الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
و البحث العلمي وزارة التعليم العالي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة مصطفى اسطنبولي معسكر
Université Mustapha Stambouli mascara

THESE de DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse harmonique

Intitulée

Les applications harmoniques sur les variétés

Présentée par **:** **Mme** Osamnia Nada

Le :04/07/2024

Devant le jury :

Président	MOHAMMED CHERIF Ahmed	Professeur	Université de Mascara
Examinateur	HANIFI Zoubir	Professeur	Université d'Oran
Examinateur	ZAGANE Abderrahim	M.C.A	Université de Relizane
Examinateur	KACIMI Bouazza	M.C.A	Université de Mascara
Encadreur	ZEGGA Kaddour	M.C.A	Université de Mascara
Co-encadreur	ZAGANE Abdelkader	M.C.A	Université de Mascara

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciments

Tout d'abord et avant tout, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma grande reconnaissance envers le Dr. ZEGGA Kaddour et le Dr. ZAGANE Abdelkader pour leur rôle important et efficace en tant que mes superviseurs de thèse de doctorat, les membres du jery aussi Dr. ZAGANE Abderrahim, Dr. ZOUBIR Habib et Pr. MOHAMMED CHERIF Ahmed et Dr KACIMI Bouazza, leur contribution a été essentielle au développement de mes idées et à ma progression vers le succès dans ce projet.

Je suis également extrêmement reconnaissant envers tous les autres enseignants qui ont participé à mon soutien tout au long de ma carrière académique.

Je tiens également à remercier chaleureusement l'administration de l'université Mustapha Stambouli pour le soutien qu'elle m'a apporté tout au long de ce parcours académique. Je prie sincèrement pour que cette réalisation marque le début d'une nouvelle ère de réussite et de créativité dans mes domaines d'études et professionnels.

Dédicace

Je dédie ce mémoire à l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir. Que Dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père.
A la lumière de mes jours, la source de mes efforts et mon bonheur : maman que j'adore.
A l'âme de mon coeur **Afnane**, et mon homme **Toufik**.
A tous mes soeurs et mes frères et ma belle famille dont le grand plaisir leur revient en premier lieu pour leurs conseils, aides et encouragements.
Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amis, collègues d'étude.
Je dis merci à tous. **Nada Osamnia**.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous visons la classification jusqu'à une conjugaison par automorphisme des groupes de Lie des homomorphismes harmoniques entre deux groupes de Lie non abéliens connexes, et simplement connexes, de dimension trois unimodulaires différents $\phi : (G, g) \to (H, h)$, où g et h sont deux métriques riemanniennes invariantes à gauche sur G et H respectivement.

ABSTRACT

In this work we aim the classification up to a conjugation by automorphism of Lie groups of harmonic homomorphism, between two different non abelian connected, and simply connected three dimensional unimodular Lie groups $\phi : (G, g) \longrightarrow (H, h)$, where g and h are two left invariant riemannian metrics on G and H respectively.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des applications harmoniques, riche et a suscité un intérêt croissant au cours de la dernière décennie (voir [1] ,[2]). La théorie des applications harmoniques dans les groupes de Lie a été largement étudiée en relation avec les homomorphismes dans les groupes de Lie compacts par de nombreux mathématiciens (voir par exemple [6], en particulier, les applications harmoniques dans les groupes de Lie [24] et les automorphismes intérieurs harmoniques des groupes de Lie semi-simples compacts connexes dans [22] et étudie intensivement les homomorphismes harmoniques et biharmoniques entre les groupes de Lie riemanniens munis d'une métrique riemannienne invariante à gauche dans [4].

Dans [3], (S.Boubekour et M.Boucetta) ont étudiés la classification, jusqu'à une conjugaison par un automorphisme des groupes de Lie, des applications harmoniques et biharmoniques $f : (G, g_1) \to (G, g_2)$ où G est un groupe de Lie non abélien connexe et simplement connexe, unimodulaire de dimension trois, f est un homomorphisme de groupe de Lie et g_1, g_2 sont deux métriques riemanniennes invariantes à gauche. Le groupe de Lie est unimodulaire si chaque mesure de Haar à gauche est une mesure de Haar à droite et vice versa. Il est connu que G est unimodulaire si et seulement si $|\det \mathrm{Ad}_x| = 1$ pour tout x dans G, d'autre part $\mathfrak{g}$ est unimodulaire si et seulement si la trace de $\mathrm{ad}(X) = 0$ pour tout X dans $\mathfrak{g}$.

En dimension trois Il existe cinq groupes de Lie connexes , simplement connexes unimodulaires non abéliens : le groupe de Lie nilpotent (ou le groupe de Heisenberg), le groupe spécial unitaire $SU(2)$, le groupe de recouvrement universel $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ du groupe linéaire spécial, les groupes de Lie résolubles Sol et le groupe de recouvrement universel $\widetilde{E}_0(2)$ de la composante connexe du groupe euclidien, pour plus de détails voir [12].

Dans ce travail, nous visons la classification jusqu'à une conjugaison par un automorphisme des groupes de Lie des homomorphismes harmoniques entre deux groupes de Lie non abéliens connexes, et simplement connexes, de dimension trois unimodulaires différents $\phi : (G, g) \to (H, h)$, où g et h sont deux métriques riemanniennes invariantes à gauche sur G et H respectivement.

La thèse se compose de quatre chapitres :
Le premier chapitre est consacré à revisiter les outils fondamentaux de la géométrie riemannienne. On a commencé par introduire la notion de variétés différentiables, Ensuite, nous explorerons la métrique riemannienne, une structure cruciale définissant les notions de longueur et d'angle sur une variété différentielle. Nous aborderons également la connexion de Levi-Civita, qui capture les propriétés de parallélisme et de transport parallèle des vecteurs sur une variété, ainsi que les tenseurs de courbure, fournissant des informations sur la courbure intrinsèque de l'espace. De plus, nous étudierons différents opérateurs géométriques tels que le gradient, la divergence, la Hessienne et le Laplacien, qui jouent un rôle central dans l'analyse et la manipulation des champs scalaires, vectoriels et tensoriels sur une variété différentiable.Dans le deuxième chapitre, on propose un rappel sur les applications harmoniques (et également biharmoniques), en présentant la première variation de la fonctionnelle énergie (et de la fonctionnelle bi-énergie). Dans le troisième chapitre, on a rappelé les définitions et les propriétés nécéssaires pour les groupes de Lie et les algèbres de Lie, en particulier les groupes de Lie non abéliens connexes, et simplement connexes, de dimension trois unimodulaires et leurs algèbres de Lie munis des métriques riemannienne invariantes à gauche.
Dans le quaterième chapitre, on a présenté les cinq groupes de Lie non abéliens connexes et simplement connexes de dimension trois unimodulaires et leurs algèbres de Lie munies de leures métriques invariantes à gauches. Ensuite on a reuissi à classifier les homomorphismes harmoniques entre deux groupes de Lie non abéliens connexes, et simplement connexes, de dimension trois unimodulaires différents $\phi : (G, g) \to (H, h)$, où g et h sont deux métriques riemanniennes invariantes à gauche sur G et H respectivement.

CHAPITRE 1

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

1.1 Variétés différentiables

Définition 1.1.1.
Une variété différentiable de dimension m est un espace topologique séparé, muni d'un atlas différentiable de dimension m.

Exemple 1.1.1 (La sphère standard)**.**
La sphère standard $\mathbb{S}^n$ est l'ensemble :

$$\mathbb{S}^n = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} / \|u\| = 1\}$$

En tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$, elle est munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$. Afin d'obtenir un atlas différentiable, nous considérons les projections stéréographiques :

$$\phi_N : U_N = \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_S : U_S = \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

de centres de projection $N = (0, \ldots, 0, 1)$ et $S = (0, \ldots, 0, -1)$ respectivement, où l'espace $\mathbb{R}^n$ est identifié avec l'ensemble :

$$\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}.$$

Les équations pour $x = \phi_N(u)$ et $y = \phi_S(u)$ sont :

$$x_i = \frac{u_i}{1 - u_{n+1}}, \quad y_i = \frac{u_i}{1 + u_{n+1}}, \quad (i = \overline{1, n})$$

Les applications $\phi_N : U_N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sont des homéomorphismes. Pour $u = \phi_N^{-1}(x)$ et $u = \phi_S^{-1}(y)$ on a :

$$u_{n+1} = \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} = -\frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$$
$$u_i = \frac{2x_i}{\|x\|^2 + 1} = \frac{2y_i}{\|y\|^2 + 1}, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Les applications de changement de cartes sont données par :

$$\phi_S \circ {\phi_N}^{-1}(x) = \frac{1}{\|x\|^2}\, x, \quad \phi_N \circ {\phi_S}^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2}\, y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

L'atlas $\mathcal{A}_{\mathbb{S}^n}$ formé par les deux cartes (ϕ_N, U_N) et (ϕ_S, U_S) est donc différentiable.

1.1.1 Espace tangent

Définition 1.1.2 (Vecteur tangent)**.**
Soient M une variété différentiable, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ une courbe différentiable tel que $\alpha(0) = p$, on note par $D_p(M, \mathbb{R})$ à l'espace des fonctions de M dans $\mathbb{R}$ différentiables en point p.
Le vecteur tangent de α en $t = 0$ est l'application :

$$\begin{array}{rcl} \alpha'(0) : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \dfrac{df \circ \alpha}{dt}\Big|_{t=0}. \end{array}$$

Par suite un Vecteur tangent au point p est un vecteur tangent en $t = 0$ d'une certaine courbe
$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M)$ tel que $\alpha(0) = p$.
On note par T_pM l'ensemble des vecteurs tangents de M en p.

1.1.2 Fibré tangent

Définition 1.1.3.
Soit M une variété différentiable, l'union de tous les espaces tangents de M est appelé le fibré tangent de M noté TM c'est à dire $TM = \cup_{p \in M} T_pM$.
L'application :

$$\pi : TM \longrightarrow M$$

est appelée la projection canonique.

1.1.3 Champs de vecteurs

Définition 1.1.4.
Soit M est variété différentiable, un champ de vecteurs sur M est une application :

$$\begin{array}{rccc} X : & M & \longrightarrow & TM \\ & p & \longmapsto & X_p \in T_pM \end{array}$$

telle que $\pi(X_p) = p$, pour tout $p \in M$. Autrement dit, X associe à tout $p \in M$ un vecteur $X_p \in T_pM$. L'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M est noté $\Gamma(TM)$.

Remarque 1.1.1.
Soit M une variété différentiable et $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ de M. On peut identifier par $X \in \Gamma(TM)$ la dérivatrion sur $C^\infty(M)$ par :

$$\begin{array}{rcl} X : C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ f & \longmapsto & X(f), \end{array}$$

avec

$$X(f) = \frac{df \circ \phi_X(t)}{dt} \mid_{t=0}$$

$$\begin{array}{rcl} \phi_X :]-\epsilon, \epsilon[& \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & \phi_X(t), \end{array}$$

où $\dfrac{d\phi_X(t)}{dt} \mid_{t=0} = X$ *et* $\phi_X(0) = p$.

Définition 1.1.5.
Soit M une variété différentiable de dimension m. Le crochet de Lie noté $[,]$ est défini par :

$$[X, Y] = XY - YX,$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Propriétés 1.1.1.
Les crochets de Lie vérifie les propriétés suivantes :

1. *$[.,.]$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique,*
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0,$
3. $[fX, gY] = fg\,[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X,$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ et $f, g \in C^\infty(M)$.

1.2 Métriques riemanniennes

Définition 1.2.1.
Une métrique riemannienne g sur une variété M est une application,

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M),$$

$C^\infty(M)$-bilinéaire, symétrique et définie positive.

Où $\Gamma(TM)$ désigne l'espace des champs de vecteurs sur la variété M.

Définition 1.2.2.
Une variété riemannienne est un couple (M, g)*, où* M *est une variété différentiable et* g *une métrique riemannienne .*

Exemple 1.2.1.

1. *(L'espace Euclidien) :* $\mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire standard :*
$$g_0(v, w) = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$
où $v = (v_1, \ldots, v_n)_x, \quad w = (w_1, \ldots, w_n)_x \in T_x\mathbb{R}^n$*,* $x \in \mathbb{R}^n$*,*
$(\mathbb{R}^n, g_0)$ *est une variété riemannienne.*
2. *(Métrique Hyperbolique) dans la boule :*
$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\| < 1\}.$$
On considère la métrique suivante :
$$g_H(X, Y) = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2}\, g_0(X, Y), \quad X, Y \in T_x\mathbb{R}^n \quad x \in D^n.$$
Cette métrique est une métrique riemannienne est appelée la métrique hyperbolique sur D^n*.*

Exemple 1.2.2.
L'epace $(\mathbb{R}^n, g_0)$ *muni d'une métrique euclidienne ,* M *une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$*, pour tout* $x \in M$*, on a* $T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n$*.*
En posant
$$g_M(v, w) = g_0(v, w) \quad v, w \in T_xM$$
on obtient la métrique riemannienne induite par g_0 *sur* M*.*

1.2.1 Image inverse d'une métrique

Définition 1.2.3.
Soit (N^n, h) *une variété riemannienne,* M *une variété différentiable de dimension* m *et* $f : M \longrightarrow N$ *une application de classe* C^∞*, si* f *est une immersion en tout point de* M*, alors* f^*h *est une métrique sur* M*, appelé image inverse de* h *par* f*, où :*
$$(f^*h)(X, Y) = h(df(X), df(Y)), \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$

Expression locale de la métrique f^*h**.**
Soit (U, φ) une carte sur M de base associée $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ et (V, ψ) carte sur N de

base associée $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n})$, alors :

$$
\begin{aligned}
(f^*h)_{ij} &= (f^*h)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= h(df(\frac{\partial}{\partial x_i}), df(\frac{\partial}{\partial x_i})) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} h(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}) \circ f \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} (h_{\alpha\beta} \circ f) \quad \forall i,j \in \{1,...,m\} \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

1.2.2 Métrique riemannienne induite

Définition 1.2.4.
Soient (N, h) une variété de dimension n et M une partie non vide de N, si l'inclusion canonique

$$
\begin{aligned}
i : M &\longrightarrow N \\
x &\longmapsto x.
\end{aligned}
$$

est un plongement régulier, alors M est une sous-variété de N.
On appelle la métrique induite la métrique g définie par :

$$g(X, Y) = h(df(X), df(Y)) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), \qquad (1.2)$$

dans ce cas (M, g) est dite sous-variété riemannienne .

Exemple 1.2.3 (Le tore dans $\mathbb{R}^3$)**.**
Sur un repère $(Oxyz)$, soit le tore paramétré par

$$
\begin{aligned}
f : [-b\pi, b\pi] \times [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(r, \theta) &\longmapsto f(r, \theta) = (R(r)\cos\theta, R(r)\sin\theta, Z(r)).
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
R(r) &= a + b\cos(\frac{r}{b}) \\
Z(r) &= b\sin(\frac{r}{b})
\end{aligned}
$$

***La différentielle de** f :*

$$
Df(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)R'(r) & -\sin(\theta)R(r) \\ \sin(\theta)R'(r) & \cos(\theta)R(r) \\ Z'(r) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\frac{r}{b}) & -\sin(\theta)(a + b\cos(\frac{r}{b}) \\ \sin(\theta)\sin(\frac{r}{b}) & \cos(\theta)(a + b\cos(\frac{r}{b}) \\ \cos(\frac{r}{b}) & 0 \end{pmatrix}
$$

D'aprés (1.1) et (1.2), alors la métrique riemannienne induite sur le tore est donnée par :

$$g_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(r)^2 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.5.
Etant donnée une métrique riemannienne sur M, on définit la norme $\|V\|_g$ d'un champ de vecteur $V \in \Gamma(TM)$ par

$$\|V\|_g = \sqrt{g(V,V)} \tag{1.3}$$

***Localement**, si $V = V^i \partial_i$, alors*

$$\|V\|_g^2 = g_{ij} V^i V^j$$

1.2.3 Connexion de Levi-Civita

Définition 1.2.6.
Une connexion linéaire sur une variété M est une application

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ (X,V) &\longmapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

vérifiant :

1. $\nabla_X (V+W) = \nabla_X V + \nabla_X W$
2. $\nabla_X (fV) = X(f)V + f\nabla_X V$
3. $\nabla_{X+fY} V = \nabla_X V + f\nabla_Y V,$

pour tout $V, W, X, Y \in \Gamma(TM)$ et $f \in C^\infty(M)$.

Définition 1.2.7.
Soit g une métrique riemannienne sur M. On dit que la métrique g est compatible avec laconnexion ∇ (où parallèle), si

$$\nabla g = 0$$

c'est-à-dire

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = 0$$

donc

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.2.8.
Soient M une variété différentiable et ∇ une connexion linéaire sur M. Le tenseur de torsion associé à ∇ est une application vectorielle $C^\infty(M)$-bilinéaire définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T} : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) & \longrightarrow & \Gamma(TM) \\ (X, Y) & \longmapsto & T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{array}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

La connexion ∇ est dite sans torsion si $T \equiv 0$.

Remarque 1.2.1.

1. *$T(X, Y) = -T(Y, X)$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ (T est antisymétrique)*
2. *La connexion ∇ est sans torsion ssi pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ on a :*
$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$
3. *Pour tout $x \in M$, le tenseur de tortion T induit une application bilinéaire vectoriel*
$$\begin{array}{rcl} T_x : \Gamma(T_xM) \times \Gamma(T_xM) & \longrightarrow & \Gamma(T_xM) \\ (v, \omega) & \longmapsto & T_x(v,\omega) = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X, Y]_x \end{array}$$
où $X, Y \in \Gamma(TM)$, telque $X_x = v \;\; Y_x = \omega$ (indépendament du choix de X et Y).

Définition 1.2.9. *Soient (M, g) une variété riemannienne et ∇ connexion linéaire définie sur M est dite connexion de Levi-Civita si vérifier la formule de Koszul i.e*

$$\begin{array}{rcl} 2g(\nabla_X Y, Z) & = & X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ & + & g(Z, [X, Y]) + g(Y, [Z, X]) - g(X, [Y, Z]), \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM). \end{array}$$

CHAPITRE 2

APPLICATIONS HARMONIQUES

2.1 Connexion induite sur le fibré tangent inverse

Définition 2.1.1 (Fibré tangent inverse)**.** *Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ entre deux variétés différentiables. Le fibré tangent inverse est défini par :*

$$\varphi^{-1}TN = \{(x, v)/x \in M, v \in T_{\varphi(x)}N\}.$$

Une section sur $\varphi^{-1}TN$ une application de classe C^∞ , $V : M \longrightarrow TN$ tel que $V(x) \in T_{\varphi(x)}N$ $\forall x \in M$.
Notons par $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ l'ensemble des sections sur $\varphi^{-1}TN$.

Définition 2.1.2. *Soient M^m et N^n deux variétés différentiables, $\varphi : M \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ et ∇^N une connexion linéaire sur N. On définit la connexion de Pull-back sur le fibré tangent inverse $\varphi^{-1}TN$ par :*

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}TN) &\longrightarrow \Gamma(\varphi^{-1}TN) \\ (X, V) &\longmapsto \nabla^\varphi_X V = \nabla^N_{d\varphi(X)} \widetilde{V}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\widetilde{V} \in \Gamma(TN)$ tel que $\widetilde{V} \circ \varphi = V$.

Remarque 2.1.1. *(Connexion de Pull-back en coordonnées locales)*

$$\begin{aligned} \nabla^\varphi_X V &= \nabla^\varphi_{X_i \frac{\partial}{\partial x_i}} V_\alpha (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) \\ &= X_i \left\{ \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_i} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi) + V_\alpha \nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi). \right\} \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\circ\varphi) &= \nabla^{N}_{d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i})}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_i}\left(\nabla^{N}_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)\circ\varphi \\
&= \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_i}\left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)\circ\varphi
\end{aligned}$$

ainsi :

$$\nabla^{\varphi}_{X}V = X_i\left\{\frac{\partial V_\gamma}{\partial x_i}+V_\alpha\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_i}\left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\varphi\right)\right\}\left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi\right). \quad \forall i\in\{1,...,m\} \text{ et } \alpha,\beta,\gamma\in\{1,...,n\}$$

Donc la relation (2.1) est n'est pas dépend du choix de $\widetilde{V}$ i.e cette connexion est bien définie.

Remarque 2.1.2. *Soient M, N deux variétés différentiables $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(TN)$ et $\varphi \in C^\infty(M,N)$, si X et V (resp. Y et W) sont φ-conjugés i.e. $d\varphi(X) = V\circ\varphi$ (resp. $d\varphi(Y) = W\circ\varphi$), alors :*

$$\nabla^{\varphi}_{X}d\varphi(Y) = (\nabla^{N}_{V}W)\circ\varphi.$$

Proposition 2.1.1. *Soient $\varphi : M^m \longrightarrow N^n$ une application différentiable, ∇^N une connexion linéaire compatible avec une métrique h sur N, alors la connexion linéaire ∇^φ est compatible avec la métrique induite sur $\varphi^{-1}TN$. C'est à dire :*

$$X(h(V,W)) = h(\nabla^{\varphi}_{X}V, W) + h(V, \nabla^{\varphi}_{X}W)$$

pour tous $X\in\Gamma(TM)$ et $V, W\in\Gamma(\varphi^{-1}TN)$.

Preuve Soient $X \in \Gamma(TM), V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ et $\widetilde{X},\widetilde{V},\widetilde{W} \in \Gamma(TN)$, tels que $d\varphi(X) = \widetilde{X}\circ\varphi, \widetilde{V}\circ\varphi = V$ et $\widetilde{W}\circ\varphi = W$, alors :

$$\begin{aligned}
X(h(V,W)) &= X(h(\widetilde{V}\circ\varphi,\widetilde{W}\circ\varphi)) \\
&= X(h(\widetilde{V},\widetilde{W})\circ\varphi) \\
&= d(h(\widetilde{V},\widetilde{W})\circ\varphi)(X) \\
&= dh(\widetilde{V},\widetilde{W})(d\varphi(X)) \\
&= d\varphi(X)(h(\widetilde{V},\widetilde{W})) \\
&= \widetilde{X}(h(\widetilde{V},\widetilde{W}))\circ\varphi \\
&= h(\nabla^{N}_{\widetilde{X}}\widetilde{V},\widetilde{W})\circ\varphi + h(\widetilde{V},\nabla^{N}_{\widetilde{X}}\widetilde{W})\circ\varphi \\
&= h(\nabla^{N}_{\widetilde{X}\circ\varphi}\widetilde{V},\widetilde{W}\circ\varphi) + h(\widetilde{V}\circ\varphi,\nabla^{N}_{\widetilde{X}\circ\varphi}\widetilde{W}) \\
&= h(\nabla^{\varphi}_{X}V, W) + h(V,\nabla^{\varphi}_{X}W).
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.2. *Soit ∇^N une connexion sans torsion sur N, alors :*

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) = \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Preuve Soient $V, W \in \Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs $\varphi-$conjugués avec X et Y respectivement, alors :

$$\begin{array}{rcl} [V,W]\circ\varphi & = & d\varphi\circ[X,Y] \\ \nabla^N_V W & = & \nabla^N_W V + [V,W], \end{array}$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) & = & \nabla^\varphi_X W\circ\varphi \\ & = & \nabla^N_{d\varphi(X)} W \\ & = & \big(\nabla^N_V W\big)\circ\varphi \\ & = & \big(\nabla^N_W V + [V,W]\big)\circ\varphi \\ & = & \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]). \end{array}$$

2.2 Deuxième forme fondamentale

Définition 2.2.1.
Soient (M^m, g), (N^n, h) deux variétés riemanniennes, $\varphi \in C^\infty(M,N)$. La seconde forme fondamentale de l'application φ est la dérivée covariante de la $1-$forme vectoriel $d\varphi$, définie par :

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Localement :
Si $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ (resp. $(\frac{\partial}{\partial y_\alpha})$) est une base locale de champs de vecteurs sur M (resp. sur N), pour tout $X = X_i\frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma(TM)$ et $\varphi_\beta = y_\beta\circ\varphi$, on a :

$$d\varphi(X) = X_i\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi \in \Gamma(\varphi^{-1}TN),$$

et :

$$(\nabla d\varphi)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \left(\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\,{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}\,{}^M\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi$$

$$\begin{aligned}
(\nabla d\varphi)(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}) &= \nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_j}) - d\varphi(\nabla^{M}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}) \\
&= \nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi) \\
&= \frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi + \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi) \\
&= \frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi + \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\left(\nabla^{N}_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\circ\varphi - \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi) \\
&= \left(\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\ {}^{N}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\varphi - \frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}\ {}^{M}\Gamma^{k}_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi. \quad \forall\ \alpha,\beta,\gamma\in\{1,...,n\}
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.1.
Soit $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ une application différentiable, la seconde forme fondamentale de l'application φ est symétrique, C'est à dire :

$$\nabla d\varphi(X,Y)=\nabla d\varphi(Y,X),$$

pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$.

Preuve En utilisant la proposition (2.1.2, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla d\varphi(X,Y) &= \nabla^{\varphi}_{X} d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y) \\
&= \nabla^{\varphi}_{Y} d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]) - d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y) \\
&= \nabla^{\varphi}_{Y} d\varphi(X) - d\varphi(\nabla^{M}_{Y}X) \\
&= \nabla d\varphi(Y,X)
\end{aligned}$$

pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$.

Proposition 2.2.2.
Soient $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ et $\psi:N\longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors :

$$\nabla d(\psi\circ\varphi)=d\psi(\nabla d\varphi)+\nabla d\psi(d\varphi,d\varphi).$$

Preuve Soient $X,Y\in\Gamma(TM)$, alors :

$$\begin{aligned}
\nabla d(\psi\circ\varphi)(X,Y) &= \nabla^{\psi\circ\varphi}_{X} d(\psi\circ\varphi)(Y) - d(\psi\circ\varphi)(\nabla^{M}_{X}Y) \\
&= \nabla^{\psi\circ\varphi}_{X} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y)) \\
&= \nabla^{P}_{d\psi(d\varphi(X))} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y)) \\
&= \nabla^{\psi}_{d\varphi(X)} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y)) \\
&= \nabla d\psi(d\varphi(X),d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla^{N}_{d\varphi(X)}d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla^{M}_{X}Y)) \\
&= \nabla d\psi(d\varphi(X),d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla d\varphi(X,Y)).
\end{aligned}$$

Définition 2.2.2.
Soient (M^m, g) *et* (N^n, h) *deux variétés riemanniennes. Une application* $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *est dite totalement géodésique si* $\nabla d\varphi = 0$.

Définition 2.2.3.
Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ *une application de classe* C^∞*. La trace de la seconde forme fonadamentale de l'application* φ *est appelée champ de tension de l'application* φ*, noté par :*

$$\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g \nabla d\varphi,$$

relativement à une base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^n$ *sur* M *on a :*

$$\tau(\varphi) = \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i).$$

Si $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ *(resp.* $(\frac{\partial}{\partial y_\alpha})$*) est une base locale de champs de vecteurs sur* M *(resp. sur* N*), on a :*

$$\tau(\varphi) = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j}\, {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_k}\, {}^M\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ \varphi.\ \forall\ i, j, \in \{1, ..., m\}$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \{1, ..., n\}$ (2.3)

Proposition 2.2.3. *[17] Soient* $\varphi : M \longrightarrow N$ *et* $\psi : N \longrightarrow P$ *deux applications différentiables entre des variétés riemanniennes, alors :*

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + \mathrm{trace}\, \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi).$$

2.3 Cas des sous-variétés

Soient (N, h) est une variété Riemannienne et M est une sous-variété de N, alors le champ de tenseur $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M)$ défini pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $p \in M$ par :

$$g(X, Y)_p = h_p(X_p, Y_p),$$

est une métrique Riemannienne sur M, appelé la métrique induite sur M par h.
Pour tout $p \in M$ on a $T_pN = T_pM \oplus T_pM^\perp$, où :

$$T_pM^\perp = \{v \in T_pN | h_p(v, w) = 0\ , \forall w \in T_pM\}.$$

D'où pour tout $v \in T_pN$:

$$\exists! v^\top \in T_pM,\ \ \exists! v^\perp \in T_pM^\perp \quad | \quad v = v^\top + v^\perp.$$

Si ∇^N (resp. ∇^M) désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique h sur N (resp. g sur M), alors :

$$\nabla^M_X Y = (\nabla^N_X Y)^\top, \qquad X, Y \in \Gamma(TM).$$

La deuxième forme fondamentale de M sur N est donnée par :

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= (\nabla^N_X Y)^{\perp} \\ &= \nabla^N_X Y - (\nabla^N_X Y)^{\top} \\ &= \nabla^N_{di(X)} di(Y) - di(\nabla^M_X Y) \\ &= (\nabla di)(X,Y), \end{aligned}$$

et la courbure moyenne est donnée par :

$$H = \frac{1}{m}\mathrm{trace} B,$$

où $m = \dim M$. M est dite minimale si sa courbure moyenne est nulle.

Exemple 2.3.1. *Soit $M = \mathbb{S}^n$ désigne la sphère unité et $N = \mathbb{R}^{n+1}$, alors :*

1. *Le champ de vecteur normal à la sphère $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$,*
2. $B(X,Y) = -g(X,Y)\mathcal{N}, \quad X, Y \in \Gamma(TM)$

2.4 Equation d'Euler-Lagrange

Définition 2.4.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le lagrangien sur U est une fonction de classe C^∞ :*

$$L : (x,y,t) \in U \times \mathbb{R}^n \times [t_1, t_2] \longrightarrow L(x,y,t) \in \mathbb{R}.$$

étant donné deux points $x_1, x_2 \in U$, le problème variationnel associé consiste à chercher les courbes $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$ tracées dans U, telles que $\varphi(t_1) = x_1$ et $\varphi(t_2) = x_2$, qui minimisent la fonctionnelle d'énergie :

$$E(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\, dt. \tag{2.4}$$

Pour caractériser la fonction $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$, on considère la variation $\varphi_s(t) = \varphi(t) + s\, v(t)$ où $s \in (-\epsilon, \epsilon)$ et $v(t)$ une vecteur de $\mathbb{R}^n$ depend de t, non nul sauf aux bornes t_1 et t_2, on a alors :

$$v(t_1) = v(t_2) = 0 \quad , \quad \varphi_s(t_1) = \varphi(t_1) = x_1 \quad et \quad \varphi_s(t_2) = \varphi(t_2) = x_2.$$

Théorème 2.4.1.
Sous les hypotheses de la définition précédente

$$\frac{d}{ds}E(\varphi_s)\Big|_{s=0} \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle\, dt.$$

Où $<,>$ désigne le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \Big(\frac{\partial L}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial x^n}\Big) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \Big(\frac{\partial L}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial L}{\partial y^n}\Big).$$

Preuve On considère l'application $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\phi(s,t) = \varphi_s(t) = \varphi(t) + s\, v(t). \tag{2.5}$$

D'aprés (2.4) et (2.5), on a :

$$\frac{d}{ds} E(\varphi_s)\Big|_{s=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial s} L\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big|_{s=0} dt. \tag{2.6}$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} L\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial x^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

En intégrant par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial t}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial \phi^i}{\partial s}\Big)(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\, dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \phi^i}{\partial s}(s,t)\, \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y^i}\Big(\phi(s,t), \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t), t\Big)\Big)\, dt. \end{aligned} \tag{2.8}$$

D'aprés les formules (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle\, dt \\ &\quad + \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle\Big|_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle\, dt. \end{aligned}$$

Comme $v(t_1) = v(t_2) = 0$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(\varphi_s)\Big|_{s=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big\rangle\, dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \Big\langle v(t), \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big)\Big\rangle\, dt. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.4.2.
La courbe $\varphi : [t_1, t_2] \longrightarrow U$ est un point critique pour la fonctionnelle d' énergie $E(\varphi)$ si et seulement si :

$$\frac{\partial L}{\partial x}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(\varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t), t\Big)\Big) = 0. \tag{2.9}$$

Ce système de n équations différentielles du second ordre s'appelle système d'équations d'Euler-Lagrange.

Exemple 2.4.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, $L : U \times \mathbb{R} \times [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :*

$$L(x, y, t) = \frac{y^2}{2},$$

donc le lagrangian représente l'énergie cinétique.

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \Big(\frac{d\varphi}{dt}\Big)^2 dt$$

le système (2.9) est réduit à l'équation

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

les solutions des équations d'Euler-Lagrange sont les droites affines (géodésiques) :

$$\varphi(t) = a\,t + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2.5 Les applications harmoniques

2.5.1 Première variation de l'énergie

Soient (M^m, g) et (N^n, h) deux variétés Riemanniennes, D un domaine compact de M et $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞.

On définit l'énergie de φ sur D par :

$$E(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2\, v_g, \tag{2.10}$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\varphi$ définie par :

$$|d\varphi|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)), \tag{2.11}$$

$\{e_1, ..., e_m\}$ étant une base orthonormée sur M et $v_g = \sqrt{\det g}\; dx^1 ... dx^m$ est l'élément de volume Riemannien de (M^m, g).

Définition 2.5.1. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞, entre deux variétés Riemanniennes est dite harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle d'énergie $E(\varphi; D)$ pour tout domaine compact $D \subset M$, i.e :*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{2.12}$$

$\{\varphi_t\}$ étant une variation (de classe C^∞) de φ à support dans D.

Remarque 2.5.1. *Une variation de φ à support dans un domaine compact $D \subset M$, est une famille d' applications $(\varphi_t)_{t\in(-\epsilon,\epsilon)} \subset C^\infty(M, N)$, telles que $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_t = \varphi$ sur $M \setminus \mathrm{int}(D)$.*

Théorème 2.5.1.
Soit $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans un domaine compact D, alors :

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))\, v_g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}\Big|_{t=0}$ dénote le champ de vecteur de variation de $\{\varphi_t\}$,

$$\tau(\varphi) = \mathrm{trace}_g \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m}\{\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\}$$

où $\{e_1, ..., e_m\}$ est une base orthonormée sur (M^m, g). $\tau(\varphi)$ est appelé champ de tension de φ.

Preuve Soient D un domaine compacte de M, $\{\varphi_t\}$ une variation de φ à support dans D et $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ de vecteur de variation. Soit $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow N$ l'application définie par $\phi(x, t) = \varphi_t(x)$. Si $\{e_1, ..., e_m\}$ base orthonormée sur M, alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\varphi; D)\Big|_{t=0} &= \int_D \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^\phi_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))\, v_g\Big|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^\phi_{(e_i,0)} d\phi(0, \frac{d}{dt}), d\phi(e_i, 0))\, v_g\Big|_{t=0} \\ &= \int_D \sum_{i=1}^{m} h(\nabla^\varphi_{e_i} v, d\varphi(e_i))\, v_g. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Soit ω la $1-$forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X) = h(v, d\varphi(X)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_{i=1}^{m} \big\{ e_i\big(\omega(e_i)\big) - \omega\big(\nabla^M_{e_i} e_i\big) \big\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \big\{ h(\nabla^\varphi_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i)) - h(v, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)) \big\}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

D'aprés les formules (2.13), (2.14) et le théorème de Stokes, on obtient :

$$
\frac{d}{dt} E(\varphi; D)\Big|_{t=0} = -\int_D \sum_{i=1}^{m} \big\{ h\big(v, \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\big) \big\}\, v_g.
$$

$\blacksquare$

Corollaire 2.5.1. *Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes est harmonique si et seulement si :*

$$
\tau(\varphi) = \operatorname{trace}_g \nabla d\varphi = 0. \qquad (2.15)
$$

Remarque 2.5.2.

1. *L'équation (2.15) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à l'énergie fonctionnelle.*
2. *Localement, si (x^i) et (y^α) désignent les coordonnées locales sur M et N respectivement, alors :*

$$
\tau(\varphi) = g^{ij}\Big(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j}\, {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}\, {}^M\Gamma^k_{ij} \Big) \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \circ \varphi.
$$

Proposition 2.5.1.
Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ et $\psi : N \longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés riemanniennes, alors

$$
\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + tr_g \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)\,.
$$

2.5.2 Exemples des applications harmoniques

- L'application identité $\mathrm{Id} : (M^m, g) \longrightarrow (M^m, g)$ est harmonique.
- Une application $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, <,>_{\mathbb{R}^n})$ de classe C^∞, est harmonique si et seulement si, pour tout $\gamma = 1, ..., n$:

$$
\Delta^M \varphi^\gamma \equiv \sum_{i,j,k=1}^{m} g^{ij} \Big(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^k}\, {}^M\Gamma^k_{ij} \Big) = 0.
$$

- Une courbe $\varphi : (\mathbb{R}, <,>_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (N^n, h)$ est harmonique si et seulement si :

$$\frac{d^2\varphi^\gamma}{dx^2} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{d\varphi^\alpha}{dx}\frac{d\varphi^\beta}{dx}\, {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi = 0,$$

pour tout $\gamma = 1, ..., n$. On retrouve l'équation des géodésiques de la variété (N^n, h).

- Soit S une surface dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, et soit :

$$\varphi : (\Omega, <,>_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, <,>_{\mathbb{R}^3}),$$

une paramétrisation locale de S, où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Supposons que :

$$\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2 = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2, \quad \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0.$$

Alors, S est minimale si et seulement si φ est harmonique. En effet, notons :

$$N = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|}$$

le vecteur unitaire normal,

$$E = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2, \quad F = \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad G = \Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2,$$

$$e = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad f = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}, \quad g = \Big\langle N, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

on obtient :

$$H = \frac{1}{2}\frac{e\,G + g\,E - 2f\,F}{E\,G - F^2}$$

la courbure moyenne de S. D'autre part :

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \tau(\varphi)\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} + \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} - \Big\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|^2 \\
&= 0, \\
\Big\langle \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tau(\varphi)\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} &= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\tau(\varphi)$ est normal à la surface S et on a :

$$H = \frac{e+g}{2E} = \frac{\langle N, \tau(\varphi)\rangle_{\mathbb{R}^3}}{2E}.$$

- Soit l'application de Hopf

$$\begin{array}{rcl}\phi : \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ (s,a,b) & \longmapsto & (\alpha(s), \psi(a,b))\end{array}$$

où $\psi(a,b) = ka + lb$ et $\alpha : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, \pi]$ telle que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(\frac{\pi}{2}) = \pi$.
Soient,

$$g_{\mathbb{S}^3} = ds^2 + cos^2 s\, da^2 + sin^2 s\, db^2\,,$$

la métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^3$ et

$$h_{\mathbb{S}^2} = d\alpha^2 + sin^2\alpha\, d\psi^2\,,$$

une métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^2$. On a

$\{\, e_1 = \frac{\partial}{\partial s}\,,\, e_2 = \frac{1}{cos\, s}\frac{\partial}{\partial a}\,,\, e_3 = \frac{1}{sins}\frac{\partial}{\partial b}\,\}$ est une base orthonormée sur $\mathbb{S}^3$.

$\{\, f_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}\,,\, f_2 = \frac{1}{sin\alpha}\frac{\partial}{\partial \psi}\,\}$ est une base orthonormée sur $\mathbb{S}^2$.

Remarque 2.5.3. *La composé de deux applications harmoniques n'est pas en générale une application harmonique. En particulier si ϕ est harmonique et si ψ et totalement géodésique c'est à dire $(\nabla d\psi = 0)$, alors $\psi \circ \phi$ est harmonique.*

Exemple 2.5.1. *Soit l'application,*

$$\begin{array}{rcl}\varphi : (\mathbb{R}, dt^2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ t & \longmapsto & (t, 0)\,,\end{array}$$

on a,

$$\begin{array}{rcl}\tau(\varphi) & = & (\frac{\partial^2 x}{dt^2}, \frac{\partial^2 0}{dt^2}) \\ & = & (0,0)\,,\end{array}$$

et soit l'application,

$$\begin{array}{rcl}\psi : (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, dz^2) \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - y^2\,,\end{array}$$

on a,

$$\begin{array}{rcl}\tau(\psi) & = & \Delta(\psi) \\ & = & \frac{\partial^2 \psi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \psi}{dy^2} \\ & = & 2 - 2 = 0\,,\end{array}$$

alors les deux applications φ et ψ sont harmoniques, mais remarquons que la composée,

$$\begin{array}{rcl} \psi \circ \varphi : (\mathbb{R}, dx^2) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, dz^2) \\ t & \longmapsto & t^2 \,, \end{array}$$

est non harmonique, $\tau(\psi \circ \varphi) = 2$.

CHAPITRE 3

GROUPES DE LIE ET ALGÈBRES DE LIE

3.1 Groupe de Lie

3.1.1 Définition et exemples

Définition 3.1.1.
Un groupe de Lie est un groupe G muni d'une structure d'une variété différentielle telle que les applications

$$m : G \times G \longrightarrow G,\ (x, y) \longrightarrow xy$$

et

$$inv : G \longrightarrow G,\ x \longrightarrow x^{-1}$$

sont de classe C^{∞}.

Exemple 3.1.1.
$(\mathbb{R}^n, +)$ *est un groupe de Lie abélien de dimension n.*

Exemple 3.1.2.
$(V, +)$ *un espce vectoriel de dimension finie n est un groupe de Lie abélien dimension n. En particulier $(M(n, \mathbb{R}), +)$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, donc $(M(n, \mathbb{R}), +)$ est un groupe de Lie de dimension n^2.*

Exemple 3.1.3.
Soit $Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R})/detA \neq 0\}$; le groupe de Lie $(Gl(n, \mathbb{R}), \cdot)$ est un groupe de dimension n^2.

Exemple 3.1.4.
$(\mathbb{R}^*, \times)$ *est un groupe de Lie de dimension* 1.

Exemple 3.1.5.
$\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3$ *sont des groupes de Lie ;*

3.1.2 Sous groupe de Lie

Définition 3.1.2.
Soit $(G, \cdot)$ *un groupe de Lie et* H *une partie non vide de* G *.*
H *est dit un sous groupe de Lie si :*

- $(H, \cdot)$ *est un sous groupe de* $(G, \cdot)$.

- H *est une sous variété de* G.

Exemple 3.1.6.
Le groupe des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in (GL_n(\mathbb{R})/ \quad A^t A = Id\}$ *est un sous groupe de Lie de* $GL(n, \mathbb{R})$ *de dimension* $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 3.1.1.
Tout sous-groupe de Lie d'un groupe linéaire est fermé .

Preuve (Voir [9]) ■

3.1.3 Homomorphisme de groupe de Lie

Définition 3.1.3.
Soient $(G, \cdot)$ *,* $(H, *)$ *deux groupes de Lie* $f : G \longrightarrow H$ *une application est dite homomorphisme de groupe de Lie si :*

- $\forall x, y \in G \quad ona : f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$.

- f *est de classe* C^∞.

Exemple 3.1.7.
Soit l'application $f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ *,* $x \longmapsto e^x$ *alors* f *est un homomorphisme de groupe de Lie .*

Preuve
1) f est de classe C^∞.
2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x+y) &= e^{x+y} \\ &= e^x \cdot e^y \\ &= f(x) \cdot f(y) \end{aligned}$$

■

Exemple 3.1.8.
L'application $det : (Gl(n, \mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times),\ A \longmapsto detA$ *est un homomorphisme de groupe de Lie.*
Puisque :

- *det application polynomial alors est de classe* C^∞.

- $det(A \cdot B) = detA \times detB$.

Proposition 3.1.2.
Soient G, H *deux groupe de Lie et* $f : G \longrightarrow H$ *un homomorphisme de groupe de Lie, alors* $Kerf = \{x \in G / f(x) = 0_H\}$ *est un sous groupe de Lie tel que* 0_H *l'élément neutre de* H.

Exemple 3.1.9.
Soit l'application $f : GL(n,\mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$, $A \longmapsto detA$.
Le noyau de f *:*

$$\begin{aligned} Kerf &= \{A \in GL(n,\mathbb{R})/ \quad detA = 1\} \\ &= SL(n,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Donc $(SL(n,\mathbb{R}), \cdot)$ *est un sous groupe de Lie de* $GL(n,\mathbb{R})$ *de dimension* $(n^2 - 1)$.

Exemple 3.1.10.
Soient G *un groupe de Lie et* $g \in G$,

$$\begin{array}{rcl} ad_g : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gxg^{-1}, \end{array}$$

est un homomorphisme de groupe de Lie.

Preuve
Soient $x, y \in G$ alors :

$$\begin{aligned} ad_g(xy) &= gxyg^{-1} \\ &= gxg^{-1}gyg^{-1} \\ ad_g(xy) &= ad_g(x)ad_g(y). \end{aligned}$$

■

3.2 Algèbre de Lie

3.2.1 Définition et exemples

Soit $\mathfrak{g}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 3.2.1.
$\mathfrak{g}$ *est dite une algèbre de Lie si* $\mathfrak{g}$ *muni d'une application*

$$\begin{array}{rcl} [,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (x,y) & \longmapsto & [x,y]. \end{array}$$

Tels que

- $[,]$ *est antisymétrique :* $\forall\, x, y \in \mathfrak{g} \quad [x,y] = -[y,x]$.

- $[,]$ *est* $\mathbb{K}$*-bilinéaire* $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ \ [\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z]$.

- $[,]$ *vérifier l'identité de Jcobi* $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{g} \quad [x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0$.

Remarque 3.2.1.
La dimension d'algèbre de Lie est la dimension de l'espace vectoriel.

Exemple 3.2.1.
Tout espace vectoriel V de dimension finie est une algébre de Lie par les crochets nuls i.e : $[X,Y] = 0 \quad \forall X, Y \in V$.

Exemple 3.2.2.
L'espace $M(n,\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une algèbre de Lie définie par les crochets :

$$[A,B] = AB - BA \quad \forall A, B \in M(n,\mathbb{K}).$$

Remarque 3.2.2.
Dons la suite,on note $gl_n(\mathbb{K})$ l'espace $M(n,\mathbb{K})$.

3.2.2 Sous-algèbre de Lie, idéal

Définition 3.2.2.
Un sous espace vectoriel $\mathfrak{h}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dit une sous algèbre de Lie si : $\forall x, y \in \mathfrak{h} \quad \text{on a} \quad [x,y] \in \mathfrak{h}$ *i.e* $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Exemple 3.2.3. *L'espace $sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in gl_n(\mathbb{R}) / \quad trA = 0\}$ est une sous-algèbre de Lie de dimension $(n^2 - 1)$.*

Preuve
1) $sl_n(\mathbb{R})$ sous espace vectoriel de $gl_n(\mathbb{R})$:
soient $A, B \in sl_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} tr(\alpha A + \beta B) &= \alpha tr(A) + \beta tr(B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

2) Stabilité par les crochets :
soient $A,\ B \in sl_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} tr([A,B]) &= tr(AB - BA) \\ &= tr(AB) - tr(BA) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors $[A,B] \in sl_n(\mathbb{R})$. ∎

Définition 3.2.3.
Soit I un sous-espace vectoriel d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dit un idéal si :

$$\forall x \in \mathfrak{g} \quad \forall y \in I \quad [x, y] \in I \quad or \quad [I, \mathfrak{g}] \subset I.$$

Exemple 3.2.4. *$sl_n(\mathbb{R})$ est un ideal de $gl_n(\mathbb{R})$.*

Preuve
Soient $A \in gl_n(\mathbb{R})$, $\quad B \in sl_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} tr([A, B]) &= tr(AB - BA) \\ &= tr(AB) - tr(BA) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $[A, B] \in sl_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 3.2.3.
Tout idéal d'une algèbre de Lie est une sous algèbre de Lie.

Exemple 3.2.5. *Soient $\mathfrak{h} = Aff(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})/a, b \in \mathbb{R}\} \right\}$ alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $gl_2(\mathbb{K})$ mais n'est pas un idéal.*

3.2.3 Morphisme d' algèbre de Lie

Définition 3.2.4.
Soient $(\mathfrak{g}, [,]_{\mathfrak{g}})$, $(\mathfrak{h}, [,]_{\mathfrak{h}})$ deux algèbres de Lie .
Une application linéaire $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$, est dite morphisme d'algèbre de Lie si : $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ on a :

$$f([X, Y])_{\mathfrak{g}} = [f(X), f(Y)]_{\mathfrak{h}}.$$

Exemple 3.2.6.
Représentation adjointe d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'application definie par :

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto ad_X. \end{aligned}$$

tel que ;

$$\begin{aligned} ad_X : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto ad_X(Y) = [X, Y], \end{aligned}$$

est un morphisme d'algèbre de Lie entre $(\mathfrak{g}, [,])$ et $(\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), [,])$ tel que

$$[A, B]_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})} = A \circ B - B \circ A, \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}$$

Preuve
Soient $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

$$\begin{array}{rcl} [ad_X, ad_Y](Z) & = & (ad_X \circ ad_Y - ad_Y \circ ad_X)(Z) \\ & = & ad_X \circ ad_Y(Z) - ad_Y \circ ad_X(Z) \\ & = & ad_X([Y,Z]) - ad_Y([X,Z]) \\ & = & [X,[Y,Z]] - [Y,[X,Z]] \\ & = & [[X,Y],Z] \\ & = & ad_{[X,Y]}(Z). \end{array}$$

■

Proposition 3.2.1.
Soit $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbre de Lie alors :
1) Le noyau de ϕ est un idéal de $\mathfrak{g}$.
2)L'image de ϕ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$.

Preuve

En effet :
Soit $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ morphisme d'algèbre de Lie .

$$Ker\phi = \{X \in \mathfrak{g} / \quad \phi(X) = 0_{\mathfrak{h}}\}$$

.
Soient $X_1, X_2 \in Ker\phi$ alors :

$$\begin{array}{rcl} \phi(X_1) & = & 0_{\mathfrak{h}} \\ \phi(X_2) & = & 0_{\mathfrak{h}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \phi([X_1, X_2]) & = & [\phi(X_1), \phi(X_2)] \\ & = & [0_{\mathfrak{h}}, 0_{\mathfrak{h}}] \\ & = & 0_{\mathfrak{h}}; \end{array}$$

donc $[X_1, X_2] \in Ker\phi$.
Ainsi Le noyau de ϕ est un idéal.

Soient $X \in Ker\phi \quad Y \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{array}{rcl} \phi([X,Y]) & = & [\phi(X), \phi(Y)] \\ & = & [0_{\mathfrak{h}}, \phi(Y)] \\ & = & 0_{\mathfrak{h}}; \end{array}$$

donc $[X,Y] \in Ker\phi$.
Ainsi L'image de ϕ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$
En effet :

$$Im\phi = \{\phi(X)/ \quad X \in \mathfrak{g}\}$$

Soient $Y_1, Y_2 \in Im\phi$ c'est-à-dire $Y_1 = \phi(X_1),\ Y_2 = \phi(X_2); \quad \exists X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}[Y_1, Y_2] &= [\phi(X_1), \phi(X_2)] \\ &= \phi[X_1, X_2].\end{aligned}$$

Alors $Im\phi$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{h}$.

■

3.3 Dérivation

Définition 3.3.1.
Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On appelle une dérivatition sur $\mathfrak{g}$, toute application linéaire $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ qui vérifier :

$$D([a,b]) = [a, D(b)] + [D(a), b], \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

On note par $Der(\mathfrak{g})$ l'ensemble de toute les dérivations de $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.3.1.
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, soient aussi D_1 et D_2 deux dérivations de $\mathfrak{g}$, et λ un élément de $\mathbb{K}$, alors, les applications linéaires suivantes sont des dérivations de $\mathfrak{g}$.

$$D_1 + D_2,\ \lambda D_1 \ et\ [D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Remarque 3.3.1.
D'aprés la proposition précédente, si D_1 et D_2 sont deux dérivations de $\mathfrak{g}$ $(D_1, D_2 \in Der(\mathfrak{g}))$, alors $[D_1, D_2] \in Der(\mathfrak{g})$.
Donc, $Der(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de $gl(\mathfrak{g})$.

3.4 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Définition 3.4.1.
Soient $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de variétés, X un champ de vecteurs sur M et Y un champ de vecteurs sur N. On dit que X et Y sont f-liés si $Tf \circ X = Y \circ f$.
Si f est un isomorphisme, pour tout champ de vecteurs X sur M, il existe un unique champ de vecteurs Y sur N qui lui est f-lié. Il est donné par $Y = Tf \circ X \circ f^{-1}$.on note f_*X.

Définition 3.4.2.
Soit G un groupe de Lie, $g \in G$ et la translation à gauche on définie par :

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto L_g(x) = gx. \end{aligned}$$

Un champ de vecteurs X est dite invariant à gauche si $(L_g)_*(X) = X \circ L_g$ pour tout $g \in G$.

L'espace des champs invariants à gauche de G noté $\mathcal{H}^l(G)$.

Remarque 3.4.1.
On peut définit un champ invariant à droite par :

$$\forall g \in G \quad (R_g)_*(X) = X \circ R_g$$

telle que R_g est la translation à droite par g.

Proposition 3.4.1.
Soit G un groupe de Lie, pour tout $v \in T_eG$, il existe un unique e champ de vecteurs invariant à gauche X sur G, tel que $X(e) = v$. Il est donné par $X : g \longmapsto (TL_g)_e v$.

3.5 Forme de Killing

Définition 3.5.1.
Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie de dimension finie , on appele forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ l'application notée κ par $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}, (X, Y) \longmapsto Tr(ad(X) \circ ad(Y))$.

Définition 3.5.2.
La forme de Killing est dite non dégénérée si le déterminant de la matrice associée à cette forme est non nul. Elle est dite dégénérée s'il s'annule.
ie

$$ker(\kappa) \neq \{0\}.$$

Définition 3.5.3.
Le radicale de la forme de Killing est défini par :

$$rad(\kappa) = \{X \in \mathfrak{g} / \quad \kappa(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Remarque 3.5.1.
Forme de Killing κ est non dégénérée si $\quad rad(\kappa) = \{0_g\}$.

Proposition 3.5.1.

1)κ est une forme bilinéaire symétrique .

2)κ ad-invariante i.e $\kappa(ad_X, Y) = -\kappa(X, ad_Y)$ pour tout X, Y dans $\mathfrak{g}$.

Preuve (Voir [15]) ∎

Remarque 3.5.2.
$Ker(\kappa) = \{X \in \mathfrak{g} / \kappa(X,Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Preuve
Posons $X \in Ker(\kappa)$ et $Y, Z \in \mathfrak{g}$ et montrons que $[X,Y] \in Ker(\kappa)$.
Comme $X \in Ker(\kappa)$, alors

$$\kappa(X,[Y,Z]) = 0.$$

Et par l'associativité de la forme de Killing, on trouve que

$$\kappa([X,Y],Z) = 0.$$

D'où, $[X,Y] \in Ker(\kappa)$. ∎

Exemple 3.5.1.
Soit l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\{X,Y,Z\}$ une base de $\mathfrak{su}(2)$ telle que

$$[X,Y] = Z, [Y,Z] = X, [Z,X] = Y.$$

On a

$$ad_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; ad_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; ad_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à la forme de Killing est

$$M_\kappa(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{est } \kappa(\mathfrak{su}(2)) \text{ est non dégénérée .}$$

Exemple 3.5.2.
Soit l'algèbre de Lie $Aff(\mathbb{R})$ des transfomations affines de la droite réell et $\{X,Y\}$ une base de $Aff(\mathbb{R})$ telle que $[X,Y] = Y$.
On a

$$ad_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; ad_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à la forme de Killing est

$$M_\kappa(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{est } \kappa(Aff(\mathbb{R})) \text{ est dégénérée.}$$

3.6 Algèbre de Lie nilpotente, résoluble, semi simple

3.6.1 Algèbre de Lie nilpotente

Définition 3.6.1.
Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, on définit la suite des ideaux suivantes :

$$\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}, \; \mathfrak{g}_{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(0)}], ..., \mathfrak{g}_{(j+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(j)}] \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

est appelée la suite centrale descendante de $\mathfrak{g}$.

Définition 3.6.2.
Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule à partir d'un certain $n \geq 0$.
Autrement dit, $\exists n \geq 0$ tel que $\mathfrak{g}_{(n)} = \{0\}$.

Exemple 3.6.1. *Le groupe nilpotent Nil, également connu sous le nom de groupe de Heisenberg, dont l'algèbre de Lie sera notée $\mathfrak{n}$. On a*

$$Nil = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ avec\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ avec\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ possède une base $\{X, Y, Z\}$ où

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ et\ Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où le crochet de Lie non nul est $[X, Y] = Z$.

par un calcul simple on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{(1)} &= < Z > \\ \mathfrak{g}_{(2)} &= \{0\} \end{aligned}$$

alors l'algèbre de Lie de Hiesenberg est nilpotente de cran 2.

Proposition 3.6.1.
Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie.

1) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente , alors le centre de $\mathfrak{g}$ n'est pas trivial.

2) Si $\mathfrak{g}$ est nilpotente , alors tout élément X de $\mathfrak{g}$ est ad-nilpotent ,i.e $ad(X)$ est un endomorphisme nilpotent .

3) Toute sous-algèbre ou tout quotient d'une algèbre de Lie nilpotente est nilpotent.

Preuve (Voir [15]) ■

Proposition 3.6.2 (Théorème de Engel)**.**

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie, si $ad(X)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ pour tout X appartient à $\mathfrak{g}$, alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

Preuve (Voir [15]) ■

3.6.2 Algèbre de Lie résoluble

Définition 3.6.3.
Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}-$algèbre de Lie, on définie la suite des idéaux suivantes : $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}]$,..., $\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}^{(j)}, \mathfrak{g}^{(j)}]$; $\quad \forall j \in \mathbb{N}$ *cette suite est appelée la suite dérivée de* $\mathfrak{g}$.

Définition 3.6.4.
Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est résolubles, si la suite dérivée s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\mathfrak{g}^{(n)} = \{0\}$.

Exemple 3.6.2. *Le groupe de Lie soluble Sol, dont l'algèbre de Lie sera désignée par $\mathfrak{sol}$, est défini par $\mathfrak{sol} = \mathbb{R}^2 \rtimes_\iota \mathbb{R}$ où $\iota(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$.*
Nous pouvons choisir une base X, Y, Z de $\mathfrak{sol}$ telle que
$X = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right)$, $Y = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right)$ *et* $Z = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right)$

et les crochets de Lie non nuls sont $[Z, X] = X$ et $[Y, Z] = Y$;

d'aprés des calcules on trouve :

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}_{(1)} &= < X, Y > \\ \mathfrak{g}_{(2)} &= \{0\}; \end{aligned}$$

alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ est résoluble .

Proposition 3.6.3.
Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie.

1) Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

2) Si $\mathfrak{g}$ est résoluble alors $\mathfrak{g}$ contient un idéal de codimension 1.

3) Si $\mathfrak{g}$ est résoluble ,toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est résoluble .En particulier un idéal dans une algèbre de Lie résoluble est résoluble.

Preuve (Voir [15]) ■

Proposition 3.6.4.
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie , pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors : $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}_{(n)}$

En effet :
$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}$.
$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}_{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
$\mathfrak{g}^{(2)} = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \subset [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] = \mathfrak{g}_{(2)}$, par récurence
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathfrak{g}_{(n)}$.

Corollaire 3.6.1.
Toute algèbre de Lie nilpotente est résoluble .

Remarque 3.6.1.
Une algèbre de Lie résoluble n'est pas nécessairement une algèbre de Lie nilpotente.

Exemple 3.6.3. *L'algèbre de Lie des transformations affines de la droite $Aff(\mathbb{R})$ est résoluble mais n'est pas nilpotente .*
Pour l'algèbre de Lie $Aff(\mathbb{R})$, nous avons :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

les crochets non nuls sont $[X, Y] = Y$

par calcule simple on obtient :
$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$
$\mathfrak{g}^{(1)} =< Y >$
$\mathfrak{g}^{(2)} = \{0\}$
alors $Aff(\mathbb{R})$ est résoluble non nilpotente puisque : $\mathfrak{g}_{(n)} =< Y >\neq \{0\}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

3.6.3 Algèbres de Lie semi-simples

Définition 3.6.5.
Une algèbre de Lie est simple si elle est non abéliènne et si elle ne contient pas d'ideaux propres non triviaux.

Définition 3.6.6.
Une algèbre de Lie est semi-simple si elle ne contient pas d'ideaux résolubles non triviaux .

Théorème 3.6.1 (Critère de Cartan)**.**
Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie et κ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) κ est non-dégénérée.

2) $\mathfrak{g}$ est semi simple.

Preuve (Voir [15]) ∎

Proposition 3.6.5.
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

1) Si $\mathfrak{g}$ est simple alors $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

2) Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple , alors le centre de $\mathfrak{g}$ est trivial.

3) Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple , alors tout idéal de $\mathfrak{g}$ est semi-simple.

4) Si $\mathfrak{g}$ est semi-simple , alors $\mathfrak{g}$ est la somme directe de deux ideaux semi-simple.

Preuve (Voir [15]) ■

Proposition 3.6.6.
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.
1) $\mathfrak{g}$ résoluble $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ n'est pas simple .
2) $\mathfrak{g}$ résoluble $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}$ n'est pas semi simple .

Preuve 1) Supposons que $\mathfrak{g}$ est résoluble, alors il existe un entier n tel que $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$. On sait que pour tout entier n, $\mathfrak{g}^{(n)}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et que

$$\mathfrak{g}^{(i)} \subsetneqq \mathfrak{g}, \; i = 0, ..., n.$$

Donc, $\mathfrak{g}^{(i)}, i = 0, ..., n$ sont des idéaux propres de $\mathfrak{g}$. Par conséquence, $\mathfrak{g}$ n'est pas simple.

2) Comme $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}] = 0$. Donc, $\mathfrak{g}^{(n-1)}$ est un idéal abélienne de $\mathfrak{g}$. Ceci implique que $\mathfrak{g}$ n'est pas semi simple. ■

3.7 Groupes de Lie riemanniens unimodulaires

3.7.1 Mesure de Radon sur un groupe de Lie

Définition 3.7.1.
Soit G un groupe localement compact. Une mesure de Radon $\mu \geq 0$ sur G est dite invariante à gauche si

$$\int_G f(gx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x),$$

pour toute $f \in \mathcal{C}_c(G)$, espace des fonctions continues sur G de support compact. Cela est équivalent à dire que, pour tout ensemble borélien $E \subset G$, et pour tout $g \in G$,

$$\mu(gE) = \mu(E).$$

Exemple 3.7.1.
On considère le groupe réel $(\mathbb{R}, +)$ et la mesure μ avec $d\mu = dx$, alors
$\forall f \in \mathcal{C}_c(G)$ on a :

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

est mesure de Radon.

3.7.2 Mesure de Haar

Définition 3.7.2.
Soit G un groupe de Lie localement compact, une mesure de Radon est dite de Haar si μ est invariante à gauche, i.e $\forall g \in G, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c(G)$

$$\int_G f(gx)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x).$$

Pour l'existence et l'unicité de mesure de Haar on a le théorème suivant :

Théorème 3.7.1.
Il existe une mesure invariante à gauche. Elle est unique à un facteur positif près.

Preuve (Voir [9]) ∎

Remarque 3.7.1.
Si G est compact, la mesure de Haar μ est dite normalisée si

$$\int_G d\mu = 1.$$

3.7.3 Fonction unimodulaire

Soit G un groupe de Lie localement compact, et μ mesure de Haar à gauche, pour g fixé dans G la forme linéaire

$$f \longmapsto \int_G f(gxg^{-1})d\mu(x).$$

définit une mesure invariante à gauche. Il existe donc un nombre réel positif $\Delta(g)$ tel que

$$\int_G f(gxg^{-1})d\mu(x) = \Delta(g)\int_G f(x)d\mu(x).$$

Notons qu'également

$$\int_G f(xg^{-1})d\mu(x) = \Delta(g)\int_G f(x)d\mu(x).$$

Proposition 3.7.1.
La fonction Δ est un homomorphisme continu

$$\Delta : G \longrightarrow]0,\infty[.$$

Preuve
Pour montrer que Δ est un homomorphisme considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_c(G)$.

Soient $g_1, g_2 \in G$.
D'une part :

$$\begin{aligned}\int_G f(xg_1g_2)d\mu(x) &= \Delta(g_2)\int_G f(xg_1)d\mu(x)\\ &= \Delta(g_2)\cdot\Delta(g_1)\int_G f(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\int_G f(x(g_1g_2))d\mu(x) = \Delta(g_1g_2)\int_G f(x)d\mu(x).$$

Alors

$$\Delta(g_1g_2) = \Delta(g_2)\cdot\Delta(g_1),$$

Δ est un homomorphisme de groupe.

Pour montrer que Δ est continue considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_c(G)$ telle que

$$\int_G f(x)d\mu(x) = 1.$$

Alors

$$\Delta(g) = \int_G f(xg^{-1})d\mu(x),$$

et par suite Δ est continue. ∎

Définition 3.7.3.
Soit G un groupe de Lie est dit unimodulaire si la fonction module Δ égale 1 pour tout $g \in G$, i.e $\Delta(G) = 1$.

Proposition 3.7.2.
Tout groupe de Lie abelien est unimodulaire.
Tout groupe de Lie discrèt est unimodulaire.
Tout groupe de Lie compact est unimodulaire.

Preuve (Voir [9]) ∎

Proposition 3.7.3.
La mesure $\Delta(x^{-1})d\mu(x)$ est une mesure de Haar à droite. De plus, pour $f \in \mathcal{C}_c(G)$,

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)\Delta(x^{-1})d\mu(x).$$

Preuve
Considérons la forme linéare

$$f \longmapsto \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x).$$

Pour $y \in G$,

$$\int_G f(yx^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f((xy^{-1})^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x).$$

En posant $z = xy^{-1}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_G f(yx^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x) &= \Delta(y)\int_G f(z^{-1})\Delta(y^{-1}z^{-1})d\mu(z)\\ &= \int_G f(z^{-1})\Delta(z^{-1})d\mu(z).\end{aligned}$$

Cette forme linéaire définit donc une mesure de Haar invariante à gauche. Par suite il existe une constante $\mathcal{C} > 0$ telle que

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x) = \mathcal{C}\int_G f(x)d\mu(x).$$

En appliquant cette relation à la fonction $f_1(x) = f(x^{-1})\Delta(x^{-1})$ on obtient $\mathcal{C}^2 = 1$, donc $\mathcal{C} = 1$. ■

Exemple 3.7.2.
1) Soit G le groupe $'ax+b'$, c'est à dire le groupe des transformations affines de la droite réelle. Il est isomorphe au sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ des matrices

$$g = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \textit{avec } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\right\}.$$

La mesure μ_l définie par

$$\int_G f(g)d\mu_l(g) = \int f(a,b)\frac{dadb}{a^2}$$

est une mesure de Haar à gauche. La mesure μ_r définie par

$$\int_G f(g)d\mu_r(g) = \int f(a,b)\frac{dadb}{|a|}$$

est une mesure de Haar à droite.La fonction module est donnée par

$$\Delta(g) = \frac{1}{|a|}.$$

2) On considère la mesure $d\mu(x) = |\det x|^{-n}d\lambda(x)$, définit sur le groupe linéaire $GL(n,\mathbb{R})$, alors $GL(n,\mathbb{R}, d\mu(x))$ est unimodulaire.

Proposition 3.7.4.
Soit ω une forme différentielle de degré $m =$ G sur G invariante à gauche telle que $\omega_e(X_1, ..., X_m) > 0$
si $\{X_1, ..., X_m\}$ est une base d'orientation positive de $\mathfrak{g}$. Alors la forme linéaire sur $\mathcal{C}_c(G)$,

$$f \longmapsto \int_G f\omega$$

définit une mesure de Haar à gauche sur G.

Preuve
En effet, si $\varphi = L_g$, alors $\varphi^*\omega = \omega$,

$$\int_G f\omega = (f \circ \varphi)\omega.$$

■

Proposition 3.7.5.

$$\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}(g^{-1})|$$

Preuve
Soit ω une forme différentielle de degré m sur G invariante à gauche. Pour $g \in G$ l'automorphisme intérieure

$$x \longmapsto \varphi(x) = gxg^{-1}$$

est un difféomorphisme de G. Montrons que

$$\varphi^*\omega = \det \mathrm{Ad}(g)\omega.$$

Pour $X_1, ..., X_m \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
(\varphi^*\omega)_x(xX_1, ...xX_m) &= \omega_{gxg^{-1}}(g(xX_1)g^{-1}, ..., g(xX_m)g^{-1}) \\
&= \omega_{gxg^{-1}}(gxg^{-1}\mathrm{Ad}(g)X_1, ..., gxg^{-1}\mathrm{Ad}(g)X_m) \\
&= \omega_e(\mathrm{Ad}(g)X_1, ..., \mathrm{Ad}(g)X_m) \\
&= \det \mathrm{Ad}(g)\omega_e(X_1, ..., X_m) \\
&= \det \mathrm{Ad}(g)\omega_x(xX_1, ..., xX_m).
\end{aligned}$$

Ilen resulte que, si μ désigne la mesure de Haar à gauche associée à ω,

$$\int_G f(gxg^{-1})d\mu(x) = |\det \mathrm{Ad}(g)|^{-1} \int_G f(x)d\mu(x),$$

et que

$$\Delta(g) = |\det \mathrm{Ad}(g)|^{-1}.$$

■

Corollaire 3.7.1.
Dans les trois cas suivants le groupe G est unimodulaire :
1) $\mathrm{Ad}(G)$ *est compact,*
2) $\mathfrak{g} = Lie(G)$ *est semi simple,*
3) $\mathfrak{g} = Lie(G)$ *est nilpotente, et G est connexe.*

Preuve
1) L'application

$$g \longmapsto |\det \mathrm{Ad}(g)|$$

est un homomorphismre continu à valeurs positives. Si $\mathrm{Ad}(G)$ est compact il est borné et par suite constant égale à 1.
2) Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. De la relation

$$\mathrm{ad}(\mathrm{Ad}(g)\,X) = \mathrm{Ad}(g)\,\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{Ad}(g^{-1}) \quad (g \in G, X \in \mathfrak{g}),$$

il resulte que

$$B(\mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y) = B(X,Y), \quad (X, Y \in \mathfrak{g}),$$

c'est à dire que $\mathrm{Ad}(g)$ appartient au groupe orthogonal de B. Par suite

$$|\det \mathrm{Ad}(g)| = 1.$$

3) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}X$ est nilpotent et

$$\det \mathrm{Ad}(\exp X) = \det \mathrm{Exp}\,\mathrm{ad}X = e^{tr(\mathrm{ad}\,X)} = 1.$$

Par suite, pour tout g dans un voisinage de e,

$$\det \mathrm{Ad}(g) = 1.$$

Ainsi le sous-groupe

$$H = \{g \in G \quad | \quad \det \mathrm{Ad}(g) = 1\}$$

est ouvert et fermé, et, puisque G est connexe, $H = G$.
Soit φ le difféomorphisme de G définit par

$$x \longmapsto \varphi(x) = x^{-1}.$$

On montre que, si ω est une forme différentielle invariante à gauche , alors

$$\varphi^*\omega = \det(-\mathrm{Ad}(g))\omega.$$

Notons que l'application φ ne respecte pas l'orientation de G si $m = dim\,G$ est impaire.
■

CHAPITRE 4

CLASSIFICATION DES HOMOMORPHISMES HARMONIQUES ENTRE DES GROUPES DE LIE RIEMANNIENS UNIMODULAIRES TRIDIMENSIONNELS.

Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application lisse entre deux variétés riemanniennes avec $m = \dim\, M$ et $n = \dim\, N$. Nous désignons par ∇^M et ∇^N les connexions de Levi-Civita associées à g et h respectivement, et par $T^{\varphi}N$ le fibré vectoriel sur M pull-back de TN par φ. C'est un fibré vectoriel euclidien et l'application tangente de φ est un homomorphisme de fibrés $d\varphi : TM \longrightarrow T^{\varphi}N$. De plus, $T^{\varphi}N$ porte une connexion ∇^{φ} pull-back de ∇^N par φ, et il existe une connexion sur le fibré vectoriel $End(TM, T^{\varphi}N)$ donnée par :

$$(\nabla_X A)(Y) = \nabla^{\phi}_X A(Y) - A(\nabla^M_X Y),\ X, Y \in \Gamma(TM),\ A \in \Gamma(End(TM, T^{\varphi}N)).$$

L'application φ est dite harmonique si c'est un point critique de l'énergie

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \mid d\varphi^2 \mid v_g.$$

L'équation d'Euler-Lagrange correspondante pour l'énergie est donnée par l'annulation du champ de tension.

$$\tau(\varphi) = \mathrm{tr}\,\nabla d\varphi = \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i} d\varphi)e_i,$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ est un repère local de champs de vecteurs orthonormaux.

Soit (G, g) un groupe de Lie riemannien, c'est-à -dire un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Si $\mathfrak{g} = T_eG$ est son algèbre de Lie et $<,>_{\mathfrak{g}}= g(e)$, alors il existe une unique application bilinéaire $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ appelée produit de Levi-Civita associé à $(\mathfrak{g}, <,>_{\mathfrak{g}})$ donnée par la formule :

$$2 < A_u v, w >_{\mathfrak{g}} =< [u, v]^{\mathfrak{g}}, w >_{\mathfrak{g}} + < [w, u]^{\mathfrak{g}}, v >_{\mathfrak{g}} + < [w, v]^{\mathfrak{g}}, u >_{\mathfrak{g}} .$$

La transformation A est entièrement déterminée par les propriétés suivantes :

Propriété 4.0.1.
1) Pour tout $u, v \in \mathfrak{g}$, $A_u v - A_v u = [u, v]^{\mathfrak{g}}$.
2) Pour tout $u, v, w \in \mathfrak{g}$, $< A_u v, w >_{\mathfrak{g}} + < v, Auw >_{\mathfrak{g}} = 0$.

Si l'on note u^ℓ le champ de vecteurs invariant à gauche sur G associé à $u \in \mathfrak{g}$, alors la connexion de Levi-Civita associée à (G, g) satisfait

$$\nabla_{u^\ell} v^\ell = (A_u v)^\ell.$$

Le couple $(\mathfrak{g}, <,>_{\mathfrak{g}})$ définit un vecteur noté $U^{\mathfrak{g}}$ tel que

$$< U^{\mathfrak{g}}, v >_{\mathfrak{g}} = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_v), \quad \textit{pour tout } v \in \mathfrak{g}.$$

Remarque 4.0.1. *Pour toute base orthonormale* $\{e_i\}_{i=1}^m$ *de* $\mathfrak{g}$*, on a*

$$U^{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^m A_{e_i} e_i.$$

En effet :
Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormale de $\mathfrak{g}$. Notons $U^{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^m U_i e_i$ et $A_{e_i} e_i = \sum_{j=1}^m A_{ij} e_j$. Alors, par définition de $U^{\mathfrak{g}}$,

$$\begin{aligned} < U^{\mathfrak{g}}, e_k >_{\mathfrak{g}} &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{e_k}) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{e_k} e_j) e_j \\ &= \mathrm{tr}(e_k e_j) e_j \\ &= \delta_{kj} e_j, \end{aligned}$$

où δ_{kj} est le symbole de Kronecker. D'autre part, par la formule pour A_{e_k}, on a

$$\begin{aligned} < A_{e_k}, e_i >_{\mathfrak{g}} &= < \sum_{j=1}^m A_{kj} e_j, e_i >_{\mathfrak{g}} \\ &= A_{ki}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation donnée pour $U^{\mathfrak{g}}$, on a alors

$$\sum_{j=1}^m U_j \delta_{kj} e_j = A_{ki}.$$

Cela montre que $U_k = A_{ki}$ pour tout k, ce qui équivaut à $U^{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^m A_{e_i} e_i$. Ainsi, pour toute base orthonormale $\{e_i\}_{i=1}^m$ de $\mathfrak{g}$, on a bien montré que $U^{\mathfrak{g}} = \sum_{i=1}^m A_{e_i} e_i$. Remarquons que $\mathfrak{g}$ est unimodulaire si et seulement si $U^{\mathfrak{g}} = 0$.

Proposition 4.0.1.
Soit $\varphi : (G,g) \longrightarrow (H,h)$ un homomorphisme entre deux groupes de Lie riemanniens. Alors la différentielle $\xi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ de φ en e (élément neutre de G) est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Preuve Pour démontrer que la différentielle $\xi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ de l'homomorphisme $\varphi : (G,g) \longrightarrow (H,h)$ entre deux groupes de Lie riemanniens est un homomorphisme d'algèbres de Lie, nous devons montrer que pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, la différentielle vérifie la propriété d'homomorphisme d'algèbres de Lie, c'est-à -dire que $\xi([X,Y]\mathfrak{g}) = [\xi(X), \xi(Y)]\mathfrak{h}$. Soit $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors $[X,Y]_{\mathfrak{g}}$ est le crochet de Lie de X et Y dans $\mathfrak{g}$. En utilisant la définition du crochet de Lie et les propriétés des groupes de Lie, on a :

$$\xi([X,Y]_{\mathfrak{g}}) = \xi(\mathrm{ad}_X(Y)) = [\xi(X), \xi(Y)]_{\mathfrak{h}},$$

où $ad_X(Y)$ est l'action adjointe de X sur Y. Ainsi, la différentielle ξ préserve la structure d'algèbre de Lie en respectant le crochet de Lie. Par conséquent, $\xi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ est bien un homomorphisme d'algèbres de Lie. ■

Il existe une action à gauche de G sur $\Gamma(T^{\varphi}H)$ donnée par

$$(a.X)(b) = T_{\varphi(ab)}L_{\varphi(a^{-1})}X(ab), \ a, b \in G, \ X \in \Gamma(T^{\varphi}H).$$

Une section X de $T^{\varphi}H$ est dite invariante à gauche si :
pour tout $a \in G$,

$$a.X = X.$$

Pour toute section invariante à gauche X de $T^{\varphi}H$, on a :
pour tout $a \in G$,

$$X(a) = (X(e))^{\ell}(\varphi(a)).$$

Ainsi, l'espace des sections invariantes à gauche est isomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Comme φ est un homomorphisme de groupes de Lie, g et h sont invariantes à gauche. On peut facilement voir que $\tau(\varphi)$ est également invariant à gauche et donc

$$\varphi \textit{ est harmonique si et seulement si } \tau(\varphi)(e) = 0.$$

De plus, on peut facilement voir que

$$\tau(\xi) := \tau(\varphi)(e) = U^{\xi} - \xi(U^{\mathfrak{g}}),$$

où

$$U^{\xi} = \sum_{i=1}^{m} B_{\xi(e_i)}\xi(e_i),$$

B est le produit de Levi-Civita associé à $(\mathfrak{h}, <,>_{\mathfrak{h}})$ et $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{g}$. Ainsi, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 4.0.2. *[4]*
Soit $\phi : G \to H$ un homomorphisme entre deux groupes de Lie riemanniens. Alors ϕ est harmonique si et seulement si $\tau(\xi) = 0$, où $\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est la différentielle de ϕ en e.

La classification des homomorphismes harmoniques sera réalisée jusqu'à une conjugaison près.

Définition 4.0.1. *[3]*
Deux homomorphismes entre deux algèbres de Lie euclidiennes :

$$\xi_1 : (\mathfrak{g}, <,>_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}, <,>_{\mathfrak{h}}) \quad \textit{and} \quad \xi_2 : (\mathfrak{g}, <,>_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}, <,>_{\mathfrak{h}}),$$

sont conjugués s'il existe deux automorphismes isométriques

$$\varphi_1 : (\mathfrak{g}, <,>_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{g}, <,>_{\mathfrak{g}}) \ \textit{et} \ \varphi_2 : (\mathfrak{h}, <,>_{\mathfrak{h}}) \to (\mathfrak{h}, <,>_{\mathfrak{h}})$$

tels que

$$\varphi_2 \circ \xi_1 = \xi_2 \circ \varphi_1. \tag{4.1}$$

Proposition 4.0.3. *[4]*
Soit $\xi : (\mathfrak{g}, <,>_{\mathfrak{g}}) \to (\mathfrak{h}, <,>_{\mathfrak{h}})$ un homomorphisme entre deux algèbres de Lie euclidiennes unimodulaires. Alors

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{h}} = \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi), \quad \forall X \in \mathfrak{h} \tag{4.2}$$

où, $\xi^* : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ *est donnée par*

$$< \xi^* U, V >_{\mathfrak{g}} = < U, \xi V >_{\mathfrak{h}}, \quad \textit{pour tous} \ \ V \in \mathfrak{g} \ \ \textit{et} \ \ U \in \mathfrak{h}. \tag{4.3}$$

4.1 Groupes de Lie riemanniens unimodulaires tridimensionnels

Définition 4.1.1 (Groupe de Lie nilpotent Nil).
Le groupe nilpotent Nil, également connu sous le nom de groupe de Heisenberg, est défini comme suit :
Le groupe Nil est l'ensemble des matrices de la forme :

$$Nil = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Son algèbre de Lie, notée $\mathfrak{n}$, est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec } x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cette algère de Lie $\mathfrak{n}$ possède une base $\{X, Y, Z\}$ où les matrices sont définies par :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, le crochet de Lie non nul est donné par $[X, Y] = Z$.

Proposition 4.1.1. *[12]*
Toute métrique invariante à gauche sur Nil est équivalente jusqu'à automorphisme à une métrique dont la matrice associée dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est de la forme :

$$<,>_{\mathfrak{n}}= \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{avec } \rho > 0. \tag{4.4}$$

Définition 4.1.2 (**Groupe de Lie résoluble Sol**). *.*
Le groupe de Lie soluble Sol, dont l'algèbre de Lie sera désignée par $\mathfrak{sol}$, est défini par $\mathfrak{sol} = \mathbb{R}^2 \rtimes_\iota \mathbb{R}$ où

$$\iota(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons choisir une base X, Y, Z de $\mathfrak{sol}$ telle que

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 0 \right), \quad Y = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0 \right) \quad \textit{et } Z = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right).$$

et les crochets de Lie non nuls sont

$$[Z, X] = X \quad et [Y, Z] = Y.$$

Le groupe de Lie de l'algèbre de Lie soluble $\mathfrak{sol} = \mathbb{R}^2 \rtimes_\iota \mathbb{R}$ est le groupe de Lie soluble Sol, qui est le produit semi-direct $\mathbb{R}^2 \rtimes_\Theta \mathbb{R}$, agit sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4.1.2. *[12]*
Toute métrique invariante à gauche sur $Sol = \mathbb{R}^2 \rtimes_\Theta \mathbb{R}$ est équivalente, jusqu'à automorphisme, à une métrique dont la matrice associée présente l'une des deux formes suivantes :

$$<,>_{\mathfrak{sol}}= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \ \textit{avec } \nu > 0, \tag{4.5}$$

ou

$$<,>_{\mathfrak{sol}}= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \ \textit{avec } \nu > 0 \textit{ et } \mu > 1. \tag{4.6}$$

Définition 4.1.3 (**Groupe de Lie résoluble $\widetilde{E}_0(2)$**).
Le groupe de Lie soluble $\widetilde{E}_0(2)$, dont l'algèbre de Lie sera notée

$$\mathfrak{e}_0(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{so}(2).$$

On peut choisir une base X, Y, Z *de* $\mathfrak{e}_0(2)$ *telle que*

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad Y = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \quad Z = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

et les crochets de Lie non nuls sont

$$[Z, X] = Y \text{ et } [Y, Z] = X.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_0(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{so}(2)$ *est l'algèbre de Lie du groupe de Lie* $E_0(2) = \mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)$*, qui n'est pas simplement connexe.*
L'unique groupe de Lie simplement connexe correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_0 = \mathbb{R}^2 \rtimes \mathfrak{so}(2)$ *est le groupe de recouvrement universel* $\widetilde{E}_0(2)$ *de* $E_0(2)$*. Le groupe* $\widetilde{E}_0(2)$ *est le produit semi-direct* $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{R}$ *, où*

$$(z, t).(z', t') = (z + z'e^{2i\pi t}, t + t').$$

Il possède une représentation matricielle dans $GL(3, \mathbb{C})$ *donnée par*

$$(z, t) \mapsto \begin{pmatrix} e^{2i\pi t} & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C} \text{ et } \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4.1.3. *[12] Toute métrique invariante à gauche sur* $\widetilde{E}_0(2)$ *est équivalente, jusqu'à automorphisme près, à une métrique dont la matrice associée est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \text{ avec } \quad \sigma > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \varrho \leq 1. \tag{4.7}$$

Définition 4.1.4. ***Groupe de Lie simple*** $SU(2)$
Le groupe de Lie simple, simplement connexe tridimensionnel $SU(2)$*, dont l'algèbre de Lie sera désignée par* $\mathfrak{su}(2)$*, est isomorphe à l'algèbre de Lie* $\mathfrak{so}(3)$ *de toutes les matrices antisymétriques* 3×3*. Nous pouvons choisir une base* X, Y, Z *de* $\mathfrak{so}(3)$*, où*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{so}(3)$ *est l'algèbre de Lie du groupe de Lie* $SO(3)$*, les crochets de Lie non nuls sont*

$$[X, Y] = Z, \quad [Z, X] = Y \quad \text{et} \quad [Y, Z] = X.$$

Mais, le groupe $SO(3)$ *n'est pas simplement connexe. Le groupe de Lie simplement connexe unique correspondant à l'algèbre de Lie* $\mathfrak{so}(3)$ *est le groupe de recouvrement universel* $SU(2)$ *de* $\mathfrak{so}(3)$*.*

Proposition 4.1.4. *[12] Toute métrique invariante à gauche sur $SU(2)$ est équivalente jusqu'à automorphisme à une métrique dont la matrice associée est de la forme :*

$$<,>_{\mathfrak{su}(2)}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \eta & 0\\ 0 & 0 & \theta\end{pmatrix}, \quad avec \quad 0<\theta\leq\eta\leq\lambda \tag{4.8}$$

Définition 4.1.5. ***Groupe de Lie simple*** $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$
Le groupe de Lie simple simplement connexe $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$ est le groupe de recouvrement universel de $SL(2,\mathbb{R})$. Son algèbre de Lie, notée $sl(2,\mathbb{R})$, possède une base X, Y, Z, où :

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad et \quad Z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

Ainsi, les crochets de Lie non nuls sont

$$[X,Y]=-Z, \quad [Z,X]=Y, \quad et \quad [Y,Z]=X.$$

Proposition 4.1.5. *[12] Toute métrique invariante à gauche sur $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$ est équivalente jusqu'à automorphisme à une métrique dont la matrice associée est de la forme :*

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \zeta\end{pmatrix}, \ avec \quad \zeta>0 \quad et \quad 0<\alpha\leq\beta. \tag{4.9}$$

4.2 Homomorphismes Harmoniques entre groupes de Lie riemanniens unimodulaires tridimensionnels

4.2.1 Homomorphismes harmoniques entre Sol et Nil

Le résultat suivant donne une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{sol}$ (munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5) ou (4.6)) et $\mathfrak{n}$ (munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.4)).

Théorème 4.2.1. *Tout homomorphisme de $\mathfrak{sol}$ dans $\mathfrak{n}$ est conjugué à l'homomorphisme*

$$\xi:\mathfrak{sol}\longrightarrow\mathfrak{n},$$

défini par la matrice

$$\xi=\begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}, avec \quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Preuve
Rappelant que $\mathfrak{sol}$ admet une base X, Y, Z où les relations de Lie sont données par

$$[Z, X] = X \quad et \quad [Y, Z] = Y,$$

et $\mathfrak{n}$ admet une base E, F, H avec la relation de Lie $[E, F] = H$. Nous définissons l'homomorphisme $\xi : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{n}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \xi : X &\mapsto a_1E + b_1F + c_1H \\ Y &\mapsto a_2E + b_2F + c_2H \\ Z &\mapsto a_3E + b_3F + c_3H. \end{aligned}$$

Nous devons vérifier que cette définition respecte les relations de Lie. Pour ce faire, nous calculons :

$$\begin{cases} [\xi X, \xi Y] = \xi[X, Y] = 0 \\ [\xi X, \xi Z] = \xi[X, Z] = -\xi X \\ [\xi Y, \xi Z] = \xi[Y, Z] = \xi Y \end{cases} \iff a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0.$$

Ainsi, l'homomorphisme ξ est entièrement déterminé par les coefficients a_3, b_3, et c_3. ■

Théorème 4.2.2. *Soit $\xi : \mathfrak{sol} \to \mathfrak{n}$ un homomorphisme, où*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

où l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5) ou (4.6) et $\mathfrak{n}$ est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.4). Alors

$$\tau(\xi) = \frac{bc}{\nu}E - \frac{ac}{\nu}F. \tag{4.11}$$

Preuve Nous avons

$$\mathrm{ad}_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \ \mathrm{ad}_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.3) où $U \in \mathfrak{n}$ et $V \in \mathfrak{sol}$, nous obtenons :

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho a & \rho b & c \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), un calcul simple nous donne

$$< \tau(\xi), E >_{\mathfrak{n}} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_E \circ \xi) = \frac{bc}{\nu},$$

$$< \tau(\xi), F >_{\mathfrak{n}} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_F \circ \xi) = \frac{-ac}{\nu}$$

et

$$< \tau(\xi), H >_{\mathfrak{n}} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_H \circ \xi) = 0$$

■

Corollaire 4.2.1.
$\xi : (\mathfrak{sol}, <,>_{\mathfrak{sol}}), \to (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{sol}})$ *est harmonique si et seulement si* $(a = b = 0$ *ou* $c = 0)$.

Théorème 4.2.3.
Un homomorphisme de $\mathfrak{n}$ *à* $\mathfrak{sol}$ *est conjugué à* $\xi_{i=1,2} : \mathfrak{n} \to \mathfrak{sol}$, *où*

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec} \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

et

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{avec } a_i, b_i \in \mathbb{R} \textit{ pour } i = 1, 2. \tag{4.13}$$

Preuve $\mathfrak{sol}$ est munie de la base X, Y, Z où $[Z, X] = X$ et $[Y, Z] = Y$, et $\mathfrak{n}$ est munie de la base E, F, H avec $[E, F] = H$, donc nous pouvons supposer

$$E \longmapsto a_1 X + b_1 Y + c_1 Z,$$

$$F \longmapsto a_2 X + b_2 Y + c_2 Z$$

et

$$H \longmapsto a_3 X + b_3 Y + c_3 Z.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{cases} \xi[E, F] = [\xi E, \xi F] = \xi H \\ \xi[E, H] = [\xi E, \xi H] = 0 \\ \xi[F, H] = [\xi E, \xi H] = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$(c_3 = a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0 \quad ou \quad a_3 = b_3 = c_3 = c_1 = c_2 = 0).$$

■

Théorème 4.2.4. *Soient* $\xi_1, \xi_2 : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{sol}$ *deux homomorphismes, où* ξ_1 *et* ξ_2 *sont définis par les formules (4.12) et (4.13), et l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sol}$ *est munie de la métrique invariante à gauche définie par la formule (4.5). Alors*

$$\tau(\xi_1) = (a^2 - b^2)Z \tag{4.14}$$

et

$$\tau(\xi_2) = \frac{((a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2))}{\rho} Z. \tag{4.15}$$

Preuve Nous avons

$$\mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{ad}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour l'homomorphisme ξ_1,
en utilisant la formule (4.3) où $V \in \mathfrak{n}$ et $U \in \mathfrak{sol}$, nous obtenons :

$$\xi_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), un calcul simple nous donne

$$< \tau(\xi_1), X >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi_1) = 0,$$

$$< \tau(\xi_1), Y >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi_1) = 0$$

et

$$< \tau(\xi_1), Z > \mathfrak{sol} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi_1) = a^2 - b^2.$$

Pour l'homomorphisme ξ_2, nous avons

$$\xi_2^* = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), nous obtenons

$$< \tau(\xi_2), X >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi_2) = 0,$$

$$< \tau(\xi_2), Y >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi_2) = 0$$

et

$$< \tau(\xi_2), Z >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi_2) = \frac{((a_1^2 - b_1^2) + (a_2^2 - b_2^2))}{\rho}.$$

■

Corollaire 4.2.2.
$\xi_1 : (\mathfrak{n}, <, >_{\mathfrak{n}}) \to (\mathfrak{sol}, <, >_{\mathfrak{sol}})$ *est harmonique si et seulement si*

$$a = b \quad ou \quad a = -b.$$

$\xi_2 : (\mathfrak{n}, <, >_{\mathfrak{n}}) \to (\mathfrak{sol}, <, >_{\mathfrak{sol}})$ *est harmonique si et seulement si*

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2.$$

Théorème 4.2.5. *Soient $\xi_1, \xi_2 : \mathfrak{n} \to \mathfrak{sol}$ deux homomorphismes, où ξ_1 et ξ_2 sont définis par les formules (4.12), (4.13), et l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ est munie de la métrique invariante à gauche définie par la formule (4.6). Alors*

$$\tau(\xi_1) = (a^2 - \mu b^2)Z, \tag{4.16}$$

$$\tau(\xi_2) = \frac{((a_1^2 - \mu b_1^2) + (a_2^2 - \mu b_2^2))}{\rho} Z. \tag{4.17}$$

Preuve En utilisant la formule (4.3) où $V \in \mathfrak{n}$ et $U \in \mathfrak{sol}$, nous obtenons :
Pour ξ_1,

$$\xi_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b & a+\mu b & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), nous obtenons

$$< \tau(\xi_1), X >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi_1) = 0,$$

$$< \tau(\xi_1), Y >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi_1) = 0$$

et

$$< \tau(\xi_1), Z >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi_1) = a^2 - \mu b^2.$$

Pour ξ_2, nous avons

$$\xi_2^* = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+\mu b_1 & 0 \\ a_2+b_2 & a_2+\mu b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de plus

$$< \tau(\xi_2), X >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi_2) = 0,$$

$$< \tau(\xi_2), Y >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi 2^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi_2) = 0$$

et

$$< \tau(\xi_2), Z >_{\mathfrak{sol}} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi_2) = \frac{((a_1^2 - \mu b_1^2) + (a_2^2 - \mu b_2^2))}{\rho}.$$

■

Corollaire 4.2.3.
$\xi_1 : (\mathfrak{n} <,>_{\mathfrak{n}}) \longrightarrow (\mathfrak{sol}, <,>_{\mathfrak{sol}})$ *est harmonique si et seulement si :*

$$a = b\sqrt{\mu} \quad ou \quad a = -b\sqrt{\mu}.$$

$\xi_2 : (\mathfrak{n} <,>_{\mathfrak{n}}) \longrightarrow (\mathfrak{sol}, <,>_{\mathfrak{sol}})$ *est harmonique si et seulement si :*

$$a_1^2 + a_2^2 = (b_1^2 + b_2^2)\sqrt{\mu}.$$

4.2.2 Homomorphismes harmoniques entre Sol et $\widetilde{E}_0(2)$

Les résultats suivants donnent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre l'algebre de Lie $\mathfrak{sol}$, (munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5), (4.6)) et l'algebre de Lie $\mathfrak{e}_0(2)$ (munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.7)).

Théorème 4.2.6.
Tout homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}(2)$ est conjugué à l'homomorphisme $\xi : \mathfrak{sol} \to \mathfrak{e}(2)$ caractérisé par :

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

où a, b, et c sont des réels.

Preuve La base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ est X, Y, Z avec les relations de commutation

$$[Z, X] = X \quad et \quad [Y, Z] = Y,$$

et la base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_0(2)$ est A, B, C avec les relations de commutation

$$[A, B] = 0, \quad [C, A] = B \quad et \quad [B, C] = A.$$

Supposons que l'homomorphisme $\xi : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{e}_0(2)$ est donné par :

$$\xi(X) = a_1A + b_1B + c_1C,$$

$$\xi(Y) = a_2A + b_2B + c_2C$$

et

$$\xi(Z) = a_3A + b_3B + c_3C.$$

Nous obtenons ainsi les relations suivantes :

$$\begin{cases} [\xi X, \xi Y] = \xi[X, Y] = 0 \\ [\xi X, \xi Z] = \xi[X, Z] = -\xi X \\ [\xi Y, \xi Z] = \xi[Y, Z] = \xi Y \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $(a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0)$. ■

Théorème 4.2.7.
Soit $\xi : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{e}_0(2)$ un homomorphisme, où $\mathfrak{sol}$ est équipé de la métrique invariante à gauche définie par (4.5) ou (4.6), alors ;

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\nu}(-\varrho bcA + acB + (\varrho - 1)abC). \qquad (4.18)$$

Preuve Nous avons les actions adjointes suivantes :

$$\mathrm{ad}_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.3), où $U \in \mathfrak{e}_0(2)$ et $V \in \mathfrak{sol}$, nous obtenons :

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & \varrho b & \sigma c \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), nous obtenons :

$$< \tau(\xi), A >_{\mathfrak{n}} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_A \circ \xi) = \frac{-\varrho bc}{\nu},$$

$$< \tau(\xi), B >_{\mathfrak{n}} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_B \circ \xi) = \frac{ac}{\nu}$$

et

$$< \tau(\xi), C >_{\mathfrak{n}} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_C \circ \xi) = \frac{(\varrho - 1)ab}{\nu}.$$

■

Corollaire 4.2.4.
$\xi : (\mathfrak{sol}, <,>_{\mathfrak{sol}}) \longrightarrow (\mathfrak{e}0(2), <,>_{\mathfrak{e}0(2)})$ *est harmonique si et seulement si* $\varrho = 1$ *et* $c = 0$ *ou* $a = b = 0$.

Théorème 4.2.8. *Tout homomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{e}_0(2)$ *dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{sol}$ *est conjugué à l'homomorphisme* $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$ *donné par :*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

où a, b, et c sont des réels.

Preuve Soit $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$. Les actions de ξ sur les générateurs de $\mathfrak{e}_0(2)$ sont données par :

$$A \longmapsto a_1 X + b_1 Y + c_1 Z,$$

$$B \longmapsto a_2 X + b_2 Y + c_2 Z,$$

$$C \longmapsto a_3 X + b_3 Y + c_3 Z.$$

Ainsi, nous obtenons les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\xi A, \xi B] = \xi[A, B] = 0 \\ [\xi A, \xi C] = \xi[A, C] = -\xi B \\ [\xi B, \xi C] = \xi[B, C] = \xi A \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à $(a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0)$. ■

Théorème 4.2.9.
Soit $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$ un homomorphisme, où $\mathfrak{sol}$ est équipé de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5). Alors

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\sigma}\Big(- acX + bcY + (a^2 - b^2)Z\Big). \tag{4.19}$$

Preuve En utilisant la formule (4.3) où $V \in \mathfrak{e}_0(2)$ et $U \in \mathfrak{sol}$, nous obtenons :

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & \nu c \end{pmatrix}.$$

En effectuant des calculs directs et en utilisant la formule (4.2), nous obtenons :

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_X \circ \xi) = \frac{-ac}{\sigma},$$

$$< \tau(\xi), Y >_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_Y \circ \xi) = \frac{bc}{\sigma},$$

et

$$< \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_Z \circ \xi) = \frac{(a^2 - b^2)}{\sigma}.$$

∎

Corollaire 4.2.5.
$\xi : (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)}) \longrightarrow (\mathfrak{sol}, <,>_{\mathfrak{sol}})$ *est harmonique si et seulement si :*

$$c = 0 \ \textit{et} \ a = \pm b \quad \textit{ou} \ a = b = 0.$$

Théorème 4.2.10. *Soit $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$ un homomorphisme, où $\mathfrak{sol}$ est équipé de la métrique invariante à gauche définie par (4.6). Alors*

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\sigma}(-(a+b)cX + \mu bcY + (a^2 - \mu b^2 + ab)Z). \tag{4.20}$$

Preuve Par un calcul similaire, nous obtenons

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a+b & \mu b & \nu c \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), un calcul direct nous donne

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_X \circ \xi) = -\frac{(a+b)c}{\sigma},$$

$$< \tau(\xi), Y >_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_Y \circ \xi) = \frac{\mu bc}{\sigma},$$

$$< \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{n}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_Z \circ \xi) = \frac{a^2 - \mu b^2 + ab}{\sigma}.$$

∎

Corollaire 4.2.6.
Un homomorphisme $\xi : (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)}) \longrightarrow (\mathfrak{sol}, <,>_{\mathfrak{sol}})$ *est harmonique si et seulement si :*

$$a = b = 0 \quad ou \quad b = c = 0.$$

4.2.3 Homomorphismes harmoniques entre Nil et $\widetilde{E}_0(2)$

Les résultats suivants donnent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre l'algebre de Lie $\mathfrak{n}$ (équipé de la métrique invariante à gauche définie dans (4.4)), et l'algebre de Lie $\mathfrak{e}_0(2)$ (équipé de la métrique invariante à gauche définie dans (4.7)).

Théorème 4.2.11. *Tout homomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{e}_0(2)$ *dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{n}$ *est conjugué à l'homomorphisme* $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{n}$ *donné par :*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

où a, b *et* c *sont des réels.*

Preuve La base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_0(2)$ est A, B, C avec les relations de commutation

$$[A, B] = 0, \quad [C, A] = B \quad et\ [B, C] = A.$$

La base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ est E, F, H avec la relation de commutation $[E, F] = H$. Supposons que l'homomorphisme $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{n}$ soit donné par :

$$A \longmapsto a_1E + b_1F + c_1H,$$

$$B \longmapsto a_2E + b_2F + c_2H,$$

$$C \longmapsto a_3E + b_3F + c_3H.$$

Ainsi, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} [\xi E, \xi F] = \xi[E, F] = \xi H \\ [\xi E, \xi H] = 0 \\ [\xi F, \xi H] = \xi[F, H] = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} a_3 = b_3 = c_3 = 0, \\ c_1 = c_2 = 0, \end{cases},$$

ou

$$\begin{cases} a_3 = b_3 = c_3 = 0, \\ a_1 = b_1 = c_1 = 0, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} a_3 = b_3 = c_3 = 0, \\ c_1 \times a_2 = b_2 \times a_1, \\ b_1 \times a_2 = c_2 \times a_1. \end{cases}$$

■

Proposition 4.2.1. *Tout homomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{n}$ *dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{e}_0(2)$ *est conjugué à l'un des homomorphismes suivants*

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R},$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & \frac{cd}{a} & 0 \\ c & \frac{bd}{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*, \text{ et } b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.2.12. *Soient* $\xi_i : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{e}_0(2)$ *des homomorphismes, où* ξ_i *sont définis comme dans la Proposition 4.2.1. Alors :*

$$\tau(\xi_1) = (\varrho - 1)\frac{ac + bd}{\rho}C,$$
$$\tau(\xi_2) = \frac{1}{\rho}\left(-\varrho bcA + acB + ab(\varrho - 1)C\right),$$
$$\tau(\xi_3) = \frac{-\varrho bc}{\rho}(1 + \frac{d^2}{a^2})A + \frac{1}{\rho}(ac + \frac{b^2 d}{a})B + \frac{1}{\rho}\left(\frac{cd}{a}(\varrho d - 1) + ab(\varrho - 1)\right)C,$$

où A, B, C *désignent la base de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{e}_0(2)$.

Preuve Nous avons les actions adjointes suivantes :

$$\mathrm{ad}_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{ad}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad et \quad \mathrm{ad}_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.3), où $U \in \mathfrak{e}_0(2)$ et $V \in \mathfrak{n}$, nous obtenons :

$$\xi_1^* = \begin{pmatrix} a & \varrho c & 0 \\ b & \varrho d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), nous obtenons :

$$< \tau(\xi_1), A >_{\mathfrak{e}_0(2)} = tr(\xi^* \circ ad_A \circ \xi_1) = 0,$$

$$< \tau(\xi_1), B >_{\mathfrak{e}_0(2)} = tr(\xi^* \circ ad_B \circ \xi) = 0,$$

$$< \tau(\xi_1), C >_{\mathfrak{e}_0(2)} = tr(\xi^* \circ ad_C \circ \xi) = (\varrho - 1)\frac{ad + bd}{\rho}.$$

Pour $\xi = \xi_2$, nous avons : $\xi_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & \varrho b & \sigma c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$< \tau(\xi_2), A >_{\mathfrak{e}_0(2)} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_A \circ \xi_2) = -\frac{1}{\rho}\varrho bc,$$

$$< \tau(\xi_2), B >_{\mathfrak{e}_0(2)} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_B \circ \xi_2) = \frac{1}{\rho}ac,$$

$$< \tau(\xi_2), C >_{\mathfrak{e}_0(2)} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_C \circ \xi_2) = \frac{1}{\rho}ab(\varrho - 1).$$

De mème pour $\xi = \xi_3$, on a :

$$\xi_3^* = \begin{pmatrix} a & b\varrho & c\sigma \\ d & \varrho\frac{cd}{a} & \sigma\frac{bd}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

$$< \tau(\xi_3), A >_{\mathfrak{e}_0(2)} = \mathrm{tr}(\xi_3^* \circ \mathrm{ad}_A \circ \xi_3) = \frac{-\varrho bc}{\rho}(1 + \frac{d^2}{a^2}),$$

$$< \tau(\xi_3), B >_{\mathfrak{e}_0(2)} = \mathrm{tr}(\xi_3^* \circ \mathrm{ad}_B \circ \xi_3) = \frac{1}{\rho}(ac + \frac{bd^2}{a}),$$

$$< \tau(\xi_3), C >_{\mathfrak{e}_0(2)} = \mathrm{tr}(\xi_3^* \circ \mathrm{ad}_C \circ \xi_3) = \frac{\varrho - 1}{\rho}\left(\frac{cd^2}{a} + ab\right).$$

■

Corollaire 4.2.7.
$\xi_1 : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \to (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)})$ *est harmonique si et seulement si ;*

$$\varrho = 1 \quad ou \quad ac + bd = 0.$$

$\xi_2 : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \to (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)})$ *est harmonique si et seulement si :*

$$b = c = 0 \quad ou \quad \varrho = 1, \ \textbf{\textit{et}} \ \ c = 0.$$

$\xi_3 : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \to (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)})$ *est harmonique si et seulement si :*

$$b = c = 0 \quad ou \quad c = d = 0 \ et \ \varrho = 1.$$

4.2.4 Homomorphismes harmoniques entre $SU(2)$ et Nil

Les résultat suivants donnent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{n}$ (équipé de la métrique invariante à gauche définie dans (4.4)), et $su(2)$ (équipé de la métrique invariante à gauche définie dans (4.8)).

Proposition 4.2.2. *Un homomorphisme de* $\mathfrak{n}$ *vers* $\mathfrak{su}(2)$ *est conjugué à* $\xi : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$*, défini par :*

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{pmatrix}, \ \textit{avec} \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

et

$$d_1 = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_2 = -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Preuve Rappelons que $\mathfrak{n}$ est basé sur $\{A, B, C\}$, où

$$[A, B] = C,$$

et que $\mathfrak{su}(2)$ est basé sur $\{X, Y, Z\}$, avec

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = -Y, \quad \textit{et} \quad [Y, Z] = X.$$

Supposons que

$$\begin{cases} \xi(A) = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z, \\ \xi(B) = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z, \\ \xi(C) = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{cases} [\xi A, \xi C] = \xi[A, C] = [\xi B, \xi C] = \xi[B, C] = 0 \\ [\xi A, \xi B] = \xi[A, B] = \xi C. \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ b_3 = c_1 a_2 - a_1 c_2 \\ c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 c_3 - a_3 c_1 = a_1 b_3 - a_3 b_1 = c_1 b_3 - c_3 b_1 = 0 \\ a_2 c_3 - a_3 c_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 = c_2 b_3 - c_3 b_2 = 0. \end{cases}$$

∎

Théorème 4.2.13. *Soit* $\xi : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ *un homomorphisme de l'algèbre de Lie* $\mathfrak{n}$*, munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.4), vers l'algèbre de Lie* $\mathfrak{su}(2)$*. Si*

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{pmatrix},$$

alors

$$\tau(\xi) = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.22}$$

où

$$\Delta_1 = \frac{\theta - \eta}{\rho}\left(\rho d_2 d_3 + b_1 c_1 + b_2 c_2\right),$$

$$\Delta_2 = \frac{\lambda - \theta}{\rho}(\rho d_1 d_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2)$$

et

$$\Delta_3 = \frac{\eta - \lambda}{\rho}(\rho d_1 d_2 + a_1 b_1 + a_2 b_2).$$

Preuve Nous avons

$$\mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \textit{and} \ \mathrm{ad}_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.3), où $U \in \mathfrak{su}(2)$ et $V \in \mathfrak{n}$, nous obtenons

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \eta b_1 & \theta c_1 \\ \lambda a_1 & \eta b_2 & \theta c_2 \\ \lambda d_1 & \eta d_2 & \theta d_3 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), un calcul simple nous donne

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi) = \frac{\theta - \eta}{\rho}\left(\rho d_2 d_3 + b_1 c_1 + b_2 c_2\right),$$

$$< \tau(\xi), Y >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi) = \frac{\lambda - \theta}{\rho}(\rho d_1 d_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2)$$

et

$$< \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi) = \frac{\eta - \lambda}{\rho}(\rho d_1 d_2 + a_1 b_1 + a_2 b_2).$$

■

Corollaire 4.2.8.
1) Si $\lambda = \eta = \theta$*, tout homomorphisme*
$\xi : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$ *est harmonique.*

2) Si $\lambda = \eta \neq \theta$, *alors tout homomorphisme*
$\xi : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$ *de la forme* $\xi = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & ad - bc \end{pmatrix}$, *où* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *est harmonique.*

3) Si $\lambda = \theta \neq \eta$, *alors tout homomorphisme*
$\xi : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$ *de la forme*

$$\xi = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & 0 & bc - ad \\ b & d & 0 \end{pmatrix}, avec\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

est harmonique.

4) Si $\eta = \theta \neq \lambda$, *alors tout homomorphisme*
$\xi : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$ *de la forme*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ad - bc \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}, avec\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

est harmonique.

5) Si $\lambda \neq \eta \neq \theta$, *alors tout homomorphisme*
$\xi : (\mathfrak{n}, <,>_{\mathfrak{n}}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$ *de la forme*

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ou \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ avec\ a, b \in \mathbb{R}$$

est harmonique.

Proposition 4.2.3.
Le seul homomorphisme de $\mathfrak{su}(2)$ *vers* $\mathfrak{n}$ *est l'homomorphisme nul.*

Preuve Rappelons que $\mathfrak{n}$ est basé sur $\{A, B, C\}$, où

$$[A, B] = C,$$

et que $\mathfrak{su}(2)$ est basé sur $\{X, Y, Z\}$, avec

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = -Y, \quad et \quad [Y, Z] = X,$$

posons

$$\begin{cases} \xi(X) = a_1 A + b_1 B + c_1 C \\ \xi(Y) = a_2 B + b_2 B + c_2 C \\ \xi(Z) = a_3 A + b_3 B + c_3 C. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{cases} [\xi X, \xi Y] = \xi[X,Y] = \xi Z \\ [\xi Y, \xi Z] = \xi[Y,Z] = \xi X \\ [\xi Z, \xi X] = \xi[Z,X] = \xi Y \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = 0 \\ c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_2 = b_2 = 0, \\ c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ a_3 = b_3 = 0 \\ c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{cases}$$

■

4.2.5 Homomorphismes harmoniques entre $SU(2)$ et $\widetilde{E}_0(2)$

Les résultats suivants donnent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{e}0(2)$ (muni de la métrique invariante à gauche définie dans (4.7)) et $\mathfrak{su}(2)$.

Proposition 4.2.4.
Le seul homomorphisme de $\mathfrak{su}(2)$ vers $\mathfrak{e}_0(2)$ est l'homomorphisme nul.

Preuve
La même méthode utilisée dans la preuve de la Proposition (4.2.3) s'applique ici. ■

La même méthode utilisée pour la preuve de la Proposition (4.2.2) nous donne la suivante :

Proposition 4.2.5.
Un homomorphisme de $\mathfrak{e}_0(2)$ vers $\mathfrak{su}(2)$ est conjugué à :

$$\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$$

défini par :

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & a_3 \\ b_1 & d_2 & b_3 \\ c_1 & d_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $\quad d_1 = -\det\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}$, $\quad d_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}$ *et* $\quad d_3 = -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}$.

Théorème 4.2.14.
Soit $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ donné par

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & a_3 \\ b_1 & d_2 & b_3 \\ c_1 & d_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_0(2)$ (munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.7)) vers $\mathfrak{su}(2)$. Alors,

$$\tau(\xi) = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.24}$$

où

$$\Delta_1 = (\theta - \eta)\left(b_1c_1 + \frac{d_2d_3}{\varrho} + \frac{b_3c_3}{\sigma}\right),$$

$$\Delta_2 = (\lambda - \theta)\left(a_1c_1 + \frac{d_1d_3}{\varrho} + \frac{a_3c_3}{\sigma}\right),$$

$$\Delta_3 = (\eta - \lambda)\left(a_1b_1 + \frac{d_1d_2}{\varrho} + \frac{a_3b_3}{\sigma}\right).$$

Preuve Nous avons :

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \eta b_1 & \theta c_1 \\ \lambda d_1 & \eta d_2 & \theta d_3 \\ \lambda a_3 & \eta b_3 & \theta c_3 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule (4.2), un calcul simple nous donne,

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{su}(2)} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_X \circ \xi) = (\theta - \eta)\left(b_1c_1 + \frac{d_2d_3}{\varrho} + \frac{b_3c_3}{\sigma}\right),$$

$$< \tau(\xi), Y >_{\mathfrak{su}(2)} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_Y \circ \xi) = (\lambda - \theta)\left(a_1c_1 + \frac{d_1d_3}{\varrho} + \frac{a_3c_3}{\sigma}\right)$$

et

$$< \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{su}(2)} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_Z \circ \xi) = (\eta - \lambda)\left(a_1b_1 + \frac{d_1d_2}{\varrho} + \frac{a_3b_3}{\sigma}\right).$$

■

Corollaire 4.2.9.
1) Si $\lambda = \eta = \theta$, alors tout homomorphisme

$$\xi : (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$$

est harmonique.

2) Si $\lambda = \eta \neq \theta$, alors tout homomorphisme

$$\xi : (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$$

de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ b & 0 & d \\ 0 & bc - ad & 0 \end{pmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, est harmonique.
3) Si $\lambda = \theta \neq \eta$, alors tout homomorphisme

$$\xi : (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$$

de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & ad-bc & 0 \\ b & 0 & d \end{pmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, est harmonique. 4) Si $\eta = \theta \neq \lambda$, alors tout homomorphisme

$$\xi : (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$$

de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & bc-ad & 0 \\ a & 0 & c \\ b & 0 & d \end{pmatrix},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, est harmonique.
5) Si $\lambda \neq \theta \neq \eta$, alors tout homomorphisme

$$\xi : (\mathfrak{e}_0(2), <,>_{\mathfrak{e}_0(2)}) \longrightarrow (\mathfrak{su}(2), <,>_{\mathfrak{su}(2)})$$

de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}, \quad ou \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ou \quad \xi = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, est harmonique.ê

4.2.6 Homomorphismes harmoniques entre $SU(2)$ et Sol

Les résultats suivants donnent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{su}(2)$ équipé d'une métrique invariante à gauche définie dans (4.8), et $\mathfrak{sol}$ équipé d'une métrique invariante à gauche définie dans (4.5 ou 4.6).

La même méthode utilisée dans la preuve de la Proposition (4.2.2) nous donne le résultat suivant :

Proposition 4.2.6.
Un homomorphisme de $\mathfrak{sol}$ vers $\mathfrak{su}(2)$ est conjugué à $\xi_i : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ pour $(i = 1, 2)$, où

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

et $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, 2, 3$.

Théorème 4.2.15.
Soient $\xi_i : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$, $(i = 1, 2)$ *les homomorphismes définis dans la Proposition (4.2.6). Alors,*

$$\tau(\xi_1) = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.25}$$

où

$$\Delta_1 = \frac{\theta - \eta}{\nu}\left(\nu b_2 c_2 + b_3 c_3\right),$$
$$\Delta_2 = \frac{\lambda - \theta}{\nu}\left(\nu a_2 c_2 + a_3 c_3\right),$$
$$\Delta_3 = \frac{\eta - \lambda}{\nu}\left(\nu a_2 b_2 + a_3 b_3\right).$$

De plus,

$$\tau(\xi_2) = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.26}$$

où

$$\Delta_1 = \frac{\theta - \eta}{\nu}\left(\nu b_1 c_1 + b_3 c_3\right),$$
$$\Delta_2 = \frac{\lambda - \theta}{\nu}\left(\nu a_1 c_1 + a_3 c_3\right),$$
$$\Delta_3 = \frac{\eta - \lambda}{\nu}\left(\nu a_1 b_1 + a_3 b_3\right).$$

Preuve
En utilisant la formule (4.3), nous avons :

$$\xi_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda a_2 & \eta b_2 & \theta c_2 \\ \lambda a_3 & \eta b_3 & \theta c_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\xi_2^* = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \eta b_1 & \theta c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda a_3 & \eta b_3 & \theta c_3 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$< \tau(\xi_1), X >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi_1) = \frac{\theta - \eta}{\nu}\left(\nu b_2 c_2 + b_3 c_3\right),$$
$$< \tau(\xi_1), Y >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi_1) = \frac{\lambda - \theta}{\nu}\left(\nu a_2 c_2 + a_3 c_3\right),$$
$$< \tau(\xi_1), Z >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi_1^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi_1) = \frac{\eta - \lambda}{\nu}\left(\nu a_2 b_2 + a_3 b_3\right).$$

Pour le deuxième cas, nous avons

$$< \tau(\xi_2), X >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi_2) = \frac{\theta - \eta}{\nu} \left(\nu b_1 c_1 + b_3 c_3\right),$$
$$< \tau(\xi_2), Y >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi_2) = \frac{\lambda - \theta}{\nu} \left(\nu a_1 c_1 + a_3 c_3\right),$$
$$< \tau(\xi_2), Z >_{\mathfrak{su}(2)} = \mathrm{tr}(\xi_2^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi_2) = \frac{\eta - \lambda}{\nu} \left(\nu a_1 b_1 + a_3 b_3\right).$$

■

Corollaire 4.2.10.
1) Si $\lambda = \eta = \theta$, alors tout homomorphisme $\xi_i : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ pour $(i = 1, 2)$, défini dans la Proposition (4.2.6), est harmonique.
2) Si $\eta = \theta \neq \lambda$, alors les homomorphismes $\xi_i : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ pour $(i = 1, 2)$, définis dans la Proposition (4.2.6), de la forme :

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sont harmoniques.
3) Si $\lambda = \theta \neq \eta$, alors les homomorphismes $\xi_i : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ pour $(i = 1, 2)$, définis dans la Proposition (4.2.6), de la forme :

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sont harmoniques.
4) Si $\lambda = \eta \neq \theta$, alors les homomorphismes $\xi_i : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ pour $(i = 1, 2)$, définis dans la Proposition (4.2.6), de la forme :

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix},$$

et

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix},$$

sont harmoniques.

Proposition 4.2.7.
Un homomorphisme de $\mathfrak{sol}$ *vers* $\mathfrak{su}(2)$ *est conjugué à* $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$*, caractérisé par :*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; a, b \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.2.16.
Soit $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$*, un homomorphisme, où :*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ *est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5), alors*

$$\tau(\xi) = (a^2 - b^2)C \tag{4.27}$$

2) Si $\mathfrak{sol}$ *est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.6), alors*

$$\tau(\xi) = (a^2 - \mu b^2)C \tag{4.28}$$

Preuve
1) Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5), alors :

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc

$$< \tau(\xi), A >_{\mathfrak{sol}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_A \circ \xi) = 0,$$

$$< \tau(\xi), B >_{\mathfrak{sol}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_B \circ \xi) = 0,$$

$$< \tau(\xi), C >_{\mathfrak{sol}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \operatorname{ad}_C \circ \xi) = a^2 - b^2.$$

2) Pour le cas où $\mathfrak{sol}$ est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.6), on a

$$\xi^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a+b & a+\mu b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Donc,

$$< \tau(\xi), A >_{\mathfrak{sol}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_A \circ \xi) = 0,$$
$$< \tau(\xi), B >_{\mathfrak{sol}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_B \circ \xi) = 0,$$
$$< \tau(\xi), C >_{\mathfrak{sol}} = \operatorname{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_C \circ \xi) = a^2 - \mu b^2.$$

■

Corollaire 4.2.11.
1) Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5), alors $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$ est harmonique si et seulement s' il est de la forme :

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.
2) Si l'algèbre de Lie $\mathfrak{sol}$ est munie de la métrique invariante à gauche définie dans (4.6), alors $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sol}$ est harmonique si et seulement s'il est de la forme :

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & b\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ou \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & -b\sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $b \in \mathbb{R}$.

4.2.7 Homomorphismes harmoniques entre $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ et Nil

Les résultats suivant donnent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ équipés de la métrique invariante à gauche définie dans (4.9).

Proposition 4.2.8.
Le seul homomorphisme de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ vers $\mathfrak{n}$ est l'homomorphisme nul.

Proposition 4.2.9.
Un homomorphisme de $\mathfrak{n}$ vers $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est conjugué à $\xi : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, défini par

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad où \quad a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

$$d_1 = \det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_2 = -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad et \quad d_3 = -\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.2.17.
Soit $\xi : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *un homomorphisme. Alors,*

$$\tau(\xi) = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.29}$$

où :

$$\Delta_1 = -\frac{\beta+\zeta}{\rho}(b_1c_1 + b_2c_2 + \rho d_2 d_3),$$
$$\Delta_2 = \frac{\alpha+\zeta}{\rho}(a_1c_1 + a_2c_2 + \rho d_1 d_3),$$
$$\Delta_3 = \frac{\beta-\alpha}{\rho}(a_1b_1 + a_2b_2 + \rho d_1 d_2).$$

Preuve Nous avons les opérateurs adjoints suivants :

$$\mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la forme matricielle de l'homomorphisme ξ^* est donnée par :

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_2 & \zeta c_1 \\ \alpha a_2 & \beta b_2 & \zeta c_2 \\ \alpha d_1 & \beta d_2 & \zeta d_3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous obtenons les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} < \tau(\xi), X >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} &= \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi) \\ &= -\frac{\beta+\zeta}{\rho}(b_1c_1 + b_2c_2 + \rho d_2 d_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < \tau(\xi), Y >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} &= \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi) \\ &= \frac{\alpha+\zeta}{\rho}(a_1c_1 + a_2c_2 + \rho d_1 d_3), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} < \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} &= \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi) \\ &= \frac{\beta-\alpha}{\rho}(a_1b_1 + a_2b_2 + \rho d_1 d_2). \end{aligned}$$

■

Corollaire 4.2.12.
Un homomorphisme $\xi : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *est harmonique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) $\alpha = \beta$ *et* $c_1 = c_2 = 0$
2) $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$
3) $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 0$
4) $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$
5) $b_1c_1 + b_2c_2 + \rho d_2d_3 = a_1c_1 + a_2c_2 + \rho d_1d_3 = a_1b_1 + a_2b_2 + \rho d_1d_2 = 0$
6) ξ *est l'homomorphisme nul.*

4.2.8 Homomorphismes harmoniques entre $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$ et Sol

Les résultats suivants donnent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{sol}$ équipé de la métrique invariante à gauche définie dans (4.5 ou 4.6) vers $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$munide la métrique invariante à gauche définie dans (4.9).

Théorème 4.2.18. *Le seul homomorphisme de* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *vers* $\mathfrak{sol}$ *est l'homomorphisme nul.*

Proposition 4.2.10.
Un homomorphisme de $\mathfrak{sol}$ *vers* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *est conjugué à* $\xi : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *tel que*

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

et

$$d_1 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix},\ d_2 = \det\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.2.19.
Soit $\xi : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *un homomorphisme, alors :*

$$\tau(\xi) = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.30}$$

où :

$$\Delta_1 = -\frac{\beta+\zeta}{\nu}(\nu b_1d_1 + \nu b_2d_2 + b_3c_3),$$
$$\Delta_2 = \frac{\alpha+\zeta}{\nu}(\nu a_1d_1 + \nu a_2d_2 + a_3c_3),$$
$$\Delta_3 = \frac{\beta-\alpha}{\nu}(\nu a_1b_1 + \nu a_2b_2 + a_3b_3).$$

Preuve Nous avons :

$$\mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\xi^* = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 & \zeta d_1 \\ \alpha a_2 & \beta d_2 & \zeta d_2 \\ \alpha a_3 & \beta b_3 & \zeta c_3 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi) = -\frac{\beta+\zeta}{\nu}(\nu b_1 d_1 + \nu b_2 d_2 + b_3 c_3),$$

$$< \tau(\xi), Y > \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}\, Y \circ \xi) = \frac{\alpha+\zeta}{\nu}(\nu a_1 d_1 + \nu a_2 d_2 + a_3 c_3),$$

$$< \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi) = \frac{\beta-\alpha}{\nu}(\nu a_1 b_1 + \nu a_2 b_2 + a_3 b_3).$$

■

Corollaire 4.2.13. *Un homomorphisme $\xi : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est harmonique si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) $\alpha = \beta$ *et* $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ *et* $b_1 \neq 0$, *donc* $c_3 = d_1 = d_2 = 0$.
2) $\alpha = \beta$ *et* $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ *et* $a_1 \neq 0$, *donc* $c_3 = d_1 = d_2 = 0$.
3) $\nu b_1 d_1 + \nu b_2 d_2 + b_3 c_3 = \nu a_1 d_1 + \nu a_2 d_2 + a_3 c_3 = \nu a_1 b_1 + \nu a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$.

4.2.9 Homomorphismes harmoniques entre $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\widetilde{E}_0(2)$

Les résultats suivants fournissent une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{e}_0(2)$munide la métrique invariante à gauche définie dans (4.7) et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$munide la métrique invariante à gauche définie dans (4.9).

Proposition 4.2.11.
Le seul homomorphisme de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ vers $\mathfrak{e}_0(2)$ est l'homomorphisme nul.

Proposition 4.2.12.
Un homomorphisme de $\mathfrak{e}_0(2)$ vers $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est conjugué à $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, où

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & a_3 \\ b_1 & d_2 & b_3 \\ c_1 & d_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ et

$$d_1 = -\det\begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}, \ d_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} \ \textit{et} \ \ d_3 = -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.2.20.
Soit $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *un homomorphisme, alors :*

$$\tau(\xi) = \Delta 1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.31}$$

où :

$$\Delta_1 = -(\beta+\zeta)(b_1c_1 + \frac{d_2d_3}{\varrho} + \frac{b_3c_3}{\sigma}),$$
$$\Delta_2 = (\alpha+\zeta)(a_1c_1 + \frac{d_1d_3}{\varrho} + \frac{a_3c_3}{\sigma}),$$
$$\Delta_3 = (\beta-\alpha)(a_1b_1 + \frac{d_1d_2}{\varrho} + \frac{a_3b_3}{\sigma}).$$

Preuve Nous avons :

$$\mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et :

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 & \zeta c_1 \\ \alpha d_1 & \beta d_2 & \zeta d_3 \\ \alpha a_3 & \beta b_3 & \zeta c_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi) = -(\beta+\zeta)(b_1c_1 + \frac{d_2d_3}{\varrho} + \frac{b_3c_3}{\sigma}),$$

$$< \tau(\xi), Y > \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}\, Y \circ \xi) = (\alpha+\zeta)(a_1c_1 + \frac{d_1d_3}{\varrho} + \frac{a_3c_3}{\sigma}),$$

$$< \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi) = (\beta-\alpha)(a_1b_1 + \frac{d_1d_2}{\varrho} + \frac{a_3b_3}{\sigma}).$$

■

Corollaire 4.2.14. *Soit* $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *un homomorphisme, alors :*

1) Si $\alpha = \beta$ *et* $c_1 = c_3 = 0$*, alors*
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *de la forme :*

$$\xi = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & \\ 0 & bc-ad & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

2) Si $\alpha = \beta$ et $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0$, alors
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme :

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

3) Si $\alpha \neq \beta$ et $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0$, alors
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme :

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

4) Si $\alpha \neq \beta$ et $a_1 = a_3 = c_1 = c_3 = 0$, alors
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{e}0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme :

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

5) Si $\alpha \neq \beta$ et $b_1 = b_3 = c_1 = c_3 = 0$, alors
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{e}0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme :

$$\xi = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{estharmonique.}$$

Corollaire 4.2.15. *Tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est harmonique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) $b_1c_1 + \dfrac{d_2d_3}{\varrho} + \dfrac{b_3c_3}{\sigma} = a_1c_1 + \dfrac{d_1d_3}{\varrho} + \dfrac{a_3c_3}{\sigma} = a_1b_1 + \dfrac{d_1d_2}{\varrho} + \dfrac{a_3b_3}{\sigma} = 0.$

2) ξ *est l'homomorphisme nul.*

4.2.10 Homomorphismes harmoniques entre $\widetilde{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $SU(2)$

Le résultat suivant donne une classification complète des homomorphismes harmoniques entre $\mathfrak{su}(2)$munide la métrique invariante à gauche définie dans (4.8) et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$munide la métrique invariante à gauche définie dans (4.9).

Proposition 4.2.13.
Un homomorphisme de $\mathfrak{su}(2)$ vers $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est conjugué à $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, tel que :

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{pmatrix}, \ \textit{avec } a_i, b_i \in \mathbb{R},$$

et

$$d_1 = \det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_2 = -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_3 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.2.21.
Soit $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ un homomorphisme, alors

$$\tau(\xi) = \Delta_1 X + \Delta_2 Y + \Delta_3 Z, \tag{4.32}$$

avec

$$\Delta_1 = (\beta+\zeta)(\frac{d_2d_3}{\theta} - \frac{b_1c_1}{\lambda} - \frac{b_2c_2}{\eta}),$$

$$\Delta_2 = (\alpha+\zeta)(\frac{a_1c_1}{\lambda} + \frac{d_1d_3}{\theta} + \frac{a_2c_2}{\eta}),$$

$$\Delta_3 = (\beta-\alpha)(\frac{a_1b_1}{\lambda} + \frac{a_2b_2}{\eta} - \frac{d_1d_2}{\theta}).$$

Preuve Nous avons :

$$\mathrm{ad}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \alpha a_1 & \beta b_1 & \zeta c_1 \\ \alpha a_2 & \beta b_2 & \zeta c_2 \\ \alpha d_1 & \beta d_2 & \zeta d_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi) = (\beta+\zeta)(\frac{d_2d_3}{\theta} - \frac{b_2c_2}{\eta} - \frac{b_1c_1}{\lambda}),$$

$$< \tau(\xi), Y >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi) = (\alpha+\zeta)(\frac{a_1c_1}{\lambda} + \frac{a_2c_2}{\eta} + \frac{d_1d_3}{\theta}),$$

$$< \tau(\xi), Z >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Z \circ \xi) = (\beta-\alpha)(\frac{a_1b_1}{\lambda} + \frac{a_2b_2}{\eta} - \frac{d_1d_2}{\theta}).$$

■

Corollaire 4.2.16.
1) Si $\alpha = \beta$ et $c_1 = c_2 = 0$, alors :
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & ad-cb & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

2) Si $\alpha = \beta$ et $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0$, alors :
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

3) Si $\alpha \neq \beta$ et $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = 0$, alors :
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

4) Si $\alpha \neq \beta$ et $a_1 = a_3 = c_1 = c_3 = 0$, alors :
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

5) Si $\alpha \neq \beta$ et $b_1 = b_3 = c_1 = c_3 = 0$, alors :
tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{est harmonique.}$$

Corollaire 4.2.17.
Tout homomorphisme $\xi : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ est harmonique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$1)\ \frac{d_2d_3}{\theta} - \frac{b_2c_2}{\eta} - \frac{b_1c_1}{\lambda} = \frac{a_1c_1}{\lambda} + \frac{a_2c_2}{\eta} + \frac{d_1d_3}{\theta} = \frac{a_1b_1}{\lambda} + \frac{a_2b_2}{\eta} - \frac{d_1d_2}{\theta} = 0$$

2) ξ *est l'homomorphisme nul.*

Proposition 4.2.14.
Un homomorphisme de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ vers $\mathfrak{su}(2)$ est conjugué à $\xi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$, tel que

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ b_1 & b_2 & d_2 \\ c_1 & c_2 & d_3 \end{pmatrix}, \quad \textit{avec } a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

et

$$d_1 = -\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \textit{et } d_3 = -\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4.2.22. *Soient $\xi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ un homomorphisme. Alors, on a :*

$$\tau(\xi) = \Delta_1 E + \Delta_2 F + \Delta_3 H, \tag{4.33}$$

où

$$\Delta_1 = (\theta - \eta)(\frac{b_1 c_1}{\alpha} + \frac{b_2 c_2}{\beta} + \frac{d_2 d_3}{\zeta}),$$
$$\Delta_2 = (\lambda - \theta)(\frac{a_1 c_1}{\alpha} + \frac{a_2 c_2}{\beta} + \frac{d_1 d_3}{\zeta}),$$
$$\Delta_3 = (\eta - \lambda)(\frac{a_1 b_1}{\alpha} + \frac{a_2 b_2}{\beta} + \frac{d_1 d_2}{\zeta}).$$

Preuve Nous avons

$$\mathrm{ad}_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}_H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \eta b_1 & \theta c_1 \\ \lambda a_2 & \eta b_2 & \theta c_2 \\ \lambda d_1 & \eta d_2 & \theta d_3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$< \tau(\xi), X >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_X \circ \xi) = (\beta + \zeta)(\frac{d_2 d_3}{\theta} - \frac{b_2 c_2}{\eta} - \frac{b_1 c_1}{\lambda}),$$
$$< \tau(\xi), Y >_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})} = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}_Y \circ \xi) = (\alpha + \zeta)(\frac{a_1 c_1}{\lambda} + \frac{a_2 c_2}{\eta} + \frac{d_1 d_3}{\theta}),$$
$$< \tau(\xi), Z > \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{tr}(\xi^* \circ \mathrm{ad}\, Z \circ \xi) = (\beta - \alpha)(\frac{a_1 b_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_2}{\eta} - \frac{d_1 d_2}{\theta}).$$

■

Corollaire 4.2.18.
$\xi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ is harmonic if and only if, one of the following conditions hold :
1) $\lambda = \theta = \eta$
2) $\theta = \eta$ *et* $a_1 = a_2 = 0$, *donc :*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\theta = \eta$ *et* $a_1 = b_2 = c_1 = a_2 = 0$, *donc :*

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $\theta = \eta$ *et* $\dfrac{a_1c_1}{\alpha} + \dfrac{a_2c_2}{\beta} + \dfrac{d_1d_3}{\zeta} = \dfrac{a_1b_1}{\alpha} + \dfrac{a_2b_2}{\beta} + \dfrac{d_1d_2}{\zeta} = 0.$
5) $\theta = \lambda$, *et* $b_1 = b_2 = 0$, *donc :*

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1c_2 - a_2c_1 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) $\theta = \lambda$ *et* $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$, *donc :*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7) $\theta = \lambda$ *et* $\dfrac{b_1c_1}{\alpha} + \dfrac{b_2c_2}{\beta} + \dfrac{d_2d_3}{\zeta} = \dfrac{a_1b_1}{\alpha} + \dfrac{a_2b_2}{\beta} + \dfrac{d_1d_2}{\zeta} = 0.$
8) $\eta = \lambda$ *et* $c_1 = c_2 = 0$, *donc :*

$$\xi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2b_1 - b_2a_1 \end{pmatrix}.$$

9) $\eta = \lambda$ *et* $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, *donc :*

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

10) $\theta = \eta$ *et* $\dfrac{a_1c_1}{\alpha} + \dfrac{a_2c_2}{\beta} + \dfrac{d_1d_3}{\zeta} = \dfrac{b_1c_1}{\alpha} + \dfrac{b_2c_2}{\beta} + \dfrac{d_2d_3}{\zeta} = 0.$
11) $\dfrac{a_1b_1}{\alpha} + \dfrac{a_2b_2}{\beta} + \dfrac{d_1d_2}{\zeta} = \dfrac{a_1c_1}{\alpha} + \dfrac{a_2c_2}{\beta} + \dfrac{d_1d_3}{\zeta} = \dfrac{b_1c_1}{\alpha} + \dfrac{b_2c_2}{\beta} + \dfrac{d_2d_3}{\zeta} = 0.$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Baird and D. Kamissoko : On constructing biharmonic maps and metrics, Ann. Global Anal. Geom. 23, 65-75 (2003).

[2] P. Baird and J. C. Wood, Harmonic morphisms between Riemannian manifolds. Oxford Science Publications, 2003.

[3] S. Boubekour and M. Boucetta, Harmonic and biharmonic homomorphisms between Riemannian three dimensional unimodular Lie groups. Journal of Geometry and Physics, Volume 164. June 2021.

[4] M. Boucetta and S. Ouakkas, Harmonic and biharmonic homomorphisms between Riemannian Lie groups. Journal of Geometry and Physics volume 116. June 2017, 64-80.

[5] P. Buser, Géométrie Riemannienne, Notes 'inoficielles' du cours (2010).

[6] Y. J. Dai, M. Shon and H. Urakawa, Harmonic maps between into Lie groups and homogeneous spaces. Differ. Geom.Appl, 7 (1997) 143-169.

[7] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés : Géométrie différentielle, master et doctorat, Centre Universitaire Ahmed Zabana-Relizane (2019-2020).

[8] J. Eells, Jr. and J. H. Sampson : Harmonic Mapping of Riemannian Manifolds, American Journal of Mathematics. 86 (1), 109-160 (Jan., 1964).

[9] J. Faraut. Groupes et algèbres de Lie. Un cours d'initiation, université pierre et Marie Qurie, (2001).

[10] J. Gallier, J. Quaintance, Differential Geometry and Lie Groups : A computational Perspective, Springer Nature (2020).

[11] S. Gudmundsson, An Introduction To Riemannian Geometry : Lecture Notes, Lund University (2001). 34(4), 403-414 (2008).

[12] K. Y. Ha and J. B. Lee, Left invariant metrics and curvatures on simply connected three-dimensional Lie groups. Math.Nachar. 282 (2009), 868-898.

[13] G. Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formulas, Chinese Ann. Math. Ser. A. 7(4), 389-402 (1986).

[14] P. Y. Kim, J. S. Park and Y. S. Pyo, Harmonic maps between the group of automorphisms of quaaternion algebra. Journal of the Chungcheong mathematical Society,volume 25, No. 2, May 2012.

[15] S. Mehdi. Une introduction relativement compacte aux algèbre de Lie. Cours, université pari x, (2005).

[16] R. Mneimné, F. Testard. Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques. Herman, paris, (1986).

[17] A. Mohamed Cherif, Géométrie harmonique des variétés, Thèse de doctorat, Université d'Oran1 Ahmed Ben Bella

[18] A. Mohammed Cherif, Géométrie semi-Riemannienne, Cours M2, Université Mustapha Stambouli, Mascara (2015).

[19] B. O'Neil, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York and London (1983).

[20] C. Oniciuc : Biharmonic Maps Between Riemannian Manifolds, Analele Stiintifice Ale Universitati AL.I.CUZA IASI Tomul XLVIII, s.I a, Matematica, 2002, f.2.

[21] C. Oniciuc : New examples of biharmonic maps in spheres, Colloq. Math. 97, 131-139 (2003).

[22] J. S. Park, Harmonic inner automorphisms of compact connected semisimple Lie groups. Tohoku math.J 42 (1990), 80-91.

[23] P. Peterson, Riemannian Geomery : Graduate Texts in Matheatics, Springer, USA. Vol 3 (2016).

[24] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups (classical solutions of the chiral model). J. Differ. Geom. 30(1989), 1-50.

[25] Y. Xin , Geometry of Harmonic Maps , Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser. Vol 23 (1996).