

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MUSTAPHA STAMBOULI DE MASCARA



Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département d'Hydraulique

**Polycopié Pédagogique de Cours**

**Hydraulique Générale II**

**Dr BENSTAALI Imène**

## ***Avant- propos***

Ce polycopié est un support de cours du module ***Hydraulique Générale II***, il est destiné aux étudiants de la troisième année licence Hydraulique. Il représente aussi une référence très utile pour les étudiants du master en hydraulique. L'objectif de cette matière est de fournir les bases nécessaires à la compréhension et au calcul des phénomènes présents en hydraulique, au génie de l'eau et de l'environnement, en particulier ceux rencontrés en assainissement, en canaux et en rivière et dans les réseaux de collecte et distribution.

Ce cours est organisé en quatre chapitres principaux:

Le premier chapitre traite d'une application directe du théorème d'Euler, qui permet de déterminer les forces exercées par le fluide en mouvement sur les objets environnants.

Le deuxième chapitre est consacré au calcul du débit déversé par les orifices et les ajutages. Les différents problèmes relatifs à la vidange des réservoirs sont abordés dans ce chapitre.

Le troisième chapitre traite des écoulements en charge, du dimensionnement des conduites, de l'application du théorème de Bernoulli en tenant compte des pertes de charge et de la présence de pompes et de turbines dans un réseau de conduites, ainsi que de la détermination de la courbe caractéristique d'une conduite ou d'un ensemble de conduites placées en série et en parallèle.

Le quatrième chapitre présente les écoulements à surface libre en régime uniforme, l'équation de base d'un écoulement à surface libre, ainsi que les propriétés géométriques et hydrauliques de la section transversale des canaux.

Le cours est enrichi d'applications corrigées pour mettre en pratique les compétences acquises.

### **Connaissances préalables recommandées:**

Connaissance de base, Mécanique des fluides et Hydraulique générale I.

# Table des Matières

Avant- Propos

## Chapitre I

### Équation des quantités de mouvement

I.1 Quantité de mouvement	1
I.2 Théorème de la quantité de mouvement -Théorème d'Euler-	2
I.3 Application du théorème des quantités de mouvement	3
I.3.1 Application d'un jet vertical frappant un obstacle	3
I.3.1.1 Cas de plaque plane	3
I.3.1.2 Cas de l'auget Hémisphère	5
I.3.2 Application d'un jet horizontal sur une plaque	6
I.3.2.1 Cas d'une plaque plane inclinée	6
I.3.2.2 Cas d'une plaque plane	7
I.3.3 Action d'un jet sur un coude	8
Exercices corrigés	9

## Chapitre II

### Écoulements à travers les orifices et les ajutages

II.1 Ecoulements à travers les orifices	20
II.1.1 Définitions	20
II.1.2 Classification des orifices	20
II.1.3 Écoulement par orifice dénoyé en mince paroi	20
II.1.3.1 Vitesse et débit théorique	20
II.1.3.2 Notion de la section contractée	21
II.1.3.3 Vitesse réelle et débit réel	22
II.1.4 Écoulement par orifice noyé en mince paroi	23
II.2 Ecoulements à travers les ajutages	24
II.2.1 Définitions et généralités	24
II.2.2 Calcul du débit à travers un ajutage	25
II.2.3 Ajutage cylindrique extérieur	26
II.2.4 Ajutage cylindrique intérieur (ajutage de Borda)	26
II.2.5 Ajutage conique convergent	27
II.2.6 Ajutage conique divergent	27
II.3 Ecoulement en charge variable	27

II.3.1	Ecoulement en charge variable à arrivée constante du liquide	28
II.3.2	Ecoulement en charge variable sans arrivée constante du liquide	29
II.3.3	Ecoulement à deux niveaux variables	29
	Exercices corrigés	31

### **Chapitre III**

#### **Ecoulements dans les conduites en charge**

III.1	Régimes d'écoulement -Nombres de Reynolds	41
III.2	Ecoulement dans un tube cylindrique	42
III.2.1	Détermination du débit -la formule de poiseuille	44
III.2.2	Détermination de la vitesse moyenne	44
III.2.3	Répartition des vitesses dans une section transversales	44
III.3	Pertes de charge	45
III.3.1	Pertes de charge linéaires	46
III.3.1.1	Formule de Darcy-Weisbach (D-W)	46
III.3.1.2	Formule de Hazen-Williams (H-W)	46
III.3.1.3	Formule de Chezy-Manning (C-M)	46
III.3.2	Coefficient de perte de charge $\lambda$	46
III.3.2.1	Régime laminaire	47
III.3.2.2	Régime turbulent	47
III.3.3	Pertes de charge singulières	48
III.4	Présence d'une machine hydraulique dans une conduite	49
III.4.1	Cas d'une pompe	50
III.4.2	Cas d'une turbine	50
III.4.3	Rendement d'une machine hydraulique	50
III.5	Systèmes complexes de conduites	51
III.5.1	Conduites équivalentes	51
III.5.2	Conduites en série	51
III.5.3	Conduites en parallèle	51
III.5.4	Courbe caractéristique d'une conduite (C.C.C.)	52
III.5.4.1.	Courbe caractéristique de conduites en série	53
III.5.4.2.	Courbe caractéristique des conduites en parallèle	53
III.6	Réseau de distribution	54
III.6.1	Réseau ramifié	54
III.6.1.1	Calcul d'un réseau ramifié	54
III.6.1.2	Canalisation assurant un service en route	55
III.6.2	Réseaux maillés	55

III.6.2.1 Calcul des débits	55
III.6.2.2 Méthode d'approximation de Hardy-Cross	56
Exercices corrigés	58

## Chapitre IV

### Écoulement à surface libre en régime uniforme

IV.1 Les écoulements à surface libre	79
IV.2 Types de canaux	79
IV.2.1 Canaux naturels	79
IV.2.1 Canaux artificiels	79
IV.3 Canal prismatique	79
IV.4 Les paramètres géométriques des canaux	79
IV.5 Les pentes	80
IV.6 Types d'écoulement	81
IV.6.1 Variabilité dans le temps	81
IV.6.2 Variabilité dans l'espace	81
IV.7. Régime uniforme et permanent	82
IV.7.1 Généralités	82
IV.7.2 Équation générale du régime uniforme	82
IV.7.3 Vitesse moyenne et le débit	84
IV.7.3.1 Formule de Manning	84
IV.7.3.2 Formule de Pavlovski	85
IV.7.3.3 Formule d'Agroskine	85
IV.7.3.4 Formule de Bazin	85
IV.7.3.5 Formule de Ganguillet et Kutter	85
IV.7.3.6 Formule de Kutter	85
IV.7.4. Profils de section	86
IV.7.4.1 Cas d'un canal rectangulaire	86
IV.7.4.2 Cas d'un canal trapézoïdal	86
IV.7.4.3 Cas d'une section transversale demi circulaire	87
IV.7.4.4 Canal à section transversale parabolique	87
IV.7.5 Calcul hydraulique des tuyaux d'évacuations et des tuyaux de drainage	88
Exercices corrigés	90

# Listes des Figures

Figure I.1 : Poussée d'un jet vertical sur une plaque plane	4
Figure I.2: Poussée d'un jet vertical sur un auget Hémisphère	5
Figure I.3: Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane inclinée sur l'axe du jet	6
Figure I.4 : Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane normale à l'axe du jet.	7
Figure I.5 : Poussée sur un coude de conduite horizontal.	8
Figure II.1: Écoulement à travers un orifice à mince paroi	21
Figure II.2 : Écoulement par orifice noyé	23
Figure II.3 : Types d'ajutage	25
Figure II. 4: Écoulement à travers les ajutages	25
Figure II.5 : Ajutage extérieur	26
Figure II.6 : Ajutage intérieur	26
Figure II.7 : Ajutage conique convergent	27
Figure II.8 : Ajutage conique divergent	27
Figure II.9: Écoulement en charge variable: (a) à arrivée constante (b) sans arrivée constante	28
Figure II.10 : Écoulement à deux niveaux variables	30
Figure III.1: Expérience de Reynolds	41
Figure III.2: les différents régimes d'écoulement d'un fluide	41
Figure III. 3: Forces agissant sur un élément cylindrique	43
Figure III.4: Répartition des vitesses dans une section transversales (régime laminaire)	45
Figure III.5 : Répartition des vitesses dans une section transversales (régime turbulent)	45
Figure III.6 : Diagramme de MOODY	48
Figure III.7 : Conduites en série	51
Figure III.8 : Conduites en parallèle	52
Figure III.9 : Courbe caractéristique d'une conduite	53
Figure III.10 : Courbe caractéristique des conduites en série	53
Figure III.11 : Courbe caractéristique des conduites en parallèle	54
Figure III.12: Réseau ramifié	54
Figure III.13 : Schéma de calcul du réseau ramifié.	55
Figure III.14:Réseau maillé	55
Figure III.15 : Schéma de calcul du réseau maille.	56
Figure IV.1 : Schéma des écoulements permanent et non permanent.	81

Figure IV.2 : Types d'Écoulement dans un canal à surface libre	82
Figure IV.3: Ligne de charge, ligne piézométrique et ligne d'énergie	83
Figure IV.4 : Canal rectangulaire	86
Figure IV.5 : Canal trapézoïdal	86
Figure IV.6 : Canal demi circulaire	87
Figure IV.7 : Canal parabolique	87
Figure IV.8 : tuyau d'évacuation	88
Figure IV.9 : Vitesse et débit d'écoulement dans une conduite circulaire coulant partiellement pleine	89

# Listes des Tableaux

Tableau III.1 : Les valeurs du coefficient de perte de charge singulière $\xi_s$	49
Tableau IV.1 : Propriétés géométriques et hydrauliques d'une conduite coulant partiellement pleine	89

# Liste des Symboles

Symbole	Signification
a	Hauteur relative
A	Coefficient de résistance
$A_{eq}$	Coefficient de résistance équivalent
B	Exposant du débit, largeur au miroir
b	Largeur au radier
C	Coefficient de rugosité de Hazen-Williams, coefficient de Chezy, type de courbe de remous
$C_d$	Coefficient de débit
$C_v$	Coefficient de vitesse
$C_c$	Coefficient de contraction
D, d	Diamètre
$D_h$	Diamètre hydraulique
E	Energie totale
$E_{cr}$	énergie spécifique critique
$E_s$	Energie spécifique
F	Force , force de frottement
$F_{ext}$	Force extérieure
Fr	Nombre de Froude
g	Accélération
H	Charge totale
$H_m$	Hauteur manométrique
h,y	Profondeur d'eau, tirant d'eau
$h_n$	Profondeur normale
$\Delta H$	Perte de charge
$\Delta H_L$	Perte de charge linéaire
$\Delta H_S$	Perte de charge singulière
i	Pente du fond du canal
I	Pente piézométrique
J	Pente hydraulique
k	Rugosité
L, l	Longueur
n	Coefficient de rugosité de Manning
M	Type de courbe de remous
m	Coefficient de rugosité, pente du talus, masse
dm	Variation de la masse
P	Pression, quantité de mouvement, périmètre mouillé , paramètre de la parabole
Pa	Puissance absorbée
$P_{atm}$	Pression atmosphérique
$P_{net}$	Puissance nette
Q	Débit volumique
$Q_{ct}$	Débit contracté
$Q_n$	Débit en nœud
$Q_r$	Débit en route
$Q_{sp}$	Débit spécifique
$\Delta Q$	Débit correctif
q	Débit unitaire
$q_m$	Débit massique

R,r	Réaction , rayon hydraulique, rayon
Re	Nombre de Reynolds
S	Section d'écoulement, surface, surface mouillée, type de courbe de remous
s	Section de l'orifice
S <sub>c</sub>	Section contractée
S <sub>cr</sub>	Section critique
V	Vitesse d'écoulement, Volume
V <sub>ct</sub>	Vitesse contactée
V <sub>max</sub>	Vitesse maximale
V <sub>moy</sub>	Vitesse moyenne
t	Temps
dt	Intervalle de temps
Z	Côte, hauteur géométrique, énergie potentielle
α	Angle, coefficient de coriolis
β	Coefficient de correction ou coefficient de Boussinesq,
γ	Poids spécifique
ε	Rugosité relative
ξ	Coefficient de perte de charge singulière, coefficient de perte de charge de l'orifice
ξ <sub>eb</sub>	Coefficient de perte de charge élargissement brusque
ξ <sub>en</sub>	Coefficient de perte de charge entrée d'une conduite
ξ <sub>rb</sub>	Coefficient de perte de charge rétrécissement brusque
ξ <sub>sor</sub>	Coefficient de perte de charge sortie d'une conduite
η	Rendement
θ	Angle
λ	Coefficient de frottement (Darcy –weisbach)
μ	Viscosité dynamique
ρ	Masse volumique
τ	Contrainte de cisaillement, hauteur relative
ν	Viscosité cinématique

## Chapitre I

# Équation des Quantités de Mouvement

### I.1 Quantité de mouvement

La quantité élémentaire de mouvement de la masse liquide qui traverse l'élément  $dS$  de la surface  $S$  avec une vitesse  $V$  pendant un temps  $dt$  est :

$$\rho dQ dt V = \rho V^2 dS dt \quad (I.1)$$

La quantité de mouvement de la masse liquide qui traverse toute la surface  $S$  avec une vitesse  $V$  pendant le temps  $dt$  est :

$$\int_S \rho V^2 dS dt = \rho dt \int_S V^2 dS \quad (I.2)$$

La quantité de mouvement fictive pour toute la section :

$$\rho Q dt V^2 \quad (I.3)$$

avec  $Q = V_{\text{moy}} S$ , ce qui donne:

$$\rho Q dt V_{\text{moy}}^2 \quad (I.4)$$

$\int_S V^2 dS$  Correspond à la quantité de mouvement réelle

$\int_S V_{\text{moy}}^2 dS$  Correspond à la quantité de mouvement fictive

Considérons  $\Delta V$  écart positif, négatif ou nul de la valeur réelle de la vitesse  $V$  d'un filet traversant la section  $S$  sur la valeur moyenne  $V_{\text{moy}}$ .

On a donc :

$$V = V_{\text{moy}} + \Delta V \quad (I.5)$$

$$V^2 = V_{\text{moy}}^2 + \Delta V^2 + 2V_{\text{moy}}\Delta V \quad (I.6)$$

Multiplions par  $dS$  et intégrons dans toute la section les deux membres :

$$\int_S V^2 dS = \int_S V_{\text{moy}}^2 dS + \int_S \Delta V^2 dS + 2 \int_S V_{\text{moy}} \Delta V dS \quad (I.7)$$

La somme des écarts doit être nulle :  $\int_S \Delta V dS = 0$

$$\int_S V^2 dS = V_{\text{moy}}^2 S + \int_S \Delta V^2 dS \quad (\text{I.8})$$

Divisons par  $V_{\text{moy}}^2 S$  :

$$\frac{\int_S V^2 dS}{V_{\text{moy}}^2 S} = 1 + \frac{\int_S \Delta V^2 dS}{V_{\text{moy}}^2 S} \quad (\text{I.9})$$

$\Delta V^2$  est positif, quel que soit  $\Delta V$  donc :  $\int_S \Delta V^2 dS > 0$

Posons :  $\frac{\int_S \Delta V^2 dS}{V_{\text{moy}}^2 S} = \eta \quad \eta > 0 \quad (\text{I.10})$

alors :

$$\frac{\int_S V^2 dS}{V_{\text{moy}}^2 S} = 1 + \eta = \beta \quad (\text{I.11})$$

$\beta$  : coefficient de correction de la quantité de mouvement ou coefficient de Boussinesq,

Pour un écoulement laminaire,  $\beta = 1,33$  et pour l'écoulement turbulent,  $\beta$  varie de 1,01 à 1,07. Dans la plus part des cas on peut prendre pour  $\beta$  l'unité.

La quantité de mouvement réelle du courant est donc :

$$\rho dt \int_S V^2 dS = \beta \rho dt V_{\text{moy}}^2 S \quad (\text{I.12})$$

La quantité de mouvement réelle est égale à  $\beta$  par la quantité de mouvement fictive. C'est-à-dire la quantité de mouvement réelle du courant liquide est toujours supérieure à la quantité de mouvement fictive correspondant à la vitesse moyenne ( $V$ ).

## I.2 Théorème de la quantité de mouvement -Théorème d'Euler-

La connaissance des forces exercées par le fluide en mouvement permettent de comprendre pourquoi un tuyau d'arrosage se met à tortiller lorsque l'on ouvre le robinet, ou encore d'avoir une idée des forces que subissent les canalisations lors du passage d'un fluide.

Une application directe du théorème d'Euler permet de déterminer les forces exercées par le fluide en mouvement sur les objets qui les environnent. Celles-ci sont exploitées dans divers domaines : production de l'énergie électrique à partir de l'énergie hydraulique grâce aux turbines, coupe des matériaux, etc.

Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à l'écoulement d'un fluide :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm \cdot d\vec{V}}{dt} \quad (\text{I.13})$$

avec :

$\vec{P}$  est la quantité de mouvement

$dm$  est la masse du fluide contenu dans l'enveloppe limitée par  $S_1$  et  $S_2$

$\vec{V}_1$  est la vitesse du fluide qui entre en  $S_1$

$\vec{V}_2$  est la vitesse du fluide qui sort par  $S_2$

$q_m$  est le débit massique égale à:

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad (\text{I.14})$$

$(\sum \vec{F}_{\text{ext}})$  représente l'ensemble des forces extérieures exercées sur un fluide isolé (contenu dans l'enveloppe limitée par  $S_1$  et  $S_2$ ) est égale à la variation de la quantité du mouvement qui entre en  $S_1$  à une vitesse  $V_1$  et sort par  $S_2$  à une vitesse  $V_2$ .

Le théorème d'Euler s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = \rho Q(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (\text{I.15})$$

On généralise ce théorème à un courant liquide, on remplace les vitesses par les vitesses moyennes en faisant introduire le coefficient de correction de la quantité de mouvement  $\beta$ .

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \rho Q(\beta_2 \vec{V}_2 - \beta_1 \vec{V}_1) \quad (\text{I.16})$$

**Remarque :**

Les forces exercées par le fluide sur l'obstacle sont selon la troisième loi de Newton égales en magnitude mais opposées en direction à  $R$ .

### I.3 Application du théorème des quantités de mouvement

#### I.3.1 Application d'un jet vertical frappant un obstacle

##### I.3.1.1. Cas de plaque plane

Soit un jet d'eau vertical frappant une plaque plane (Figure I.1), si on néglige les frottements et les pertes de charge, la seule force extérieure est la force qui s'exerce sur l'obstacle F.

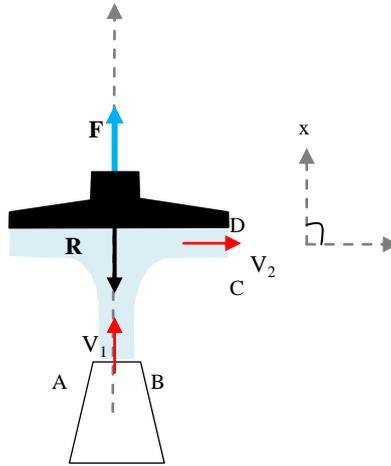


Figure I.1 : Poussée d'un jet vertical sur une plaque plane

On suppose que  $\beta_1 = \beta_2 = 1$

Appliquons le théorème d'Euler au volume ABCD

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

Sur l'axe Ox, on a :

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_1 \quad (\text{I.17})$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est

$$q_m V_2 = \rho Q V_2 \cos \alpha \quad (\text{I.18})$$

La force R opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = \rho Q (V_2 \cos \alpha - V_1) \quad (\text{I.19})$$

où  $\alpha$  est l'angle entre la direction du jet sortant et l'axe Ox

Si  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0$  et  $V_1 = V_2$

$$R = -\rho Q V \quad (\text{I.20})$$

Où le signe négatif indique que R est dirigée vers le bas, alors qu'on a supposé R dirigée vers le haut.

Force F exercée sur l'obstacle est égale et opposée en direction à la force R :

$$F = -R = \rho QV \quad (\text{I.21})$$

### I.3.1.2. Cas de l'auget Hémisphère

Soit un jet d'eau vertical frappant un hémisphère (Figure I.2)

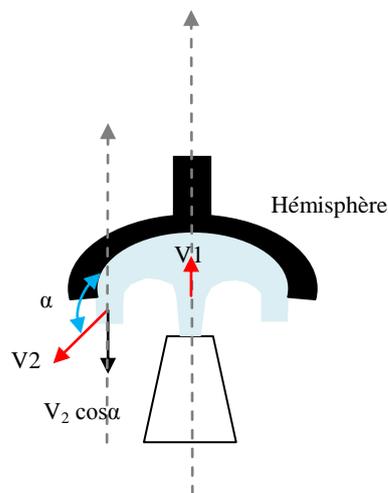


Figure I.2: Poussée d'un jet vertical sur un auget Hémisphère

La projection sur l'axe Ox

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_1 \quad (\text{I.22})$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_2 \cos \alpha \quad (\text{I.23})$$

La force opposée R au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = \rho Q (V_2 \cos \alpha - V_1) \quad (\text{I.24})$$

où  $\alpha$  est l'angle entre la direction du jet sortant et l'axe Ox

Si  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\cos \alpha = -1$

$$R = -\rho Q (V_2 + V_1) \quad (\text{I.25})$$

La conservation du débit donne :  $V_1 = V_2$

On a alors :

$$R = -2\rho QV \quad (\text{I.26})$$

Force  $F$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée en direction à celle-ci :

$$F = 2\rho QV \quad (\text{I.27})$$

Pour un même débit et en absence de frottement la force exercée par le jet sur l'hémisphère est le double de celle exercée sur la plaque.

### I.3.2 Application d'un jet horizontal sur une plaque

#### I.3.2.1. Cas d'une plaque plane inclinée

Soit un jet horizontal animé d'une vitesse  $V$  heurtant une plaque verticale immobile dont le plan fait l'angle  $\alpha$  avec la direction du jet (Figure I.3).

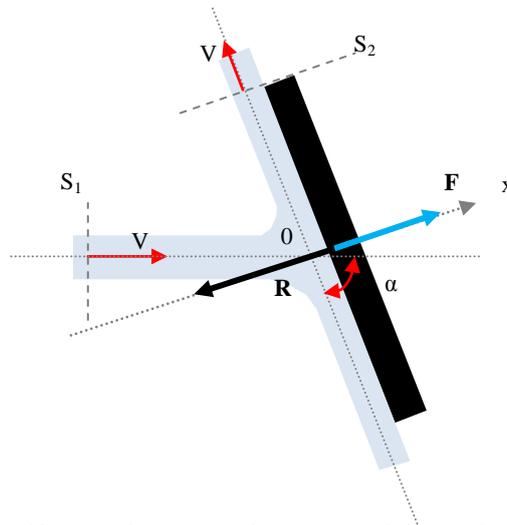


Figure I.3: Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane inclinée sur l'axe du jet.

On suppose que  $\beta_1 = \beta_2 = 1$

Appliquons le théorème d'Euler à la partie de fluide comprise entre  $S_1$  et  $S_2$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \quad (\text{I.28})$$

Les forces extérieures appliquées sur le fluide sont :

- Le poids dont la projection sur  $OX$  est nul
- Les pressions partout égales à la pression atmosphérique. Sauf au voisinage du point d'impact, la plaque exerce sur le jet une pression dynamique totale égale et opposée à  $F$ .
- Les frottements du jet sur la plaque sont négligeables.

En appliquant le théorème d'Euler en projection sur un axe Ox normale à la plaque de telle façon que la projection de  $F_2$  sur cet axe soit nulle

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle:

$$q_m V = \rho Q V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \rho Q V \sin\alpha \quad (I.29)$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle égale à la force appliquée en S2 et qui est tangente à la plaque.

$$q_m V = 0 \quad (I.30)$$

La force R opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R = -\rho Q V \sin\alpha \quad (I.31)$$

Force F exercée sur l'obstacle est égale et opposée à celle-ci :

$$F = -R = \rho Q V \sin\alpha \quad (I.32)$$

### I.3.2.2. Cas d'une plaque plane

On considère maintenant un jet horizontal frappe une plaque verticale immobile (Figure I.4).

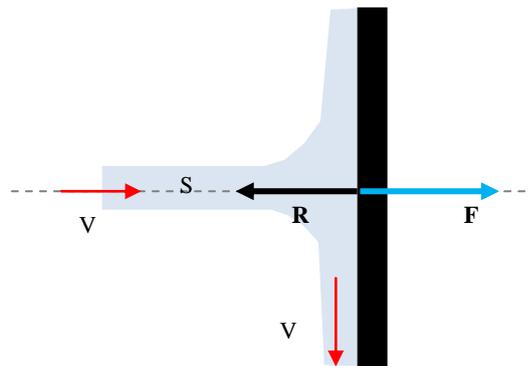


Figure I.4 : Poussée d'un jet horizontal sur une plaque plane normale à l'axe du jet.

La plaque est normale au jet  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , la force F de l'équation (I.31) a pour expression :

$$F = \rho Q V \quad (I.33)$$

Soit S la section droite du jet, on peut écrire :

$$F = \rho S V^2 = 2\gamma S \frac{V^2}{2g} \quad (I.34)$$

$$\frac{F}{S} = 2\gamma \frac{V^2}{2g} \quad (I.35)$$

$\frac{F}{S}$  la pression unitaire du jet est égale au double de la pression due à la vitesse.

### I.3.3 Action d'un jet sur un coude

Considérons un coude de conduite horizontale, à l'intérieur duquel un jet animé d'une vitesse  $V$  et un débit  $Q$  (Figure I.5).

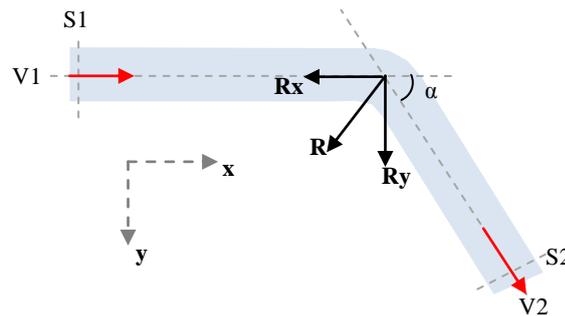


Figure I.5 : Poussée sur un coude de conduite horizontal.

Selon la direction OX

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est égale :

$$q_m V = \rho Q V_1 \quad (I.36)$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle égale :

$$q_m V_2 = \rho Q V_2 \cos \alpha \quad (I.37)$$

La force  $R_x$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R_x + P_1 S_1 - P_2 S_2 \cos \alpha = \rho Q (V_2 \cos \alpha - V_1) \quad (I.38)$$

$$R_x = \rho Q (V_1 - V_2 \cos \alpha) + P_1 S_1 - P_2 S_2 \cos \alpha \quad (I.39)$$

Selon la direction OY

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est égale :

$$q_m V_1 = 0 \quad (I.40)$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle égale :

$$q_m V_2 = \rho Q V_2 \sin \alpha \quad (I.41)$$

La force  $R_y$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R_y - P_2 S_2 \sin \alpha = \rho Q V_2 \sin \alpha \quad (\text{I. 42})$$

$$R_y = (P_1 S_1 + \rho Q V_1) \sin \alpha \quad (\text{I. 43})$$

La force  $F_x$  et  $F_y$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée à  $R_x$  et  $R_y$  :

$$\begin{cases} F_x = \rho Q (V_2 \cos \alpha - V_1) - P_1 S_1 + P_2 S_2 \cos \alpha \\ F_y = -(P_1 S_1 + \rho Q V_1) \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{I. 44})$$

On pose :

$$\begin{cases} S_1 = S_2 = S \\ P_1 = P_2 \\ V_1 = V_2 = V \end{cases}$$

La réaction  $R$  de l'obstacle devient :

$$R = \begin{cases} R_x = (\rho Q V + P \cdot S)(1 - \cos \alpha) \\ R_y = (P \cdot S + \rho Q V) \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{I. 45})$$

La force  $F$  de l'eau sur l'obstacle devient :

$$F = \begin{cases} F_x = (\rho Q V + P \cdot S)(\cos \alpha - 1) \\ F_y = -(P \cdot S + \rho Q V) \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{I. 46})$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2(P \cdot S + \rho Q V) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{I. 47})$$

Pour un coude à angle droit on a donc :

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$F = (\rho Q V + P \cdot S) \sqrt{2} \quad (\text{I. 48})$$

## Exercices corrigés

### Exercice 1

Un liquide s'écoule dans une conduite circulaire. Pour une distribution des vitesses vérifiant

$$l'équation \quad V = \frac{V_{max}(r_0^2 - r^2)}{r_0^2}$$

- Calculer le coefficient de correction de la quantité de mouvement  $\beta$

### Solution 1

Calcul de la vitesse moyenne

$$V_{moy} = \frac{Q}{S} = \frac{\int V \cdot dS}{S} = \frac{\int \frac{V_{max}(r_0^2 - r^2)}{r_0^2} (2\pi r dr)}{\pi r_0^2} = \frac{2V_{max}}{r_0^4} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) dr = \frac{V_{max}}{2}$$

En remplaçant la valeur de la vitesse moyenne dans l'équation de  $\beta$ , nous obtenons :

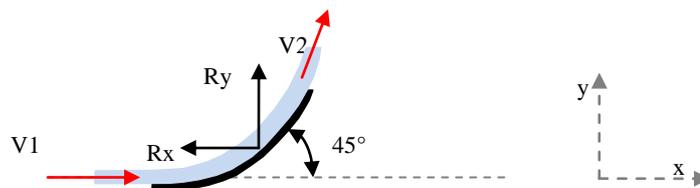
$$\beta = \frac{\int_S V^2 dS}{V_{moy}^2 S} = \frac{1}{S} \int \frac{V^2}{V_{moy}^2} dS = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} \left( \frac{V_{max}(r_0^2 - r^2)/r_0^2}{V_{max}/2} \right)^2 2\pi r dr$$

$$\beta = \frac{8}{r_0^6} \left( \frac{1}{2} r_0^6 - \frac{1}{2} r_0^6 + \frac{1}{2} r_0^6 \right) = \frac{4}{3} = 1,33$$

## Exercice2

Une plaque courbée dévie un courant d'eau de 76 mm de diamètre de 45° pour une vitesse du jet de 40m/s vers le haut.

-Calculer les composantes de la force exercée sur la plaque recourbée.



## Solution 2

Selon la direction Ox

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_{1x}$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_{2x} \cos \alpha$$

La force opposée  $R_x$  au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R_x = \rho Q (V_{2x} \cos \alpha - V_{1x})$$

$$V_{1x} = V_{2x} = V_x$$

$$R_x = \rho Q V_x (1 - \cos \alpha) = \rho S V^2 (1 - \cos \alpha) = 1000 \cdot \frac{\pi (0,076)^2}{4} \cdot 40^2 \cdot (1 - \cos 45^\circ)$$

$$R_x = 2125 \text{ N vers la gauche}$$

Force  $F_x$  exercée par l'eau sur l'obstacle est égale et opposée en direction à celle-ci :

$$F_x = -R_x = -2125N \text{ vers la droite}$$

Selon la direction OY

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_{1y}$$

$$V_{1y} = 0$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_{2y} \sin \alpha$$

La force opposée  $R_y$  au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R_y = \rho Q (V_{2y} \sin \alpha - 0)$$

$$V_{2y} = V$$

$$R_y = \rho Q V \sin \alpha$$

$$R_x = \rho Q V \sin \alpha = \rho S V^2 \sin \alpha = 1000 \cdot \frac{\pi (0,076)^2}{4} \cdot 40^2 \cdot \sin 45^\circ$$

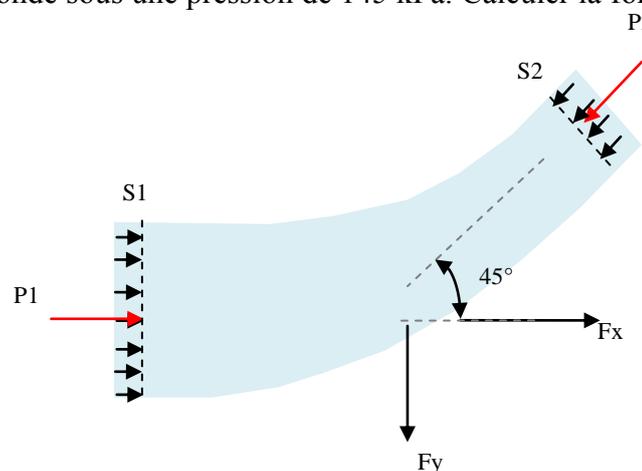
$$R_y = 5129N \text{ vers le haut}$$

Force exercée  $F_y$  sur l'obstacle est égale et opposée à celle-ci :

$$F_y = -R_y = -5129N \text{ vers le bas}$$

### Exercice 3

Un coude converge de  $45^\circ$ , de 600 mm de diamètre en amont, de 300 mm en aval, débite  $0,444 \text{ m}^3$  d'eau à la seconde sous une pression de 145 kPa. Calculer la force exercée par l'eau sur le coude.



**Solution 3**

$$V_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = 1,57 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = 6,28 \text{ m/s}$$

En appliquant l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 :

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

On a :

$$Z_1 = Z_2 \text{ (la différence est négligeable)}$$

L'équation de Bernoulli devient :

$$P_2 = \frac{\rho(V_1^2 - V_2^2)}{2} + P_1 = \frac{1000(1,57^2 - 6,28^2)}{2} + 145 \cdot 10^3$$

$$P_2 = 126,51 \text{ kPa}$$

Selon la direction Ox

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est égale :

$$q_m V_1 = \rho Q V_1$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle égale :

$$q_m V_2 = \rho Q V_2 \cos \alpha$$

La force  $R_x$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R_x + P_1 S_1 - P_2 S_2 \cos \alpha = \rho Q (V_2 \cos \alpha - V_1)$$

$$R_x = P_1 S_1 - \rho Q (V_2 \cos \alpha - V_1) - P_2 S_2 \cos \alpha$$

$$R_x = -33,38 \text{ kN}$$

Force exercée  $F_x$  sur l'obstacle est égale et opposée à  $R_x$  :

$$F_x = -R_x = 33,38 \text{ kN}$$

Selon la direction OY

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = 0$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_2 \sin \alpha$$

La force  $R_y$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R_y - P_2 S_2 \sin \alpha = \rho Q (V_2 \sin \alpha)$$

$$R_y = (\rho Q V_2 + P_2 S_2) \sin \alpha$$

$$R_y = 8,27 \text{ kN}$$

Force  $F_y$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée à  $R_y$  :

$$F_y = -R_y = -8,27 \text{ kN}$$

La Force  $F$  exercée sur l'obstacle est égale :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 34,38 \text{ kN}$$

Angle d'inclinaison de la force

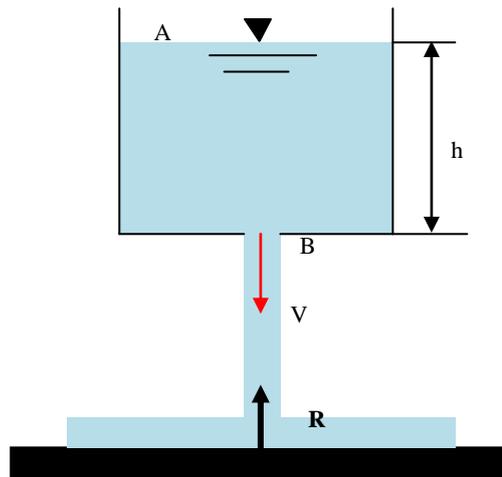
$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = -0,247$$

$$\alpha = 13,91^\circ$$

#### Exercice 4

Un jet d'eau verticale sort par l'orifice circulaire d'un réservoir. Le jet se bute contre une plaque horizontale perpendiculaire à l'axe du jet. Si le diamètre de l'orifice est 12,5 cm et la hauteur d'eau dans le réservoir est 9 m :

1. Calculer la vitesse du jet à la sortie du réservoir ;
2. Calculer la force nécessaire pour maintenir la plaque en place contre la force du jet.



#### Solution 4

En appliquant l'équation de Bernoulli entre A et B :

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + Z_A = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + Z_B$$

On a :

$$Z_A = 9 \text{ m}, Z_B = 0, V_A = 0 \text{ et } P_1 = P_2 = P_{atm}$$

Donc, la vitesse du jet à la sortie du réservoir

$$V_B = \sqrt{2gZ_1} = 13,29 \text{ m/s}$$

La force R exercée par la plaque sur le fluide est égale :

$$R = \rho Q(V_2 - V_1) = \rho S V_2^2 = 1000 \cdot \frac{\pi(12,5 \cdot 10^{-2})^2}{4} (13,29)^2 = 2166,40 \text{ N}$$

La force  $F$  nécessaire pour maintenir la plaque est égale à l'opposée de  $R$  :

$$F = -R = -2166,40 \text{ N}$$

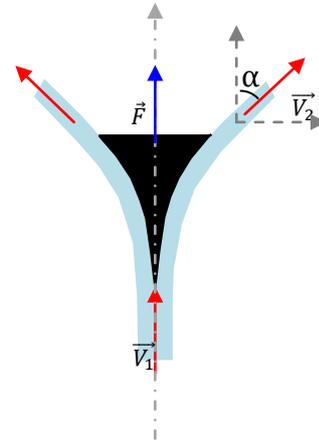
#### Exercice 4

Considérons un obstacle symétrique par rapport à l'axe  $z$ . Le jet d'un écoulement de débit  $Q = 0,04 \text{ m}^3/\text{s}$ , de vitesse  $V_1$  et de direction parallèle à l'axe  $z$ , percute l'obstacle qui le dévie d'un angle  $\alpha$ .

Le fluide quitte l'obstacle à une vitesse  $V_2$  de direction faisant un angle ( $\alpha = 45^\circ$ ) par rapport à l'axe  $Z$ .

On admettra que  $V_1 = V_2 = 2 \text{ m/s}$ .

- 1) Calculer la réaction de l'obstacle sur le liquide
- 2) Déduire la force exercée par le liquide sur l'obstacle  $F$



#### Solution 4

Sur l'axe  $Ox$ , on a :

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_1$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_2 \cos \alpha$$

La force  $R$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R = \rho Q(V_2 \cos \alpha - V_1) \Rightarrow R = \rho Q(V_1 - V_2 \cos \alpha)$$

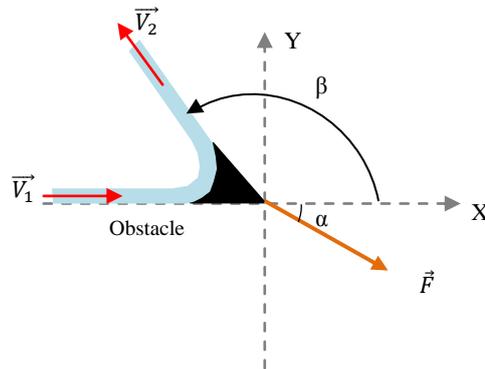
$$R = \rho Q V (1 - \cos 45^\circ) = 1000 \cdot 0,04 \cdot 2 (1 - \cos 45^\circ) = 23,43 \text{ N} \quad \text{vers le bas}$$

Force  $F$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée en direction à celle-ci :

$$F = -R = -23,43 \text{ N} \quad \text{vers le haut}$$

**Exercice 5**

La figure ci-dessous représente un jet d'eau horizontal qui frappe un obstacle à un débit  $Q=0,002 \text{ m}^3/\text{s}$ . L'obstacle provoque une déflexion du jet d'un angle  $\beta=120^\circ$ . On admettra que  $V_1=V_2=3 \text{ m/s}$ .



En appliquant le théorème de quantité de mouvement, donner l'expression vectorielle de la réaction de l'obstacle sur le liquide en fonction de  $Q$ ,  $V_1$  et  $V_2$  ensuite calculer ses composantes  $R_x$  et  $R_y$ .

- Déduire la force exercée par le liquide sur l'obstacle (ses composantes  $F_x$  et  $F_y$ ) ensuite calculer la force résultante  $F$
- Quel est son angle d'inclinaison  $\alpha$  ?

**Solution 5**

Selon la direction  $Ox$

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_{1x}$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_{2x} = \rho Q V_2 \cos 120^\circ$$

La force  $R_x$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R_x = \rho Q (V_{2x} - V_{1x}) = \rho Q V (\cos 120^\circ - 1) \Rightarrow R_x = 9 \text{ N vers la gauche}$$

Force  $F_x$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée à:

$$F_x = -R_x = -9 \text{ N vers la droite}$$

Selon la direction  $OY$

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_{1y} = 0$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_{2y} = \rho Q V_2 \cos 30^\circ$$

La force  $R_y$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$R_y = \rho Q (V_{2y} - V_{1y}) = \rho Q V \sin 30^\circ = 5,19 \text{ N vers le haut}$$

Force  $F_y$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée à  $R_y$  :

$$F_y = -R_y = -5,19 \text{ N vers le bas}$$

La Force  $F$  exercée sur l'obstacle est égale :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 10,40 \text{ kN}$$

Angle d'inclinaison de la force

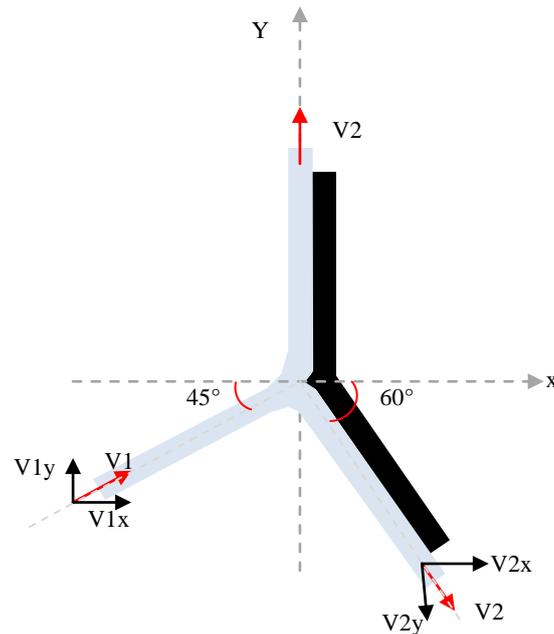
$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = -0,577$$

$$\alpha = -30^\circ$$

### Exercice 6

La surface fixe représentée par la figure divise le jet d'eau de sorte que 30 l/s s'écoulent dans chaque direction.

Pour une vitesse initiale  $V=15\text{m/s}$  calculer les composantes selon X et Y nécessaires pour maintenir la surface en équilibre.



### Solution 6

Selon la direction Ox

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_{1x} = \rho Q V_1 \cos 45^\circ = 1000 \cdot 0,06 \cdot 15 \cdot \cos 45^\circ = 636 \text{ N}$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \frac{1}{2} \rho Q V_{2x}$$

$$q_m V_2 = \frac{1}{2} \rho Q V_{2x} = \frac{1}{2} \rho Q V \cos 60^\circ = \frac{1}{2} 1000 \cdot 0,06 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ = 225 \text{ N}$$

La force  $R_x$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R_x = \frac{1}{2} \rho Q V_{2x} - \rho Q V_{1x} \Rightarrow R_x = -225 + 636 = 411 \text{ N} \quad \text{vers la gauche}$$

Force  $F_x$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée en direction à :

$$F_x = -R_x = -411 \text{ N} \quad \text{vers la droite}$$

Selon la direction OY

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_{1y} = \rho Q V_1 \sin 45^\circ = 1000 \cdot 0,06 \cdot 15 \cdot \sin 45^\circ = 636 \text{ N}$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \frac{1}{2} \rho Q V_2 - \frac{1}{2} \rho Q V_{2y}$$

$$q_m V_2 = \frac{1}{2} \rho Q V - \frac{1}{2} \rho Q V \sin 60^\circ = \frac{1}{2} 1000 \cdot 0,06 \cdot 15 (1 - \sin 60^\circ) = 60 \text{ N}$$

La force  $R_y$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

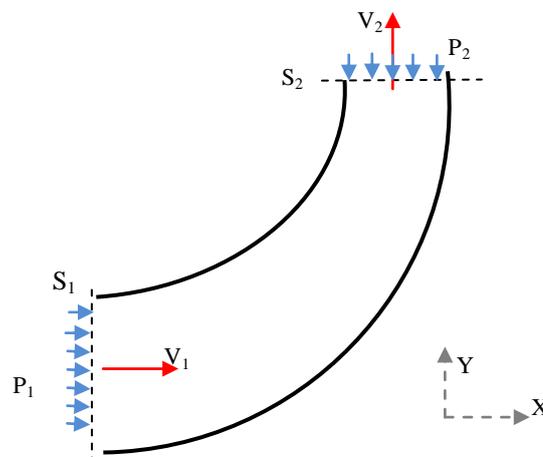
$$-R_y = \left( \frac{1}{2} \rho Q V - \frac{1}{2} \rho Q V \sin 60^\circ \right) - \rho Q V_{1y} \Rightarrow R_y = -60 + 636 = 576 \text{ N vers le bas}$$

Force  $F_y$  exercée sur l'obstacle est égale et opposée à  $R_y$  :

$$F_y = -R_y = -576 \text{ N vers le haut}$$

### Exercice 7

Calculer la force exercée par l'eau sur un coude converge de  $90^\circ$ . on prend les données suivantes :  $P_1 = 16 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $S_1 = 0,08 \text{ m}^2$ ,  $V_1 = 5 \text{ m/s}$ , ;  $P_2 = 10 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $S_2 = 0,01 \text{ m}^2$ ,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$



### Solution 7

$$Q = V_1 S_1 = 5 \cdot 0,08 = 0,4 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{0,4}{0,01} = 40 \text{ m/s}$$

Selon la direction  $Ox$

La quantité de mouvement du fluide à l'entrée de l'obstacle est égale :

$$q_m V_1 = \rho S_1 V_1^2$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle égale :

$$q_m V_2 = 0$$

La force  $R_x$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R_x + P_1 S_1 = \rho Q(0 - V_1) = -\rho S_1 V_1^2$$

$$R_x = P_1 S_1 + \rho S_1 V_1^2 = 16 \cdot 10^5 \cdot 0,08 + 1000 \cdot 0,08 \cdot 5^2$$

$$R_x = +130000 \text{ N}$$

Force exercée  $F_x$  sur l'obstacle est égale et opposée à  $R_x$  :

$$F_x = -R_x = -130000 \text{ N}$$

Selon la direction OY

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_1 = \rho Q V_1 = 0$$

La quantité de mouvement du fluide à la sortie de l'obstacle est :

$$q_m V_2 = \rho Q V_2$$

La force  $R_y$  opposée au jet étant égale à la variation de la quantité de mouvement :

$$-R_y - P_2 S_2 = \rho Q(V_2 - 0)$$

$$R_y = -\rho Q V_2 - P_2 S_2 = -1000 \cdot 0,4 \cdot 40 - 10 \cdot 10^5 \cdot 0,01 = -26000 \text{ N}$$

Force exercée  $F_y$  sur l'obstacle est égale et opposée à  $R_y$  :

$$F_y = -R_y = 26000 \text{ N}$$

**La force F égale :**

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 132,57 \text{ kN}$$

L'angle que fait la force avec l'horizontale

$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = -0,2$$

$$\alpha = -11,31^\circ$$

## Chapitre II

### Écoulements à travers les orifices et les ajutages

#### II.1 Écoulements à travers les orifices

##### II.1.1 Définitions

Les *orifices* sont des ouvertures de forme régulière (circulaire, triangulaire, rectangulaire, ect.), situés dans les parois ou dans le fond d'un récipient, à travers lesquels s'écoule le liquide contenu dans le récipient. Les orifices sont des dispositifs très précis pour mesurer le débit d'écoulement.

##### II.1.2 Classification des orifices

On distingue les types suivants des orifices selon:

- Les dimensions relatives de l'orifice : on considère un orifice petit si la dimension verticale ou le diamètre de l'orifice est inférieur à  $0,1$  de la charge  $H$  (hauteur d'eau qui provoque la sortie du liquide). L'orifice est grand lorsque la dimension verticale ou le diamètre de l'orifice est supérieur à  $0,1$  de la charge  $H$
- L'épaisseur relative de la paroi : Orifices à paroi mince et à paroi épaisse. L'orifice est dit à paroi mince quand les bords sont effilés et l'épaisseur ( $e$ ) ne dépasse pas  $3d$ . Dans ce cas, le courant liquide sortant de l'orifice ne touche pas la paroi dans les limites de son épaisseur.
- L'écoulement qui se fait à travers un orifice peut être noyé (partiellement et totalement) et dénoyé. Un orifice est dit noyé si le niveau de la surface libre à l'aval est au-dessus de l'orifice. Dans le cas contraire l'orifice est dit non noyé. Il existe différents types d'orifices non noyés, à savoir : les orifices à mince paroi, les orifices à veine moulée et les orifices à contraction incomplète

##### II.1.3 Écoulement par orifice dénoyé en mince paroi

###### II.1.3.1 Vitesse et débit théorique

Considérons un réservoir contenant un liquide dont le niveau est maintenu constant en A-B, le régime est alors permanent, muni d'un petit orifice en mince paroi à sa base, de section  $S$  (Figure II.1). Une ligne de courant partant de la surface au point (0) et arrivant à l'orifice au point (1).

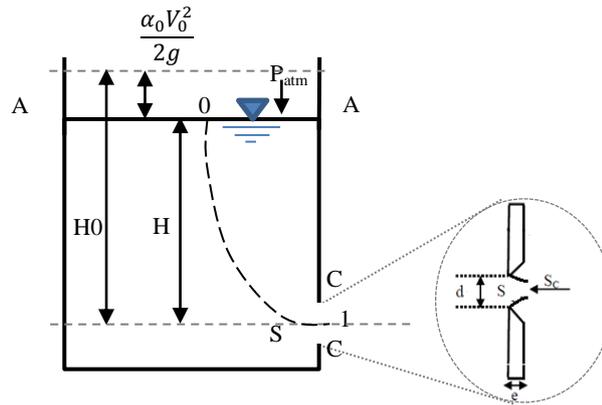


Figure II.1: Ecoulement à travers un orifice à mince paroi

L'équation de Bernoulli appliquée entre le point (0) situé à la surface libre A-A et le point (1) situé au centre de l'orifice C-C à une profondeur H et en négligeant les pertes de charge, s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + 0 \quad (\text{II.1})$$

avec :

$$P_1 = P_2 = P_{atmosphérique}, V_1 \ll V_2 \text{ et } Z_1 - Z_2 = H$$

La relation de Bernoulli devient :

$$H = \frac{V_2^2}{2g} \quad (\text{II.2})$$

La vitesse de sortie, dans une section où des filets sont parallèles, est donnée théoriquement par la *Formule de Torricelli*

$$V_2 = \sqrt{2gH} \quad (\text{II.3})$$

Le débit théorique Q est le produit de la vitesse théorique de l'écoulement V par la section de l'orifice (s).

$$Q = V \cdot s \quad (\text{II.4})$$

$$Q = S\sqrt{2gH} \quad (\text{II.5})$$

où :  $P_1$  la pression dans la section A-A;  $P_2$  la pression dans la section C-C;  $V_1$  vitesse du liquide dans la section A-A ;  $V_2$  vitesse du liquide dans la section contractée ; H est la charge.

### II.1.3.2 Notion de la section contractée

Avant d'ouvrir l'orifice, les pressions sont perpendiculaire à la paroi de l'orifice, après l'ouverture, les filets ne sortent pas perpendiculairement à la normale de la paroi parce que les pressions ne sont pas égales à l'amont et à l'aval de l'orifice. A l'amont on a les pressions

hydrostatiques à l'aval on a les pressions atmosphériques ce qui donne à l'écoulement une courbure.

En C-C, la surface  $s_c < s$ , on aura une contraction complète de la veine.

La contraction est caractérisée par un coefficient de contraction  $C_c$ , qui est le rapport de la section contractée à la section transversale de l'orifice :

$$C_c = \frac{s_c}{s} \quad s_c = C_c s \quad (\text{II.6})$$

avec :

$s_c$  est la section contractée,  $s$  la section de l'orifice et  $C_c$  le coefficient de contraction

### II.1.3.3. Vitesse réelle et débit réel

La vitesse théorique, calculée par la formule de Torricelli, est supérieure à la vitesse réelle à cause de la contraction de la section d'écoulement au niveau de l'orifice et l'influence des pertes de charge à la sortie.

Établissons l'équation de Bernoulli entre la surface libre du réservoir A-A et la section réelle de l'orifice C-C par rapport au plan O-O donne (Figure II.I) :

$$H + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = 0 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \Delta H \quad (\text{II.7})$$

$\Delta H$  : les pertes de charge en écoulement par orifice en mince paroi, sont représentées sous la forme suivante :

$$\Delta H = \sum \xi \frac{V_1^2}{2g} \quad (\text{II.8})$$

$\xi$  : coefficient des pertes de charge de l'orifice.

L'équation (II.7) devient :

$$H + \frac{P_0 - P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \sum \xi \frac{V_1^2}{2g} \quad (\text{II.9})$$

On pose  $H_0$  égale :

$$H_0 = H + \frac{P_0 - P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} \Rightarrow H_0 = \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \sum \xi \frac{V_1^2}{2g} \quad (\text{II.10})$$

$$H_0 = \frac{V_1^2}{2g} (\alpha_1 + \sum \xi) \quad (\text{II.11})$$

Par conséquent, la vitesse d'écoulement de liquide dans la section contractée est :

$$V_{ct} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1 + \sum \xi)}} \sqrt{2gH_0} \quad (\text{II.12})$$

Désignons l'expression  $\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1 + \sum \xi)}}$  par  $C_v$  :

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1 + \sum \xi)}} \quad (\text{II.13})$$

La vitesse d'écoulement dans la section contractée du petit orifice dénoyé en mince paroi :

$$V_{ct} = C_v \sqrt{2gH_0} \quad (\text{II.14})$$

$C_v$  appelé *coefficient de vitesse*, étant le rapport de la vitesse réelle de l'écoulement à la vitesse théorique.

$$C_v = \frac{V_{ct}}{\sqrt{2gH_0}} \quad (\text{II.15})$$

Le débit réel dans la section contractée devient alors :

$$Q_{ct} = S_{ct} V_{ct} = C_c S C_v \sqrt{2gH_0} \quad (\text{II.16})$$

Avec  $C_d = C_c C_v$

La formule définitive pour le calcul de débit d'écoulement dans la section contractée du petit orifice dénoyé en mince paroi en charge constante :

$$Q_{ct} = C_d S \sqrt{2gH_0} \quad (\text{II.17})$$

Lorsque le nombre de Reynolds dépasse 100000, les valeurs des coefficients de contraction, de vitesse et de débit sont considérées comme constantes :  $C_c = 0,62$  à  $0,64$ ,  $C_v = 0,97$ ,  $C_d = 0,60$  à  $0,62$

### II.1.4 Écoulement par orifice noyé en mince paroi

En appliquant l'équation de Bernoulli entre deux sections AA' et BB', coïncidant avec la surface libre en amont et en aval de l'orifice (Figure II.2), on trouve la relation suivante :

$$H_1 = H_2 + \Delta H \quad (\text{II.18})$$

$$H = H_1 - H_2 = \Delta H \quad (\text{II.19})$$

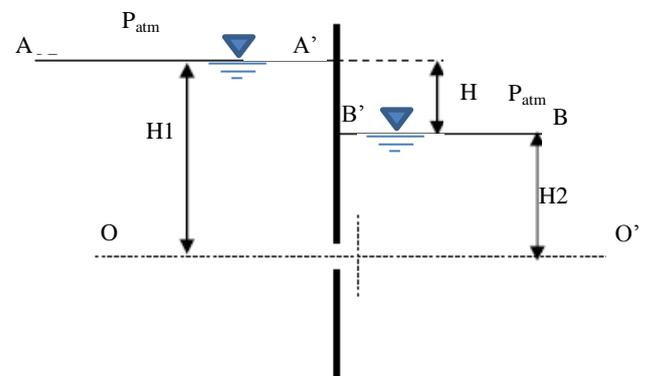


Figure II.2 : Écoulement par orifice noyé

avec :

$\Delta H$  : les pertes de charge totales sont la somme de perte de charge dans l'orifice et de perte de charge pour un élargissement brusque dans la section contractée, elles sont représentées sous la forme suivant :

$$\Delta H = \xi_{eb} \frac{V_{ct}^2}{2g} + \xi \frac{V_{ct}^2}{2g} \quad (\text{II.20})$$

$\xi$  coefficient des pertes de charge de l'orifice.  $\xi_{eb}$  coefficient de perte dans l'élargissement brusque.

La vitesse d'écoulement du liquide dans la section contractée est :

$$V_{ct} = \frac{1}{\sqrt{\xi_{eb} + \xi}} \sqrt{2gH} \quad (\text{II.21})$$

Dans ce cas, le coefficient de vitesse  $C_v$  est exprimé de la même façon qu'en écoulement par orifice dénoyé.

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{\xi_{eb} + \xi}} \quad (\text{II.22})$$

Par conséquent, la vitesse d'écoulement dans la section contractée du petit orifice noyé en mince paroi :

$$V_{ct} = C_v \sqrt{2gH} \quad (\text{II.23})$$

Le débit dans la section contractée du petit orifice noyé:

$$Q_{ct} = C_d S \sqrt{2gH} \quad (\text{II.24})$$

les grandes valeurs du nombre de Reynolds, les valeurs expérimentales des coefficients de vitesse et de débit en écoulement noyé peuvent être prises les mêmes qu'en écoulement dénoyé  $C_v=0,97$  ;  $C_d=0,60$  à  $0,62$

## II.2 Écoulements à travers les ajutages

### II.2.1 Définitions et généralités

L'ajutage est un court tube raccordé d'une façon serrée à l'orifice en mince paroi si l'entrée de l'ajutage a un bord vif. Le jet du liquide remplit totalement la section transversale de l'ajutage à la sortie si la longueur de l'ajutage  $l$  égale à :

$$l = (3 \text{ à } 5)d$$

où  $d$  est le diamètre intérieur de l'ajutage.

En pratique, on utilise les types d'ajutage suivants : ajutage cylindrique entrant (figure II.3a), ajutage cylindrique extérieur (figure II.3b), ajutage conique convergent (figure II.3c), ajutage conique divergent (figure II.3d), ajutage de forme conoïdale (figure II.3e),

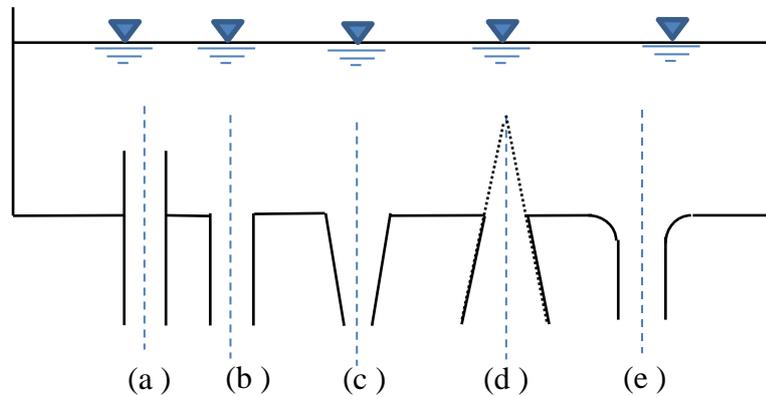


Figure II.3 : Types d'ajutage

### II.2.2 Calcul du débit à travers un ajutage

Pour calculer la vitesse et le débit dans le cas d'un ajutage cylindrique extérieur, on applique l'équation de Bernoulli entre les sections A-A coïncidant avec la surface libre et 1-1 à la sortie de l'ajutage par rapport au plan C-C on obtient (figure II.4):

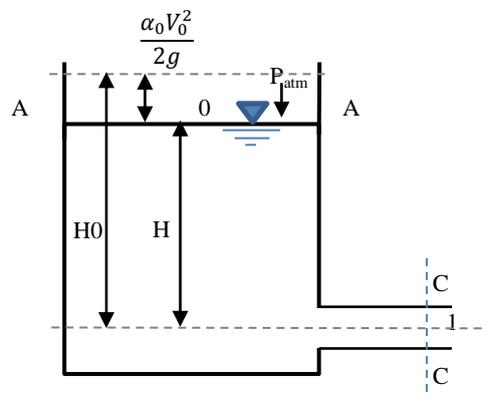


Figure II.4: Écoulement à travers les ajutages

$$H + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 V_0^2}{2g} = 0 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \Delta H \quad (\text{II.25})$$

avec :

$\Delta H$  : les pertes de charge totales sont égales à la somme de perte de charge linéaire et de perte de charge singulière due à l'entrée dans un tuyau, elles sont représentées sous la forme suivante :

$$\Delta H = \xi_{en} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{V_1^2}{2g} \quad (\text{II.26})$$

$\lambda$  : coefficient de frottement.  $\xi_{en}$  : coefficient de perte de charge, par entrée ( $\xi_{en} = 0,5$ )

La vitesse d'écoulement à la sortie de l'ajutage prend la forme :

$$V_{ct} = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \xi_{en} + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH_0} \quad (\text{II.27})$$

On prend  $\alpha = 1$  et  $\xi_{en} = 0,5$  :

$$V_{ct} = \frac{1}{\sqrt{1,5 + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH_0} \Rightarrow V_{ct} = C_v \sqrt{2gH_0} \quad (\text{II.28})$$

Le débit qui traverse l'ajutage est déterminé par la formule suivante :

$$Q_{ct} = C_d S \sqrt{2gH} \quad (\text{II.29})$$

### II.2.3 Ajutage cylindrique extérieur

Ce type d'ajutage a une longueur  $l = (3 \text{ à } 4)d$  et raccordé à l'orifice par le même diamètre (Figure II.5). Les coefficients de vitesse et de débit ne dépendent pas du nombre de Reynolds :  $C_v = C_d = 0,82$

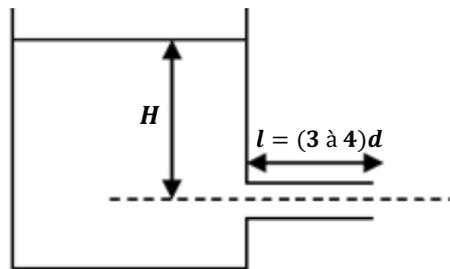


Figure II.5 : Ajutage extérieur

### II.2.4 Ajutage cylindrique intérieur (ajutage de Borda)

Ce type d'ajutage est placé à l'intérieur du réservoir (Figure II.6). Si  $l = (3 \text{ à } 4)d$ , le jet s'écoule par l'ajutage en section totale et dans ce cas on a :  $C_d = C_v = 0,71$  et  $C_c = 1$

Si  $l < 3d$ , le jet ne touche pas les parois de l'ajutage :  $C_d = 0,51$  ;  $C_v = 0,97$  et  $C_c = 0,53$

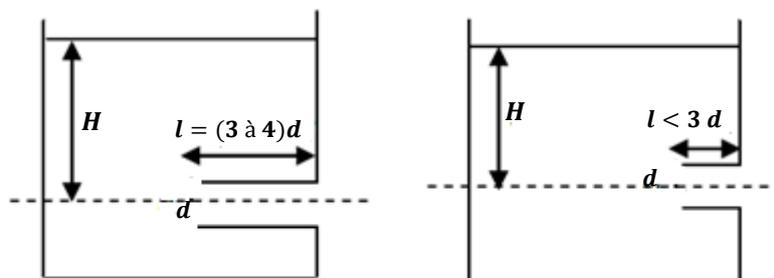


Figure II.6 : Ajutage intérieur

### II.2.5 Ajutage conique convergent

C'est un cône tronqué raccordé à l'orifice dans la paroi latérale du réservoir par sa base plus grande (Figure II.7). Dans un ajutage conique convergent, les pertes de charges sont inférieures à celles d'un ajutage cylindrique. Les coefficients de vitesse et le de débit sont donnés pour un angle de conicité de  $13^\circ$  :  $C_v=0.97$  et  $C_d=0.95$

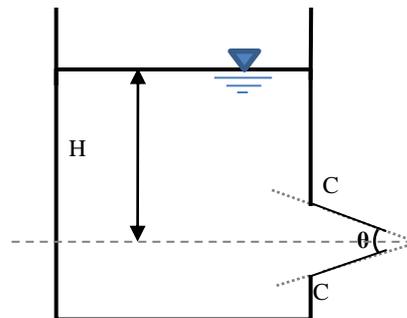


Figure II.7 : Ajutage conique convergent

### II.2.6 Ajutage conique divergent

Dans ce type est un cône tronqué raccordé à l'orifice dans la paroi latérale du réservoir par sa base plus petit (figure II.8). Si l'angle de conicité est  $\theta < 8^\circ$ , l'ajutage travaille en section totale, si  $\theta > 8^\circ$ , on observe le décollement du jet des parois. En moyenne, on peut considérer que les coefficients de débit et de vitesse à la section de sortie sont égaux:  $C_d = C_v = 0,45$ .

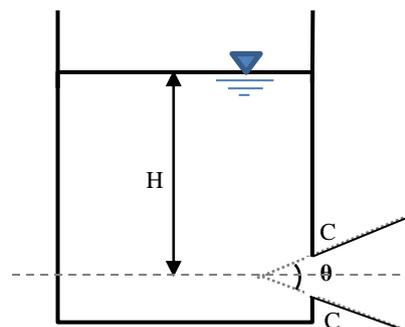


Figure II.8 : Ajutage conique divergent

### II.3 Ecoulement en charge variable

L'écoulement en charge variable a lieu lorsque le niveau du liquide dans un réservoir varie dans le temps.

Dans les conditions de la charge variable, la pression, la vitesse d'écoulement et le débit du liquide changent à l'instant considéré par rapport à l'instant précédent.

Par conséquent, un tel écoulement est un écoulement non permanent pour lequel il est impossible d'appliquer l'équation de Bernoulli. L'objectif essentiel dans l'étude de l'écoulement du liquide en charge variable est la détermination du temps de vidange ou de remplissage.

Selon les conditions dans lesquelles se produit l'écoulement, on distingue deux cas essentiels :

- Écoulement à arrivée constante du liquide dans le réservoir (Figure II.9a).
- Écoulement sans arrivée du liquide dans le réservoir (Figure II.9b).

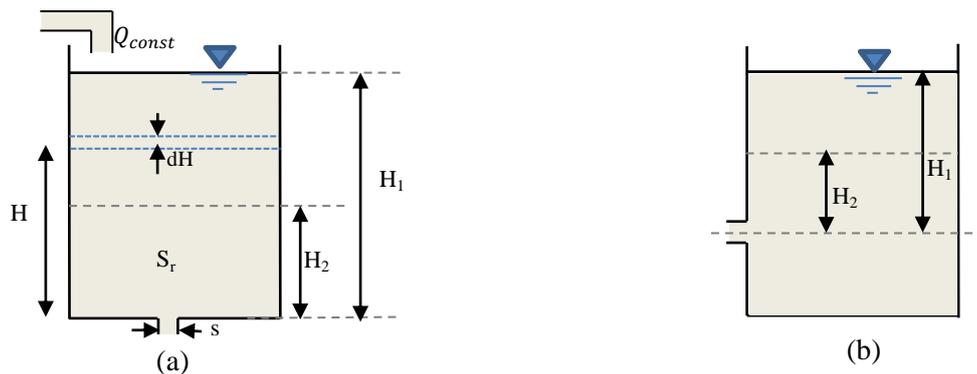


Figure II.9: Écoulement en charge variable: (a) à arrivée constante (b) sans arrivée constante

### II.3.1 Écoulement en charge variable à arrivée constante du liquide

Si on considère que le débit d'arrivée est égal au débit  $Q_{const}$  de l'orifice, on aura une charge au-dessus de l'orifice ne varie pas. Dans ce cas, la charge est déterminée par la formule de débit:

$$Q_{const} = C_d S \sqrt{2gH_{const}} \quad (II.30)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{dV}{dt} = Q_{const} - Q \quad (II.31)$$

Avec  $dV = S_r \cdot dH$

$$S_r \frac{dH}{dt} = Q_{const} - Q \quad (II.32)$$

Le temps nécessaire pour changer la charge d'une variable  $dH$  est égale à

$$dt = \frac{S_r \cdot dH}{Q_{const} - Q} \Rightarrow dt = \frac{S_r \cdot dH}{C_d S \sqrt{2g} (\sqrt{H_{const}} - \sqrt{H})} \quad (II.33)$$

$$dt = \frac{S_r \cdot dH}{C_d S \sqrt{2g} (\sqrt{H_{const}} - \sqrt{H})} \quad (II.34)$$

### II.3.2 Ecoulement en charge variable sans arrivée constante du liquide

En absence de débit  $Q_{const} = 0$  la formule (II.33) devient :

$$dt = -\frac{S_r \cdot dH}{Q} \quad (\text{II.35})$$

Où

$$Q = C_d s \sqrt{2gH} \quad (\text{II.36})$$

$$dt = -\frac{S_r}{C_d s \sqrt{2g}} \frac{dH}{\sqrt{H}} \quad (\text{II.37})$$

Par intégration, on obtient le temps de variation de la charge  $H_1$  à  $H_2$  :

$$\int_0^t dt = -\frac{1}{C_d s \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} S_r \frac{dH}{\sqrt{H}} \quad (\text{II.38})$$

$$t = \frac{2S_r}{C_d s \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) = \frac{2S_r(H_1 - H_2)}{C_d s \sqrt{2gH_1} + C_d s \sqrt{2gH_2}} \quad (\text{II.39})$$

La durée de la vidange partielle :

$$t = \frac{2\text{Volume partiel}}{Q_1 + Q_2}$$

La durée de la vidange complète dans le réservoir (figure III.9b), s'obtient en supposant que  $H_2 = 0$  :

$$T = \frac{2S_r H_1}{C_d s \sqrt{2gH_1}} \quad (\text{II.40})$$

soit :

$$t = \frac{2\text{Volume total}}{Q_1} \quad (\text{II.41})$$

### II.3.3 Ecoulement à deux niveaux variables

Soit deux réservoirs prismatiques (Figure II.10) dans lesquels la différence de niveaux de liquide est égale à  $H_1$  au moment  $t_1$ . L'aire de la section transversale du réservoir 1 est  $S_1$  et celle du réservoir 2 est  $S_2$ .

Les réservoirs sont reliés par un tuyau dont l'aire de la section liquide est égale à  $s$  (Figure II.10a). Le liquide se déplace du réservoir 1 vers le réservoir 2, le niveau baisse dans le premier et s'élève dans le deuxième.

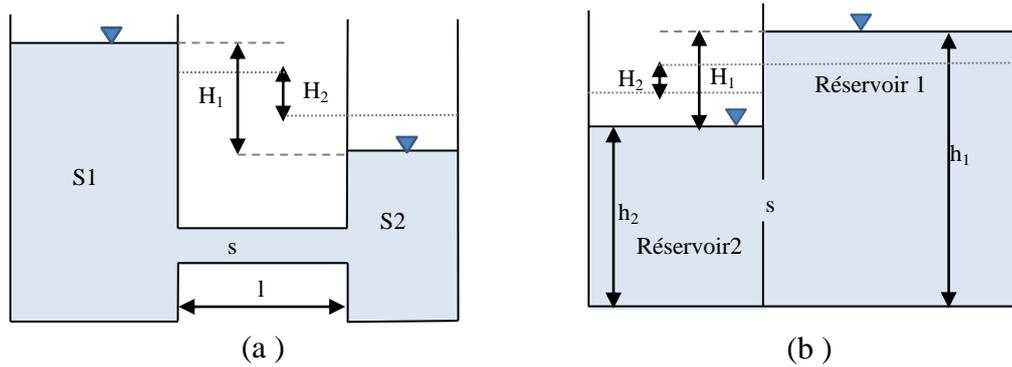


Figure II.10 : Écoulement à deux niveaux variables

La conservation du débit volumique permet d'écrire :

Dans le réservoir 1, on a une diminution de débit :

$$-S_1 \frac{dh_1}{dt} = sV \quad (\text{II.42})$$

Dans le réservoir 2, on a une augmentation de débit :

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = sV \quad (\text{II.43})$$

Donc :

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{s}{S_1} C_d \sqrt{2gh} \quad (\text{II.44})$$

Et

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{s}{S_2} C_d \sqrt{2gh} \quad (\text{II.45})$$

En faisant la différence entre les deux équations :

$$h_1 - h_2 = h \quad (\text{II.46})$$

$$\frac{dh}{dt} = -\left(\frac{s}{S_1} + \frac{s}{S_2}\right) C_d \sqrt{2gh} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{2gh}} = -s C_d \left(\frac{S_2 + S_1}{S_1 S_2}\right) dt$$

$$\Rightarrow dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}} \left(\frac{S_1 S_2}{s C_d (S_2 + S_1)}\right) \Rightarrow t = -\frac{S_1 S_2}{s C_d \sqrt{2g} (S_2 + S_1)} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} \quad (\text{II.47})$$

Le temps de variation de la charge de H1 à H2 :

$$t = \frac{2S_1 S_2}{(S_1 + S_2) C_d s \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \quad (\text{II.48})$$

**Le temps d'égalisation des niveaux dans les deux réservoirs** (Figure II.10a et b) : C'est le temps durant lequel les niveaux dans les réservoirs seront égaux ( $H_2=0$ ) est déterminé par :

$$t = \frac{2S_1 S_2 \sqrt{H_1}}{(S_1 + S_2) C_d s \sqrt{2g}} \quad (\text{II.49})$$

Dans le cas de la figure(II.10b), on prend  $C_d = C_{\text{sys}}$

avec :

$C_{\text{sys}}$  : est le coefficient de débit d'une tuyauterie courte qui tient compte des pertes de charge en longueur et des pertes de charge locales

$$C_{\text{sys}} = \frac{1}{\sqrt{\sum \xi}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d} + \xi_{\text{en}} + \xi_{\text{sor}}}} \quad (\text{II.50})$$

## Exercices corrigés

### Exercice 1

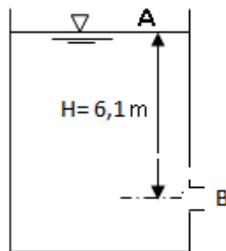
Un orifice à mince paroi de 100mm de diamètre permet de vider de l'eau ayant une hauteur de pression  $H = 6,1\text{m}$ .

- Calculer le débit (Fig.1)
- Déterminer le temps de vidange du réservoir d'une section  $S = 5\text{m}^2$ (Fig.1)

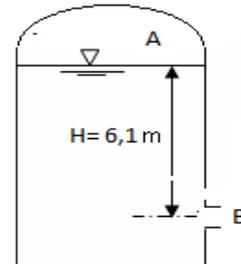
Le réservoir est fermé et la pression en point A provoque une augmentation de débit qui passe à  $0,075\text{ m}^3/\text{s}$ .

- Trouver la pression en point A (Fig.2)

On prend  $C_d = 0,60$ ,  $P_{\text{atm}}$  est négligeable,  $\rho_{\text{eau}} = 1000\text{kg/m}^3$



(Fig.1)



(Fig.2)

### Solution 1

$$Q = C_d s \sqrt{2gH_0}$$

$$H_0 = H + \frac{P_A - P_B}{\rho g} + \frac{\alpha V_A^2}{2g} \rightarrow H_0 = H$$

On a

$$H = 6,1\text{m} \quad P_A = P_B = P_{\text{atm}} \quad V_A = 0 \quad (\text{niveau constant})$$

$$Q = 0,6 \cdot \frac{\pi 0,1^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6,1} = 0,051 \text{ m}^3/\text{s}$$

Temps de vidange

$$T = \frac{2S_r \sqrt{H_1}}{C_d s \sqrt{2g}} \quad T = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{6,1}}{0,6 \cdot \frac{\pi 0,1^2}{4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} = 1176 \text{ s}$$

Pression en point A

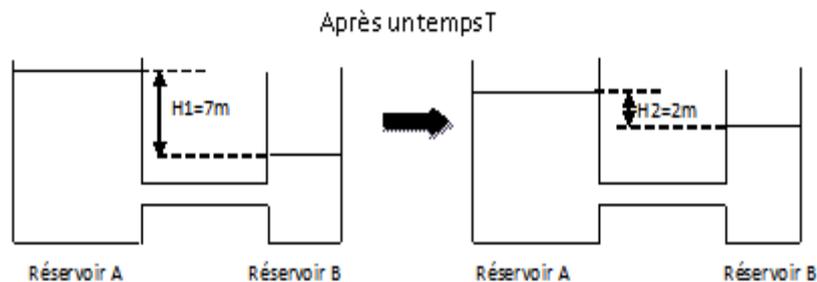
$$Q = C_d s \sqrt{2g \left( H + \frac{P_A}{\rho g} \right)}$$

$$\frac{P_A}{\rho g} = \frac{Q^2}{C_d^2 s^2 2g} - H \quad P_A = \rho g \left( \frac{Q^2}{C_d^2 s^2 2g} - H \right)$$

$$P_A = 1000 \cdot 9,81 \left( \frac{0,075^2}{0,6^2 \cdot (7,85 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2 \cdot 9,81} - 6,1 \right) = 66,94 \text{ kPa}$$

### Exercice 2

Deux réservoirs cylindriques verticaux sont reliés par un tuyau horizontal de diamètre  $d=100\text{mm}$  et de longueur  $l=60\text{m}$ . Les diamètres des réservoirs sont  $D_1=2,5\text{m}$  et  $D_2=1,5\text{m}$ . La différence de niveau, au moment initial du temps, est égale à  $H_1=7\text{m}$ . Le liquide se déplace du réservoir A vers le réservoir B, la différence de niveau devient  $H_2=2\text{m}$ . Déterminer quel temps  $T$  est nécessaire pour la variation de niveau  $H_1$  à  $H_2$ . On prend  $\lambda=0,025$



### Solution 2

Le temps nécessaire pour la variation de niveau  $H_1$  à  $H_2$  est :

$$t = \frac{2S_1 S_2}{(S_1 + S_2) C_{sys} \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})$$

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 2,5^2}{4} = 4,90 \text{ m}^2$$

$$S_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{4} = 1,77m^2$$

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 0,00785m^2$$

$$C_{sys} = \frac{1}{\sqrt{\sum \xi}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\lambda \frac{l}{d} + \xi_{en} + \xi_{sor}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(0,025 \frac{60}{0,1} + 1 + 0,5\right)}} = 0,246$$

$$t = \frac{2.4,90.1,77}{(4,90 + 1,77) \cdot 0,246 \cdot 7,85 \cdot 10^{-3} \sqrt{2.9,81}} (\sqrt{7} - \sqrt{2})$$

$$t = 374,4s$$

### Exercice 3

La vitesse réelle (Vitesse contractée) dans la partie contractée un liquide coulant à travers d'un orifice à mince paroi de diamètre 50mm est de 8,53m/s pour une charge de 4,57m.

- 1- Quelle est la valeur du coefficient de vitesse ?
- 2- Si le débit mesuré (contracté) est de 0,0114m<sup>3</sup>/s, calculer les coefficients de contraction et de débit.

### Solution 3

Calcul de coefficient de vitesse Cv

$$V_c = C_v \sqrt{2gH_0}$$

$$C_v = \frac{V_c}{\sqrt{2gH_0}} = \frac{8,53}{\sqrt{2.9,81.4,57}} = 0,901$$

Calcul de coefficient de débit Cd

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} = 0,00196m^2$$

$$Q_c = C_d s \sqrt{2gH_0}$$

$$C_d = \frac{Q_c}{s \sqrt{2gH_0}} = \frac{0,0114}{1,96 \cdot 10^{-3} \sqrt{2.9,81.4,57}} = 0,614$$

Calcul du coefficient de contraction Cc

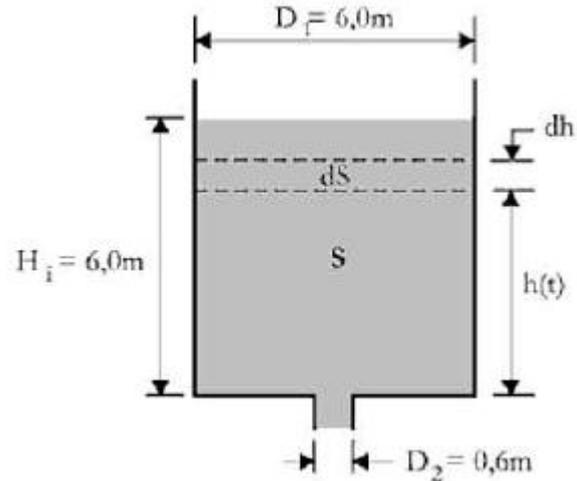
$$C_c = \frac{C_d}{C_v}$$

$$C_c = \frac{0,614}{0,901} = 0,68$$

**Exercice 4**

On considère un réservoir circulaire de diamètre  $D = 6,0$  m muni à son fond d'un orifice de vidange circulaire de diamètre  $d = 0,6$  m (figure ci-contre). Initialement, ce réservoir est rempli jusqu'à une hauteur initiale  $H_i = 6,0$  m.

Quel est le temps de vidange nécessaire pour réduire la hauteur de moitié et l'amener à une hauteur finale  $H_f = 3,0$  m?

**Solution 4**

L'équation de continuité s'écrit:

$$\frac{dS}{dt} = Q_e - Q_s$$

avec :

$$dS = S \cdot dh \Rightarrow dS = \frac{\pi D^2}{4} dh$$

$Q_e = 0$  et  $Q_s = V \cdot s$

$$Q_s = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

l'équation de continuité devient :

$$D^2 \frac{dh}{dt} = -d^2 \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

En intégrant l'équation par séparation de variables :

$$\int_{H_i}^{H_f} \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{d^2}{D^2} \sqrt{2 \cdot g} \int_0^t dt$$

$$[2\sqrt{h}]_{H_i}^{H_f} = -\frac{d^2}{D^2} \sqrt{2 \cdot g} [t]_0^t$$

Donc l'expression du temps de vidange est :

$$t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{2 \cdot g}} (\sqrt{H_i} - \sqrt{H_f})$$

$$t = \left(\frac{6}{0,6}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 9,81}} (\sqrt{6} - \sqrt{3})$$

Le temps de vidange est normalement plus long, car la section d'écoulement à la sortie de l'orifice est contractée et elle est plus faible que  $S_2$ . Compte tenu des pertes de charge, la vitesse d'écoulement est plus faible que  $V_2$ .

### Exercice 5

Un réservoir cylindrique de diamètre  $D$  est alimenté par deux entrées  $Q_{e1} = 5 \text{ L/s}$  et  $Q_{e2} = 6 \text{ L/s}$ , possédant un orifice de sortie de diamètre  $d$ .

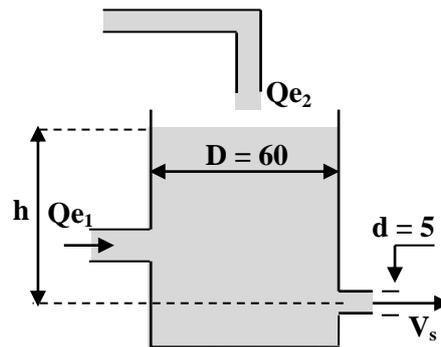
On néglige toutes les pertes de charge :

1- Déterminer la variation de la hauteur du réservoir dans le temps

2- En supposant que le réservoir est initialement vide, déterminer la hauteur finale dans le réservoir.

3- Déterminer la vitesse du mouvement du plan d'eau quand  $h = 1,5 \text{ m}$ .

4- Quel est le temps nécessaire pour passer d'une hauteur  $h_0 = 1,5 \text{ m}$  à une hauteur  $h_1 = 0,5 \text{ m}$  en supposant les débits d'entrées nuls ? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



### Solution 5

1- Equation de conservation de masse du réservoir :

$$\frac{dV}{dt} = (Q_{e1} + Q_{e2}) - Q_s$$

$$\text{Volume } V = S \cdot h \rightarrow dV = S \cdot dh$$

$$\text{avec surface } S = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$S \frac{dh}{dt} = (Q_{e1} + Q_{e2}) - Q_s$$

$$\text{Débit de sortie } Q_s = V_s \cdot S_s = \sqrt{2gh} \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{dh}{dt} = (Q_{e1} + Q_{e2}) - \sqrt{2gh} \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi D^2} (Q_{e1} + Q_{e2}) - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh}$$

2-la hauteur finale

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &\rightarrow 0 \\ \sqrt{h} &= \frac{4(Q_{e1} + Q_{e2})}{\pi D^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}} \\ h &= \left[ \frac{4(5 + 6) \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (0,6)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{0,05}{0,6}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 10}} \right]^2 \\ h &= 1,58 \text{ m} \end{aligned}$$

3-la vitesse du mouvement du plan d'eau

$$\begin{aligned} \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1,5m} &= \frac{4}{\pi D^2} (Q_{e1} + Q_{e2}) - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh} \\ \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1,5m} &= \frac{4(5 + 6) \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (0,6)^2} - \left(\frac{0,05}{0,6}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,5} \\ \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=1,5m} &= 1 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \end{aligned}$$

Le plan d'eau monte à une vitesse de  $1 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

4- le temps pour que le niveau baisse de  $h_0=1,5\text{m}$  à  $h_1=0,5\text{m}$

Si  $Q_{e1}=Q_{e2}=0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{4}{\pi D^2} (Q_{e1} + Q_{e2}) - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh} \\ \frac{dh}{dt} &= - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gh} \\ \frac{dh}{\sqrt{h}} &= - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g} dt \\ 2[h^{1/2}]_{h_0}^{h_1} &= - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g} [t]_0^t \\ 2[h_1^{1/2} - h_0^{1/2}]_{h_0}^{h_1} &= - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g} t \end{aligned}$$

$$t = -\frac{2[h_1^{1/2} - h_0^{1/2}]}{\left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2g}}$$

$$t = -\frac{2[0,5^{1/2} - 1,5^{1/2}]}{\left(\frac{0,05}{0,6}\right)^2 \sqrt{2 \cdot 10}}$$

$$t = 33,40 \text{ s}$$

### Exercice 6

Le réservoir de la figure ci-dessous se vidange à l'aide de deux sorties. Le diamètre de la sortie 2 et 3 sont respectivement  $d_2=10 \text{ cm}$  et  $d_3=7 \text{ cm}$ .

1. Calculer la variation de niveau de la surface libre ( $dh/dt$ ) en fonction de  $Q_2$ ,  $Q_3$  et le diamètre du réservoir ;

2. Pour le cas  $h$  est constant, déterminer la vitesse  $V_3$  si

$V_2= 2\text{m/s}$  et  $Q_1= 0,05\text{m}^3/\text{s}$ .

### Solution 6

Soit  $Q_r$  le débit de remplissage du réservoir:

$$Q_r = Q_e - (Q_{s1} + Q_{s2})$$

$$S \frac{dh}{dt} = Q_e - (Q_{s1} + Q_{s2})$$

$$\frac{\pi D^2}{4} \frac{dh}{dt} = Q_e - (Q_{s1} + Q_{s2})$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4(Q_e - Q_{s1} - Q_{s2})}{\pi D^2}$$

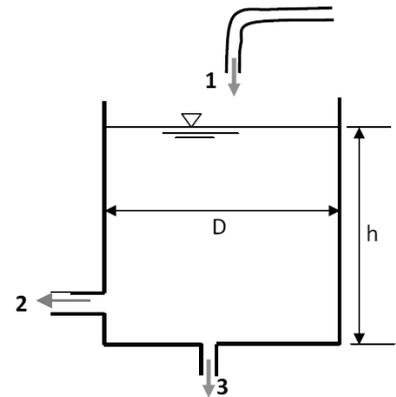
H constant alors :

$$Q_e = (Q_{s1} + Q_{s2})$$

$$Q_e = V_3 \frac{\pi D_3^2}{4} + V_2 \frac{\pi D_2^2}{4}$$

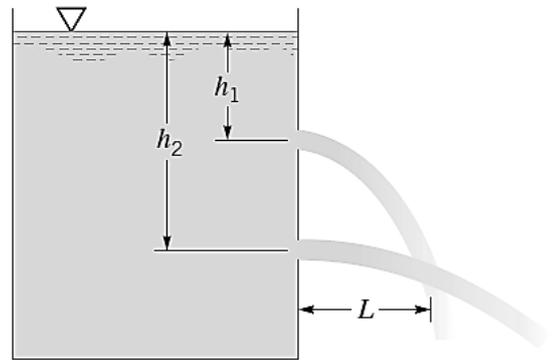
$$0,05 - 2 \frac{\pi 0,1^2}{4} = V_3 \frac{\pi 0,07^2}{4}$$

$$V_3 = 8,92 \text{ m/s}$$



**Exercice 7**

Soit un réservoir à grandes dimensions, muni de deux orifices, l'un est placé à une hauteur  $h_1$  de la surface libre, l'autre est placé à une hauteur  $h_2$  de la surface libre (figure). Les jets sortants des deux orifices se croisent à une distance  $L$  mesurée horizontalement à partir du côté du réservoir.



- Donner la relation de  $L$  en fonction de  $h_1$  et  $h_2$ .

Si on considère que toutes les pertes de charge sont négligeables et que le débit est quasi stable.

**Solution 7**

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 0-0 et 1-1 :

$$Z_0 + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \quad (1)$$

On a :

$$Z_0 - Z_1 = h_1 \quad P_0 = P_1 = P_{atm} \quad \text{et} \quad V_0 = 0 \quad (\text{Réservoir de grande dimension})$$

L'équation (1) devient :

$$h_1 = \frac{V_1^2}{2g} \quad (2)$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 0-0 et 2-2 :

$$Z_0 + \frac{P_0}{\rho g} + \frac{V_0^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (3)$$

$$Z_0 - Z_2 = h_2 \quad P_0 = P_2 = P_{atm} \quad \text{et} \quad V_0 = 0 \quad (\text{Réservoir de grande dimension})$$

L'équation (3) devient :

$$h_2 = \frac{V_2^2}{2g} \quad (4)$$

Equation du jet (1)

$$z_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad x = V_1 t_1 \quad z_1 = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_1^2} \quad (5)$$

Equation du jet (2)

$$Z_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \quad x = V_2 t_2 \quad z_2 = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_2^2} \quad (6)$$

d'un autre côté, on a :

$$h_1 - h_2 = (Z_0 - Z_1) - (Z_0 - Z_2) = Z_2 - Z_1 \quad (7)$$

On remplace (2), (4), (5) et (6) dans (7)

$$h_1 - h_2 = Z_2 - Z_1$$

$$\frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_2^2}{2g} = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_2^2} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_1^2}$$

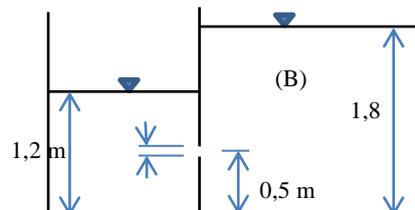
$$h_1 - h_2 = \frac{x^2}{4} \left( \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) \rightarrow \frac{4h_2 h_1 (h_1 - h_2)}{(h_1 - h_2)} = x^2$$

$$x = 2\sqrt{h_1 h_2}$$

### Exercice 8

Deux réservoirs rectangulaires ont une paroi commune où un orifice de diamètre 76 mm a été aménagé. Le réservoir (A) a une superficie  $S_1 = 0,854 \text{ m}^2$  et le réservoir B a une superficie  $S_2 = 3,172 \text{ m}^2$ .

1. Calculer le débit de l'orifice si les coefficients de vitesse et de contraction sont respectivement de 0,950 et de 0,650
2. Combien faudra-t-il de temps pour que l'eau soit au même niveau des deux côtés ?



**Solution 8**

Calcul le débit de l'orifice

$$Q = C_d s \sqrt{2gH_0} \quad \text{avec}$$

$$H_0 = h + \frac{P_A - P_B}{\rho g} + \frac{V_A^2 - V_B^2}{2g} \rightarrow H_0 = h$$

**On a :**

$$h = h_2 - h_1 = 0,6m$$

$$P_A = P_B = P_{atm} \quad V_A = V_B = 0 \quad (\text{niveau constant})$$

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0,076)^2}{4} = 0,0045m^2$$

$$C_d = C_c \cdot C_v = 0,95 \cdot 0,65 = 0,62$$

$$Q = 0,62 \cdot 0,0045 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,6} = 0,00957m^3/s$$

**Le temps nécessaire pour que l'eau soit au même niveau des deux côtés :**

$$t = \frac{2S_1 S_2 \sqrt{H_1}}{(S_1 + S_2) C_{sys} s \sqrt{2g}}$$

$$t = \frac{2S_1 S_2 \sqrt{H_1}}{(S_1 + S_2) C_{sys} s \sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot 0,854 \cdot 3,172 \sqrt{0,6}}{(0,854 + 3,172) \cdot 0,62 \cdot 0,0045 \sqrt{2 \cdot 9,81}} = 84,44s$$

## Chapitre III

### Ecoulements dans les conduites en charge

#### III.1 Régimes d'écoulement -Nombres de Reynolds

L'expérience réalisée par **Reynolds (1883)** consiste à injecter un filet coloré dans un tube en verre où circule un fluide (figure III.1). En ouvrant plus ou moins le robinet de vidange, on fait varier le débit dans le tube, Reynolds a montré l'existence de deux régimes d'écoulement : laminaire et turbulent.

A faible vitesse de fluide, le filet coloré commence à passer lentement dans le tube en verre très bien délimité et qui ne se mélange pas aux filets voisins (figure III.2). Le filet liquide reste mince, régulier et parallèle à la paroi du cylindre. Le régime est dit **laminaire**.

Si la vitesse du fluide s'accroît dans le tube, le filet coloré paraît osciller et vibrer, il devient ondulé et rapidement dispersé (figure III.2). En augmentant la vitesse encore, les particules de fluide se déplacent dans toutes les directions au hasard. Il est impossible de décrire le mouvement d'une particule. Le régime est dit **turbulent**.

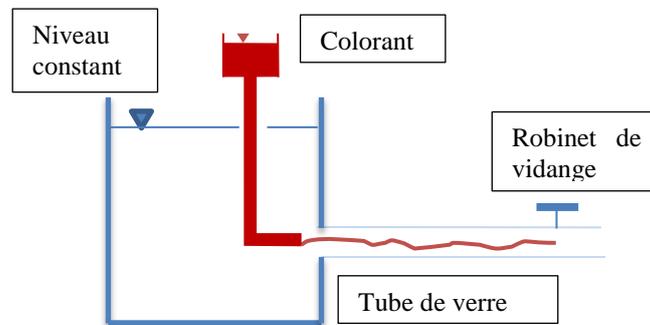


Figure III.1: Expérience de Reynolds

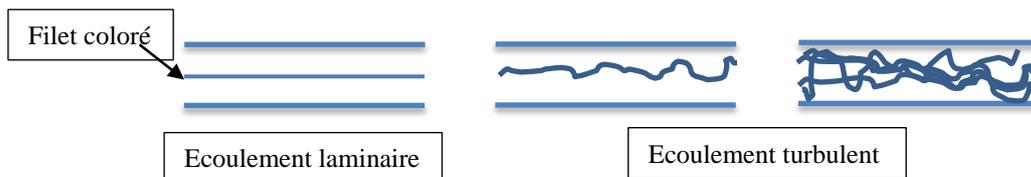


Figure III.2: les différents régimes d'écoulement d'un fluide

Le nombre de Reynolds, qui est sans dimension, représente le rapport entre les forces d'inertie qui favorisent l'écoulement et les forces visqueuses qui s'opposent à l'écoulement. Il permet de caractériser le régime d'écoulement d'un fluide.

Pour des tuyaux circulaires pleins :

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces visqueuses}} \quad (\text{III. 1})$$

avec :

$V$  : vitesse moyenne dans le tube (m/s)

$d$  : diamètre intérieur du tube (m).

$\nu$  : viscosité cinématique du liquide en mouvement ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

$\mu$  viscosité dynamique (Pa.s)

$\rho$  masse volumique de fluide ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

Pour des sections non circulaires, le rayon hydraulique  $R^1$  intervient dans l'expression du nombre de Reynolds. L'expression s'écrit :

$$Re = 4 \frac{VR}{\nu} \quad (\text{III. 2})$$

Pratiquement, si  $Re < 2000$  l'écoulement est laminaire et si  $Re > 2000$  l'écoulement est turbulent.

En Régime critique, on a :

$$Re_{cr} = 2000 = \frac{V_{cr}d}{\nu} \quad (\text{III. 3})$$

La vitesse critique pour laquelle nous sommes à la limite du régime laminaire est :

$$V_{cr} = \frac{2000\nu}{d} \quad (\text{III. 4})$$

### III.2 Ecoulement dans un tube cylindrique

Soit un tube rectiligne de rayon  $R$ , à l'intérieur duquel se déplace un liquide en régime laminaire et permanent (Figure III.3). Considérons entre deux sections transversales ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) distantes d'une longueur  $l$  et où les pressions respectives sont  $P_1$  et  $P_2$ , le cylindre de liquide de rayon  $r$  qui glisse par rapport à la masse liquide en mouvement qui l'entoure.

Les forces extérieures qui agissent sur ce cylindre sont :

- Les forces de pression dont la résultante est :

$$P_1(\pi r^2) - P_2(\pi r^2) \quad (\text{III. 5})$$

- La force de frottement :

$$F = -\mu \frac{dv}{dy} (2\pi rL) \quad (\text{III. 6})$$

La contrainte de cisaillement est donnée par la formule de Newton :

<sup>1</sup>  $D=4R$ , ou  $R$  est le Rapport de la surface de la section droite au périmètre mouillé

$$\tau = -\mu \frac{dV}{dy} \quad (\text{III. 7})$$

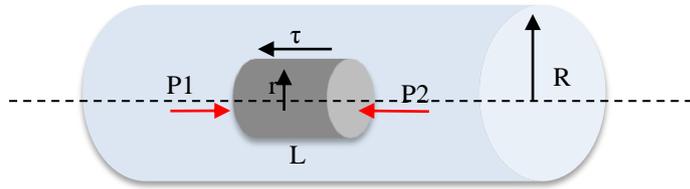


Figure III. 3: Forces agissant sur un élément cylindrique

En équilibre dynamique du cylindre :

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow P_1(\pi r^2) - P_2(\pi r^2) - \tau(2\pi rL) = 0 \quad (\text{II. 8})$$

$$-\mu \frac{dV}{dy} = \frac{(P_1 - P_2)r}{2L}$$

$$-\frac{dV}{dy} = \frac{(P_1 - P_2)r}{2\mu L} \quad (\text{III. 9})$$

$$\frac{(P_1 - P_2)r^2}{2\mu L} = -V + \text{cte} \quad (\text{III. 10})$$

Compte tenu de la condition aux limites  $V = 0$  pour  $r = R$ , on obtient la constante d'intégration, l'équation (III. 10) devient :

$$V = \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} (R^2 - r^2) \quad (\text{III. 11})$$

L'équation (III. 10) montre que la vitesse varie suivant une loi parabolique, il est alors possible d'en déduire le profil de vitesse V par simple intégration de  $r = 0$  à  $r$

$$\int_{V_{\max}}^V dV = \frac{(P_1 - P_2)}{2\mu L} \int_0^r r dy$$

$$V = V_{\max} - \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} r^2 \quad (\text{III. 12})$$

La vitesse maximale est déterminée à l'aide des conditions aux limites. Au contact des parois de la conduite  $r = R$  le fluide est immobile  $V = 0$  donc :

$$V_{\max} = \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} R^2 \quad (\text{III. 13})$$

### III.2.1 Détermination du débit -la formule de poiseuille

Le débit élémentaire à travers une couronne élémentaire de rayon  $r$  et de largeur  $dr$  est :

$$dQ = V \cdot 2\pi r dr \quad (\text{III. 14})$$

d'où :

$$dQ = \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} (R^2 - r^2) (2\pi r) dr \quad (\text{III. 15})$$

$$Q = 2\pi \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} \int_0^R R^2 r dr - \int_0^R r^3 dr \quad \Rightarrow Q = 2\pi \frac{(P_1 - P_2)}{4\mu L} \left[ \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right]$$

$$Q = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\mu L} \quad (\text{III. 16})$$

### III.2.2 Détermination de la vitesse moyenne

La vitesse moyenne est donnée par l'expression :

$$V_{\text{moy}} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\mu L \cdot \pi R^2} = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{8\mu L} \quad (\text{III. 17})$$

La vitesse maximale est atteinte sur l'axe et a pour valeur :

$$V_{\text{max}} = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{4\mu L} = 2V_{\text{moy}} \quad (\text{III. 18})$$

### III.2.3 Répartition des vitesses dans une section transversales

Dans *un écoulement laminaire*, le profil des vitesses en une section droite est parabolique (Figure III.4). La vitesse maximale au centre du tuyau vaut deux fois la vitesse moyenne.

L'équation du profil des vitesses pour un écoulement laminaire peut s'exprimer :

$$V = V_{\text{max}} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{III. 19})$$

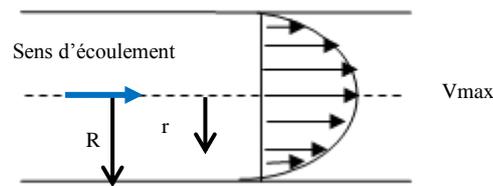


Figure III.4: Répartition des vitesses dans une section transversales (régime laminaire)

Dans **un écoulement turbulent**, on distingue deux zones (figure III.5) :

- La zone centrale de pleine turbulence où le gradient de vitesse est très faible, le profil prend une forme plus aplatie sur un large domaine. On observe une brusque variation de vitesse au voisinage des parois.
- La zone proche de la paroi, où le gradient de vitesse est très important : les forces de viscosité  $y$  sont donc très importantes.

L'équation du profil des vitesses pour un écoulement turbulent peut s'exprimer :

$$V_y = V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad (\text{III. 20})$$

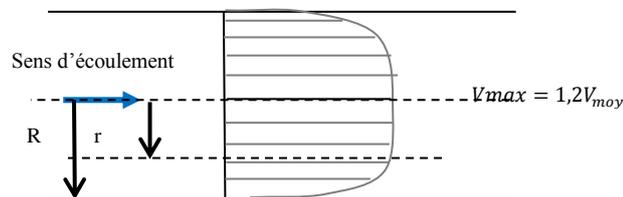


Figure III.5 : Répartition des vitesses dans une section transversales (régime turbulent)

### III.3 Pertes de charge

Les pertes de charge entre l'entrée et la sortie d'une canalisation sont dues au frottement des écoulements sur les parois de la canalisation et à la dissipation d'énergie relative à la viscosité du fluide. Dans un réseau de canalisation, on distingue les pertes de charge linéaires ( $\Delta H_L$ ) et les pertes de charge singulières ( $\Delta H_S$ ).

$$\Delta H = \Delta H_L + \Delta H_S \quad (\text{III. 21})$$

### III.3.1 Pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaires sont dues aux frottements le long des longueurs droites d'une conduite. Pour la détermination des pertes de charge linéaires, il existe diverses formules telles que :

#### III.3.1.1 Formule de Darcy-Weisbach (D-W) :

$$\Delta H = \lambda \frac{L V^2}{D 2g} = \lambda \frac{8L}{\pi^2 D^5} \frac{Q^2}{g} = 0,0827 \lambda \frac{L}{D^5} Q^2 \quad (\text{III. 22})$$

#### III.3.1.2 Formule de Hazen-Williams (H-W) :

$$\Delta H = 10,67 \cdot \frac{L}{C^{1,852} \cdot d^{4,871}} Q^{1,852} \quad (\text{III. 23})$$

#### III.3.1.3 Formule de Chezy-Manning (C-M) :

$$\Delta H = 10,3 \cdot \frac{n^2 L}{d^{5,33}} Q^2 \quad (\text{III. 24})$$

où :

$\Delta H_L$  est la perte de charge ou perte d'énergie (m),

$Q$  est le débit ( $\text{m}^3/\text{s}$ ),

$\lambda$  coefficient de perte de charge ou de frottement, est sans dimension et fonction du régime d'écoulement et de la rugosité ( $\epsilon$ ) de la conduite.

$D$  est le diamètre hydraulique de la section (m)

$L$  est la longueur de la conduite (m)

$C$  est le coefficient de rugosité de Hazen-Williams  $100 \leq C_{HW} \leq 150$

$n$  est le coefficient de rugosité de Manning

Les expressions précédentes peuvent encore s'écrire sous la forme :

$$\Delta H_L = A Q^B \quad (\text{III. 25})$$

$A$  le coefficient de résistance (Débitance), et  $B$  l'exposant du débit.

### III.3.2 Coefficient de perte de charge $\lambda$

Plusieurs formules sont proposées pour le calcul de  $\lambda$ , elles dépendent du régime d'écoulement ( $Re$ ) et de la rugosité relative<sup>2</sup> ( $\varepsilon$ ) de la conduite.

### III.3.2.1 Régime laminaire $Re < 2000$

Cas d'une conduite circulaire :

Formule de Poiseuille :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (\text{III. 26})$$

### III.3.2.2 Régime turbulent: $Re > 2000$

On distingue trois zones :

a) **Zone lisse**  $2000 < Re < 50 \frac{D}{k}$

Formule de Blasius  $\lambda = 0,3164 Re^{-0,25}$  (III. 27)

Formule de Von-Karman  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left[ \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51} \right]$  (III. 28)

b) **Zone transitoire**  $50 \frac{D}{k} < Re < 1100 \frac{D}{k}$

Formule de Colebrook-White  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[ \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71D} \right]$  (III. 29)

c) **Zone rugueuse**  $1100 \frac{D}{k} < Re$

Formule de Nukuradse  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[ \frac{k}{3,71D} \right]$  (III. 30)

$k$  : rugosité de la surface interne de la conduite (mm)

$D$  : diamètre intérieur de la conduite (mm)

#### Formule de Haaland

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{Re} + \left( \frac{k/D}{3,7} \right)^{1,11} \right] \quad (\text{III. 31})$$

On peut utiliser aussi le diagramme de Moody (figure III.6) , est un abaque permettant de regrouper l'ensemble des régimes d'écoulement: les variables utilisées sont  $\lambda$ ,  $Re$  et  $\frac{k}{D}$

---

<sup>2</sup>  $\varepsilon = \frac{k}{D}$

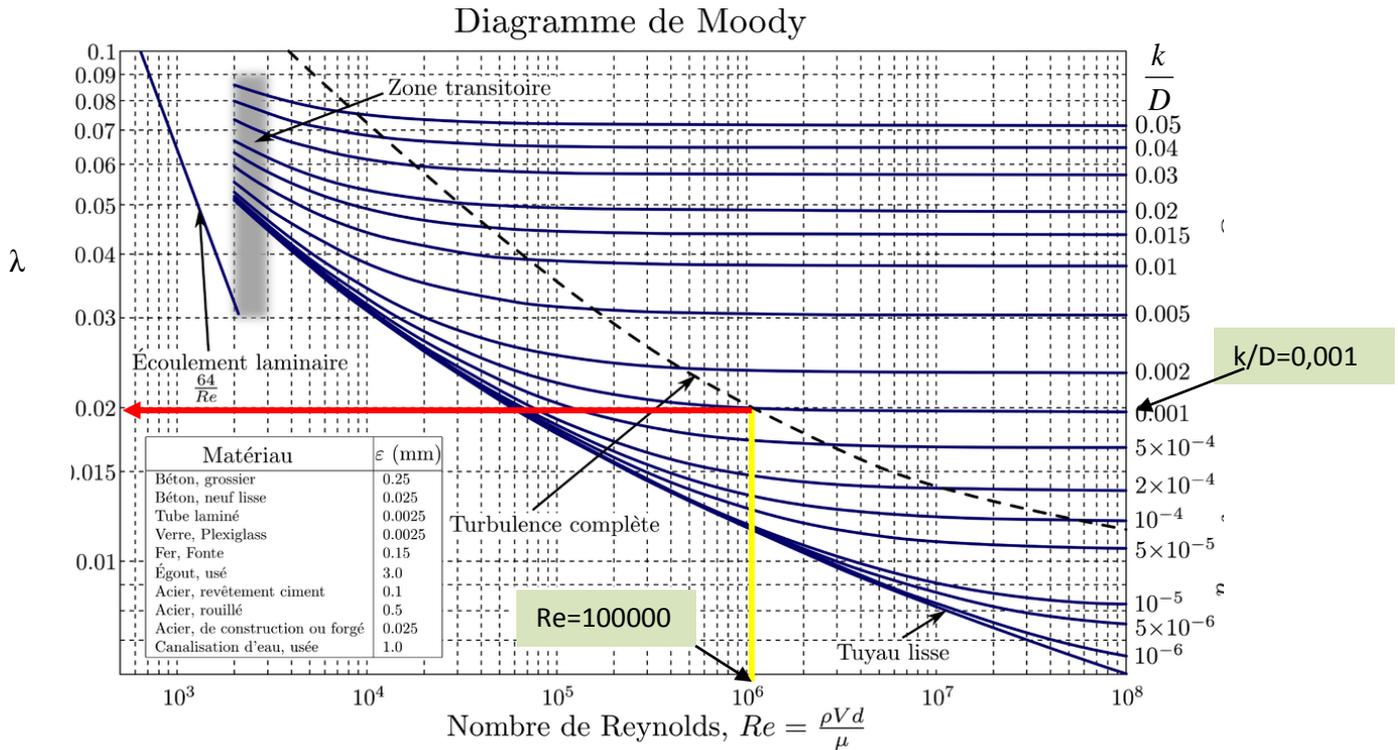


Figure III.6 : Diagramme de MOODY

A titre d'exemple, pour  $Re$  égal à 1000000 et une rugosité relative de 0,001, par projection sur l'ordonnée gauche du diagramme de Moody, le point d'intersection donne  $\lambda$  égale à 0,02

### III.3.3 Pertes de charge singulières

Il s'agit des pertes de charge qui résultent des modifications locales des conditions d'écoulement. Elles résultent donc :

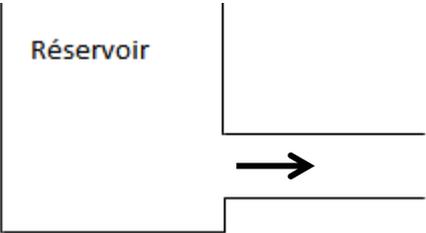
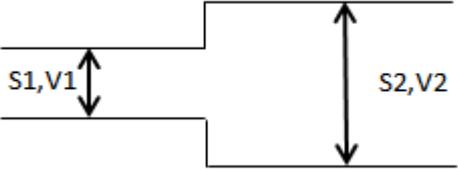
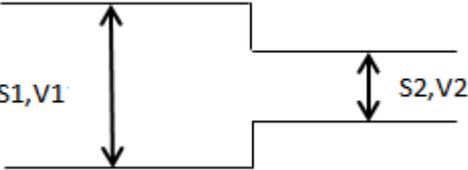
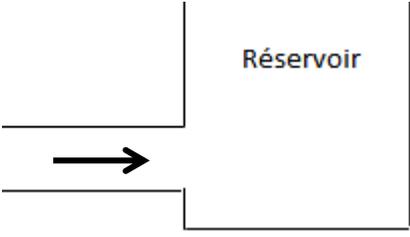
- de rétrécissement et / ou d'élargissement brusque de la section d'écoulement ;
- de convergents ou de divergents ;
- de changements de direction (coude, tés, etc...);
- d'instrument de mesure (tube de Pitot, tube de Venturi) ;
- présence de vanne dans une conduite

L'expression générale de la perte de charge singulière s'écrit :

$$\Delta H_s = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (\text{III. 32})$$

$\xi$  : Coefficient (sans unité) de pertes de charge. Il dépend de la nature de la déformation. Les valeurs de  $\xi$  sont données par les constructeurs dans leurs catalogues.

Tableau III.1 : Les valeurs du coefficient de perte de charge singulière  $\xi$

Nature de la singularité	Valeurs de $\xi$																
<p>Entrée d'une conduite</p> 	$\Delta H_s = \xi_{en} \frac{V^2}{2g}$ $\xi_{en} = 0,5$																
<p>Elargissement brusque</p> 	$\Delta H_s = \xi_{eb} \frac{V_1^2}{2g}$ $\xi_{eb} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2$																
<p>Rétrécissement brusque</p> 	$\Delta H_s = \xi_{rb} \frac{V_2^2}{2g}$ <table border="1" data-bbox="805 1115 1417 1198"> <tr> <td>S2/S1</td> <td>0,01</td> <td>0,1</td> <td>0,2</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,8</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>\xi_{rb}</math></td> <td>0,5</td> <td>0,45</td> <td>0,4</td> <td>0,3</td> <td>0,22</td> <td>0,12</td> <td>0</td> </tr> </table>	S2/S1	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	$\xi_{rb}$	0,5	0,45	0,4	0,3	0,22	0,12	0
S2/S1	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1										
$\xi_{rb}$	0,5	0,45	0,4	0,3	0,22	0,12	0										
<p>Sortie d'une conduite</p> 	$\Delta H_s = \xi_{sor} \frac{V^2}{2g}$ $\xi_{sor} = 1$																

### III.4 Présence d'une machine hydraulique dans une conduite

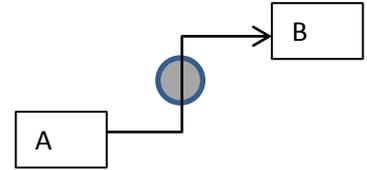
Considérons un écoulement entre deux points (A) et (B) d'un fluide réel dans une conduite. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections A et B. Cette machine est caractérisée par une puissance nette  $P_{net}$  échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre  $P_a$  et un certain rendement  $\eta$ . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

### III.4.1 Cas d'une pompe

Une pompe est une machine hydraulique qui aspire et refoule un liquide d'un point à un endroit. La pompe est destinée à élever la charge du liquide pompé.

L'application du théorème de Bernoulli entre A et B nous donne :

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + z_A + H_m = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + z_B + \Delta H \quad (\text{III. 33})$$

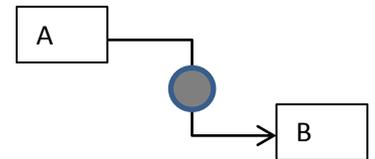


### III.4.2 Cas d'une turbine

Une turbine hydraulique utilise la force de l'eau pour produire une énergie. Cette machine tournante (constituée de roues à aubes) est alimentée par un débit d'eau sous pression, laquelle vient d'un barrage ou d'une conduite forcée qui l'achemine depuis un plan d'eau situé en altitude.

L'équation de Bernoulli entre A et B s'écrit alors :

$$\frac{V_A^2}{2g} + \frac{P_A}{\rho g} + z_A - H_m = \frac{V_B^2}{2g} + \frac{P_B}{\rho g} + z_B + \Delta H \quad (\text{III. 34})$$



$H_m$  La hauteur manométrique d'une pompe correspond à la charge totale qui est donnée au fluide par une pompe (m).

$\Delta H$  les pertes de charge, singulières et linéaires entre (1) et (2) en (m).

### III.4.3 la puissance et le rendement

La puissance fournie au fluide par la pompe est la puissance utile (nette) et s'exprime par la relation suivante :

$$P_{net} = g \cdot \rho \cdot Q \cdot H_m \quad (\text{III. 35})$$

$P_{net}$  : Puissance nette ou utile en W

$H_m$  : la hauteur manométrique en m

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a} \quad (\text{III. 36})$$

- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}} \quad (\text{III. 37})$$

$P_{net}$  est la puissance nette et  $P_a$  est la puissance absorbée

### III.5 Systèmes complexes de conduites

#### III.5.1 Conduites équivalentes

Une conduite est équivalente à une autre lorsque, pour une perte de charge donnée, le débit de la conduite équivalente est le même que celui de la conduite initiale ou d'un système initial.

#### III.5.2 Conduites en série

Des conduites sont dites en série si elles sont connectées bout à bout de sorte que le fluide s'écoule continûment sans branchement (figure III.7).

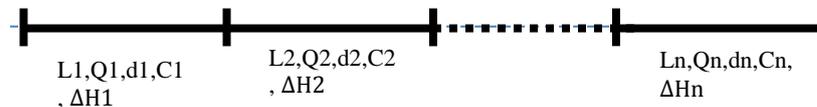


Figure III.7 : Conduites en série

Lorsque plusieurs conduites sont placées en série le débit est le même :

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

et la perte totale de charge est la somme de toutes les pertes de charge :

$$\Delta H = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L2} + \dots + \Delta H_{Ln}$$

La perte de charge est liée au débit par la relation (III.25), on a donc :

$$\Delta H_{Li} = (A_1 + A_2 + \dots + A_n) Q^B = \sum_{j=0}^n A_j Q^B \quad (\text{III. 38})$$

Ainsi, la résistance équivalente  $A_{eq}$  est donnée par :

$$A_{eq} = \sum_{i=0}^n A_i$$

#### III.5.3 Conduites en parallèle

Des conduites sont dites en parallèle si elles sont connectées de façon à ce que l'écoulement du fluide se divise en deux ou plusieurs branches (figure III.8).

Les conduites sont placées en parallèle lorsque leur point de bifurcation (1) et de confluence (2) sont communs.

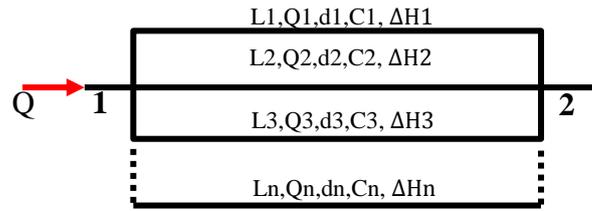


Figure III.8 : Conduites en parallèle

Lorsque plusieurs conduites sont en parallèle, la perte de charge est la même pour toutes les conduites:

$$\Delta H = \Delta H_{L1} = \Delta H_{L2} = \dots = \Delta H_{Ln}$$

et le débit total est égale à la somme des débits :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$

La perte de charge est liée au débit par la relation (III.25), on a donc :

$$Q = \left[ \left(\frac{1}{A_1}\right)^{\frac{1}{B}} + \left(\frac{1}{A_2}\right)^{\frac{1}{B}} + \dots + \left(\frac{1}{A_n}\right)^{\frac{1}{B}} \right] \Delta H_L^{\frac{1}{B}}$$

$$Q = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{A_i}\right)^{1/B} \cdot \Delta H_L^{1/B} \tag{IV.39}$$

Ainsi, la résistance équivalente  $A_{eq}$  est donnée par :

$$\left(\frac{1}{A_{eq}}\right)^{1/B} = \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{A_i}\right)^{1/B} \Rightarrow A_{eq} = \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{A_i}\right)^{1/B}\right]^B} \tag{III.40}$$

### III.5.4 Courbe caractéristique d'une conduite (C.C.C.)

La courbe caractéristique d'une conduite donnée est la représentation graphique de la variation de la perte de charge entre deux extrémités de cette conduite en fonction du débit qui la traverse (figure III.9).

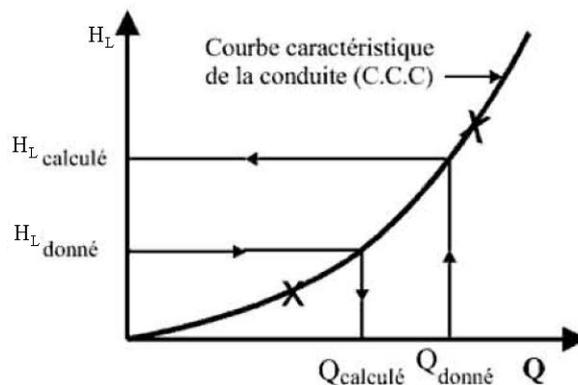


Figure III.9 : Courbe caractéristique d'une conduite

### III.5.4.1. Courbe caractéristique de conduites en série

Pour trouver la courbe caractéristique équivalente de plusieurs conduites en série (figure III.10), on doit tenir compte du fait que :

$$Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

et

$$\Delta H = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L2} + \dots + \Delta H_{Ln}$$

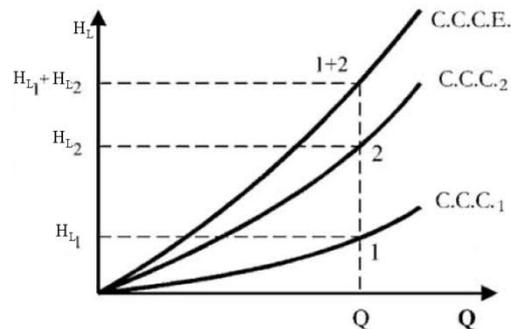


Figure III.10 : Courbe caractéristique des conduites en série

### III.5.4.2. Courbe caractéristique des conduites en parallèle

Pour trouver la courbe caractéristique équivalente de plusieurs conduites en parallèle (figure III.11), on doit tenir compte du fait que :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \text{ et } \Delta H = \Delta H_{L1} = \Delta H_{L2} = \dots = \Delta H_{Ln}$$

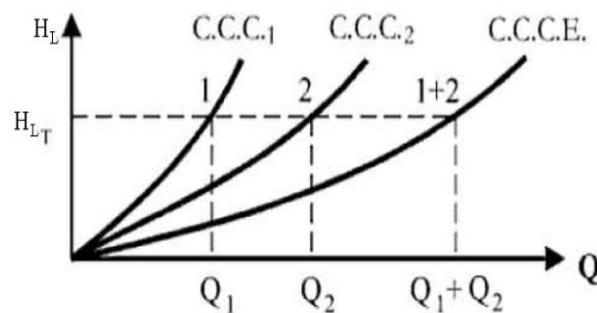


Figure III.11 : Courbe caractéristique des conduites en parallèle

## III.6 Réseau de distribution

Un réseau de distribution est un ensemble de canalisations et d'équipements permettant l'acheminement de l'eau à des endroits bien précis. Les réseaux de distribution peuvent être classés en deux grandes familles : Réseau ramifié et réseau maillé

### III.6.1 Réseau ramifié

Des conduites sont dites ramifiées si elles se partagent en deux ou plusieurs autres ou si elles se combinent pour n'en former qu'une seule, sans se rejoindre en aval (figure III.12). La direction de l'écoulement dépendra des pressions et des côtes des différents réservoirs et de la pression dans ces derniers.

Les conduites de ce type de réseau ne comportent aucune alimentation en retour, il manque de sécurité et de souplesse, car en cas de rupture d'une conduite principale toute la partie qui se trouve en aval sera privée d'eau. Un réseau ramifié présente l'avantage d'être économique que le réseau maillé.

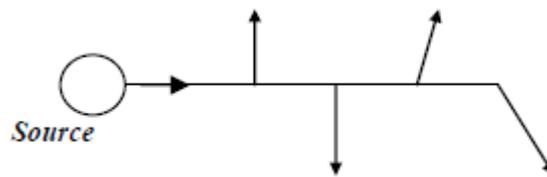


Figure III.12: Réseau ramifié

#### III.6.1.1 Calcul d'un réseau ramifié

Le calcul d'un réseau ramifié s'effectue à partir des données de départ: les longueurs des tronçons du réseau, les débits en chaque tronçon et données topographiques.

On calcule successivement pour chaque tronçon :

- Le débit à assurer.
- La pression à l'extrémité de chaque tronçon. Cette pression doit être suffisante pour alimenter correctement les prises d'eau sur la canalisation.

#### III.6.1.2 Canalisation assurant un service en route

On considère une conduite qui fournit un débit  $Q$  à son extrémité et un débit  $Q_r$  réparti uniformément sur toute sa longueur (figure III.13).

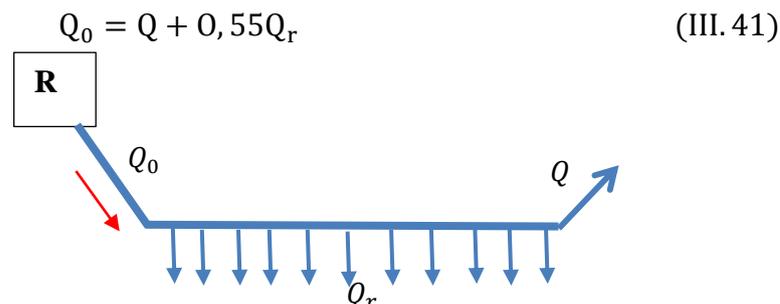


Figure III.13 : Schéma de calcul du réseau ramifié.

### III.6.2 Réseaux maillés

Dans un réseau maillé, les conduites sont disposées sous formes d'une ou plusieurs boucles fermées (figure III.14). Il permet une alimentation en retour et il est plus coûteux que le réseau ramifié.

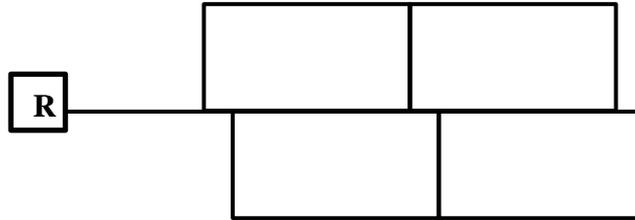


Figure III.14:Réseau maillé

#### III.6.2.1 Calcul des débits

##### b) Débit spécifique $Q_{sp}$

$$Q_{sp} = \frac{Q_r}{\sum L_i} \quad (l/s/m) \quad (III. 42)$$

$Q_r$ : le débit en route l/s

$\sum L_i$ : La somme des longueurs des conduites

##### a) Débit par tronçon $Q_{ri}$

$$Q_{ri} = Q_{sp} \cdot L_i \quad (III. 43)$$

##### b) Débits aux nœuds

$$Q_n = 0,5 \left( \sum Q_{ri} \right)_n \quad (III. 44)$$

$Q_n$  : Débit au nœud n ;

$\left( \sum Q_{ri} \right)_n$  : La somme des débits en route des tronçons reliés au nœud n ;

#### III.6.2.2 Méthode d'approximation de Hardy-Cross

Le calcul du réseau maillé a pour but de déterminer les débits réels avec le sens d'écoulement dans chaque tronçon.

La méthode utilisée est celle d'Hardy-Cross qui est basée sur les deux lois de Kirchoff (Figure III.15) :

1. Principe d'équilibre des débits : la somme des débits arrivant à un nœud doit être égale à la somme des débits qui en sortent dans chaque nœud ;  $\sum Q_{entrant} = \sum Q_{sortant}$

$$\text{Exemple au nœud A : } Q_A = Q_B + Q_C$$

$$\text{au nœud D } Q_D = Q_B + Q_C$$

2. Principe d'équilibre des pertes de charge : Le long d'un parcours orienté et fermé (une maille), la somme algébrique des pertes de charge successives dans chaque maille doit être nulle :  $\sum \Delta H_t = 0$

Exemple dans cette maille :  $\Delta H_1 + \Delta H_2 - \Delta H_3 - \Delta H_4 = 0$

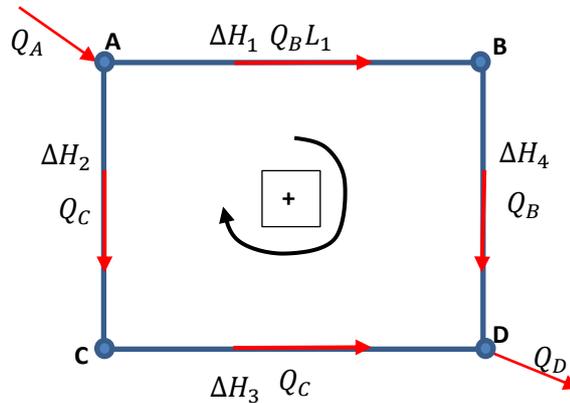


Figure III.15 : Schéma de calcul du réseau maille.

La méthode d'Hardy-Cross consiste à fixer dans chaque maille une répartition supposée des débits ainsi qu'un sens supposé d'écoulement tout en respectant la première loi, et à calculer la perte de charge dans chaque tronçon de la maille.

De chaque côté de la maille, on calcule la perte de charge :

$$\Delta H = A Q^B \quad (\text{III. 45})$$

B : exposant qui dépend de la formule utilisée, généralement compris entre 1 et 2, il est égal à 2 pour la formule de Darcy et à 1,852 pour la formule de Hazen Williams.

Exemple : La perte de charge le long du tronçon 1

$$\Delta H_1 = A_1 Q_1^B$$

Pour chaque maille, on fait la somme :

$$\sum \Delta H_i = \sum A_i Q_i^B \quad (\text{III. 46})$$

En tenant compte du signe de  $\Delta H$

Pour chaque maille, on fait aussi la somme :

$$B \sum A_i Q_i \quad \text{ou} \quad B \sum \frac{\Delta H_i}{Q_i} \quad (\text{III. 47})$$

Sans tenir compte du signe de  $\Delta H$

Si  $\sum \Delta H_i \neq 0$ , on ajoute à chaque contour un débit correctif  $\Delta Q$

L'expression du débit correctif<sup>3</sup> peut prendre la forme :

$$\Delta Q = -\frac{\sum AQ^B}{B \sum AQ} \quad (l/s) \quad (III. 48)$$

ou encore:

$$\Delta Q = -\frac{\sum \Delta H_{t,i}}{B \sum \frac{\Delta H_{t,i}}{Q_i}} \quad (III. 49)$$

$\sum \Delta H_{t,i}$  : La somme algébrique des pertes de charge (m) dans chaque maille.

$\sum \frac{\Delta H_{t,i}}{Q_i}$  en valeur absolue

La valeur de  $\Delta Q$  calculée à partir de l'expression (III.48 ou 49) permet de déterminer un débit corrigé :

- Si l'écoulement se fait dans le sens positif de la maille

$$Q_C = Q + \Delta Q \text{ (avec le signe de } \Delta Q \text{)} .$$

- Dans le cas contraire, on détermine le débit corrigé comme suit:

$$Q_C = Q - \Delta Q \text{ (avec le signe de } \Delta Q \text{)}$$

Les corrections sont poursuivies jusqu'à ce que la somme algébrique de pertes de charge pour chaque maille soit approximativement nulle (ou  $\Delta Q \approx 0$ ).

## Exercices corrigés

### Exercice 1

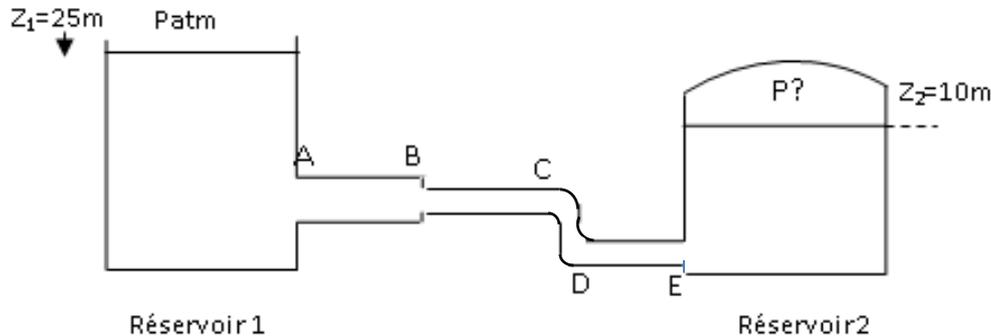
Deux réservoirs contenant de l'eau et reliés par une conduite de diamètre constant. La conduite est équipée par une deux coudes. On considère les données suivantes:  $D_1=200\text{mm}$ ,  $D_2= 100\text{mm}$ , Longueur AB ( $L_{AB}=10\text{m}$ ), Longueur BC ( $L_{BC}=10\text{m}$ )  $P_{atm}= 98,1\text{kPa}$ , Longueur DE ( $L_{DE}=10\text{m}$ )  $\rho_{eau} =1000\text{kg/m}^3$  Rugosité  $k=0,7\text{mm}$ , Débit= $30 \text{ l/s}$ , Viscosité cinématique  $\nu=0,014.10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$  et Coefficients de perte de charges:  $\zeta_{coude}=0,55$ ,  $\zeta_{rb}=0,24$

- 1) Calculer les vitesses d'écoulement  $V_1, V_2$ ,
- 2) Calculer le nombre de Reynolds  $Re_1, Re_2$

<sup>3</sup> D'après la formule de Hazen Williams :  $\Delta Q = -\frac{\sum AQ^{1,852}}{1,852 \sum AQ}$  ou  $\Delta Q = -\frac{\sum \Delta H_{t,i}}{1,852 \sum \frac{\Delta H_{t,i}}{Q_i}}$

D'après la formule de Darcy Weisbach :  $\Delta Q = -\frac{\sum AQ^2}{2 \sum AQ}$  ou  $\Delta Q = -\frac{\sum \Delta H_{t,i}}{2 \sum \frac{\Delta H_{t,i}}{Q_i}}$

- 3) Calculer les pertes de charges linéaires.
- 5) Calculer les pertes de charges singulières.
- 6) Calculer la pression dans le réservoir 2



### Solution 1

La vitesse d'écoulement

$$V_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,2^2} = 0,95 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,1^2} = 3,82 \text{ m/s}$$

Le nombre de Reynolds  $R_e$

$$R_{e1} = \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{0,95 \cdot 0,2}{0,014 \cdot 10^{-2}} = 1357,14 > 2000$$

$$R_{e2} = \frac{V_2 D_2}{\nu} = \frac{3,82 \cdot 0,1}{0,014 \cdot 10^{-2}} = 2728,57$$

La nature de l'écoulement.

$R_{e1} = 1357,14 < 2000$ , le régime est laminaire

$R_{e2} = 2728,57 > 2000$ , le régime est turbulent

Coefficient de perte de charge linéaire

$$R_{e1} = 1357,14 < 2000 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{64}{R_{e1}} = 0,047$$

$$2000 < R_{e2} < 50 \frac{D_2}{k} = 50 \frac{100}{0,7} = 7142,8, \text{ le régime est turbulent lisse}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{0,3165}{R_{e2}^{0,25}} = 0,044$$

Pertes de charge linéaires :

$$\Delta h_1 = \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{D_1 2g} = 0,047 \frac{10 \cdot 0,95^2}{0,2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 0,108m$$

$$\Delta h_2 = \lambda_2 \frac{(L_2 + L_3) V_2^2}{D_2 2g} = 0,044 \frac{20 \cdot 3,82^2}{0,1 \cdot 2 \cdot 9,81} = 6,54m$$

Pertes de charges singulières :

$$\Delta H_{S(entr\acute{e}e)} = \xi_{entr\acute{e}e} \frac{V_1^2}{2g} = 0,5 \frac{0,95^2}{2 \cdot 9,81} = 0,023m$$

$$\Delta H_{S(rb)} = \xi_{rb} \frac{V_2^2}{2g} = 0,24 \frac{3,82^2}{2 \cdot 9,81} = 0,178m$$

$$\Delta H_{S(coude)} = 2 \cdot \xi_{coude} \frac{V_2^2}{2g} = 2 \cdot 0,55 \frac{3,82^2}{2 \cdot 9,81} = 0,041m$$

$$\Delta H_{S(sortie)} = \xi_{sortie} \frac{V_2^2}{2g} = 1 \cdot \frac{3,82^2}{2 \cdot 9,81} = 0,74m$$

$$\Delta H_S = \sum \Delta H_S = 1,761m$$

Pression dans le r\eservoir 2

Bernoulli entre le point (1) et (2) s'écrit:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_T$$

$P_1 = P_{atm} = 98100 Pa$ ,  $V_1 = V_2 = 0$  (niveau constant) et  $\Delta H_T = \Delta H_L + \Delta H_S = 8,41m$

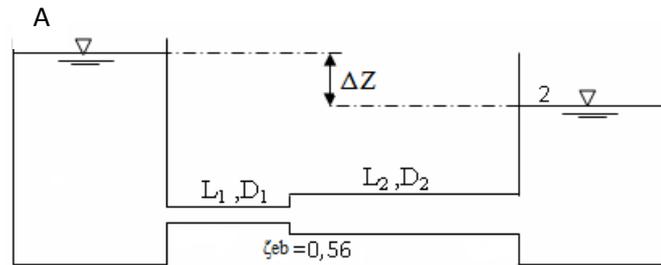
$$P_2 = \rho g (Z_1 - Z_2 + \frac{P_1}{\rho g} - \Delta H_T) = 1000 \cdot 9,81 (15 + \frac{98100}{1000 \cdot 9,81} - 8,41) = 162,75 KPa$$

### Exercice 2 :

Deux r\eservoirs sont reliés par deux conduites placées en s\erie de diam\etre  $D_1=15$  cm et  $D_2=30$  cm et de longueur  $L_1=50$  m et  $L_2=160$  m. La rugosit\e des deux conduites est  $k=0,1$  mm et le d\ebit d'écoulement est  $Q=0,1$  m<sup>3</sup>/s. Viscosité cinématique  $\nu=1.005 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s

1. Calculer les vitesses d'écoulement dans les conduites
2. Calculer le nombre de Reynolds dans chaque conduite
3. D\eterminer le r\egime d'écoulement dans chaque conduite
4. Calculer les pertes de charges linéaires et singulières ;
5. D\eterminer la diff\erence de niveau de la surface libre entre les deux r\eservoirs ( $\Delta Z$ ).

Pour le calcul de  $\lambda$  utiliser la formule de Halaand



### Solution 2

La vitesse d'écoulement

$$V_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,1}{\pi \cdot 0,15^2} = 5,66 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,1}{\pi \cdot 0,3^2} = 1,415 \text{ m/s}$$

Le nombre de Reynolds  $R_e$

$$R_{e1} = \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{5,66 \cdot 0,15}{1.005 \cdot 10^{-6}} = 8,44 \cdot 10^5 > 2000 \Rightarrow \text{le régime est turbulent}$$

$$R_{e2} = \frac{V_2 D_2}{\nu} = \frac{1,415 \cdot 0,3}{1.005 \cdot 10^{-6}} = 4,22 \cdot 10^5 > 2000 \Rightarrow \text{le régime est turbulent}$$

Le coefficient de perte de charges linéaire  $\lambda$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{R_{e1}} + \left( \frac{k/D_1}{3,7} \right)^{1,11} \right] \Rightarrow \lambda_1 = 0,0182$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{R_{e2}} + \left( \frac{k/D_2}{3,7} \right)^{1,11} \right] \Rightarrow \lambda_2 = 0,0166$$

Pertes de charge linéaires :

$$\Delta h_1 = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} = 0,0182 \frac{50}{0,15} \frac{5,66^2}{2 \cdot 9,81} = 9,90 \text{ m}$$

$$\Delta h_2 = \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} = 0,0166 \frac{160}{0,3} \frac{1,415^2}{2 \cdot 9,81} = 0,90 \text{ m}$$

Pertes de charges singulières :

$$\Delta H_{S(\text{entrée})} = \xi_{\text{entrée}} \frac{V_1^2}{2g} = 0,5 \frac{5,66^2}{2 \cdot 9,81} = 0,82 \text{ m}$$

$$\Delta H_{S(\text{eb})} = \xi_{\text{eb}} \frac{V_1^2}{2g} = 0,56 \frac{5,66^2}{2 \cdot 9,81} = 0,91 \text{ m}$$

$$\Delta H_{S(\text{sortie})} = \xi_{\text{sortie}} \frac{V_2^2}{2g} = 1 \cdot \frac{1,415^2}{2 \cdot 9,81} = 0,102 \text{ m}$$

$$\Delta H_S = \sum \Delta H_S = 1,832 \text{ m}$$

La différence de niveau de la surface libre entre les deux réservoirs ( $\Delta Z$ ).

Bernoulli entre le point (1) et (2) s'écrit:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_T$$

$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$ ,  $V_1 = V_2 = 0$  (niveau constant) et  $\Delta H_T = \Delta H_L + \Delta H_S = 12,632 \text{ m}$

$$\Delta Z = \Delta H_T = 12,632 \text{ m}$$

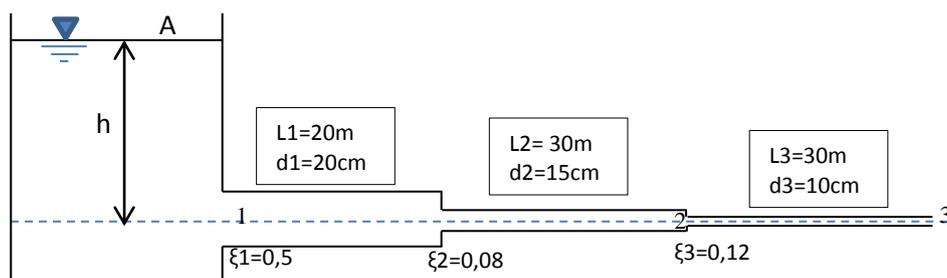
### Exercice 3

Un réservoir d'eau alimente un réseau composé de trois conduites en série ( $k=0.1\text{mm}$ ) et l'eau sort sous forme d'un jet. Sachant que le débit d'écoulement est égal à 96 L/s, Calculer :

1. les vitesses d'écoulements  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$
2. les pertes de charges linéaires et singulières ;
3. la charge  $h$  dans le réservoir
4. la pression statique aux points 1 et 2.

Pour le calcul de  $\lambda$  utiliser la formule de Nikuradse

$P_{\text{atm}}$  est négligeable



### Solution 3

La vitesse d'écoulement

$$V_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 96 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,2^2} = 3,057 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{S_2} = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 96 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0,15^2} = 5,43 \text{ m/s}$$

$$V_3 = \frac{Q}{S_3} = \frac{4Q}{\pi D_3^2} = \frac{4.96.10^{-3}}{\pi 0,1^2} = 12,23 \text{ m/s}$$

Le coefficient de perte de charges linéaire  $\lambda$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = -2 \log \left( \frac{k/D_1}{3,7} \right) \Rightarrow \lambda_1 = 0,0167$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -2 \log \left( \frac{k/D_2}{3,7} \right) \Rightarrow \lambda_2 = 0,0178$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} = -2 \log \left( \frac{k/D_3}{3,7} \right) \Rightarrow \lambda_3 = 0,0196$$

Pertes de charge linéaires :

$$\Delta h_1 = \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{D_1 2g} = 0,0167 \frac{20 \cdot 3,053^2}{0,2 \cdot 2.9,81} = 0,75 \text{ m}$$

$$\Delta h_2 = \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{D_2 2g} = 0,0178 \frac{30 \cdot 5,43^2}{0,15 \cdot 2.9,81} = 5,35 \text{ m}$$

$$\Delta h_3 = \lambda_3 \frac{L_3 V_3^2}{D_3 2g} = 0,0196 \frac{30 \cdot 12,23^2}{0,1 \cdot 2.9,81} = 44,82 \text{ m}$$

$$\Delta H_L = \sum \Delta H_L = 50,96 \text{ m}$$

Pertes de charges singulières :

$$\Delta H_{S(\text{entrée})} = \xi_1 \frac{V_1^2}{2g} = 0,5 \frac{3,057^2}{2.9,81} = 0,24 \text{ m}$$

$$\Delta H_{S(\text{eb})} = \xi_2 \frac{V_2^2}{2g} = 0,08 \frac{5,43^2}{2.9,81} = 0,12 \text{ m}$$

$$\Delta H_{S(\text{sortie})} = \xi_3 \frac{V_3^2}{2g} = 0,12 \cdot \frac{12,23^2}{2.9,81} = 0,91 \text{ m}$$

$$\Delta H_S = \sum \Delta H_S = 1,275 \text{ m}$$

Le niveau de la surface libre (h).

Bernoulli entre le point (A) et (3) s'écrit:

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_3 + \frac{P_3}{\rho g} + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta H_{A-3}$$

$P_A = P_3 = P_{atm}$ ,  $V_A = 0$  (niveau constant) et  $\Delta H_T = \Delta H_L + \Delta H_S = 12,632 \text{ m}$

$$Z_A = \frac{V_3^2}{2g} + \Delta H_{A-3} = 59,88 \text{ m} \approx 60 \text{ m}$$

### La pression dans le point 1

Bernoulli entre le point (A) et (1) s'écrit:

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \Delta H_T$$

$P_A = P_{atm}$ ,  $V_A = 0$  (niveau constant)

$$\Delta H_{A-1} = \xi_{entrée} \frac{V_1^2}{2g}$$

$$P_1 = \rho g \left( Z_A - \frac{V_1^2}{2g} - \Delta H_{A-1} \right) = 581,54 \text{ kPa}$$

### La pression dans le point 2

Bernoulli entre le point (A) et (2) s'écrit:

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_{A-2}$$

$P_A = P_{atm}$ ,  $V_A = 0$  (niveau constant)

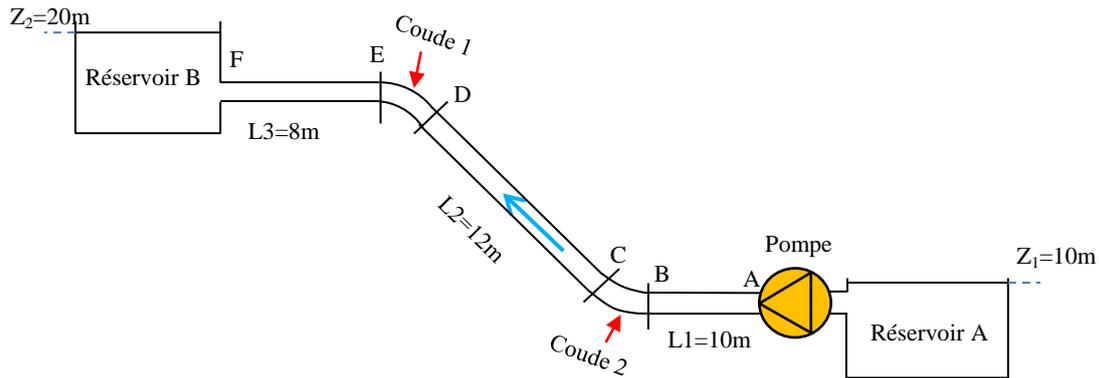
$$\Delta H_{A-2} = \xi_{entrée} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + \xi_{eb} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g}$$

$$P_2 = \rho g \left( Z_A - \frac{V_2^2}{2g} - \Delta H_{A-2} \right) = 510,51 \text{ kPa}$$

### Exercice 4

Une pompe de débit  $Q=0,002 \text{ m}^3/\text{s}$  et de rendement  $\eta = 70 \%$  remonte de l'eau à partir du réservoir A jusqu'au réservoir B. L'eau est acheminée dans une conduite de diamètre  $d=130\text{mm}$  formée de trois tronçons rectilignes et deux coudes ( $\zeta_c=0,33$ ). La viscosité cinématique de l'eau :  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , la masse volumique de l'eau:  $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ , Rugosité  $k=0,32 \text{ mm}$  et l'accélération de la pesanteur :  $g=9,81 \text{ m}/\text{s}^2$

- 1) Calculer la vitesse d'écoulement d'eau dans la conduite.
- 2) Calculer le nombre de Reynolds  $Re$  et déduire la nature de l'écoulement.
- 3) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire  $\lambda$ ,
- 4) Calculer les pertes de charges linéaires
- 5) Calculer les pertes de charges singulières
- 6) Déterminer la puissance nette  $P_n$  de la pompe.
- 7) Calculer la puissance  $P_a$  absorbée par la pompe.



### Solution 4

La vitesse d'écoulement d'eau dans la conduite

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4.0,002}{\pi 0,13^2} = 0,15 \text{ m/s}$$

Le nombre de Reynolds  $Re$

$$Re = \frac{Vd}{\nu} = \frac{0,15 \cdot 0,13}{10^{-6}} = 19500$$

La nature de l'écoulement.

Puisque  $Re > 2000$  le régime est turbulent

Le coefficient de perte de charges linéaire  $\lambda$ ,

Puisque :

$$2000 < Re < 50 \frac{d}{k} = 50 \frac{130}{0,32} = 20312,5$$

donc, le régime est turbulent lisse

On utilise la formule de Blasius :

$$\lambda = \frac{0,3165}{Re^{0,25}} = \frac{0,3165}{19500^{0,25}} = 0,02678$$

Les pertes de charges linéaires

$$\Delta h = \lambda \frac{(L_1 + L_2 + L_3) V^2}{d \cdot 2g} = 0,02678 \frac{30 \cdot 0,15^2}{0,13 \cdot 2 \cdot 9,81} = 0,007086 \text{ m} = 7,086 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Les pertes de charges singulières

$$\Delta H_{S(\text{entrée})} = \xi_{\text{entrée}} \frac{V^2}{2g} = 0,5 \frac{0,15^2}{2 \cdot 9,81} = 0,000573 \text{ m} = 5,73 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta H_{S(\text{coude})} = 2 \cdot \xi_{\text{coude}} \frac{V^2}{2g} = 2 \cdot 0,33 \frac{0,15^2}{2 \cdot 9,81} = 0,000757 \text{ m} = 7,57 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta H_{S(\text{sortie})} = \xi_{\text{sortie}} \frac{V^2}{2g} = 1 \cdot \frac{0,15^2}{2 \cdot 9,81} = 0,001147m = 1,147 \cdot 10^{-3}m$$

La puissance nette  $P_n$  de la pompe

Bernoulli entre le point (1) et (2) s'écrit:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_n}{\rho g Q} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_T$$

$P_1 = P_2 = P_{atm}$ ,  $V_1 = V_2 = 0$  (niveau constant) et  $\Delta H_T = \Delta H_L + \Delta H_S = 7,086 \cdot 10^{-3} + 2,477 \cdot 10^{-3} = 9,543 \cdot 10^{-3}m$

Donc :  $P_n = \rho g Q (Z_2 - Z_1 + \Delta H_T) = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,002 (10 + 9,543 \cdot 10^{-3}) = 196,4W$

Calculer la puissance  $P_a$  absorbée par la pompe.

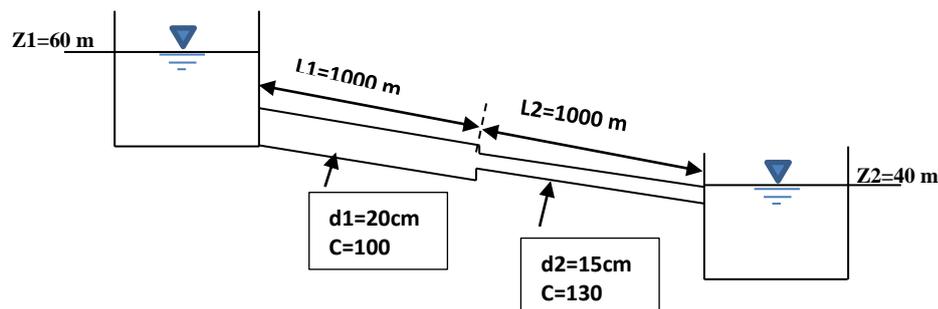
$$P_a = \frac{P_n}{\eta} = \frac{196,4}{0,7} = 280,57W$$

### Exercice 5

Considérons deux conduites en série dont les caractéristiques sont indiquées sur la figure ci-contre.

- Trouver le diamètre d'une conduite équivalente dont le coefficient de Hazen-Williams est  $C=140$  et la longueur est 2000 m.

2- Tracer la courbe caractéristique de la conduite équivalente et déduire le débit total graphiquement et analytiquement.



### Solution 5

1- Calcul du diamètre équivalent

Coefficient de résistance de conduite 1

$$A_1 = 10,67 \cdot \frac{L_1}{C_1^{1,852} \cdot d_1^{4,871}}$$

$$A_1 = 10,67 \cdot \frac{1000}{100^{1,852} \cdot 0,2^{4,871}} = 5358,09$$

Coefficient de résistance de conduite 2

$$A_2 = 10,67 \cdot \frac{L_2}{C_2^{1,852} \cdot d_2^{4,871}}$$

$$A_2 = 10,67 \cdot \frac{1000}{130^{1,852} \cdot 0,15^{4,871}} = 13383,31$$

$$A_{eq} = A_1 + A_2 = 18741,40$$

Longueur équivalente  $L_{eq}$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 = 2000 \text{ m}$$

Diamètre équivalent  $D_{eq}$

$$D_{eq} = \left[ \frac{10,67 \cdot L_{eq}}{C_{eq}^{1,852} \cdot A_{eq}} \right]^{1/4,871} = \left[ \frac{10,67 \cdot 2000}{140^{1,852} \cdot 18741,40} \right]^{1/4,871} \Rightarrow D_{eq} = 0,157 \text{ m}$$

## 2- Calcul du débit total analytiquement

L'équation de Bernoulli entre 1 et 2 s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_T$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}, V_1 = V_2 = 0 \text{ (niveau constant) et } \Delta H_T = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L2}$$

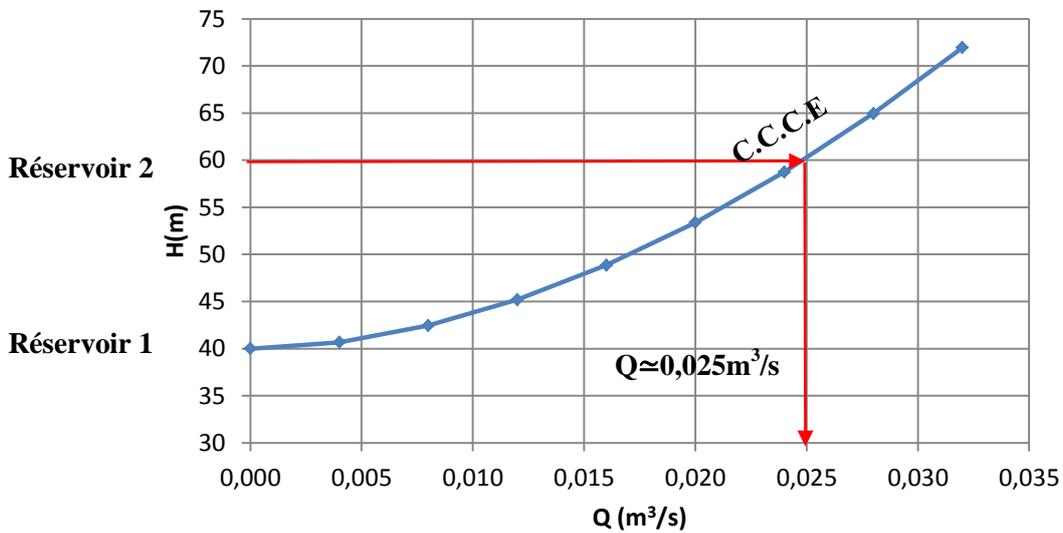
$$Z_1 - Z_2 = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L2} = A_1 Q^{1,852} + A_2 Q^{1,852} = A_{eq} Q^{1,852}$$

$$\Rightarrow Q = \left[ \frac{Z_1 - Z_2}{A_{eq}} \right]^{1/1,852} = \left[ \frac{60 - 40}{18741,40} \right]^{1/1,852} \Rightarrow Q = 0,02486 \text{ m}^3/\text{s} = 24,86 \text{ l/s}$$

## 3- Calcul du débit total graphiquement

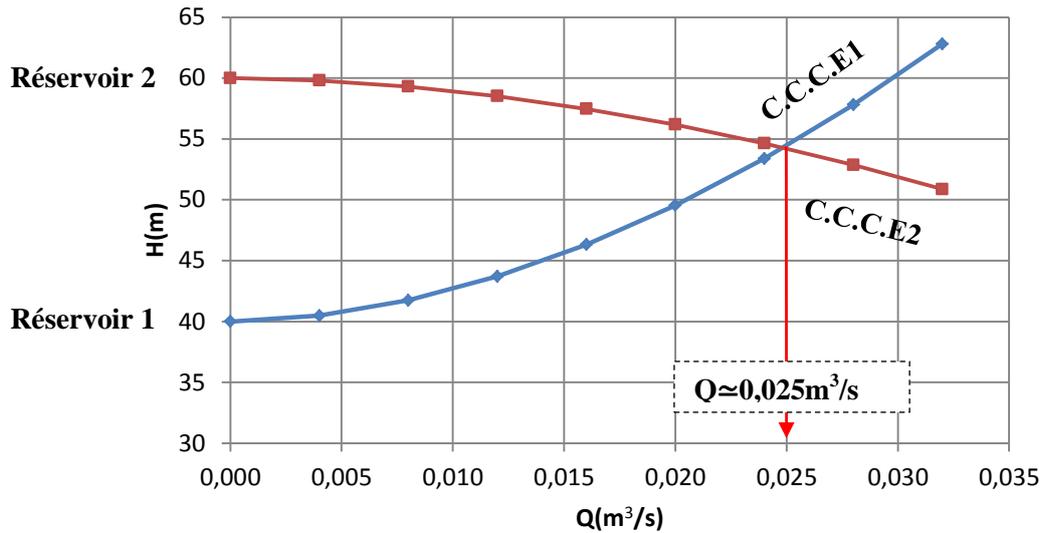
**Méthode 1 : calcul de débit à partir de la courbe caractéristique de la conduite équivalente**

Q(m <sup>3</sup> /s)	$\Delta H_T = A_{eq}Q^{1,852}$	$\Delta H_T + 40$
0,0000	0,00	40,00
0,0040	0,68	40,68
0,0080	2,45	42,45
0,0120	5,19	45,19
0,0160	8,85	48,85
0,0200	13,38	53,38
0,0240	18,75	58,75
0,0280	24,94	64,94
0,0320	31,94	71,94



**Méthode 2 : calcul de débit à partir des deux courbes caractéristiques**

Q(m <sup>3</sup> /s)	$\Delta H_{L1} = A_1Q^{1,852}$	$\Delta H_{L2} = A_2Q^{1,852}$	$60 - \Delta H_{L1}$	$\Delta H_{L2} + 40$
0,0000	0,00	0,00	60,00	40,00
0,0040	0,19	0,48	59,81	40,48
0,0080	0,70	1,75	59,30	41,75
0,0120	1,48	3,71	58,52	43,71
0,0160	2,53	6,32	57,47	46,32
0,0200	3,82	9,55	56,18	49,55
0,0240	5,36	13,39	54,64	53,39
0,0280	7,13	17,81	52,87	57,81
0,0320	9,13	22,81	50,87	62,81



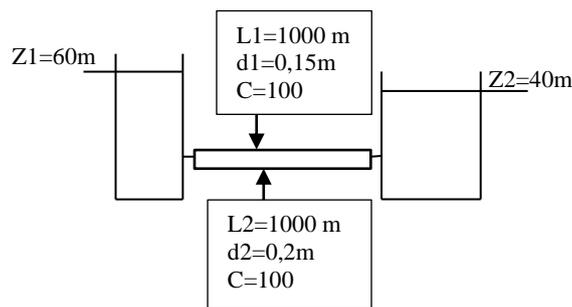
L'intersection des deux courbes donne un débit  $Q \approx 0,025 \text{ m}^3/\text{s}$

### Exercice 6

Deux conduites placées en parallèle relient deux réservoirs, tel que schématisé par la figure ci-contre.

1) Démontrer que la perte de charge est la même dans les deux conduites et trouver ensuite le diamètre de la conduite équivalente ayant la même longueur et le même coefficient C que les deux conduites.

2) déterminer  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_t$  numériquement et graphiquement ;



### Solution 6

1- Démonstration que la perte de charge est la même dans les deux conduites.

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 en passant par la conduite de diamètre  $d_1$  :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_1$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}, V_1 = V_2 = 0 \text{ (niveau constant)}$$

$$\Delta H_1 = Z_1 - Z_2 = 20 \text{ m}$$

Appliquons l'équation de Bernoulli entre 1 et 2 en passant par la conduite de diamètre  $d_2$ :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H_2$$

$$P_1 = P_2 = P_{atm}, V_1 = V_2 = 0 \text{ (niveau constant)}$$

$$\Delta H_2 = Z_1 - Z_2 = 20 \text{ m}$$

$$\text{Donc : } \Delta H_1 = \Delta H_2$$

## 2- Détermination du diamètre de la conduite équivalente

Coefficient de résistance de conduite 1

$$A_1 = 10,67 \cdot \frac{L_1}{C_1^{1,852} \cdot d_1^{4,871}}$$

$$A_1 = 10,67 \cdot \frac{1000}{100^{1,852} \cdot 0,15^{4,871}} = 21756,38$$

Coefficient de résistance de conduite 2

$$A_2 = 10,67 \cdot \frac{L_2}{C_2^{1,852} \cdot d_2^{4,871}}$$

$$A_2 = 10,67 \cdot \frac{1000}{100^{1,852} \cdot 0,2^{4,871}} = 5358,09$$

Pour les conduites en parallèles  $A_{eq}$  :

$$A_{eq} = \frac{1}{\left[ \left( \frac{1}{A_1} \right)^{1/1,852} + \left( \frac{1}{A_2} \right)^{1/1,852} \right]^{1,852}} = 2627,57$$

Longueur équivalente  $L_{eq}$

$$L_{eq} = L_1 = L_2 = 1000 \text{ m}$$

Diamètre équivalent  $D_{eq}$

$$D_{eq} = \left[ \frac{10,67 \cdot L_{eq}}{C_{eq}^{1,852} \cdot A_{eq}} \right]^{1/4,871} = \left[ \frac{10,67 \cdot 1000}{100^{1,852} \cdot 2627,57} \right]^{1/4,871} \Rightarrow D_{eq} = 0,231 \text{ m}$$

## 3- Calcul de $Q_1$ , $Q_2$ et $Q_t$ analytiquement

$$\Delta H_1 = A_1 Q_1^{1,852} \Rightarrow Q_1 = \left[ \frac{20}{A_1} \right]^{1/1,852} = \left[ \frac{20}{21756,38} \right]^{1/1,852} = 0,02294 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Rightarrow Q_1 = 22,94 \text{ l/s}$$

$$\Delta H_2 = A_2 Q_2^{1,852} \Rightarrow Q_2 = \left[ \frac{20}{A_2} \right]^{1/1,852} = \left[ \frac{20}{5358,09} \right]^{1/1,852} = 0,04888 \text{ m}^3/\text{s}$$

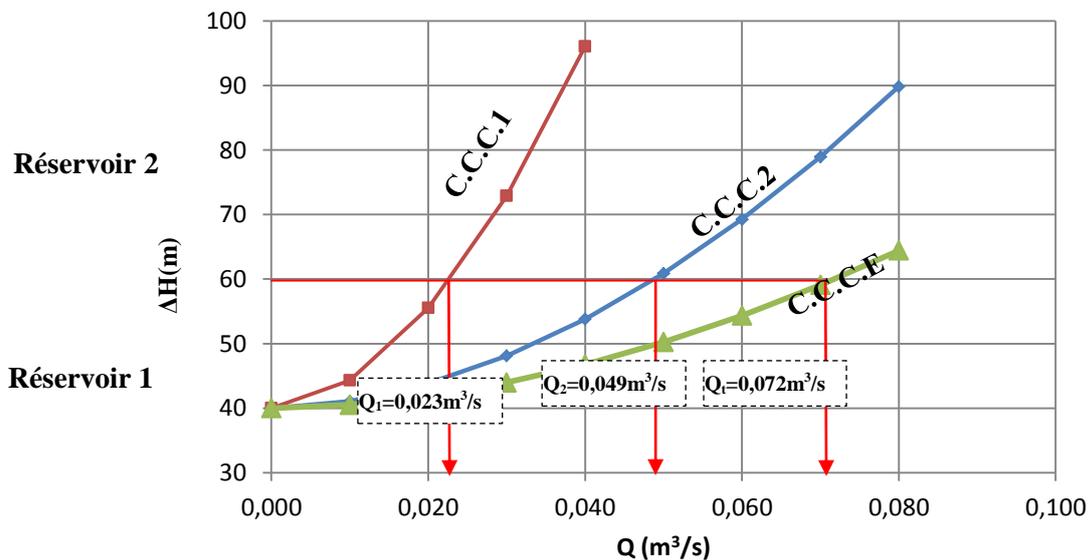
$$\Rightarrow Q_2 = 48,88 \text{ l/s}$$

**Conduite en parallèle**  $\Rightarrow Q_t = Q_1 + Q_2 = 22,94 + 48,88$

$$\Rightarrow Q_t = 71,82 \text{ l/s}$$

4- Calcul de  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_t$  graphiquement

$Q(\text{m}^3/\text{s})$	$\Delta H_1 = A_1 Q^{1,852}$	$\Delta H_2 = A_2 Q^{1,852}$	$\Delta H_1 + 40$	$\Delta H_2 + 40$	$\Delta H_{\text{eq}} = A_{\text{eq}} Q^{1,852}$	$\Delta H_{\text{eq}} + 40$
0,000	0,00	0,00	40,00	40,00	0,00	40,00
0,010	4,30	1,06	44,30	41,06	0,52	40,52
0,020	15,53	3,82	55,53	43,82	1,88	41,88
0,030	32,90	8,10	72,90	48,10	3,97	43,97
0,040	56,05	13,80	96,05	53,80	6,77	46,77
0,050	84,74	20,87	124,74	60,87	10,23	50,23
0,060	118,77	29,25	158,77	69,25	14,34	54,34
0,070	158,02	38,92	198,02	78,92	19,08	59,08
0,080	202,35	49,83	242,35	89,83	24,44	64,44



L'intersection entre la droite qui passe par la charge du réservoir 2 ( 60m) et les trois courbes donne les débits recherchés.

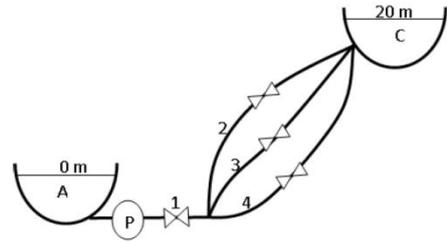
**Exercice 7**

Le réservoir A alimente le réservoir C à partir de trois canalisations multiples comme représentée dans la figure ci-dessous.

1. Calculer les débits  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$
2. Calculer la puissance absorbée par la pompe.

Données :  $Q_1 = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\eta = 0,75$

Conduite	L(m)	D(mm)	$\lambda$	$\sum \xi$
1	100	1200	0,015	2
2	1000	1000	0,02	3
3	1500	500	0,018	2
4	800	750	0,021	4

**Solution 7**

- 1- Calcul des débits  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $Q_4$

Les pertes de charge totales dans :

$$\text{La conduite 2 : } \Delta H_2 = \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{D_2 2g} + \sum \xi_2 \frac{V_2^2}{2g} = \left( \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} + \sum \xi_2 \right) \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{La conduite 3 : } \Delta H_3 = \lambda_3 \frac{L_3 V_3^2}{D_3 2g} + \sum \xi_3 \frac{V_3^2}{2g} = \left( \lambda_3 \frac{L_3}{D_3} + \sum \xi_3 \right) \frac{V_3^2}{2g}$$

La conduite 4 :

$$\Delta H_4 = \lambda_4 \frac{L_4 V_4^2}{D_4 2g} + \sum \xi_4 \frac{V_4^2}{2g} = \left( \lambda_4 \frac{L_4}{D_4} + \sum \xi_4 \right) \frac{V_4^2}{2g}$$

Les conduites en parallèles ont la même perte de charge.

$$\Delta H_2 = \Delta H_3 = \Delta H_4 \Rightarrow \left( \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} + \sum \xi_2 \right) \frac{V_2^2}{2g} = \left( \lambda_3 \frac{L_3}{D_3} + \sum \xi_3 \right) \frac{V_3^2}{2g} = \left( \lambda_4 \frac{L_4}{D_4} + \sum \xi_4 \right) \frac{V_4^2}{2g}$$

$$\begin{cases} 23V_2^2 = 56V_3^2 \\ 23V_2^2 = 26,4V_4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_3 = 0,64V_2 \\ V_4 = 0,933V_2 \end{cases}$$

Le débit total traversant toutes les conduites est la somme des débits

$$Q = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

$$Q = V_2 S_2 + V_3 S_3 + V_4 S_4 = \frac{\pi D_2^2}{4} V_2 + \frac{\pi D_3^2}{4} V_3 + \frac{\pi D_4^2}{4} V_4$$

$$Q = 0,785V_2 + 0,196V_3 + 0,44V_4 = 0,785V_2 + 0,196 \cdot 0,64V_2 + 0,44 \cdot 0,933V_2$$

$$Q = 0,785V_2 \text{ avec } Q = 3 \text{ l/s}$$

On trouve :

$$V_2 = 2,27 \text{ m/s} \Rightarrow Q_2 = 1,782 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_3 = 1,45 \text{ m/s} \Rightarrow Q_3 = 0,285 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$V_4 = 2,12 \text{ m/s} \Rightarrow Q_4 = 0,933 \text{ m}^3/\text{s}$$

2- La puissance absorbée par la pompe

Appliquons l'équation de Bernoulli entre A et C donne:

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + H_m = Z_B + \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H$$

$$Z_B = 20\text{m} , P_A = P_B = P_{atm} \text{ et } V_A = V_B = 0 \text{ (niveau constant)}$$

$$\Delta H = \left( \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \sum \xi_1 \right) \frac{V_1^2}{2g} + \left( \lambda_3 \frac{L_3}{D_3} + \sum \xi_3 \right) \frac{V_3^2}{2g}$$

Avec :

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = 2,65 \text{ m/s et } V_3 = 1,45\text{m/s}$$

Alors :

$$\Delta H = 7,2\text{m}$$

$$H_m = Z_B - Z_A + \Delta H = 27, \text{m}$$

$$P_a = \frac{P_{net}}{\eta} = \frac{\rho g Q H_m}{\eta} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot 27,2}{0,7} = 1067,7\text{kW}$$

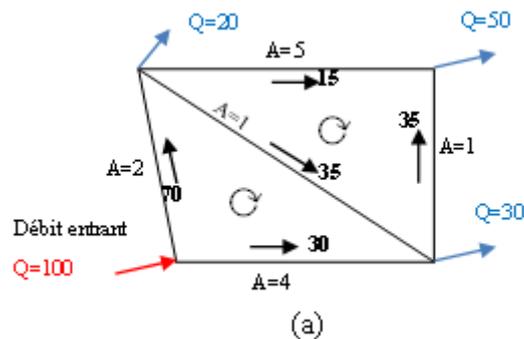
### Exercice 8

On désire d'effectuer le calcul d'un réseau constitué de deux mailles. On oriente chacune de ces mailles avec un sens positif (sens d'une aiguille d'une montre). Dans ce réseau, l'approvisionnement en débit arrive avec un débit entrant de 100 l/s et il existe trois branches de sortie, avec des débits qui valent 30, 50 et 20. Sur chaque tronçon, la valeur du coefficient A est indiquée.

- Etablir une répartition arbitraire des débits tout en respectant l'équation de continuité (la première loi de Kirchoff)

### Solution 8

Répartition arbitraire des débits :



	Maille n°I		Maille n°II	
	$AQ^2$	$2AQ$	$AQ^2$	$2AQ$
<b>1ère tentative</b>	$+70^2 \times 2 = 9800$	$2 \times 70 \times 2 = 280$	$+15^2 \times 5 = 1125$	$2 \times 15 \times 5 = 150$
	$+35^2 \times 1 = 1225$	$2 \times 35 \times 1 = 70$	$-35^2 \times 1 = -1225$	$2 \times 35 \times 1 = 70$
	$-30^2 \times 4 = -3600$	$2 \times 30 \times 4 = 240$	$-35^2 \times 1 = -1225$	$2 \times 35 \times 1 = 70$
	$\sum aLQ^2 = +7425$	$\sum 2aLQ = 590$	$\sum aLQ^2 = -1325$	$\sum 2aLQ = 290$
	$\Delta Q = -13 \quad 12,58$		$\Delta Q = +5$	
	<b>Puisque <math>\Delta Q \neq 0</math> on procède une deuxième tentative</b>			
<b>2ème tentative</b>	$+57^2 \times 2 = 6498$	$2 \times 57 \times 2 = 228$	$+20^2 \times 5 = 2000$	$2 \times 20 \times 5 = 200$
	$+17^2 \times 1 = 289$	$2 \times 17 \times 1 = 34$	$-17^2 \times 1 = -289$	$2 \times 17 \times 1 = 34$
	$-43^2 \times 4 = -7396$	$2 \times 43 \times 4 = 344$	$-30^2 \times 1 = -900$	$2 \times 30 \times 1 = 60$
	$\sum aLQ^2 = -609$	$\sum 2aLQ = 606$	$\sum aLQ^2 = +811$	$\sum 2aLQ = 294$
	$\Delta Q = 1$		$\Delta Q = -3$	
	<b>Puisque <math>\Delta Q \neq 0</math> on procède une troisième tentative</b>			
<b>3ème tentative</b>	$+58^2 \times 2 = 6728$	$2 \times 58 \times 2 = 232$	$+17^2 \times 5 = 1445$	$2 \times 17 \times 5 = 170$
	$+21^2 \times 1 = 441$	$2 \times 21 \times 1 = 42$	$-21^2 \times 1 = -441$	$2 \times 21 \times 1 = 42$
	$-42^2 \times 4 = -7056$	$2 \times 42 \times 4 = 336$	$-33^2 \times 1 = -1089$	$2 \times 33 \times 1 = 66$
	$\sum aLQ^2 = -113$	$\sum 2aLQ = 610$	$\sum aLQ^2 = -85$	$\sum 2aLQ = 278$
	$\Delta Q \approx 0$		$\Delta Q \approx 0$	

Pour la **2<sup>ème</sup> tentative**, on adapte les débits en fonction des  $\Delta Q$  trouvés. Lorsque le fluide circule dans le sens positif par rapport à l'orientation de la maille, on ajoute la valeur de  $\Delta Q$ . Dans le cas contraire, on retranche  $\Delta Q$ .

**2<sup>ème</sup> tentative:**

Maille I :

$70 + (-13) = 57$

$30 - (-13) = 43$

Maille II :

$15 + (+5) = 20$

$35 - (+5) = 30$

Branche commune :

$35 + (-13) - (+5) = 17$

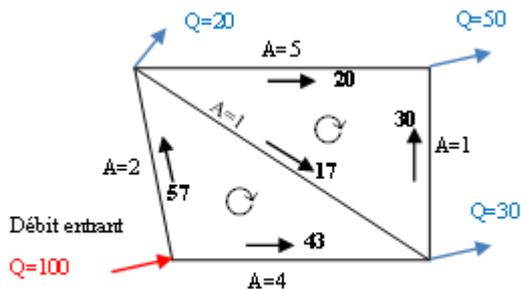
**3<sup>ème</sup> tentative :**

Maille I :

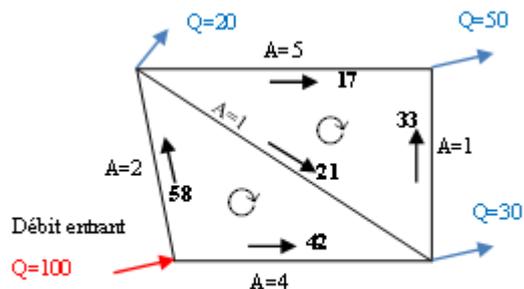
$57 + (+1) = 58$

$43 - (+1) = 42$

Maille II :



(b) 1ère répartition des débits



(c) répartition des débits réels

$$20+(-3)= 17$$

$$30- (-3)= 33$$

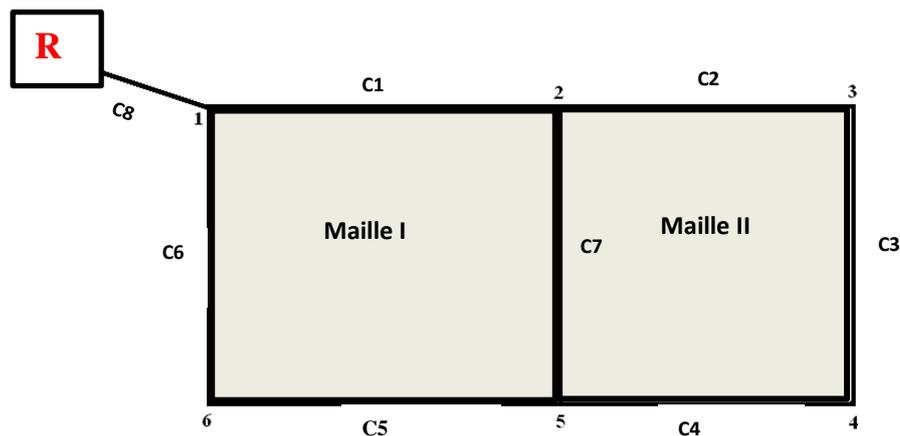
Branche commune :

$$17+(+1) -(-3) = 21$$

### Exercice 9

Le réseau de distribution est composé de deux mailles et un réservoir, qui est connecté au réseau par un seul tuyau. Les caractéristiques des tuyaux dans le tableau suivant :

Tuyau	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Longueur (m)	400	300	200	300	400	200	200	1000
C	150	150	150	150	150	150	150	150
Diamètre (m)	400	250	125	125	200	250	200	500



- Calculer le débit spécifique, les débits par tronçon et les débits aux nœuds sachant que qu'il n'y a pas de débits concentrés et que le débit en route est de 200 l/s.
- Calculer les vitesses réelles dans les conduites et les pressions au sol dans chaque nœud

### Solution 9

#### Débit spécifique

$$Q_{sp} = \frac{Q_r}{\sum L_i} = \frac{200}{2000} = 0,1 \text{ l/s/m}$$

**Débit par tronçon**

$$Q_{ri} = Q_{sp} \cdot L_i$$

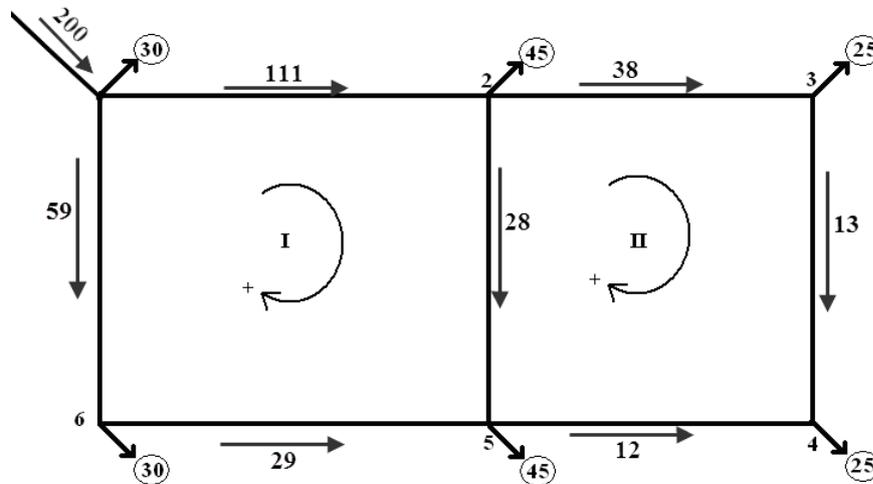
Tronçon i	Du nœud au nœud		Longueur Li (m)	Q <sub>ri</sub> (l/s)
T1	1	2	400	0,1x400 = 40
T2	2	3	300	0,1x300 = 30
T3	3	4	200	0,1x200 = 20
T4	4	5	300	0,1x300 = 30
T5	5	6	400	0,1x400 = 40
T6	6	1	200	0,1x200 = 20
T7	2	5	200	0,1x200 = 20
			2000	200

**Débits aux nœuds**

$$Q_n = 0,5 \left( \sum Q_{ri} \right)_n + \left( \sum Q_{conc} \right)_n$$

Noeud I	Conduite	Débit par conduit (l/s)	Débit au nœud I (l/s)
1	T1	40	0,5(40 + 20) = 30
	T6	20	
2	T1	40	0,5(40 + 30 + 20) = 45
	T2	30	
	T7	20	
3	T2	30	0,5(30 + 20) = 25
	T3	20	
4	T3	20	0,5(20 + 30) = 25
	T4	30	
5	T4	30	0,5(30 + 40 + 20) = 45
	T5	40	
	T7	20	
6	T5	40	0,5(40 + 20) = 30
	T6	20	

**Répartition arbitraire des débits**



La perte de charge  $\Delta H$  est calculée par la formule de Hazen Williams :

$$\Delta H = 10,67 \cdot \frac{L}{C^{1,852} \cdot d^{4,871}} Q^{1,852}$$

1 <sup>ère</sup> tentative	Maille I						
	Conduite	Diamètre (mm)	Longueur (m)	C	Débit (l/s)	$\Delta H$ (m)	$\frac{\Delta H(m)}{Q(l/s)}$
	T1	400	400	150	+111	0,59	0,005
	T7	200	200	150	+28	0,67	0,024
	T5	200	400	150	-29	-1,44	0,050
	T6	250	200	150	-59	<u>-0,90</u>	<u>0,015</u>
						$\Sigma \Delta H = -1,08$	$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,188$
$\Delta Q = 6,171$ l/s							
Maille II							
T2	250	300	150	+38	0,60	0,016	
T3	125	200	150	+13	1,60	0,123	
T4	125	300	150	-12	2,07	0,173	
T7	200	200	150	-28	<u>0,67</u>	<u>0,024</u>	
						$\Sigma \Delta H = -0,54$	$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,622$
$\Delta Q = 0,874$ l/s							
Puisque $\Delta Q \neq 0$ on procède une deuxième tentative							
2 <sup>ème</sup> tentative	Maille I						
	T1	400	400	150	+117,171	0,65	0,006
	T7	200	200	150	+33,297	0,93	0,028
	T5	200	400	150	-22,829	-0,92	0,040
	T6	250	200	150	-52,829	<u>-0,74</u>	<u>0,014</u>
							$\Sigma \Delta H = -0,08$
$\Delta Q = 0,482$ l/s							
Maille II							
T2	250	300	150	+38,874	0,63	0,016	
T3	125	200	150	+13,874	1,81	0,130	
T4	125	300	150	-11,126	-1,80	0,162	
T7	200	200	150	-33,297	<u>-0,93</u>	<u>0,028</u>	
						$\Sigma \Delta H = -0,30$	$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,623$
$\Delta Q = 0,476$ l/s							
Puisque $\Delta Q \neq 0$ on procède une 3 <sup>ème</sup> tentative							
3 <sup>ème</sup> tentative	Maille I						
	T1	400	400	150	+117,654	0,66	0,006
	T7	200	200	150	+33,304	0,93	0,028
	T5	200	400	150	-22,346	-0,89	0,040
	T6	250	200	150	-52,346	<u>-0,72</u>	<u>0,014</u>
							$\Sigma \Delta H = -0,02$
$\Delta Q = 0,155$ l/s							

	Maille II						
	T2	250	300	150	+39,350	0,64	0,016
	T3	125	200	150	+14,350	1,93	0,134
	T4	125	300	150	-10,650	-1,66	0,156
				-33,304	<u>-0,93</u>	<u>0,028</u>	
				$\Sigma \Delta H = -0,03$		$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,620$	
	$\Delta Q = 0,042$ l/s Puisque $\Delta Q \neq 0$ on procède une 4 <sup>ème</sup> tentative						
4 <sup>ème</sup> tentative	Maille I						
	T1	400	400	150	+117,808		0,006
	T7	200	200	150	+33,417		0,028
	T5	200	400	150	-22,192		0,039
T6	250	200	150	-52,192		<u>0,014</u>	
				$\Sigma \Delta H =$		$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,161$	
	$\Delta Q = 0,014$ l/s						
4 <sup>ème</sup> tentative	Maille II						
	T2	250	300	150	+39,391	0,641	0,016
	T3	125	200	150	+14,391	1,936	0,135
	T4	125	300	150	-10,609	-1,651	0,156
T7	200	200	150	-33,417	<u>-0,934</u>	<u>0,028</u>	
				$\Sigma \Delta H = -0,008$		$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,619$	
	$\Delta Q = 0,013$ l/s Puisque $\Delta Q \neq 0$ on procède une 5 <sup>ème</sup> tentative						
5 <sup>ème</sup> tentative	Maille I						
	T1	400	400	150	117,822	0,658	0,006
	T7	200	200	150	33,417	0,934	0,028
	T5	200	400	150	-22,178	-0,874	0,039
T6	250	200	150	-52,178	<u>-0,719</u>	<u>0,014</u>	
				$\Sigma \Delta H = -0,001$		$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,161$	
	$\Delta Q = 0,0042$ l/s						
5 <sup>ème</sup> tentative	Maille II						
	T2	250	300	150	39,404	0,641	0,016
	T3	125	200	150	14,404	1,940	0,135
	T4	125	300	150	10,596	-1,647	0,155
T7	200	200	150	33,417	<u>-0,934</u>	<u>0,028</u>	
				$\Sigma \Delta H = -0,001$		$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,619$	
	$\Delta Q = 0,001$ l/s						
	Puisque $\Delta Q \neq 0$ on procède à une 6 <sup>ème</sup> tentative						
6 <sup>ème</sup> tentative	Maille I						
	T1	400	400	150	+117,826	0,6585	0,006
	T7	200	200	150	+33,420	0,9341	0,028
	T5	200	400	150	-22,174	-0,8739	0,039
T6	250	200	150	-52,174	<u>-0,7188</u>	<u>0,014</u>	
				$\Sigma \Delta H = -0,0001$		$1,852 \Sigma \frac{\Delta H}{Q} = 0,161$	
	$\Delta Q = 0,0004$ l/s						

Maille II						
T2	250	300	150	+39,6		0,016
T3	125	200	150	+14,6		0,135
T4	125	300	150	-10,6		0,155
T7	200	200	150	-33,6		<u>0,028</u>
						$1,852 \sum \frac{\Delta H}{Q} = 0,619$
$\Delta Q = 0,0003 \text{ l/s}$						

### Les vitesses réelles dans les conduites

Conduite i	Longueur $L_i$ (m)	Diamètre $D_i$ (m)	Débit $Q_i$ (l/s)	Vitesse $V_i$ (m/s)	P.C. $\Delta H_i$ (m)
T1	400	0,400	117,8	0,94	0,66
T2	300	0,250	39,4	0,80	0,64
T3	200	0,125	14,4	1,17	1,94
T4	300	0,125	10,6	0,86	1,65
T5	400	0,200	22,2	0,71	0,87
T6	200	0,250	52,2	1,06	0,72
T7	200	0,200	33,4	1,06	0,93
T8	1000	0,500	200	1,02	1,48

## Chapitre IV

### Écoulement à surface libre en régime uniforme

#### IV.1 Les écoulements à surface libre

Les écoulements à surface libre sont des écoulements qui comportent une surface libre, généralement soumise à la pression atmosphérique.

#### IV.2 Types de canaux

##### IV.2.1 Canaux naturels

Les canaux naturels sont des cours d'eau existant naturellement sur terre (les rivières et les fleuves) et dont les propriétés géométriques et hydrauliques sont généralement assez irrégulières.

##### IV.2.1 Canaux artificiels

Les canaux artificiels sont des cours d'eaux réalisés par l'homme dont les propriétés géométriques et hydrauliques sont généralement assez régulières tels que: les canaux découverts construits au ras du sol (canaux de navigation, d'adduction, d'évacuation, d'irrigation et de drainage) ou les canaux couverts dans lesquels l'eau ne remplit pas toute la section du canal (tunnels hydrauliques, aqueducs, drains et égouts).

#### IV.3 Canal prismatique:

Un canal est dit prismatique si la forme géométrique du canal ne varie pas le long du courant liquide, alors que la hauteur pourrait être variable. Un canal est non prismatique si la forme du canal est soumise à des changements locaux<sup>1</sup> de sections le long du courant liquide. En général, les canaux naturels ne sont pas prismatiques.

#### IV.4 Les paramètres géométriques des canaux :

Les grandeurs géométriques les plus utilisées permettant de caractériser l'écoulement sont :

- **Section transversale d'un canal** est la section plane normale à la direction de l'écoulement.

---

<sup>1</sup> Les changements locaux de sections peuvent être :

- Des rétrécissements brusques ou graduels.
- Des élargissements brusques ou graduels.

- **Surface mouillée d'un canal (S)**: la partie de la surface du canal occupée par le fluide et limitée par les parois du canal et la surface libre.
- **Périmètre mouillé d'un canal (P)**: est la longueur de paroi en contact avec l'eau (berges et fond), mais ne comporte pas le contact eau-atmosphère.
- **Rayon hydraulique (R)** : est le rapport entre section mouillée et périmètre mouillé, exprimé en mètres (m):  $R = \frac{S}{P}$
- **Profondeur ou tirant d'eau (h) ou (y)** : la profondeur du point le plus bas d'une section d'écoulement
- **Largeur au plan d'eau B ou largeur au miroir** : est la largeur de la section d'écoulement à la surface libre.
- **Profondeur hydraulique  $D_h$**  : le rapport de la surface mouillée à la largeur au miroir  $D_h = \frac{S}{B}$

#### IV.5 Les pentes

On distingue trois (3) types de pentes :

- **Pente du fond du canal (i)** : Elle est définie comme étant le rapport entre la différence de côtes de deux sections et la distance horizontale.

$$i = \frac{Z_1 - Z_2}{x_1 - x_2} = \frac{dZ}{dx} \quad (\text{IV.1})$$

La pente  $i$  peut être positive si le canal descendant ou négative si le canal est ascendant. La pente est nulle lorsque le canal est horizontal.

- **Pente piézométrique (I)** ; Elle est définie comme étant le rapport entre la différence de la profondeur d'eau de sections et la distance horizontale qui les sépare.

$$I = \frac{h_1 - h_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta h}{\Delta x} \quad (\text{IV.2})$$

La pente  $I$  peut être négative, nulle ou positive.

- **Pente hydraulique ou gradient hydraulique (J)**. Elle est définie comme étant le rapport entre la différence de l'énergie totale de sections et la distance horizontale qui les sépare.

$$J = \frac{H_1 - H_2}{x_1 - x_2} = \frac{\Delta H}{\Delta x} \quad (\text{IV.3})$$

La pente  $J$  est positive et elle est nulle pour les liquides parfaits.

## IV.6 Types d'écoulement

On peut définir les types écoulements selon la variabilité des caractéristiques hydrauliques tels que le tirant d'eau et la vitesse en fonction du temps et de l'espace (figure IV.1).

### IV.6.1 Variabilité dans le temps

Le mouvement est *permanent* (ou *stationnaire*) si les caractéristiques hydrauliques (vitesse  $V$ , profondeur  $h$ , la pente  $i$  et la section droite) restent invariables dans le temps en grandeur et en direction.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Le mouvement est non-permanent si les caractéristiques hydrauliques (vitesses  $V$  et la profondeur  $h$ ) varient dans le temps en grandeur et en direction dans le cas contraire.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$$

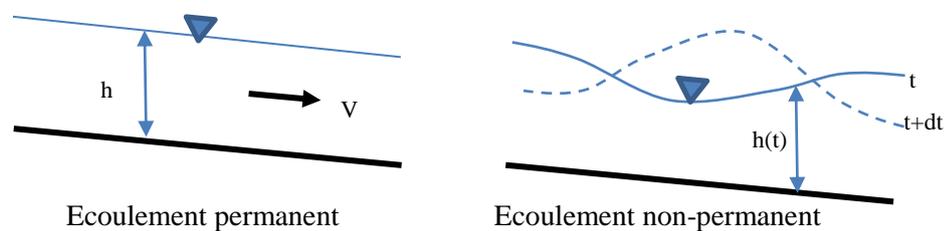


Figure IV.1 : Schéma des écoulements permanent et non permanent.

### IV.6.2 Variabilité dans l'espace

L'écoulement est *uniforme* si la profondeur et les autres paramètres de l'écoulement restent invariables dans les diverses sections du canal.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

La ligne de la pente du fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre.

L'écoulement est *non-uniforme ou varié* si la profondeur et les autres paramètres de l'écoulement changent d'une section à l'autre.

$$\frac{\partial V}{\partial x} \neq 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} \neq 0$$

La pente de la surface libre diffère de celle du fond.

Un écoulement non-uniforme peut être accéléré ou décéléré selon que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.

- Lorsque l'écoulement est *graduellement varié*, la profondeur ainsi que les autres paramètres varient lentement d'une section à l'autre.
- Lorsque l'écoulement est *rapidement varié*, les paramètres caractérisant l'écoulement changent brusquement, parfois avec des discontinuités. Cela se manifeste en général au voisinage d'une singularité, telle qu'un seuil, un rétrécissement, un ressaut hydraulique ou une chute brusque.

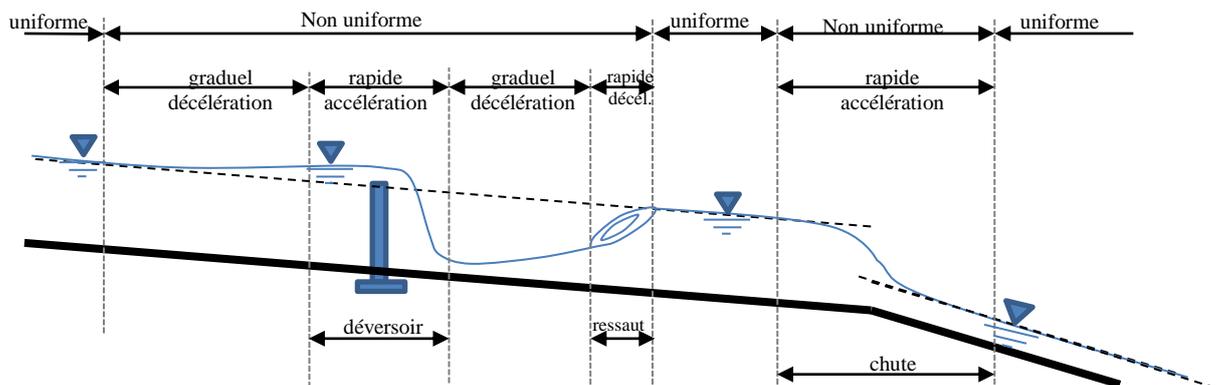


Figure IV.2 : Types d'Écoulement dans un canal à surface libre

## IV.7. Régime uniforme et permanent

### IV.7.1 Généralités

Un écoulement est uniforme lorsque la géométrie, la pente, la nature des parois, le tirant d'eau et la vitesse moyenne restent invariables dans les différentes sections du canal tout le long de l'écoulement. Dans ce cas d'écoulement, la pente de fond, la pente de la surface libre et la pente de la ligne d'énergie sont parallèles et identiques. Un écoulement réellement uniforme se rencontre rarement dans les rivières, mais plutôt dans les canaux de grande longueur, à section et pente constantes.

### IV.7.2 Équation générale du régime uniforme

On représente par  $i$  la pente du fond :

$$i = \frac{dZ}{dx}$$

La charge  $H$ , ou énergie totale dans une section, par rapport à un plan de référence (énergie par unité de poids) est la somme de trois termes : la hauteur géométrique ( $Z$ ), la hauteur piézométrique ( $h$ ) et la hauteur cinétique ( $\frac{V^2}{2g}$ ).

$$H = Z + h + \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV. 4})$$

L'équation de Bernoulli entre la section 1 et la section 2, pour un liquide réel, s'écrit :

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g} + Z_2 + \Delta H \quad (\text{IV. 5})$$

Entre les deux sections, la charge  $H$  subit une variation  $\Delta H$ , correspondant aux pertes par frottement, appelée perte de charge (Figure IV.3).

$$\Delta H = H_1 - H_2 \quad (\text{IV. 6})$$

Pour un régime uniforme  $V_1 = V_2$

Ecoulement en surface libre  $P_1 = P_2 = P_{atm}$

On peut écrire l'équation (IV. 6) également :

$$\Delta H = Z_1 - Z_2 \quad (\text{IV. 7})$$

Si  $\Delta x$  : la distance qui sépare les deux sections. La perte de charge par mètre est :

$$J = \frac{\Delta H}{\Delta x} \quad (\text{IV. 8})$$

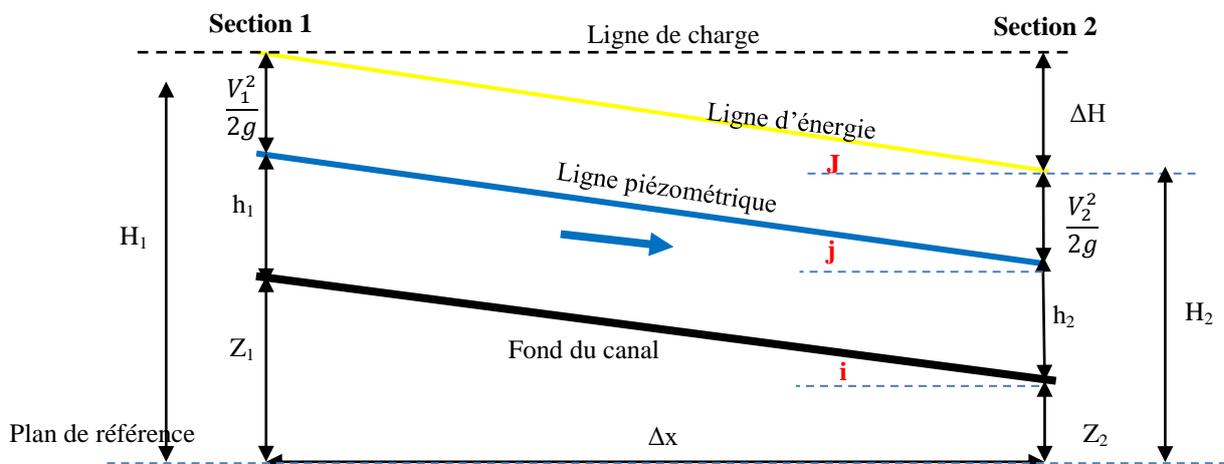


Figure IV.3: Ligne de charge, ligne piézométrique et ligne d'énergie

Ou bien :

$$J = \frac{dH}{dx} = \frac{d(Z + h + \frac{V^2}{2g})}{dx} = \frac{dZ}{dx} \quad (IV.9)$$

Il en résulte que  $J = I = i$

Dans le cas d'un écoulement à surface libre en régime uniforme, la pente du fond du canal, la pente hydraulique et la pente piézométrique sont identiques.

### IV.7.3 Vitesse moyenne et le débit

Pour l'écoulement à surface libre et dans le cas du régime uniforme la vitesse moyenne d'écoulement est donnée par la formule de Chézy.

$$V = C\sqrt{RI} \quad (IV.10)$$

$C$  : coefficient de Chézy (nature de paroi) ( $m^{0,5}/s$ )

Compte tenu du fait que :  $Q = V.S$

En cas d'écoulement uniforme, on obtient la formule du débit

$$Q = CS\sqrt{Ri} \quad (IV.11)$$

avec :

$Q$  : Débit d'écoulement ( $m^3/s$ )

$R$  : Le rayon hydraulique (m)

$i$  : la pente du canal.

Plusieurs auteurs ont proposé des expressions de  $C$ , parmi ces formules, on propose les suivantes :

#### IV.7.3.1 Formule de Manning

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \quad (IV.13)$$

En remplaçant l'équation (IV.13) dans (IV.10), on trouve l'équation de Manning Strickler:

$$V = C\sqrt{Ri} = \frac{1}{n} R^{1/6} R^{1/2} \sqrt{i}$$

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} \sqrt{i} \quad (IV.14)$$

n: Coefficient de rugosité

#### IV.7.3.2 Formule de Pavlovski

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad (\text{IV. 15})$$

Où:

n est le coefficient de rugosité et R le rayon hydraulique. y est un exposant déterminé d'après les relations simplifiées:

$$y = 1,5\sqrt{n} \quad \text{si } R \leq 1 \text{ m}$$

$$y = 1,3\sqrt{n} \quad \text{si } R > 1 \text{ m}$$

#### IV.7.3.3 Formule d'Agroskine

$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \log R \quad (\text{IV. 16})$$

#### IV.7.3.4 Formule de Bazin

$$C = \frac{87\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}} \quad (\text{IV. 17})$$

#### IV.7.3.5 Formule de Ganguillet et Kutter

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{I} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (\text{IV. 18})$$

si la pente  $I > 0,00155$  on peut négliger  $\frac{0,00155}{I}$  la formule précédente devient :

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + 23 \frac{m}{\sqrt{R}}} \quad (\text{IV. 19})$$

#### IV.7.3.6 Formule de Kutter

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{n + \sqrt{R}} \quad (\text{IV. 20})$$

où n et m sont des facteurs de rugosité du canal.

#### IV.7.4. Profils de section

Les formes des sections transversales les plus utilisées sont: triangulaire, rectangulaire, trapézoïdale, parabolique, demi-circulaire et circulaire.

##### IV.7.4.1 Cas d'un canal rectangulaire

- Section mouillée  $S = b \cdot h$
- Périmètre mouillée  $P = b + 2h$
- Le rayon hydraulique

$$R = \frac{S}{P} = \frac{b \cdot h}{b + 2h}$$

Pour un canal infiniment large  $R = y$

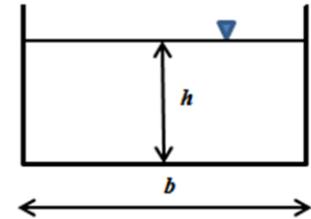


Figure IV.4 : Canal rectangulaire

##### IV.7.4.2 Cas d'un canal trapézoïdal

- **Section mouillée**

$$m = \cotg\theta = \frac{a}{h}$$

$$S = bh + 2\left(\frac{1}{2}ah\right) = bh + ah$$

avec :  $a = mh$

$$S = bh + mh^2 = (b + mh)h$$

- **largeur au miroir**

$$B = b + 2a \Rightarrow B = b + 2mh$$

##### **Périmètre mouillé**

$$P = b + 2h'$$

$$\text{Posons } h' = h\sqrt{1 + m^2}$$

$$\Rightarrow P = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$$

- **Rayon hydraulique**

$$R = \frac{S}{P} = \frac{(b + mh)h}{b + 2h\sqrt{1 + m^2}}$$

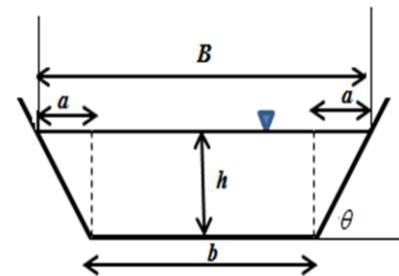


Figure IV.5 : Canal trapézoïdal

### IV.7.4.3 Cas d'une section transversale demi circulaire

➤ **Section mouillée**

$$S = \pi \frac{h^2}{2} = \pi \frac{D^2}{8}$$

➤ **Périmètre mouillé**

$$P = \pi h = \pi \frac{D}{2}$$

➤ **Rayon hydraulique**

$$R = \frac{S}{P} = \frac{h}{2} = \frac{D}{4}$$

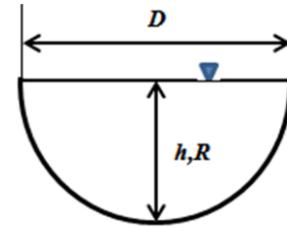


Figure IV.6 : Canal demi circulaire

### IV.7.4.4 Canal à section transversale parabolique

L'équation de la parabole  $X^2 = 2py$

Avec p le paramètre de la parabole.

h : La profondeur relative

$\tau = \frac{h}{p}$  la hauteur relative

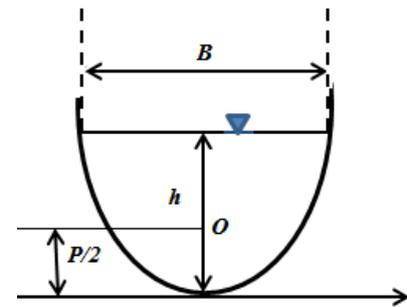


Figure IV.7 : Canal parabolique

**La section mouillée**  $S = \frac{2}{3}bh = \frac{4}{3}h\sqrt{2p}\sqrt{h}$

**La largeur du canal**  $B = 2\sqrt{2p}\sqrt{h} = 2\sqrt{2ph}$

**Périmètre mouillé**  $P = p[\sqrt{2\tau(1+2\tau)} + \ln(\sqrt{2\tau} + \sqrt{1+2\tau})]$

On peut aussi utiliser la formule suivante :

$$P = B + \frac{8h^2}{3B}$$

➤ **Rayon hydraulique**

$$R = \frac{2Bh}{3}$$

$$R_h = \frac{S}{P} = \frac{2Bh}{3pN}$$

### IV.7.5 Calcul hydraulique des tuyaux d'évacuations et des tuyaux de drainage

Dans ces canaux, l'eau s'écoule à la surface libre et c'est pourquoi, on peut utiliser les mêmes lois comme dans un canal découvert.

On utilise la notion de la hauteur relative de remplissage  $a$  :

$$a = \frac{h}{D} \quad (\text{IV. 21})$$

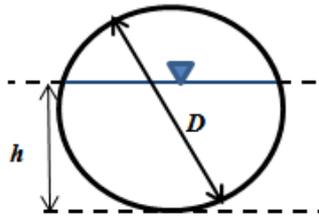


Figure IV.8 : tuyau d'évacuation

$h$  la profondeur ( m),  $D$  diamètre (m)

Le débit correspondant à la section pleine  $a=1$  est :

$$Q_p = C_p S_p \sqrt{R_p i} \quad (\text{IV. 22})$$

La vitesse correspondante à la section pleine  $a=1$  est :

$$V_p = C_p \sqrt{R_p i} \quad (\text{IV. 23})$$

Le débit correspondant à la section incomplète  $a < 1$  est :

$$Q = C S \sqrt{R i} \quad (\text{IV. 24})$$

La vitesse correspondante à la section pleine  $a < 1$  est :

$$V = C \sqrt{R i} \quad (\text{IV. 25})$$

$$\text{On a : } A = Q/Q_p \Rightarrow \text{le débit relatif } Q = A Q_p \quad (\text{IV. 26})$$

$$B = V/V_p \Rightarrow \text{la vitesse relative } V = B V_p \quad (\text{IV. 27})$$

Les grandeurs  $A$  et  $B$  en fonction de  $a$  peuvent être déterminées par le tableau (IV.1) et figure (IV.9)

Tableau IV.1 : Propriétés géométriques et hydrauliques d'une conduite coulant partiellement pleine

$h/D$	$S/S_p$	$R/R_p$	$V/V_p$	$Q/Q_p$
0,05	0,0187	0,1302	0,2569	0,0048
0,1	0,0520	0,2541	0,4011	0,0209
0,15	0,0941	0,3715	0,5168	0,0486
0,2	0,1424	0,4824	0,6151	0,0876
0,25	0,1955	0,5865	0,7007	0,137
0,3	0,2523	0,6838	0,7761	0,1968
0,35	0,3119	0,7740	0,8430	0,2629
0,4	0,3735	0,8569	0,9022	0,337
0,45	0,4346	0,9323	0,9544	0,4165
0,5	0,5000	1,0000	1,0000	0,5000
0,55	0,5635	1,0595	1,0393	0,5857
0,6	0,6265	1,1105	1,0724	0,6718
0,65	0,6880	1,1526	1,0993	0,7564
0,7	0,7476	1,1849	1,1198	0,8372
0,75	0,8045	1,2067	1,1335	0,9119
0,8	0,8576	1,2167	1,1397	0,9775
0,85	0,9059	1,2131	1,1374	1,0304
0,9	0,9480	1,1921	1,1243	1,0658
0,95	0,9813	1,1458	1,0950	1,0745
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

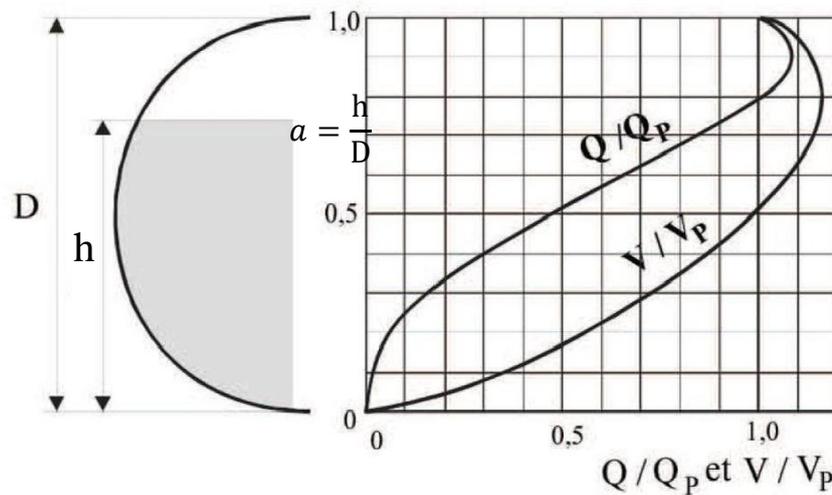


Figure IV.9 : Vitesse et débit d'écoulement dans une conduite circulaire coulant partiellement pleine

## Exercices corrigés

### Exercice 1

Trouver le débit et la vitesse de l'eau dans une conduite circulaire coulant pleine.

Une conduite d'égout coule à 75% pleine avec un débit soit de  $0,14 \text{ m}^3/\text{s}$  sa pente  $i=2,1 \cdot 10^{-3}$

Calculer le diamètre du tuyau. Utiliser  $n = 0,015$

### Solution 1

Cas d'une conduite circulaire coulant pleine :

Surface mouillée :

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$

Périmètre mouillé

$$P = \pi D$$

Rayon hydraulique

$$R = \frac{\text{Surface}}{\text{Périmètre}} = \frac{1}{4} D$$

Vitesse pleine  $V_p$

$$V = C\sqrt{Ri} \text{ et } C = \frac{1}{n} R^{1/6}$$

$$V_p = \frac{1}{n} R^{1/6} \sqrt{Ri} = \frac{1}{n} R^{1/6} R^{1/2} \sqrt{i}$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{1}{n} R^{2/3} \sqrt{i} \Rightarrow V_p = \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \sqrt{i}$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{0,3969}{n} \cdot D^{2/3} \sqrt{i}$$

Débit plein  $Q_p$  est :

$$Q_p = V \cdot S = CS\sqrt{Ri}$$

$$Q_p = \frac{1}{n} R^{1/6} S \sqrt{Ri} = \frac{1}{n} R^{1/6} R^{1/2} S \sqrt{i}$$

$$\Rightarrow Q_p = \frac{1}{n} R^{2/3} S \sqrt{i} \Rightarrow Q_p = \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{i}$$

$$\Rightarrow Q_p = \frac{1}{n} (D)^{2/3} \cdot D^2 \frac{\pi}{4 \cdot 4^{2/3}} \sqrt{i} \Rightarrow Q_p = \frac{0,3117}{n} D^{8/3} \sqrt{i}$$

**La hauteur relative a égale :**

**On a :**

$$a = \frac{h}{D} = 0,75$$

D'après le tableau (IV.1), on a:

$$\frac{Q}{Q_p} = 0,9119$$

$$Q_p = \frac{Q}{0,9119} = \frac{0,14}{0,9119} = 0,15 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_p = \frac{0,3117}{n} D^{8/3} \sqrt{i} \Rightarrow D = \left[ \frac{n Q_p}{0,3117 \cdot \sqrt{i}} \right]^{3/8}$$

$$D = \left[ \frac{0,015 \cdot 0,15}{0,3117 \cdot \sqrt{0,0021}} \right]^{3/8} \Rightarrow D = 0,50 \text{ m}$$

## Exercice 2

Avec quelle pente doit-on établir un tuyau d'égout circulaire de 600 mm pour que le débit soit de  $0,17 \text{ m}^3/\text{s}$  quand il est rempli à 50 % du diamètre et quand il est plein. On prend  $n=0,013$

## Solution 2

a) Rempli à 50%, la hauteur relative a :

$$a = \frac{h}{D} = 0,5 \Rightarrow$$

D'après le tableau (IV.1), on a:

$$\frac{Q}{Q_p} = 0,50$$

D'où :

$$Q_p = \frac{Q}{0,50} = \frac{0,17}{0,50} = 0,34 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q_p = \frac{0,3117}{n} D^{8/3} \sqrt{i} \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{n Q_p}{0,3117 \cdot D^{8/3}}$$

$$\sqrt{i} = \frac{0,013 \cdot 0,34}{0,3117 \cdot (0,6)^{8/3}} = 0,055 \Rightarrow i = 0,0031$$

a) Rempli à 100%, la hauteur relative s'écrit:

$$a = \frac{h}{D} = 1$$

D'après le tableau (IV.1), on a:

$$\frac{Q}{Q_p} = 1 \Rightarrow Q_p = Q = 0,17 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q = \frac{0,3117}{n} D^{8/3} \sqrt{i} \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{n Q}{0,3117 \cdot D^{8/3}}$$

$$\sqrt{i} = \frac{0,013 \cdot 0,17}{0,3117 \cdot (0,6)^{8/3}} = 0,0277 \Rightarrow i = 0,00077$$

### Exercice 3

Déterminer à quelle profondeur de remplissage  $h$  le tuyau de diamètre de 3 m laisse passer le débit  $Q = 5 \text{ m}^3/\text{s}$ . Si  $n=0,020$  et  $I=0,0010$

### Solution 3

On a :

$$a = \frac{h}{D} \Rightarrow h = a \cdot D$$

$$A = \frac{Q}{Q_p} \quad \text{avec} \quad Q_p = C_p S_p \sqrt{R_p i}$$

$$S_p = \frac{\pi D^2}{4} = 7,05 \text{ m}^2$$

Rayon hydraulique

$$R_p = \frac{1}{4} D = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ m}$$

$$C_p = \frac{1}{n} R_p^{1/6} = \frac{1}{0,020} \cdot 0,75^{1/6} = 47,66 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

Le débit complet ou plein :

$$Q_p = 7,05.47,66. \sqrt{0,75} \sqrt{0,001} = 9,20 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$A = \frac{Q}{Q_p} = \frac{5}{9,20} = 0,54$$

A partir du tableau (IV.1), on tire la valeur de a

$$a = 0,52 \Rightarrow h = 0,52.3 = 1,56 \text{ m}$$

#### Exercice 4

Déterminer le débit et la vitesse moyenne dans une galerie circulaire, si  $D = 3 \text{ m}$ ,  $h = 2,1 \text{ m}$ ,  $n=0,017$  et  $I=0,0009$

#### Solution 4

Hauteur relative:

$$a = \frac{h}{D} = \frac{2,1}{3} = 0,7$$

à partir du tableau (IV.1), on tire A :

$$A = 0,8372 \Rightarrow Q = A Q_p \quad \text{avec} \quad Q_p = C_p S_p \sqrt{R_p i}$$

Surface pleine mouillée:

$$S_p = \frac{\pi D^2}{4} = 7,05 \text{ m}^2$$

Rayon hydraulique

$$R_p = \frac{1}{4} D = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ m}$$

Coefficient de Chezy

$$C_p = \frac{1}{n} R_p^{1/6} = \frac{1}{0,017} \cdot 0,75^{1/6} = 56,07 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

Le débit complet ou plein :

$$Q_p = 7,05.56,07. \sqrt{0,75} \sqrt{0,0009} = 10,27 \text{ m}^3/\text{s}$$

Le débit incomplet:

$$Q = 0,8372.10,27 = 8,6 \text{ m}^3/\text{s}$$

**La vitesse moyenne**

à partir du tableau (IV.1), on tire B :

$$B = 1,1198 \Rightarrow V = BV_p \quad \text{avec} \quad V_p = C_p \sqrt{R_p i}$$

$$V = 1,1198 \cdot 56,07 \sqrt{0,75 \cdot 0,0009} = 1,63 \text{ m/s}$$

### Exercice 5

Trouver la vitesse et le débit de l'eau dans un canal rectangulaire ouvert, en ciment ( $n=0,013$ ), dont la largeur  $b=12$  m et la profondeur  $h=2,5$  m. La pente du canal  $i=0,0028$ .

### Solution 5

Un canal rectangulaire :

$$\text{Surface mouillée : } S = b \cdot h = 12 \cdot 2,5 = 30 \text{ m}^2$$

$$\text{Périmètre mouillé : } P = b + 2h = 12 + 2 \cdot 2,5 = 17 \text{ m}$$

$$\text{Rayon hydraulique } R = \frac{S}{P} = 1,76 \text{ m}$$

Coefficient de Chezy

la vitesse donnée par la relation de Chezy

$$V = C \sqrt{Ri} = \frac{1}{n} R^{2/3} \sqrt{i}$$

$$V = \frac{1}{0,013} 1,76^{2/3} \sqrt{0,0028} = 5,94 \text{ m/s}$$

Débit est calculé par la formule :

$$Q = V \cdot S = 5,94 \cdot 30 = 178,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

### Exercice 5

Déterminer le débit et la vitesse moyenne  $v$  de l'eau dans un canal trapézoïdal de largeur  $b = 6$  m, les côtes inclinés avec une pente  $m = 1,0$ , est rempli d'eau sur une profondeur  $h = 1,2$  m et a une pente  $I = 0,0009$ . La rugosité  $n = 0,025$ . Pour le calcul de  $C$  utiliser la formule d'Agroskine

### Solution 5

Pour un canal trapézoïdal

$$\text{Surface mouillée : } S = (b + mh)h = (6 + 1 \cdot 1,2)1,2 = 8,64 \text{ m}^2$$

$$\text{Périmètre mouillé : } P = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 6 + 2 \cdot 1,2\sqrt{1 + 1^2} = 9,40 \text{ m}$$

$$\text{Rayon hydraulique } R = \frac{S}{P} = 0,92 \text{ m}$$

### Débit d'un canal trapézoïdal

$$Q = V \cdot S = CS\sqrt{Ri}$$

et

$$\text{Coefficient de Chezy } C = \frac{1}{n} + 17,72 \text{Log}R = \frac{1}{0,025} + 17,72 \text{Log}(0,92) = 39,36 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

$$Q = 39,36 \cdot 8,64\sqrt{0,92 \cdot 0,0009} = 9,78 \text{ m}^3/\text{s}$$

On déduit la vitesse:

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{9,78}{8,64} = 1,13 \text{ m/s}$$

### Exercice 6

Déterminer la pente  $i$  et la vitesse moyenne  $V$  dans un canal parabolique, si  $h=2,1\text{m}$ ,  $B=8,2\text{m}$ ,  $n=0,0225$  et  $Q=11,7\text{m}^3/\text{s}$ .

### Solution 6

Surface :

$$S = \frac{2}{3}hB = \frac{2}{3} \cdot 2,1 \cdot 8,2 = 11,48 \text{ m}^2$$

Périmètre

$$P = B + \frac{8h^2}{3B} = 8,2 + \frac{8 \cdot 2,1^2}{3 \cdot 8,2} = 9,6 \text{ m}$$

Rayon hydraulique

$$R = \frac{\text{Surface}}{\text{périmètre}} = \frac{11,48}{9,6} = 1,12 \text{ m}$$

### Débit d'un canal parabolique

$$Q = CS\sqrt{Ri} \Rightarrow i = \frac{Q^2}{C^2 \cdot S^2 R}$$

et

$$C = \frac{1}{n} + 17,72 \text{Log}R = \frac{1}{0,0225} + 17,72 \text{Log}(1,12) = 45,78 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$$

Donc :

$$i = \frac{11,7^2}{45,78^2 \cdot 11,48^2 \cdot 1,12} \Rightarrow i = 0,0004$$

la vitesse :

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{11,7}{11,48} = 1,02 \text{ m/s}$$

### Exercice 7

Déterminer la largeur  $b$  du fond d'un canal trapézoïdal et la vitesse moyenne  $V$  de l'eau, si le débit  $Q = 5,2 \text{ m}^3/\text{s}$ , la pente du fond  $i = 0,0006$ , la rugosité  $n = 0,025$ , la pente des berges  $m = 1,0$  et la hauteur d'eau  $h = 1,2 \text{ m}$ .

### Solution 7

On calcule

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \frac{5,2}{\sqrt{0,0006}} = 213 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ainsi  $K = S \cdot C \cdot \sqrt{R}$

Ensuite, en prenant une série de valeurs de  $b$ , on calcule  $S_i$ ,  $P_i$ ,  $R_i$  et  $C_i$  respectivement.

b (m)	S (m <sup>2</sup> )	P(m)	R(m)	C	K = S · C · √R
0	1,44	3,39	0,425	34,68	32,6
0,5	2,04	3,89	0,524	35,92	53,0
1	2,64	4,39	0,601	36,75	75,2
1,5	3,24	4,89	0,662	37,34	98,4
2	3,84	5,39	0,712	37,80	122,5
2,5	4,44	5,89	0,754	38,16	147,1
3	5,04	6,39	0,789	38,45	172,1
3,5	5,64	6,89	0,818	38,68	197,3
4	6,24	7,39	0,843	38,88	222,7

Par interpolation ou en traçant la courbe  $K=f(h)$ , on obtient  $b=3,85 \text{ m}$

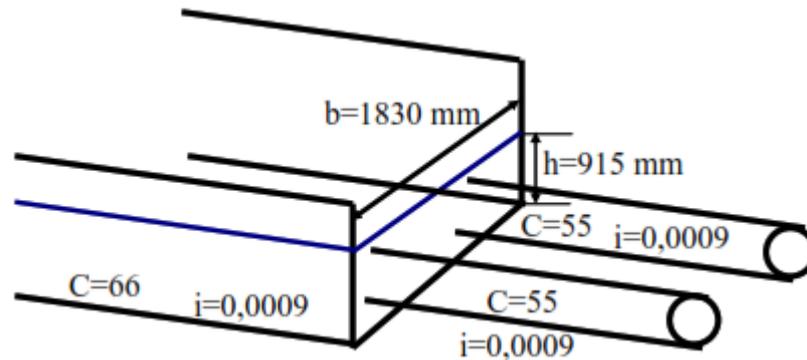
$$\text{Surface : } S = (b + mh)h = (3,8 + 1 \cdot 1,2)1,2 = 6 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{5,2}{6} = 0,87 \text{ m/s}$$

**Exercice 8**

Deux tuyaux de béton (le coefficient de Chezy  $C=55 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$ ) transportent le débit provenant d'un canal ouvert ayant pour section de 1830mm de large et de 915mm de profondeur (le coefficient de Chezy  $C=66 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$ ). La pente des deux structures est de 0,00090.

a) Calculer le diamètre des tuyaux ?

**Solution 8**

a) Calculer le diamètre des tuyaux

$$Q_{canal} = 2Q_{tuyau}$$

$$Q_{canal} = C_c S_c \sqrt{R_c i} = 2C_t S_t \sqrt{R_t i}$$

$$S_{canal} = b \cdot h = 1,83 \cdot 0,915 = 1,67 \text{ m}^2$$

$$P_{canal} = b + 2h = 1,83 + 2 \cdot 0,915 = 3,66 \text{ m}$$

$$S_{tuyaux} = \frac{1}{4} \pi D^2, P_{tuyaux} = \pi D \text{ et } R_{tuyaux} = \frac{D}{4}$$

$$C_c S_c \sqrt{R_c i} = 2C_t S_t \sqrt{R_t i} \Rightarrow 66 \cdot \sqrt{0,0009} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \pi D^2\right) \cdot 55 \cdot \sqrt{\frac{D}{4} (0,0009)}$$

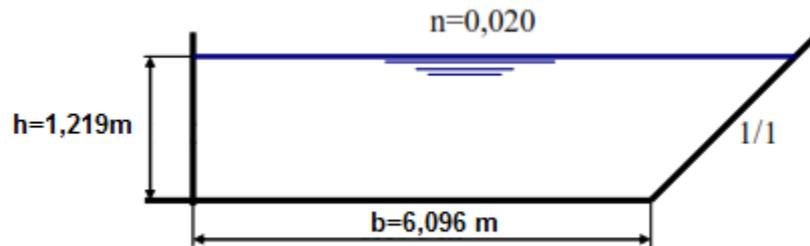
$$2,243 = 1,296 D^{5/2} \Rightarrow D = \left(\frac{2,243}{1,296}\right)^{2/5}$$

$$\Rightarrow D = 1,245 \text{ m}$$

**Exercice 9**

Le canal représenté dans la figure suivante est réalisé avec une pente de 0,00016. Le débit doit effectuer par deux tuyaux de béton (coefficient de rugosité  $n=0,020$ ) posés sur une pente de 2,5 m sur 1000 m.

Quelle doit être la taille des tuyaux ?



Utiliser la formule de Manning pour le calcul du coefficient de Chézy C

**Solution 9**

$$Q_{canal} = 2Q_{tuyau}$$

$$S_{canal} = b \cdot h + \frac{1}{2} m h^2 = 6,096 \cdot 1,219 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,219^2 = 8,17 \text{ m}^2$$

$$P_{canal} = b + h + h\sqrt{1 + m^2} = 1,219 + 6,096 + 1,219\sqrt{1 + 1^2} = 9,04 \text{ m}$$

$$R_{canal} = \frac{S_{canal}}{P_{canal}} = 0,90 \text{ m}$$

$$C_{canal} = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{0,020} \cdot 0,90^{1/6} = 49,13 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

$$Q_{canal} = CS\sqrt{Ri} = 49,13 \cdot 8,17 \sqrt{0,9 \cdot 0,00016} = 4,82 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$Q_{canal} = CS\sqrt{Ri} = 2C_t S_t \sqrt{R_t i_t}$$

$$\Rightarrow 4,82 = 2 \cdot \frac{1}{4} \pi D^2 \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{D}{4}\right)^{1/6} \cdot \sqrt{\frac{D}{4} \cdot 0,0025}$$

$$\Rightarrow 4,82 = 2,60 D^{8/3} \Rightarrow D = \left(\frac{4,82}{2,60}\right)^{3/8}$$

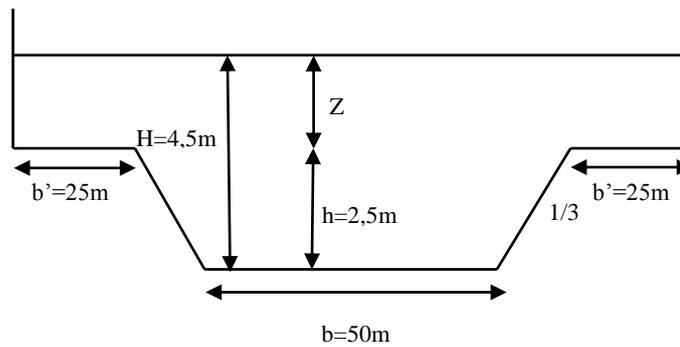
$$\Rightarrow D = 1,26 \text{ m}$$

**Exercice 10**

Calculer le débit qui traverse la conduite à ciel ouvert pour les données suivantes :

$i=0,05\%$  ,  $n_1=0,020$  et  $n_2=0,025$

Utiliser la formule de Manning pour le calcul du coefficient de Chézy C

**Solution 10**

On calcule d'abord  $Z$  :

$$Z = H - 2,5 = 4,5 - 2,5 = 2 \text{ m}$$

Calcul de Surface mouillée  $S_1 = b' \cdot Z = 25 \cdot 2 = 50 \text{ m}^2$

Périmètre mouillé  $P_1 = b' + Z = 25 + 2 = 27 \text{ m}$

Rayon hydraulique

$$R_1 = \frac{S_1}{P_1} = \frac{50}{27} = 1,85 \text{ m}$$

Coefficient de Chezy  $C_1 = \frac{1}{n_1} R_1^{1/6} = 44,33 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$

$$2. Q_1 = S_1 \cdot C_1 \sqrt{R_1 i} = 134,88 \text{ m}^3/\text{s}$$

On calcule  $B'$  :

$$B' = b + 2mh = 50 + 2 \cdot 3 \cdot 2,5 = 65 \text{ m}$$

Surface mouillée :  $S_2 = S_{\text{rectangle}} + S_{\text{trapézoïdal}} = B' \cdot Z + (bh + mh^2)$

$$S_2 = 65 \cdot 2,5 + (50 \cdot 2,5 + 3 \cdot 2,5^2) = 273,5 \text{ m}^2$$

Périmètre mouillé  $P_2 = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = 50 + 2 \cdot 2,5\sqrt{1 + 3^2} = 65,81 \text{ m}$

Rayon hydraulique

$$R_2 = \frac{S_2}{P_2} = \frac{273,5}{65,81} = 4,16 \text{ m}$$

Coefficient de Chezy  $C_2 = \frac{1}{n_2} R_2^{1/6} = 63,48 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$

$$Q_2 = S_2 \cdot C_2 \sqrt{R_2 i} = 791,62 \text{ m}^3/\text{s}$$

Le débit du canal est:

$$Q_T = 2 \cdot Q_1 + Q_2 = 926,50 \text{ m}^3/\text{s}$$

## Références Bibliographiques

BENNIS S., Hydraulique et hydrologie, 2eme Edition, Ecole de technologie supérieure, université de Québec, Montréal (Québec), Canada. 2004.

BEN HAMOUDA R. Notions de mécanique des fluides *Cours et Exercices Corrigés*, Centre de Publication Universitaire, Tunis. 2008

BLANCHARD J.N. : Mécanique des fluides en applications exercices et problèmes corrigés. Edition ELLIPSES, Paris, France, 2020.

BOURRIER R., Hydraulique appliquée Milieux, écoulements, aménagements, Edition le Moniteur, Paris, France, 2018.

CARLIER M. Hydraulique générale et appliquée, éditions Eyrolles, Paris, 1986

CHEMLOUL N.Sad, Mécanique des fluides :cours et exercices corrigés et commentés, Alger, 2020.

COMOLET R. Mécanique expérimentale des fluides, Masson, ed.1982.

GRAF WALTER, H., ALTINAKAR, M., " Ecoulement permanent uniforme et non uniforme ", Volume 16, 1ere Edition, Presse polytechnique universitaire romandes, Paris, France. 1993.

KREMENETSKI N., SCHTERENLIHT D., ALYCHEV V., L.YAKOYLEVA, Hydraulique, édition MIR, Moscou, 1984.

LENCASTRE A., "Hydraulique générale", Editions Eyrolles, Paris, France. 1996.

REMINI B., BENMAMAR S. Mécanique des fluides : exercices corrigés avec rappels de cours, Editions Madani, Alger, Algérie. 2005.