



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mustapha STAMBOULI Mascara
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

THESE

Présentée en vue de l'obtention du
DOCTORAT EN SCIENCES
Filière : **Génie Mécanique**
Option : **Matériaux**
Soutenue par

:

MEDJDOUBI BENABDALLAH

Intitulée

**Estimation des propriétés effectives
des structures en matériaux composites
avancés**

Soutenue le : 29-02-2024 devant le jury composé de :

MERDJI Ali	Pr	Président	UMS Mascara
SADOUN Mohamed	MCA	Directeur de thèse	UMS Mascara
HOUARI Mohammed Sid Ahmed	Pr	Co- Directeur de thèse	UMS Mascara
MEKSI Ali	MCA	Examineur	UMS Mascara
HADJ MOSTEFA Adda	MCA	Examineur	UAZ relizane
TOUNSI Abdelouahed	Pr	Invité	U.D.L – Sidi Bel Abbes

Année Universitaire 2023/2024

REMERCIEMENTS

*Cette thèse a été réalisée au laboratoire d'Etude des structures et de mécanique des matériaux, Département Génie civil, Faculté des Sciences et de la Technologie, Université **Mustapha STAMBOULI**, Mascara.*

*Mes remerciements vont en premier lieu aux mes encadreurs **Mr. Mohamed SADOUN** et **Mr. le Pr. Sidi Ahmed MOHAMED HOUARI**, qui ont consacré leur temps en jouant un rôle crucial dès la conception initiale de ce travail jusqu'au son achèvement par les discussions fructueuses, la contribution intellectuelle et leurs capacités à susciter la réflexion qui ont été des éléments clés pour améliorer la qualité de ce travail.*

*J'exprime ma reconnaissance à **Mr. le Pr. MERDJI Ali** pour l'honneur qu'il m'a fait en président le jury de soutenance, qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements les plus vifs.*

*Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Messieurs **MEKSI Ali**, et **HADJ MOSTEFA Adda** pour avoir accepté d'être les examinateurs de ma thèse et pour l'attention qu'ils ont portée à ce travail*

*Mes sincères reconnaissances vont à tous les **membres du Laboratoire***

*Mes remerciements s'adressent également à tout le corps d'enseignants et le corps de l'administration de l'**Université Mustapha STAMBOULI** de la Wilaya de **Mascara**.*

Ainsi à tous ceux qui m'ont aidée de près ou de loin ; tous ceux qui m'ont donné de leur temps acceptent ma gratitude la plus respectueuse.

Dédicace

Je dédie ce travail à l'âme du martyr le Professeur Dr. Sufyan Abdel Rahman Tayeh, président de l'Université islamique de Gaza, en Palestine, Il a été tragiquement assassiné le 2 décembre 2023, avec plusieurs membres de sa famille, à Jabalia, dans le nord de la bande de Gaza.

Il est considéré comme l'un des 2 % des meilleurs chercheurs du monde.

Je dédie cette œuvre aux martyrs d'Algérie et aux fiers martyrs de Gaza, à qui justice sera rendue un jour....

Je pense que le temps, aussi loin soit-il, est proche...

Et peu importe combien de temps cela durera, cela viendra...

Sufyan Tayeh était un éminent physicien et mathématicien appliqué, et son excellence académique et ses contributions lui valaient un respect indéniable parmi ses pairs. Depuis mars 2023, il était titulaire de la chaire UNESCO pour l'astronomie, l'astrophysique et les sciences spatiales, et, en 2021, l'Université de Stanford et l'entreprise d'analyse de données Elsevier l'avaient même mis dans leur classement conjoint annuel des 2% de chercheurs les plus cités. La perte est donc immense pour la science et les scientifiques, en plus de l'être pour la Palestine et le monde arabe plus spécifiquement.

Né le 20 août 1971 dans le camp de Jabalia, c'est au sein même de l'Université Islamique de Gaza qu'en 1994 Sufyan Tayeh avait débuté sa carrière universitaire, juste après avoir obtenu son diplôme de licence en physique de la même institution. Tout au long des trente dernières années, il a été récipiendaire de différents prix et distinctions, dont le Prix de la recherche scientifique de

la Banque islamique palestinienne en 2019 et 2020. En 2021, il avait également reçu le prix de la recherche scientifique de l'Université islamique de Gaza.

Résumé

L'objectif de ce travail est de présenter un nouveau modèle analytique pour étudier l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement (SCF) des poutres poreuses fonctionnellement graduées (FGPB). Pour cette analyse, des fonctions de porosité uneven et logarithmique-uneven sont adoptées pour être distribuées à travers l'épaisseur des poutres FGP. La détermination du facteur de correction, qui apparaît comme un coefficient dans l'expression de la contrainte de cisaillement transversale résultante, est essentielle à l'application de cette théorie ; pour compenser l'hypothèse selon laquelle le cisaillement est uniforme sur toute l'épaisseur de la section transversale. En utilisant le principe d'équivalence énergétique, une expression générale est dérivée des SCF statiques dans FGPB. L'expression résultante est cohérente avec les résultats dérivés de manière variationnelle de l'analyse de Reissner lorsque ces derniers sont réduits du cas bidimensionnel (plaque) à celui unidimensionnel (poutre). Une forme algébrique pratique de la solution est présentée et de nouveaux cas d'étude sont donnés pour illustrer l'applicabilité de la présente formulation. La présentation des résultats numériques offrent une illustration de l'impact de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement (SCF) pour divers FGPB. De plus, la loi de modification des propriétés mécaniques des poutres FG sans porosité et le SCF sont validés numériquement par comparaison avec quelques résultats disponibles.

Mots clés : *poutres poreuses fonctionnellement graduées, facteurs de correction de cisaillement et la porosité.*

Abstract

The objective of this work is to present a new analytical model to study the effect of porosity on the shear correction factors (SCFs) of functionally graded porous beams (FGPB).

For this analysis, uneven and logarithmic-uneven porosity functions are adopted to be distributed through the thickness of the FGP beams.

Critical to the application of this theory is a determination of the correction factor, which appears as a coefficient in the expression for the transverse shear stress resultant; to compensate for the assumption that the shear strain is uniform through the depth of the cross-section.

Using the energy equivalence principle, a general expression is derived from the static SCFs in FGPB. The resulting expression is consistent with the variationally derived results of Reissner's analysis when the latter are reduced from the two-dimensional case (plate) to the one-dimensional one (beam).

A convenient algebraic form of the solution is presented and new study cases are given to illustrate the applicability of the present formulation.

Numerical results are presented to illustrate the effect of the porosity distribution on the (SCFs) for various FGPBs. Further, the law of changing the mechanical properties of FG beams without porosity and the SCF are numerically validated by comparison with some available results.

Keywords : *functionally graded beam, porosity, transverse shear, shear correction factor.*

خلاصة

الهدف من هذا العمل هو تقديم نموذج تحليلي جديد لدراسة تأثير المسامية على عوامل تصحيح القص (SCF) للمواد المسامية المتدرجة وظيفيا (FGPB).

في هذا التحليل، تم اعتماد وظائف المسامية غير المستوية واللوغاريتمية غير المستوية لتوزيعها من خلال سمك حزم FGP.

من الأمور الحاسمة لتطبيق هذه النظرية تحديد عامل التصحيح، الذي يظهر كمعامل في التعبير عن إجهاد القص العرضي الناتج؛ للتعويض عن افتراض أن إجهاد القص موحد من خلال عمق المقطع العرضي.

باستخدام مبدأ تكافؤ الطاقة، يتم اشتقاق تعبير عام من SCFs الثابتة في FGPB. يتوافق التعبير الناتج مع النتائج المشتقة تبايناً لتحليل ريسنر عندما يتم تقليل الحالة الأخيرة من الحالة ثنائية الأبعاد (اللوحة) إلى الحالة أحادية البعد (العتبة).

تم تقديم شكل جبري مناسب للحل وتم تقديم حالات دراسية جديدة لتوضيح إمكانية تطبيق الصيغة الحالية.

تم عرض النتائج العددية لتوضيح تأثير توزيع المسامية على (SCFs) لمختلف FGPBs. علاوة على ذلك، تم التحقق من صحة قانون تغيير الخواص الميكانيكية لعتبات FG بدون مسامية و SCF عددياً بالمقارنة مع بعض النتائج المتوفرة.

الكلمات المفتاحية: المواد المتدرجة وظيفيا، المسامية، القص المستعرض، عامل تصحيح القص.

Sommaire

ABSTRACT	i
RESUME	ii
خلاصة	iii
LISTE DES FIGURES	I
LISTE DES TABLEAUX	III
LISTE DES NOTATIONS	IV
Introduction générale	1
CHAPITRE I : « Généralité sur Les matériaux composites »	
I.1.Introduction	8
I.2 Les constituants des matériaux composites	8
I.3 Classification des matériaux composites	11
I.4 Architecture des matériaux composites	13
I.5 Endommagement des matériaux composites	15
I.6 Loi de comportement	16
I.7 Les avantages et les inconvénients des matériaux composites	19
I.8 Conclusion	21
CHAPITRE II : «Présentation générale sur Les matériaux à propriétés fonctionnellement graduées »	
II.1 Introduction	22
II 2 Le concept du matériau à propriétés fonctionnellement gradué	22
II.3 Technologie manufacturières pour la création des structures en FGM	23
II.4 Propriétés physiques et mécaniques des FGM	24
II.5 Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM	27
II.6 Les lois de la variation des propriétés matérielles d'une plaque FGM	29
II.7 L'applications des FGM dans le domaine de génie Mécanique	33
II.8 L'applications des FGM dans le domaine de génie Civil	34
II.9 Conclusion	35
CHAPITRE III : « Revue sur l'évolution des théories, les composites et les FGM »	
III.1 Introduction	36

III.2 Modèles représentant le comportement mécanique des structures composites et des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	36
III.3 Facteurs de correction du cisaillement transversal	40
III.4 Porosité	42
III.5 Conclusion	45
CHAPITRE IV : « Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées) »	
IV.1 Introduction	46
IV.2. Modèle et formulations théoriques	46
IV.3. Dérivation du facteur de correction de cisaillement I	52
IV.4. Conclusion	54
CHAPITRE V : « Validation et comparaison des résultats »	
V.1. Introduction	55
V.2- Résultats numériques	55
V.3. Facteur de correction de cisaillement pour les poutres FGP	58
V.3.1 Poutres FG sans porosité	58
V.3.2. Facteur de correction de cisaillement pour les poutres FGP lié au couple (k,n)	61
V.3.2.1 Distribution inégale de la porosité (uneven)	61
V.3.2.2 Distribution (log-uneven)	64
V.3.3 Facteur de correction de cisaillement pour les poutres FGP lié au couple (p,n)	65
V.3.3.1 Distribution inégale de la porosité (uneven)	65
V.3.3.2. Distribution de la porosité (log-uneven)	68
V.4. Effet du type de distribution de porosité par la comparaison des distributions uneven et log-uneven de la poutre FGP sur le facteur de correction de cisaillement SCF	68
V.5. Conclusion	70
Conclusions générales	71
Références	72

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE I

- Figure I.1 :** Quelques types de matrices couramment utilisées dans les matériaux composites 9
- Figure I.2 :** les principaux types de renforts 11
- Figure I.3 :** Constitution d'un stratifié 13
- Figure I.4 :** Types de stratifiés 14
- Figure I.5 :** Schéma d'un sandwich 14

CHAPITRE II

- Figure II.1 :** un composé en métal et en céramique 22
- Figure II.2 :** Un FGM avec les fractions de volume de phases constitutives graduées dans la direction verticale 27
- Figure II.3 :** Modèles analytiques pour une couche en FGM 28
- Figure II.4 :** Les dimensions de la plaque FGM 29
- Figure II.5 :** La variation du module de Young dans une plaque P-FGM 30
- Figure II.6 :** La variation du module de Young dans une plaque S-FGM 31
- Figure II.7 :** La variation du module de Young de la plaque E-FGM 32

CHAPITRE III

- Figure III.1 :** Cinématique de Love-Kirchhoff 37
- Figure III.2 :** Cinématique de Reissner-Mindlin 37
- Figure III.3 :** Cinématique de la théorie d'ordre supérieur 39
- Figure III.4 :** Distribution des contraintes de cisaillement 39
- Figure III.5 :** Approximations de la contrainte du cisaillement transversal 40

CHAPITRE IV

- Figure IV.1 :** Modèle de poutre poreuse fonctionnellement graduée 48

CHAPITRE V

- Figure V.1 :** Le module de Young $E(z)$ avec différentes valeurs d'indice de loi de différentes valeurs d'indice de loi de puissance k et différentes valeurs de paramètre de porosité P 56
- Figure V.2 :** Le module de Young $E(z)$ avec différentes distributions de porosité, puissance k sans porosité 57
- Figure V.3 :** La variation du module de Young avec une distribution en loi de puissance K (sans porosité) 58
- Figure V.4 :** Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG uneven $k=0.5$ et $\psi=0.2$ 60
- Figure V.5 :** Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG uneven $k=2$ et $\psi=0.2$ 61

Figure V.6 : Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG Log- uneven $k=0.5$ et $\psi=0.2$	63
Figure V.7 : Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG Log- uneven $k=2$ et $\psi=0.2$	63
Figure V.8 : Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG uneven $P=0.5$ et $\psi=0.2$	66
Figure V.9 : Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG uneven $P=5$ et $\psi=0.2$	66
Figure V.10 : Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG Log-uneven $P=0.5$ et $\psi=0.2$	67
Figure V.11 : Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG Log-uneven $P=5$ et $\psi=0.2$	67
Figure V.12 : Effect du type de distribution de porosité par la comparaison distributions uneven et log-uneven de la poutre FGP sur le SCF pour $Et/Eb=4$ et $\psi=0.2$	69
Figure V.13 : Effect du type de distribution de porosité par la comparaison distributions uneven et log-uneven de la poutre FGP sur le SCF pour $K=0.5$, $Et/Eb=4$ et $\psi=0.2$	69
Figure V.14 : Effect du type de distribution de porosité par la comparaison distributions uneven et log-uneven de la poutre FGP sur le SCF pour $K=5$, $Et/Eb=4$ et $\psi=0.2$	70

LISTE DES TABLEAUX

CHAPITRE V

Tableau V.1: La variation du module de Young avec une distribution en loi de puissance k (sans porosité)	57
Tableau V.2 : Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution de porosité -uneven avec $n=Et/Eb$ en fonction du paramètre de porosité P ($\xi=0.2$)	59
Tableau V.3 : Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution de porosité Log-uneven avec $n=Et/Eb$ en fonction du paramètre de porosité P ($\xi=0.2$)	62
Tableau V.4 : Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution de porosité uneven avec $n=Et/Eb$ en fonction de l'indice de loi de puissance K ($\xi=0.2$)	64
Tableau V.5 : Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution	65

de porosité Log-uneven avec $n=Et/Eb$ en fonction de l'indice de loi de puissance K ($\xi=0.2$)

Tableau V.6 : Comparaison de SCF poutre FG pour la distribution Uneven et Log-uneven 68

LISTE DES NOTATIONS

G : Module de cisaillement dans le plan (x, z)

E_1 : Module de Young longitudinal

E_2 : Module de Young transversal

E_c : Module de Young de la céramique

E_m : Module de Young du métal

ν : Coefficient de Poisson

$G(z)$: Module de cisaillement en fonction de « z »

$E(z)$: Module de Young en fonction de « z »

$\nu(z)$: Coefficient de Poisson en fonction de « z »

$V(z)$: Fraction volumique

\bar{Q}_{ij} : sont les constantes de rigidités

a : Longueur de la plaque

b : Largeur de la plaque

h : Epaisseur de la plaque

u_0, v_0 : Les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque

u, v, w : Les déplacements dans les directions x, y, z .

Φ : est la fonction des coordonnées x, y et t .

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: Contraintes normales

τ_{xz}, τ_{yz} : Contraintes de cisaillement

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$: Déformation dans la direction x, y et z

γ_{xz}, γ_{yz} : Déformations de distorsion

$\delta u, \delta v, \delta w$: Champ virtuel de déplacement

δU : la variation de l'énergie de déformation

δV : la variation de l'énergie potentielle

δK : est la variation de l'énergie cinétique

κ_s : facteur de correction de cisaillement

$\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z$: Champ de déformation longitudinal virtuel

$\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{xz}, \delta \gamma_{yz}$: Champ de déformation transversal virtuel

N_x, N_y, N_{xy} : Efforts normaux

M_x, M_y, M_{xy} : Moments de flexion

Q_{xz}, Q_{yz} : Effort de cisaillement

∂ : Dérivée partielle

ρ : est la densité de masse de la plaque

i et j : Sont des nombres naturels.

A_{ij} : Termes de rigidité en membrane de la plaque

B_{ij} : Termes de rigidité de couplage de la plaque

D_{ij} : Termes de rigidité de flexion de la plaque

$\{\Delta\}$: Le vecteur des déplacements généralisés

$\{\mathbf{p}\}$: Le vecteur des efforts généralisés

Introduction Générale

Introduction générale

Depuis l'aube du 20^e siècle jusqu'à nos jours, la conception technique des composites pour les applications structurelles qui demandent des rapports résistance-poids et rigidité-poids plus élevés dans les processus de fabrication est devenue une caractéristique qui fait la différence de la qualité des recherches dans ce domaine. Néanmoins, le problème des concentrations de contraintes développées aux interfaces entre les couches constitue un inconvénient majeur. Afin d'avoir une caractéristique importante des matériaux composites telle que l'élimination du délaminage et de la fissuration ; au milieu des années 1980, des chercheurs japonais ont conçu de nouveaux matériaux appelés « **Functionally Graded Materials** » (**FGM**). Cependant, ce concept a été proposé par Bever et Duwez (1972) et par plusieurs chercheurs aux États-Unis (Goetzel et Lavendel, 1964). Son exploitation dans les matériaux composites a été tentée sporadiquement dans les années 1950, 1960, 1970 et 1980. Cependant, ces études ont eu un impact limité à cette époque en raison de l'absence d'une conception, d'une méthode de fabrication et d'une méthode d'évaluation des structures graduées. Ces estimations initiales de l'avantage des FGM consistent en une variété de propriétés matérielles d'une surface à l'autre selon des règles mathématiques spécifiques dans des directions choisies fournissant une distribution continue des contraintes dans la structure FGM. Pour cette raison, les FGM classés parmi les matériaux composites avancés, ce qui a attiré de nombreux organismes de recherche (Koizumi, 1997 ; Suresh et Mortensen, 1998). Ces organismes ont focalisé leurs chercheurs sur des structures soumises au froid d'une part et au très chaud d'autre part. Ainsi, diverses méthodes ont été développées pour fabriquer les FGM telles que la coulée centrifuge à grande vitesse ; Procédé d'irradiation ultraviolette et technique d'oxydation directe, etc. Un certain nombre d'investigations ont été faites sur des poutres et des plaques FGM pour étudier leurs comportements statiques et dynamiques. Les plaques sont les éléments structurels couramment utilisés qui ont de nombreuses applications dans les industries aérospatiales, le génie civil et mécanique.

Introduction générale

Les matériaux poreux à gradient fonctionnel (FGP) sont un exemple de développement innovant dans l'industrie des matériaux et sont conçus pour être utilisés dans de nombreux secteurs. Leur réputation vient de leur rapport surface/volume élevé en phase de consolidation. De nos jours, les matériaux nanocomposites FGP sont produits en ajoutant des nanotubes de carbone (CNT) et des plaquettes de graphène (GPL) à l'échelle nanométrique à des matrices métalliques, céramiques ou polymères. Cet ajout améliore considérablement les propriétés d'absorption d'énergie des anneaux, arcs, poutres et plaques à parois minces. Ces matériaux sont couramment choisis pour une large gamme d'applications d'ingénierie, notamment la légèreté, la conductivité électrique, l'absorption d'énergie et la gestion thermique. Les matériaux FGP ont des propriétés physiques et matérialistes uniques résultant de leur composition ou de leur forme de microstructure, qui est spécifiquement ajustée pour répondre aux besoins d'opérations particulières. Le développement des FGP visait à réduire les fluctuations de contrainte dans les matériaux composites, et ils présentent des contraintes transversales et dans le plan réduites, une contrainte résiduelle minimisée, une résistance thermique élevée, une conductivité thermique minimisée et une ténacité à la rupture et une résistance aux contraintes inter laminaires élevées d'un point de vue technique.

Cependant, une analyse détaillée menée par Yas et Rahimi (2020) sur les nanocomposites FGP, en particulier sur la fraction de poids, les modèles de diffusion, la taille et la géométrie des plaquettes, ainsi que l'allocation et le coefficient de porosité, a révélé que les performances de fonctionnement des plaquettes de graphène (GPL) dépendent fortement de leurs géométries. Yas et Rahimi (2020) ont présenté une analyse des vibrations libres, du flambement et de la flexion des FG nanocomposites renforcés par des nanoplaquettes de graphène (GNP) sous des charges thermo-mécaniques. Les résultats ont montré que l'assemblage devient plus rigide à mesure que la fraction pondérale des PNP augmente, entraînant une augmentation de la fréquence propre et de la contrainte de flambement critique.

Introduction générale

Cependant, une température et une humidité élevées diminuent la rigidité, la fréquence naturelle et la charge de flambage critique Jalali et al. (2019). Safaei et al. (2019) ont étudié les effets des NTC et les propriétés de porosité des plaques sandwich nanocomposites poreuses et ont examiné les contraintes mécaniques et thermiques, la géométrie, les paramètres de fondation élastiques et les conditions aux limites qui ont un impact sur la répartition des charges et la flexion des PNSP

Diverses théories des plaques ont été proposées par les chercheurs pour étudier les comportements de flexion, de flambage et de vibration libre des plaques FG minces et épaisses. En raison de sa grande efficacité et de sa simplicité, la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) a été utilisée pour analyser des plaques FG modérément épaisses. Plusieurs auteurs ont proposé des modèles prenant en compte l'effet de cisaillement transversal. Basé sur la théorie classique des stratifiés CPT, FSDT et la théorie des plaques de déformation par cisaillement de troisième ordre (TSDT), un travail complet sur les vibrations libres, le flambage et les déviations statiques des plaques FG carrées, circulaires et obliques, avec différentes combinaisons de limites conditions, a été réalisée par Abrate (2006). Ferreira et al. (2006) ont utilisé la méthode de collocation avec des fonctions de base radiales multiquadriques ainsi que le FSDT et le TSDT pour trouver les fréquences naturelles des plaques carrées FG avec différentes conditions aux limites. Zhao et al. (2009) ont présenté une analyse de vibration libre pour les plaques carrées et obliques FG avec différentes conditions aux limites en utilisant la méthode KP-Ritz sans élément utilisant le FSDT.

Le terme nécessaire, utilisé dans le FSDT, est le facteur de correction de cisaillement SCF qui modifie l'effet de la contrainte transversale uniforme dans les efforts tranchants, qui est principalement égal à $5/6$ dans les plaques homogènes isotropes. Nour et al. (Noor et al. 1989, 1990) ont proposé des procédures prédicteur-correcteur pour corriger le SCF en utilisant un processus d'itération. Les SCF obtenus à partir de cette méthode dépendent des conditions aux limites, de la géométrie de la plaque et des conditions de chargement, et par conséquent, ils ne peuvent pas être directement appliqués à d'autres configurations de plaque. L'introduction

Introduction générale

de considérations énergétiques dans les stratifiés composites, afin de calculer les SCF, se trouve dans (Whitney 1973, Bert 1973, Vlachoutsis 1992, Berthelot 1996) présenté pour les poutres composites une analyse simplifiée du SCF statique par la dérivation de son expression pour les poutres à plis croisés stratifiés. Whitney (Whitney 1973) a présenté les résultats de cette analyse. En comparant l'énergie de déformation de cisaillement avec la poutre Timoshenko équivalente, Bert et Gordaninejad (1983) ont développé une solution de forme fermée pour la poutre laminée.

Birman et Bert (2002) ont fait un examen important et une discussion des philosophies et des résultats de la détermination du SCF pour les sections transversales rectangulaires homogènes ainsi que le cas des structures en sandwich.

Sur la base des hypothèses cinématiques cohérentes de la théorie des poutres de Timoshenko, Madabhusi-Raman et Davalos (1996) présentent une approche d'ingénierie incluant la déformation par cisaillement transverse, dans la formulation de la mécanique des poutres laminées (MLB) de poutre rectangulaire.

Les propriétés du matériau dans les plaques FG varient dans le sens de l'épaisseur, en pratique et en raison de l'utilisation d'erreurs SCF constantes dans les résultats; Timoshenko a montré que le SCF dépend du coefficient de Poisson (Timoshenko 1922). Récemment, de nombreuses études ont été réalisées sur la formulation de SCF dans des plaques FGM. Efraim et Eisenberger (2007) ont considéré les fractions volumiques et le coefficient de Poisson des deux gradients. Nguyen et al. (2006) ont utilisé FSDT pour modéliser les structures de matériau à gradient de fonction de loi de puissance (P-FGM) en présentant ce facteur en termes de rapport de module de Young céramique-métal et d'indices de gradient pour examiner l'analyse statique.

Certains chercheurs ont essayé d'améliorer ces facteurs pour obtenir des résultats plus précis pour les vibrations des plaques. En général, les FSDT sont utilisés pour déterminer la déformation de cisaillement transverse à travers l'épaisseur. La précision de FSDT est influencée par la précision du SCF utilisé dans la théorie pour calculer les forces de cisaillement transversales. La plupart des études se sont concentrées sur la dérivation des SCF pour les poutres composites stratifiées

Introduction générale

et très peu d'efforts ont été consacrés à la dérivation des SCF pour les poutres (FGP). En utilisant le principe d'équivalence énergétique et l'équation intégrale simplifiée permettent d'avoir une expression générale des SCF statiques dans la FGPB dérivable sous une forme algébrique, qui se réduit à l'expression courante des matériaux isotropes rapportés dans la littérature. Par ailleurs, l'étude de l'effet de la sur la réponse statique des plaques se retrouve dans les études présentées par Chi et Chung (2006) et Nguyen et al. (2006).

Afin de comprendre le comportement statique et dynamique des structures en FGM, en tenant compte de l'effet de la porosité, diverses études intéressantes ont été développées par Reddy (2002), Wattanasakulpong et al. (2014), Mouaïci et al. (2016), Saidi et al. (2019), et Merdaci et al. (2019).

D'autre part, divers développements théoriques récents ont été étudiés sur les structures poreuses FGM. Chen et al. (2016) étudient la réponse élastique en flambement et en flexion d'une poutre FG poreuse basée sur la théorie des poutres de Timoshenko. De plus, Chen et al. (2016) ont étudié la vibration libre non linéaire d'un noyau sandwich poreux avec une poutre FG. La vibration libre et la réponse en flexion des plaques poreuses supportées par différents types de contraintes aux limites ont été analysées par Rezaei et Saidi (2015, 2016, 2017). Une théorie de déformation par cisaillement quasi-3D a été utilisée pour examiner la réponse statique des plaques monocouches et sandwich poreuses FGM par Zenkour (2018). L'analyse des vibrations libres et de la flexion des plaques FGM poreuses de type Levy a été étudiée par Demirhan et Taskin (2019). Dans une plaque mince S-FGM basée sur le modèle CPT non linéaire, Wang et Zu (2017) ont introduit deux types de distribution de porosité, en utilisant la méthode Galerkin dans l'analyse des vibrations. Singh et Harsha (2020b) ont étudié l'effet de la porosité et de la température sur une plaque sandwich S-FGM. Les recherches dans le domaine des plaques FGM à effet de porosité et à fondation élastique restent limitées. Contrairement au FSDT conventionnel et aux théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur, Sadoun et al. (2014) ont proposé un nouveau FSDT simple qui ne contient que quatre inconnues. Ils ont conclu que la théorie proposée est précise

Introduction générale

et simple pour résoudre les comportements de flexion statique et de vibration libre des plaques composites stratifiées et que les solutions analytiques des stratifiés à plis croisés et à plis angulaires antisymétriques simplement supportés sont précises par rapport aux solutions tridimensionnelles (3D) exactes. . La détermination du facteur de correction de la contrainte de cisaillement transversale (SCF) pose un problème pour compenser l'hypothèse selon laquelle la déformation de cisaillement est uniforme sur toute la profondeur de la section. Mena et al. (2012) ont présenté une expression générale pour évaluer ces facteurs (SCF) pour les poutres rectangulaires FGM générales.. Le SCF des poutres FG n'est pas le même que celui des poutres homogènes et il est fonction du rapport entre les modules élastiques des constituants et le paramètre matériau p . Le SCF des FGM sigmoïdes (S-FG) est légèrement inférieur à celui des faisceaux en loi de puissance (P-FG) lorsque le paramètre de matériau est inférieur à l'unité ($p < 1$) et pour le paramètre de matériau p supérieur à l'unité ($p > 1$). Le SCF du faisceau P-FG est inférieur à celui du faisceau S-FG, contrairement au cas où $p < 1$.

Le présent travail de thèse vise à étudier l'effet de la porosité sur le SCF de la poutre poreuse FG en utilisant un nouveau modèle analytique. La porosité inégale et la distribution inégale logarithmique à travers l'épaisseur du FGPB sont sélectionnées ici pour l'analyse. Plusieurs paramètres tels que les rapports d'épaisseur, les fractions volumiques et les types de distribution sont également étudiés.

L'axe de recherche développé dans travail se concentre sur l'étude de l'effet de la porosité sur le facteur de correction de cisaillement (SCF) d'une poutre poreuse fonctionnellement graduée (FG). s'articule autour de deux aspects principaux à savoir :

- L'aspect théorique :
 - Chapitre I : Généralité sur Les matériaux composites

Il aborde les concepts de base, les types de matériaux composites, les lois qui régissent leur comportement et leurs applications.

Introduction générale

- Chapitre II : Généralité sur Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM :

Il se concentre sur l'explication du concept ,leurs fabrications, Propriétés physiques et mécaniques, Propriétés matérielles effectives, les lois qui régissent la variation des propriétés matérielles et leur applications dans différents domaines.

- **Chapitre III :**

Il examine les différentes théories qui s'appliquent aux structures en composites ou FGM. En mettant l'axe sur la discussion de deux points pertinents de notre contexte de recherche à savoir Vous pourriez analyser ces théories, expliquer comment elles s'appliquent aux matériaux à gradients de propriétés, et discuter de leur pertinence dans le contexte de votre recherche le facteur de correction du cisaillement transversal et la Porosité.

- **L'aspect Analytique :** IL est scindé en deux chapitres
 - **Chapitre IV :** Toutes les formulations pour l'analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées.
 - **Chapitre V :** Comprend la validation et la comparaison des résultats.

Conclusion et perspectives.

CHAPITRE I

« Généralité sur les matériaux composites »

I.1.Introduction :

Les matériaux composites sont des matériaux qui résultent de la combinaison de deux ou plusieurs types de matériaux distincts, chacun conservant ses propriétés distinctives. Ces matériaux composites sont conçus pour exploiter les avantages spécifiques de chacun de leurs constituants. Berthelot J-M,(1996).

I.2.Les constituants des matériaux composites :

Les principaux constituants des matériaux composites sont la matrice et les renforts. Daniel Gay.(1997).

I.2.1.Matrice : La matrice est le composant qui enveloppe et maintient les renforts ensemble. Elle peut être sous forme de polymères (plastiques), métaux, céramiques ou polymères thermodurcissables. La matrice transfère les charges aux renforts, protège ces derniers contre les agressions environnementales et contribue à la résistance globale du matériau composite.

Il existe différents de matrice utilisés dans les matériaux composites, et le choix de la matrice dépend souvent des propriétés recherchées dans le matériau final. Voici quelques types de matrices **la figure(I.1)** couramment utilisées dans les matériaux composites Berthelot J-M. (1996) :

I.2.1.a-Matrices polymères (matrices polymères renforcées de fibres) :

- Résines époxy : Elles offrent une excellente adhérence aux fibres et une résistance chimique élevée.
- Résines polyester : Elles sont moins coûteuses, mais offrent une résistance chimique moindre par rapport aux époxydes.
- Résines vinylester : Elles présentent des caractéristiques intermédiaires entre les résines époxy et polyester.

I.2.1.b-Matrices métalliques :

- Les alliages métalliques, tels que l'aluminium, le titane ou le magnésium, peuvent être utilisés comme matrices dans certains composites métalliques.

I.2.1.c-Matrices céramiques :

Les matrices céramiques, comme l'oxyde d'aluminium, peuvent être utilisées dans les composites céramiques renforcés de fibres.

I.2.1.d--Matrices hybrides :

- Certaines applications peuvent utiliser des matrices hybrides, c'est-à-dire une combinaison de différentes matrices pour exploiter les avantages de chacune.

I.2.1.e-Matrices thermoplastiques :

Les polymères thermoplastiques, tels que le polypropylène renforcé de fibres de verre, sont également utilisés comme matrices dans certains composites.

Le choix de la matrice dépend des propriétés spécifiques recherchées, telles que la résistance mécanique, la résistance à la corrosion, la conductivité thermique, etc.

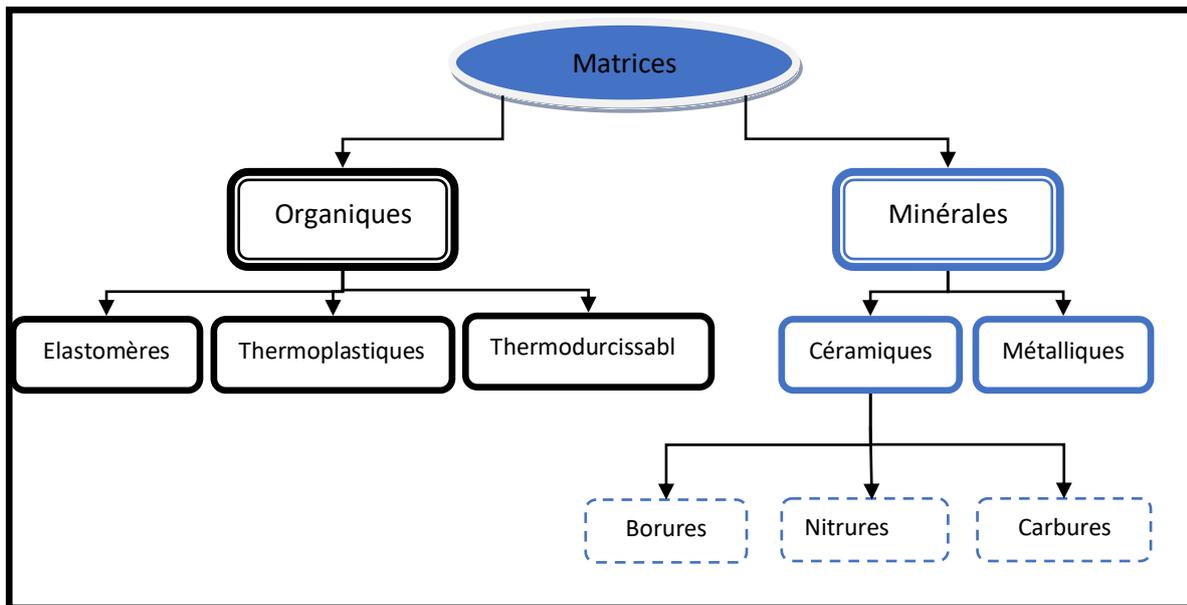


Figure I.1 : Quelques types de matrices couramment utilisées dans les matériaux composites.

I.2.2.Renforts :

Les renforts sont les matériaux incorporés dans la matrice pour améliorer les propriétés mécaniques du matériau composite. Ils peuvent être sous forme de fibres courtes, de fibres longues, de particules ou de tissus. Les renforts couramment utilisés comprennent la fibre de verre, la fibre de carbone, la fibre d'aramide (comme le Kevlar), les nanotubes de carbone, etc. Chaque type de renfort a des

Chapitre I :Généralité sur les matériaux composites

propriétés spécifiques qui influencent les caractéristiques du matériau composite final.

Ils peuvent être classés en plusieurs types, (**figure (I.2)**) en fonction de la nature des fibres ou des particules utilisées. Les principaux types de renforts pour les matériaux composites sont les suivants :

I.2.2.a-Fibres de verre : Les fibres de verre sont largement utilisées comme renfort dans les composites en raison de leur légèreté, de leur résistance à la corrosion et de leur coût relativement faible.

I.2.2.b-Fibre de carbone :Les fibres de carbone offrent une excellente résistance spécifique et une rigidité élevée. Elles sont couramment utilisées dans des applications nécessitant une légèreté et une résistance exceptionnelles, telles que l'aérospatiale, l'automobile de haute performance et les équipements sportifs.

I.2.2.c-Fibres d'aramide (comme le kevlar) :Les fibres d'aramide sont connues pour leur résistance élevée à la traction, leur faible poids et leur résistance aux produits chimiques. Elles sont souvent utilisées dans des applications nécessitant une résistance balistique, telles que les gilets pare-balles, ainsi que dans d'autres applications où la résistance et la légèreté sont cruciales.

I.2.2.d- Fibres naturelles : certaines fibres naturelles, telles que le lin et le chanvre, sont également utilisées comme renforts dans les composites. Elles sont appréciées pour leur légèreté, leur renouvelabilité et leur faible coût environnemental.

I.2.2.e- Particules de céramique : Les particules de céramique peuvent être incorporées comme renforts dans les composites pour améliorer leur résistance à l'usure, à la chaleur et à la corrosion.

I.2.2.f-Nanotubes de carbone : Ces nanotubes offrent des propriétés exceptionnelles en termes de résistance et de conductivité électrique. Ils sont utilisés dans des applications de pointe telles que la nanotechnologie et les matériaux composites haute performance.

Chapitre I :Généralité sur les matériaux composites

Le choix du type de renfort dépend souvent des propriétés spécifiques requises pour l'application particulière, telles que la résistance, la rigidité, la légèreté, la conductivité, etc.

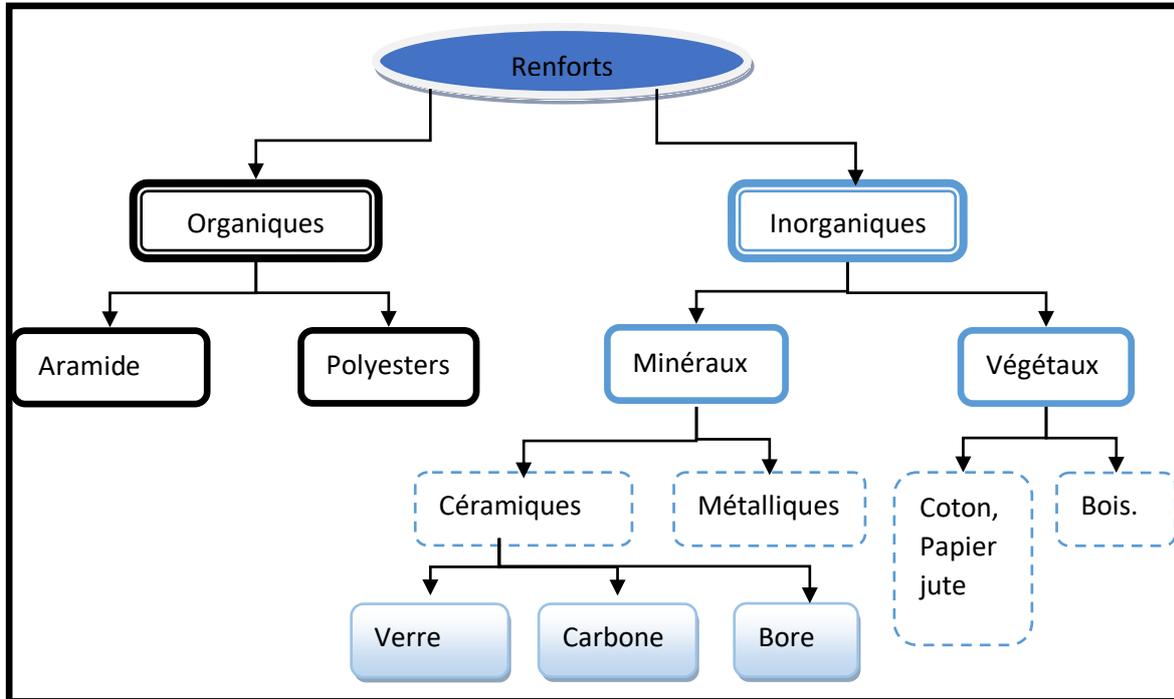


Figure I .2: Les principaux types de renforts

I.3. Classification des matériaux composites

La classification des matériaux composites peut se faire en fonction de différents critères, tels que la nature des composants, la matrice utilisée, la géométrie de renforcement, etc. Voici une classification générale basée sur certains de ces critères :

I.3.1-Selon la nature des composants :

- **Matrices polymères** : Les composites polymères sont constitués d'une matrice polymère renforcée par des fibres. Par exemple, les composites à matrice de résine époxy renforcée de fibres de carbone ou de verre.
- **Matrices métalliques** : Certains composites utilisent des matrices métalliques, comme les composites à matrice métallique renforcée de particules céramiques.

I.3.2-Selon la géométrie du renforcement :

Chapitre I :Généralité sur les matériaux composites

- **Fibres continues** : Les fibres sont longues et continues, offrant une résistance dans la direction de la fibre. Exemple : composites en fibres de carbone.
- **Fibres courtes** : Les fibres sont courtes et dispersées dans la matrice, offrant une résistance isotrope. Exemple : composites à matrice polymère renforcée de fibres de verre courtes.
- **Particules** : Des particules, souvent sous forme de poudre, sont dispersées dans la matrice. Exemple : composites à matrice métallique renforcée de particules céramiques.

I.3.3-Selon la direction de renforcement :

- **Isotropes** : Les propriétés du matériau sont uniformes dans toutes les directions.
- **Anisotropes** : Les propriétés du matériau varient selon la direction. La plupart des composites, en raison de l'orientation des fibres, sont anisotropes.

I.3.4-Selon la phase de renforcement :

- **Particulaires** : Le renforcement se fait sous forme de particules.
- **Fibreux** : Le renforcement se fait sous forme de fibres.
- **Stratifiés** : Les matériaux sont stratifiés en couches, chacune ayant une orientation différente des fibres.

I.3.5-Selon la température de traitement :

- **Composites thermodurcissables** : La matrice polymère subit une réaction de durcissement irréversible lors de la fabrication
- **Composites thermoplastiques** : La matrice polymère reste réversible et peut être ramollie et reformée sous l'effet de la chaleur.
- Il est important de noter que ces classifications ne sont pas mutuellement exclusives, et de nombreux composites peuvent appartenir à plusieurs catégories en même temps en fonction de différents critères.

I.4.Architecture des matériaux composites

I.4.1-Composites stratifiés :

Les composites stratifiés offrent une grande flexibilité de conception en permettant d'ajuster les propriétés mécaniques en fonction des besoins spécifiques de chaque application. Ces matériaux sont donc très prisés dans l'ingénierie moderne pour la fabrication de pièces structurelles performantes.

- Elles sont composées de couches successives (**figure.I.3**) de renforts (fils ou tissus unidirectionnels) imprégnés de résines. Berthelot J-M,(1996).

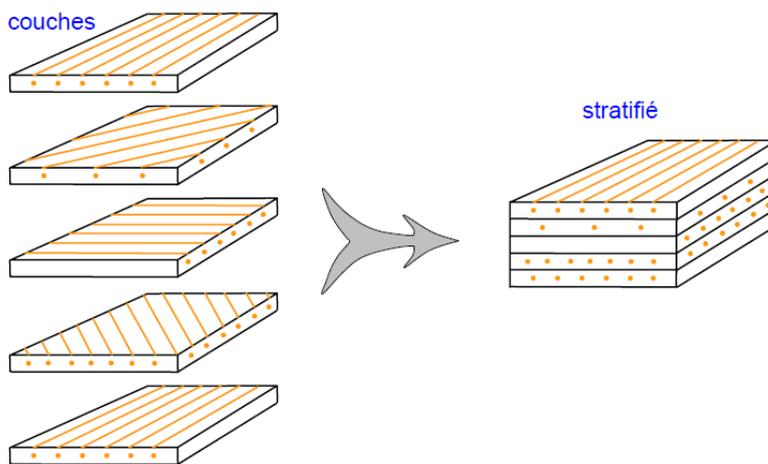


Figure I.3 : constitution d'un stratifié

- Ces couches sont souvent appelées plis.
- Lors de la fabrication des pièces structurelles, les nappes sont empilées de manière à optimiser les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent supporter.
- On pourra avoir des stratifiés de type (**figure I.4**) :
- Equilibré :stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta^0$ que de couches orientée suivant la direction $-\theta^0$
- Symétrique : stratifié comportant des couches disposées symétriquement par un rapport à un plan moyen.
- Orthogonal :stratifié comportant autant de couches à 00 que de couches à 900

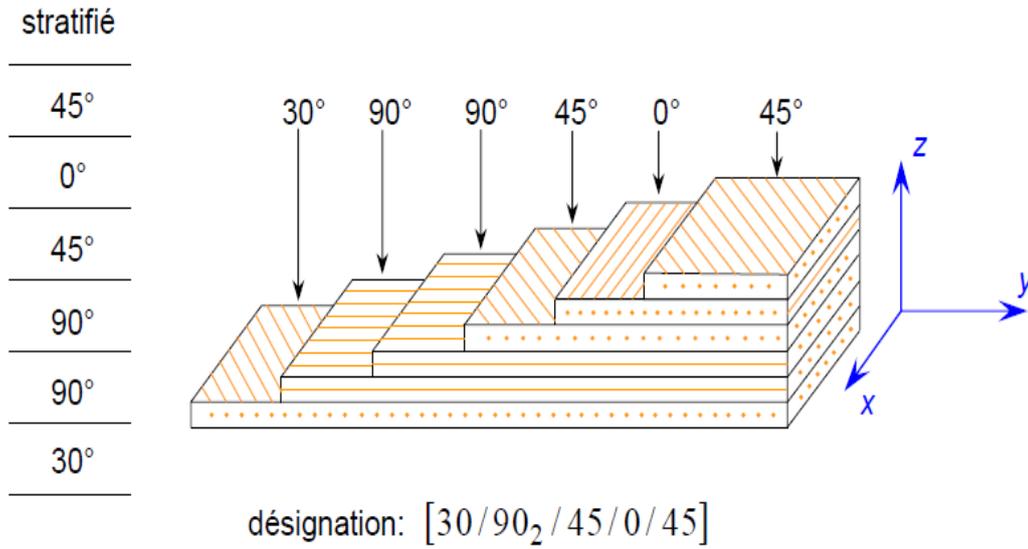


Figure I.4 types de stratifié

I.4.2-Architecture en sandwich : certains composites ont une architecture en Une structure sandwich (figure I.5) qui est un type de structure composée de deux couches externes appelées semelles ou peaux, qui sont liées à un matériau central appelé âme. Ces trois composants travaillent ensemble pour créer une structure légère mais rigide. Les semelles ou peaux sont généralement en matériaux composites, tels que des fibres de verre ou de carbone renforcées par une résine. L'âme peut être constituée de divers matériaux légers tels que le nid d'abeille en aluminium, le polystyrène, ou d'autres matériaux cellulaires.

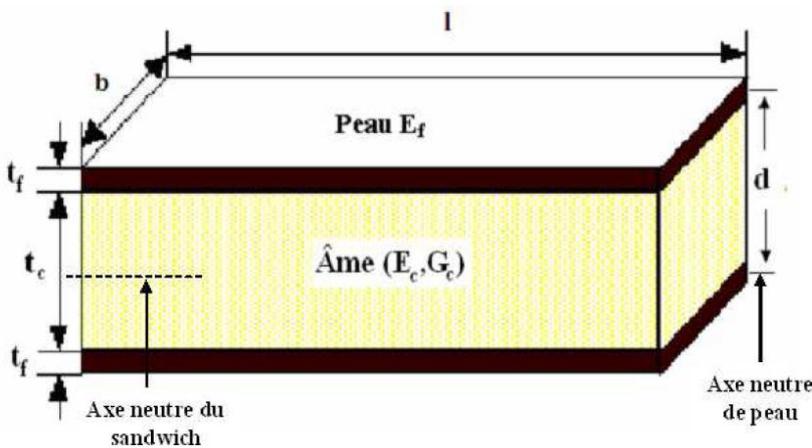


Figure I.5 : Schéma d'un sandwich (Sudharsan M.(2003)).

Chapitre I :Généralité sur les matériaux composites

Cette conception de structure sandwich offre plusieurs avantages, notamment une résistance élevée avec un poids léger. En utilisant des matériaux légers pour l'âme, on peut réduire le poids total de la structure tout en maintenant une rigidité adéquate. De plus, la disposition en sandwich permet d'obtenir une bonne résistance en flexion et en torsion.

L'assemblage par collage ou soudure est souvent utilisé pour fixer les différentes couches ensemble. Le collage est couramment utilisé dans le cas de matériaux composites, car il offre une liaison solide tout en minimisant les points faibles potentiels associés aux méthodes de fixation traditionnelles.

Cette structure sandwich est largement utilisée dans divers domaines tels que l'industrie aérospatiale, l'industrie automobile, la construction navale, et d'autres applications où la combinaison de légèreté et de résistance est essentielle.

I.5. Endommagement des matériaux composites

Comme tout matériau, les composites peuvent subir des dommages sous l'influence de divers facteurs. Voici quelques-uns des principaux modes de dommages auxquels les matériaux composites peuvent être exposés :

- **Impact** : les composites peuvent être sensibles aux impacts, surtout s'ils sont constitués de couches minces de fibres. Un impact soudain peut causer des fissures, des délaminations ou même des fractures dans les composites. - --- -
- **Délamination** : la délamination se produit lorsqu'il y a séparation entre les couches d'un composite. Cela peut être causé par des impacts, une charge excessive ou des défauts de fabrication.
- **Fatigue** : les composites peuvent subir des dommages cumulatifs lorsqu'ils sont soumis à des charges cycliques répétées. Cela peut entraîner la formation de fissures et la détérioration progressive des propriétés mécaniques.
- **Exposition aux environnements agressifs** : certains environnements, tels que l'exposition à des produits chimiques, à l'eau salée ou à des températures extrêmes, peuvent provoquer la dégradation des propriétés des composites.

Chapitre I :Généralité sur les matériaux composites

- **Vieillessement** : les composites peuvent subir un vieillissement dû à l'exposition prolongée à des conditions environnementales, ce qui peut entraîner une diminution des propriétés mécaniques.
- **Dégradation thermique** : une exposition à des températures élevées peut causer la dégradation des résines utilisées dans les composites, entraînant une perte de résistance et de rigidité.
- **Exposition aux rayonnements** : certains composites peuvent être sensibles aux rayonnements, tels que les rayons ultraviolets, ce qui peut provoquer une dégradation des propriétés.

Pour minimiser ces risques, il est essentiel de concevoir, fabriquer et utiliser les composites de manière appropriée, en tenant compte des contraintes auxquelles ils seront soumis dans leur application spécifique. Les techniques de fabrication avancées, la surveillance des dommages et les méthodes de réparation peuvent également contribuer à prolonger la durée de vie utile des matériaux composites.

I.6. Loi de comportement

L'étude du comportement mécanique d'un stratifié est effectuée dans le domaine de la macro-mécanique (Jones R.M.,(1998)), par la loi de comportement qui est une relation d'élasticité linéaire entre les champs des déformations et des contraintes dans un milieu peut être exprimée sous forme matricielle à l'aide de la loi de Hooke généralisée qui est une approximation valable pour les matériaux qui se déforment de manière élastique, c'est-à-dire qu'ils retrouvent leur forme initiale après avoir subi une déformation. Cette relation est souvent utilisée pour modéliser le comportement élastique des matériaux dans des conditions où les déformations sont petites. La relation générale entre les déformations(ϵ) et les contraintes (σ) dans trois dimensions peut être écrite de manière matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

Ou sous la forme condensée:
$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (I.2)$$

$$\sigma = C * \varepsilon \quad (I.3)$$

Avec [C] est la matrice de rigidité relie les contraintes aux déformations a21 constantes indépendantes de rigidité (Cij) dans le cas général, en raison de la symétrie de la matrice.et aussi elle permet de prendre en compte l'anisotropie du matériau et de décrire son comportement élastique de manière plus précise, en tenant compte des différences de propriétés dans différentes directions.

I.6.1.Matrice de flexibilité

La matrice de flexibilité relie les déformations aux forces appliquées est l'inverse de l'équation (I.1) soit

$$\varepsilon = S * \sigma \quad (I.4)$$

Avec S la matrice de souplesse

$$S = C^{-1} \quad (I.5)$$

Ces matrices sont des outils mathématiques utilisés pour résoudre les équations qui décrivent le comportement d'une structure déformable.

$$\varepsilon = S * \sigma \quad (I.4)$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (I.6)$$

Avec Sij les constantes de flexibilité

I.6.2. Matériau monoclinique

Ce matériau a trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, ce qui signifie qu'il présente des propriétés différentes selon trois axes orthogonaux.

la loi de Hooke se résume à l'expression suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

[C] est réduite à 13

I.6.3. Matériau orthotrope

Ce matériau a trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, ce qui signifie qu'il présente des propriétés différentes selon trois axes orthogonaux.

On pourrait utiliser neuf constants élastiques distincts pour décrire son comportement élastique le long de trois axes :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.8)$$

I.6.4. Matériau transversalement isotrope

Dans le cas d'un matériau unidirectionnel, il est probablement orthotrope dans le sens de la fibre (direction des fibres) et dans deux directions perpendiculaires à la fibre ; la matrice est :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (I.9)$$

I.6.5. Matériau isotrope

Un matériau isotrope est un matériau dont les propriétés physiques sont les mêmes dans toutes les directions. Cela signifie que les propriétés mécaniques, thermiques et électriques du matériau ne dépendent pas de l'orientation spatiale. En d'autres termes, quel que soit le sens dans lequel on mesurant ou on appliquant une contrainte sur le matériau, ses caractéristiques restent constantes.

$$C_{11} = C_{22}, C_{12} = C_{23}, C_{66} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2} = \frac{C_{11} - C_{22}}{2} \quad (\text{I.10})$$

La matrice de rigidité d'un tel matériau est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

I.7 Les avantages et les inconvénients des matériaux composites

I.7.1 Les avantages:

- **Légèreté** : Les composites sont généralement plus légers que de nombreux matériaux traditionnels tels que le métal. Cela peut être un avantage crucial dans des applications telles que l'aérospatiale et l'automobile, où la réduction du poids est cruciale pour améliorer l'efficacité énergétique.
- **Résistance** : les matériaux composites peuvent être conçus pour être très résistants tout en restant légers. Ils sont souvent utilisés dans des applications nécessitant une haute résistance mécanique, comme la construction d'avions et de pièces automobiles.

Chapitre I :Généralité sur les matériaux composites

- **Résistance à la corrosion** : contrairement à certains métaux, les composites ne rouillent pas et sont résistants à la corrosion. Cela les rend appropriés pour des applications en milieu marin ou dans des environnements corrosifs.
- **Flexibilité de conception** : les composites offrent une grande flexibilité en termes de conception. Ils peuvent être formés dans des formes complexes et adaptés à des besoins spécifiques, permettant une plus grande liberté créative dans la conception de produits.
- **Isolation électrique** : certains composites présentent d'excellentes propriétés d'isolation électrique et thermique, ce qui les rend appropriés pour des applications telles que les panneaux électriques et les composants électroniques.
- **Durabilité** : les composites peuvent avoir une durée de vie plus longue que certains matériaux traditionnels en raison de leur résistance à la corrosion et à d'autres formes de dégradation.

I.7.2. les inconvénients :

- **Coût initial élevé** : la fabrication de certains composites peut être coûteuse en raison des matériaux spécialisés et des processus de fabrication avancés nécessaires.
- **Difficulté de recyclage** : certains composites peuvent être difficiles à recycler en raison de la combinaison de matériaux différents. Cela peut poser des problèmes environnementaux et de gestion des déchets.
- **Sensibilité à la chaleur** : certains composites peuvent perdre leurs propriétés sous des températures élevées, limitant leur utilisation dans des environnements où la chaleur est un facteur important.
- **Difficulté de réparation** : En cas de dommages, la réparation des composites peut être plus complexe que celle des matériaux traditionnels. Cela peut entraîner des coûts et des délais plus importants lors de la maintenance.

Chapitre I :Généralité sur les matériaux composites

- **variabilité des propriétés** : la qualité des composites peut varier en fonction du processus de fabrication, ce qui peut entraîner des variations dans les propriétés mécaniques du matériau.

Il est important de noter que les avantages et les inconvénients des matériaux composites dépendent fortement de leur utilisation spécifique et des exigences de l'application. Les progrès continus dans la recherche et la technologie visent à atténuer certains des inconvénients associés aux composites.

I.8. Conclusion

Les matériaux composites offrent un potentiel considérable dans divers domaines en raison de leurs caractéristiques exceptionnelles. Cependant, leur adoption et leur perfectionnement continus nécessitent une recherche et un développement constants pour surmonter les défis associés à leur fabrication, leur durabilité et leur recyclabilité.

CHAPITRE II

« Présentation générale des matériaux à propriétés
fonctionnellement graduées »

II.1. Introduction

Les matériaux à propriétés fonctionnellement gradués, en anglais "Functionally Graded Materials" (FGM) représentent une avancée significative dans le domaine des matériaux et de l'ingénierie. Ces matériaux sont conçus pour optimiser localement différentes propriétés, permettant ainsi une adaptation plus précise aux exigences spécifiques de chaque application.

II 2- le concept

Les matériaux à propriétés fonctionnellement graduées (FGM) sont des conçus pour avoir des propriétés qui varient de manière graduée à travers leur épaisseur. Cela permet d'optimiser les performances du matériau en fonction des exigences spécifiques dans différentes parties de la structure. Un type d'un matériau FGM (figure II.1) est composé de métaux et de céramiques est souvent utilisé pour exploiter les avantages spécifiques de chaque matériau. Par exemple, le côté riche en métal peut être positionné dans les zones où des propriétés mécaniques élevées, telles que la dureté, sont nécessaires. D'autre part, le côté riche en céramique, a une résistance à la chaleur élevées, peut être placé dans les zones présentant des gradients de température importants.

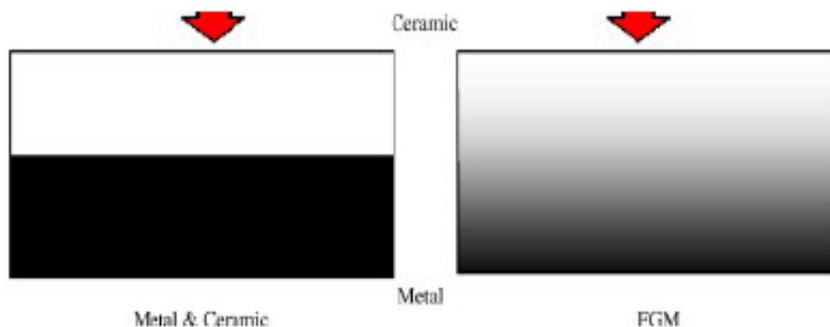


Figure. II.1: Un composé en céramique et en métal.

Ces matériaux présentent des variations contrôlées de composition chimique, de structure microscopique ou de phases, ce qui leur confère des propriétés spécifiques.(**Figure. II.2**).

II.3. Technologie manufacturières pour la création des structures en FGM :

La mise en place de structures avec des conditions fonctionnelles variables en fonction de l'emplacement, nécessitant l'utilisation de matériaux spécifiques à des endroits précis dans la structure qui exige une compréhension approfondie des propriétés des matériaux et des exigences spécifiques de la structure et le choix de la technologie.

Plusieurs technologies manufacturières peuvent être envisagées, notamment :

- **Fabrication additive (impression 3D) :** La fabrication additive permet de créer des structures complexes avec des propriétés variables en déposant des matériaux couche par couche. Cela peut être utilisé pour fabriquer des pièces avec des gradients de propriétés.
- **Dépôt chimique en phase vapeur (CVD) :** la CVD est une technique de dépôt de couches minces qui peut être utilisée pour créer des revêtements avec des propriétés variables.
- **Méthodes de frittage sélectif au laser (SLS) :** Cette technique est souvent utilisée pour le traitement de poudres métalliques et peut être adaptée pour créer des structures avec des gradients de propriétés.
- **Méthodes de dépôt chimique en phase liquide (CVD) :** Similaire à la CVD, mais utilisant des précurseurs liquides pour créer des revêtements.
- **Techniques de traitement thermique :** Le contrôle précis des températures pendant le traitement thermique peut être utilisé pour obtenir des gradients de propriétés dans certains matériaux.

II.4 Propriétés physiques et mécaniques des FGM

Les propriétés physiques et mécaniques d'un type de matériau composé d'un mélange d'aluminium et de céramiques traité dans notre cas sont comme suit :

II.4.1 Aluminium : ses propriétés peuvent varier en fonction des alliages utilisés et des traitements thermiques appliqués. Les alliages d'aluminium sont créés en mélangeant l'aluminium avec d'autres métaux pour améliorer certaines propriétés spécifiques.

II.4.1.1.Les propriétés physiques de l'aluminium :

- **Masse volumique :** Environ $2,70 \text{ g/cm}^3$. L'aluminium est léger, ce qui en fait un matériau idéal pour des applications nécessitant une faible masse.
- **Point de fusion :** $660,32 \text{ }^\circ\text{C}$. L'aluminium a un point de fusion relativement bas, facilitant son traitement et sa mise en forme.
- **Couleur :** Argenté brillant. Il ne rouille pas, ce qui le rend approprié pour des applications en extérieur.
- **Réflexion :** L'aluminium a une bonne réflectivité pour la lumière et les radiations thermiques.
- **Conductivité thermique et électrique :** L'aluminium a une excellente conductivité électrique bien qu'il soit inférieur à celui du cuivre. Cependant, en raison de sa légèreté, il est souvent utilisé dans des applications nécessitant un poids réduit. . Cela le rend utile dans des applications telles que les câbles électriques et les composants électroniques, il a aussi une excellente conductivité thermique, ce qui le rend adapté à des applications telles que les dissipateurs de chaleur.

II.4.1.2.Les propriétés mécaniques de l'aluminium :

- **Résistance à la traction :** Variable en fonction du traitement thermique et mécanique, mais généralement entre 70 et 700 MPa.
- **Module d'élasticité :** Environ 70 GPa. Cela mesure la rigidité d'un matériau.

Chapitre II :Présentation générale des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées

- **Ductilité** :L'aluminium est ductile, ce qui signifie qu'il peut être étiré en fils fins sans se rompre.
- **Ténacité** :La ténacité de l'aluminium dépend du type d'alliage et du traitement thermique. Certains alliages peuvent avoir une bonne résistance aux chocs.
- **Résistance à la corrosion** :L'aluminium forme une couche d'oxyde protectrice qui le protège contre la corrosion. Cependant, dans des environnements très corrosifs, des revêtements protecteurs peuvent être nécessaires.
- **Usinabilité** :L'aluminium est généralement facile à usiner en raison de sa malléabilité.
- **Soudabilité** :L'aluminium peut être soudé, bien que certaines alliages puissent nécessiter des techniques spéciales.

II.4.2 Céramique :

La céramique peut être fabriquée à partir de diverses matières premières, y compris des argiles, des minéraux, des terres, des roches broyées, et d'autres composants. Cependant, il est important de noter que la céramique n'est pas généralement obtenue par fusion, comme c'est le cas pour certains métaux. La céramique est souvent façonnée à partir de poudres finement broyées qui sont ensuite cuites pour former des matériaux solides.

II.4.2.1.Les propriétés physiques des céramiques : La céramique a des propriétés physiques distinctes. Contrairement aux métaux, la fusion n'est pas une caractéristique courante des céramiques. Au lieu de cela, elles sont souvent formées par des processus tels que le moulage, le pressage, ou la fabrication à partir de poudres compactées.

- **Dureté** : Les céramiques sont généralement très dures, ce qui signifie qu'elles résistent à la déformation et à l'usure.
- **Fragilité** : La plupart des céramiques sont fragiles et ont une faible résistance à la traction. Elles ont tendance à se casser plutôt qu'à se déformer lorsqu'elles sont soumises à des contraintes.
- **Isolants thermiques électriques** : Les céramiques ont souvent de bonnes propriétés d'isolation thermique et électrique en raison de leur structure atomique.

Chapitre II :Présentation générale des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées

- **Résistance à la corrosion :** De nombreuses céramiques sont résistantes à la corrosion chimique, ce qui les rend appropriées pour des applications dans des environnements agressifs.
- **Stabilité thermique :** Les céramiques peuvent résister à des températures élevées sans subir de changements significatifs de leurs propriétés.
- **Poids léger :** En général, les céramiques ont une densité plus faible que les métaux, ce qui les rend légères.

II.4.2.2.Les propriétés mécaniques des céramiques :

Ces propriétés peuvent varier considérablement en fonction du type spécifique de céramique et de son traitement thermique.

- **Résistance à la compression :** Les céramiques peuvent avoir une résistance élevée à la compression, ce qui les rend appropriées pour des applications où la charge est principalement axiale.
- **Module d'élasticité des céramiques :** est généralement élevé, ce qui signifie qu'elles ont une rigidité élevée. Il est une propriété mécanique importante dépend du type de céramique, de sa microstructure, de la température, de la pression, et d'autres facteurs.
- **Ténacité :** Bien que les céramiques soient souvent fragiles, certaines céramiques techniques ont une certaine ténacité qui leur permet de résister à des charges de choc.
- **Coefficient de dilatation thermique :** Les céramiques peuvent avoir un coefficient de dilatation thermique relativement faible, ce qui peut être important pour des applications nécessitant une stabilité dimensionnelle à des températures variables.
- **Comportement viscoélastique :** Les céramiques peuvent avoir un coefficient de dilatation thermique relativement faible, ce qui peut être important pour des applications nécessitant une stabilité dimensionnelle à des températures variables.

II.5. Propriétés matérielles effectives d'un matériau FGM

Pour avoir des propriétés qui varient graduellement, généralement en mélangeant deux phases matérielles avec des propriétés distinctes. Cette conception permet d'optimiser les performances du matériau qui est un objectif clé pour la création de nouveaux matériaux pour des applications spécifiques dans différentes zones de la structure. La microstructure des FGM est conçue de manière à ce que la fraction de chaque phase varie de manière graduée selon une direction spécifique(Figure. II.2). [Yin et.al.(2004)].Les propriétés matérielles effectives, aussi appelées propriétés macroscopiques, désignent les caractéristiques observables d'un matériau à l'échelle globale, prenant en compte la structure interne, les propriétés microscopiques, et d'autres facteurs. Ces propriétés peuvent être différentes de celles des composants individuels du matériau en raison des interactions complexes à l'échelle macroscopique.

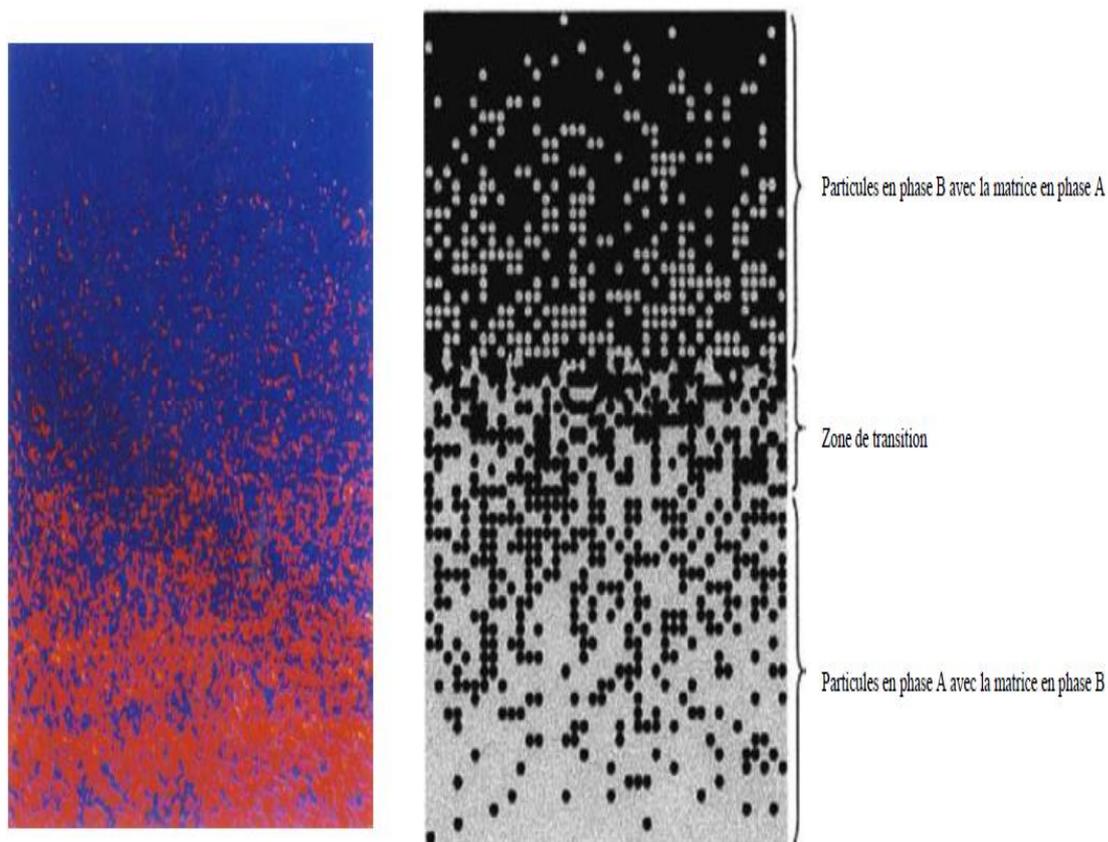


Figure. II.2 :La répartition relative des différentes phases d'un matériau dans le sens vertical.

Chapitre II :Présentation générale des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées

En conséquence, les propriétés effectives du matériau, telles que la conductivité thermique, la conductivité électrique, la dureté, la résistance mécanique, etc., changent de manière continue le long de cette direction.

Le FGM peut être modélisé par deux approches possibles (figure. II.3)

- Fraction de volume dans chaque couche quasi homogène de céramique-métal (figure. II.3a)
- Fraction volumique de la céramique ou du métal (figure. II.3b) peut être représentée suivant une fonction dépendante de la coordonnée Z.

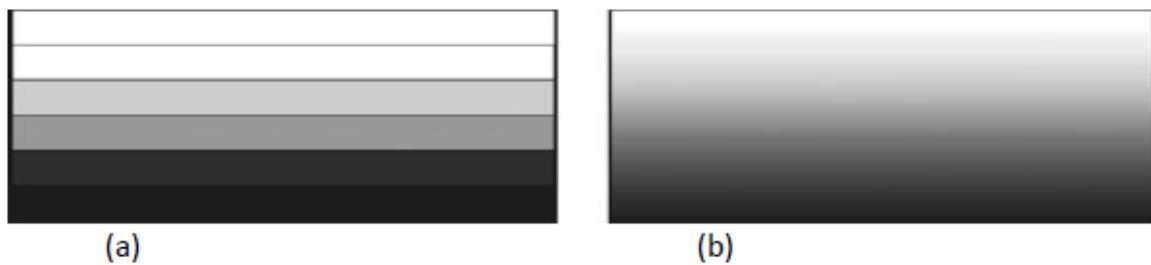


Figure.II.3 : Modèles analytiques pour une couche en FGM.

II.6. Les lois de la variation des propriétés matérielles d'une plaque FGM

Soit une plaque élastique rectangulaire son plan est défini par les coordonnées x, y ; ses propriétés matérielles par exemple, le module de Young et la densité qui varient uniquement le long de l'axe de l'épaisseur (z) suivant une fonction de puissance P , Sigmoïde S ou fonction exponentielle qui a son axe d'origine sur la surface moyenne de la plaque (Figure II.4).

$E = E(z)$, $\rho = \rho(z)$ Avec le coefficient de Poisson supposé constant , [F. Delale, F. Erdogan. (1983)]

II.6.1 Propriétés matérielles de la plaque P-FGM

La répartition volumique dans les P-FGM est déterminée par une loi de puissance exprimée comme suit :

Chapitre II :Présentation générale des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées

$$g(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^P \quad (\text{II.1})$$

Où h représente l'épaisseur et P un paramètre du matériau. Une fois que la fraction de volume local $g(z)$ est définie, les propriétés peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$S(z) = g(z).S_1 + [1 - g(z)].S_2 \quad (\text{II.2})$$

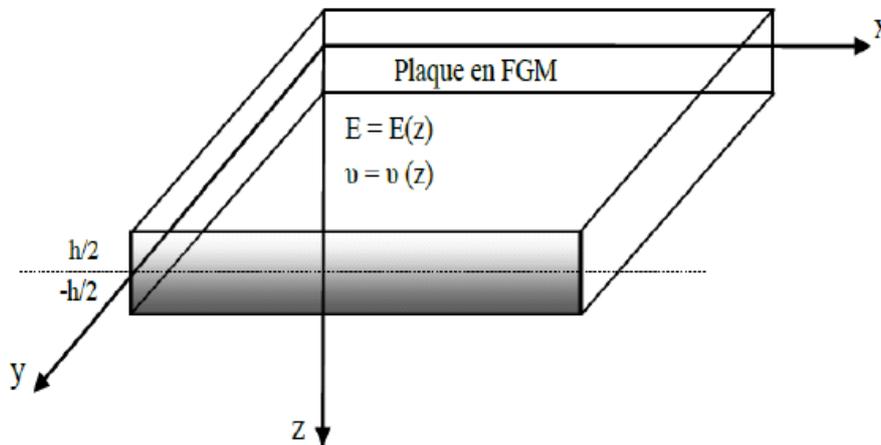


Figure II.4 : Une de la plaque FGM.

Où S_1 et S_2 sont respectivement Les propriétés matérielles telles que les modules de Young ou la densité de la surface inférieure ($z=h/2$) et supérieure ($z=-h/2$) de la plaque FGM sont représentées sur la figure II.5 qui indique aussi une variation significative dans la direction de de l'épaisseur de la plaque P-FGM. Il est observé que le module de Young, subit des changements rapides à proximité de la surface inférieure pour $P > 1$, tandis qu'il augmente rapidement près de la surface supérieure pour $P < 1$.

La variation de la valeur de P engendre une multitude infinie de distributions de composition. Afin de représenter de manière précise les caractéristiques matérielles des FGM, il est nécessaire d'établir une relation entre les propriétés. Cela est accompli

Chapitre II :Présentation générale des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées

grâce à une loi simple de mélange de matériaux composites, également connue sous le modèle de Voigt. Les propriétés matérielles effectives S de la couche de FGM, telles que le module de Young E , la densité ρ , et le coefficient de Poisson ν , peuvent alors être exprimées de la manière suivante :

$$S = \sum_{j=1} S_j \cdot g_j \quad (\text{II.3})$$

où S_j et g_j sont les propriétés matérielles et la fraction volumique de la couche jj (Figure.II.3.a),et la somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\sum_{j=1} g_j = 1 \quad (\text{II.4})$$

II.6.2 Propriétés matérielles de la plaque S-FGM

Si l'on rajoute une plaque P-FGM, caractérisée par une simple fonction de loi de puissance, à une plaque composite multicouche, des concentrations de contraintes se manifestent à l'interface des deux matériaux. Afin d'obtenir une répartition optimale des contraintes à travers toutes les interfaces, Chi et Chung (2006) ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en recourant à deux fonctions de loi de puissance. Les paramètres de ces deux fonctions de loi de puissance sont les suivants :

$$g_1(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.5.a})$$

$$g_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.5.b})$$

En utilisant la loi des mélanges, la propriété S de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$S(z) = g_1(z) \cdot S_1 + [1 - g_1(z)] \cdot S_2 \quad \text{Pour } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II.6.a})$$

$$S(z) = g_2(z) \cdot S_1 + [1 - g_2(z)] \cdot S_2 \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II.6.b})$$

Chapitre II :Présentation générale des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées

La figure II.5 montre que la variation du module de Young selon les équations (II.6.a) et (II.6.b).

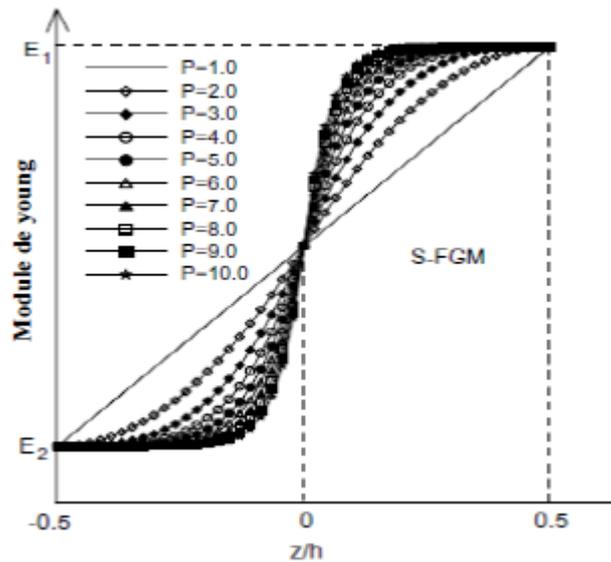


Figure II. 5 : La variation du module de Young dans une plaque S-FGM.

II.6.3 Propriétés matérielles de la plaque E-FGM

la fonction exponentielle est donnée par [F. Delale, F. Erdogan. (1983)] pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM.

$$S(z) = A.e^{B.(z+h/2)} \quad (\text{II.7.a})$$

Avec

$$A = S_2 E_t \quad B = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad (\text{II.7.b})$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure II.6.

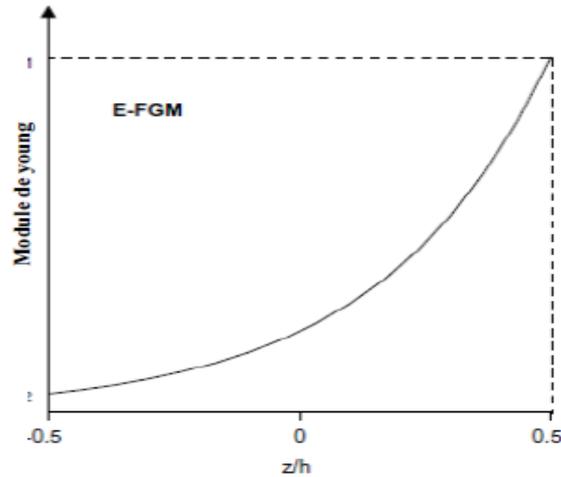


Figure II. 6 : La variation du module de Young de la plaque E-FGM.

II.7. L'applications des FGM dans le domaine de génie Mécanique

L'utilisation des FGM dans le génie mécanique offre une flexibilité significative dans la conception de structures optimisées en termes de performances et de poids. Cela peut contribuer à améliorer l'efficacité des composants dans diverses industries Il sont souvent utilisés pour :

- résoudre des problèmes spécifiques liés aux contraintes mécaniques, thermiques ou aux environnements agressifs. Voici quelques points clés sur les matériaux à gradient de fonction
- ajuster les propriétés thermiques et mécaniques d'un matériau. Par exemple, une turbine peut être construite avec un matériau dont la conductivité thermique augmente de la base vers le haut pour mieux gérer les variations de température.
- les revêtements résistants à l'usure, les composants structurels pour l'aérospatiale, les pièces de moteurs, etc. Ils peuvent être particulièrement utiles pour concevoir des structures légères tout en maintenant des propriétés spécifiques là où elles sont nécessaires.
- offre une flexibilité significative dans la conception de structures optimisées en termes de performances et de poids. Cela peut contribuer à améliorer l'efficacité des composants dans diverses industries.

II.8. L'applications des FGM dans le domaine de génie civil Hermann, (2017)

- Les FGM sont des matériaux dont les propriétés varient graduellement à travers leur épaisseur, ce qui les rend adaptés à différentes applications, y compris celles dans le domaine de génie civil.

II.8.1-Gradation fonctionnelle des éléments des éléments en béton

- **Alignement des propriétés :** En ajustant la composition interne des composants structurels, les FGM permettent d'aligner les propriétés du matériau, telles que la porosité, la résistance et la rigidité, avec des exigences spécifiques de performance structurelle et thermique.
- **Modification continue des caractéristiques :** Le changement graduel des composants en béton permet une altération continue des propriétés du matériau dans toutes les dimensions spatiales. Cela peut conduire à une minimisation de la porosité pour améliorer les caractéristiques structurelles, tout en maximisant la porosité pour optimiser l'isolation thermique et le poids propre du composant.

II.8.2-Utilisation dans le renforcement et la réhabilitation :

- **Structure en béton armé :** Les FGM sont utiles pour le renforcement et la réhabilitation d'éléments structuraux en béton armé tels que poutres, dalles, colonnes et murs.
- **Avantages économiques malgré le coût élevé :** Bien que les FGM puissent avoir un coût initial élevé, leur mise en œuvre directe sur les structures par moulage au contact, à travers des procédés tels que la polymérisation in-situ ou la stratification directe, présente des avantages économiques. Cela réduit les coûts liés à la manipulation des matériaux et minimise les interruptions des activités des ouvrages réparés.
- **Economies à long terme :** En renforçant les éléments existants plutôt que de les remplacer, les FGM peuvent contribuer à prolonger la durée de vie des structures, ce qui peut se traduire par des économies à long terme.

L'application des FGM dans le domaine du génie civil offre des avantages significatifs en termes d'adaptabilité des propriétés des matériaux, de

Chapitre II :Présentation générale des matériaux à propriétés fonctionnellement graduées

renforcement structurel et de réduction des coûts liés à la réhabilitation des structures en béton.

II.9. Conclusion

Les matériaux à propriétés fonctionnellement graduées (FGM) représentent une approche novatrice en raison de leur capacité à moduler les propriétés matérielles de manière continue à travers leur épaisseur pour répondre aux défis de conception et d'optimisation des performances dans une variété d'applications, offrant des avantages significatifs en termes de polyvalence et de fonctionnalité optimisée, ce qui les distingue des matériaux composites conventionnels.

CHAPITRE III

« Revue sur l'évolution des théories, les composites et les
FGM»

III.1.Introduction

Les structures composites sont des matériaux fabriqués à partir de la combinaison de deux ou plusieurs matériaux distincts, ayant des propriétés différentes, pour exploiter les avantages de chacun. Dans le domaine de l'élasticité, plusieurs modèles peuvent être considérés pour représenter le comportement mécanique de ces structures.

III.2. Modèles représentant le comportement mécanique des structures composites et des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) :

Ces modèles peuvent être adaptés en fonction des caractéristiques spécifiques de la structure composite étudiée, comme la géométrie, les matériaux constitutifs, les conditions aux limites, etc. Il est important de choisir le modèle approprié en fonction des exigences de la conception et de l'analyse de la structure.

III.2.1.Modèle des plaques minces- Love-Kirchhoff- : Les modèles classiques Love-Kirchhoff reposent sur certaines hypothèses simplificatrices(**Figure.III.1**) :

- suppose que les déformations normales et de cisaillement sont petites et que les plans normaux restent normaux après la déformation. Cela signifie que les déformations normales à la surface médiane de la plaque restent petites.
- stipule que la déformation transversale est négligeable par rapport aux déformations dans le plan de la plaque. Cela signifie que l'épaisseur de la plaque reste constante pendant la déformation.
- Les déplacements verticaux (dans la direction normale à la plaque) sont négligés dans la plupart des modèles Love-Kirchhoff. Seuls les déplacements dans le plan de la plaque sont pris en compte.

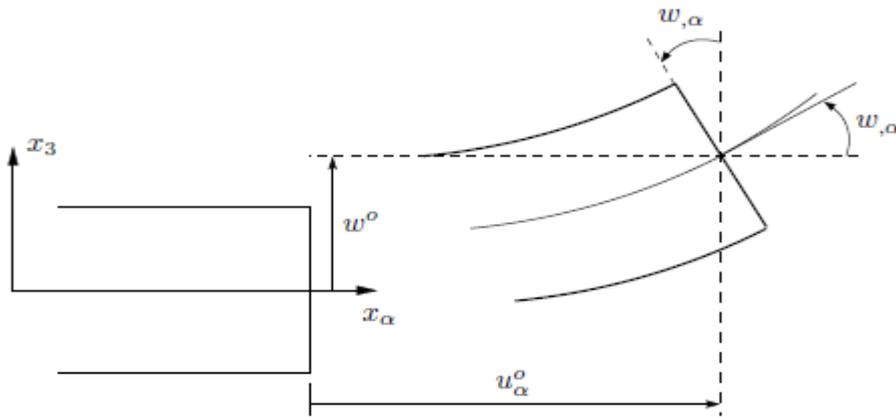


Figure. III. 1 : Cinématique de Love-Kirchhoff.

III.2.2. Les modèles Reissner-Mindlin :

est une des formes spécifiques de La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (**FSDT, First-Order Shear Deformation Theory**), elle considère que les déformations transversales (cisaillements) ne sont pas négligeables, contrairement à la théorie de Kirchhoff qui les ignore. Cette approche est particulièrement adaptée pour modéliser des plaques dont l'épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions. Elle prend en compte les déformations de cisaillement, ce qui permet de mieux représenter le comportement de la plaque dans des situations où les déformations transversales sont significatives (**Figure.III.2**).

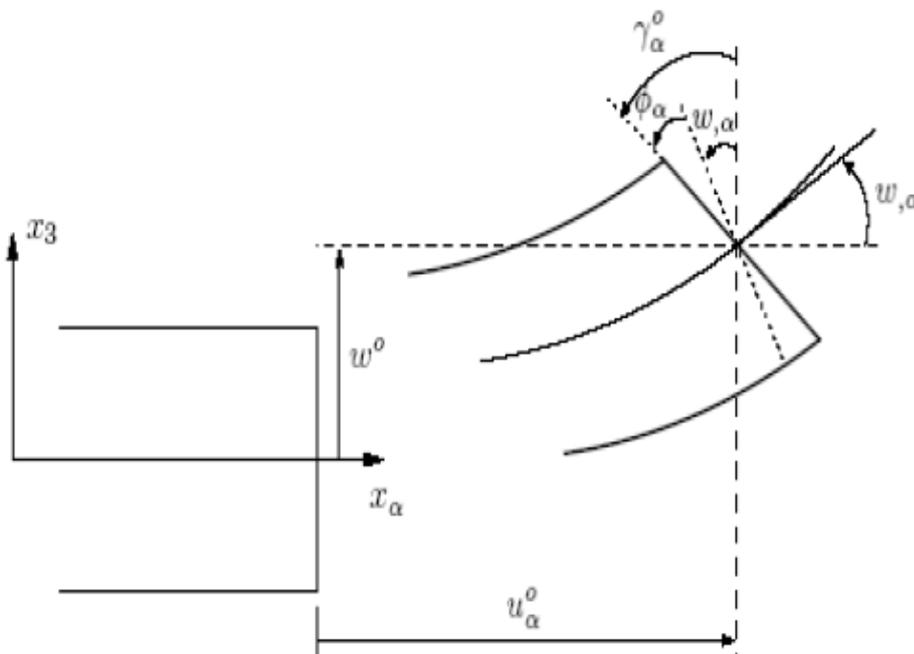


Figure. III.2 : Cinématique de Reissner-Mindlin.

III.2.3.Les modèles d'ordre supérieur

Pour dépasser les limitations des théories du premier ordre, plusieurs auteurs suggèrent l'adoption de théories d'ordre supérieur. Ces modèles reposent sur une distribution non linéaire des champs en fonction de l'épaisseur. Ils offrent la possibilité de représenter la déformation de la section dans la configuration déformée, comme illustré dans la Figure III.3 par Liberscu (1967), Whitney (1973), Touratier (1991), et Nguyen (2004). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacement, exprimés sous la forme suivante :

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z\phi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2\phi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3\phi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4\phi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{III.1})$$

Partons de ce principe, nous pouvons utiliser différents ordres, en fonction de la complexité du problème et de la précision souhaitée. La plupart des études sont basées sur un développement en 3ème ordre, assurant ainsi un niveau minimum de complexité. La valeur de $\phi_j^{0(i)}$ détermine la nature de la théorie. Ainsi, la théorie du

premier ordre de Reissner-Mindlin est obtenue en posant : $\phi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2,3,4$ et $\phi_3^{0(1)} = 0$.

En règle générale, les modèles de plus d'ordre supérieur démontrent une précision accrue par rapport à leurs homologues de premier ordre. La précision s'accroît en fonction de l'ordre de développement, correspondant au nombre croissant de paramètres additionnels. Cependant, satisfaire les conditions aux limites sur les bords pose des défis, et le nombre de variables de déplacement indépendantes dépasse celui des modèles conventionnels. Afin de réduire le nombre de paramètres de déplacement, diverses simplifications sont avancées. Il est courant d'imposer la nullité des contraintes de cisaillement transverse aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement en série de Taylor est utilisé avec $\phi_i^{o(4)} = \phi_i^{o(2)} = \phi_i^{o(1)} = 0$, $\phi_i^{o(3)}$, $\alpha = \{1,2\}$. Le champ de déplacement devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^o(x_1, x_2) - zw_{,\alpha} + f(z)\gamma_\alpha^o(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Il est important de noter que l'utilisation de modèles d'ordre supérieur implique généralement une augmentation de la complexité des calculs, ce qui peut nécessiter des ressources computationnelles plus importantes. Les avantages de cette approche sont donc généralement pesés par rapport aux exigences spécifiques de l'analyse et aux ressources disponibles.

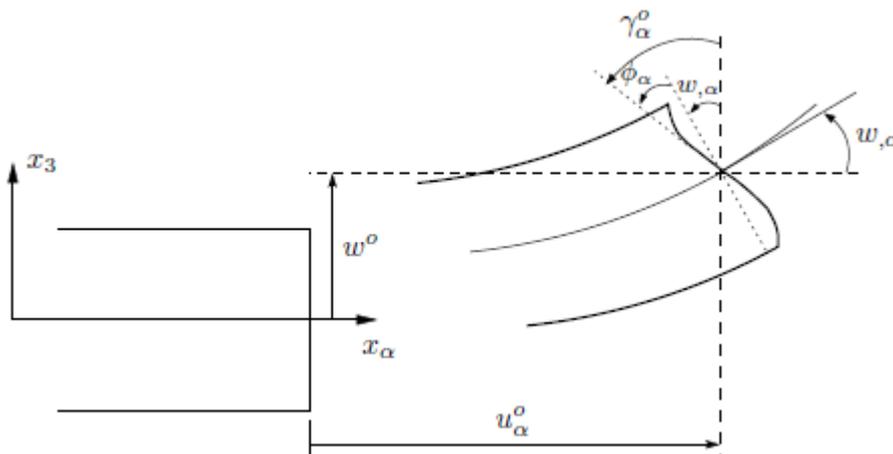


Figure .III.3 : Cinématique de la théorie d'ordre supérieur.

III 2.4. Résumé sur les théories du premier ordre et d'ordre supérieur:

Un premier choix du champ de déplacement est basé sur la théorie du premier ordre. En mécanique des matériaux, les structures composites sont souvent composées de plusieurs couches de matériaux ayant des propriétés différentes. Les contraintes et les déformations peuvent varier à travers l'épaisseur de ces couches en raison des propriétés distinctes des matériaux constitutifs. Cependant, dans certaines analyses simplifiées, il est parfois pratique de supposer que ces variations sont négligeables ou constantes pour faciliter les calculs.

Il est important de noter que cette hypothèse de contraintes et de déformations constantes à travers l'épaisseur peut être valable dans certaines conditions spécifiques, mais elle peut ne pas refléter la réalité dans toutes les situations. Les chercheurs et ingénieurs font souvent des compromis entre la précision du modèle et la complexité

de l'analyse pour obtenir des résultats pratiques tout en tenant compte des contraintes de temps et de ressources.

En effet, les contraintes de cisaillement sont quadratiques à travers l'épaisseur (Figure.III.4). Pour corriger les contraintes de cisaillement transversal, dont l'expression est issue de la théorie du premier ordre, des facteurs de corrections doivent être introduits Achraf TAFLA.(2007)

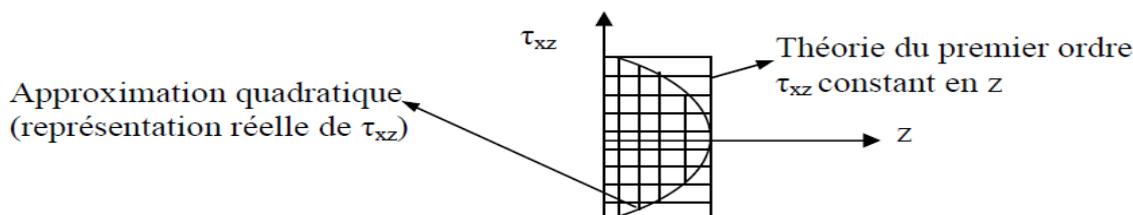


Figure.III.4. Aspects de la contrainte du cisaillement transversal.

III .3.Facteurs de correction du cisaillement transversal

III .3.1 Le concept du facteur :

En mécanique des matériaux, le cisaillement transversal se réfère à la déformation due à des forces qui agissent perpendiculairement à l'axe principal d'un matériau. Les facteurs de correction peuvent être associés à des théories qui tentent de modéliser et de corriger ces déformations. La théorie du 1er ordre pourrait faire référence à une approche simplifiée ou à une approximation initiale du comportement du matériau en présence de cisaillement transversal. Les contraintes de cisaillement, d'autre part, sont généralement déduites des équations d'équilibre, qui établissent que les forces et les moments agissant sur un matériau sont équilibrés. Le processus de calcul peut impliquer une comparaison entre l'énergie de cisaillement transverse calculée en utilisant la théorie du 1er ordre et celle obtenue à partir des contraintes de cisaillement. Si une différence significative est observée, des facteurs de correction peuvent être introduits pour améliorer la précision du modèle. la comparaison entre l'énergie de cisaillement du 1er ordre et celle associée à la théorie d'ordre supérieur. Cela suggère que des théories plus avancées, prenant en compte des effets d'ordre supérieur, peuvent être utilisées pour affiner la modélisation du cisaillement transversal et obtenir des résultats plus précis. Globalement, ces facteurs sont introduits pour ajuster les modèles

Chapitre III :Revue sur l'évolution des théories, les composites et les FGM

théoriques et améliorer leur adéquation aux comportements réels des matériaux en présence de cisaillement transversal.

III .3.2 . L'intérêt de calcul de l'effet du facteur de correction du cisaillement :

Choa a élaboré une méthode permettant de calculer les facteurs de correction en comparant l'énergie de cisaillement résultante de la théorie du premier ordre avec celle déduite des équations d'équilibre. L'objectif principal consiste à dériver des facteurs de correction initiale entre la théorie de la flexion de plaques du premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques efficace d'ordre élevé. Ces facteurs de correction peuvent être appliqués pour ajuster les déformations de cisaillement transversal, atténuant ainsi l'impact de la rotation de l'angle de cisaillement (γ).Choa et al (2000).

La démonstration de l'effet du facteur de correction du cisaillement pour diverses poutres fonctionnellement graduées ; Manaa a fait une comparaison des résultats de la loi de puissance **P**, ou de la fonction sigmoïde **S** sont étudiés, les résultats obtenus montrent que le facteur de correction de cisaillement des poutres FG n'est pas le même que celui des poutres homogènes, et ils sont fonction du rapport entre les modules élastiques des constituants et du paramètre matériau **P**. Manaa et al. (2012). Nguyen a étudié un modèle s'avère approprié et efficace pour l'analyser le problème de vibration statique et libre des poutres FG sous une force axiale constante, basé sur la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre et il a démontré que Le facteur de correction du cisaillement n'est pas le même que celui de la poutre homogène, il est fonction de l'indice de loi de puissance, du contraste du matériau. Par conséquent, cela conduit à des différences de déplacement, de fréquence propre et de charge critique de flambement. L'inclusion de l'effet du coefficient de Poisson entraîne une diminution des déplacements et une augmentation des fréquences propres et des charges de flambement. Nguyen et al. (2013)

les facteurs de correction de cisaillement dépendant de la température sont étudiés à l'aide des modèles de faisceau pour les FGM à loi de puissance (P-), exponentielle (E-) et sigmoïde (S-). Les modèles structurels sont basés sur la théorie de déformation par cisaillement de premier ordre de la poutre (FSDTB) avec effets thermiques. Il est important que les effets thermiques soient pris en compte dans la détermination des

Chapitre III :Revue sur l'évolution des théories, les composites et les FGM

facteurs de correction du cisaillement. Comme les effets thermiques doivent augmenter, les facteurs de correction du cisaillement doivent inclure les effets thermiques. Ainsi, les effets thermiques influencent la localisation des surfaces neutres ainsi que le cisaillement. Singh et al. (2020) b.

Le modèle FSDT nécessite une valeur correcte des facteurs de correction de cisaillement pour calculer les forces de cisaillement transversales. Plusieurs auteurs se sont penchés sur ce sujet afin d'améliorer la FSDT. En pratique, le facteur de cisaillement obtenu est égal à $5/6$ pour des plaques homogènes isotropes. Mais cette valeur n'est a priori plus appropriée pour les analyses de plaques FG en raison de la variation continue des propriétés des matériaux FGM.

Pour corriger les facteurs de correction de cisaillement en utilisant un processus d'itération qui dépend des conditions aux limites, de la géométrie de la plaque et des conditions de chargement, et ne peuvent donc pas être directement appliqués à d'autres configurations de plaque. Les considérations énergétiques pour le calcul des coefficients de correction de cisaillement largement utilisés pour les stratifiés composites Nguyen et al. (2007).

III.4.Porosité

La porosité, ou la présence de pores ou de vides dans le matériau, peut avoir un impact sur ses propriétés mécaniques, thermiques et acoustiques ce qui engendre des implications importantes dans la conception de matériaux pour des applications où le comportement vibratoire est critique, comme dans les structures aérospatiales ou les dispositifs électroniques.

III.4.1 Coefficient de porosité : Le coefficient de porosité est un paramètre qui mesure le degré de porosité d'un matériau. La porosité d'un matériau se réfère à la proportion d'espaces vides, ou pores, par rapport au volume total du matériau. Ces pores peuvent contenir de l'air, de l'eau, ou d'autres substances, selon le type de matériau.

Il est exprimé en pourcentage et représente la fraction du volume total du matériau occupé par les pores. Un coefficient de porosité plus élevé indique donc une plus grande quantité de pores dans le matériau suivant la formule suivante :

Chapitre III :Revue sur l'évolution des théories, les composites et les FGM

coefficient de porosité(%)= (volume des pores / volume total du matériau)x100.

La porosité varie en fonction de divers facteurs, tels que la composition chimique du matériau, sa structure, et les conditions environnementales auxquelles il est soumis.

III.4.2. L'effet de la porosité

La porosité a des implications dans la performance, les propriétés et dans la conception de matériaux composites :

- **Résistance mécanique :** La présence de pores peut réduire la résistance mécanique du matériau composite. Les pores agissent comme des points de concentration de contraintes, ce qui peut conduire à des défaillances prématurées du matériau sous contrainte. Cela peut affecter la résistance à la traction, à la compression, et d'autres propriétés mécaniques.
- **Rigidité :** Les pores peuvent également réduire la rigidité du matériau composite. Les vides dans la structure compromettent la capacité du matériau à résister à la déformation, ce qui peut affecter sa stabilité dimensionnelle et sa réponse aux charges appliquées.
- **Poids :** La porosité contribue à la légèreté du matériau, mais elle peut aussi entraîner une réduction de la densité globale du composite. Cela peut être avantageux dans certaines applications où la légèreté est cruciale, mais cela peut également entraîner une baisse de la performance mécanique.
- **Propriétés thermiques :** La porosité peut rendre le matériau composite plus susceptible à la pénétration de substances chimiques. Cela peut être une considération importante dans des environnements où le matériau est exposé à des produits chimiques corrosifs.
- **Résistance chimique :** La porosité peut rendre le matériau composite plus susceptible à la pénétration de substances chimiques. Cela peut être une considération importante dans des environnements où le matériau est exposé à des produits chimiques corrosifs.

Chapitre III :Revue sur l'évolution des théories, les composites et les FGM

- **Processabilité** : La porosité peut influencer la facilité avec laquelle le matériau composite peut être fabriqué. La formation de pores indésirables pendant les processus de fabrication peut nécessiter des ajustements dans les méthodes de production pour minimiser la porosité.
- **Durabilité** : La présence de pores peut affecter la durabilité à long terme du matériau composite. Les vides peuvent servir de sites d'initiation de fissures, ce qui peut entraîner une dégradation progressive du matériau au fil du temps.
- Sur les plaques est considérable à mesure que le changement de température augmente.M.H. Shojaeefard et al. (2017).
- Des études basées sur la méthode théorique des plaques FGM de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'étude du comportement vibratoire d'une plaque fonctionnellement graduelle on considérant les types de distribution uniforme de la porosité montrent les effets du coefficient de porosité sur les fréquences fondamentales de la plaque pour différents rapports d'épaisseur, rapport géométrique, propriétés du matériau et indice de puissance du matériau sont significatifs ,Merdaci et al. (2019).

III.5.Conclusion

La revue sur l'évolution des théories, la modélisation et l'analyse des structures composites et des matériaux fonctionnellement gradués reflète un domaine de recherche dynamique où les avancées continues dans la compréhension théorique, la modélisation précise et l'analyse expérimentale contribuent à la conception et à l'optimisation de matériaux aux propriétés remarquables. Il est important de choisir le modèle approprié en fonction des exigences de la conception et de l'analyse de la structure. Pour ajuster ces modèles théoriques et améliorer leur adéquation aux comportements réels des matériaux en présence de cisaillement transversal ; les facteurs de correction du cisaillement transversal ainsi que la gestion de la porosité est un aspect critique de leur conception.

Chapitre III :Revue sur l'évolution des théories, les composites et les FGM

CHAPITRE IV

« Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction
de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement
graduées»

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

IV.1 Introduction

La détermination du facteur de correction de la contrainte de cisaillement transversale (SCF) pose un problème pour compenser l'hypothèse selon laquelle la déformation de cisaillement est uniforme sur toute la profondeur de la section. En utilisant le principe d'équivalence énergétique et l'équation intégrale simplifiée permettent d'avoir une expression générale des SCF statiques dans la FGPB dérivable sous une forme algébrique , qui se réduit à l'expression courante des matériaux isotropes

IV.2 Modèle et formulations théoriques

IV.2.1 poutre poreuse fonctionnellement graduée FGP

Nous considérons la poutre poreuse fonctionnellement graduée FGP faisceau FGP (voir Fig. IV .1) avec les paramètres géométriques : épaisseur h , longueur L et largeur b fabriqué à partir du mélange de céramiques et de métaux. Les propriétés du matériau sont supposées varier de manière continue d'une surface supérieure ($z = h/2$) à la surface inférieure ($z = -h/2$) selon une distribution de loi de puissance (k). La loi de modification des propriétés mécaniques $P(z)$ à travers l'épaisseur du faisceau FGP peut être exprimée comme suit (Houari et al. 2018, Shahsavari et al. 2018, Tran et al. 2021, Selmi 2021, A.almitani et al. 2021) :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k - \chi(z)(P_c + P_m) \quad ((IV .1))$$

Où P représente les propriétés des matériaux telles que le module de Young E , la masse volumique ρ , le coefficient de Poisson ν et le coefficient de dilatation thermique α . Les indices c et m désignent respectivement les constituants de la céramique et du métal. La fraction volumique de céramique et de métal variant dans l'épaisseur via la loi de puissance (k), $\chi(z)$ est le coefficient de la distribution de porosité et ξ soit le coefficient de porosité.

La relation entre $\chi(z)$ et ξ de chaque type de porosité, la distribution s'exprime comme suit

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

(Shahsavari et al. 2018, Tran et al. 2021):

- une distribution de porosité : (uneven):

$$\chi(z) = \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \quad \text{(IV .2a)} \quad (2a)$$

- une distribution de porosité : (Log-uneven):

$$\chi(z) = \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right) \log_{10} \left(\frac{\xi}{2} + 1 \right) \quad \text{(IV .2b)}$$

Dans le présent travail, nous proposons deux modèles nouveaux modifiés de la distribution de la porosité à travers l'épaisseur de la poutre FGP, inspirés des deux modèles proposés par (Shahsavari et al. 2018, Tran et al. 2021) in equation (IV .2a, IV. 2b) soient:

- une distribution de porosité : (uneven):

$$\chi(z) = \frac{\xi}{2} \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)^p \quad \text{(IV .3a)}$$

- une distribution de porosité : (Log-uneven):

$$\chi(z) = \left(1 - \frac{2|z|}{h} \right)^p \log_{10} \left(\frac{\xi}{2} + 1 \right) \quad \text{(IV .3b)}$$

Avec p est le paramètre de porosité

Les deux modèles proposés ci-dessus ont l'avantage de donner plusieurs formes de répartition de la porosité dans l'épaisseur de la structure et ce pour toute valeur de paramètre du matériau k .

La loi de modification des propriétés mécaniques $P(z)$ à travers l'épaisseur de la poutre FG sans porosité peut être facilement obtenue en fixant $\xi = 0$ en (IV .3), c'est-à-dire :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad \text{(IV .4)}$$

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

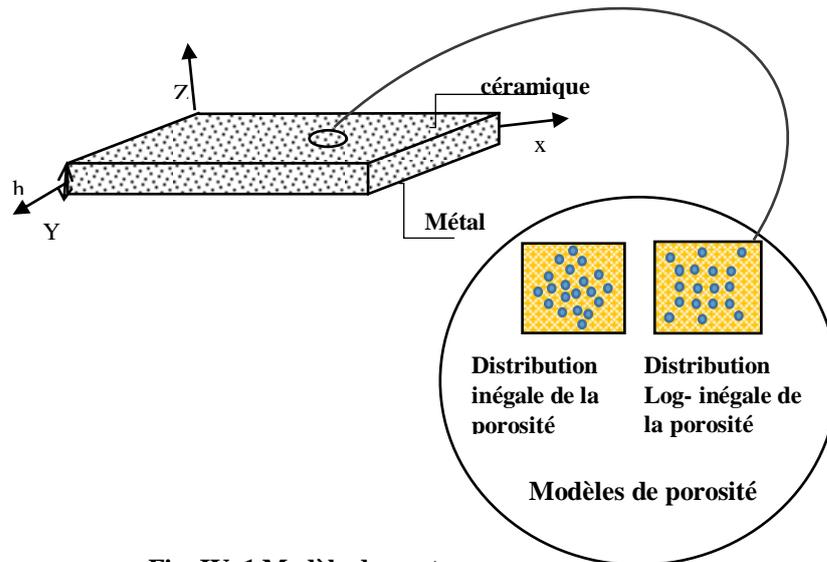


Fig. IV. 1 Modèle de poutre poreuse fonctionnellement graduée

IV.2.2. Relations constitutives

IV.2.2.1 Hypothèses de base

Les hypothèses de la présente théorie sont les suivantes :Les déplacements sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et, par conséquent, les contraintes impliquées sont infinitésimales. La contrainte normale transversale σ_z est négligeable par rapport aux contraintes dans le plan σ_x et σ_y . Cette théorie suppose une contrainte de cisaillement transversale constante, et elle a besoin d'un facteur de correction de cisaillement afin d'avoir une énergie de déformation due à l'effet de déformation de cisaillement égale à celle obtenue par la solution exacte de l'élasticité.

IV.2.2 Cinématique

Sur la base des hypothèses faites dans la section précédente, le champ de déplacement peut être obtenu comme suit :

$$u(x, y) = u_0(x, y) - z \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{IV.5a}$$

$$v(x, y) = v_0(x, y) - z \frac{\partial \Phi}{\partial y} \tag{IV.5b}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{IV.5c}$$

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

Où u, v et w sont les déplacements dans la direction z , u_0 et v_0 sont les déplacements de la surface du plan médian, Φ est fonction des coordonnées x, y .

Les déformations associées aux déplacements dans l'Eq. (IV.5) sont :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \quad (IV.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (IV.7)$$

Où

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (IV.8a)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + zk_x, \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + zk_y, \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy0} + zk_{xy} \quad (IV.8b)$$

La dérivation des coefficients de rigidité d'une poutre fonctionnellement graduée est obtenue en modifiant de manière appropriée les coefficients de rigidité d'une plaque fonctionnellement graduée (plaque FGP), puis les relations constitutives linéaires pour une poutre FGP, y compris la déformation par cisaillement transversal (FSDT). La relation contrainte-déformation dans le plan peut être exprimée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (IV.9)$$

Où $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz})$ sont les composantes de contrainte et de déformation.

Q_{ij} sont les constantes matérielles dans les axes matériels de la couche données comme

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{IV.10a})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (\text{IV.10b})$$

$$Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (\text{IV.10c})$$

En premier, nous obtenons des expressions pour les résultantes des contraintes axiales et de flexion. En utilisant une approche classique de la théorie des plaques, l'intégration des contraintes, donnée dans l'Eq. (IV.9), à travers l'épaisseur de la plaque FG, on obtient la relation suivante entre les résultantes des contraintes et les déformations et courbures :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Où

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t \quad M = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^t \quad (\text{IV.12a})$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t \quad k = \{k_x, k_y, k_{xy}\}^t \quad (\text{IV.12b})$$

et les expressions des sous-matrices de rigidité sont exprimées comme suit :

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(1, z, z^2) dz, \quad (A_{12}, B_{12}, D_{12}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12}(1, z, z^2) dz, \quad (A_{66}, B_{66}, D_{66}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}(1, z, z^2) dz \quad (\text{IV.13})$$

$$(A_{66}, B_{66}, D_{66}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66}(1, z, z^2) dz$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha] & [\beta] \\ [\beta] & [\delta] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [N] \\ [M] \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.14})$$

Conformément aux hypothèses considérées par Whitney pour obtenir des coefficients de rigidité de poutre FG à partir des équations des résultantes de contrainte des poutres FG, les résultantes de contrainte suivantes N_y , N_{xy} , M_y , et M_{xy} et sont égales à zéro

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

dans l'Eq. (IV.14) pour obtenir les coefficients de compliance d'un faisceau FG (Whitney et al. 1973) comme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ k_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} \quad (IV.15)$$

Inverser l'éq. (IV.15) conduit à l'expression suivante pour les contraintes résultantes d'une poutre FG :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \beta_{11} & \delta_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ k_x \end{Bmatrix}$$

Où (IV.16)

$$A = \frac{\delta_{11}}{(\alpha_{11}\delta_{11} - \beta_{11}^2)}$$

Ensuite, la résultante de la contrainte de cisaillement transversale est dérivée en considérant les relations constitutives pour les contraintes de cisaillement transversales dans une plaque FG :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (IV.17)$$

Où

$$Q_{44} = Q_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (IV.18)$$

L'intégration des contraintes de cisaillement transversales (τ_{zx} et τ_{yz} dans l'équation IV.17) à travers l'épaisseur de la plaque FG donne la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^2 A_{44} & 0 \\ 0 & k_2^2 A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (IV.19a)$$

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

Où k_1^2 et k_2^2 sont les facteurs de correction de cisaillement de plaque et :

$$(A_{44}, A_{55}) = \int_{-h/2}^{h/2} (Q_{44}, Q_{55}) dz \quad (IV.19b)$$

Semblable à l'hypothèse considérée pour les résultantes de contrainte dues aux composantes de contrainte dans le plan, soit $Q_y = 0$, et par inversion de la matrice de rigidité de l'Eq. (IV.19), nous obtenons la relation constitutive pour la contrainte de cisaillement transversale résultante de la poutre FG comme suit ::

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{kF} Q_x \quad (IV.20)$$

Où $k = k_2^2$ est le facteur de correction de cisaillement et $F = A_{55}$.

Ainsi, à partir des Éqs. (IV.16) et (IV.20) et en cohérence avec FSDT, les relations constitutives du faisceau FG sont exprimées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & kF \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ k_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (IV.21)$$

IV.3 Dérivation du facteur de correction de cisaillement

Dans cette section, nous étendons la théorie présentée par Bert et Madabhushi-Raman et Davalos aux poutres fonctionnellement graduées (Bert 1973, Madabhushi-Raman et Davalos 1996).

En se basant sur des équations d'équilibre bidimensionnelles, on dérive une expression quant à la variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre FG. Le facteur de correction de cisaillement est déterminé selon la méthode suivante : l'énergie de déformation due à la distribution des contraintes de cisaillement transversales, obtenues à partir des équations d'équilibre, est calculée. Ensuite, cette énergie de déformation de cisaillement est mise en relation avec celle obtenue à partir des relations constitutives pour les résultantes des

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

contraintes de cisaillement transversales, comme indiqué par l'équation (20). Cette équation suppose une contrainte de cisaillement transversale constante à travers l'épaisseur de la poutre. En premier, une expression de la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} est obtenue. L'équation d'équilibre pour les contraintes agissant dans le plan $x-z$ en l'absence de forces corporelles est :

$$\sigma_{x,x} + \tau_{xz,z} = 0 \quad (IV.22)$$

Intégrer l'éq. (IV.22) à travers l'épaisseur par rapport à la coordonnée z , donne :

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \sigma_{x,x} dz \quad (IV.23)$$

Substitution σ_x donnée dans l'Eq. (IV.9) dans l'éq. (IV.23), on obtient :

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z \left[(Q_{11}\varepsilon_{x0} + Q_{12}\varepsilon_{y0} + Q_{16}\gamma_{xz0}) + z(Q_{11}\chi_x + Q_{22}\chi_y + Q_{16}\chi_{xy}) \right]_{,x} dz \quad (IV.24)$$

Les déformations et les courbures dans l'Eq. (IV.24) sont remplacées par les expressions données dans l'Eq. (IV.14), et en considérant uniquement les résultantes de contrainte non nulles, Eq. (IV.24) devient :

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z (N_{x,x}(Q_{li}\alpha_{li} + zQ_{li}\beta_{li}) + M_{x,x}(Q_{li}\beta_{li} + zQ_{li}\delta_{li})) dz, \text{ for } i = 1,2,6 \quad (IV.25)$$

En utilisant les expressions $N_{x,x} = 0$ (le cas où il n'y a pas de charge répartie dans la direction axiale), $M_{x,x} = Q_x$ à partir des équations d'équilibre résultantes de la théorie statique des poutres, nous avons :

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^z (Q_x(Q_{li}\beta_{li} + zQ_{li}\delta_{li})) dz, \text{ for } i = 1,2,6 \quad (IV.26)$$

L'équation (IV.26) est l'expression de la variation de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur. À partir de la relation constitutive pour le

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

cisaillement transversal donnée dans l'équation. (IV.17), l'expression suivante est obtenue pour l'énergie de déformation de cisaillement par unité de longueur :

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\tau_{xz}^2}{Q_{55}} dz \quad (IV.27)$$

En remplaçant τ_{xz} à partir de l'éq. (IV.26) dans l'éq. (IV.27), l'énergie de déformation de cisaillement par unité de longueur est exprimée par :

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} Q_x^2 \frac{\left[\int_{-h/2}^z (Q_{li} \beta_{li} + z Q_{li} \delta_{li}) dz \right]^2}{Q_{55}} dz, \quad (IV.28)$$

De même, l'énergie de déformation de cisaillement par unité de longueur calculée à partir de la relation constitutive de l'Eq. (IV.20), qui suppose une déformation de cisaillement transversale constante, est :

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{Q_x^2}{k A_{55}} \quad (IV.29)$$

Équation des équations. (IV.28) et (IV.29), l'expression du facteur de correction de cisaillement pour la poutre P-FG est donnée par :

$$k = \frac{1}{A_{55}} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\left[\int_{-h/2}^z (Q_x (Q_{li} \beta_{li} + z Q_{li} \delta_{li})) dz \right]^2}{Q_{55}} dz \right]^{-1}, \quad (IV.30)$$

Où $i = 1,2,6$

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, De nouvelles formules théoriques pour la distribution de la porosité, la porosité irrégulière uneven et logarithmique uneven sont développées en utilisant le nombre réduit d'inconnues de la théorie de FSDT, le principe d'équivalence énergétique et l'équation du facteur de correction de cisaillement.

Chapitre IV :Analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées

CHAPITRE V

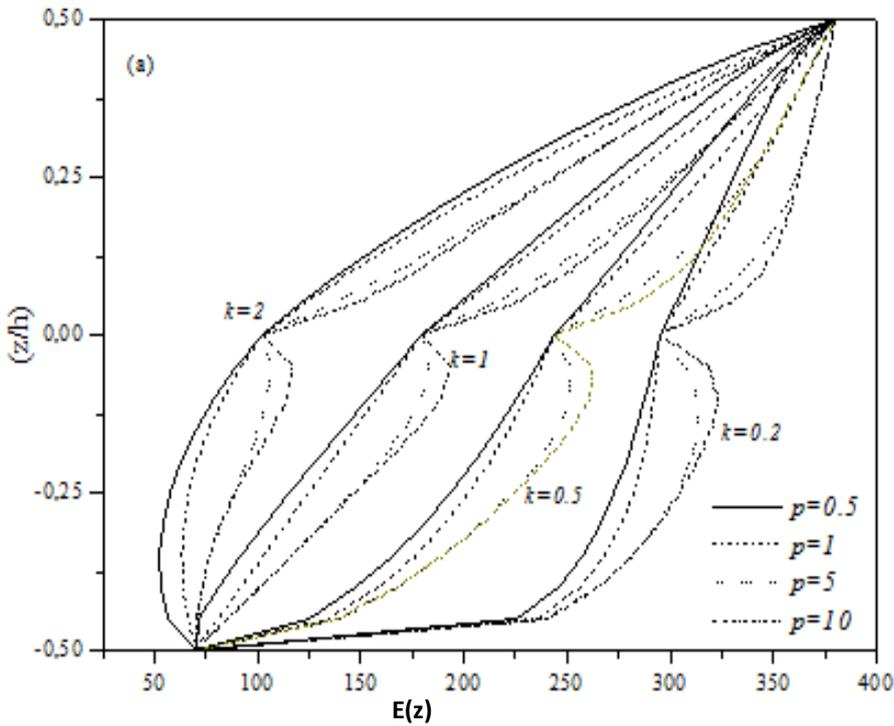
« Validation et comparaison des résultats »

V.1 Introduction

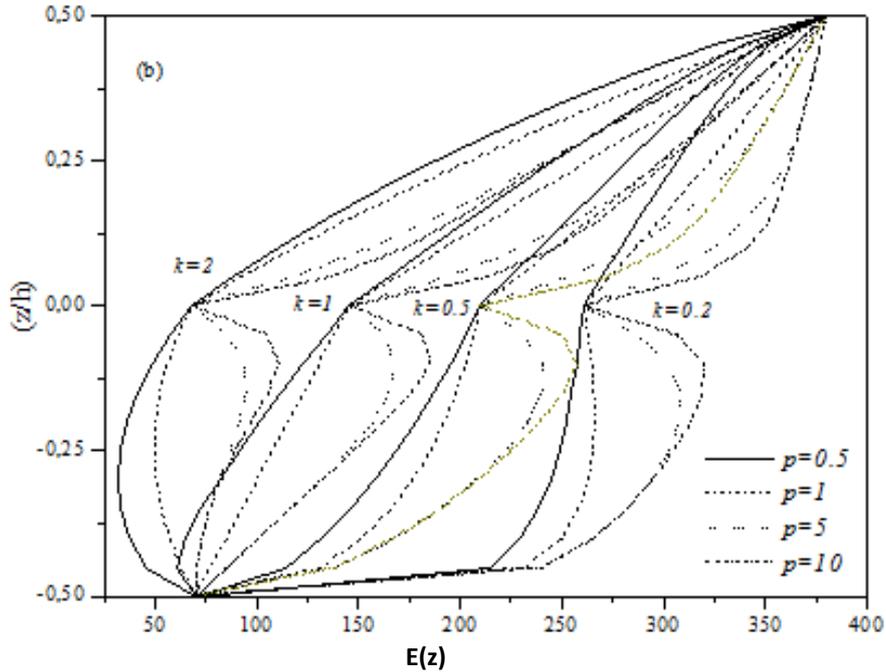
Dans cette étude, l'analyse de l'effet de la porosité sur les facteurs de correction de cisaillement de poutres poreuses fonctionnellement graduées - **FGM** - par la théorie de déformation du cisaillement du premier ordre (**FSDT**) à quatre variables .Une poutre FGM constituée de substances métalliques et céramiques est considérée comme un exemple. Le module de Young pour le métal (Aluminium) est $E_b=70 \text{ GPa}$, et pour la céramique (SiC) est $E_t=380 \text{ GPa}$. Notez que le coefficient de Poisson est choisi constant et égal à 0,3 pour les deux constituants. Pour $\xi=0.2$, la Fig. V.1 montre que la variation du module d'élasticité de Young $E(z)$ à travers l'épaisseur dans l'axe Z de poutres poreuses fonctionnellement graduées pour des distributions de porosité de type inégale (uneven) (Fig. V.1a) et le type logarithmique inégale (Log-uneven) (Fig. V.1b) avec différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k et différentes valeurs du paramètre de porosité P .

V.2 Résultats numériques

On voit sur les figures ci-dessus que la variation du module de Young est continue pour les valeurs du paramètre de porosité $P < 1$; ce qui donne la même allure du graphique du cas sans porosité (Figure. V.2), mais les graphiques sont discontinus et évoluent vers des valeurs plus grandes avec une valeur de paramètre de porosité croissante, et ceci pour les deux formes de distribution de porosité. Il est clair que le module de Young diminue avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance K et augmente avec l'augmentation du paramètre de porosité P . Ainsi, on peut conclure que la présence de pores a un effet considérable sur le module de Young et plus les valeurs du paramètre de porosité P augmentent plus les valeurs du module de Young augmentent et ceci pour toute valeur d'indice de loi de puissance K .



(V.1a) distribution irrégulière de la porosité (Uneven)



(V.1b) distribution logarithmique irrégulière de la porosité (Log-Uneven)

Fig.V.1 Le module de Young $E(z)$ avec différentes distributions de porosité, différentes valeurs d'indice de loi de puissance k et différentes valeurs de paramètre de porosité P .

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

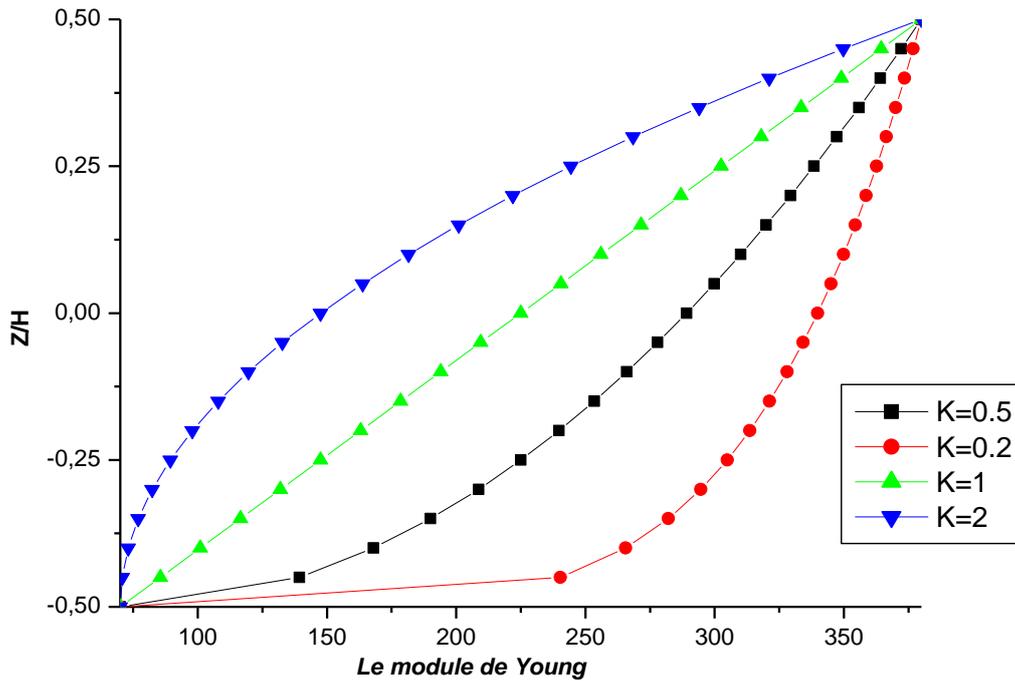


Fig.V.2. Le module de Young $E(z)$ avec différentes valeurs d'indice de loi de puissance k sans porosité

Tableau .V. 1 La variation du module de Young avec une distribution en loi de puissance K sans porosité ($\xi=0$)

poutres FG, sans porosité ($\xi=0$)										
K	$n = E_t / E_b$									
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20
0	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6	5/6
1	5/6	0,8320	0,8309	0,8305	0,8304	0,8305	0,8308	0,8308	0,8312	0,8319
5	5/6	0,7891	0,7506	0,7175	0,6889	0,6641	0,6235	0,5919	0,5377	0,5043
10	5/6	0,7989	0,7642	0,7319	0,7019	0,6746	0,6266	0,5860	0,5080	0,4521

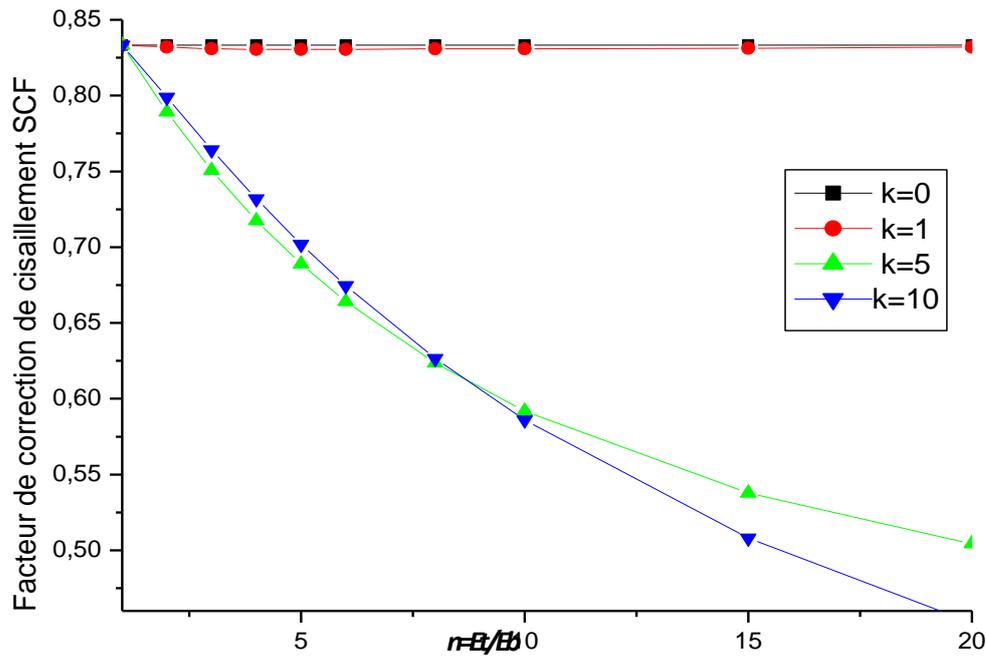


Fig. V.3 La variation du module de Young avec une distribution en loi de puissance K sans porosité

V.3.Facteur de correction de cisaillement pour les poutres FGP

V.3.1 Poutres FG sans porosité

Le tableau.V.1 et la Figure V.3 présentent les valeurs des facteurs de correction de cisaillement pour une poutre FG sans porosité calculées par Eq. (4) elles sont égales aux valeurs données par Nguyen et al.(2008) et Mena et al.(2012). Les facteurs de correction de cisaillement sont égaux à $5/6$ comme pour une poutre homogène pour $K=0$ et E_i/E_b et environ cette valeur usuelle pour $K=1$. La comparaison de la variation du facteur de correction de cisaillement pour la poutre FG sans porosité et deux types de porosité (inégaie, Log-unven) pour $K=0.5$ et $K=2$ (FigureV.3) confirme l'effet de la porosité.

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

Tableau V.2 Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution de porosité -uneven- avec $n=Et/E_b$ en fonction du paramètre de porosité P ($\xi=0.2$)

		$n = E_t / E_b$											
K	P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,5	0,5	0,81190	0,82335	0,82763	0,82988	0,83127	0,83221	0,83288	0,83339	0,83378	0,83409	0,83501	0,83546
	1	0,80462	0,81672	0,82128	0,82369	0,82518	0,82619	0,82691	0,82746	0,82789	0,82823	0,82925	0,82975
	5	0,81008	0,82078	0,82481	0,82691	0,82819	0,82905	0,82967	0,83012	0,83048	0,83076	0,83160	0,83201
	10	0,81855	0,82801	0,83155	0,83339	0,83451	0,83525	0,83578	0,83617	0,83648	0,83672	0,83742	0,83776
0,2	0,5	0,81190	0,82404	0,82812	0,83015	0,83137	0,83217	0,83275	0,83318	0,83351	0,83378	0,83458	0,83498
	1	0,80462	0,81807	0,82265	0,82500	0,82633	0,82725	0,82790	0,82840	0,82878	0,82908	0,83000	0,83045
	5	0,81008	0,82171	0,82572	0,82775	0,82896	0,82977	0,83035	0,83079	0,83112	0,83139	0,83220	0,83261
	10	0,81855	0,82824	0,83157	0,83325	0,83426	0,83494	0,83542	0,83578	0,83606	0,83628	0,83695	0,83728
1	0,5	0,81190	0,80973	0,80795	0,80739	0,80752	0,80799	0,80860	0,80925	0,80988	0,81048	0,81278	0,81423
	1	0,80462	0,80256	0,80074	0,79999	0,79988	0,80010	0,80046	0,80089	0,80133	0,80176	0,80353	0,80471
	5	0,81008	0,80856	0,80720	0,80658	0,80640	0,80645	0,80660	0,80680	0,80701	0,80721	0,80807	0,80862
	10	0,81855	0,81715	0,81591	0,81537	0,81523	0,81528	0,81543	0,81562	0,81581	0,81600	0,81676	0,81723
2	0,5	0,81190	0,77637	0,74851	0,72769	0,71253	0,70179	0,69447	0,68983	0,68732	0,68649	0,69798	0,71990
	1	0,80462	0,76894	0,74150	0,72099	0,70579	0,69456	0,68632	0,68034	0,67611	0,67323	0,67100	0,67819
	5	0,81008	0,77912	0,75668	0,74062	0,72909	0,72075	0,71469	0,71029	0,70711	0,70483	0,70099	0,70239
	10	0,81855	0,79028	0,76998	0,75561	0,74541	0,73813	0,73293	0,72922	0,72658	0,72474	0,72210	0,72379

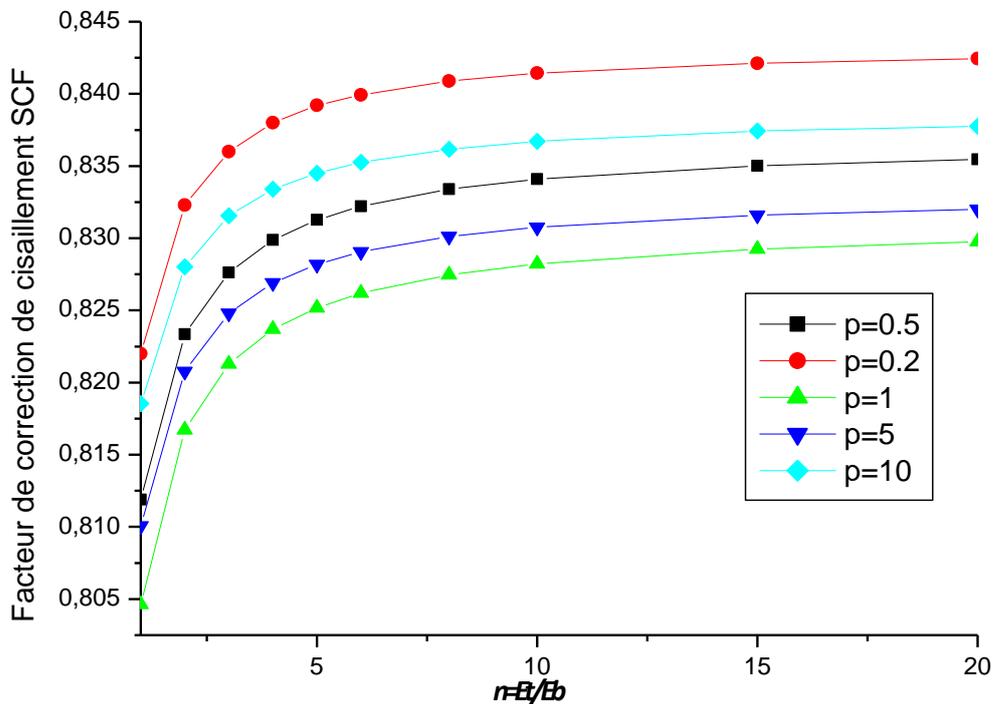


Fig.V.4 Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/E_b$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG uneven $k=0.5$ et $\psi=0.2$

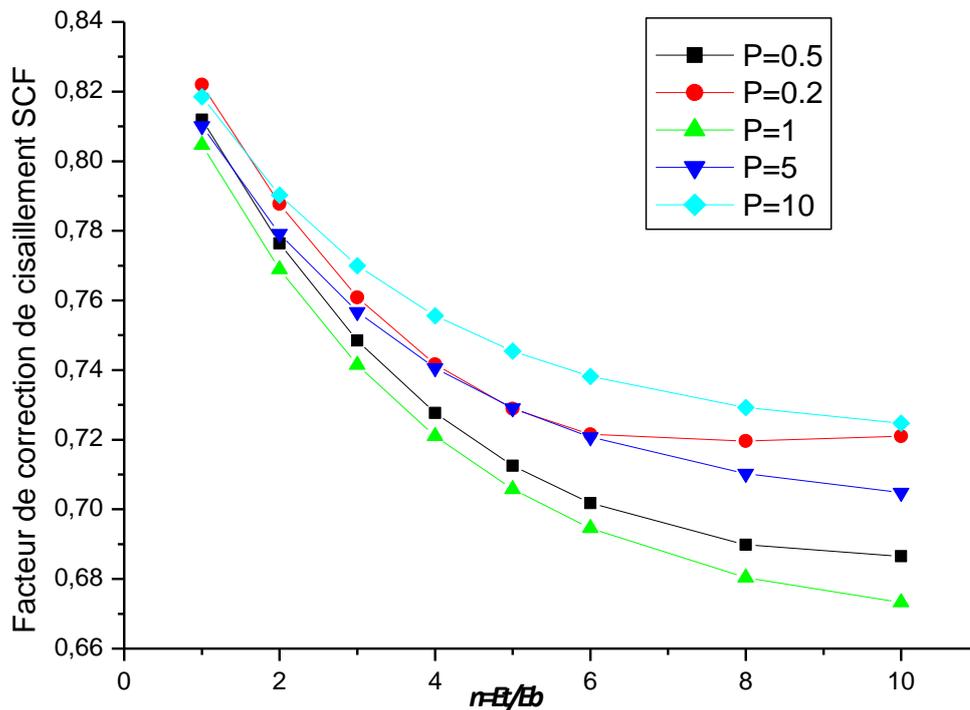


Fig.V.5 Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/E_b$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG uneven $k=2$ et $\psi=0.2$

V.3.2. Facteur de correction de cisaillement pour les poutres FGP lié au couple (k,n)

V.3.2.1 Distribution inégale de la porosité (uneven) :

Pour la poutre **FGP** avec la distribution de porosité uneven, le tableau V.2, la figure V.4 et la figure V.5 donnent les valeurs des facteurs de correction de cisaillement liés à chaque couple (k,n) avec différentes valeurs de paramètre de porosité P calculées par Eq. (1) et Eq. (3a). Dans le cas de $E_t/E_b = 1$, les valeurs des facteurs de correction de cisaillement sont proches quelles que soient les évolutions des variables P et k et inférieures à $5/6$ comme pour $\xi=0$ (Figure V.3).

- Pour $K \leq 1$ on remarque une légère variation des valeurs de SCF ; ;
- Pour $K > 1$ SCF diminue lorsque n augmente ;

la diminution des valeurs du SCF devient significative pour $k \geq 3$.

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

Tableau V.3. Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution de porosité Log-uneven- avec $n=Et/E_b$ fonction du paramètre de porosité P ($\xi=0.2$)

log-uneven $\xi=0.2$													
K	P	$n = E_t / E_b$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,5	0,5	0,78247	0,80198	0,80847	0,81163	0,81348	0,81468	0,81552	0,81614	0,81661	0,81697	0,81804	0,81855
	1	0,82259	0,83130	0,83498	0,83674	0,83782	0,83854	0,83905	0,83944	0,83973	0,83997	0,84066	0,84099
	5	0,82886	0,83676	0,83973	0,84128	0,84222	0,84285	0,84330	0,84363	0,84388	0,84408	0,84467	0,84495
	10	0,83056	0,83824	0,84110	0,84259	0,84348	0,84408	0,84450	0,84481	0,84505	0,84524	0,84575	0,84604
0,2	0,5	0,78247	0,80465	0,81156	0,81491	0,81689	0,81819	0,81911	0,81980	0,82033	0,82076	0,82202	0,82265
	1	0,82259	0,83139	0,83442	0,83595	0,83686	0,83747	0,83791	0,83824	0,83849	0,83869	0,83930	0,83960
	5	0,82886	0,83613	0,83865	0,83991	0,84068	0,84118	0,84154	0,84181	0,84202	0,84219	0,84269	0,84294
	10	0,83056	0,83744	0,83982	0,84101	0,84173	0,84221	0,84255	0,84280	0,84300	0,84316	0,84363	0,84387
1	0,5	0,78247	0,78619	0,78613	0,78574	0,78544	0,78525	0,78513	0,78506	0,78501	0,78498	0,78489	0,78480
	1	0,82259	0,82103	0,81968	0,81914	0,81906	0,81920	0,81945	0,81973	0,82002	0,82029	0,82138	0,82207
	5	0,82886	0,82730	0,82609	0,82561	0,82554	0,82566	0,82586	0,82609	0,82632	0,82655	0,82742	0,82795
	10	0,83056	0,82916	0,82800	0,82753	0,82744	0,82754	0,82771	0,82792	0,82813	0,82832	0,82909	0,82956
2	0,5	0,78247	0,74598	0,71875	0,69824	0,68267	0,67072	0,66145	0,65420	0,64848	0,64396	0,63203	0,62860
	1	0,82259	0,79459	0,77399	0,75919	0,74865	0,74115	0,73585	0,73217	0,72967	0,72806	0,72732	0,73138
	5	0,82886	0,80327	0,78483	0,77184	0,76272	0,75633	0,75184	0,74874	0,74664	0,74527	0,74427	0,74693
	10	0,83056	0,80576	0,78797	0,77547	0,76672	0,76059	0,75631	0,75336	0,75136	0,75007	0,74911	0,75160

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

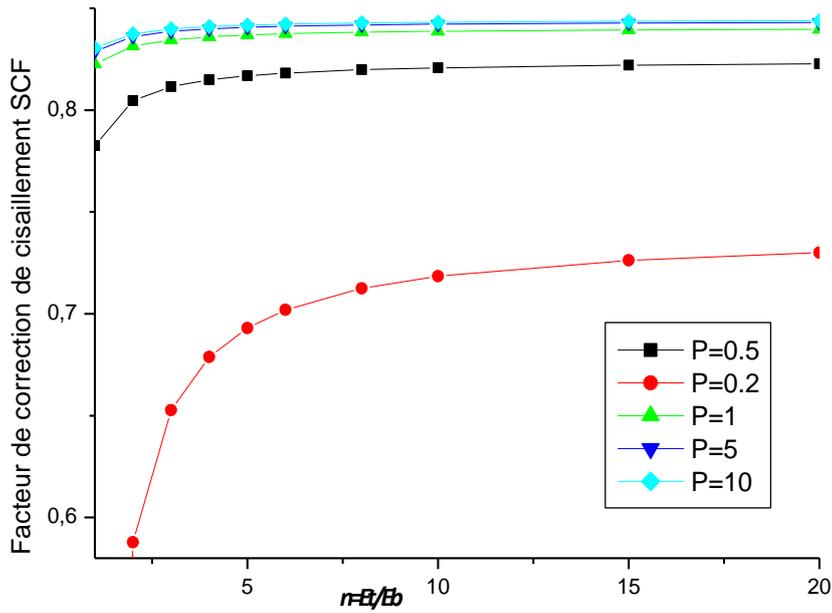


Fig.V.6 Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG Log- uneven $k=0.5$ et $\psi=0.2$

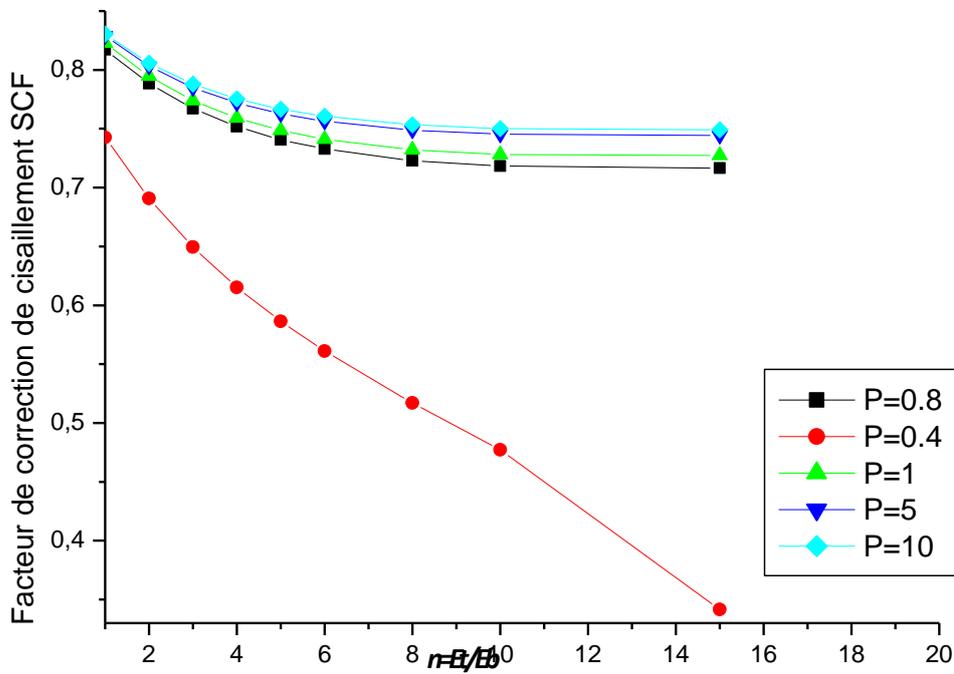


Fig.V.7. Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et du paramètre de porosité P pour la poutre FG Log- uneven $k=2$ et $\psi=0.2$

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

V.3.2.2 Distribution (log-uneven):

En application de Eq. (1) et Eq. (3b) Tableau V.3 , la variation des facteurs de correction de cisaillement en fonction de n et de k avec des différentes valeurs du paramètre de porosité P (Figure V.6, Figure V.7) SCF augmente avec l'augmentation de n , quelle que soit la valeur de P ou k .

Dans le cas de $E_s/E_b = 1$, les valeurs des facteurs de correction de cisaillement SCF sont proches les unes des autres quelles que soient les évolutions des variables P et k sont inférieures à 5/6 comme pour $\xi=0$ (Figures V.3).

- pour $K \leq 1$ on note une légère variation dans les valeurs de SCF-

- Pour $K > 1$ SCF diminue lorsque n augmente.

La diminution des valeurs des devient significative à partir de $k \geq 3$.

Tableau V.4. Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution de porosité uneven- avec $n=Et/Eb$ en fonction de l'indice de loi de puissance $K - \xi=0.2$)

$\xi=0.2$)													
P	K	$n=Et/Eb$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,5	0	0,81190	0,81042	0,81996	0,82896	0,82145	0,82818	0,82078	0,82227	0,82242	0,82254	0,82290	0,82308
	0,5	0,81190	0,82335	0,82763	0,82988	0,83127	0,83221	0,83288	0,83339	0,83378	0,83409	0,83501	0,83546
	1	0,81190	0,80973	0,80795	0,80739	0,80752	0,80799	0,80860	0,80925	0,80988	0,81048	0,81278	0,81423
	2	0,81190	0,77637	0,74851	0,72769	0,71253	0,70179	0,69447	0,68983	0,68732	0,68649	0,69798	0,71990
1	0	0,80462	0,81273	0,81528	0,81653	0,81727	0,81776	0,81810	0,81837	0,81857	0,81873	0,81921	0,81940
	0,5	0,80462	0,81672	0,82128	0,82369	0,82518	0,82619	0,82691	0,82746	0,82789	0,82823	0,82925	0,82975
	1	0,80462	0,80256	0,80074	0,79999	0,79988	0,80010	0,80046	0,80089	0,80133	0,80176	0,80353	0,80471
	2	0,80462	0,76894	0,74150	0,72099	0,70579	0,69456	0,68632	0,68034	0,67611	0,67323	0,67100	0,67819
10	0	0,81008	0,81663	0,81870	0,81971	0,82031	0,82071	0,82099	0,82120	0,82136	0,82149	0,82189	0,82208
	0,5	0,81855	0,82801	0,83155	0,83339	0,83451	0,83525	0,83578	0,83617	0,83648	0,83672	0,83742	0,83776
	1	0,81855	0,81715	0,81591	0,81537	0,81523	0,81528	0,81543	0,81562	0,81581	0,81600	0,81676	0,81723
	2	0,81855	0,79028	0,76998	0,75561	0,74541	0,73813	0,73293	0,72922	0,72658	0,72474	0,72210	0,72379

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

V.3.3 Facteur de correction de cisaillement pour les poutres FGP lié au couple (p,n)

V.3.3.1 Distribution inégale de la porosité (uneven):

Le tableau V.4 donne les valeurs des facteurs de correction de cisaillement SCF liés à chaque couple (p,n) calculées par l'Eq. (1) et l'éq. (3a). La Figure V.8 et la Figure V.9 montrent que quelle que soit la valeur de P , une très légère variation de SCF indépendante de la valeur de n qui confirme les remarques mentionnées ci-dessus pour le couple (k,n) .

Tableau V.5. Facteurs de correction de cisaillement pour les poutres FG, distribution de porosité Log-uneven- avec $n=Et/Eben$ fonction de l'indice de loi de puissance K ($\xi=0.2$)

$\xi=0.2$													
P	K	$n=Et/Eb$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,5	0	0,78247	0,80066	0,80570	0,80806	0,80943	0,81032	0,81094	0,81141	0,81177	0,81205	0,81290	0,81331
	0,5	0,78247	0,80198	0,80847	0,81163	0,81348	0,81468	0,81552	0,81614	0,81661	0,81697	0,81804	0,81855
	1	0,78247	0,78619	0,78613	0,78574	0,78544	0,78525	0,78513	0,78506	0,78501	0,78498	0,78489	0,78480
	2	0,78247	0,74598	0,71875	0,69824	0,68267	0,67072	0,66145	0,65420	0,64848	0,64396	0,63203	0,62860
1	0	0,82259	0,82541	0,82633	0,82678	0,82706	0,82724	0,82737	0,82746	0,82754	0,82760	0,82778	0,82787
	0,5	0,82259	0,83130	0,83498	0,83674	0,83782	0,83854	0,83905	0,83944	0,83973	0,83997	0,84066	0,84099
	1	0,82259	0,82103	0,81968	0,81914	0,81906	0,81920	0,81945	0,81973	0,82002	0,82029	0,82138	0,82207
	2	0,82259	0,79459	0,77399	0,75919	0,74865	0,74115	0,73585	0,73217	0,72967	0,72806	0,72732	0,73138
10	0	0,83056	0,83130	0,83154	0,83165	0,83173	0,83177	0,83181	0,83183	0,83185	0,83187	0,83191	0,83194
	0,5	0,83056	0,83824	0,84110	0,84259	0,84348	0,84408	0,84450	0,84481	0,84505	0,84524	0,84575	0,84604
	1	0,83056	0,82916	0,82800	0,82753	0,82744	0,82754	0,82771	0,82792	0,82813	0,82832	0,82909	0,82956
	2	0,83056	0,80576	0,78797	0,77547	0,76672	0,76059	0,75631	0,75336	0,75136	0,75007	0,74911	0,75160

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

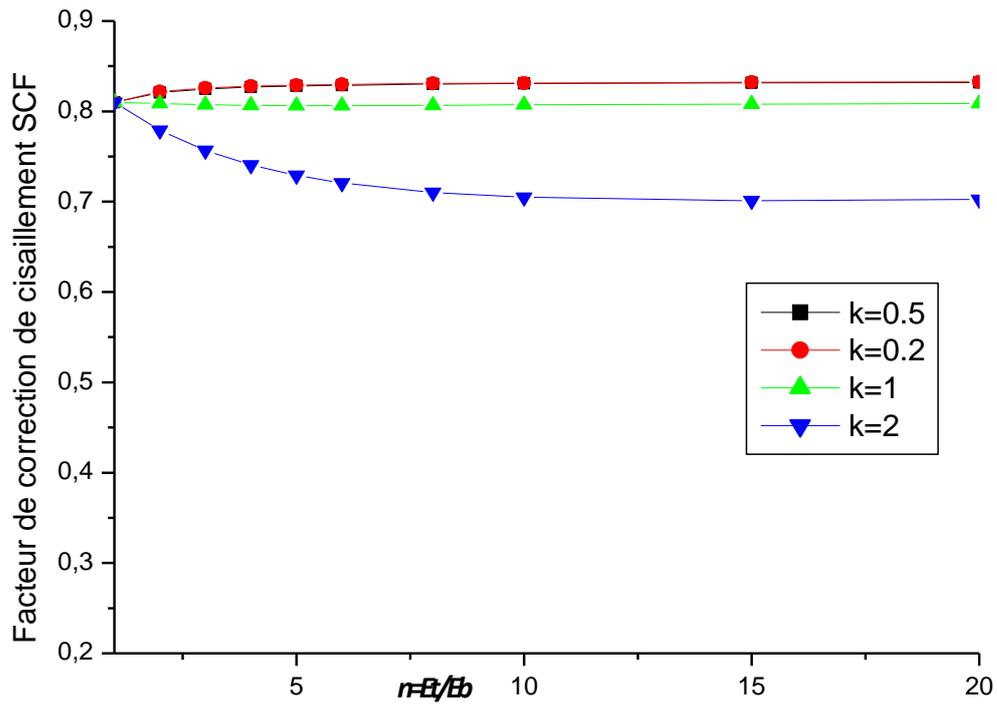


Fig.V.8 Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG unievene $P=0.5$ et $\psi=0.2$

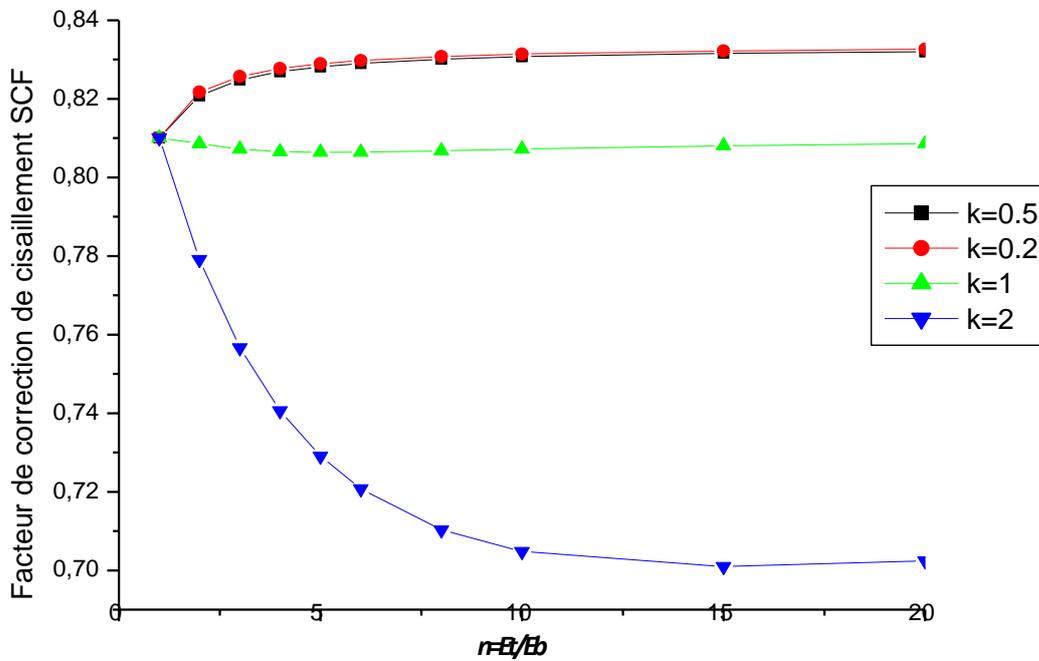


Fig.V.9 Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG unievene $P=5$ et $\psi=0.2$

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

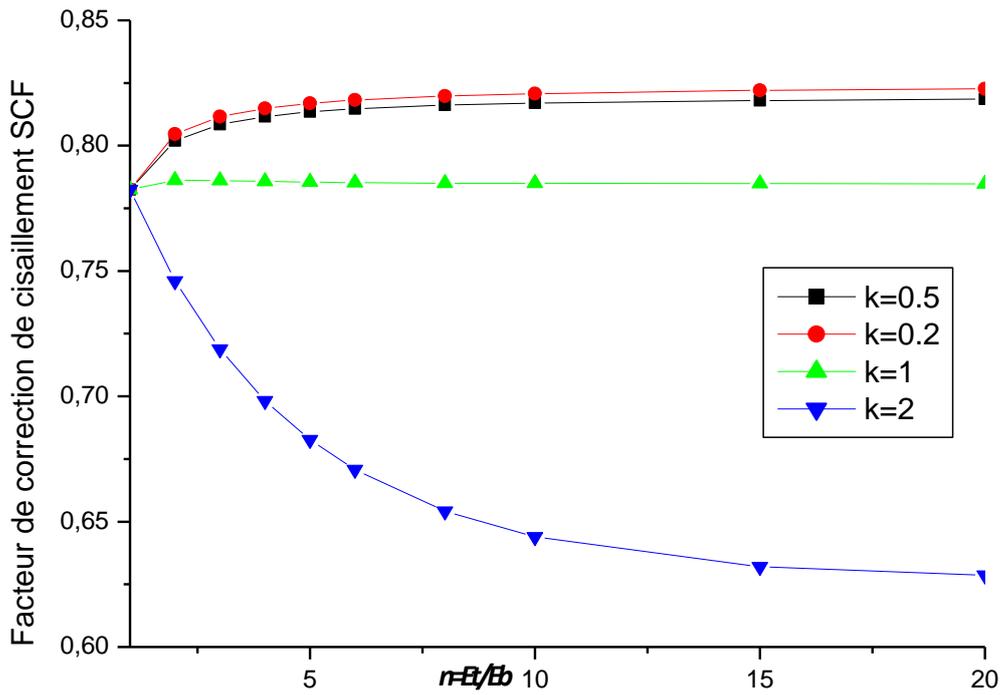


Fig.V.10 Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG Lo-uneven $P=0.5$ et $\psi=0.2$

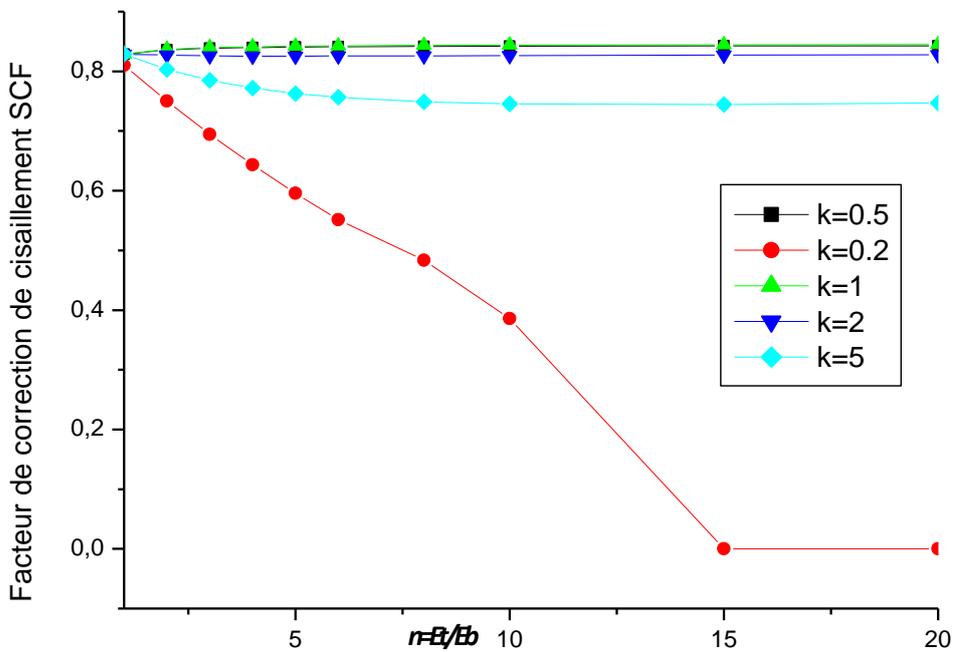


Fig.V.11 Variation du facteur de correction de cisaillement en fonction de $n=Et/Eb$ et de l'indice de loi de puissance K pour la poutre FG Log-uneven $P=5$ et $\psi=0.2$

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

V.3.3.2. Distribution de la porosité (log-uneven):

En application de Eq (1) et de Eq (3b) ; le tableau V. 5 et les Figures V.10 et V.11 montrent, la variation des facteurs de correction de cisaillement SCF:

- Pour $P < 1$; SCF diminue lorsque n augmente ;
- pour $P \geq 1$ on remarque une légère variation dans les valeurs des SCF .

V.4. Effet du type de distribution de porosité par la comparaison des distributions uneven et log-uneven de la poutre FGP sur le facteur de correction de cisaillement SCF

Le tableau V.6 et les figures V.13 et V.14 représentent la variation du facteur de correction de cisaillement avec différentes valeurs de paramètre de porosité P pour le rapport de module d'élasticité $n = Et/Eb = 4$, on observe à partir de ces résultats théoriques que :

Cas où $K \leq 1$

- pour $P < 1$ SCF diminue à mesure que n augmente ;
- pour $P \geq 1$, on remarque une légère variation dans les valeurs de SCF;

Tableau V.6. Comparaison de SCF poutre FG, pour la distribution Uneven et Log-uneven ($\xi = 0.2$), avec différentes valeurs de paramètre P pour $Et/Eb = 4$; $k = 0.5$ et $k = 5$.

P	$K=0,5$		$k=5$	
	Uneven	log-unven	Uneven	log-unven
0,5	0,82988	0,81163	0,60924	0,41217
0,6	0,82810	0,82292	0,60726	0,58217
0,7	0,82663	0,82922	0,60597	0,63432
0,8	0,82544	0,83295	0,60521	0,65866
1	0,82369	0,83674	0,60486	0,67977
2	0,82146	0,83993	0,61283	0,69684
5	0,82691	0,84128	0,64320	0,70412
7	0,83011	0,84193	0,65663	0,70680
8	0,83137	0,84219	0,66182	0,70780
10	0,83333	0,84259	0,67004	0,70934

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

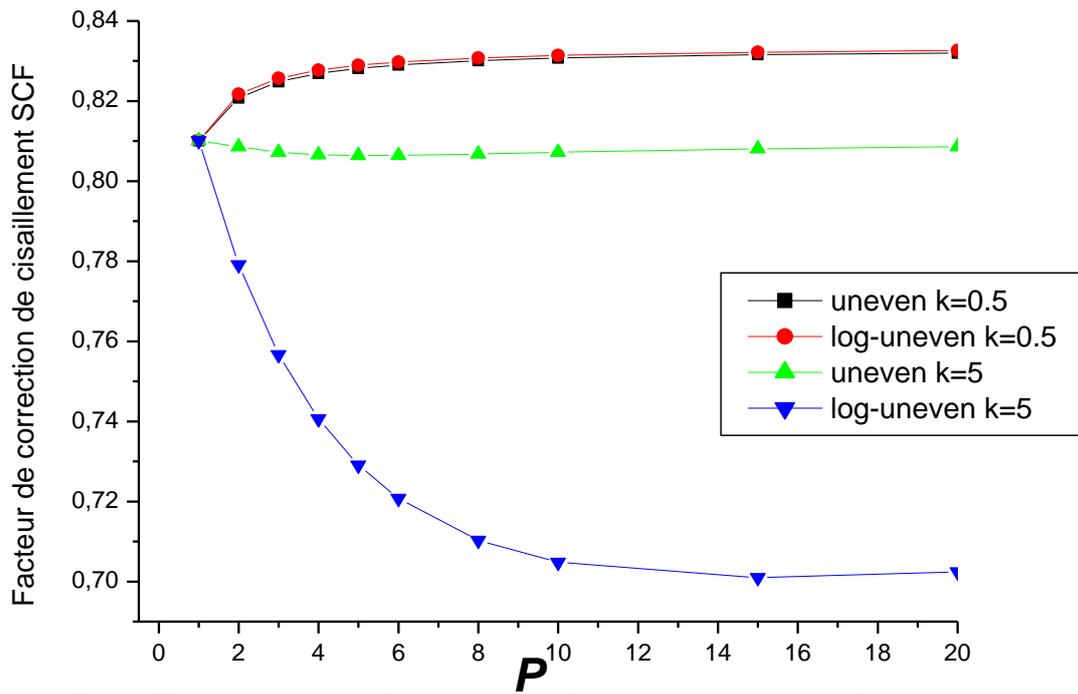


Fig.12. Effect du type de distribution de porosité par la comparaison des distributions uneven et log-uneven de la poutre FGP sur le SCF pour $E_t/E_b=4$ et $\psi=0.2$

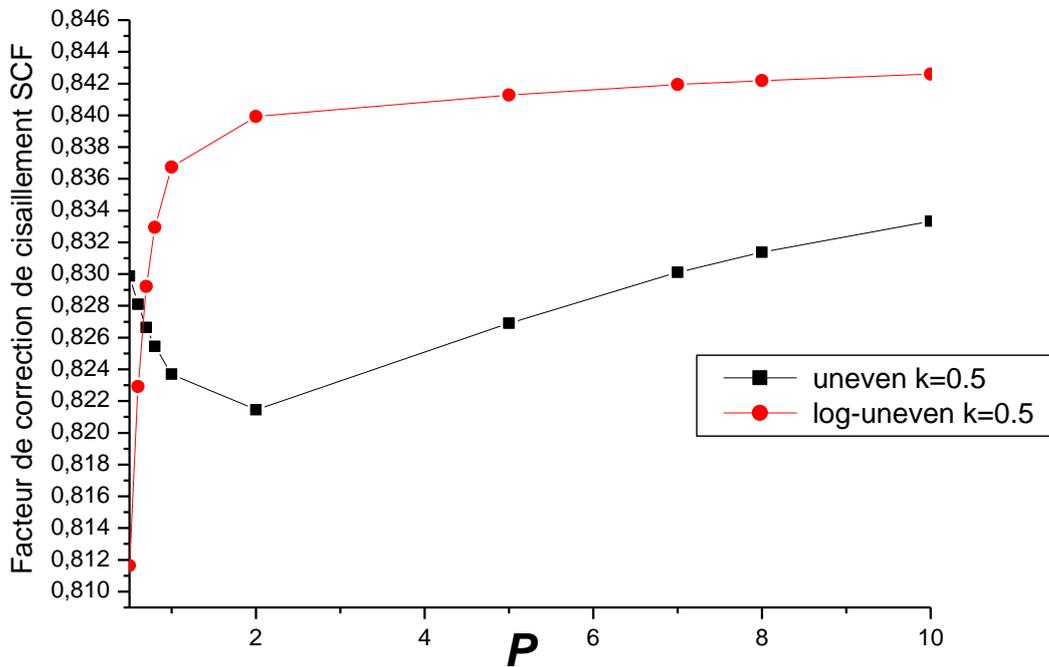


Fig.13. Effect du type de distribution de porosité par la comparaison de uneven et log-uneven de la poutre FGP sur SCF pour $K=0.5, E_t/E_b=4$ et $\psi=0.2$

Chapitre V : Validation et comparaison des résultats

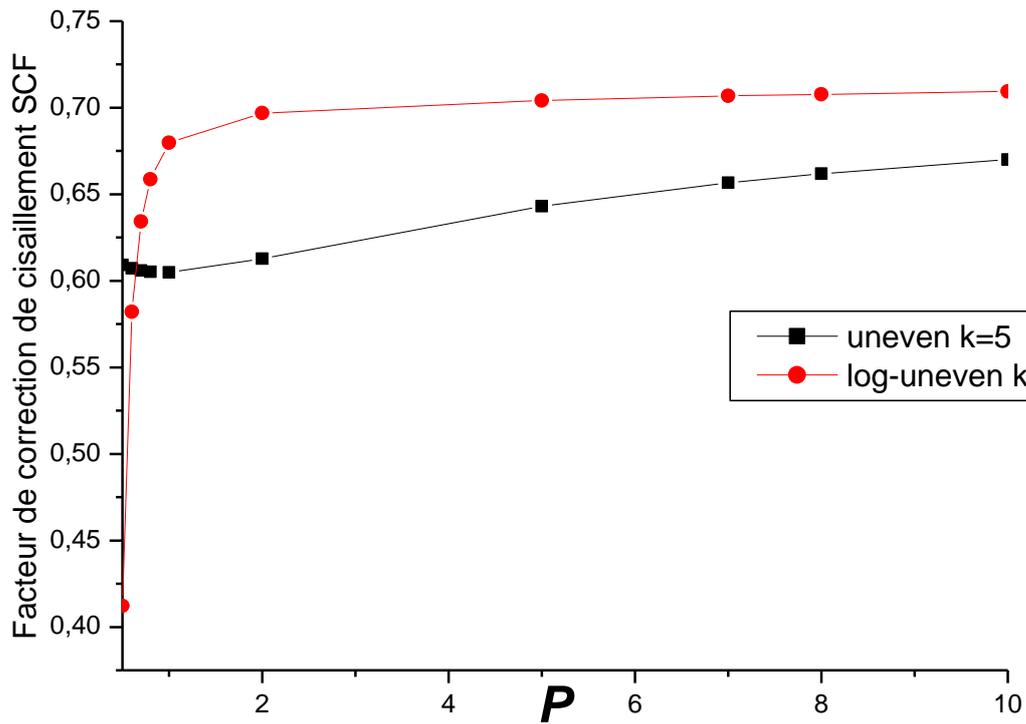


Fig.14. Effet du type de distribution de porosité par la comparaison de uneven et log-uneven de la poutre FGP sur SCF pour $K=5, E_t/E_b=4$ et $\psi=0.2$

V.5.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de l'analyse l'effet du type de distribution de porosité par la comparaison des distributions uneven et log-uneven de la poutre FGP sur le facteur de correction de cisaillement SCF les valeurs des facteurs de correction de cisaillement SCF liés à chaque couple (p, n) varient avec l'indice de loi de puissance k à travers l'épaisseur de la poutre FG.

« CONCLUSIONS GENERALES »

Conclusions générales

De nouvelles formules théoriques pour la distribution de la porosité, la porosité irrégulière *uneven* et logarithmique *uneven* sont développées en utilisant le nombre réduit d'inconnues de la théorie de **FSDT**, le principe d'équivalence énergétique et l'équation du facteur de correction de cisaillement ; quelques conclusions d'investigations numériques sont données comme suit :

- La présence de pores (porosité) a un effet considérable sur le module d'Young pour toute valeur de l'indice de loi de puissance k .
- La loi de changement des propriétés mécaniques $P=(k)$ à travers l'épaisseur de la poutre FG sans porosité est validée.
- Pour $k=0$ et $E_i/E_b =1$, les facteurs de correction de cisaillement sont égaux à 5/6 et sensiblement de la même valeur pour $k=1$; Ce qui diffère du cas où l'on considère la porosité $\xi \neq 0$.
- Dans les deux cas, distribution de porosité (*UNEVEN*) et logarithmique (*LOG-UNEVEN*), avec l'augmentation de n , les valeurs des facteurs de correction de cisaillement *SCF* liés à chaque couple (P,n) augmentent pour l'indice de loi de puissance $K < 1$, et diminuent pour $K \geq 1$.
- Pour $E_i/E_b =1$, les valeurs des facteurs de correction de cisaillement **SCF** sont proches les unes des autres et inférieures à 5/6 pour $P=0$ avec à la différence de la distribution de la porosité (*log-uneven*), les valeurs sont dépendantes des variables P et indépendantes des variables k ce qui confirme encore une fois l'effet de la porosité.

La présente solution analytique basée sur **FSDT** pour les poutres poreuses **FGM** peut être utilisée comme référence pour les études futures.

Enfin, la formulation se prête particulièrement bien à l'étude de plusieurs problèmes liés à la flexion, aux vibrations et au comportement dynamique de macro/nanostructures composites avancées soumises à des charges mobiles .

« REFERENCES »

REFERENCES

- Achraf tafla (2007) « éléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches » p 17.
- Abrate, S (2006) « Free vibration, buckling, and static deflections of functionally graded plates », *Compos. Sci. Technol.*, vol. 66, p. 2383–2394.
<http://doi.org/10.1016/j.compscitech.02.032>.
- Almitani, K. H., Eltaher, M. A., Abdelrahman, A. A., & Abd-El-Mottaleb, H. E. (2021). « Finite element based stress and vibration analysis of axially functionally graded rotating beams. *Structural Engineering and Mechanics* », *An Int' l Journal*, 79(1), 23-33. <https://doi.org/10.12989/sem.2021.79.1.023>
- Bert, C.W.(1973), « Simplified analysis of static shear factors for beams of nonhomogeneous cross-section », *J. Comp. Mater.*, vol. 7, p. 525. <http://doi.org/10.1177/002199837300700410>.
- Birman V. and C.W Bert, .(2002), « On the choice of shear correction factor in sandwich structures », *J. Sandwich Struct. Mater.*, vol. 4, p. 83.
- Bert C.W. and F. Gordaninejad.(1983), « Transverse shear effects in bimodular composite laminates », *J. Comp. Mater.*, vol. 17, p. 282.
http://doi.org/10.1007/978-3-642-58092-5_11.
- Bever; M. B., Duwez, P.F.(1972), « Gradients in composite materials ». *Mater. Sci. Eng.* vol 10, p 1-8.
[https://doi.org/10.1016/0025-5416\(72\)90059-6](https://doi.org/10.1016/0025-5416(72)90059-6)
- Berthelot, J.M.(1996), « Matériaux composites, comportement mécanique et analyses des structures », 2ème Edition, Masson, Paris, 1996, ISBN: 2-225-85425-4.
- Chen, D., Yang, J., Kitipornchai, S.(2016), « Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam », *Compos. Struct.* vol 133, p 54–61.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.07.052>.
- Chi S, Chung Y.(2006); « Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load » – Part I: Analysis. *Int J Solids Struct*;43:3657–74.
- Choa, Kimb. .(2000). « A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element ». *Composites: Part B* 31 65–74.
- Cohen G.A.(1978) « transverse shear stiffness of laminated anisotropic shells » *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol 13, pp 205-220, .
- Daniel Gay. (1997) "Matériaux composites". 4ème édition, Hermé Paris, ISSN 1158-3509.

Delale .F, F. Erdogan. (1983) « The crack problem for a nonhomogeneous plane ». ASME Journal of Applied Mechanics 50, 609 –614,.

Demirhan, P.A., Taskin, V.(2019), «Bending and free vibration analysis of Levy-type porous functionally graded plate using state space approach», Compos. B Eng.vol 160,p 661–676. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.020>.

Efraim E. and M. Eisenberger .(2007), « Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates», J. Sound Vib., vol. 299, 720–738.<http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.068>.

Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque C.M.C., Qian L.F., and Jorge R.M.N.(2006), «Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method», Compos.Struct., vol. 75, pp. 593–600.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.04.018>.

Gao, W., Qin, Z., & Chu, F. (2020). «Wave propagation in functionally graded porous plates reinforced with graphene platelets». Aerospace Science and Technology, 102, 105860.

Goetzel, C. G.,Lavendel, H, W.(1964), «Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoi cell finite element method». Int. J. Solids Struct. Vol. 32, p. 149-162

Guynn E.G (1992) « A Parametric Study of Variables That Affect Fiber Microbuckling Initiation in Composite Laminates »:Part I, Analysis. J. composites Mater.,vol.26,pp.1549-1616.

Herrmann M, Sobek W (2017) «Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components». StructConcr, 18(1), 54-66.

Houari, M. S. A., Bessaim, A., Bernard, F., Tounsi, A., and Mahmoud, S. R. (2018). «Buckling analysis of new quasi-3D FG nanobeams based on nonlocal strain gradient elasticity theory and variable length scale parameter». Steel and Composite Structures., An International Journal, 28(1), 13-24. <https://doi.org/10.12989/scs.2018.28.1.013>

G.Kirchhoff.(1850) « Uber das gleichgewicht und die bewegungeinerelastischenscheibe». Journal fur reine und angewandteMathematik, vol. 40, pages 51, 88,.

Koizumi, M.(1997), «FGM activities in Japan», Compos Part B, vol. 28, p. 1–4.

L.Liberscu(1967). «On the theory of anisotropic elastic shell and plates ». Int J Solids Structures, vol. 3, pages 53,68,.

- Menea, R., A.Tounsi , F. Mouaici , I. Mechab , M. Zidi & A. Bedia.(2012), «Analytical Solutions for Static Shear Correction Factor of Functionally Graded Rectangular Beams», *Mechanics of Advanced Materials and Structures*,vol 19,p 641–652.
- Madabhusi-Raman .and J.F. Davalos.(1996), «Static shear correction factor for laminated rectangular beams», *Compos. Part B: Eng.*, vol. 27, p 285–293.<https://doi.org/10.12989/was.2016.22.4.429>.
- Merdaci Slimane, Belmahi Samir, Belghoul Hakima, Hadj Mostefa Adda.(2019), «Free Vibration Analysis of Functionally». *International Journal of Engineering and Technical Research*» vol. 8(03) .<http://dx.doi:10.17577/IJERTV8IS030098>.
- Mohammad Hasan Shojaeefard ,HamedSaeidi Googarchin , Majid Ghadiri , Mohammad Mahinzare .(2017), «Micro temperature-dependent FG porous plate: Free vibration and thermal buckling analysis using modified couple stress theory with CPT and FSDT», *Applied Mathematical Modelling* 50 (2017) 633–655
- Mouaici F., Benyoucef S., Ait Atmane H., and Tounsi A.(2016). «Effect of porosity on vibrational characteristics of non-homogeneous plates using hyperbolic shear deformation theory». *wind and structures*,vol.22(4),p429–454.
- Noor A.K. and W.S. .Burton .(1989), «Stress and free vibration analyses of multilayered composite plates», *Comp. Struct.*, vol. 11, p. 183–204. [http://doi:10.1016/0263-8223\(89\)90058-5](http://doi:10.1016/0263-8223(89)90058-5).
- Noor A.K. and W.S. Burton.(1989), «Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates», *Appl. Mech. Rev.*, vol. 42, p. 1–13.
- Noor A.K. and W.S. Burton.(1990), «Assessment of computational models for multilayered anisotropic plates», *Comp. Struct.*, vol. 14, p 233–265.
- Noor A.K..W.S.Burton, and J.M. Peters.(1990), «Predictor-corrector procedure for stress and free vibration analyses of multilayered composite plates and shells», *Comput. Mech. Appl. Mech. Eng.*, vol. 82, p. 341–364.
- Nguyen, T.K, K. Sab, and G. Bonnet, A.(2006), «Reissner-Mindlin model for functionally graded materials», *3rd European Conference on Computational Mechanics*, Lisbon, Portugal.vol.72, p.564.http://doi:10.1007/1-4020-5370-3_564.
- Nguyen, T. -K. , Sab, K. and Bonnet, G.(2007) «Shear Correction Factors for Functionally Graded Plates', *Mechanics of Advanced Materials and Structures*», 14: 8, 567 — 575 <http://dx.doi.org/10.1080/15376490701672575>
- Nguyen, T.K, K. Sab, and G. Bonnet.(2008), «First-order shear deformation plate models for functionally graded materials», *Compos. Struct.*, vol. 83, p . 25–36. <https://hal-upec-upem.archives-ouvertes.fr/hal-00691028>.

Nguyen, T.K., Thuc P. Vo , Huu-Tai Thai .(2013), « Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory» *Composites: Part B* 55 (2013) 147–157

Nguyen Viet.Tung.(2004). « Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaques ». Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées ,2004.

Reddy, J.N.(2002), «Energy principles and variational methods in applied mechanics», Wiley, New York.

Rezaei, A.S., Saidi, A.R.(2015), «Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials». *Compos. Struct.*vol 134, p. 1051–1060. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.08.125>.

Rezaei, A.S., Saidi, A.R. (2016), «Application of Carrera Unified Formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates». *Compos. B Eng.* vol 91,p.361–370. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.12.050>.

Rezaei, A.S., Saidi, A.R.(2017), «Buckling response of moderately thick fluid-infiltrated porous annular sector plates». *Acta Mech.* vol 228, p .3929–3945 <http://dx.doi.org/10.1007/s00707-017-1908-2>.

Jalali MH, Zargar O, Baghani M.(2019), «Size-dependent vibration analysis of fg microbeams in thermal environment based on modified couple stress theory». *Iran J Sci Technol – Trans Mech Eng.*;43(s1):761–71. <http://dx.doi.org/10.1007/s40997-018-0193-6>

Jones R.M., (1998) , «Mechanics of composite materials», by Crc Press.

Whitney, J.M. (1973); «Shear correction factors for orthotropic laminates under static load», *J. Appl. Mech.*, vol. 40, p. 302–.

Sadoun, M. A.Tounsi, M.Sid Ahmed Houari , Adda.Bedia ,(2014). «A novel first-order shear deformation theory for laminated composite plates». *Steel and composite structures*,vol.17(3),p.321- 331. <https://doi.org/10.12989/scs.2014.17.3.1321>.

Sadoun, Mohamed Sid Ahmed Houari. Ahmed Bakora, Abdelouahed Tounsi,S.R.mahmoud,Afaf S.Alwabli.(2018), «vibration analysis of thinc orthotropic plates using quasi 3D sinusoidal shear deformation theory». *geomechanics and engineering* .vol, 16(2),p141–150. <https://doi.org/10.12989/gae.2018.16.2.141>.

Safaei B, Moradi-Dastjerdi R, Behdinan K, Qin Z, Chu F. (2019);«Thermoelastic behavior of sandwich plates with porous polymeric core and CNT clusters/polymer nanocomposite layers». *Compos Struct*; 226:111209. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct..111209>

Selmi, A. (2021). «Vibration behavior of bi-dimensional functionally graded beams. » *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, 77(5), 587-599. <https://doi.org/10.12989/sem.2021.77.5.587>

Sudharsan M.,(2003) «Structural Design and Analysis of a Lightweight Composite Sandwich space Radiator Panel», Phd thesis, Bharathiar University, Coimbatore, India..

Suresh, S., Mortensen, A.(1998), «Fundamentals of functionally graded material: Processing and thermomechanical behaviour of graded metal and metal-ceramic composites». Press,Cambridge.

Saidi ,H., Sahla, M.(2019), «Vibration analysis of functionally graded plates with porosity composed of a mixture of Aluminum (Al) and Alumina (Al₂O₃) embedded in an elastic medium», *FratturaedIntegritàStrutturale*,vol 50 , p286-299. <http://dx.doi.org/10.3221/IGF-ESIS.50.24>.

Shahsavari D, Karami B, Fahham HR, Li L.(2018), «On the shear buckling of porous nanoplates using a new size-dependent quasi-3D shear deformation theory». *Acta Mech* ,vol 229(11),p 4549–73.

Singh, S.J., Harsha, S.P.(2020) b. «Thermo-mechanical analysis of porous sandwich S-FGM plate for different boundary conditions using Galerkin Vlasov's method, a semi analytical approach.Thin-Walled»*Struct. vol.150*, p.106668.<http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2020.106668>.

Timoshenko, S.P.(1922), «On the transverse vibrations of bars of uniform cross section», *Philos. Mag*, vol. 43, pp. 125–131.

Tran TT, Van KeTran VK , Pham QH , Zenkour AM.(2021). «Extended four-unknown higher-order shear deformation nonlocal theory for bending, buckling and free vibration of functionally graded porous nanoshell resting on elastic foundation». *Compos. Struct.* vol. 264, p. 2–3.<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.113737>.

M.Touratier.(1991) «An efficient standard plate theory ». *Engng Sci*, vol. 29, no. 8, pages 901,916,.

Vlachoutsis.(1992), «S.Shear correction factors for plates and shells», *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 33, p. 1537–1552.

Whitney. J.M. (1973), « Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads ». *J.Applied Mechanics*, Vol.40, pages 302-304,.

Yin H.M., Sun L.Z., and Paulino G.H. (2004), «Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions», Acta Materialia, 52, 3535–3543.

Zhao, X. Lee Y.Y., and Liew, K.M. (2009), «Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method», J. Sound Vib, vol. 319, p. 918–939.

Zenkour, A.M. (2018). «A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities». Compos. Struct.vol. 201,p. 38–48.

[http://dx.doi.org/ 10.1016/j.compstruct.05.147](http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.05.147).

Yas MH, Rahimi S.(2020) «Thermal buckling analysis of porous functionally graded nanocomposite beams reinforced by graphene platelets using generalized differential quadrature method». Aerosp Sci Technol.;107: 106261. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.106261>

Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V.(2014), «Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities». Aerosp.Sci. Technol, vol.32 (1), p.111-120 Wind and Structures, vol.22(4) , p.429-454.

Wang, Y.Q., Zu, J.W.(2017), «Large-amplitude vibration of sigmoid functionally graded thin plates with porosities. Thin-Walled» Struct. vol. 119, p. 911–924.[http://dx.doi.org/ 10.1016/j.tws.08.012](http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.08.012).

Whitney, J.M.(1973), «Shear correction factors for orthotropic laminates under static load», J. Appl. Mech, vol. 40, p. 302