Republique Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli de Mascara
Faculté des sciences et technologie
Département du tronc commun sciences et technologie

Polycopié de Cours

Algèbre 1

Présenté par : **Mohamed Helal**

Ce cours est destiné aux étudiants de premiére année -Parcours Ingénieur- sciences et techniques.

Année universitaire 2022/2023.

Table des matières

Avant Propos

Ce cours d'Algèbre est destiné surtout aux étudiants de première années -Parcours Ingénieur- sciences et techniques, ainsi qu'aux étudiants de première années de première années LMD Sciences et Technologie, Sciences de la matiére et mathématiques et informatique.

Il couvre le programme officiel d'Algèbre, à savoir :

▷ Les ensembles, les relations et les applications.
▷ Les nombres complexes.
▷ Espace vectoriel.

Chaque chapitre remet en place les bases indispensables pour aborder des études scientifiques, et introduit quelques notions nouvelles, qui seront pour la plupart traitées au cours de cette année.

Ce cours est traité en détail avec de nombreux exemples. La plupart des théorèmes et propositions sont démontrés.

À la fin de chaque chapitre nous proposons une liste des exercices avec leurs solutions.

Ainsi que des cours que j'ai enseigné de 2022-2023 pour les étudiants de première années -Parcours Ingénieur- sciences et techniques au sein du Département tronc commun Sciences et Techniques de la Faculté des Sciences et Technologie.

Enfin, des erreurs peuvent être relevées, prière de les signaler à l'auteur.

L'auteur

Chapitre 1

Les ensembles, les relations et les applications

1.1 Théorie des ensembles

Définition 1.1.1. *On appelle ensemble E toute collection d'objets satisfaisant une même propriété, chaque objet est un éléments de l'ensemble E.*

Remarque 1.1.1.

- ✓ *Pour définir un ensemble :*
  - (*i*) *Ou bien on connait la liste de tous ses éléments, on dit alors que l'ensemble est donné par "Extension".*
  - (*ii*) *Ou bien on connait seulement les relations qui lient les éléments et qui nous permettent de les retrouver tous, on dit alors que l'ensemble est donné par "Compréhension".*
- ✓ *On met les objets qui forment l'ensemble entre deux accolades.*
- ✓ *Si le nombre de ces objets est fini, on l'appelle cardinal de E et on le note $card(E)$, si E possède une infinité d'éléments, on dit qu'il est de cardinal infini et on note $Card(E) = \infty$.*
- ✓ *Il existe un ensemble, appelé l'ensemble vide et noté $\emptyset$, qui ne contient aucun élément, alors $Card(\emptyset) = 0$.*
- ✓ *Un ensemble contenant un seul élément est appelé "Singleton", donc de cardinal égal à 1. On écrit $\exists\,!\,x$ pour lire "Il existe un unique x".*

Exemple 1.1.1.

(*i*) *Soit $A = \{1, 3, a, y, \triangle, 2\}$. A est défini par extension, car on connait tous ses éléments. Le cardinal de A est égal à 6 ($Card(A) = 6$).*

(*ii*) *Soit B l'ensemble des étudiants de première année tronc commun Sciences et Techniques. On ne connait pas tous ces étudiants mais on peut bien les retrouver, donc B est un ensemble donné par compréhension.*

(*iii*) *Soit E l'ensemble des entiers qui divisent $20, E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.*

1.1.1 Opérations sur les ensembles

Soient E et F deux ensembles. On note :

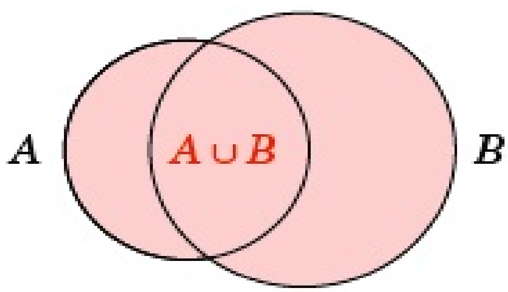
- ▷ **Appartenance :** $x \in E$, veut dire que l'élément x appartient à E. Si x n'est pas un élément de E, on dit que x n'appartient pas à E et on écrit $x \notin E$.
- ▷ **Intersection :** l'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments communs et on écrit :

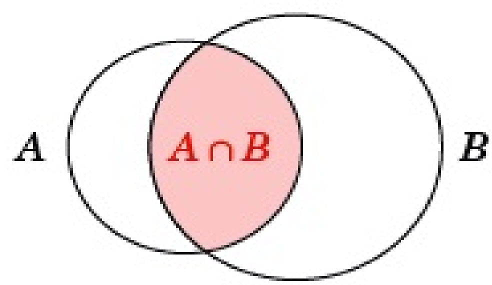
$$E \cap F = \{x/x \in E \ et \ x \in F\}.$$

Si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

- ▷ **Réunion :** la réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments comptés une seule fois et on écrit :

$$E \cup F = \{x/x \in E \ ou \ x \in F\}.$$





- ▷ **Inclusion :** E est inclus dans F si tout élément de E est un élément de F et on a :

$$E \subset F \Longleftrightarrow \forall x, x \in E \Rightarrow x \in F.$$

On dit aussi que E est une partie de F ou que E est un sous ensemble de F.

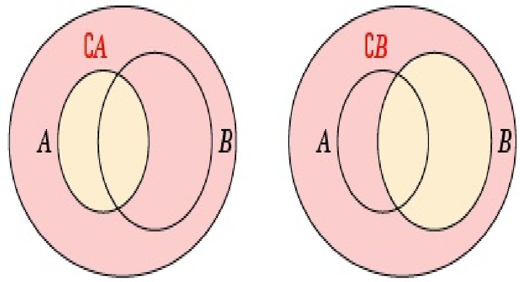
- ▷ **Egalité :** E et F sont égaux si E est inclus dans F et F est inclus dans E et on écrit :

$$\begin{aligned} E = F &\Longleftrightarrow (E \subset F) \wedge (F \subset E) \\ &\Longleftrightarrow \forall x, (x \in E \Longleftrightarrow x \in F). \end{aligned}$$

- ▷ **Complémentaire :** Soit E un ensemble et A une partie de $E, (A \subset E)$. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble C_E^A des éléments de E qui ne sont pas dans A et on écrit :

$$C_E^A = E \backslash A = E - A = \{x/x \in E \ et \ x \notin A\}.$$

L'ensemble $E - A$ est dite **différence** de deux ensembles.



▷ **Différence symétrique :** On appelle différence symétrique de deux ensembles E et F et on note $E\Delta F$ l'ensemble défini par :

$$E\Delta F = (E - F) \cup (F - E).$$

Propriétés 1.1.1. *Soient E, F et G trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies :*

- $(E \cap F) \subset E \wedge (E \cap F) \subset F)$ *et* $E \subset (E \cup F) \wedge F \subset (E \cup F)$.
- $E \cap F = F \cap E$ *et* $E \cup F = F \cup E$. *(Commutativité)*
- $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ *et* $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$. *(Associativité)*
- $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$ *et* $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$. *(Distributivité)*
- $E - (F \cap G) = (E - F) \cup (E - G)$ *et* $E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G)$.
- *Si* $F \subset E$ *et* $G \subset E$, *alors* $C_E^{F \cap G} = C_E^F \cup C_E^G$ *et* $C_E^{F \cup G} = C_E^F \cap C_E^G$.
- $E \cap \emptyset = \emptyset$ *et* $E \cup \emptyset = E$.
- $E \cap (F\Delta G) = (E \cap F)\Delta(E \cap G)$.
- $E\Delta\emptyset = E$ *et* $E\Delta E = \emptyset$.

1.1.2 Parties d'un ensemble

Définition 1.1.2. *On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, ou que E est une partie de l'ensemble F, ou que E est un sous ensemble de F si tout élément de E est un élément de F. On note $E \subset F$ et on a :*

$$E \subset F \iff \forall x / x \in E \Rightarrow x \in F).$$

L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 1.1.2. *Soit* $E = \{a, b, c\}$, *donc* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Remarque 1.1.2. *L'ensemble vide et E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$.*

1.1.3 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une famille des parties de E. On dit que A est une partition de E si :

(i) Tout élément de A n'est pas vide.

(ii) Les éléments de A sont deux à deux disjoints.
(iii) La réunion des éléments de A est égale à E.

Exemple 1.1.3. *Soit* $E = \{1, a, \ell, 3, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma\}$, *alors* $\mathcal{F} = \{\{a, \gamma\}, \{d, \alpha, \beta\}, \{c, 1\}, \{3, \ell\}, \{b\}\}$ *est une partition de l'ensemble* E.

1.1.4 Ensemble produit (Produit cartésien)

Définition 1.1.3. *Soient* E *et* F *deux ensembles non vides,on note* $E \times F$ *l'ensemble des couples* (x, y) *tels que* $x \in E$ *et* $y \in F$ *est appelé produit cartésien*[1] *de* E *et* F *défini par*

$$E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Par définition, on a :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F, \quad (x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$

Exemple 1.1.4. *Soit* $E = \{1, 5, \square\}$ *et* $F = \{a, \alpha, \ell, \triangle, \spadesuit\}$ *alors*

$$\begin{aligned} E \times F \;&=\; \{(1, a), (5, a), (\square, a), (1, \alpha), (5, \alpha), (\square, \alpha), (1, \ell), (5, \ell), \\ &\quad (\square, \ell), (1, \triangle), (5, \triangle), (\square, \triangle), (1, \spadesuit), (5, \spadesuit), (\square, \spadesuit)\}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F \times E \;&=\; \{(a, 1), (\alpha, 1), (\ell, 1), (\triangle, 1), (\spadesuit, 1), (a, 5), (\alpha, 5), (\ell, 5), \\ &\quad (\triangle, 5), (\spadesuit, 5), (a, \square), (\alpha, \square), (\ell, \square), (\triangle, \square), (\spadesuit, \square)\}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1.3. $E \times F = F \times E$ *si et seulement si* $E = F$.

Propriétés 1.1.2. *Soient* E, F, G *et* H *quatre ensembles, alors les relations suivantes sont vraies :*

1. $E \times F = \emptyset \Rightarrow E = \emptyset$ *ou* $F = \emptyset$.
2. $E \times F = F \times E \Longleftrightarrow E = \emptyset$ *ou* $F = \emptyset$ *ou* $E = F$.
3. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
4. $(E \cup G) \times F = (E \times F) \cup (G \times F)$.
5. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.
6. $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.

1. **DESCARTES René :** philosophe, physicien et mathématicien français (La Haye 1596-Stockholm 1650). Il créa l'algèbre des polynômes, avec Fermat il fonda la géométrie analytique. Ennonça les propriétés fondamentales des équations algébriques et simplifia les notations algébriques en adoptant les premières lettres de l'alphabet pour désigner les constantes et les dernières lettres pour désigner les variables. Publia "Le Discours de la méthode", qui est une référence pour le raisonnement logique. Découvrit aussi les principes (régles) de l'optique géométrique.

1.2 Relations binaires dans un ensemble

Définition 1.2.1. *Soient E un ensemble, x et y deux éléments de E. S'il existe un lien qui relie x et y on dit qu'ils sont reliés par une relation $\mathcal{R}$, on écrit $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x,y)$ et on lit "x est en relation avec y".*

Exemple 1.2.1. $E = \mathbb{R}, \forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow |x| - |y| = x - y$.

Définition 1.2.2. *Etant donnée une relation binaire $\mathcal{R}$ entre les éléments d'un ensemble non vide E, on dit que :*

1. $\mathcal{R}$ *est* **Reflexive** $\Longleftrightarrow \forall x \in E; (x\mathcal{R}x)$.
2. $\mathcal{R}$ *est* **Transitive** $\Longleftrightarrow \forall x, y, z \in E; (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
3. $\mathcal{R}$ *est* **Symétrique** $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E; x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
4. $\mathcal{R}$ *est* **Anti-Symétrique** $\Longleftrightarrow \forall x, y \in E; (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

1.2.1 Relation d'équivalence

Définition 1.2.3. *On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

- On appelle **classe d'équivalence** d'un élément $x \in E$ notée $\bar{x}, \dot{x}$ ou C_x, l'ensemble de des éléments y de E qui sont en relation $\mathcal{R}$ avec x. On écrit :

$$\dot{x} = \{y \in E, y\mathcal{R}\dot{x}\}.$$

- On définit **l'ensemble quotient** de E par la relation $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E, noté $E_{/\mathcal{R}}$ et on a :

$$E_{/\mathcal{R}} = \dot{x}, x \in E.$$

Exemple 1.2.2. *Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par*

$$x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

- *Montrons que $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence :*
  (*a*) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x^2 = x - x = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R}$ *est réflexive.*
  (*b*) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Longleftrightarrow -(y^2 - x^2) = -(y - x) \\ &\Longleftrightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

  donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

(*c*) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{1.1}$$

et

$$y\mathcal{R}z \Longleftrightarrow y^2 - z^2 = y - z \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}(2.1) + (1.2) &\Longleftrightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Longleftrightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Longleftrightarrow x\mathcal{R}z,\end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*

De $(a), (b)$ *et* (c)*, on a bien* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence.*

- *Précisons la classe de* a *pour tout* a *de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 - a^2 = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-a)(x+a) = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-a)(x+a-1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x = a \ ou \ x = 1 - a\} \\ &= \{a, 1-a\}.\end{aligned}$$

1.2.2 Relation d'ordre

Définition 1.2.4. *On dit qu'une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* E *est une relation d'ordre si elle est réflexive, transitive et anti-symétrique.*

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur un ensemble E.

- On dit que $\mathcal{R}$ est **d'ordre total** si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \ ou \ y\mathcal{R}x.$$

- On dit qu'elle est **d'ordre partiel** si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists x, y \in E, \ ni \ \ x\mathcal{R}y \ et \ \ ni \ \ y\mathcal{R}x.$$

Exemple 1.2.3. *Soit* $E = \{a, b, c\}$*, on note par* $\mathcal{P}(E)$ *l'ensemble des parties de* E*. Dans* $\mathcal{P}(E)$*, on définit la relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

- *Montrons que* $\mathcal{R}$ *une relation d'ordre :*
  (*a*) *Soit* $A \in \mathcal{P}(E)$*, alors il est clair que* $A \subset A$ *donc* $A\mathcal{R}A$ *c'est à dire que* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

(b) *Soient* $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned} A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}A &\iff A \subset B \text{ et } B \subset A \\ &\iff A = B, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est anti-symétrique.*

(c) *Soient* $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

$$\begin{aligned} A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}C &\iff A \subset B \text{ et } B \subset C \\ &\iff A \subset C, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{R}$ *est transitive.*

De $(a), (b)$ *et* (c), *on a bien* $\mathcal{R}$ *une relation d'ordre.*

- *Cet ordre est-il total ?*
  On a $E = \{a, b, c\}$, *donc* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. *L'ordre de la relation est partiel car* $\exists A = \{a\} \in \mathcal{P}(E), \exists B = \{b\} \in \mathcal{P}(E) : A$ *n'est pas inclus dans* B *et* B *aussi n'est pas inclus dans* A.

1.3 Applications et Fonctions

Définition 1.3.1. *Soit* E, F *deux ensembles.*

✓ *On appelle* **fonction** *de l'ensemble* E *vers l'ensemble* F *une relation de* E *vers* F *dont à tout élément* x *de* E *on lui correspond au plus un élément* y *de* F. x *est dit antécédant,* E *l'ensemble de départ ou des antécédants,* y *est appelé l'image,* F *l'ensemble d'arrivée ou des images.*

✓ *On appelle* **application** *de* E *dans* F *une relation de* E *dans* F *dont à tout élément* x *de* E *on lui correspond un et un seul élément* y *de* F.

Exemple 1.3.1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \tfrac{x}{x-1} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \tfrac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Dans cet exemple g *est une application mais* f *est une fonction et n'est pas une application car l'élément* 1 *n'a pas une image dans* $\mathbb{R}$.

1.3.1 Caractéristique d'une application

▷ En général, on schématise une fonction ou une application f par :

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y = f(x). \end{aligned}$$

$$\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \in E \times F : y = f(x)\}.$$

est appelé graphe de f.

▷ Deux applications sont égaux si leurs ensembles de départ sont égaux, leurs ensembles d'arrivée sont égaux et leurs valeurs également.

1.3.2 Restriction et prolongement d'une application

Soit E_1 un sous ensemble de E et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application $g : E_1 \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in E_1, g(x) = f(x)$ est appelée **la restriction** de f à E_1 et on écrit $g = f/E_1$ et on dit aussi que f est **le prolongement** de g à E.

Exemple 1.3.2.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array} \qquad et \qquad \begin{array}{rcl} g : [-\Pi/2; \Pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \sin x \end{array}$$

Dans cet exemple, on a : g est la restriction de f à la partie $[-\Pi/2; \Pi/2]$ ou f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$. On écrit : $g = f/[-\Pi/2; \Pi/2]$.

1.3.3 Applications injectives, surjectives, bijectives

Définition 1.3.2. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que :*

(a) *f est* **surjective** *si tout élément de F possède au moins un élément de E,*

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

(b) *f est* **injective** *si tout élément de F possède au plus un élément de E,*

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

ou d'une manière d'équivalente (la négation logique) :

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

(c) *f est* **bijective** *si elle est injective et surjective, c'est à dire si tout élément de F admet un unique élément dans E par f,*

$$\forall y \in F; \exists\ !\ x \in E : y = f(x).$$

Exemple 1.3.3. *Soient*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 + 1 \end{array} \qquad et \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = 2x + 1 \end{array}$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g :

- ▷ *f non injective car $f(-1) = f(1) = 2$ n'implique pas $-1 = 1$.*
- ▷ *f non surjective car $x^2 + 1 = -3$ n'admet pas une solution.*
- ▷ *f non bijective car f non injective.*
- ▷ *g est injective car*

$$\begin{array}{rcl} g(x) = g(y) & \Longrightarrow & 2x + 1 = 2y + 1 \\ & \Longrightarrow & 2x = 2y \\ & \Longrightarrow & x = y. \end{array}$$

▷ *g est surjective car $y = 2x + 1 \Longrightarrow x = \frac{y-1}{2}$ c'est à dire $\forall y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \frac{y-1}{2}$*

▷ *g est bijective car g est injective et surjective.*

Propriétés 1.3.1. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applicataions, alors on a :*

1. *(f surjective) $\wedge$ (g surjective) $\Rightarrow g \circ f$ surjective.*
2. *(f injective) $\wedge$ (g injective) $\Rightarrow g \circ f$ injective.*
3. *(f bijective) $\wedge$ (g bijective) $\Rightarrow g \circ f$ bijective.*

Preuve : on a :$g \circ f : E \longrightarrow G$.

1. Supposons f et g surjectives et montrons que $g \circ f$ est surjective. Soit $z \in G$, g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g[f(x)]$ et on déduit que :

$$\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x),$$

ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

2. Supposons f et g injectives et montrons que $g \circ f$ est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$, alors :

$$\begin{aligned} x_1 \neq x_2 &\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{car } f \text{ injective} \\ &\Rightarrow g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)] \quad \text{car } g \text{ injective} \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que $g \circ f$ est injective.

3. De 1. et 2., on déduit que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.

1.4 Image directe et image réciproque

Définition 1.4.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$.*

- *On définit* **l'image directe** *de A par l'application f le sous ensemble de F noté $f(A)$:*

$$f(A) = \{y \in F, \forall x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\} \subset F.$$

Exemple 1.4.1. *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

et $A = [-2, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x), x \in A\} \\ &= \{x^2, x \in [-2, 1]\} \\ &= [0, 4]. \end{aligned}$$

- *On définit* **l'image réciproque** *de B par l'application f le sous ensemble de E noté $f^{-1}(B)$:*
$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\} \subset E.$$

Exemple 1.4.2. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

et $B = [0,4]$. On a :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(B) & = & \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0,4]\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0,4]\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x^2 \leq 4\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \leq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+2) \leq 0\} \\ & = & [-2,2]. \end{array}$$

- *Soit f une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par $f^{-1} : F \longrightarrow E$,*
$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y),$$
appelée **application réciproque** *de f.*

Proposition 1.4.1. *Soient $f : E \longrightarrow F, A, B \subset E$ et $M, N \subset F$, alors*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.
4. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.
5. $f^{-1}(C_F M) = C_E f^{-1}(M)$.

Preuve :

1. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{array}{rcl} y \in f(A \cup B) & \Longleftrightarrow & \exists x \in (A \cup B) : y = f(x) \\ & \Longleftrightarrow & (\exists x \in A \vee \exists x \in B) : y = f(x) \\ & \Longleftrightarrow & (\exists x \in A : y = f(x)) \vee (\exists x \in B : y = f(x)) \\ & \Longleftrightarrow & y \in f(A) \vee y \in f(B) \\ & \Longleftrightarrow & y \in (f(A) \cup f(B)), \end{array}$$

ce qui montre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2. Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\iff \exists x \in A \cap B : y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A \wedge \exists x \in B) : y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A : y = f(x)) \wedge (\exists x \in B : y = f(x) \\ &\implies y \in (f(A) \wedge y \in f(B)) \\ &\implies y \in (f(A) \cap f(B)), \end{aligned}$$

   ce qui montre que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cup N) &\iff f(x) \in (M \cup N) \\ &\iff (f(x) \in M) \vee (f(x) \in N) \\ &\iff (x \in f^{-1}(M)) \vee (x \in f^{-1}(N)) \\ &\iff x \in (f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)), \end{aligned}$$

   ce qui montre que $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

4. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M \cap N) &\iff f(x) \in (M \cap N) \\ &\iff (f(x) \in M) \wedge (f(x) \in N) \\ &\iff (x \in f^{-1}(M)) \wedge (x \in f^{-1}(N)) \\ &\iff x \in (f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)), \end{aligned}$$

   ce qui montre que $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

5. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C_F M) &\iff f(x) \in C_F M \\ &\iff (f(x) \in F) \wedge (f(x) \notin M) \\ &\iff (x \in E) \wedge (x \notin f^{-1}(M)) \\ &\iff x \in C_E f^{-1}(M), \end{aligned}$$

   ce qui montre que $f^{-1}(C_F M) = C_E f^{-1}(M)$.

Exercice 1. *On considère l'application :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{2\} &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{x+5}{x-2}, \end{aligned}$$

avec F un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

Déterminer F pour que l'application f soit bijective et donner l'application inverse de f.

Solution : montrer que f est bijective revient à examiner l'existence de solution de l'équation $y = f(x)$, pour tout $y \in F$.

Soit $y \in F$, alors,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{x+5}{x-2} \\ &\iff y(x-2) = x+5 \\ &\iff yx - x = 2y+5 \\ &\iff x(y-1) = 2y+5 \\ &\iff x = \frac{2y+5}{y-1} \quad si\ y \neq 1, \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists!\ x = \frac{2y+5}{y-1}; \quad y = f(x).$$

Pour montrer que f est bijective, il reste à voir si $x = \frac{2y+5}{y-1} \in \mathbb{R} - \{2\}$?

On a :

$$\begin{aligned} \frac{2y+5}{y-1} = 2 &\iff 2y+5 = 2y-2 \\ &\iff 5 = -2 \ \textit{ce qui est impossible}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\frac{2y+5}{y-1} \in \mathbb{R} - \{2\}$ et par suite :

$$\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}, \exists!\ x = \frac{2y+5}{y-1} \in \mathbb{R} - \{2\}; \quad y = f(x).$$

Donc f est bijective si $F = \mathbb{R} - \{1\}$ et l'inverse de f est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = \frac{2y+5}{y-1}. \end{aligned}$$

Exercice 2. *Soit l'applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow [5, +\infty[$ définie par :*

$$f(x) = (x^2-8)^2 + 5, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalance.*
2. *Calculer $\dot{0}$ et $\dot{2}$.*

Solution : soit l'applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow [5, +\infty[$ définie par :

$$f(x) = (x^2 - 8)^2 + 5, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalance :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x) \Rightarrow x\mathcal{R}x \Rightarrow \mathcal{R}$ est réflexive.
   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longleftrightarrow f(y) = f(x) \\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
   (c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

   et

$$y\mathcal{R}z \Longleftrightarrow f(y) = f(z)$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow f(x) = f(z) \\ &\Longleftrightarrow x\mathcal{R}z, \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{R}$ est transitive.
   De $(a), (b)$ et (c), on a bien $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence.
2. Calculer $\dot{0}$ et $\dot{2}$:

$$\begin{aligned} \dot{0} &= \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8)^2 + 5 = 8^2 + 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8) = \pm 8\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 0 \vee x^2 = 16\} \\ &= \{-4, 0, 4\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{2} &= \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8)^2 + 5 = (-4)^2 + 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x^2 - 8) = \pm 4\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \vee x^2 = 12\} \\ &= \{\pm 2, \pm 2\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

Exercice 3. *La relation suivante est-elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? Transitive ? sur* $\mathbb{R}$*.*

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1.$$

Solution :

▷ $\mathcal{R}$ est une relation réflexive car :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \Longrightarrow x\mathcal{R}x.$$

▷ $\mathcal{R}$ est une relation symétrique car :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow 1 - (\sin x)^2 + 1 - (\cos y)^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow -(\cos y)^2 - (\sin x)^2 = -1 \\ &\Longleftrightarrow (\cos y)^2 + (\sin x)^2 = 1 \\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

▷ $\mathcal{R}$ n'est une relation antisymétrique car :

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1 \\ \wedge \\ (\cos y)^2 + (\sin x)^2 = 1 \end{cases}$$

qui n'implique pas que $x = y$.
Par contre exemple : si $x = 0$ et $y = 2\Pi$;

$$\begin{cases} (\cos 0)^2 + (\sin 2\Pi)^2 = 1 \\ \wedge \\ (\cos 2\Pi)^2 + (\sin 0)^2 = 1 \end{cases}$$

qui implique que $0 \neq 2\Pi$.

▷ $\mathcal{R}$ est une relation transitive car : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \wedge \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\cos x)^2 + (\sin y)^2 = 1 \\ \wedge \\ (\cos y)^2 + (\sin z)^2 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow (\cos x)^2 + (\sin y)^2 + (\cos y)^2 + (\sin z)^2 = 2 \\ &\Rightarrow (\cos x)^2 + (\sin z)^2 = 1 \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

Exercice 4. *Soit l'application :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = (x+2)^2 - 9, \end{aligned}$$

1. *f est-elle surjective ? f est-elle injective ?*
2. *Comment changer l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée pour que f soit bijective ? Donner dans ce cas l'application inverse de f.*
3. *Déterminer $f([-1;3])$ et $f^{-1}(]-4;0])$.*

Solution : soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=(x+2)^2-9. \end{array}$$

1. f est-elle surjective ? f est-elle injective ? :

$$f \textit{ est surjective } \Longleftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x).$$

$$f \textit{ est injective } \Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

▷ f non surjective car l'équation $-10 = (x+2)^2 - 9$ n'admet pas une solution, ou

$$\begin{array}{rcl} y = f(x) & \Longleftrightarrow & y = (x+2)^2 - 9 \\ & \Longleftrightarrow & x = \pm\sqrt{y+9} - 2, \quad \textit{si } y \geq -9. \end{array}$$

▷ f non injective car $f(-1) = f(-3) = -8$ n'implique pas $-1 = -3$, ou

$$\begin{array}{rcl} f(x_1) = f(x_2) & \Longleftrightarrow & (x_1+2)^2 - 9 = (x_2+2)^2 - 9 \\ & \Longleftrightarrow & (x_1+2)^2 = (x_2+2)^2 \\ & \Longleftrightarrow & |x_1+2| = |x_2+2| \\ & \Longleftrightarrow & x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 - 4. \end{array}$$

2. Comment changer l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée pour que f soit bijective ? Donner dans ce cas l'application inverse de f : f est bijective si elle est injective et surjective :

$$\begin{array}{rcl} f:[-2;+\infty[& \longrightarrow & [-9;+\infty[\\ x & \longmapsto & f(x)=(x+2)^2-9, \end{array}$$

et l'inverse de f est :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}:[-9;+\infty[& \longrightarrow & [-2;+\infty[\\ y & \longmapsto & f^{-1}(y)=\sqrt{y+9}-2, \end{array}$$

3. Déterminer $f([-1;3])$ et $f^{-1}(]-4;0])$:
   - $f([-1;3]) = [-8;16]$.
   - $f^{-1}(]-4;0]) =]\sqrt{5}-2;1]$.

Chapitre 2

Les nombres complexes

2.1 Introduction

Qu'on se rappelle les solutions des équations suivantes.

- ▷ Résolution dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x+7=6$: cette équation n'a pas de solution, mais en créant les entiers relatifs, on obtient alors, $x=-1$.
- ▷ Résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $3x=1$: cette équation n'a pas de solution, mais en créant les nombres rationnels, on obtient $x=\frac{1}{3}$.
- ▷ Résolution dans $\mathbb{Q}$ de l'équation $x^2=2$: cette équation n'a pas de solution, mais en créant les nombres réels, on obtient $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$.
- ▷ Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2+1=0$: cette équation n'a pas de solution donc on va construire un ensemble que l'on appelle $\mathbb{C}$ (complexe) dont l'élément principal ajouté est le nombre i tel que $i^2=-1$. On obtient donc comme solution $x=i$ et $x=-i$.

La démarche naturelle consiste donc à chercher un ensemble plus grand qui contient l'ancien, qui vérifie les mêmes propriétés et qui puisse être représenté.

2.2 Définition d'un nombre complexe

Définition 2.2.1. *Notons $\mathbb{C}$ l'ensemble des couples de réels :*

$$\mathbb{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\}.$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés des nombres complexes.

2.3 Représentation algébrique

Définition 2.3.1. *On appelle l'ensemble des nombre complexes, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres z de la forme :*

$$z=x+iy \quad \textit{avec} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \textit{et} \quad i^2=-1.$$

✓ *Le nombre réel x s'appelle la* **partie réelle** *de z notée : $Re(z)$.*
✓ *Le nombre réel y s'appelle la* **partie imaginaire** *de z notée : $Im(z)$.*
✓ *Cette forme $z = x + iy$ est appelée* **forme algébrique**.

Remarque 2.3.1.
(i) *Par conséquent $z = Re(z) + iIm(z)$.*
(ii) *Tout nombre réel appartient à $\mathbb{C}$ (faire $y = 0$).*
(iii) *Si $x = 0$ on dit que z est un imaginaire pur.*

Attention ! La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel ! ! !

Exemple 2.3.1. $Re(3 - 5i) = 3$ *et* $Im(3 - 5i) = -5$.

2.4 Opérations avec les complexes

Dans l'ensemble des nombres complexes on définit deux opérations :

- Pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut et il suffit que sa partie réelle et sa partie imaginaire soient nulles :

$$x + iy = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$

- **Egalité entre deux nombres complexes :**

$$x + iy = x' + iy' \Longleftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

- **L'addition** $(+)$ **:** si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors, $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
- **La multiplication** $(\times)$ **:** si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ alors, $z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.

Exemple 2.4.1.

$$x + iy = 3 - 5i \Longleftrightarrow x = 3 \text{ et } y = -5.$$

Soit les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i. \\ z_2 &= (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i + 2 = 8 - i. \\ z_3 &= (4 - 3i)2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i. \end{aligned}$$

Exemple 2.4.2. *Soient* $z_1 = 3 + 2i$ *et* $z_2 = 2 - i$.

Calculer $z_1 + z_2, z_1 - z_2, z_1 \times z_2, z_1 + 2z_2, 2z_1 - 3z_2$ *et* z^2.

2.4.1 Nombre complexe conjugué

Définition 2.4.1. *Soit z un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = x + iy$. On appelle le nombre conjugué de z, le nombre noté $\overline{z}$ tel que : $\overline{z} = x - iy$.*

Exemple 2.4.3.

1) *Le conjugué de $3 - 5i$ est $3 + 5i$.*
2) *Le conjugué de -7 est -7 car $-7 = -7 + 0i$ et son conjugué sera $-7 - 0i = -7$.*

Propriétés 2.4.1.

a) *z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.*
b) *z est un imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.*
c) $\overline{(z + z')} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\quad \overline{(-z)} = -\overline{z}$, $\quad \overline{(z \times z')} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
d) $(\overline{z})^n = \overline{(z^n)}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$, $\quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, *avec* $z \neq 0$ $\quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$, *avec* $z' \neq 0$.
e) *$z + \overline{z} = 2Re(z)$ et z est un imaginaire pur équivaut à : $z + \overline{z} = 0$.*
f) *$z - \overline{z} = 2Im(z)$ et z est réel équivaut à : $z = \overline{z}$.*
g) *$z = x + iy$, avec x et y réels, entraîne $z\overline{z} = x^2 + y^2$, nombre réel positif.*

Remarque 2.4.1. Inverse d'un nombre complexe : *soit $z = x + iy$ un complexe non nul, avec x et y réels.*
Pour déterminer partie réelle et partie imaginaire de $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

La forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est donc

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Exemple 2.4.4.

▷ *Trouver la forme algébrique du complexes suivants : $\frac{1}{3 - 5i}$ et $z = \frac{2 - i}{3 + 2i}$.*
On multiplie la fraction en haut et en bas par le complexe conjugué du dénominateur :

$$\frac{1}{3 - 5i} = \frac{3 + 5i}{(3 - 5i) \times (3 + 5i)} = \frac{3 + 5i}{3^2 - (5i)^2} = \frac{3 + 5i}{9 + 25} = \frac{3}{34} + i\frac{5}{34}.$$

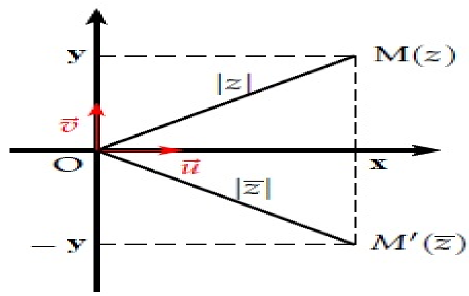
et

$$z = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{6 - 4i - 3i - 2}{9 + 4} = \frac{4 - 7i}{13} = \frac{4}{13} - i\frac{7}{13}.$$

▷ *Résoudre l'équation suivante :* $z = (2-i)z + 3$ *:*

$$\begin{aligned} z = (2-i)z+3 &\iff z(-1+i) = 3 \\ &\iff z = \frac{3}{-1+i} \\ &\iff z = \frac{3(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} \\ &\iff z = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

Interprétation géométrique :
le point $M'(z)$ est le symétrique
du point $M(z)$ par rapport
à l'axe des abscisses.



2.5 Représentation d'un nombre complexe

Théorème 2.5.1. *A tout nombre complexe* $z = x + iy$*, on peut faire correspondre un point* $M(x, y)$ *dans un plan orthonormal* $(O, \vec{u}, \vec{v})$*.*
On dit que z *est l'affixe de* M*. On écrit alors* $M(z)$*.*

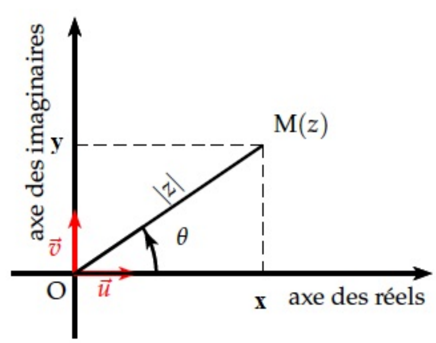
Propriétés 2.5.1. *Cette application est réciproque (bijective). A tout point* $M(x, y)$ *d'un plan muni d'un repère orthonormal, on peut associer un nombre complexe* $z = x + iy$*.*

Conclusion : On peut représenter alors le nombre complexe $z = x + iy$.

On appelle module de z la distance OM,
c'est à dire la quantité notée $|z|$ telle que :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si $z \in \mathbb{R}$, on a $z = x$ et $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ qui
n'est autre que la valeur absolue du réel x
(même réalité donc même notation.



Propriétés 2.5.2. *On a :* $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$*.*
En effet, $(x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy + y^2$*. Cela permet de rendre réel un dénominateur.*

Et pour $z \neq 0$, on appelle argument de z, noté $\arg(z)$, toute mesure θ de l'angle $(\vec{u}, \vec{OM})$ telle que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \qquad avec \quad \theta = \arg(z)[2\Pi].$$

Exemple 2.5.1.

1) *Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :*

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 1 - i\sqrt{3}, \qquad z_3 = 4 + 3i.$$

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad |z_2| = \sqrt{1+3} = 2 \qquad |z_3| = \sqrt{16+9} = 5$$

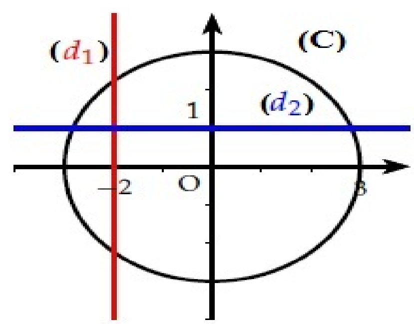
$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta_3 = -\dfrac{4}{5} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

$$\theta_1 = \tfrac{\Pi}{4} \qquad \theta_2 = -\tfrac{\Pi}{3} \qquad \theta_2 = \arccos\left(-\tfrac{4}{5}\right) \approx 143°$$

2) *Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée :*

$$(a) \quad |z| = 3, \qquad (b) \quad Re(z) = -2, \qquad (c) \quad Im(z) = 1.$$

- (a) $|z| = 3$ *: cercle (C) de centre O et de rayon* 3.
- (b) $Re(z) = -2$ *: droite (d_1) parallèle à l'axe des ordonnées d'abscisse* -2.
- (c) $Im(z) = 1$ *: droite (d_2) parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée* 1



2.6 Représentation trigonométrique

Définition 2.6.1. *On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe $z (z \neq 0)$ dont l'écriture algébrique est $x + iy$, l'écriture suivante :*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)[2\Pi]$.

Exemple 2.6.1. 1. *Trouver la forme trigonométrique de $z = 1 - i$:*

▷ *On détermine le module :* $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
▷ *On determine un argument :*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = -\frac{\Pi}{4}[2\Pi],$$

d'où,

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\Pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right)\right].$$

1. *Trouver la forme algébrique de*

$$z = \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\Pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\Pi}{3}\right)\right]$$

On a :

$$z = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

2.6.1 Propriétés des modules et arguments

Pour tout complexe z non nul, on a les relations suivantes :

$$|-z| = |z| \quad et \quad \arg(-z) = \arg(z) + \Pi[2\Pi].$$

$$|\overline{z}| = |z| \quad et \quad \arg(z) = -arg(z)[2\Pi].$$

Théorème 2.6.1. *Pour tous complexes z et z' non nuls, on a les relations suivantes :*

$$|zz'| = |z||z'| \quad et \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\Pi].$$

$$|z^n| = |z|^n \quad et \quad \arg(z^n) = n\arg(z)[2\Pi].$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad et \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\Pi].$$

2.7 Représentation exponentielle

Définition 2.7.1. *On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe $z(z \neq 0)$, la forme :*

$$z = re^{i\theta} \quad avec \quad r = |z| \quad et \quad \theta = \arg(z)[2\Pi].$$

Remarque 2.7.1. *On peut maintenant admirer l'expression :* $e^{i\Pi} + 1 = 0$.

Cette expression contient les nombres qui ont marqué les mathématiques au cours de l'histoire : 0 *et* 1 *pour l'arithmétique,* Π *pour la géométrie,* i *pour les nombres complexes et* e *pour l'analyse.*

Exemple 2.7.1. 1. *Déterminer formes trigonométrique et exponentielle du complexe* $z = \sqrt{3} + i$. *Il vient :*

$$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad donc \quad \theta = \frac{\Pi}{6}[2\Pi],$$

et par suite :

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{\Pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\Pi}{6}\right)\right] = 2e^{i\frac{\Pi}{6}}.$$

2. *Determiner la forme algébrique du complexe* $3e^{-i\dfrac{\Pi}{4}}$ *:*

$$3e^{-i\frac{\Pi}{4}} = 3\left[\cos\left(-\frac{\Pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right)\right] = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Formules de Moivre et Euler :

▷ Formules de Moivre : pour tout reel θ et tout entier relatif n, on a :

$$\begin{cases} (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\ (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta). \end{cases}$$

▷ Formules d'Euler : pour tout reel θ, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad et \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}.$$

2.8 Représentation géométrique

Définition 2.8.1. *Soit le plan complexe muni du repère orthonormal direct* $(O, \vec{u}, \vec{v})$, *on a alors si le point* $M(z)$

$$z_{\overrightarrow{OM}} = z \quad et \quad OM = |z| \quad et \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z).$$

2.8.1 Affixe d'un vecteur

Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$, on a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Règle : pour tous points A et B du plan complexe, on a :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A, \qquad AB = |z_B - z_A|, \qquad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A).$$

Exemple 2.8.1. *On donne :* $z_A = 2 + i$ *et* $z_B = -1 - 2i)$.

Determiner les coordonnees du vecteur $\overrightarrow{AB}$, *la distance* AB *et l'angle* $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

- *On a :* $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$ *donc* $\overrightarrow{AB} = (-3, -3)$.
- *On a :* $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ *donc* $AB = 3\sqrt{2}$.

- *On a :*

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = -\dfrac{3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \Longrightarrow \theta = -\frac{3\Pi}{4}[2\Pi], \quad donc \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{3\Pi}{4}[2\Pi].$$

2.8.2 Ensemble de points

Il s'agit de déterminer un ensemble E de points M qui vérifient une propriété avec l'affixe z de M.

▷ $|z - z_A| = r$ avec $r > 0 \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow E$ est le cercle de centre A et de rayon r.

▷ $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow E$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Exemple 2.8.2. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*

1. *Déterminer l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que $|z + 3 + 2i| = 2$: soit A le point d'affixe $(-3 - 2i)$ donc de coordonnées $(-3, -2)$.*

$$\begin{aligned} M \in (E_1) &\Longleftrightarrow |z - (-3 - 2i)| = 2 \\ &\Longleftrightarrow AM = 2 \\ &\Longleftrightarrow M \textit{ est sur le cercle de centre } A \textit{ et de rayon } 2. \end{aligned}$$

L'ensemble (E_1) est donc le cercle de centre A et de rayon 2.

Autre méthode : *cette question peut aussi être étudiée par une méthode analytique, c'est-à-dire avec les coordonnées. On pose $z = x + iy$(x et y réels).*

$$\begin{aligned} M \in (E_1) &\Longleftrightarrow |x + iy + 3 + 2i| = 2 \\ &\Longleftrightarrow |(x + 3) + i(y + 2)| = 2 \\ &\Longleftrightarrow |(x + 3) + i(y + 2)|^2 = 2^2 \\ &\Longleftrightarrow (x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 4. \end{aligned}$$

La dernière équation permet de reconnaître que L'ensemble (E_1) est le cercle de centre A et de rayon 2.

2. *Déterminer l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que $|z - i| = |z - 1|$: soit $A(i)$ et $B(1)$.*

$$\begin{aligned} M \in (E_2) &\Longleftrightarrow |z - i| = |z - 1| \\ &\Longleftrightarrow AM = BM \\ &\Longleftrightarrow M \textit{ est sur la médiatrice du segment } [AB]. \end{aligned}$$

L'ensemble (E_2) est donc la médiatrice de $[AB]$.

Autre méthode : *on pose* $z = x + iy$ *(*x *et* y *réels).*

$$\begin{aligned} M \in (E_2) &\iff |x+iy-i| = |x+iy-1| \\ &\iff |x+i(y-1)| = |(x-1)+iy| \\ &\iff |x+i(y-1)|^2 = |(x-1)+iy|^2 \\ &\iff x^2+(y-1)^2 = (x-1)^2+y^2 \\ &\iff y = x. \end{aligned}$$

L'ensemble (E_2) *est donc la droite d'équation* $y = x$*, on retrouve ainsi la médiatrice de* $[AB]$*.*

2.8.3 Somme de deux vecteurs

Théorème 2.8.1. *Soit* $\overrightarrow{u_1}(z_1), \overrightarrow{u_2}(z_2)$ *et* $\overrightarrow{u_3}(z_3)$ *tel que :*

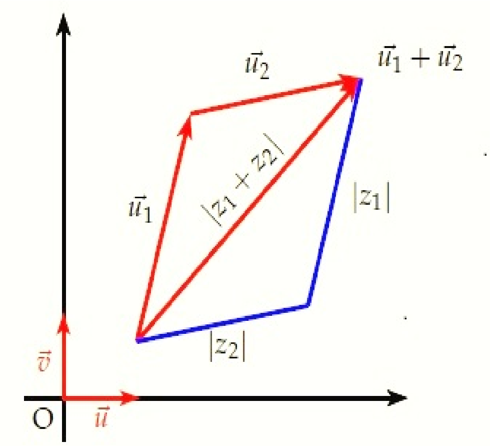
$$\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}.$$

On en déduit que :

$$z_3 = z_1 + z_2.$$

et l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$



2.8.4 Angle orienté

Théorème 2.8.2. *Pour tous points* A, B, C *et* D *tels que* $(A \neq B)$ *et* $(C \neq D)$*, on a :*

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right).$$

Preuve : d'après les règles sur les angles orientés :

$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \quad et \quad (\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}),$$

on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) \\ &= (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_{\overrightarrow{CD}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) \\ &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right). \end{aligned}$$

2.8.5 Colinéarité et orthogonalité

Propriétés 2.8.1. *Alignement de 3 points distincts ou parallélisme de deux droites :*

▷ A, B et C distincts et alignés :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires non nuls} \iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

▷ Pour $A \neq B$ et $C \neq D$, (AB) et (CD) parallèles :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires non nuls} \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \quad ou \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \Pi.$$

On en déduit que :

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad ou \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \Pi,$$

même chose avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ pour deux droite parallèles.

Propriétés 2.8.2. *Pour montrer l'orthogonalité de deux droites. Pour $A \neq B$ et $C \neq D$:*

$$(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \text{ imaginaire pur.}$$

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux alors,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\Pi}{2} \quad ou \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\Pi}{2}.$$

On en déduit que :

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\Pi}{2} \quad ou \quad \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = -\frac{\Pi}{2},$$

2.8.6 Nature d'un triangle

Pour montrer qu4un triangle ABC est :

- **isocèle en A :** $AB = AC \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A|$.
- **équilatéral en A :** $AB = AC = BC$ ou $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\Pi}{3}$

$$\begin{aligned} &\iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B| \\ &\iff |z_B - zA| = |z_C - z_A| \quad et \quad \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\Pi}{3} \end{aligned}$$

- **rectangle en A :** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ imaginaire pur.
- **rectangle isocèle en A :** $AB = AC$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$.

2.9 Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$

Les nombres complexes ont été créés pour que l'équation du second degré ait toujours des solutions.

Théorème 2.9.1. *Toute équation du second degré dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux solutions distinctes ou confondues. Si cette équation est à coefficients réels, c'est à dire,*

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

Elle admet comme solutions dans $\mathbb{C}$:

1. *Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :*

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, une solution réelle double :$z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
3. *Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées avec : $\Delta = i^2|\Delta|$,*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exemple 2.9.1. *Résoudre $z^2 - 2z + 2 = 0$. On calcule $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. $\Delta < 0$ On obtient deux solutions complexes conjuguées :*

$$z_1 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \qquad et \qquad z_2 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i.$$

2.10 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

2.10.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy$ un complexe avec $x, y \in \mathbb{R}$. On appelle racines carrées de z, les solutions ω dans $\mathbb{C}$, de l'équation $\omega^2 = z$.

▷ **Méthode de résolution algébrique de $\omega^2 = z$:** posons $z = x + iy$ et désignons par $a + ib$ une des racines carrées de z. On a :

$$\omega^2 = z \Longleftrightarrow (a + ib)^2 = x + iy \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \\ a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

La résolution de ce système nous donne les racines carrées ω de z.

▷ **Méthode de résolution trigonométrique de $\omega^2 = z$:** soit $z = [r, \theta]$ un complexe, alors, Le nombre complexe $[\rho, \alpha]$ est solution de $\omega^2 = z \Longleftrightarrow [\rho^2, 2\alpha] = [r, \theta]$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta[2\Pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{2}[2\Pi] \end{cases}$$

2.10.2 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe. On appelle racines n-ièmes de z, les solutions ω dans $\mathbb{C}$, de l'équation $\omega^n = z (n \in \mathbb{N}^*)$.

Posons $\omega = [\rho, \alpha]$ une des racines de $\omega^n = z$. On a :

$$\omega^n = z \Longleftrightarrow [\rho^n, n\alpha] = [r, \theta] \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta[2\Pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n}[\frac{2\Pi}{n}] \end{cases}$$

Conclustion : l'ensemble S des solutions de l'équation $\omega^n = z$ est $S = \{\omega_0, \omega_1, \cdots \omega_{n-1}\}$ avec

$$\omega_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\Pi}{n}\right], \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

2.10.3 Racines n-ièmes de l'unité

Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $\omega^n = 1$. Les solutions de cette équation sont :

$$S' = \{\omega_0, \omega_1, \cdots \omega_{n-1}\} \qquad avec \qquad \omega_k = \left[1, \frac{2k\Pi}{n}\right].$$

Exemple 2.10.1. *Trouver les 5-racines de $z = \sqrt{2}(16 - 16i)$. On a :*

$$\begin{aligned} z = \sqrt{2}(16-16i) = \sqrt{2}\cdot 16(1-i) &= \sqrt{2}\cdot 16 \cdot \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 32\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 32\left(\cos\left(-\frac{\Pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\Pi}{4}\right)\right) \\ &\Longrightarrow \omega = 32e^{-i\frac{\Pi}{4}} = \left[32, -\frac{\Pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Cherchons $\omega = [\rho, \alpha]$ tel que $\omega^5 = z$:

$$\begin{aligned} \omega^5 = z &\Longleftrightarrow [\rho^5, 5\alpha] = \left[32, -\frac{\Pi}{4}\right] \Longleftrightarrow \rho^5 = 32 \ et \ 5\alpha = -\frac{\Pi}{4} + 2k\Pi \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[5]{32} = 2 \\ \alpha = -\frac{\Pi}{20} + \frac{2k\Pi}{5}, \quad 0 \leq k \leq 5. \end{cases} \\ &\Longrightarrow \omega_k = \left[2, -\frac{\Pi}{20} + \frac{2k\Pi}{5}\right] = 2\exp\left\{i\left(-\frac{\Pi}{20} + \frac{2k\Pi}{5}\right)\right\}, \quad 0 \leq k \leq 5. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $\omega^5 = z$ est :

$$S = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \quad avec \quad \omega_k = \left[2, -\frac{\Pi}{20} + \frac{2k\Pi}{5}\right].$$

2.11 Application aux équations de degré supérieur

Théorème 2.11.1. *Tout polynôme de degré n dans $\mathbb{C}$ admet n racines distinctes ou confondues. Si a est une racine alors le polynôme peut se factoriser par $(z-a)$.*

Exercice 1. *Soit l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante :*

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0. \tag{2.1}$$

1. *Montrer que i est solution de l'équation* (2.1).
2. *Déterminer les réelsa,b et c tels que :*

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c).$$

3. *Résoudre alors cette équation.*

Solution :

1. On vérifie que i est solution de l'équation (2.1) :

$$i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+4+i+13i-4-13i=0,$$

   donc i est bien solution de l'équation. On peut donc factoriser par $(z-i)$.
2. On développe et on identifie à la première forme :

$$\begin{aligned}(z-i)(az^2+bz+c) &= az^3+bz^2+cz-iaz^2-ibz-ic\\ &= az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic.\end{aligned}$$

   On identifie, et l'on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a=1\\ b-ia=-4-i\\ c-ib=13+4i\\ -ic=-13i.\end{cases} \iff \begin{cases} a=1\\ b=-4\\ c=13.\end{cases}$$

3. L'équation devient donc $(z-i)(z^2-4z+13)=0$. On a donc $z_0=i$ ou $z^2-4z+13=0$. On calcule $\Delta=16-52=-36=(6i)^2$. On obtient donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{4-6i}{2}=2-3i \qquad et \qquad z_2=\frac{4+6i}{2}=2+3i.$$

   Conclusion : $S=\{i,2-3i,2+3i\}$.

Exercice 2.

1. *Donner la forme algébrique du conjugué z du complexe suivant :* $z=\dfrac{3-i}{1+i}$.

2. *Dans le plan complexe, M est le point d'affixe $z = x + iy$, x et y réels. À tout complexe $z, z \neq 1$, on associe :* $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$.
   (a) *Exprimer $Z + \overline{Z}$ en fonction de z et $\overline{z}$.*
   (b) *Démontrer que Z est un imaginaire pur équivaut à M est un point d'un cercle privé d'un point.*

Solution :

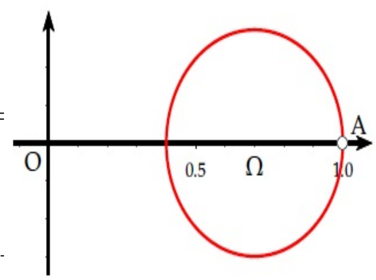
1. $z = \overline{\left(\dfrac{3-i}{1+i}\right)} = \dfrac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}} = \dfrac{3+i}{1-i} = \dfrac{(3+i)(1+i)}{1+1} = 1 + 2i.$

2. (a) $Z+\overline{Z} = \dfrac{5z-2}{z-1} + \overline{\left(\dfrac{5z-2}{z-1}\right)} = \dfrac{5z-2}{z-1} + \dfrac{5\overline{z}-2}{\overline{z}-1} = \dfrac{(5z-2)(\overline{z}-1)(5\overline{z}-2)(z-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)}$

$$= \frac{5z\overline{z} - 5z - 2\overline{z} + 2 + 5z\overline{z} - 5\overline{z} - 2z + 2}{(z-1)(\overline{z}-1)}$$
$$= \frac{10z\overline{z} - 7(z+\overline{z}) + 4}{(z-1)(\overline{z}-1)}.$$

(b) Si Z est un imaginaire pur alors, $Z + \overline{Z} = 0$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
10z\overline{z} - 7(z+\overline{z}) + 4 = 0 \iff\ & 10|z|^2 - 14Re(z) + 4 = \\
\iff\ & 10(x^2+y^2) - 14x + 4 = \\
\iff\ & x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \\
\iff\ & \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} + y^2 \\
\iff\ & \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{100} = \left(\frac{3}{10}\right)^2.
\end{aligned}$$



On en déduit que l'ensemble des points $M(z)$ est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{7}{10}\right)$ et de rayon $\left(\frac{3}{10}\right)$ privé du point $A(1)$.

Exercice 3.

1. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :*

$$(z-i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0.$$

2. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.*
   On considère trois points distincts A, B et C d'affixes $z_A = \sqrt{3} + i, z_B = \overline{z_A}$ et $z_C = i$.
   (a) *Ecrire $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous la forme exponentielle.*

(b) *Déduire la nature du triangle OAB.*

3. *Déterminer l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que :*
$$|z-z_A|^2+|z-z_C|^2=5.$$
4. *Déterminer l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que :*
$$|z-z_A|=|z-z_C|.$$

Solution :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :
$$\begin{aligned}(z-i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0 &\iff z-i=0\vee z^2-2\sqrt{3}z+4=0\\ &\iff z=i\vee z=\sqrt{3}+i\vee z=\sqrt{3}-i. \qquad (\Delta=-4=4i^2).\end{aligned}$$
2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
On considère trois points distincts A, B et C d'affixes $z_A=\sqrt{3}+i$, $z_B=\overline{z_A}=\sqrt{3}-i$ et $z_C=i$.
   (a) Ecrire $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous la forme exponentielle : on a :
$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2e^{i\frac{\Pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\Pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\Pi}{6}+\frac{\Pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\Pi}{3}}.$$
   (b) Déduire la nature du triangle OAB : on a :
$$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=1\iff|z_A|=|z_B|\iff OA=OB$$
   et
$$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\frac{\Pi}{3}\iff(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=\frac{\Pi}{3},$$
   alors, OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M d'affixe z tels que : on a :
$$\begin{aligned}|z-z_A|^2+|z-z_C|^2=5 &\iff AM^2+CM^2=5\\ &\iff \sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2}^2+\sqrt{x^2+(y-1)^2}^2=5\\ &\iff (x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2+x^2+(y-1)^2=5\\ &\iff 2x^2-2\sqrt{3}x+2(y-1)^2=2\\ &\iff x^2-\sqrt{3}x+(y-1)^2=1\\ &\iff \left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+(y-1)^2=1\\ &\iff \left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{7}{4}.\end{aligned}$$
Alors, E_1 est un cercle de centre $D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$ et de rayon $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

4. Déterminer l'ensemble (E_2) des points M d'affixe z tels que : on a :

$$|z - z_A| = |z - z_C| \Longleftrightarrow AM = CM.$$

Alors, E_2 est une médiatrice du segment $[AC]$

Chapitre 3

Espace vectoriel

3.1 Structures algébriques

Les notions qui suivent présentent de l'intérêt sur le plan terminologique que structurel avant d'aborder l'étude des espaces vectoriels.

3.1.1 Lois et copmosition interne

Définition 3.1.1. *On appelle loi de composition interne (l.c.i) sur un ensemble E, toute application :*

$$\begin{aligned} \star : E \times E &\longrightarrow E \\ (a,b) &\longmapsto a \star b. \end{aligned}$$

Un sous ensemble F de E est dit stable par rapport à la loi $\star$ si :

$$\forall a, b \in F, a \star b \in F.$$

On la note : $a \star b$ ou $a \triangle b$ ou $a \perp b \cdots$

Exemple 3.1.1. *L'addition et la multiplication sont des lois de composition internes sur $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ mais la soustraction n'est pas interne sur $\mathbb{N}$.*

Définition 3.1.2. *Soit E et Ω des ensembles. On appelle loi de composition externe (l.c.e) sur E toute application :*

$$\begin{aligned} \perp : \Omega \times E &\longrightarrow E \\ \alpha \cdot x &\longmapsto \alpha \perp x. \end{aligned}$$

Dans ce cadre général, les éléments de Ω sont appelés opérateurs et on dit que E est muni d'une loi de composition externe à opérateurs dans Ω.

Remarque 3.1.1. *La loi peut être notée multiplicativement à l'aide d'un point.*

Définition 3.1.3. *Soient* $\star$ *et* $\bullet$ *deux lois de composition internes sur* E*, on dit que :*

1. **Commutativité :** $\star$ *est commutative si :* $\forall a, b \in E, a \star b = b \star a$.

   Exemple 3.1.2. *L'intersection et la réunion sont des lois de composition internes commutatives sur l'ensemble des parties d'un ensemble.*

2. **Associativité :** $\star$ *est associative si :* $\forall a, b, c \in E, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

   Exemple 3.1.3. *La composition des applications est une loi de composition interne associative.*
   Par contre la loi de composition $\star$ *définie dans* $\mathbb{Q}$ *par :* $x \star y = \frac{x+y}{2}$ *n'est pas associative.*

3. **Distributivité :** $\star$ *est distributive par rapport à* $\bullet$ *si :*

   $$\forall a, b, c \in E, a \star (b \bullet c) = (a \star b) \bullet (a \star c) \quad et \quad (b \bullet c) \star a = (b \star a) \bullet (c \star a).$$

   Si, on outre, la loi $\star$ *est commutative, il suffit de montrer l'un des deux égalité.*

   Exemple 3.1.4. *La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans* $\mathbb{C}$.

4. **Elément neutre :** $e \in E$ *est un élément neutre de la loi* $\star$ *si :*

   $$\forall a \in E, a \star e = e \star a = a.$$

   Si, on outre, la loi $\star$ *est commutative, il suffit de montrer que :* $\forall a \in E; a \star e = a$ *ou bien* $e \star a = a$.

   Exemple 3.1.5. *1 est un élément neutre de la multiplication dans* $\mathbb{R}$.

   Proposition 3.1.1. *Si l'élément neutre existe alors il est unique.*

5. **Elément symétrique (inverse) :** *Soit* $\star$ *admettant un élément neutre* e*. Deux éléments* a *et* a' *sont symétriques pour la loi* $\star$ *si :* $a \star a' = a' \star a = e$.

   Exemple 3.1.6. *Le symétrique de* a *dans* $\mathbb{Z}$ *muni de l'addition est :* $-a$.

   Proposition 3.1.2. *Si la loi* $\star$ *est associative, alors si l'élément symétrique existe il est unique.*

6. **Elément régulier :** *On dit que* α *est un élément régulier pour la loi* $\star$ *s'il vérifie :*

   $$\forall a; b \in E; (a \star \alpha = b \star \alpha) \Longrightarrow a = b \quad et \quad \forall a; b \in E; (\alpha \star a = \alpha \star b) \Longrightarrow a = b.$$

   Si, on outre, la loi $\star$ *est commutative, il suffit de vérifier l'un des deux implication.*

   Exemple 3.1.7. *Dans* $\mathbb{C}$ *muni de l'addition, tout élément est régulier.*

7. **Partie stable :** *Une partie* A *est dite stable de* E *pour la loi* $\star$*, si pour tout* $a; b \in A; a \star b \in A$.

   Exemple 3.1.8. *L'ensemble des entiers naturels pairs est stable pour l'addition, par contre l'ensemble des entiers impairs n'est pas stable pour l'addition car :* $3 + 5 = 8$ *qui est pair.*

Exemple 3.1.9. *Soit F un ensemble et $E = \mathcal{P}(F)$. On considère sur E les lois de composition internes $\cap$ et $\cup$, alors il est très facile de montrer que :*
- $\triangleright$ $\cap$ *et* $\cup$ *sont associatives.*
- $\triangleright$ $\cap$ *et* $\cup$ *sont commutatives.*
- $\triangleright$ $\emptyset$ *est l'élément neutre de* $\cup$.
- $\triangleright$ F *est l'élément neutre de* $\cap$.

Exemple 3.1.10. *Soit $E = \{a, b, \gamma\}$, on définit une l.c.i dans E par :*

$\star$	a	b	γ
a	a	b	γ
b	b	γ	a
γ	γ	a	a

C'est à dire :

$$\begin{cases} a \star a = a, & a \star b = b, & a \star \gamma = \gamma, \\ b \star a = b, & b \star b = \gamma, & b \star \gamma = a, \\ \gamma \star a = \gamma, & \gamma \star b = a, & \gamma \star \gamma = a. \end{cases}$$

On remarque que :

(i) *a est l'élément neutre de $\star$.*

(ii) *Tous les éléments de E sont inversibles avec :*
- $\triangleright$ *a est l'inverse de a.*
- $\triangleright$ *γ est l'inverse de b.*
- $\triangleright$ *b et γ sont des inverses de γ.*

Conventions : étant donnée une loi de composition interne associative dans un ensemble E :
- Si la loi est notée $+$, son élément neutre est noté 0_E ou 0, et on parle du symétrique de a qu'on note $a' = -a$.
- Si la loi est notée multiplicativement, son élément neutre est noté 1_E ou 1, et on parle de l'inverse de a qu'on note $a' = a^{-1}$.

3.1.2 Structure de groupe

Définition 3.1.4. *On appelle groupe, tout ensemble non vide G muni d'un loi de composition interne $\star$ tel que :*

(i) *$\star$ est associative.*

(ii) *$\star$ possède un élément neutre e.*

(iii) *Tout élément de G est symétrisable.*

Si de plus $\star$ est commutative, on dit que $(G, \star)$ est un groupe commutatif, ou groupe Abélien[1].

Exemple 3.1.11. $(\mathbb{Z}; +)$ *est un groupe commutatif.*

1. **ABEL Niels Henrik :** Mathématicien norvégien (île de Finnoy 1802-Arendal 1829). Algébriste, il créa la théorie des fonctions elliptiques. Il est mort de tuberculose.

Exemple 3.1.12. *On définit l'opération $\star$ par :*

$$\forall x, y \in]-1,1[, \quad x \star y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(]-1,1[, \star)$ est un groupe Abélien.

1. *$\star$ est une loi de composition interne dans $]-1,1[$:*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in]-1,1[: |x| < 1 \wedge |y| < 1 &\iff |x||y| = |xy| < 1 \\ &\iff 0 < 1 + xy < 2. \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in]-1,1[: \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1 &\iff \frac{|x+y|}{|1+xy|} < 1 \\ &\iff |x+y| < |1+xy| \\ &\iff |x+y| < 1+xy \quad \text{car} \quad 1+xy > 0 \\ &\iff -(1+xy) < x+y < 1+xy \\ &\iff \begin{cases} x+y-1-xy < 0 \\ x+y+1+xy > 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x(1-y)+y-1 < 0 \\ x(1+y)+y+1 > 0 \end{cases} \\ &\iff (*) \begin{cases} (x-1)(1-y) < 0 \\ (x+1)(1+y) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Comme $-1 < x, y < 1$, alors

$$(1-y > 0) \wedge (x-1 < 0) \; et \; (1+y > 0) \wedge (x+1 > 0),$$

   donc

$$[(1-y)(x-1) < 0] \; et \; [(1+y)(x+1) > 0],$$

   d'où on déduit que $(*)$ est vraie pour tous $x, y \in]-1,1[$, et par suite :

$$\forall x, y \in]-1,1[: |x \star y| = \left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1,$$

   ce qui montre que $\star$ est une loi de composition interne dans $]-1,1[$.

2. *$\star$ est commutative : d'après la commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ on a :*

$$\forall x, y \in]-1,1[: x \star y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y \star x,$$

   ce qui montre que $\star$ est commutative.

3. $\star$ *est associative : soient* $x, y, z \in]-1,1[$, *alors*

$$(x \star y) \star z = \frac{(x\star y)+z}{1+(x\star y)z} = \frac{\dfrac{x+y}{1+xy}+z}{1+\dfrac{x+y}{1+xy}z} = \frac{(x+y)+z(1+xy)}{(1+xy)+(x+y)z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$

et on a :

$$x \star (y \star z) = \frac{x+(y\star z)}{1+x(y\star z)} = \frac{x+\dfrac{y+z}{1+yz}}{1+x\dfrac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1+yz)+(y+z)}{(1+yz)+x(y+z)} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$

en comparant les deux expressions on obtient :

$$\forall x, y, z \in]-1,1[, \quad (x\star y)\star z = x \star (y \star z)$$

d'où on déduit que $\star$ *est associative.*

4. $\star$ *admet un élément neutre : soit* $e \in \mathbb{R}$, *alors,*

$$e \text{ élément neutre de } \star \Longleftrightarrow \forall x \in]-1,1[, \quad e\star x = x \star e = x,$$

comme $\star$ *est commutative et*

$$\begin{aligned} x \star e = x &\Longleftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \\ &\Longleftrightarrow x+e = x+x^2e \\ &\Longleftrightarrow e(1-x^2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow e = 0 \vee x = \pm 1. \end{aligned}$$

On déduit que $e = 0 \in]-1,1[$ *est l'élément neutre de* $\star$.

5. *Tout élément de* $]-1,1[$ *est symétrisable : soient* $x \in]-1,1[$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *alors,*

$$\begin{aligned} x \star x' = e &\Longleftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x + x' = 0 \\ &\Longleftrightarrow x' = -x, \end{aligned}$$

comme $\star$ *est commutative on déduit que tout élément* $x \in]-1,1[$ *est symétrisable et son symétrique est* $x' = -x \in]-1,1[$.

De **1.**, **2.**, **3.**, **4.** *et* **5.** *on déduit que* $(]-1,1[, \star)$ *est un groupe Abélien.*

3.1.3 Sous groupes

Définition 3.1.5. *Soit $(G,\star)$ un groupe, on appelle sous groupe de $(G,\star)$ tout sous ensemble non vide G' de G tel que la restriction de $\star$ à G' en fait un groupe.*

Comme $\star$ est associative dans G alors sa restriction à G' est aussi associative, par suite $G' \neq \emptyset$ est un sous groupe de $(G,\star)$ s'il est stable par rapport à $\star$ et à l'opération inversion, c'est à dire :

▷ $G' \neq \emptyset$.
▷ $\forall a, b \in G', a \star b \in G'$.
▷ $\forall a \in G', a^{-1} \in G'$.

Il est claire que si $(G,\star)$ est un groupe, alors $(G',\star)$ est un sous groupe de G.

Propriétés 3.1.1. *Soient $(G,\star)$ un groupe et $G' \subset G$, alors*

$$G' \text{ est un sous groupe de } G \Longleftrightarrow \begin{cases} G' \neq \emptyset, \\ \forall a, b \in G', \quad a \star b^{-1} \in G'. \end{cases}$$

Preuve :

1. Soit $(G',\star)$ un sous groupe de $(G,\star)$, alors :
   (i) $\star$ a un élément neutre dans G', donc $G' \neq \emptyset$.
   (ii) Soient $a, b \in G'$, comme G' muni de la restriction de $\star$ est un groupe alors b^{-1} existe dans G' et comme G' est stable par rapport à $\star$ on déduit que $a \star b^{-1} \in G'$.
2. Inversement, soit G' un sous ensemble de G tel que : $\begin{cases} G' \neq \emptyset, \\ \forall a, b \in G', \quad a \star b^{-1} \in G'. \end{cases}$
   Montrons que G' muni de la restriction de $\star$ est un groupe.
   (i) Comme $G' \neq \emptyset$ alors il existe $a \in G'$ et d'après la deuxième hypothèse :
   $$e = a \star a^{-1} \in G',$$
   ce qui montre que la restriction de $\star$ admet un élément neutre e dans G'.
   (ii) Soit $a \in G'$, comme $e \in G'$ alors d'après la deuxième hypothèse on aura :
   $$a^{-1} = e \star a^{-1} \in G',$$
   ce qui montre que tout élément a de G' est inversible dans G' par rapport à la restriction de $\star$ à G'.
   (iii) La restriction de $\star$ à G' est une loi de composition interne, car pour tous a et b dans G', d'après (ii) on a : $b^{-1} \in G'$ et en utilisant la deuxième hypothèse on déduit que :
   $$a \star b = a \star (b^{-1})^{-1} \in G'.$$
   (iv) La restriction de $\star$ à G' est associative, car $\star$ est associative dans G.

Exemple 3.1.13. *Soit $(G,\star)$ un groupe et $G' = \{x \in G; \forall y \in G, x \star y = y \star x\}$, alors G' est un sous groupe de G.*

En effet,

(*i*) *Si* e *est l'élément neutre de* $\star$, *alors* $e \in G'$ *car :*

$$\forall x \in G, \quad e \star x = x \star e = x.$$

(*ii*) *Soient* $x, y \in G'$, *alors ;*

$$\begin{aligned}
\forall z \in G, \qquad (x \star y^{-1}) \star z &= (x \star y^{-1}) \star (z^{-1})^{-1} \\
&= x \star (y^{-1} \star (z^{-1})^{-1}) \quad \text{car } \star \text{ est associative} \\
&= x \star (z^{-1} \star y)^{-1} \\
&= x \star (y \star z^{-1})^{-1} \quad \text{car } y \in G' \\
&= x \star ((z^{-1})^{-1} \star y^{-1}) \\
&= x \star (z \star y^{-1}) \\
&= (x \star z) \star y^{-1} \quad \text{car } \star \text{ est associative} \\
&= (z \star x) \star y^{-1} \quad \text{car } x \in G' \\
&= z \star (x \star y^{-1}) \quad \text{car } \star \text{ est associative,}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $x \star y^{-1} \in G'$.

De (*i*) *et* (*ii*) *on déduit que* G' *est un sous groupe de* G.

3.1.4 Goupes Quotients

Soient $(G, \star)$ un groupe et G' un sous groupe de G. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par :

$$\forall a, b \in G, a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a \star b^{-1} \in G'$$

Propriétés 3.1.2. $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence sur* G.

Preuve :

(*i*) $\mathcal{R}$ est reflexive, car : $\forall x \in G$, comme G' est un sous groupe de G, alors $x \star x^{-1} = e \in G'$, donc

$$\forall x \in G, x\mathcal{R}x.$$

(*ii*) $\mathcal{R}$ est symétrique, car : $\forall x, y \in G$,

$$\begin{aligned}
x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x \star y^{-1} \in G' \\
&\Longrightarrow (x \star y^{-1})^{-1} \in G' \\
&\Longrightarrow y \star x^{-1} \in G' \\
&\Longrightarrow y\mathcal{R}x.
\end{aligned}$$

(*iii*) $\mathcal{R}$ est transitive, car : $\forall x, yz \in G$,

$$\begin{aligned}
x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z &\Longleftrightarrow x \star y^{-1} \in G' \wedge y \star z^{-1} \in G' \\
&\Longrightarrow (x \star y^{-1}) \star (y \star z^{-1}) \in G' \quad \text{car } G' \text{ est un sous groupe} \\
&\Longrightarrow x \star (y^{-1} \star y) \star z^{-1} \in G' \quad \text{car } \star \text{ est associative} \\
&\Longrightarrow x \star z^{-1} \in G' \\
&\Longrightarrow x\mathcal{R}z.
\end{aligned}$$

De (i), (ii) et (iii) on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

On note $G/_{G'}$ l'ensemble quotient $G/_{\mathcal{R}}$. On définit sur $G/_{G'} \times G/_{G'}$ l'opération $\oplus$ par :

$$\forall (\dot{a}, \dot{b}) \in G/_{G'} \times G/_{G'}, \dot{a} \oplus \dot{b} = \overset{\cdot}{\overline{a \star b}}.$$

3.1.5 Homomorphismes de Groupes

On considère $(G, \bullet)$ et $(H, \star)$ deux groupes, avec e et e' leurs éléments neutres respectifs.

Définition 3.1.6. *Une application $f : G \longrightarrow H$ est appelée homomorphisme de groupes de G dans H si :*

$$\forall a, b \in G, \quad f(a \bullet b) = f(a) \star f(b).$$

- ▷ *Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme (de groupes) de G sur H. On dit alors que G est isomorphe à H, ou que G et H sont isomorphes.*
- ▷ *Si $G = H$, on dit que f est un endomorphisme de G, et si de plus f est bijective, on dit que f est un automorphisme (de groupe) de G.*

Exemple 3.1.14. *Etant donnes les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, alors les applications :*

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^*, \cdot) \\ x & \longmapsto & f(x) = \exp x \end{array} \qquad et \qquad \begin{array}{rcl} g : (\mathbb{R}^*, \cdot) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +) \\ x & \longmapsto & g(x) = \ln |x| \end{array}$$

sont des homomorphismes.

Définition 3.1.7. *Soit $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de groupes. On appelle noyau de f l'ensemble :*

$$\ker f = f^{-1}(e') = \{a \in G; f(a) = e'\}.$$

et l'image de f l'ensemble :

$$\mathfrak{Im} f = f(G) = \{f(a), a \in G\}.$$

Propriétés 3.1.3. *Soit $f : G \longrightarrow H$ un homomorphisme de groupes, alors,*

(i) $f(e) = e'$,

(ii) $\forall a \in G, f^{-1}(a) = f(a^{-1})$.

3.1.6 Structure d'anneau

Définition 3.1.8. *On appelle anneau, tout ensemble A muni de deux lois de composition internes $\star$ et $\triangle$ telles que :*

1. *$(A, \star)$ est un groupe abélien (on notera 0 ou 0_A l'élément neutre de $\star$),*
2. *$\triangle$ est associative et distributive par rapport à $\star$.*

Si de plus $\triangle$ est commutative, on dit que $(A, \star, \triangle)$ est un anneau commutatif.

Définition 3.1.9. *On appelle sous anneau de $(A, \star, \triangle)$, tout sous ensemble A' de A tel que muni des restrictions des lois $\star$ et $\triangle$ est anneau.*
Si A est un anneau unitaire et $1_A \in A'$, on dit que A' est sous anneau unitaire.

Exemple 3.1.15. *Soit $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ l'anneau des nombres réels. On définit deux nouvelles loi $\star$ et $\bullet$ sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad x \star y = x + y - 2, \qquad x \bullet y = xy - 2x - 2y + 6.$$

1. *Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe Abélien :*
   (a) *Montrons que $\star$ est commutative, $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \star y = y \star x$.*
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$,
   $$x \star y = x + y - 2 = y + x - 2 = y \star x.$$
   Alors $\star$ est une loi commutative.
   (b) *Montrons que $\star$ est associative, $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.*
   Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:
   $$(x \star y) \star z = (x + y - 2) \star z = (x + y - 2) + z - 2 = x + y + z - 4,$$
   et
   $$x \star (y \star z) = x \star (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 = x + y + z - 4.$$
   Par identification des deux résultats, on obtient, $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.
   Alors $\star$ est une loi associative.
   (c) *Montrons que $\star$ admet un élément neutre, $\exists e \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \star e = e \star x = x$.*
   Puisque $\star$ est commutative alors il suffit de montrer que : $x \star e = x$, en effet,
   $$x \star e = x \Leftrightarrow x + e - 2 = x \Leftrightarrow e - 2 = 0 \Leftrightarrow e = 2.$$
   (d) *Montrons que chaque élément $x \in \mathbb{R}$ admet un élément symétrique noté x^{-1} tel que : $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e = 2$. Puisque $\star$ est commutative alors il suffit de résoudre l'équation :*
   $$x \star x^{-1} = 2 \Leftrightarrow x + x^{-1} - 2 = 2 \Leftrightarrow x + x^{-1} = 4 \Leftrightarrow x^{-1} = 4 - x,$$
   qui est bien défini car $x \in \mathbb{R}$.
   Conclusion : $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif.
2. *Montrer que $(\mathbb{R}, \star, \bullet)$ est un anneau commutatif :*
   (a) *Montrons que $\bullet$ est commutative, $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \bullet y = y \bullet x$.*
   Soient $x, y \in \mathbb{R}$,
   $$x \bullet y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y - 2x + 6 = y \bullet x.$$
   Alors $\bullet$ est une loi commutative.

(*b*) *Montrons que* $\bullet$ *est associative,* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x \bullet y) \bullet z &= (xy - 2x - 2y + 6) \bullet z \\ &= (xy - 2x - 2y + 6)z - 2(xy - 2x - 2y + 6) - 2z + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2xy - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x \bullet (y \bullet z) &= x \bullet (yz - 2y - 2z + 6) \\ &= x(yz - 2y - 2z + 6) - 2x - 2(yz - 2y - 2z + 6) + 6 \\ &= xyz - 2xz - 2xy - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6. \end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$.
Alors $\bullet$ *est une loi associative.*

(*c*) *Montrons que* $\bullet$ *est distributive par rapport à* $\star$,

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \bullet (y \star z) = (x \bullet y) \star (x \bullet z) \text{ et } (y \star z) \bullet x = (y \bullet x) \star (z \bullet x).$$

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x \bullet (y \star z) = x \bullet (y + z - 2) = xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10,$$

et

$$\begin{aligned} (x \bullet y) \star (x \bullet z) &= (xy - 2x - 2y + 6) \star (xz - 2x - 2z + 6) \\ &= xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10. \end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $x \bullet (y \star z) = (x \bullet y) \star (x \bullet z)$.
Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (y \star z) \bullet x &= (y + z - 2) \bullet x \\ &= (y + z - 2)x - 2(y + z - 2) - 2x + 6 \\ &= xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (y \bullet x) \star (z \bullet x) &= (yx - 2y - 2x + 6) \star (zx - 2z - 2x + 6) \\ &= (yx - 2y - 2x + 6) + (zx - 2z - 2x + 6) - 2 \\ &= yx + zx - 4x - 2y - 2z + 10 \\ &= xy + xz - 4x - 2y - 2z + 10. \end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $(y \star z) \bullet x = (y \bullet x) \star (z \bullet x)$.
Alors, $\bullet$ *est distributive par rapport à* $\star$.

Conclusion : $(\mathbb{R}, \star, \bullet)$ *est un anneau commutatif.*

3.1.7 Corps

Définition 3.1.10. *Un élément $x \in \mathbb{K}$ est inversible par rapport à la loi $\triangle$ s'il existe un élément $y \in \mathbb{K}$ telle que :*

$$x \triangle y = y \triangle x = e'; \quad (e' \text{ est l'élément neutre par rapport à } \triangle).$$

Définition 3.1.11. *On dit que $(\mathbb{K}, *, \triangle)$ est un corps si :*

1. *$(\mathbb{K}, *, \triangle)$ est un anneau.*
2. *Tout élément distinct de e (opération $*$) est inversible pour la loi $\triangle$.*

Si de plus $\triangle$ est commutative, on parle de corps commutatif.

Exemple 3.1.16. *$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif, mais $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.*

3.2 Espace vectoriel

La structure d'espace vectoriel intervient dans une grande partie des mathématiques : elle réalise un lien fondamental entre l'algèbre et la géométrie. On l'utilisera en algèbre linéaire, en analyse et en géométrie.

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désignera un corps commutatif, en pratique $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.1. *On appelle $\mathbb{K}-$espace vectoriel tout ensemble E muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ \alpha, x & \longmapsto & \alpha \times x. \end{array}$$

telles que :

(*i*) $(E, +)$ *est un groupe Abélien,*
(*ii*) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$
(*iii*) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$
(*iv*) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,$
(*v*) $\forall x \in E, 1x = x.$

Remarque 3.2.1.

- *On abrègera espace vectoriel en e.v et $\mathbb{K}-$espace vectoriel en $\mathbb{K}-$e.v.*
- *Les éléments d'un $\mathbb{K}-$e.v seront appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés scalaires.*

Exemple 3.2.1. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, E = \mathbb{C}$, alors $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un $\mathbb{R}-$e.v car :*

- ▷ *$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe Abélien.*
- ▷ *Comme $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif, alors $\times$ est distributive par rapport à l'addition, on déduit que les conditions (ii) et (iii) sont vraie pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

▷ *De même, comme* $(\mathbb{C},+,\times)$ *est un corps, alors* $\times$ *est associative. Donc,*

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C},\forall x\in\mathbb{C},(\alpha\times\beta)\times x=\alpha(\beta\times x),$$

d'où

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{C},(\alpha\times\beta)\times x=\alpha(\beta\times x),\qquad car\ \ \mathbb{R}\subset\mathbb{C}.$$

Enfin, on a : $\forall x\in\mathbb{C},1\times x=x$.

Proposition 3.2.1. *(Règles de calcul)*
Soit $(E,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel. Alors ;*
- $\forall\vec{x}\in E,0_{\mathbb{K}}\cdot\vec{x}=\vec{0}$; ($\vec{0}$ *est l'élément neutre de* $+$ *dans* $(E,+)$).
- $\forall\alpha\in\mathbb{K},\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$.
- $\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall\vec{x}\in E,\alpha(-\vec{x})=(-\alpha)\cdot\vec{x}=-(\alpha\cdot\vec{x})$.
- $\alpha x=0_{\mathbb{K}}\Leftrightarrow\alpha=0$ *ou* $\vec{x}=\vec{0}$.

3.2.1 Sous espace vectoriel

Définition 3.2.2. *Soit* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel et* F *un sous ensemble de* E*. On dit que* F *est un sous-espace vectoriel de* E *si et seulement si :*
(i) $F\neq\emptyset$, $(\vec{0}\in F)$,
(ii) $\forall x,y\in F,x+y\in F$,
(iii) $\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall x\in F,\alpha\cdot x\in F$.

Exemple 3.2.2. *Soit* $E=\mathbb{R}^3,F=\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x+y=1\}$ *n'est pas un sous espace vectoriel de* E *car* $\vec{0}=(0,0,0)=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ *donc* $\vec{0}\in F\Leftrightarrow x+y=1\Leftrightarrow 0+0=1$*, impossible d'où on déduit que* $\vec{0}\notin F$.

Exemple 3.2.3. *Soit* $E=\mathbb{R}^3,F=\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x+2y-z=0\}$ *est un sous espace vectoriel de* E*. En effet :*
▷ *soit* $\vec{0}=(0,0,0)$ *et* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*, alors* $x+2y-z=0+2\cdot 0-0=0$*, donc* $\vec{0}\in F$.
▷ *soient* $\vec{x}=(x,y,z)$ *et* $\vec{y}=(x',y',z')\in F$*, alors,* $\vec{x}+\vec{y}=(x+x',y+y',z+z')=(u,v,w)$ *et*

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}\in F\Rightarrow x+2y-z=0\\ \vec{y}\in F\Rightarrow x'+2y'-z'=0\end{array}\right\}\begin{array}{ll}\Longrightarrow & (x+x')+2(y+y')-(z+z')=0\\ \Longrightarrow & u+2v-w=0\\ \Longrightarrow & \vec{x}+\vec{y}\in F.\end{array}$$

▷ *soit* $\alpha\in\mathbb{R}$*, alors,*

$$\vec{x}\in F\Rightarrow\alpha(x+2y-z)=0\Rightarrow\alpha\vec{x}\in F.$$

D'où, on déduit que F *est un sous espace de* $\mathbb{R}^3$.

3.2.2 Combinaisons linéaires

Définition 3.2.3. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $B = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}\} \subset E$. On appelle combinaisons linéaires de $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}$, tout vecteur $\vec{x} = \alpha_1\vec{x_1} + \alpha_2\vec{x_2} + \cdots + \alpha_n\vec{x_n}$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.*

Exemple 3.2.4. *Dans $\mathbb{R}^3$, on a : $(1, 2, 3) = (1, 0, 0)+2(0, 1, 0)+3(0, 0, 1) = \vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}$, alors $\vec{x} = (1, 2, 3)$ est une combinaisons linéaires de $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.*
$\vec{y} = (5, 2, -4) = 5\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - 4\vec{e_3}$ est une combinaisons linéaires de $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.
D'une façon générale $\forall \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \vec{x} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$, donc tout élément de $\mathbb{R}^3$ est combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e_1} = (1, 0, 0), \vec{e_2} = (0, 1, 0), \vec{e_3} = (0, 0, 1)$.

3.2.3 Intersection et la réunion de deux sous-espaces

Proposition 3.2.2. *Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F, F' deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap F'$ est un sous-espace vectoriel de E, en effet;*

(i) Soit $\vec{0} \in E$, comme F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $\vec{0} \in F$ et $\vec{0} \in F'$, d'où, on déduit que $\vec{0} = F \cap F'$.

(ii) Soient $\vec{x}, \vec{y} \in F \cap F'$, alors $(\vec{x}, \vec{y} \in F)$ et $(\vec{x}, \vec{y} \in F')$. Comme F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $[(\vec{x} + \vec{y}) \in F]$ et $[(\vec{x} + \vec{y}) \in F']$, d'où, on déduit que $(\vec{x} + \vec{y}) \in F \cap F'$.

(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\vec{x} \in F \cap F'$ donc $\vec{x} \in F$ et $\vec{x} \in F'$. Comme F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $\alpha\vec{x} \in F$ et $\alpha\vec{x} \in F']$, d'où, on déduit que $\alpha\vec{x} \in F \cap F'$.

D'aprés (i), (ii) et (iii), $F \cap F'$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 3.2.2. *La réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas toujours un sous-espace vectoriel.*
Par **contre exemple :** *soit $E = \mathbb{R}^2, F = \{(x, y), x = 0\}, F' = \{(x, y), y = 0\}$. On a F et F' sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ mais $F \cup F'$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car :*

$$F \cup F' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \vee y = 0\};$$

$\vec{x} = (1.0), \vec{y} = (0, 1) \in F \cup F'$ et $\vec{x} + \vec{y} = (1, 1) \notin F \cup F'$. D'où, on déduit que $F \cup F'$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3.2.4 Somme de sous-espaces. Somme directe :

- ▷ **Somme de sous-espaces :** si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors la somme de F et G est défine par :

$$F + G = \{x \in E \text{ tel que } \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} \text{ avec } \vec{x_1} \in F \text{ et } \vec{x_2} \in G\}.$$

- ▷ **Somme directe :** on dit que la somme $F + G$ est directe, ou encore que F et G sont supplémentaires vis-à-vis de E, si la décomposition $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$ d'un élément quelconque de E en somme de deux éléments de F et G est unique. On note : $E = F \oplus G$, autrement on a :

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ \wedge \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple 3.2.5. *Dans $\mathbb{R}^3$ les deux sous-espaces vectoriels suivants :*

$$F = \{(x, y, z); x = y = z\} \quad et \quad G = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$$

sont supplémentaires. En effet :

1. *On a : $\mathbb{R}^3 = F + G$ car :*
   (i) *$F \subset \mathbb{R}^3$ et $G \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow F + G \subset \mathbb{R}^3$.*
   (ii) *$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} = (x, y, z) = (z, z, z) + (x - z, y - z, 0) \in F + G \Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset F + G$.*
2. (i) *On $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont deux sous-espaces vectoriels de $E \Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow \{0_E\} \subset F \cap G$.*
   (ii) *si $\vec{x} \in F \cap G \Rightarrow \vec{x} \in F$ et $\vec{x} \in G \Rightarrow \vec{x} = (x, x, x)$ et $\vec{x} = (x, y, 0) \Rightarrow x = y$ et $x = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, 0, 0) \Rightarrow F \cap G \subset \{0_E\}$.*

3.2.5 Famille de vecteurs d'un espace vectoriel

▷ **Familles liées :** une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est liée ou linéairement dépendants s'il existe $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E$.

Exemple 3.2.6. *Dans $E = \mathbb{R}_2[x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égale à 2 et à coefficients réels), les fonctions f_1, f_2, f_3 définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :*

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = x^2 - 1, \quad f_3(x) = x^2$$

sont liées. En effet : soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{\alpha_3}{2}$, il y a donc une infinité de solutions $(-\frac{\alpha_3}{2}, -\frac{\alpha_3}{2}, \alpha_3)$ avec α_3 réel arbitraire par exemple : $(1, 1, -2)$.

▷ **Familles libres :** une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est libre ou linéairement indépendants si pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Exemple 3.2.7. *Dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs* $x_1 = (0,1,3), x_2 = (2,0,-1)$ *et* $x_3 = (2,0,1)$ *sont libres car :*

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \implies \begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$
$$\implies \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

▷ **Famille génératrice :** une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est dite génératrice de E ou engendre E si tout élément x de E est combinaison linéaire de $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ c'est à dire :

$$\forall x \in E, \exists \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K} \textit{ tels que } x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Exemple 3.2.8. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *les deux vecteurs* $x_1 = (2,3)$ *et* $x_2 = (-1,5)$ *est une famille génératrice car :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\begin{aligned} (x,y) &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1(2,3) + \alpha_2(-1,5) = (2\alpha_1 - \alpha_2, 3\alpha_1 + 5\alpha_2) \\ &\implies \begin{cases} x = 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ y = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{5x+y}{13} \\ \alpha_2 = \dfrac{-3x+2y}{13} \end{cases} \end{aligned}$$

donc (α_1, α_2) *existe pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

▷ **Base :** une famille de vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple 3.2.9. $B_0 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *est un base de* $\mathbb{R}^3$, *en effet :*
(i) B_0 *est libre car :* $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$.
(ii) B_0 *est génératrice de* $\mathbb{R}^3$ *car :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

3.2.6 Dimension d'un espace vectoriel

La dimension finie n d'un espace vectoriel E est le nombre maximum de vecteurs que peut renfemer un système libre extrait de E ; et on note $\dim E = n$; par convention on pose : $\dim(\{0_E\}) = 0$. Autrement dit la dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de vecteurs qui forment la base de E. Si le nombre des éléments d'un système libre de E n'est pas majoré, on dit que E est de dimension infinie.

Remarque 3.2.3. *Si* F *est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel* E *de dimension* n *alors :*

$$F \subset E \implies \dim F \leq \dim E.$$

Exemple 3.2.10. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

3.2.7 Rang d'un système de vecteurs

On appelle rang d'un système de p vecteurs $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ de E avec $\dim E = n$, la dimension r du sous-espace vectoriel $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$. En d'autres termes, r est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter un système libre extrait du système donné.

3.2.8 Sous-espace engendré par un ensemble

Définition 3.2.4. *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On définis le sous-espace vectoriel engendré par un ensemble A, le plus petit sous-espace vectoriel contenant l'ensemble A. On le note : $S(A)$.*

Exemple 3.2.11. *Si A est un sous-espace vectoriel de E alors : $S(A) = A, S(\emptyset) = \{0_E\}$.*

3.3 Application linéaire

Définition 3.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est une application linéaire si et seulement si :*
▷ $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y),$
▷ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\alpha x) = \alpha f(x).$
Ceci est équivalent à dire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Exemple 3.3.1.

- *L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$g(x, y) = |x - y|$$

  n'est pas linéaire car $g(X + Y) \neq g(X) + g(Y)$.
- *L'application de $\mathbb{R}$ dans lui même définie par : $f(x) = x + 4$ n'est pas linéaire car $f(x + y) = x + y + 4 \neq f(x) + f(y)$.*
- *L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

  est une application linéaire car :
  ▷ $\forall (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, *on a :*

$$\begin{aligned} f[(x, y, z) + (x', y', z')] &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= (x + x' - y - y', y + y' + 2z + 2z') \\ &= (x - y, y + 2z) + (x' - y', y' + 2z') \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z'). \end{aligned}$$

▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} f[\alpha(x,y,z)] &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y, \alpha y + 2\alpha z) \\ &= \alpha(x-y, y+2z) = \alpha f(x,y,z). \end{aligned}$$

- *L'application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^4$ *définie par :*

$$f(x,y) = (x-2y, 2x, y, y-x)$$

est une application linéaire car :
▷ $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$\begin{aligned} f[(x,y)+(x',y')] &= f(x+x', y+y') \\ &= (x+x'-2y-2y', 2x+2x', y+y', y+y'-x-x') \\ &= (x-2y, 2x, y, y-x) + (x'-2y', 2x', y', y'-x') \\ &= f(x,y) + f(x',y'). \end{aligned}$$

▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} f[\alpha(x,y)] &= f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - 2\alpha y, 2\alpha x, \alpha y, \alpha y - \alpha x) \\ &= \alpha(x-2y, 2x, y, y-x) = \alpha f(x,y). \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1.
∗ *Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.*
∗ *Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est dite* **endomorphisme**.
∗ *Si f est bijective et linéaire de E dans F, elle est dite* **isomorphisme**.
∗ *Si f est un endomorphisme bijectif alors c'est un* **automorphisme**.

3.3.1 Noyau d'une application linéaire

Définition 3.3.2. *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors pour trouver le noyau de f, on résout l'équation $f(x) = 0_F$. Ainsi,*

$$\ker f = \{x \in E, f(x) = 0_F\},$$

qui est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 3.3.2. *L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(x,y,z) = (x-y, y+2z)$$

est une application linéaire. Alors le noyau de f est :

$$\ker f = \{u \in \mathbb{R}^3, f(u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$u \in \ker f \Longleftrightarrow f(u) = (0,0) \Longleftrightarrow (x-y, y+2z) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-\frac{y}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow u=y\left(1,1,-\frac{1}{2}\right),$$

et donc $\ker f$ *est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur* $\left(1,1,-\frac{1}{2}\right)$ *noté :*

$$\ker f = Vect\left\{\left(1,1,-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

3.3.2 Image d'une application linéaire

Définition 3.3.3. *Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'image de f est l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f. Ainsi,*

$$Imf = \{f(u), u \in E\}.$$

De plus si $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors $Imf = Vect\{f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\}$ c'està dire le sous-espace engendré par les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)$.

Exemple 3.3.3. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $3, B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par :*

$$f(\vec{i}) = -\vec{i}+\vec{k}, \quad f(\vec{j}) = \vec{j}+\vec{k}, \quad f(\vec{k}) = \vec{i}+\vec{j}.$$

Alors l'image de f est définie comme suit :

$$\begin{aligned} Imf &= Vect\{f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})\} \qquad \textit{mais } f(\vec{k}) = f(\vec{j}) - f(\vec{i}) \\ &= Vect\{f(\vec{i}), f(\vec{j})\} \\ &= \{x(-\vec{i}+\vec{k}) + y(\vec{j}+\vec{k}); x,y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

3.3.3 Rang d'une application linéaire

Définition 3.3.4. *Soient E,F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le rang d'une application linéaire est la dimension de l'iimage de cette application. On a :*

$$rgf = \dim(Imf),$$

de plus si E est de dimension finie, on a le théorème du rang :

$$\dim E = rgf + \dim(\ker f).$$

Exemple 3.3.4. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x,y) = (4x - 2y, 6x-3y)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} Imf &= \{f(x,y); x,y \in \mathbb{R}\} = \{(4x-2y, 6x-3y); x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x-y)(2,3); x,y \in \mathbb{R}\} = \in \alpha(2,3); x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(2,3)\}, \end{aligned}$$

le vecteur $(2,3)$ est une base de Imf et par suite $rgf = 1$.

3.3.4 Injectivité d'une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Notons que f est injective si et seulement si :

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \textit{ou bien } f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Mais pour les applications linéaires, il suffit de montrer que : $\ker f = \{0_E\}$. En fait on a :

$$f \textit{ est injective} \Longleftrightarrow \ker f = \{0_E\}.$$

Exemple 3.3.5. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est injective car :

$$\begin{aligned} u = (x, y) \in \ker f &\Longleftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \\ &\Longleftrightarrow (x - y, x + y) = (0, 0) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = 0. \end{aligned}$$

donc $\ker f = \{(0, 0)\}$ et par suite f est injective.

3.3.5 Injectivité d'une application linéaire

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dira que f est un projecteur, si l'on a : $f \circ f = f$ ou bien : Imf et $\ker f$ sont supplémentaires et que : $\forall x \in Imf, f(x) = x$, on dira que f est la projection sur Imf parallèlement à $\ker f$.

Exemple 3.3.6. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} (f \circ f)(u) &= f(f(u)) = f(x, y) = f(4x - 2y, 6x - 3y) \\ &= (4x - 2y, 6x - 3y) = f(u), \end{aligned}$$

et par suite f est un projecteur.

3.3.6 Symétrie

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dira que f est une symétrie, si l'on a : $f \circ f = Id_E$ ou bien : $\ker(f - Id_E)$ et $\ker(f + Id_E)$ sont supplémentaires. On dira que f est la symétrie de E par rapport à $\ker(f - Id_E)$ et parallèlement à $\ker(f + Id_E)$.

Exemple 3.3.7. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par : $f(x, y) = (y, x)$. Alors on a :*

$$(f \circ f)(u) = f(f(u)) = f(y, x) = (x, y),$$

et par suite f est une symétrie.

Exercice 1. *Sur* $\mathbb{R}-\{1\}$ *on définit la loi* $\star$ *comme suit :* $x\star y = x+y-xy$.
(i) *Vérifier que* $\star$ *est une loi de composition interne.*
(ii) *Montrer que* $(\mathbb{R}-\{1\};\star)$ *est un groupe commutatif.*
(iii) *Résoudre l'équation :* $2\star 3\star x\star 5 = 5\star 3$.

Solution :

(i) Vérifier que $\star$ est une loi de composition interne : montrons que : $\forall x,y\in\mathbb{R}-\{1\}$, alors : $x\star y\in\mathbb{R}-\{1\}\Longleftrightarrow x+y-xy\neq 1$.

$$\begin{aligned} Si\ \ x+y-xy=1 &\Longrightarrow x+y-xy-1=0\\ &\Longrightarrow (1-x)(y-1)=0\\ &\Longrightarrow x=1\vee y=1,\quad contradiction.\end{aligned}$$

Alors $\star$ est une loi de composition interne.
(ii) Montrer que $(\mathbb{R}-\{1\};\star)$ est un groupe commutatif :
(a) Montrons que $\star$ est commutative, $\forall x,y\in\mathbb{R}-\{1\}$: $x\star y=y\star x$.
Soient $x,y\in\mathbb{R}-\{1\}$,

$$x\star y = x+y-xy = y+x-yx = y\star x.$$

Alors $\star$ est une loi commutative.
(b) Montrons que $\star$ est associative, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}-\{1\}$: $(x\star y)\star z = x\star(y\star z)$.
Soient $x,y,z\in\mathbb{R}-\{1\}$:

$$\begin{aligned}(x\star y)\star z=(x+y-xy)\star z &= (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}x\star(y\star z)=x\star(y+z-yz) &= x+(y+z-yz)-x(y+z-yz)\\ &= x+y+z-xy-xz-yz+xyz.\end{aligned}$$

Par identification des deux résultats, on obtient, $(x\star y)\star z = x\star(y\star z)$.
Alors $\star$ est une loi associative.
(c) Montrons que $\star$ admet un élément neutre, $\exists e\in\mathbb{R}-\{1\},\forall x\in\mathbb{R}-\{1\}, x\star e = e\star x = x$. Puisque $\star$ est commutative alors il suffit de montrer que : $x\star e = x$, en effet,

$$x\star e = x \Leftrightarrow x+e-xe=x \Leftrightarrow e(1-x)=0 \Leftrightarrow e=0\ car\ x\in\mathbb{R}-\{1\}.$$

(d) Montrons que chaque élément $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ admet un élément symétrique noté x^{-1} tel que : $x\star x^{-1}=x^{-1}\star x=e=0$. Puisque $\star$ est commutative alors il suffit de résoudre l'équation :

$$x\star x^{-1}=0\Leftrightarrow x+x^{-1}-xx^{-1}=0\Leftrightarrow x+x^{-1}(1-x)=0\Leftrightarrow x^{-1}=\frac{x}{x-1},$$

qui est bien défini car $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
Conclusion : $(\mathbb{R} - \{1\}; \star)$ est un groupe commutatif.

(*iii*) Résoudre l'équation : $2\star3\star x\star5 = 5\star3$, (utilisant la notion de l'élément symétrie) :

$$\begin{aligned} 2\star3\star x\star5 = 5\star3 &\iff x = \frac{3}{2}\star2\star5\star3\star\frac{5}{4} \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Exercice 2. *Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants :*

$$E_1 = \{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R}\} \quad et \quad E_2 = \{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3; c \in \mathbb{R}\}$$

avec E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. *Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.*
3. *En déduire* $\dim E_1$ *et* $\dim E_2$.
4. *Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.*
5. *Déduire si la somme est directe ou non.*

Solution :

$$E_1 = \{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R}\} \quad et \quad E_2 = \{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3; c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:
   (*i*) $(0,0,0) \in E_1 \Longrightarrow E_1 \neq \emptyset$.
   (*ii*) $\forall x_1, x_2 \in E_1 \Longrightarrow x_1 + x_2 \in E_1$?
   Soient $x_1, x_2 \in E_1 \Longrightarrow x_1 = (a_1+b_1, b_1-3a_1, a_1)$ et $x_2 = (a_2+b_2, b_2-3a_2, a_2)$
   $\Longrightarrow x_1 + x_2 = [(a_1+a_2)+(b_1+b_2), (b_1+b_2)-3(a_1+a_2), (a_1+a_2)] \in E_1$.
   (*iii*) $\forall x \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha x \in E_1$?
   Soient $x \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha x = (a+b, b-3a, a) \Longrightarrow \alpha x = (\alpha a + \alpha b, \alpha b - 3\alpha a, \alpha a) \in E_1$.
   Conclusion : E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2 :
   ▷ $x \in E_1 \Rightarrow x = (a+b, b-3a, a) = a(1,-3,1)+b(1,1,0) \Rightarrow B_1 = \{(1,-3,1); (1,1,0)\}$ engendre E_1, mais :

   $$\alpha(1,-3,1) + \beta(1,1,0) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = \beta = 0,$$

   alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairement indépendants. Ce qui implique que $B_1 = \{(1,-3,1); (1,1,0)\}$ est une base de E_1.
   ▷ $x \in E_2 \Longrightarrow x = (c, -2c, c) = c(1,-2,1)$ alors $B_2 = \{(1,-2,1);\}$ engendre E_2, mais :

   $$\alpha(1,-2,1) = (0,0,0) \Longrightarrow \alpha = 0.$$

   Ce qui implique que $B_2 = \{(1,-2,1)\}$ est une base de E_2.

3. En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$:

$$\dim E_1 = 2 \quad et \quad \dim E_2 = 1.$$

4. Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$:
   $*$ $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Longrightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.
   $*$ Soit $u \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow u = (x, y, z) = (a + b, b - 3a, a) + (c, -2c, c)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = a + b + c \\ y = b - 3a - 2c \\ z = a + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = x - y - 3z \\ b = x - z \\ c = -x + y + 4z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow u &= (x, y, z) = (2x - y - 4z, -2x + 3y + 8z, x - y - 3z) \\ &+ (-x + y + 4z, 2x - 2y - 8z, -x + y + 4z) \\ &\in E_1 + E_2. \end{aligned}$$

   D'où : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.
5. En éduire que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$:
   - $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_2 = 1$ donc $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ ou bien on a : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.
   - $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$ car E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels. De plus si : $u \in E_1 \cap E_2 \Longrightarrow u = (a + b, b - 3a, a)$ et $u = (c, -2c, c)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b = c \\ b - 3a = -2c \\ a = c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\} \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\} \end{cases}$$

   La somme est directe $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 3. *Soient :*

$E_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = c\}$, $E_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c = 0\}$ *et* $E_3 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}$.

1. *Montrer que :* $E_i; i = 1, 2, 3$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Montrer que :* $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ *et* $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.
3. *Dans quel cas la somme est directe.*

Solution :

$E_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = c\}$, $E_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a+b+c = 0\}$ *et* $E_3 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrons que : $E_i; i = 1, 2, 3$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$: pour E_1 par exemple :

(i) $(0,0,0) \in E_1 \Longrightarrow E_1 \neq \emptyset$.
(ii) $\forall u_1, u_2 \in E_1 \Longrightarrow u_1 + u_2 \in E_1$?
Soient $u_1, u_2 \in E_1 \Longrightarrow u_1 = (x_1, y_1, x_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, x_2)$
$\Longrightarrow u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, x_1 + x_2 \in E_1$.
(iii) $\forall u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha u \in E_1$?
Soient $u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \alpha u = (a, b, a) \Longrightarrow \alpha u = (\alpha a, \alpha b, \alpha a) \in E_1$.
Alors E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
De même pour les deux dernier cas.

2. Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$:
▷ Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? On a : $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Longrightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$. Si $u \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow u = (x, y, z) = (\alpha, \beta, \alpha) + (\tau, \eta, -\tau - \eta)$

$$= (\alpha + \tau, \beta + \eta, \alpha - \tau - \eta) \Longrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \tau \\ y = \beta + \eta \\ z = \alpha - \tau - \eta \end{cases}$$

Il suffit de prendre par exemple :

$$\beta = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x+y+z}{2} \\ \tau = \frac{x-y-z}{2} \\ \eta = y. \end{cases}$$

D'où

$$u = (x, y, z) = \left(\frac{x+y+z}{2}, 0, \frac{x+y+z}{2}\right) + \left(\frac{x-y-z}{2}, y, -\frac{x-y-z}{2} - y\right)$$

$$\in E_1 + E_2.$$

▷ Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$? On a : $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_3 \subset \mathbb{R}^3 \Longrightarrow E_1 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$. Si $u \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow u = (x, y, z) = (x, y, x) + (0, 0, z - x) \in E_1 + E_3$.
▷ Montrons que : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$? On a : $E_3 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Longrightarrow E_2 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$. Si $u \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow u = (x, y, z) = (x, y, -x - y) + (0, 0, x + y + z) \in E_2 + E_3$.
D'où $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2, \mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

3. Dans quel cas la somme est directe :
(i) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$?
   - $(0,0,0) \in E_1 \cap E_2$.
   - Si $u \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow \begin{cases} u \in E_1 \\ et \\ u \in E_2 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} (a, b, a) \\ (a, b, -a - b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -a - b \\ b = -2a. \end{cases}$
   Donc par exemple $(1, -2, 1) \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow E_1 \cap E_2 \neq \{(0,0,0)\}$, ce qui implique que la somme n'est pas directe.

(ii) Il suffit de vérifier si on a $E_2 \cap E_3 = \{(0,0,0)\}$?
   - $(0,0,0) \in E_2 \cap E_3$.

- Si $u \in E_2 \cap E_3 \Rightarrow \begin{cases} u \in E_2 \\ et \\ u \in E_3 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} (a, b, -a-b) \\ (0, 0, c) \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$

$$\Rightarrow u = (0,0,0) \Rightarrow E_2 \cap E_3 = \{(0,0,0)\},$$

ce qui implique que la somme est pas directe.

(iii) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_3 = \{(0,0,0)\}$?

- $(0,0,0) \in E_1 \cap E_3$
- Si $u \in E_1 \cap E_3 \Rightarrow \begin{cases} u \in E_1 \\ et \\ u \in E_3 \end{cases} \Rightarrow u = \begin{cases} (a, b, a) \\ (0, 0, c) \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$

$$\Rightarrow u = (0,0,0) \Rightarrow E_1 \cap E_3 = \{(0,0,0)\},$$

ce qui implique que la somme est pas directe.

Exercice 4.

Soit l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (3x, x+2y-2z, 3x-3y+3z) \end{array}.$$

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *Déterminer une base de* $\ker f$.
3. *Calculer* $\dim(\ker f)$ *et* $\dim(Imf)$.
4. *L'application f est-elle injective ?*

Solution : soit l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (3x, x+2y-2z, 3x-3y+3z) \end{array}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire :

   ▷ $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f[(x,y,z)+(x',y',z')] & = & f(x+x', y+y', z+z') \\ & = & (x+x'-y-y', y+y'+z+z') \\ & = & (x-y, y+z) + (x'-y', y'+z') \\ & = & f(x,y,z) + f(x',y',z'). \end{array}$$

   ▷ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f[\alpha(x,y,z)] & = & f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y, \alpha y + \alpha z) \\ & = & \alpha(x-y, y+z) = \alpha f(x,y,z). \end{array}$$

   Alors, f est une application linéaire.

2. Déterminer une base de $\ker f$:

$$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}.$$

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = (0,0,0) &\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y \\ z = -y, \end{cases} \end{aligned}$$

   donc $(x,y,z) = (y,y,-y) = y(1,1,-1)$ avec $y \in \mathbb{R}$.

   Puisque $(1,1,-1) \in \ker f$, alors, $\{(1,1,-1)\}$ est une partie génératrice de $\ker f$ et comme $(1,1,-1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors, $\{(1,1,-1)\}$ est libre et par suite est une base de $\ker f$.

3. Calculer $\dim(\ker f)$ et $\dim(Imf)$:

   ▷ $\dim(\ker f) = 1$.
   ▷ On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \dim(Imf)$ donc $\dim(Imf) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2$.

4. L'application f est-elle injective ?

   f n'est pas injective car $(\ker f) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

Bibliographie

[1] Balabne, M. Duflo, M. Frish, D. Guegan, Géométrie, 2 ème année du 1 er cycle classes préparatoires, Vuibert Université.

[2] Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boshet, Exercices d'algèbre, 1 er cycle scientifique préparation aux grandes écoles 2 ème année, Armand Colin-Collection U.

[3] N. Faddeev, I. Sominski, Recueil d'exercices d'algèbre supérieure, Edition de Moscou.

[4] Rivaud, Algèbre : Classes préparatoires et Université Tome 1, Exercices avec solutions, Vuibert.