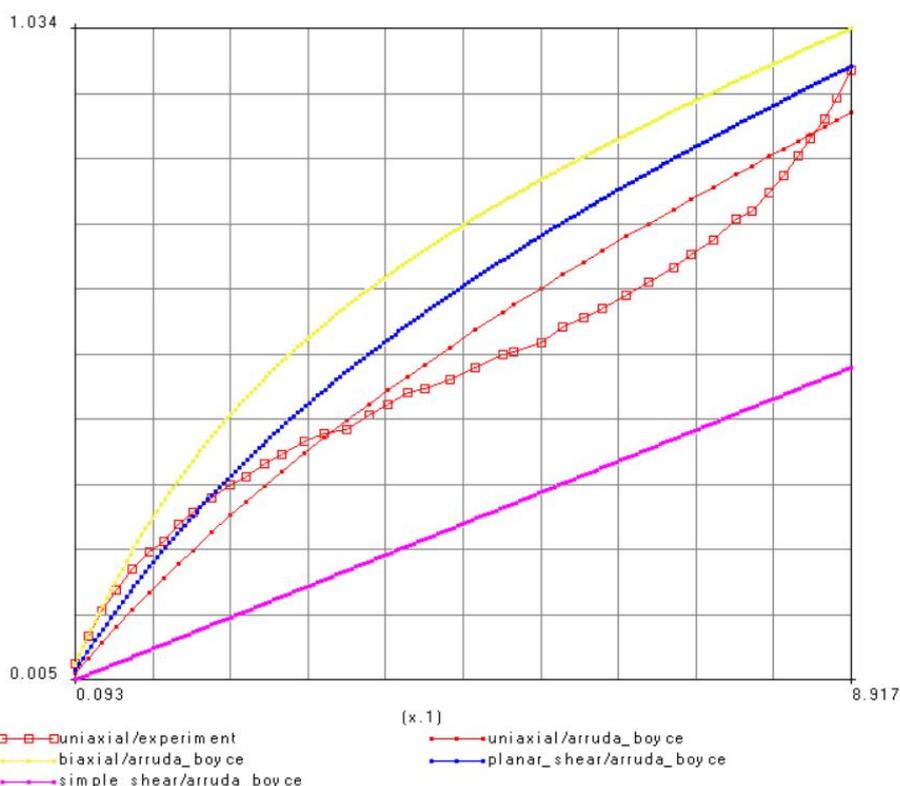


Fig. IV.19. Comparaison des résultats d’identification des paramètres de Modèle Arruda-Boyce utilisant uniquement des données uni-axiales et le code Marc Msc. Mentat (modèle expérimentale et analytique).

Test / Paramètre (Arruda-Boyce)	Paramètre 1 (NKT)	Paramètre 2 (N)	Erreur (%)
Test uni-axial	0,558704	586691	1,62924

Tableau IV.6. Identification numérique des paramètres mécaniques du matériau selon le modèle d’Arruda – Boyce à partir des données uni-axiales.

IV.6.9. Identification les constantes de modèle « d’Arruda-Boyce » utilisant les données des 03 tests

Pour être claire, nous utilisons dans le deuxième cas toutes les données expérimentales. Voici les résultats obtenus pour identification les paramètres du modèle d’Arruda-Boyce utilisant tous les états de sollicitation affichés dans la figure IV.20.

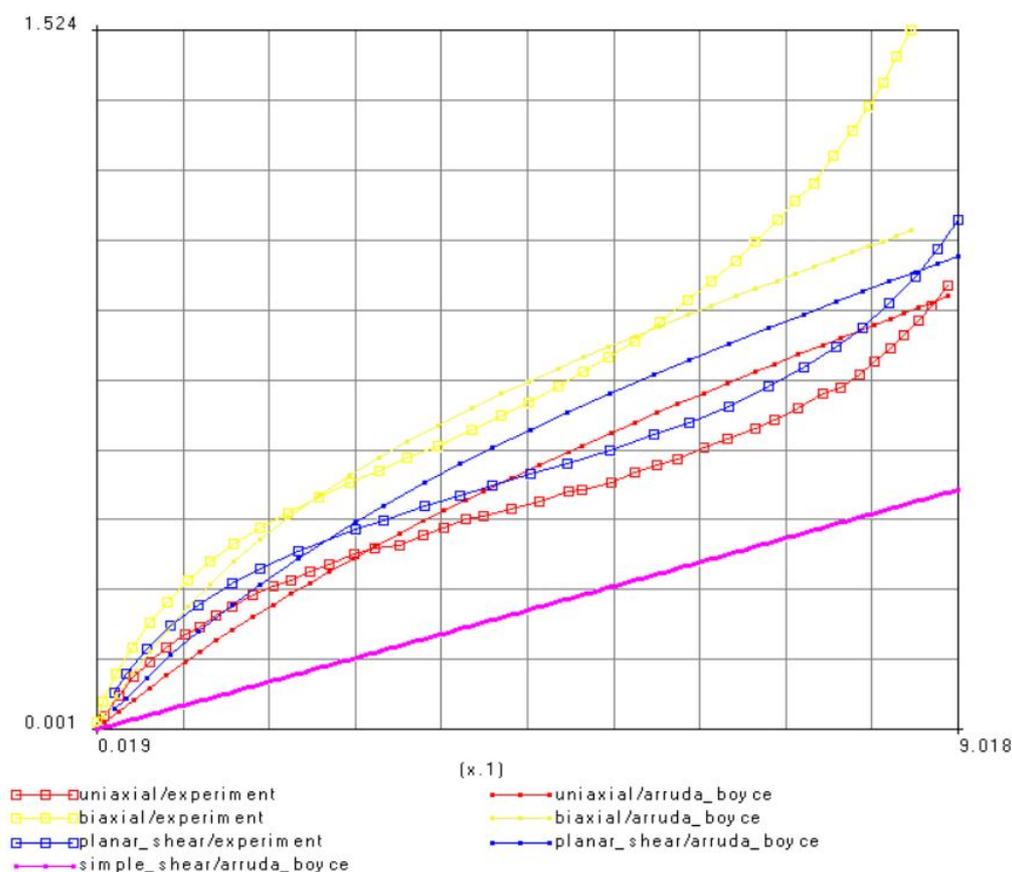


Fig. IV.20. Comparaison des résultats d'identification des paramètres de Modèle Arruda-Boyce utilisant les données des 03 tests et le code Marc Msc. Mentat (modèle expérimentale et analytique).

Test / Paramètre (Arruda-Boyce)	Paramètre 1 (NKT)	Paramètre 2 (N)	Erreur (%)
03 test	0,557234	19,5204	4,39533

Tableau IV.7. Identification numérique des paramètres mécaniques du matériau selon le modèle d'Arruda – Boyce à partir des données de 03 tests.

IV.6.8. Conclusion

En premier temps, il est très important de noter que lorsque MSC. Marc Mentat correspond à une seule courbe de données, il trace également les autres états de déformation prédits à l'aide du modèle élastomère actuel. Dans ce cas, seules les données uni-axiales ont été utilisées pour ajuster les deux constantes à un modèle « Mooney 2 ». Notez qu'il s'agit d'un mauvais ajustement car ce modèle est trop rigide en déformation bi-axiale. Essayons maintenant d'utiliser à nouveau tous les états de déformation (03 essais) pour ajuster un modèle de « Mooney 2 » à deux constantes. Ainsi, à partir des résultats, on peut conclure que nous avons réussi à simuler des matériaux hyperélastiques (Caoutchouc_077) avec des données expérimentales obtenus par 03 essais citées précédemment, et identifier les paramètres mécaniques de modèle de « Mooney 2 » et les comparer avec les modèles analytiques.

En deuxième temps, nous supposons que l'application réelle soit le gonflage d'un tube. Le modèle « Mooney 2 » utilisant uniquement des données uni-axiales nécessiterait une pression de plus de 4 fois de celle du modèle d'Arruda-Boyce lorsque les contraintes d'inflation sont d'environ 90 %. Il existe plusieurs modèles de matériaux élastomères qui se répartissent en trois classes : modèles phénoménologiques, d'étirement principal et micromécaniques tels que les modèles Arruda-Boyce et Gent.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] Garrigues J. Mécanique des milieux continus. Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille, 2002. Cours disponible en ligne sur <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/>.
- [2] Sédov L. Mécanique des milieux continus, Tome I. Editions MIR, Moscou, 1973.
- [3] Cescotto S. Eléments de mécanique des solides déformables. Université de Liège, 1988.
- [4] Bonet J. and Wood R. D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge University Press, 1997. ISBN 0 521 57272 X hardback.
- [5] Germain P. Cours de Mécanique des milieux continus. Masson, 1973. tome 1.
- [6] Le Houedec D. Mécanique des solides. Ecole Centrale de Nantes, 1999. Polycopié à l'usage de l'étudiante première année.
- [7] Sini J. F. Mécanique des Fluides. Ecole centrale de Nantes, 1999. Polycopié à l'usage des étudiants deuxième année.
- [8] Malvern L. E. Introduction to Mechanics of a Continuous Medium, Prentice Hall, 1997.
- [9] Mase G. E. Continuum Mechanics, Schaum's outlines, Mc Graw Hills, 1970.
- [10] Royis P., "Mécanique des milieux continus", Cours de l'ENTPE, 2001.
- [11] Duc J. et Beller D. Mécanique des solides réels. Élasticité. Cepadues, Toulouse, 1976.
- [12] Duc J. et Bellet D. Problèmes d'élasticité. Cepadues, Toulouse, 1976.
- [13] Duvaut G. et Lions J. L. Les inéquations variationnelles en Mécanique et en Physique. Dunod, Paris, 1972.
- [14] Dym C. I. and Shames I. H. Solid mechanics, a variational approach. McGraw Hill, New York, 1973.
- [15] Eringen A. C. Mechanics of Continua. J. Wiley & Sons, New York, 1967. 1
- [16] Germain P. Mécanique des Milieux Continus. Masson, Paris, 1962. 1, 3, 8
- [17] Germain P. Cours de Mécanique des Milieux Continus, Tome 1 : Théorie Générale. Masson, Paris, 1973.
- [18] Gontier G. Mécanique des Milieux Déformables. Dunod, Paris, 1969. 1, 3, 8
- [19] Gurtin M. E. The Theory of Linear elasticity, volume VIa/2 de Handbuch der Physik. Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.
- [20] Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford University Press, 1964.
- [21] Iliouchine A. A. Plasticité, Déformation élastoplastiques. Eyrolles, Paris, 1956.
- [22] Johnson W. and Mellok P. B. Plasticity for mechanical engineers. Van Nostrand, London, 1962.
- [23] Lai W. M., Rubin D. et Krempf E. Introduction to continuum mechanics. Pergamon, Oxford, 1978.
- [24] Landau L. D., Lifschitz E. M. Théorie de l'élasticité, Cours de Physique théorique, tome VII. Ed. de Moscou, 1967.
- [25] Love A. Mathematical theory of elasticity. Dover, London, 1944. 96
- [26] Mandel J. Cours de Mécanique des Milieux Continus, tomes 1 et 2. Gauthier- Villars, Paris, 1966.
- [27] Mandel J. Introduction à la Mécanique des Milieux Continus Déformables. P.W.N., Varsovie, 1974.
- [28] Mandel J. Propriétés mécaniques des matériaux : rhéologie, plasticité. Eyrolles, Paris, 1977.
- [29] Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Noordhoff, Groningen.
- [30] Parkus H. Thermoelasticity. Blaisdell, Waltham, 1968.

Références Bibliographiques

- [31]Prager W. Problèmes de plasticité théorique. Dunod, Paris, 1958.
- [32]Prager W. Introduction to Mechanics of Continua. Ginn and Co, New York, 1961.
- [33]Roy M. Mécanique, tome II : Milieux Continus. Dunod, Paris, 1966.
- [34]Sedov L. I. A course in continuum mechanics, tomes I, II, III, IV. Walters Noordhoff, Groningen, 1971.
- [35]Solomon L. Élasticité linéaire. Masson, Paris, 1968.
- [36]Timoshenko S., Goodier J. Théorie de l'élasticité. Béranger, Paris, 1961.
- [37]Truesdell C., A. et Noll W. The non linear field theories of mechanics. Handbuch der Physik, Bd III/3. Springer, Berlin, 1965.
- [38]Truesdell C. A. et Toupin R. The classical field theories. Handbuch der Physik, Bd III/1. Springer, Berlin, 1960.
- [39]Valid R. La mécanique des milieux continus et le calcul des structures. Eyrolles, Paris, 1977.
- [40]Zienkiewicz O. C. La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'ingénieur. Ediscience, 1973.
- [41]Chimenti C., Franchi L., Di Giuseppe M. G., Lucci M. Friction of orthodontic elastomeric ligatures with different dimensions. *Angle Orthod* 2005;75:421–425.
- [42] De Genova D. C. McInnes-Ledoux P. Weinberg R. Shaye R. Force degradation of orthodontic elastomeric chains – a product comparison study. *Am J Orthod* 1985;87:377–384.
- [43]Doherty U. B., Benson P. E., Higham S. M. Fluoride-releasing elastomeric ligatures assessed with the in situ caries model. *Eur J Orthod* 2002;24:371–378.
- [44]Ebailon J.P., Dorlot J.M. Des matériaux. 3e édition. Paris: Ed. Presses Internationales Polytechnique, 2000, 736 p.
- [45]Eliades T. Orthodontic materials research and applications: part 2. Current status and projected future developments in materials and biocompatibility. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2007;131:253–262.
- [46]Eliades T., Bourauel C. Intraoral aging of orthodontic materials: the picture we miss and its clinical relevance. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2005;127:403–412.
- [47]Eliades T., Eliades G., Silikas N., Watts D. C. Tensile properties of orthodontic elastomeric chains. *Eur J Orthod* 2004;26:157–162.
- [48]Eliades T. Eliades G. Silikas N. Watts D. C. In vitro degradation of polyurethane orthodontic elastomeric modules. *J Oral Rehabil* 2005;32:72–77.
- [49]Eliades T., Eliades G., Watts DC. Structural conformation of in vitro and in vivo aged orthodontic elastomeric modules. *Eur J Orthod* 1999;21:649–658.
- [50]Evangelista M., B. Berzins D., W. Monaghan P. Effect of disinfecting solutions on the mechanical properties of orthodontic elastomeric ligatures. *Angle Orthod* 2007;77:681–687.
- [51]Gandini P., Gennai R., Bertoncini C., Massironi S. Experimental evaluation of latex-free orthodontic elastics behaviour in dynamics. *Prog Orthod* 2007;8:88–99.
- [52]Gioka C. Zinelis S. Eliades T. Eliades G. Orthodontic latex elastics: a force relaxation study. *Angle Orthod* 2006;76:475–479.
- [53]Hain M., Dhopatkar A., Rock P. A comparison of different ligation methods on friction. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2006;130:666–670. *68 Orthod Fr* 2009;80:55–68
- [54]Huet A. Montandreaux E. Étude des chaînettes élastomériques et de leur relaxation. *Orthod Fr* 1993;64:619–633.
- [55]Kersey M. L., Glover K.E, Heo G. Raboud D. Major P. W. A comparison of dynamic and static testing of latex and nonlatex orthodontic elastics. *Angle Orthod* 2003;73:181–186.

Références Bibliographiques

- [56] Kersey M. L., Glover K., Heo G., Raboud D., Major PW. An in vitro comparison of four brands of nonlatex orthodontic elastics. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2003;123:401–407.
- [57] Khambay B., Millett D., McHugh S. Evaluation of methods of archwire ligation on frictional resistance. *Eur J Orthod* 2004;26:327–332.
- [58] Khambay B., Millett D., McHugh S. Archwire seating forces produced by different ligation methods and their effect on frictional resistance. *Eur J Orthod* 2005;27:302–308.
- [59] Kim K. H., Chung C. H., Choy K., Lee J. S., Vanarsdall R. L. Effects of prestretching on force degradation of synthetic elastomeric chains. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2005;128:477–482.
- [60] Lagache S. Etude in vitro du fluage et de la relaxation des chaînettes élastomériques en Orthodontie. Mémoire CECSMO. Lille: Université de Lille 2, 2006.
- [61] Lam T. V., Freer T. J., Brockhurst P. J., Podlich H. M. Strength decay of orthodontic elastomeric ligatures. *J Orthod* 2002;29:7–43.
- [62] Lu T.C., Wang W. N., Tarng T. H., Chen J. W. Force decay of elastomeric chain – a serial study. Part II. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 1993;104:373–377.
- [63] Mattick C. R., Mitchell L., Chadwick S. M., Wright J. Fluoridereleasing elastomeric modules reduce decalcification: a randomized controlled trial. *J Orthod* 2001;28:217–219.
- [64] Mayberry D., Dallen R., Close J., Kinney D. A. Effects of disinfection procedures on elastomeric ligatures. *J Clin Orthod* 1996;30:49–51.
- [65] Mercier J. P., Zambelli G., Kurz W. Introduction à la science des matériaux. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires romandes, 1999.
- [66] Miura K. K., Ito I. Y., Enoki C., Elias A. M., Matsumoto M. A. Anticariogenic effect of fluoride-releasing elastomers in orthodontic patients. *Braz Oral Res* 2007;21:228–233.
- [67] Montandreaux E. Études théoriques et expérimentales sur les chaînettes élastomériques. Mémoire CECSMO. Lyon: Université Claude Bernard – Lyon 1, 1992.
- [68] Mousseau J. À propos des forces élastiques en orthodontie. Thèse Doct Etat. Nantes: Université de Nantes, 1996.
- [69] Nattrass C., Ireland AJ, Sherriff M. The effect of environmental factors on elastomeric chain and nickel titanium coil springs. *Eur J Orthod* 1998;20:169–176.
- [70] O’Dwyer J. J., Tinsley D., Benson P. E. The effect of stretching on the release of fluoride from fluoridated elastomeric ligatures. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2005;128:471–476.
- [71] Philippe J. Qui a inventé les élastiques d’orthodontie ? *Rev Orthop Dento Faciale* 2001;35:145–150.
- [72] Renick M. R., Brantley W. A., Beck F. M., Vig K. W., Webb C. S. Studies of orthodontic elastomeric modules. Part 1: Glass transition temperatures for representative pigmented products in the as-received condition and after orthodontic use. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 2004;126:337–343.
- [73] Rollet D., Graindorge J. C., Guezennec P. Un concept nouveau : l’élastodontie. *Rev Orthop Dento Faciale* 1991;25:149–167.
- [74] Santos A. C., Tortamano A., Naccarato S. R., Dominguez- Rodriguez G. C., Vigorito J. W. An in vitro comparison of the force decay generated by different commercially available elastomeric chains and Ni-Ti closed coil springs. *Braz Oral Res*, 2007;21:51–57.
- [75] Stevenson J. S., Kusy R. P. Force application and decay characteristics of untreated and treated polyurethane elastomeric chains. *Angle Orthod* 1994;64:455–464.

Références Bibliographiques

- [76]Storie D. J., Regennitter F., Von Fraunhofer J. A. Characteristics of a fluoride-releasing elastomeric chain. *Angle Orthod* 1994;64:199–209.
- [77]Taloumis L. J, Smith T. M, Hondrum S. O, Lorton L. Force decay and deformation of orthodontic elastomeric ligatures. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 1997;111:1–11.
- [78]Trotignon J. P., Verdu J., Dobraczynski A., Pieraud M. Précis de matières plastiques. Structures, propriétés, mise en oeuvre, normalisation. Paris: Nathan, 1991.
- [79]Wang T., Zhou G., Tan X., Dong Y. Evaluation of force degradation characteristics of orthodontic latex elastics in vitro and in vivo. *Angle Orthod* 2007;77:688–693.
- [80]Wilson T. G., Gregory R. L. Clinical effectiveness of fluoride-releasing elastomers. I: Salivary *Streptococcus mutans* numbers. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 1995;107:293–297.
- [81]Wilson T. G., Love B. Clinical effectiveness of fluoridereleasing elastomers. II. Enamel microhardness levels. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 1995;107:379–381.
- [82]Wiltshire W. A. Determination of fluoride from fluoridereleasing elastomeric ligature ties. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 1996;110:383–387.
- [83]Wiltshire W. A. In vitro and in vivo fluoride release from orthodontic elastomeric ligature ties. *Am J Orthod Dentofacial Orthop* 1999;115:288–292
- [84]Persoz B. Introduction à l'étude de la rhéologie. Dunod, 1960.
- [85]Malvern L. E. Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice Hall, 1969.
- [86]Mandel J. Propriétés mécaniques des matériaux. Eyrolles (1978).
- [87]Lieurade H. P. La pratique des essais de fatigue. P. Y. C. Edition, 1982.
- [88]Loveday M. S., Day M. F., Dyson B. F. Measurement of high temperature mechanical properties of materials. National Physical Laboratory. The Majesty's Stationery Office 1982.
- [89]A.S.T.M. Metals Handbook : Vol. 1 à 12. American Society for Metals.
- [90]Chang H., Wan Z., Chen X., Wan J., Luo L., Zhang H., Shu S., Tu Z. Temperature and humidity effect on aging of silicone rubbers as sealing materials for proton exchange membrane fuel cell applications. *Appl. Therm. Eng.* 2016, 104, 472–478.
- [91]Roland C. M. Mechanical Behavior of Rubber at High Strain Rates. *Rubber Chem. Technol.* 2006, 79, 429–459. [CrossRef]
- [92]Aleksey D. D. Viscoelastic Structures; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 1998.
- [93]Iiguez-Macedo, S. Lostado-Lorza, R. Escribano-García, R. Ángeles, M. Finite Element Model Updating Combined with Multi-Response Optimization for Hyperelastic 4 Materials Characterization 5. *Materials* 2019, 12, 1019.
- [94]Arruda E. M., Boyce, M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids* 1993, 41, 389–412.
- [95]Rivlin R. S., Saunders D.W. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A Math. Phys. Sci.* 1951, 243, 251–288.
- [96]Hart-Smith L. J. Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials. *Z. Für Angew. Math. Und Phys. ZAMP* 1966, 17, 608–626.
- [97]Schweickert E., Mihai L. A., Martin R. J., Neff P. A note on non-homogeneous deformations with homogeneous Cauchy stress for a strictly rank-one convex energy in isotropic hyperelasticity. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2019, 119, 103282.
- [98]Liao B., Sun B., Yan M., Ren Y., Zhang W., Zhou K. Time-Variant Reliability Analysis for Rubber O-Ring Seal Considering Both Material Degradation and Random Load. *Materials* 2017, 10, 1211.

Références Bibliographiques

- [99]Koeller R. C. A Theory Relating Creep and Relaxation for Linear Materials With Memory. *J. Appl. Mech. Trans. ASME* 2010, 77, 031008.
- [100]Luo R., Lv H., Liu, H. Development of Prony series models based on continuous relaxation Spectrum for relaxation moduli determined using creep tests. *Constr. Build. Mater.* 2018, 168, 758–770.
- [101]Dassault. Systèmes Abaqus 6.14 Online Documentation. Available online: <http://130.149.89.49:2080/v6.14/books/usb/default.htm> (accessed on 15 November 2022).
- [102]Treloar L. R. G. *The Physics of Rubber Elasticity*, 2nd ed.; Oxford University Press: Oxford, UK, 1958.
- [103]Barghamadi M., Ghoreishy, M. H. R., Karrabi M., Mohammadian-Gezaz S. Modeling of nonlinear hyper-viscoelastic and stress softening behaviors of acrylonitrile butadiene rubber/polyvinyl chloride nanocomposites reinforced by nanoclay and graphene. *Polym. Compos.* 2020, 42, 583–596.
- [104]Liu Q., Liu J., Guan F., Han X., Cao L., Shan K. Identification of the visco-hyperelastic properties of brain white matter based on the combination of inverse method and experiment. *Med. Biol. Eng. Comput.* 2019, 57, 1109–1120.
- [105]Hou J., Lu X., Zhang K., Jing Y., Zhang Z., You J., Li Q. Parameters Identification of Rubber-like Hyperelastic Material Based on General Regression Neural Network. *Materials* 2022, 15, 3776.
- [106]Karim M. R., Zhang Z., Zhu Y. Prediction of Nonlinear Viscoelastic Recovery of Thermoplastic Polymers Using Abaqus Parallel Rheological Framework (PRF) Model. In *Proceedings of the Science in the Age of Experience 2016*, Boston, MA, USA, 23–27 May 2016.
- [107]Tho K. K., Swaddiwudhipong S., Liu Z., Hua J. Artificial neural network model for material characterization by indentation. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* 2004, 12, 1055–1062.
- [108]Promma N., Raka B., Grédiac M., Toussaint E., Le Cam J. B., Balandraud X., Hild F. Application of the virtual fields method to mechanical characterization of elastomeric materials. *Int. J. Solids Struct.* 2009, 46, 698–715.
- [109]Román A. J., Qin S., Rodríguez J. C., González L. D., Zavala V. M., Osswald T.A. Natural Rubber Blend Optimization via Data-Driven Modeling: The Implementation for Reverse Engineering. *Polymers* 2022, 14, 2262.
- [110]Zhao Z., Wang J., Hou X., Xiang Q., Xiao F. Viscosity Prediction of Rubberized Asphalt–Rejuvenated Recycled Asphalt Pavement Binders Using Artificial Neural Network Approach. *J. Mater. Civ. Eng.* 2021, 33, 04021071.
- [111]Zhao Y., Yan H., Wang Y., Jiang T., Jiang H. Predicting Nonlinear and Anisotropic Mechanics of Metal Rubber Using a Combination of Constitutive Modeling, Machine Learning, and Finite Element Analysis. *Materials* 2021, 14, 5200.
- [112]Lu L., Dao M., Kumar P., Ramamurty U., Karniadakis G. E., Suresh S. Extraction of mechanical properties of materials through deep learning from instrumented indentation. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2020, 117, 7052–7062.
- [113]Pham T.T., Woo C., Choi S., Min J., Beomkeun K., Development of Hyperelastic Model for Butadiene Rubber Using a Neural Network. *Elastomers Compos.* 2021, 56, 79–84.
- [114]Pierron F., Grédiac M. *The Virtual Fields Method*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2012.

Références Bibliographiques

- [115]Grédiac M., Pierron F. Applying the Virtual Fields Method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters. *Int. J. Plast.* 2006, 22, 602–627.
- [116]Bastos G., Sales L., Di Cesare N., Tayeb A., Le Cam J. B. Inverse-Pagerank-particle swarm optimisation for inverse identification of hyperelastic models: A feasibility study. *J. Rubber Res.* 2021, 24, 447–460. parameters with sensitivity-based virtual fields. *Strain* 2021, 57, 12397.
- [117]Johlitz M., Diebels S. Characterisation of a polymer using biaxial tension tests. Part I: Hyperelasticity. *Arch. Appl. Mech.* 2010, 81, 1333–1349.
- [118]Ghoreishy M. H. R., Abbassi-Sourki F. Nonlinear stress relaxation of filled rubber compounds: A new theoretical model and experimental investigation. *J. Appl. Polym. Sci.* 2020, 138, 49884
- [119]Huber N., Tsakmakis C. Determination of constitutive properties from spherical indentation data using neural networks. Part i: the case of pure kinematic hardening in plasticity laws. *J. Mech. Phys. Solids* 1999, 47, 1569–1588.
- [120]Arruda E. M. and Boyce M. C. A three-dimensional model for the large stretch behavior of rubber elastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, 41(2), pp. 389–412.
- [121]Bergstrom J. S. and Boyce, M. C. Deformation of Elastomeric Networks: Relation between Molecular Level Deformation and Classical Statistical Mechanics Models of Rubber Elasticity, *Macromolecules*, 2001, 34 (3), pp 614–626, doi:10.1021/ma0007942.
- [122]Horgan C. O. and Saccomandi G. A molecular-statistical basis for the Gent constitutive model of rubber elasticity, *Journal of Elasticity*, 2002, 68(1), pp. 167–176.
- [123]Hiermaier S. J. *Structures under Crash and Impact*, Springer. 2008.
- [124]Kaliske M. and Rotherth H. On the finite element implementation of rubber-like materials at finite strains, *Engineering Computations*, 1997, 14(2), pp. 216–232.
- [125]Ogden R.W. *Non-Linear Elastic Deformations*, 1984, ISBN 0-486-69648-0, Dover.
- [126]Muhr A. H. Modeling the stress–strain behavior of rubber. *Rubber Chemistry and Technology*. 2005, 78 (3): 391–425. doi:10.5254/1.3547890.
- [127]Lemaitre J. et Chabouche J. L. A. *Mécanique des matériaux solides*. 2^{ème} édition, 1984.
- [128]Drai A. Cours « Défauts et déformation plastique », rédigé par Dr. Ahmed Drai, chargé de module, Département de Génie Mécanique, Université Mustapha Stambouli de Mascara et membre du laboratoire de biomécanique et biomatériaux (LABAB), Ecole polytechnique d’Oran ‘Maurice Audin’, 2022.