الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

République Algérienne Démocratique et Populaire

و البـحـث الـعـلـمـي وزارة الـتـعـلـيـم الـعـالي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université MUSTAPHA Stambouli

Mascara

جامعة مصطفى اسطمبولي

معسكر

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

THESE de DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse harmonique

Intitulée

Applications harmoniques généralisées

***Présentée par* :** Mlle. MERDJI Bouchra

Le 06/03/2024

Devant le jury :

Président	BENMERIEM Khaled	Professeur	Université de Mascara
Examinateur	OUAKKAS Seddik	Professeur	Université de Saida
Examinateur	ZAGANE Abderrahim	MCA	Université de Relizane
Examinateur	ZEGGA Kaddour	MCA	Université de Mascara
Encadreur	MOHAMMED CHERIF Ahmed	Professeur	Université de Mascara

Année Universitaire : 2023/2024

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier **Pr. MOHAMMED CHERIF Ahmed** pour avoir accepté de superviser ma thèse. Son expertise dans le domaine a été une source d'inspiration et d'apprentissage précieuse pour moi. Sa disponibilité et sa volonté de partager ses connaissances ont grandement contribué à mon développement académique et professionnel.

Je tiens également à exprimer ma gratitude et mes vifs remerciements envers **Pr. BENMERIEM Khaled** pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury de ce travail, ainsi qu'aux **Pr. OUAKKAS Seddik** , **Dr. ZAGANE Abderrahim** et **Dr. ZEGGA Kaddour** d'avoir bien voulu examiner ce travail.

Je souhaiterais également remercier tous les professeurs et mes collègues du département de mathématiques de l'université Mustapha Stambouli qui ont contribué à mon cheminement académique. Leurs enseignements, leurs discussions et leur soutien logistique ont joué un rôle essentiel dans ma formation et ma croissance en tant que chercheuse.

Dédicace

Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

À mon très cher papa et ma très chère maman,

Grâce à vous j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité. Je voudrais vous remercier pour votre amour, votre générosité et votre compréhension. Votre soutien fut une lumière dans tout mon parcours. Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime et le respect que j'ai toujours eu pour vous, les prunelles de mes yeux.

À mes très chers frères Chergui et Mohammed Zakaria.

À Mes amies, mes proches et à toute ma famille.

TABLE DES MATIÈRES

PUBLICATIONS

Publications

1. B. Merdji and A. Mohammed Cherif : *On The Generalized of p-harmonic Maps*, International Electronic Journal of Geometry. **15** (2), 183–191 (2022).

2. B. Merdji and A. Mohammed Cherif : *New types of Metrics Deformations and Applications to p-Biharmonic Maps*, Journal of The Indian Mathematical Society. **90** (3-4), 387-400 (2023).

3. B. Merdji and A. Mohammed Cherif : *p-Biharmonic Maps between warped product manifolds*, Mediterranean Journal of Mathematics, **21** (1), 1-14 (2024).

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés des applications harmoniques généralisées en faisant l'extension des applications p-harmoniques (resp. p-biharmoniques). Les résultats obtenus sont :

- L'extension de la définition des applications p-harmoniques entre deux variétés Riemanniennes.

- La déformation d'une métrique Riemannienne g sur une variété Riemannienne M pour obtenir une nouvelle métrique Riemannienne notée $\widetilde{g}$ qui est donnée par $g = \widetilde{g} - df \otimes df$, tels que $f \in C^{\infty}(M)$ et $\| \operatorname{grad}^M f\|^2 < 1$, la déformation d'une métrique Riemannienne du codomaine d'une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ et voir son effet sur la p-biharmonicité de φ.

- L'étude des applications p-harmoniques entre les variétés produit tordu.

Mots-clés : Applications harmoniques, applications $p(\cdot)$-harmoniques, théorème de type Liouville.

INTRODUCTION

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une fonction différentiable :

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

est dite harmonique si :

$$\triangle f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0.$$

En 1964 J. Eells, J. H. Sampson, L. Lemaire ([22]) ont étudié les applications harmoniques dans un cas général sur une variété Riemannienne. Nous allons commencer par les applications harmoniques; Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimension m et n respectivement, D un domaine compact de M et $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞. On définit l'énergie de φ sur D par :

$$E(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 \, v_g,$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert Schmidt de la différentielle $d\varphi$ et v_g l'élément volume Riemannien de M. L'application φ est dite harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle d'énergie E, cette application est en faite une solution de l'équation d'Euler-Lagrange (voir [4]) :

$$\tau(\varphi) = \operatorname{trace}_g \nabla d\varphi = \sum_i \{\nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\} = 0,$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée sur (M, g), ∇^φ est la connexion de pull-back sur $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$, ∇^M est la connexion de Levi-Civita sur (M, g) et $\nabla d\varphi$ est la deuxième forme fondamentale de φ. Localement,

$$\tau(\varphi) = \sum_{i,j,\gamma} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_j} \, {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ \varphi - \sum_k \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial x_k} \, {}^M\Gamma^k_{ij} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma} \circ \varphi \right) = 0.$$

Ensuite, en 1986 G.Y Jiang ([30]) a introduit le concept des applications bi-harmoniques comme point critique de la fonctionnelle bi-énergie :

$$E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g,$$

et démontre que toute application biharmonique est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\tau_2(\varphi) = -\operatorname{trace}_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) = 0,$$

$\tau_2(\varphi)$ est dit champ de bitension de l'application φ.
La fonctionnelle de p-énergie d'une application φ est définie par :

$$E_p(\varphi; D) = \frac{1}{p}\int_D |d\varphi|^p v_g, \tag{0.0.1}$$

pour tout domaine compact D de M. Soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de φ de classe C^∞ et à support dans D. Alors

$$\frac{d}{dt}E_p(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(\tau_p(\varphi), v)v_g, \tag{0.0.2}$$

où $v = \dfrac{\partial\varphi_t}{\partial t}\Big|_{t=0}$ désigne le champ de vecteurs de variation de φ.
Les applications p-harmoniques sont des points critiques de la fonctionnelle p-énergie (0.0.1), et elles vérifient une équation aux dérivées partielles plus générale impliquant le p-Laplacian dit le champs de p-tension et qui est défini par :

$$\begin{aligned}\tau_p(\varphi) &= \operatorname{div}^M(|d\varphi|^{p-2}d\varphi) &(0.0.3)\\ &= |d\varphi|^{p-2}\tau(\varphi) + (p-2)|d\varphi|^{p-3}d\varphi(\operatorname{grad}^M|d\varphi|), &(0.0.4)\end{aligned}$$

pour toute $\{e_1\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g) i.e., une application φ est dite p-harmonique si et seulement si (voir [2, 15, 25])

$$|d\varphi|^{p-2}\tau(\varphi) + (p-2)|d\varphi|^{p-3}d\varphi(\operatorname{grad}^M|d\varphi|) = 0. \tag{0.0.5}$$

Une généralisation des applicatons p-harmoniques est donnée par l'intégration de $|\tau_p(\varphi)|^2$. Plus précisément, la fonctionnelle de p-biénergie de φ est définie par :

$$E_{2,p}(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_p(\varphi)|^2 v^g. \tag{0.0.6}$$

On dit que φ est une application p-biharmonique si et seulement si elle est point critique de la fonctionnelle p-biénergie i.e., si elle vérifie l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle (0.0.6), c'est-à-dire (voir [42])

$$\begin{aligned}\tau_{2,p}(\varphi) \;=\; & -|d\varphi|^{p-2}\operatorname{trace}_g R^N(\tau_p(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^\varphi|d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi\tau_p(\varphi)\\ & -(p-2)\operatorname{trace}_g \nabla < \nabla^\varphi\tau_p(\varphi), d\varphi > |d\varphi|^{p-4}d\varphi = 0. &(0.0.7)\end{aligned}$$

Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g), on a :

$$\operatorname{trace}_g R^N(\tau_p(\varphi), d\varphi)d\varphi = \sum_i R^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),$$

$$\operatorname{trace}_g \nabla^\varphi|d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi\tau_p(\varphi) = \sum_i\left(\nabla^\varphi_{e_i}|d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi_{e_i}\tau_p(\varphi) - |d\varphi|^{p-2}\nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau_p(\varphi)\right),$$

$$< \nabla^\varphi\tau_p(\varphi), d\varphi >= \sum_i h\left(\nabla^\varphi_{e_i}\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i)\right),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}_g \nabla < \nabla^{\varphi}\tau_p(\varphi), d\varphi > |d\varphi|^{p-4} d\varphi &= \sum_i \Big(\nabla^{\varphi}_{e_i} < \nabla^{\varphi}\tau_p(\varphi), d\varphi > |d\varphi|^{p-4} d\varphi(e_i) \\ &\quad - < \nabla^{\varphi}\tau_p(\varphi), d\varphi > |d\varphi|^{p-4} d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)\Big).\end{aligned}$$

Les applications p-harmoniques (resp. p-biharmoniques) se réduisent aux applications harmoniques (resp. biharmoniques) lorsque $p = 2$.

Toute application p-harmonique est p-biharmonique par définition. A. Mohammed Cherif a prouvé dans ([42]) que si (M, g) est une variété Riemannienne compact, orientable et sans bord, et si (N, h) est une variété Riemannienne à courbure sectionnelle négative alors, toute application p-biharmonique définie de (M, g) dans (N, h) est p-harmonique.

Le but de cette thèse est d'étudier les applications harmoniques généralisées en faisant l'extension de la définition des applications p-harmoniques (resp. p-biharmoniques) et caractériser le théorème de type Liouville pour les applications harmoniques généralisées. La thèse se compose de cinq chapitres :

- ◇ **Premier chapitre** : est consacré aux rappels des outils de la géométrie Riemanniennes en incluant de divers définitions notamment la dérivée covariante, la métrique Riemannienne, la connexion de Levi-Civita, les tenseurs de courbure, les géodésiques, les opérateurs tels que le gradient, la divergence, la Hessienne et le Laplacien, et les variétés produit tordu. A la fin du chapitre, nous introduisons un nouveau type de déformation d'une métrique Riemannienne.

- ◇ **Deuxième chapitre** : on donne rappel sur les applications harmoniques (resp. biharmoniques) en présentant la première variation de la fonctionnelle d'énergie (resp. la fonctionnelle de biénergie).

- ◇ **Troisième chapitre** : contient des résultats originaux concernant l'extension de la définition des applications p-harmoniques ; après avoir fait les calculs variationnels, on arrive à cractériser les applications $p(\cdot)$-harmoniques (resp. $p(\cdot)$-biharmoniques) entre deux variétés Riemanniennes (M, g) et (N, h), et les applications $p(\cdot)$-harmoniques stables (p est une fonction de classe C^∞ sur M et $p(x) \geq 2$), avec la construction de quelques exemples sur ce type d'applications.

- ◇ **Quatrième chapitre** : les résultats obtenus dans ce chapitre sont originaux où on suppose qu'on a une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes et on étudie l'effet de la déformation de la métrique Riemannienne h sur sa p-biharmonicité.

- ◇ **Cinquième chapitre** : l'harmonicité et la biharmonicité de l'inclusion $\mathbf{i}_{x_0}$: $(N, h) \to (M \times_{f^2} N, G_f)$ et la projection $\pi : (M \times_{f^2} N, G_f) \to (M, g)$ ont été déjà étudiées par Adina Balmus [7]. Dans ce chapitre, un résultat plus général est obtenu en recherchant les conditions suffisantes pour que l'inclusion canonique et la projection soient p-biharmoniques propres. De plus, les conditions suffisantes pour que le graphe d'une application $\psi : (M, g) \to (N, h)$ soit p-harmonique (resp. p-biharmonique) sont également recherchées.

.

CHAPITRE 1

RAPPELS DE GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE

Dans ce chapitre, on fait rappel à quelques notions de base de la géométrie Riemannienne y compris la connexion linéaire, le tenseur de torsion, la métrique Riemannienne, les courbures, les géodésiques sur une variété Riemannienne et la variété produit tordu, et à la fin de ce chapitre, on va voir la construction d'une nouvelle classe de déformation d'une métrique Riemannienne g notée $\widetilde{g}$ sur une variété Riemannienne M, ensuite on calcule la connexion de Levi-Civita, le tenseur de courbure et la courbure de Ricci relativement à cette déformation de la métrique Riemannienne g.
Les références principales sont :[4, 11, 13, 16, 21, 27, 28, 31, 34, 38, 41, 46, 52]

1.1 Connexion linéaire

Définition 1.1.1. *Une connexion linéaire sur une variété différentiable M est une application :*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

tels que pour tout $Z \in \Gamma(TM)$ et toute $f \in C^\infty(M)$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

(1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$ *;*

(2) $\nabla_X fY = Y(f)X + f\nabla_X Y$ *;*

(3) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ *;*

(4) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$*.*

Ici, $\Gamma(TM)$ désigne l'ensemble des champs de vecteurs sur la variété M et $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonction de classe C^∞ sur M.

Exemple 1.1.1. *Soient $M = \mathbb{R}^n$, $Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$ et $v \in T_p\mathbb{R}^n$, pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ on définit la dérivée directionnelle Euclidienne de $Y = \sum_i Y^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, dans la direction de*

v par :

$$\nabla_v Y = v(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p + \ldots + v(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p.$$

Où pour tout i, $v(Y^i)$ est le résultat de l'application du vecteur v à la fonction Y^i :

$$v(Y^i) = v^1\frac{\partial Y^i}{\partial x^1}(p) + \ldots + v^n\frac{\partial Y^i}{\partial x^n}(p).$$

Si $X \in \Gamma(T\mathbb{R}^n)$, on obtient un nouveau champ de vecteurs $\nabla_X Y$ en évaluant $\nabla_{X_p} Y$ en chaque point :

$$\nabla_{X_p} Y = X_p(Y^1)\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_p + \ldots + X_p(Y^n)\frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_p.$$

1.2 Tenseur de torsion

Définition 1.2.1. *[31] Soit ∇ une connexion linéaire sur une variété différentiable M. L'application :*

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), \quad T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

*est dite tenseur de torsion de la connexion ∇. Le crochet $[X,Y]$ est appelé le crochet de **Lie** défini par :*

$$[X,Y] = X(Y) - Y(X), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$$

$[\,,\,]$ *est $\mathbb{R}$-linéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi :*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0,$$

pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Remarque 1.2.1.

(1) T est un tenseur de type $(1,2)$;

(2) $T(X,Y) = -T(Y,X)$ pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ (T est antisymétrique) ;

(3) Pour tout $x \in M$, le tenseur de torsion T induit une application bilinéaire vectorielle

$$\begin{array}{cccc} T_x & : & T_xM \times T_xM & \to & T_xM \\ & & (v,w) & \mapsto & T_x(v,w) = (\nabla_X Y)_x - (\nabla_Y X)_x - [X,Y]_x \end{array}$$

où $X, Y \in \Gamma(TM)$, $X_x = v$ et $Y_x = w$.

Définition 1.2.2. *La connexion linéaire d'un champ de tenseurs A de type $(0,r)$ le long d'un champ de vecteurs X est défini par ses valeurs sur les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_r$ par la formule :*

$$(\nabla_X A)(X_1, \ldots, X_r) = X\Big(A(X_1, \ldots, X_r)\Big) - \sum_l A(X_1, \ldots, \nabla_X X_l, \ldots, X_r).$$

1.3 Métrique Riemannienne

Définition 1.3.1 (Variété Riemannienne)**.** *Un couple (M, g), où M est une variété différentiable et g est un tenseur métrique sur M, est dit **variété Riemannienne**.*

Proposition 1.3.1. *Toute variété M différentiable et paracompacte admet une métrique Riemannienne.*

Définition 1.3.2. *Un tenseur métrique ou bien une métrique Riemannienne sur une variété différentiable M est un tenseur $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ de type $(0, 2)$ sur M, bilinéaire et pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $g(X, Y) = g(Y, X)$;

(ii) $g(X, X) \geq 0$;

(iii) $g(X, X)(x) > 0, \quad \forall X_x \in T_xM - \{0\}$.

Définition 1.3.3. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, (U, φ) une carte locale de (M, g) avec les champs de base associés $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^m$ tels que $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ et $(x^1, \ldots, x^n)$ est un système de coordonnées locales relativement à (U, φ). Donc g s'écrit localement dans U comme :*

$$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

Les $n \times n$ fonctions $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ sont appelées les composantes du tenseur métrique g.

Exemple 1.3.1 (La métrique Euclidienne)**.** *La métrique Euclidienne est la métrique Riemannienne $\bar{g} = \langle\, ,\, \rangle_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la valeur en chaque $x \in \mathbb{R}^n$ est le produit scalaire dans $T_x\mathbb{R}^n$ sous l'identification naturelle $T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ i.e $\forall v, w \in T_x\mathbb{R}^n$ écrits dans les coordonnées standards $(x^1, \ldots, x^n)$ comme suit :*

$$v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x, \quad w = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x$$

on a :

$$\bar{g}(v, w) = \sum_i v^i w^i.$$

1.3.1 Image inverse d'une métrique Riemannienne

Définition 1.3.4. *Soient (N, h) une variété Riemannienne, de dimension n, M une variété différentiable, de dimension m et $f : M \to N$ une immersion. Alors*

$$f^*h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$$

définie pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $x \in M$ par :

$$f^*h(X, Y)_x = h_{f(x)}(d_xf(X_x), d_xf(Y_x)),$$

est une métrique sur M, appelée métrique inverse.

Expression locale de la métrique inverse f^*h :
Soient (U, φ) une carte de M de base locale associée $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^m$ et (V, ψ) une carte de N de base associée $\{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\}_{\alpha=1}^n$, alors

$$\begin{aligned}(f^*h)_{ij} &= (f^*h)(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ &= h(df(\frac{\partial}{\partial x^i}), df(\frac{\partial}{\partial x^j})) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} h(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}) \circ f \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}(h_{\alpha\beta} \circ f). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

1.3.2 La métrique Riemannienne induite

Définition 1.3.5. *Soient (N, h) une variété Riemannienne, $M \subset N$ est une sous-variété de (N, h). On définit la métrique Riemannienne g sur la variété différentiable M par :*

$$g(X, Y) = h(df(X), df(Y)), \tag{1.3.2}$$

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$. g est applée ***la métrique Riemannienne induite*** *par h.*

Exemple 1.3.2 (Le tore dans $\mathbb{R}^3$)**.** *Sur un repère $(Oxyz)$, soit le tore paramétré par*

$$\begin{array}{llll} f & : & [-b\pi, b\pi] \times [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (r, \theta) & \mapsto & f(r,\theta) = R(r)(\cos\theta, \sin\theta, 0) + Z(r)(0,0,1) \end{array}$$

avec

$$\begin{cases} R(r) &= a + b\cos(\frac{r}{b}) \\ Z(r) &= b\sin(\frac{r}{b}) \end{cases}$$

- *Lorsque θ est fixé, r décrit le petit cercle (section du tube) ;*

- *Lorque r est fixé, θ décrit le grand cercle (de hauteur z constante).*

Pour trouver la métrique Riemannienne du tore dans $\mathbb{R}^3$, on calcule d'abord la différentielle de f.
En effet ;

$$\begin{aligned} Df(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)R'(r) & -\sin(\theta)R(r) \\ \sin(\theta)R'(r) & \cos(\theta)R(r) \\ Z'(r) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\frac{r}{b}) & -\sin(\theta)(a+b\cos(\frac{r}{b})) \\ -\sin(\theta)\sin(\frac{r}{b}) & \cos(\theta)(a+b\cos(\frac{r}{b})) \\ \cos(\frac{r}{b}) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'après (1.3.1) *et* (1.3.2)*, on trouve que la métrique Riemannienne induite sur le tore est donnée par :*

$$(g_{r,\theta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(r)^2 \end{pmatrix}$$

où, $(g_{r,\theta})$ est la matrice de la métrique Riemannienne dans la base canonique.

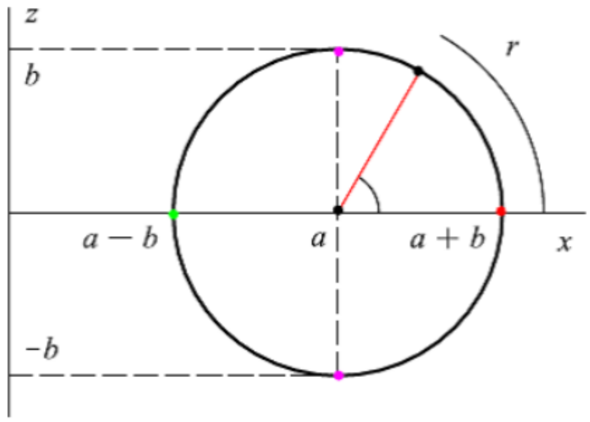

FIGURE 1.1 – Le tore vu en coupe : on fait tourner ce cercle autour de (Oz) pour obtenir le tore.

1.3.3 Construction élémentaire associée à une métrique Riemannienne

Définition 1.3.6. *Soit g une métrique Riemannienne sur une variété différentiable M, on définit l'application (dite "flat" ou "bémol") par :*

$$\begin{array}{rcccl} \flat & : & T_pM & \to & T_p^*M, \\ & & X_p & \mapsto & X_p^\flat \end{array}$$

tel que, $X_p^\flat(Y_p) = g(X_p, Y_p)$, $\forall Y_p \in T_pM$. Et son inverse par :

$$\begin{array}{rcccl} \natural & : & T_p^*M & \to & T_pM, \\ & & \alpha_p & \mapsto & \alpha_p^\natural \end{array}$$

tel que, $\alpha_p(Y_p) = g_p(\alpha_p^\natural, Y_p)$, $\forall Y_p \in T_pM$.

1.4 La connexion de Levi-Civita sur une variété Riemannienne

Théorème 1.4.1. *Une connexion linéaire sur une variété Riemannienne (M, g) est dite la connexion de Levi-Civita si pour tous champs de vecteurs X, Y et Z sur M, les conditions suivantes sont satisfaites :*

- $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z)$; *(∇ est compatible avec g, i.e., g est parallèle par rapport à ∇ qui est équivalent à $\nabla g \equiv 0$)*

- *Le tenseur de torsion T de la connexion ∇ est nul.*

Remarque 1.4.1. *La connexion de Levi-Civita ∇ est définie par la formule de Koszul suivante :*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = {} & X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) \\ & + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,(Y,Z)). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

Localement : Soit (U, φ) une carte locale de M avec les champs de base associée $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^m$, alors la connexion ∇ s'écrit dans U comme :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

où, les fonctions Γ_{ij}^k sont dit les symboles de Christoffel et sont données par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{kl}, \tag{1.4.2}$$

où, (g^{kl}) est l'inverse de la matrice associée à la métrique Riemannienne (g_{kl}).

Lemme 1.4.1. *[48] La connexion de Levi-Civita est sans-torsion si et seulement si* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Proposition 1.4.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. Pour tout point $p \in M$, dans les coordonnées normales au point $p \in M$, on a :*

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p = \delta_{ij} \quad et \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0.$$

Théorème 1.4.2 (Théorème fondamental de la géométrie Riemannienne [46])**.** *Toute variété Riemannienne M admet une unique connexion symétrique et compatible avec la métrique associée.*

1.5 Les courbures

1.5.1 Tenseur de courbure Riemannienne

Théorème 1.5.1. *[11] Soit (M, g) une variété Riemannienne, ∇ la connexion de Levi-Civita sur (M, g). Alors, le tenseur de courbure Riemannienne est défini par*

$$\mathrm{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Propriétès 1.5.1. *[11]* R *est un champ de tenseurs de type* $(1, 3)$ *qui vérifie les propriétés suivantes*

(1) $\mathrm{R}(X, Y)Z = -\mathrm{R}(Y, X)Z;$ *(l'antisymétrie)*

(2) $\mathrm{R}(X, Y)Z + \mathrm{R}(Y, Z)X + \mathrm{R}(Z, X)Y = 0;$ *(l'identité de Bianchi algébrique)*

(3) $g(\mathrm{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathrm{R}(X, Y)W, Z);$

(4) $g(\mathrm{R}(X, Y)Z, W) = g(\mathrm{R}(Z, W)X, Y);$

pour tous $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.5.1. *Soit (M,g) une variété Riemannienne, (U,φ) une carte locale de M. Alors le tenseur de courbure Riemannienne* R *s'exprime en fonction des symboles de Christoffel comme :*

$$\mathrm{R}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_l \mathrm{R}^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_l};$$

où

$$\mathrm{R}^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x_i} + \sum_m (\Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}) - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_j}. \tag{1.5.1}$$

1.5.2 Courbure sectionnelle

Définition 1.5.2. *Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension $m \geqslant 2$, α un 2-plan dans l'espace tangent T_xM, u et v deux vecteurs linéairement indépendants dans α. La courbure sectionnelle* Sect^M *de (M,g) dans la direction de α est donnée par :*

$$\mathrm{Sect}^M(\alpha) = \frac{g(\mathrm{R}(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}.$$

Définition 1.5.3. *Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension m. On dit que (M,g) est une variété à courbure constante s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in M$ et tout 2-plan α de T_xM, on a :*

$$\mathrm{Sect}^M(\alpha) = k.$$

(M,g) est dite un espace forme noté par $M(K)$.

1.5.3 Tenseur de Ricci

Définition 1.5.4. *Le tenseur de* Ricci *sur une variété Riemannienne (M,g) est un champ de tenseurs de type $(1,1)$ défini par :*

$$\mathrm{Ricci}(X) = \sum_i \mathrm{R}(X,e_i)e_i,$$

pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M,g).

1.5.4 Courbure de Ricci

Définition 1.5.5. *[11] Soit (M,g) une variété Riemannienne de dimension $m \geqslant 2$. La courbure de* Ricci *notée* Ric *sur (M,g) est définie par :*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = g(\mathrm{Ricci}(X),Y), \quad \forall X,Y \in \Gamma(TM).$$

Remarques 1.5.1.

- *La courbure de* Ricci *est un champ de tenseurs de type (0.2) ;*

- $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Ric}(Y,X)$, *pour tout $X,Y \in \Gamma(TM)$ (Ric est symétrique) ;*

- $g(\mathrm{Ricci}(X),Y) = \mathrm{Ric}(X,Y), \quad \forall X,Y \in \Gamma(TM)$;

- ***Localement ;*** *Si* (U, φ) *est une carte sur* M, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^m$ *les champs de base relativement à la carte* (U, φ), *alors la courbure de* Ricci *est donnée par :*

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_k \mathrm{R}_{kij}^k\,.$$

1.5.5 Courbure scalaire

Définition 1.5.6. *La courbure scalaire d'une variété Riemannienne* (M, g) *en un point* $x \in M$ *est la fonction définie par :*

$$\mathrm{S}(x) = \mathrm{trace}_g \,\mathrm{Ric} = \sum_{i,j} g(\mathrm{R}(e_i, e_j)e_j, e_j), \tag{1.5.2}$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ *est une base orthonormée dans* (M, g).
Localement, *la courbure scalaire est donnée par :*

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{i,j} g^{ij}\,\mathrm{R}_{ij}\,. \tag{1.5.3}$$

Proposition 1.5.1. *[48] Le tenseur de courbure d'un espace forme* $M(K)$ *est donné par :*

$$\mathrm{R}(X, Y)Z = k\{g(Z, Y)X - g(Z, Y)X\}, \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

Corollaire 1.5.1. *Soit* $M(K)$ *un espace forme de dimension* m. *Alors :*

- $\mathrm{Ricci}(X) = k(m-1)X$;

- $\mathrm{Ric}(X, Y) = k(m-1)g(X, Y)$;

- $S = km(m-1)$.

pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Définition 1.5.7 (Variété d'Einstein [27])**.** *Une variété Riemannienne* (M, g) *est dite une variété d'Einstein si sa courbure de* Ricci *est proportionnelle à la métrique Riemannienne* g, *i.e,*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \lambda\, g(X, Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si M *est une variété d'Einstein, on remarque que* $\mathrm{S} = m\lambda$.

Exemple 1.5.1. *Soit la sphère unité* $\mathbb{S}^2$ *représentée par la paramétrisation suivante :*

$$\begin{cases} x &= \sin\theta\cos\varphi \\ y &= \sin\theta\sin\varphi \\ z &= \cos\theta \end{cases}$$

pour tous $\theta \in (0, \pi)$ *et* $\varphi \in (0, 2\pi)$. *Pour la base* $\{u(\theta, \varphi), v(\theta, \varphi)\}$ *du plan tangent* $T_p\mathbb{S}^2$ *au point* $p = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ *où*

$$\begin{cases} u(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial\theta} = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \\ u(\theta, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial\varphi} = (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0). \end{cases}$$

on trouve que la métrique induite sur $\mathbb{S}^2$ *est donnée par :*

$$g_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

En utilisant la formule des symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita (1.4.2), *on trouve que les seules symboles de Christoffel non nuls sont :*

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} &= \frac{1}{2}\sum_l g^{2l}(\partial_1 g_{2l} + \partial_2 g_{1l} - \partial_l g_{12}) \\
&= \frac{1}{2} g^{22}\partial_1 g_{22} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2\theta\right) \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}\sum_l g^{1l}(\partial_2 g_{2l} + \partial_2 g_{2l} - \partial_l g_{22}) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_1 g_{22} \\
&= -\frac{\partial}{\theta}\sin^2\theta \\
&= -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule du tenseur de courbure Riemannienne (1.5.1), *les seules tenseurs de courbure Riemannienne non nuls sont :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^1_{212} &= \partial_2\Gamma^1_{12} - \partial_1\Gamma^1_{22} + \sum_m \Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{12} - \sum_m \Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{22} \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin\theta\cos\theta) + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{12} \\
&= -(-\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (-\sin\theta\cos\theta)\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= -\sin^2\theta, \\
\mathrm{R}^1_{221} &= \partial_1\Gamma^1_{22} - \partial_2\Gamma^1_{12} + \sum_m \Gamma^1_{1m}\Gamma^m_{22} - \sum_m \Gamma^1_{2m}\Gamma^m_{12} \\
&= -\mathrm{R}^1_{212} \\
&= \sin^2\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^2_{121} &= \partial_2\Gamma^2_{11} - \partial_1\Gamma^2_{21} + \sum_m \Gamma^2_{2m}\Gamma^m_{11} - \sum_m \Gamma^2_{1m}\Gamma^m_{21} \\
&= -\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} \\
&= -\frac{\partial}{\partial\theta}\cot\theta - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2} \\
&= \frac{1-\cos^2\theta}{2\sin^2\theta} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_{121}^{2} &= \partial_1 \Gamma_{21}^{2} - \partial_2 \Gamma_{11}^{2} + \sum_m \Gamma_{1m}^{2} \Gamma_{21}^{m} - \sum_m \Gamma_{2m}^{2} \Gamma_{11}^{m} = -\mathrm{R}_{112}^{2} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_{1221} &= \sum_{l=1}^{2} g_{l1}\, \mathrm{R}_{212}^{l} = g_{11}\, \mathrm{R}_{212}^{1} = -\sin^2\theta, \\
\mathrm{R}_{2121} &= \sum_{l=1}^{2} g_{l1}\, \mathrm{R}_{221}^{l} = g_{11}\, \mathrm{R}_{221}^{1} = \sin^2\theta, \\
\mathrm{R}_{1212} &= \sum_{l=1}^{2} g_{l2}\, \mathrm{R}_{112}^{l} = g_{22}\, \mathrm{R}_{112}^{2} = \sin^2\theta, \\
\mathrm{R}_{2112} &= \sum_{l=1}^{2} g_{l2}\, \mathrm{R}_{121}^{l} = g_{22}\, \mathrm{R}_{121}^{2} = -\sin^2\theta.
\end{aligned}
$$

De plus, la courbure sectionnelle $\mathrm{Sect}^{\mathbb{S}^2}$ *de* $\mathbb{S}^2$ *est donnée par :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sect}^{\mathbb{S}^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) &= \frac{g(\mathrm{R}(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi})\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta})}{<\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}><\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}> - <\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}>^2} \\
&= \frac{\mathrm{R}_{1212}}{<\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}><\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}> - <\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}>^2} \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

La courbure de Ricci *de* $\mathbb{S}^2$ *est donnée par :*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) &= \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \mathrm{Ric}_{12} \\
&= \sum_m \mathrm{R}_{12m}^{m} \\
&= \mathrm{R}_{121}^{1} + \mathrm{R}_{122}^{2} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= \mathrm{Ric}_{11} \\
&= \sum_m \mathrm{R}_{11m}^{m} \\
&= \mathrm{R}_{111}^{1} + \mathrm{R}_{112}^{1} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) &= \mathrm{Ric}_{22}\\ &= \sum_m \mathrm{R}^m_{22m}\\ &= \mathrm{R}^1_{221}+\mathrm{R}^2_{222}\\ &= \sin^2\theta.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de la courbure scalaire (1.5.3)*, on trouve que :*

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(p) &= \sum_{i,j} g^{ij}\,\mathrm{Ric}_{ij}\\ &= g^{11}\,\mathrm{Ric}_{11}+g^{12}\,\mathrm{Ric}_{12}+g^{21}\,\mathrm{Ric}_{21}+g^{22}\,\mathrm{Ric}_{22}\\ &= 1\cdot 1+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\sin^2\theta\\ &= 2.\end{aligned}$$

1.6 Les géodésiques sur les variétés Riemanniennes

Définition 1.6.1. *Si ∇ est une connexion linéaire sur une variété différentiable M, V est un champ de vecteurs le long d'une courbe $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$, alors la dérivée covariante de V le long de γ est un champ de vecteurs $\frac{DV}{dt}$ le long de γ défini par :*

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\dot\gamma(t)} Y$$

où Y est un champ de vecteurs dans M qui induit V i.e $V_t = Y_{\gamma(t)}$.

Définition 1.6.2. *Un champ de vecteurs V le long d'une courbe γ est dit un champ de vecteurs parallèle le long de γ si $\frac{DV}{dt} = 0$.*

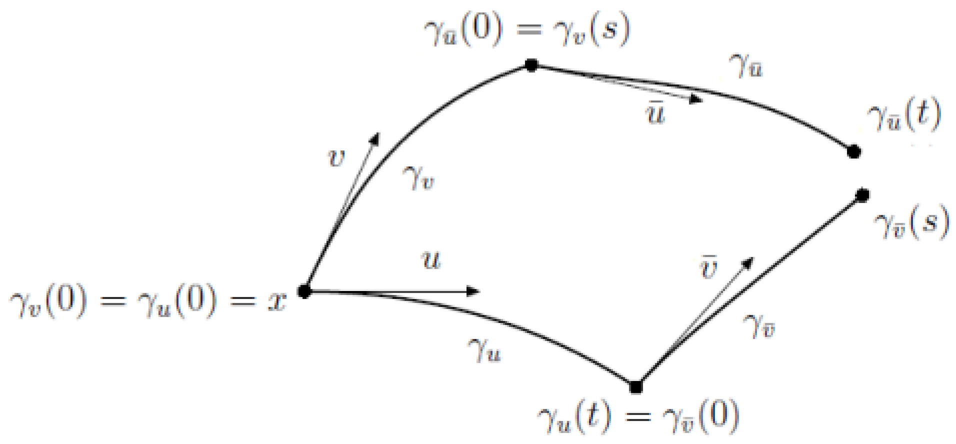

FIGURE 1.2 – Le transport parallèle.

Proposition 1.6.1 (Transport parallèle [41])**.** *Soient $\gamma : I \to M$, $t_0 \in I$ et $v \in T_{\gamma(t_0)}M$. Alors Il existe un unique champ de vecteurs Y_v parallèle le long de γ tel que $Y_v(t_0) = v$.*

Proposition 1.6.2. *[41] Soient (M, g) une variété Riemannienne et $\gamma : I \to (M, g)$, l'application*

$$P_{t_0}^{t_1}(\gamma) : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)M}, \quad v \mapsto Y_v(t_1)$$

est une application linéaire et inversible appelée le transport parallèle le long de γ.

Définition 1.6.3. *Si $\gamma : I = [a, b] \to M$ est une courbe différentiable dans une variété Riemannienne (M, g), alors la longueur de γ est définie par :*

$$l(\gamma) = \int_a^b \parallel \dot{\gamma}(t) \parallel dt = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt, \quad \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}.$$

Définition 1.6.4 (Courbe géodésique)**.** *Une courbe $\gamma : I \to M$ est dite géodésique si le champ de vecteurs tangent $\dot{\gamma}(t)$ est parallèle le long de γ.*
En fonction des coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n)$. L'équation $\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$ pour une géodésique est donnée par :

$$\frac{d^2 x_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, m. \tag{1.6.1}$$

Théorème 1.6.1. *[28] Soit (M, g) une variété Riemannienne. Si $p \in M$ et $v \in T_pM$, alors il existe un intervalle ouvert $I = (-\epsilon, \epsilon)$ et une géodésique unique $\gamma : \mathcal{I} \to M$ tels que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Définition 1.6.5. *Une géodésique $\gamma : I \to M$ dans une variété Riemannienne est dite maximale si elle ne peut pas être prolongée en une géodésique définie sur un intervalle J contenant I.*

Définition 1.6.6 (Variété géodésiquement complète)**.** *Une variété Riemannienne (M, g) est dite géodésiquement complète si pour tout point $(p, v) \in TM$, il existe une unique géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to M$ définie sur tout $\mathbb{R}$ tel que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Exemple 1.6.1. $(\mathbb{R}^n, <, >_{\mathbb{R}^n})$ *est une variété Riemannienne non-compacte et complète, les géodésiques de $(\mathbb{R}^n, <, >_{\mathbb{R}^n})$ sont de la forme :*

$$\gamma(t) = C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n,$$

qui sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.6.2. *Considérons le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que l'on paramètre de la manière suivante :*

$$\begin{cases} x &= \cos\theta \\ y &= \sin\theta \\ z &= z \end{cases}$$

Les géodésiques du cylindre sont toutes les courbes de la forme :

$$\gamma(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d).$$

Ce sont généralement les hélices.

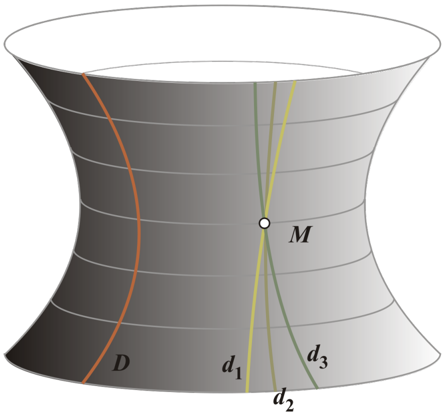

FIGURE 1.3 – Les droites (d_1), (d_2) et (d_3) qui passent par le point M et qui sont parallèles à (D) sont des géodésiques dans l'espace hyperbolique.

!ht

FIGURE 1.4 – Deux géodésiques dans le cylindre.

Exemple 1.6.3. *L'espace hyperbolique* $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n : y > 0\}$ *muni de la métrique Riemannienne* $g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ *est une variété Riemannienne complète. En effet ; d'après la formule de Koszul* (1.4.1)*, on trouve que :*

$$\begin{cases} 2\, g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) & = 0 \\ 2\, g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) & = \frac{2}{y^3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \, ;$$

$$\begin{cases} 2\, g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}) & = -\frac{2}{y^3} \\ 2\, g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} \, ;$$

$$\begin{cases} 2\, g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}) & = 0 \\ 2\, g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}) & = -\frac{2}{y^3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Déterminons les géodésiques de $(\mathbb{H}^2, g)$*. Soit* $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ *une courbe dans* $(\mathbb{H}^2, g)$*. Pour ceci, on utilise les équations des géodésiques :*

$$\frac{d^2 x_k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_j}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x''(t) - \frac{2x'(t)y'(t)}{y(t)} & = 0; \\ y''(t) + \frac{x'(t)^2 - y'(t)^2}{y(t)} & = 0. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x(t) & = C_1, \\ y(t) & = C_2 e^{C_3 t} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x(t) & = -\frac{2C_2}{C_1}\tanh\left(\frac{t+C_3}{2C_1}\right) + C_4, \\ y(t) & = \frac{\pm 4C_2 e^{\frac{t+C_3}{2C_1}}}{C_1\left(e^{\frac{t+C_3}{C_1}}+1\right)}. \end{cases}$$

Les géodésiques sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $(\mathbb{H}^2, g)$ est complète. Remarquons que la variété différentiable $\mathbb{H}^2$ munie de la métrique Riemannienne $g_0 = dx^2 + dy^2$ est non-complète (les géodésiques de $(\mathbb{H}^2, g_0)$ sont de la forme $x(t) = t$ et $y(t) = C_1 t + C_2$ qui ne sont pas définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ dans $\mathbb{H}^2$.

1.7 Les opérateurs sur une variété Riemannienne

1.7.1 L'opérateur gradient

Définition 1.7.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne, on définit l'opérateur* gradient *par*

$$\begin{array}{cccc} \text{grad} & : C^\infty(M) & \to & \Gamma(TM), \\ & f & \mapsto & \text{grad}\, f = (df)^\natural \end{array}$$

où df est la différentielle de la fonction f.

Définition 1.7.2. *[48] Soit (M, g) une variété Riemannienne.Pour tout champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on a :*

$$df(X) = X(f) = g(\text{grad}\, f, X). \tag{1.7.1}$$

Proposition 1.7.1 (La représentation locale du gradient [48])**.** *Si (U, φ) est une carte locale sur (M, g) avec les champs de base associée $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\}$, alors pour toute $f \in C^\infty(M)$ on a :*

$$(\text{grad}\, f) \mid_U = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.7.2}$$

Propriétès 1.7.1. *[21] Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour toutes $f, h \in C^\infty(M)$ on a :*

1. $\text{grad}(f + h) = \text{grad}\, f + \text{grad}\, h$ *;*

2. $(\text{grad}\, fh) = h\, \text{grad}\, f + f\, \text{grad}\, h$ *;*

3. $(\text{grad}\, f)(h) = (\text{grad}\, h)(f)$*.*

1.7.2 L'opérateur de divergence

a) **La divergence d'un champ de vecteurs**

Soit $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs sur une variété Riemannienne (M, g), on a :

$$\begin{array}{rcccl} \nabla X & : & \Gamma(TM) & \to & \Gamma(TM), \\ & & Z & \mapsto & \nabla_Z X \end{array}$$

est une application $C^\infty(M)$-linéaire. (∇X est un tenseur de type $(1,1)$).
Si $x \in M$, alors :

$$\begin{array}{rcccl} (\nabla X)_x & : & T_xM & \to & T_xM, \\ & & v & \mapsto & (\nabla_v X)_x \end{array}$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 1.7.3. *Soit (M, g) une variété Riemannienne. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$, notée $\operatorname{div} X$ est une fonction sur M définie par*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{trace}_g(\nabla X).$$

En coordonnées locales, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_i dx^i\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X\Big) \\ &= \sum_{i,j} g^{ij} g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} X, \frac{\partial}{\partial x_j}\Big). \end{aligned}$$

Si $\{e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur (M, g), on a :

$$\operatorname{div} X = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i).$$

Proposition 1.7.2. *[48] Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension m. La divergence d'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(TM)$ est donnée localement par :*

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_j X^j \Gamma^i_{ij}\right),$$

où $X = \sum_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Propriétès 1.7.2. *[21, 48] Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $X, Y \in \Gamma(TM)$ et toute $f \in C^\infty(M)$ on a :*

1. $\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div}(X) + \operatorname{div}(Y)$,

2. $\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div} X + X(f)$.

b) **La divergence d'une forme différentielle**

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$ une 1-forme sur une variété Riemannienne (M, g), on a :

$$\begin{array}{rcccl} \nabla \omega & : & \Gamma(TM) & \to & \Gamma(T^*M), \\ & & Z & \mapsto & \nabla_Z \omega \end{array}$$

est une application $C^\infty(M)$-linéaire ($\nabla \omega$ est un tenseur de type $(0,2)$).

Si $x \in M$, alors :

$$\begin{array}{rcccc} (\nabla\omega)_x & : & T_xM & \to & T_x^*M, \\ & & v & \mapsto & (\nabla_v\omega)_x \end{array}$$

est une application linéaire d'espaces vectoriels.

Définition 1.7.4. *Soit (M, g) une variété Riemannienne La divergence d'une 1-forme $\omega \in \Gamma(T^*M)$, notée $\operatorname{div}(\omega)$ est une fonction sur M définie par :*

$$\operatorname{div}(\omega) = \operatorname{trace}_g(\nabla\omega),$$

pour tout $x \in M$, on a :

$$(\operatorname{div}\omega)(x) = \operatorname{trace}_g((\nabla\omega)_x).$$

Localement : [48]

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\omega &= \sum_i (\nabla_{e_i}\omega)(e_i) \\ &= \sum_{i,j} g^{ij}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\omega)(\frac{\partial}{\partial x_j}). \end{aligned}$$

1.7.3 Hessienne d'une fonction sur une variété Riemannienne

Définition 1.7.5. *[48] Soient (M, g) une variété Riemannienne, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. La* Hessienne *d'une fonction f, notée Hess_f, est définie par :*

$$\operatorname{Hess}_f(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) = X(df(Y)) - df(\nabla_X Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Remarque 1.7.1. *Comme la connexion de Levi-Civita ∇ est sans torsion, on a :*

$$\nabla_X Y(f) - \nabla_Y X(f) = [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

ce qui implique que :

$$\operatorname{Hess}_f(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) = \operatorname{Hess}_f(Y, X),$$

c'est-à-dire, Hess_f *est symétrique.*

Proposition 1.7.3. *[27, 48] La Hessienne est donnée par l'équation*

$$\operatorname{Hess}_f(X, Y) = g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

1.7.4 L'opérateur Laplacien

Définition 1.7.6. *[48] Soit (M, g) une variété Riemannienne, l'opérateur* Laplacien *noté Δ est défini par :*

$$\begin{array}{rcccc} \Delta & : & C^\infty(M) & \to & C^\infty(M), \\ & & f & \mapsto & \Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{trace}_g(\operatorname{Hess}_f) \end{array}$$

appelé aussi opérateur de Laplace-Beltrami

Propriétès 1.7.3. *[21, 48] Soit (M, g) une variété Riemannienne, pour tout $f, h \in C^\infty(M)$ on a*

1. $\Delta(f+h) = \Delta(f) + \Delta(h)$,

2. $\Delta(fh) = h\Delta(f) + f\Delta(h) + 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h)$.

Proposition 1.7.4 (Expression locale du Laplacien [21, 48])**.** *Soit (M,g) une variété Riemannianne, pour toute $f \in C^\infty(M)$ on a :*

$$\Delta(f) = \sum_{i,j} g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right). \tag{1.7.3}$$

Exemple 1.7.1. *Soit $\mathbb{S}^2$ la sphère de dimension 2 munie de sa métrique standard $g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ où l'application :*

$$(\theta,\varphi) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi), \quad \theta \in (0,\pi)\, et\, \varphi \in (0, 2\pi).$$

représente les coordonnées sphériques sur $\mathbb{S}^2$. En utilisant la formule (1.7.3)*, on trouve que* Laplacien *d'une fonction f sur $(\mathbb{S}^2, g)$ est donné par :*

$$\begin{aligned}\Delta^{\mathbb{S}^2} f &= \frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\right\}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.\end{aligned}$$

Exemple 1.7.2. *Soit la variété différentiable $\mathbb{R}^n$ munie du produit scalaire $g = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2$ $(g_{ij} = \delta_{ij})$. Alors, pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^n$ et $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$\operatorname{grad} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \quad \Delta(f) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

1.7.5 L'élément volume

Définition 1.7.7. *[4] Soit (M,g) une variété Riemannienne orientable de dimension m. Il existe une unique m-forme notée v_g, telle que $v_g(e_1,\ldots,e_m)\big|_p = 1$ pour toute base orthonormée $\{e_i\}_{i=1}^m$ dans T_pM. Dans tout ouvert U avec les coordonnées $x = (x^1, \ldots, x^m)$, on a :*

$$v_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

où $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$. La m-forme v_g est dite l'élément volume sur la variété (M,g).

Exemple 1.7.3. *On considère le tore de révolution $\mathbb{T}^2$ de $\mathbb{R}^3$ muni de la métrique Riemannienne*

$$g = (b + a\cos\alpha)^2 d\theta^2 + a^2 d\alpha^2,$$

où $b > a > 0$. Alors l'élément volume associé à cette métrique est donné par :

$$v_g = a(b + a\cos\alpha)d\theta \wedge d\alpha.$$

Remarque 1.7.2. *Si (M,g) est une variété Riemannienne compact, le volume de M noté $\operatorname{Vol}(M)$, est fini, où :*

$$\operatorname{Vol}(M) = \int_M v_g.$$

Exemple 1.7.4. *Soit la sphère unité $\mathbb{S}^2$ munie de la métrique Riemannienne $g = \sin^2 v\, du^2 + dv^2$ induite de $\mathbb{R}^3$. On considère la paramétrisation usuelle de la sphère $\mathbb{S}^2$ en fonction de latitude et longitude :*

$$\alpha(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos u), \quad \textit{pour } (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi].$$

La forme du volume sur $\mathbb{S}^2$ par rapport au système des coordonnées est :

$$v_g = \sin v\, du \wedge dv.$$

Ainsi, le volume de la sphère est donné par :

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2} v_g = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin v\, du dv = 2\pi[-\cos v]_0^{\pi} = 4\pi.$$

Théorème 1.7.1 (Théorème de divergence [4])**.** *Soient D un domaine compact à bord différentiable dans une variété Riemannienne (M,g), θ une 1-forme, et X un champ de vecteurs défini sur un voisinage ouvert de D. Alors :*

$$\int_D (\mathrm{div})\theta\, v_g = \int_{\partial D} \theta(\eta)\, \partial v,$$

et

$$\int_D (\mathrm{div}\, X)\, v_g = \int_{\partial D} g(X,\eta)\, \partial v,$$

où ∂D est le bord de D, ∂v est la forme du volume induite sur le bord et $\eta = \eta(x)$ est le vecteur unitaire normal au point $x \in \partial D$.

Corollaire 1.7.1. *[4] Pour toute 1-forme θ et tout champ de vecteurs X à support compact dans D, on a*

$$\int_D (\mathrm{div}\, \theta)\, v_g = 0 \quad \textit{et} \quad \int_D (\mathrm{div}\, X)\, v_g = 0.$$

Théorème 1.7.2 (Théorème de Green [4])**.** *Soit (M,g) une variété Riemannienne compact et sans bord. Alors pour tous $X \in \Gamma(TM)$ et $\omega \in \Gamma(T^*M)$, on a :*

$$\int_M (\mathrm{div}\, X) v_g = 0 \quad \textit{et} \quad \int_M (\mathrm{div}\, \omega) v_g = 0.$$

1.8 Variété produit tordu

Une variété produit tordu est un type de variété Riemannienne qui est formée en prenant le produit cartésien $M \times N$ de deux variétés Riemanniennes et les munir d'une métrique Riemannienne G_f appelée métrique du produit tordu, où f est une fonction positive sur M appelée fonction de distorsion du produit tordu. Le concept des variétés produit tordu a été introduit la première fois par R.L. Bishop et B. O'Neil dans [14]. C'est une généralisation des variétés Riemanniennes produit qui permet un large éventail de géométries et qui se trouve dans de différents domaines des mathématiques et de la physique, y compris en cosmologie, en relativité générale et en analyse géométrique.
Références : [5, 7, 12, 17, 18, 35, 38, 41, 48, 53]

1.8.1 Métrique Riemannienne du produit tordu

Proposition 1.8.1. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes de dimensions m et n respectivement, et f une fonction strictement positive sur M. On considère la variété produit $M \times N$ avec ses projections canoniques π et σ, alors la variété produit tordu noté $M \times_f N$ est la variété produit $M \times N$ munie de la métrique Riemannienne*

$$G_{f^2} = \pi^* g + (f \circ \pi)^2 \sigma^* h.$$

Le produit tordu, noté $M \times_f N$ est défini comme étant la variété produit $M \times N$ munie de la métrique Riemannienne G_{f^2}. Le couple $(M \times_f N, G_{f^2})$ s'appelle variété Riemannienne produit tordu, et f est appelée **la fonction de distorsion** du produit tordu.

Remarque 1.8.1. *La matrice associée à G_{f^2} est donnée par :*

$$\begin{pmatrix} (g_{ij}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & f^2(h_{ab}) \end{pmatrix}$$

i.e.,

$$(G_{f^2})_{\alpha\beta} = \begin{cases} g_{\alpha\beta}, & si\ \alpha, \beta \in \{1, \dots, m\}; \\ f^2 h_{\alpha\beta}, & si\ \alpha, \beta \in \{m+1, \dots, m+n\}; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

1.8.2 Exemples de variétés produit tordu

Exemple 1.8.1 (Surface de révolution)**.** *Une surface de révolution M obtenue par une rotation d'une courbe (C) plane autour d'une droite (D) dans son plan est une variété produit tordu.*
Explicitement, si M est obtenu en faisant tourner une courbe plane (C) autour d'un axe (D) dans $\mathbb{R}^3$ et $f : (C) \to \mathbb{R}^+$ donne la distance à l'axe, alors $M = (C) \times_f \mathbb{S}^1$.
Cas remarquables :

1. *Si (C) est le segment $[AB]$ avec $A(a, 0, 0)$ et $B(a, 0, b)$, on obtient un cylindre de révolution dont la paramétrisation est :*

$$X(\theta, t) = (a \cos\theta, a \sin\theta, t), \quad \forall t \in [0, b],$$

et la métrique Riemannienne dans ce cas est

$$G_{f^2} = dt^2 + a^2 d\theta^2,$$

i.e., G_{f^2} est la métrique Riemannienne tordu avec la fonction de distorsion constante $f = a$.

2. *Si (C) est le demi-cercle de centre $x_0(a, 0, 0)$ et de rayon $0 < r < a$, on obtient une surface de révolution "demi-Tore" (voir, Figure 1.5) dont la paramétrisation est :*

$$X(\theta, \phi) = ((a + r\cos\phi)) \cos\theta, (a + r\cos\phi) \sin\theta, r \sin\phi),$$

et la métrique Riemannienne tordu dans ce cas est :

$$G_{f^2} = d\phi^2 + (a + r\cos\phi)^2 d\theta^2,$$

où la fonction de distorsion est $f = a + r\cos\phi > 0$ *avec* $0 < \phi < \pi$ *et* $0 < \theta < 2\pi$.

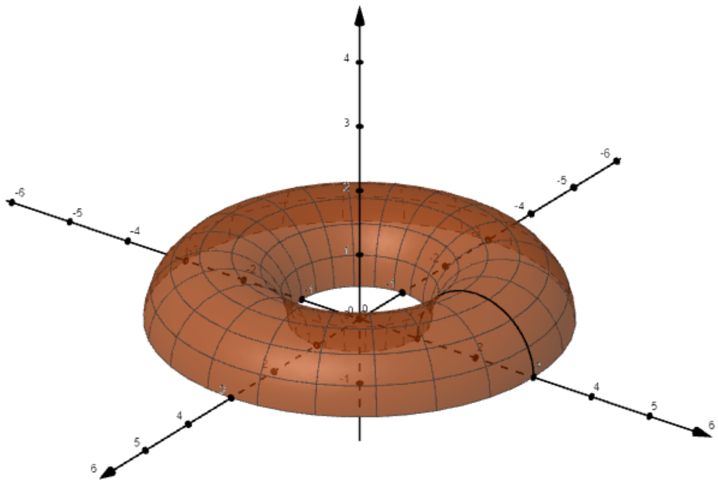

FIGURE 1.5 – Un demi-tore réalisé avec **GeoGebra**.

Exemple 1.8.2. *On considère l'espace Euclidien* $\mathbb{E}^n_* = \mathbb{E}^n - \{0\}$ *de dimension* n *et* $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$. *Alors* $\mathbb{E}^n_*$ *est la variété produit tordu* $\mathbb{R}_+ \times_s \mathbb{S}^{n-1}(1)$ *munie de la métrique produit tordu* $G_{f^2} = ds^2 + s^2 h$, *où* h *est la métrique de la sphère unité* $\mathbb{S}^{n-1}(1)$ *et la fonction de distorsion est* $f = s$.

1.8.3 La connexion de Levi- Civita sur la variété produit tordu

Proposition 1.8.2. *[41, 48] Soient* (M, g), (N, h) *deux variétés Riemanniennes et* $(M \times_f N, G_{f^2})$ *la variété produit tordu. Si* $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ *et* $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$, *on a :*

1. $\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1, 0) = (\nabla^M_{X_1} Y_1, 0)$;

2. $\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(0, X_2) = \widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(X_1, 0) = X_1(\ln f)(0, X_2)$;

3. $\widetilde{\nabla}_{(0,X_2)}(0, Y_2) = (0, \nabla^N_{X_2} Y_2) - \frac{1}{2} h(X_2, Y_2)(\operatorname{grad} f^2, 0)$.

Démonstration. 1. En utilisant la formule de Koszul (voir, [48])

$$\begin{aligned} 2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= XG_{f^2}(Y, Z) + YG_{f^2}(Z, X) - ZG_{f^2}(X, Y) \\ &\quad + G_{f^2}(Z, [X, Y]) + G_{f^2}(Y, [Z, X]) - G_{f^2}(X, [Y, Z]), \end{aligned}$$

pour tous $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2), Z = (Z_1, Z_2) \in \Gamma(M \times_f N)$.

On a :

$$\begin{aligned}
2G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0),(Z_1,0) &= (X_1,0)G_{f^2}((Y_1,0),(Z_1,0)) + (Y_1,0)G_{f^2}((Z_1,0),(X_1,0)) \\
&\quad - (Z_1,0)G_{f^2}((X_1,0),(Y_1,0)) + G_{f^2}((Z_1,0),[(X_1,0),(Y_1,0)]) \\
&\quad + G_{f^2}((Y_1,0),[(Z_1,0),(X_1,0)]) - G_{f^2}((X_1,0),[(Y_1,0),(Z_1,0)]) \\
&= X_1(g(Y_1,Z_1)) + Y_1(g(X_1,Z_1)) - Z_1(g(X_1,Y_1)) + g(Z_1,[X_1,Y_1]) \\
&\quad + g(Y_1,[Z_1,X_1]) - g(X_1,[Y_1,Z_1]) \\
&= 2g(\nabla^M_{X_1}Y_1,Z_1) \\
&= 2G_{f^2}((\nabla^M_{X_1}Y_1,0),(Z_1,0)).
\end{aligned}$$

De même on a : $G_{f^2}(\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0),(0,U)) = 0$, $\forall U \in \Gamma(TN)$, d'où :

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1,0)}(Y_1,0) = (\nabla^M_{X_1}Y_1,0).$$

De la même méthode, on obtient les autres égalités.

□

1.8.4 Le tenseur de courbure sur la variété produit tordu

Proposition 1.8.3. *[41, 48] Soient $M \times_f N$ une variété Riemannienne produit tordu et $\widetilde{\mathrm{R}}$ son tenseur de courbure. Si $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TN)$, alors :*

1. $\widetilde{\mathrm{R}}((X_1,0),(Y_1,0))(Z_1,0) = (\mathrm{R}^M(X_1,Y_1)Z_1,0)$;
2. $\widetilde{\mathrm{R}}((0,X_2),(Y_1,0))(Z_1,0) = -\frac{1}{f}g(\nabla^M_{Y_1}\operatorname{grad} f, Z_1)(0,X_2)$;
3. $\widetilde{\mathrm{R}}((X_1,0),(Y_1,0))(0,Z_2) = \widetilde{\mathrm{R}}((0,Z_2),(0,Y_2))(X_1,0) = 0$;
4. $\widetilde{\mathrm{R}}((X_1,0),(0,Y_2))(0,Z_2) = \widetilde{\mathrm{R}}((X_1,0),(0,Z_2))(0,Y_2) = -fh(Z_2,Y_2)(\nabla^M_{X_1}\operatorname{grad} f,0)$;
5. $\widetilde{\mathrm{R}}((0,X_2),(0,Y_2))(0,Z_2) = (0,\mathrm{R}^N(X_2,Y_2)Z_2) - |\operatorname{grad} f|^2\Big\{h(Y_2,Z_2)(0,X_2) - h(Z_2,X_2)(0,Y_2)\Big\}$.

Démonstration. La preuve découle directement de la définition du tenseur de courbure et la proposition 1.8.2. □

Corollaire 1.8.1. *[7, 12] Soient (M,g) et (N,h) deux variétés Riemanniennes, si $\widetilde{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita de $(M\times_f N, G_{f^2})$, alors pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$, on a :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \frac{1}{2f^2}X_1(f^2)(0,Y_2) + \frac{1}{2f^2}Y_1(f^2)(0,X_2) \\
&\quad -\frac{1}{2}h(X_2,Y_2)(\operatorname{grad} f^2,0). \qquad (1.8.1)
\end{aligned}$$

où $X = (X_1,X_2)$, $Y = (Y_1,Y_2)$ et $\nabla_X Y = (\nabla^M_{X_1}Y_1, \nabla^N_{X_2}Y_2)$.

Corollaire 1.8.2. *[7, 12] Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes, si $\widetilde{\mathrm{R}}$ est le tenseur de courbure Riemannienne de $(M \times_f N, G_{f^2})$, alors pour tout $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$, on a :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y) = \mathrm{R}(X,Y) + \frac{1}{2f^2}\Big\{ &(\nabla^M_{Y_1} \operatorname{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} Y_1(f^2) \operatorname{grad} f^2, 0) \wedge_{G_{f^2}} (0, X_2) \\
&- (\nabla^M_{X_1} \operatorname{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2} X_1(f^2) \operatorname{grad} f^2, 0) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \\
&- \frac{1}{2f^2} |\operatorname{grad} f^2|^2 (0, X_2) \wedge_{G_{f^2}} (0, Y_2) \Big\}, \qquad (1.8.2)
\end{aligned}$$

où $\mathrm{R}(X,Y)Z = (\mathrm{R}^M(X_1,Y_1)Z_1, \mathrm{R}^N(X_2,Y_2)Z_2)$ *et*

$$\left(X \wedge_{G_{f^2}} Y\right) Z = G_{f^2}(Z,Y)\, X - G_{f^2}(Z,X)\, Y. \qquad (1.8.3)$$

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(T(M \times_f N))$.

1.8.5 La courbure de Ricci sur la variété produit tordu

Proposition 1.8.4. *Soit $M \times_f N$ une variété produit tordu et $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ sa courbure de* Ricci.*Pour tous $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM)$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(TN)$, on a :*

1. $\widetilde{\mathrm{Ric}}((X_1,0),(Y_1,0)) = \mathrm{Ric}^M(X_1,Y_1) - \frac{n}{f} g(\nabla^M_{X_1} \operatorname{grad} f, Y_1)$

2. $\widetilde{\mathrm{Ric}}((X_1,0),(0,Y_2)) = 0$

3. $\widetilde{\mathrm{Ric}}((0,X_2),(0,Y_2)) = \mathrm{Ric}^N(X_2,Y_2) - h(X_2,Y_2)(f\Delta(f) + (n-1)|\operatorname{grad}|^2)$,

où $\Delta(f)$ est le Laplacien *de la fonction f sur M.*

Démonstration. Pour prouver la proposition ci-dessus, on utilise la proposition 1.8.3, et la définition de la courbure de Ricci avec la base orthonormée $\{E_i, \frac{1}{f}F_a\}$. □

1.9 Type de déformation d'une métrique Riemannienne

1.9.1 La variété Riemannienne $(M, \widetilde{g})$

Définition 1.9.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, f une fonction de classe C^∞ sur M, telle que $g - df \otimes df$ est définie positive. On définit une nouvelle métrique Riemannienne sur M notée $\widetilde{g}$ par $\tilde{g} \equiv g - df \otimes df$. Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$\tilde{g}(X,Y) = g(X,Y) - X(f)Y(f). \qquad (1.9.1)$$

Remarques 1.9.1.

- *Si M est une variété connexe de dimension m, une fonction continue $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite propre si $f^{-1}(K)$ est compact pour tout sous ensemble compact K dans $\mathbb{R}$.*

- *Une variété Riemannienne (M, g) est complète si et seulement s'il existe une fonction différentiable propre $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $g - df \otimes df$ est définie positive.*

1.9.2 La connexion de Levi-Civita de $(M, \tilde{g})$

Théorème 1.9.1. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, et f une fonction différentiable sur M. Si $\|\operatorname{grad} f\|^2 = g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) < 1$ sur M, où $\operatorname{grad} f$ est le vecteur* gradient *de f par rapport à la métrique g, alors $\tilde{g} = g - df \otimes df$ est une métrique Riemannienne sur M. De plus, si $\widetilde{\nabla}$ désigne la connexion de Levi-Civita de $(M, \tilde{g})$, alors :*

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{\operatorname{Hess}_f(X, Y)}{1 - \|\operatorname{grad} f\|^2} \operatorname{grad} f,$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de (M, g) et Hess_f *est la* Hessienne *de f relativement à g.*

Démonstration. Pour prouver que $\tilde{g}$ est une métrique Riemannienne sur M, voir [54]. Soient $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. En utilisant la formule de Koszul, on obtient

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= 2g(\nabla_X Y, Z) - X(Y(f)Z(f)) - Y(X(f)Z(f)) \\ &\quad + Z(X(f)Y(f)) - Z(f)[X, Y](f) - Y(f)[Z, X](f) \\ &\quad + X(f)[Y, Z](f). \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

Soit $\{E_i\}_{i=1}^m$ une base géodésique (i.e., une base orthonormée sur (M, g) avec $(\nabla_{E_j} E_i)_x = 0$, $\forall i, j = 1, \ldots, m$ au point $x \in M$). De l'équation (1.9.2), on obtient :

$$\begin{aligned} 2\tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, E_i) &= 2g(\nabla_X Y, E_i) - X(Y(f)g(\operatorname{grad} f, E_i)) - Y(X(f)g(\operatorname{grad} f, E_i)) \\ &\quad + E_i(g(\operatorname{grad} f, X)g(\operatorname{grad} f, Y)) - E_i(f)[X, Y](f) \\ &\quad - Y(f)(\nabla_{E_i} X)(f) - X(f)(\nabla_{E_i} Y)(f). \end{aligned} \tag{1.9.3}$$

D'après l'équation (1.9.3) et la définition de la Hessienne, on trouve :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, E_i) &= g(\nabla_X Y, E_i) - g(\nabla_X Y, \operatorname{grad} f)g(E_i, \operatorname{grad} f) \\ &\quad - \operatorname{Hess}_f(X, Y)g(E_i, \operatorname{grad} f). \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Comme $Z = \sum_i g(Z, E_i)E_i$, et d'après l'équation (1.9.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_X Y, \operatorname{grad} f)g(Z, \operatorname{grad} f) \\ &\quad - \operatorname{Hess}_f(X, Y)g(Z, \operatorname{grad} f). \end{aligned} \tag{1.9.5}$$

De la définition de la métrique Riemannienne $\tilde{g}$, et l'équation (1.9.5), on trouve :

$$\tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) = \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) - \operatorname{Hess}_f(X, Y)Z(f). \tag{1.9.6}$$

De l'équation (1.9.6) et la formule suivante :

$$Z(f) = \frac{1}{1 - \|\operatorname{grad} f\|^2} \tilde{g}(Z, \operatorname{grad} f), \tag{1.9.7}$$

on déduit le théorème 1.9.1. □

1.9.3 Tenseur de courbure de $(M, \widetilde{g})$

Théorème 1.9.2. *Soient (M, g) une variété Riemannienne, et f une fonction de classe C^∞ sur M telle que $\|\operatorname{grad} f\| < 1$. Si R (resp. $\widetilde{\mathrm{R}}$) est le tenseur de courbure sur (M, g) (resp. sur $(M, \widetilde{g})$) alors, pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, on a :*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)Z &= \mathrm{R}(X,Y)Z - \frac{g(\mathrm{R}(X,Y)\operatorname{grad} f, Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(X,Z)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f + \frac{\mathrm{Hess}_f(X,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_Y \operatorname{grad} f.
\end{aligned}
$$

Démonstration. De la définition du tenseur de courbure $\widetilde{\mathrm{R}}$,

$$
\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z, \tag{1.9.8}
$$

et le théorème 1.9.1, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y)Z &= \widetilde{\nabla}_X\Big(\nabla_Y Z - \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&\quad - \widetilde{\nabla}_Y\Big(\nabla_X Z - \frac{\mathrm{Hess}_f(X,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&\quad - \Big(\nabla_{[X,Y]}Z - \frac{\mathrm{Hess}_f([X,Y],Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big).
\end{aligned} \tag{1.9.9}
$$

Le premier terme de (1.9.9) est donné par :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\Big(\nabla_Y Z &- \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&= \nabla_X\Big(\nabla_Y Z - \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f\Big(X, \nabla_Y Z - \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f.
\end{aligned} \tag{1.9.10}
$$

D'après l'équation (1.9.10), et la définition de la Hessienne, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X\Big(\nabla_Y Z &- \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\Big) \\
&= \nabla_X\nabla_Y Z - X\left(\frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\right)\operatorname{grad} f \\
&\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f - \frac{\mathrm{Hess}_f(X,\nabla_Y Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad + \frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(Y,Z)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f,
\end{aligned} \tag{1.9.11}
$$

et la formule suivante :

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\right) &= X\left(\frac{g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\right)\\
&= \frac{g(\nabla_X\nabla_Y \operatorname{grad} f, Z)+g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, \nabla_X Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\\
&\quad+\frac{2g(\nabla_Y \operatorname{grad} f, Z)g(\nabla_X \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\\
&= \frac{g(\nabla_X\nabla_Y \operatorname{grad} f, Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}+\frac{\operatorname{Hess}_f(Y,\nabla_X Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\\
&\quad+\frac{2\operatorname{Hess}_f(Y,Z)\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}. \qquad (1.9.12)
\end{aligned}$$

En remplaçant (1.9.12) dans (1.9.11), on trouve :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z &- \frac{\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f)\\
&= \nabla_X\nabla_Y Z-\frac{g(\nabla_X\nabla_Y \operatorname{grad} f, Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\\
&\quad-\frac{\operatorname{Hess}_f(Y,\nabla_X Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\\
&\quad-\frac{\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \qquad (1.9.13)\\
&\quad-\frac{\operatorname{Hess}_f(Y,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f-\frac{\operatorname{Hess}_f(X,\nabla_Y Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f.
\end{aligned}$$

En utilisant la même méthode, le deuxième terme de (1.9.11) est donné par :

$$\begin{aligned}
-\widetilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z &- \frac{\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f)\\
&= -\nabla_Y\nabla_X Z+\frac{g(\nabla_Y\nabla_X \operatorname{grad} f, Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\\
&\quad+\frac{\operatorname{Hess}_f(X,\nabla_Y Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\\
&\quad+\frac{\operatorname{Hess}_f(Y,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \qquad (1.9.14)\\
&\quad+\frac{\operatorname{Hess}_f(X,Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_Y \operatorname{grad} f+\frac{\operatorname{Hess}_f(Y,\nabla_X Z)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f.
\end{aligned}$$

D'après les équations (1.9.9), (1.9.13) et (1.9.14), on déduit le théorème 1.9.2.

□

1.9.4 Tenseur de Ricci de $(M,\widetilde{g})$

Théorème 1.9.3. *Soient (M,g) une variété Riemannienne, et f une fonction différentiable M telle que $\|\operatorname{grad} f\|<1$ sur M. Alors, le tenseur de* Ricci *de $(M,\tilde{g})$*

noté $\widetilde{\mathrm{Ricci}}$ *est donné par :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(X) &= \mathrm{Ricci}(X) + \frac{1}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\,\mathrm{R}(X,\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
&+\frac{g(\mathrm{Ricci}(X),\operatorname{grad} f)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f - \frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\Delta f}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&-\frac{\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\nabla_X \operatorname{grad} f - \frac{\Delta f}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f \\
&+\frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)}{2(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad}\|\operatorname{grad} f\|^2 \\
&+\frac{1}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{\nabla_X \operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f \\
&+\frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad}\|\operatorname{grad} f\|^2)}{2(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f, \quad \forall X\in\Gamma(TM).
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\{E_i\}_{i=1}^m$ avec $E_1 = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|}\operatorname{grad} f$ une base orthonormée locale dans (M,g). Alors, $\{\widetilde{E}_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur $(M,\tilde{g})$ tel que $\widetilde{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}}E_1$, et $\widetilde{E}_i = E_i$ for $i=2,...,m$. Soit $X\in\Gamma(TM)$. D'après le théorème 1.9.2, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(X) &= \frac{1}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\,\mathrm{R}(X,E_1)E_1 - \frac{g(\mathrm{R}(X,E_1)\operatorname{grad} f,E_1)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&-\frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(E_1,E_1)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^3}\operatorname{grad} f \\
&+\frac{\mathrm{Hess}_f(E_1,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(X,E_1)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^3}\operatorname{grad} f \\
&-\frac{\mathrm{Hess}_f(E_1,E_1)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\nabla_X\operatorname{grad} f + \frac{\mathrm{Hess}_f(X,E_1)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\nabla_{E_1}\operatorname{grad} f \\
&+\sum_{i=2}^m\Big[\mathrm{R}(X,E_i)E_i - \frac{g(\mathrm{R}(X,E_i)\operatorname{grad} f,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&-\frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(E_i,E_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&+\frac{\mathrm{Hess}_f(E_i,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(X,E_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \qquad (1.9.15)\\
&-\frac{\mathrm{Hess}_f(E_i,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X\operatorname{grad} f + \frac{\mathrm{Hess}_f(X,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f\Big].
\end{aligned}$$

D'après les propriétés du tenseur de courbure R, et la définition de la Hessienne de la fonction f, la dernière équation devient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ricci}}(X) \quad = \quad & \frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\,\mathrm{R}(X,\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f \\
& -\frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\,\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\nabla_X \operatorname{grad} f \\
& +\frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\,\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f \\
& +\sum_{i=2}^{m}\Big[\mathrm{R}(X,E_i)E_i-\frac{g(\mathrm{R}(X,E_i)\operatorname{grad} f,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
& -\frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(E_i,E_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
& +\frac{\mathrm{Hess}_f(E_i,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(X,E_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \qquad (1.9.16)\\
& -\frac{\mathrm{Hess}_f(E_i,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f+\frac{\mathrm{Hess}_f(X,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{E_i} \operatorname{grad} f\Big].
\end{aligned}$$

D'après la définition du tenseur de Ricci de (M,g), on trouve que :

$$\sum_{i=2}^{m}\mathrm{R}(X,E_i)E_i=\mathrm{Ricci}(X)-\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\,\mathrm{R}(X,\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f, \qquad (1.9.17)$$

$$-\sum_{i=2}^{m}\frac{g(\mathrm{R}(X,E_i)\operatorname{grad} f,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f=\frac{g(\mathrm{Ricci}(X),\operatorname{grad} f)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f. \qquad (1.9.18)$$

D'après la définition du Laplacian de la fonction f, on obtient :

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=2}^{m}\frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(E_i,E_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f & \\
= \quad & -\frac{\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\Delta f}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \qquad (1.9.19)\\
& +\frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\,\mathrm{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=2}^{m}\frac{\mathrm{Hess}_f(E_i,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f & \\
= \quad & -\frac{\Delta f}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f \qquad (1.9.20)\\
& +\frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\,\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_X \operatorname{grad} f.
\end{aligned}$$

De la définition de Hess_f, et la propriété

$$\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f=\frac{1}{2}\operatorname{grad}\|\operatorname{grad} f\|^2,$$

on obtient les formules suivantes :

$$\frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f$$

$$= \frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)}{2(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad}\|\operatorname{grad} f\|^2, \tag{1.9.21}$$

$$\sum_{i=2}^{m}\frac{\operatorname{Hess}_f(E_i,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(X,E_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad}\|\operatorname{grad} f\|^2)}{2(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\ &\quad -\frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\operatorname{Hess}_f(\operatorname{grad} f,\operatorname{grad} f)\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f, \end{aligned} \tag{1.9.22}$$

$$\sum_{i=2}^{m}\frac{\operatorname{Hess}_f(X,E_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{E_i}\operatorname{grad} f$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{\nabla_X \operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f \\ &\quad -\frac{\|\operatorname{grad} f\|^{-2}\operatorname{Hess}_f(X,\operatorname{grad} f)}{2(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)}\operatorname{grad}\|\operatorname{grad} f\|^2. \end{aligned} \tag{1.9.23}$$

En remplaçant les formules (1.9.17)-(1.9.23) dans (1.9.16), on obtient le résultat du théorème 1.9.3. □

CHAPITRE 2

LES APPLICATIONS HARMONIQUES ET BIHARMONIQUES

Dans ce chapitre, on aborde les concepts fondamentaux des applications harmoniques sur les variétés Riemanniennes. Les sections de ce chapitre incluent le fibré tangent inverse et sa connexion induite, la deuxième forme fondamentale, ainsi que les applications harmoniques, les applications harmoniques stables et les applications biharmoniques. Pour illustrer ces concepts, quelques exemples sont présentés.
Les références principales sont :[4, 6, 21, 22, 24, 29, 30, 49, 55, 56]

2.1 Les applications harmoniques

2.1.1 Le fibré tangent inverse

Définition 2.1.1. *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, le fibré tangent inverse est défini par :*

$$\varphi^{-1}TN = \{(x, v) | x \in M, v \in T_{\varphi(x)}N\}.$$

Une application différentiable $v : M \to TN$ est dite section sur $\varphi^{-1}TN$, tel que

$$v(x) \in T_{\varphi(x)}N, \quad \forall x \in M.$$

L'ensemble des section sur $\varphi^{-1}TN$ est noté par $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$.

Définition 2.1.2. *Soit $\varphi : M \to N$ une application de classe C^∞ entre deux variétés différentiables et soit h une métrique Riemannienne sur N, alors h induit une métrique Riemannienne sur $\Gamma(\varphi^{-1}TN)$ définie par :*

$$h(u, v)(x) = h_{\varphi(x)}(u_x, v_x), \quad \forall x \in M \text{ et } \forall u, v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN).$$

2.1.2 Connexion induite sur le fibré tangent inverse

Définition 2.1.3. *Soit $\varphi : M \to N$ une application de classe C^∞ entre deux variétés différentiables M et N et soit ∇^N une connexion linéaire sur N. La connexion de Pull-back sur le fibré tangent inverse $\varphi^{-1}TN$ est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \nabla^\varphi : & \Gamma(TM) \times \Gamma(\varphi^{-1}TN) & \to & \Gamma(\varphi^{-1}TN), \\ & (X, V) & \mapsto & \nabla^\varphi_X V \end{array} \tag{2.1.1}$$

tels que :

1. $\nabla^{\varphi}_{X_1+X_2}V = \nabla^{\varphi}_{X_1}V + \nabla^{\varphi}_{X_2}V$;

2. $\nabla^{\varphi}_{X}(V_1+V_2) = \nabla^{\varphi}_{X}V_1 + \nabla^{\varphi}_{X}V_2$;

3. $\nabla^{\varphi}_{fX}V = f\nabla^{\varphi}_{X}V$;

4. $\nabla^{\varphi}_{X}(fV) = X(f)V + f\nabla^{\varphi}_{X}V$;

5. $\nabla^{\varphi}_{X}(Y\circ\varphi) = \nabla^{N}_{d\varphi(X)}Y$.

$\forall X_1, X_2, X \in \Gamma(TM)$, $\forall V_1, V_2, V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$, $\forall Y \in \Gamma(TN)$, *et* $\forall f \in C^{\infty}(M)$.

Localement ;

$$\begin{aligned}
\nabla^{\varphi}_{X}V &= \sum_{i,\alpha}\nabla_{X^i\frac{\partial}{\partial x_i}}V^{\alpha}(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\circ\varphi) \\
&= \sum_{i,\alpha}X^i\Big\{\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\circ\varphi) + V^{\alpha}\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\circ\varphi)\Big\}
\end{aligned}$$

tel que,

$$\begin{aligned}
\nabla^{\varphi}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\circ\varphi) &= \nabla^{N}_{d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i})}\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x_i}\left(\nabla^{N}_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)\circ\varphi \\
&= \frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x_i}\left(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)\circ\varphi
\end{aligned}$$

d'où

$$\nabla^{\varphi}_{X}V = \sum_{i,\gamma}X^i\Big\{\frac{\partial V^{\gamma}}{\partial x_i} + \sum_{\alpha,\beta}V^{\alpha}\frac{\partial\varphi^{\beta}}{\partial x_i}(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\circ\varphi)\Big\}\left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi\right).$$

Remarque 2.1.1. *[4] Soient M, N deux variétés différentiables, $X, Y \in \Gamma(TM)$, $V, W \in \Gamma(TN)$ et $\varphi \in C^{\infty}(M, N)$, Si X et V (resp. Y et W) sont φ-conjugués i.e., $d\varphi(X) = V\circ\varphi$ (resp. $d\varphi(Y) = W\circ\varphi$), alors :*

$$\nabla^{\varphi}_{X}d\varphi(Y) = (\nabla^{N}_{V}W)\circ\varphi.$$

Proposition 2.1.1. *Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ une application différentiable, ∇^N une connexion linéaire compatible avec une métrique Riemannienne h sur N, alors la connexion linéaire ∇^{φ} est compatible avec la métrique induite sur $\varphi^{-1}TN$, c'est à dire :*

$$X(h(V,W)) = h(\nabla^{\varphi}_{X}V, W) + h(V, \nabla^{\varphi}_{X}W),$$

$\forall X \in \Gamma(TM)$ *et* $\forall V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$.

Démonstration. Soient $X \in \Gamma(TM)$ et $V, W \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$. Localement, on a :

$$d\varphi(X) = \widetilde{X} \circ \varphi, \widetilde{V} \circ \varphi = V \, et \, \widetilde{W} \circ \varphi = W,$$

où $\widetilde{X}, \widetilde{V}, \widetilde{W} \in \Gamma(TN)$. Alors :

$$\begin{aligned}
X(h(V,W)) &= X(h(\widetilde{V} \circ \varphi, \widetilde{W} \circ \varphi)) \\
&= X(h(\widetilde{V}, \widetilde{W}) \circ \varphi) \\
&= d(h(\widetilde{V}, \widetilde{W}) \circ \varphi)(X) \\
&= dh(\widetilde{V}, \widetilde{W})(d\varphi(X)) \\
&= d\varphi(X)(h(\widetilde{V}, \widetilde{W})) \\
&= \widetilde{X}(h(\widetilde{V}, \widetilde{W})) \circ \varphi \\
&= h(\nabla^N_{\widetilde{X}} \widetilde{V}, \widetilde{W}) \circ \varphi + h(\widetilde{V}, \nabla^N_{\widetilde{X}} \widetilde{W}) \circ \varphi \\
&= h(\nabla^N_{\widetilde{X} \circ \varphi} \widetilde{V}, \widetilde{W} \circ \varphi) + h(\widetilde{V} \circ \varphi, \nabla^N_{\widetilde{X} \circ \varphi} \widetilde{W}) \\
&= h(\nabla^\varphi_X V, W) + h(V, \nabla^\varphi_X W).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.2. *Soit ∇^N une connexion linéaire sans torsion sur N, alors :*

$$\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) = \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]),$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Démonstration. Soient $V, W \in \Gamma(TN)$ deux champs de vecteurs φ-conjugués avec X et Y respectivement, alors :

$$[V,W] \circ \varphi = d\varphi \circ [X,Y],$$

$$\nabla^N_V W = \nabla^N_W V + [V,W],$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\nabla^\varphi_X d\varphi(Y) &= \nabla^\varphi_X W \circ \varphi \\
&= \nabla^N_{d\varphi(X)} W \\
&= (\nabla^N_V W) \circ \varphi \\
&= (\nabla^N_W V + [V,W]) \circ \varphi \\
&= \nabla^\varphi_Y d\varphi(X) + d\varphi([X,Y]).
\end{aligned}$$

□

2.1.3 Deuxième forme fondamentale

Définition 2.1.4. *Soient $(M,g), (N,h)$ deux variétés Riemanniennes, et $\varphi \in C^\infty(M,N)$. La deuxième forme fondamentale de l'application φ est la dérivée covariante de $d\varphi$, définie par :*

$$\nabla d\varphi(X,Y) = \nabla^\varphi_X d\varphi(Y) - d\varphi(\nabla^M_X Y),$$

pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Localement ; Si $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^m$ (resp. $\{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\}_{\alpha=1}^n$) est une base locale de champs de vecteurs sur (M,g) (resp. sur (N,h)), pour tout $X=\sum_i X_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\in\Gamma(TM)$, on a :

$$d\varphi(X)=\sum_{i,\beta}X_i\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi)\in\Gamma(\varphi^{-1}TN),$$

avec $\varphi_\beta=y_\beta\circ\varphi$, d'où :

$$(\nabla d\varphi)(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})=\sum_\gamma\left(\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi-\sum_k\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}{}^M\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi.$$

En effet ;

$$\begin{aligned}(\nabla d\varphi)(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j})&=\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x_i}}d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_j})-d\varphi(\nabla^M_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j})\\
&=\sum_\beta\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi-\sum_{k,\gamma}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}{}^M\Gamma^k_{ij}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi)\\
&=\sum_\beta\left\{\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi+\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\nabla^\varphi_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi\right\}-\sum_{k,\gamma}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}{}^M\Gamma^k_{ij}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi)\\
&=\sum_\beta\left\{\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\circ\varphi+\sum_\alpha\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\left(\nabla^N_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}}\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\circ\varphi\right\}\\
&\quad-\sum_{k,\gamma}\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}{}^M\Gamma^k_{ij}(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi)\\
&=\sum_\gamma\left(\frac{\partial^2\varphi_\gamma}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_j}{}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\circ\varphi-\sum_k\frac{\partial\varphi_\gamma}{\partial x_k}{}^M\Gamma^k_{ij}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi\right)\\
&=\sum_\gamma\varphi^\gamma_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\circ\varphi\right).\end{aligned}$$

Proposition 2.1.3. *Soit $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ une application différentiable, la deuxième forme fondamentale de l'application φ est symétrique, c'est à dire :*

$$\nabla d\varphi(X,Y)=\nabla d\varphi(Y,X),$$

$\forall X,Y\in\Gamma(TM)$.

Démonstration. En utilisant la proposition 2.1.2, on a :

$$\begin{aligned}\nabla d\varphi(X,Y)&=\nabla^\varphi_X d\varphi(Y)-d\varphi(\nabla^M_X Y)\\
&=\nabla^\varphi_Y d\varphi(X)+d\varphi([X,Y])-d\varphi(\nabla^M_X Y)\\
&=\nabla^\varphi_Y d\varphi(X)-d\varphi(\nabla^M_Y X)\\
&=\nabla d\varphi(Y,X),\end{aligned}$$

pour tous $X,Y\in\Gamma(TM)$. □

Proposition 2.1.4. *Soient $\varphi:M\longrightarrow N$ et $\psi:N\longrightarrow P$ deux applications différentiables entre des variétés Riemanniennes, alors :*

$$\nabla d(\psi\circ\varphi)=d\psi(\nabla d\varphi)+\nabla d\psi(d\varphi,d\varphi).$$

Démonstration. Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$, alors :

$$\begin{aligned}
\nabla d(\psi \circ \varphi)(X,Y) &= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d(\psi\circ\varphi)(Y) - d(\psi\circ\varphi)(\nabla_X^M Y)\\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y))\\
&= \nabla_{d\psi(d\varphi(X))}^P d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y))\\
&= \nabla_{d\varphi(X)}^{\psi} d\psi(d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y))\\
&= \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)) + d\psi(\nabla_{d\varphi(X)}^N d\varphi(Y)) - d\psi(d\varphi(\nabla_X^M Y))\\
&= d\psi(\nabla d\varphi(X,Y)) + \nabla d\psi(d\varphi(X), d\varphi(Y)).
\end{aligned}$$

□

Définition 2.1.5. *Une application différentiable $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ deux variétés Riemanniennes est dite totalement géodésique si $\nabla d\varphi = 0$. De manière équivalente, si $\gamma : I \to (M,g)$ est une géodésique, alors $\varphi \circ \gamma : I \to (N,h)$ est également une géodésique.*

Exemple 2.1.1 (Les applications affines)**.** *Une application différentiable $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est totalement géodésique si et seulement si elle est affine i.e, φ est de la forme $\varphi(x) = Ax + b$ pour une certaine matrice A de dimension $n \times m$ et un vecteur colonne $b \in \mathbb{R}^n$. Dans ce cas, $\nabla\varphi = 0$ si et seulement si toutes les dérivées partielles du deuxième ordre sont nulles.*

Définition 2.1.6 (Le champ de tension)**.** *Soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application différentiable entre deux variétés Riemanniennes. Le champ de tension de φ est la section $\tau(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ définie par :*

$$\begin{aligned}
\tau(\varphi) &= \operatorname{div} d\varphi = \operatorname{trace}_g d\varphi = \sum_i \nabla d\varphi(e_i, e_i)\\
&= \sum_i \{\nabla_{e_i}^{\varphi} d\varphi(e_i) - d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i)\}. \qquad (2.1.2)
\end{aligned}$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M,g).

Si $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^m$ (resp. $\{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\}_{\alpha=1}^n$) sont les champs de base locale sur M (resp. sur N), alors le champ de tension $\tau(\varphi)$ est donné par :

$$\tau(\varphi) = \sum_\alpha \tau(\varphi)^\alpha (\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \circ \varphi),$$

où

$$\tau(\varphi)^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij} \varphi_{ij}^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k {}^M\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x_k} + \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j} \right).$$

Ici, ${}^M\Gamma_{ij}^k$ (resp. ${}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$) sont les symboles de Christoffel sur (M,g) (resp. sur (N,h)).

Exemple 2.1.2. *Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Le champ de tension de la fonction f est donné par*

$$\begin{aligned}
\tau(f) &= \sum_{i,j} g^{ij} f_{ij} = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k {}^M\Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \left(\frac{d}{dt} \circ f \right)\\
&= \Delta f.
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, le champ de tension de f n'est que le Laplacien *de f.*

Proposition 2.1.5. *[21] Soient $\varphi : M \to N$ et $\psi : N \to P$ deux applications différentiables entre deux variétés Riemannienne, alors*

$$\tau(\psi \circ \varphi) = d\psi(\tau(\varphi)) + \operatorname{trace}_g \nabla d\psi(d\varphi, d\varphi)$$

Définition 2.1.7 (La densité d'énergie)**.** *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application différentiable entres deux variétés Riemanniennes. La densité d'énergie de l'application φ est une fonction différentiable $e(\varphi) : M \to [0, \infty)$ donnée par :*

$$e(\varphi)_x = \frac{1}{2}|d_x\varphi|^2, \quad (x \in M)$$

où $|d_x\varphi|^2$ est la norme de Hilbert-Schmidt of $d_x\varphi$ définie par :

$$|d_x\varphi|^2 = \sum_i h(d_x\varphi(e_i), d_x\varphi(e_i)),$$

avec $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g).

Si $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^m$ (resp. $\{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\}_{\alpha=1}^n$) les champs de base locale sur (M, g) (resp. sur (N, h)), alors la densité d'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned} e(\varphi)_x &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij} h\Big(d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}), d\varphi(\frac{\partial}{\partial x_j})\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j}\left(h_{\alpha\beta} \circ \varphi\right). \end{aligned}$$

Exemple 2.1.3. *Soit l'application (trnsformation de Kelvin)*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{R}^n - \{0\} & \to & \mathbb{R}^n - \{0\}, \\ & & x & \mapsto & \frac{x}{\|x\|^l} \end{array}$$

On calcule la norme de Hilbert-Schmidt de $d\varphi$:

$$\begin{aligned} |d\varphi^2| &= \sum_{i,j,\alpha,\beta} g^{ij}(h_{\alpha\beta} \circ \varphi)\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,\beta}\left(\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i}\right)^2 \quad (g_{ij} = \delta_{ij}\, et\, h_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}) \\ &= \sum_{i,\beta}(\delta_{i\alpha}\|x\|^{-l} - l x_\alpha \|x\|^{-l-2} x_i)^2 \\ &= \sum_{i,\beta}\Big[\delta_{i\alpha}\|x\|^{-2l} + l^2 x_\alpha^2 \|x\|^{-2l-4} x_i^2 - 2\delta_{i\alpha} l \|x\|^{-2l-2} x_\alpha x_i\Big] \\ &= \sum_i\Big[\|x\|^{-2l} + l^2\|x\|^{-2l-2} x_i^2 - 2l\|x\|^{-2l-2} x_i^2\Big] \\ &= n\|x\|^{-2l} + l^2\|x\|^{-2l} - 2l\|x\|^{-2l} \\ &= (n + l^2 - 2l)\|x\|^{-2l} \\ &= (n + l^2 - 2l + 1 - 1)\|x\|^{-2l} \\ &= (n - 1 + (l-1)^2)\|x\|^{-2l} \end{aligned}$$

La densité d'énergie de l'appliation φ est donnée par :

$$\begin{aligned} e(\varphi) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_j}\left(h_{\alpha\beta}\circ\varphi\right) \\ &= \frac{1}{2}(n-1+(l-1)^2)\|x\|^{-2l} \end{aligned}$$

Définition 2.1.8 (La fonctionnelle d'énergie)**.** *Soient (M,g) et (N,h) deux variétéss Riemanniennes et D un domaine compact de (M,g). la fonctionnelle d'énergie est définie par :*

$$\begin{array}{cccc} E(\cdot\,;D) & : & C^\infty(M,N) & \to & \mathbb{R} \\ & & \varphi & \mapsto & E(\varphi;D) = \int_D e(\varphi)v_g = \frac{1}{2}\int_D |d\varphi|^2 v_g. \end{array} \tag{2.1.3}$$

Définition 2.1.9. *Soit $\varphi : M \to N$ une application de classe C^∞. Une variation à support dans D de φ est une famille des applications $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ classe C^∞, telles que $\varphi_0 = \varphi$ et $\varphi_t = \varphi$ sur $M \setminus Int(D)$ ($Int(D)$ est l'intérieur de D).*

2.1.4 Application harmonique

Définition 2.1.10. *Une application différentiable $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ est dite harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle d'énergie i.e*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t;D)\bigg|_{t=0} = 0 \tag{2.1.4}$$

pour tout domaine compact D et toute variation $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$de classe C^∞ à support dans D.

2.1.5 Première variation de l'énergie

Proposition 2.1.6. *Soit $\varphi : M \to N$ une application différentiable et soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D. Alors*

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t;D)\bigg|_{t=0} = -\int_D h(v,\tau(\varphi))v_g. \tag{2.1.5}$$

où $v = \frac{\partial\varphi_t}{\partial t}(x)\Big|_{t=0}$ est le champ de variation de $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$.

Démonstration. Soient D un domaine compact de M, $\{\varphi_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ une variation de φ à support dans D, et $\phi : M\times(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow N$ l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. D'après la formule de Leibniz, on a :

$$\begin{aligned} d\phi(\frac{d}{dt},0)_{(t,x)} &= d_t\phi_x(\frac{d}{dt}) + d_x\phi_t(0) \\ &= d_t\phi_x(\frac{d}{dt}), \end{aligned}$$

où :

$$\phi_x : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow N, \quad \phi_x(t) = \phi(t,x) = \varphi_t(x),$$

d'où :

$$\begin{aligned} d\phi(\frac{d}{dt},0)_{(t,x)} &= d_t\varphi_t(x)(\frac{d}{dt}) \\ &= \frac{d\varphi_t(x)}{dt}, \end{aligned}$$

on suppose que $(\frac{d}{dt}, 0) = \frac{\partial}{\partial t}$, donc :

$$d\phi(\frac{\partial}{\partial t})\Big|_{t=0} = v.$$

Soient $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g), comme le crochet de Lie

$$[(e_i, 0), (0, \frac{d}{dt})] = 0,$$

et $d\varphi_t(e_i) = d\phi(e_i, 0)$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D |d\varphi_t|^2 v^g\Big|_{t=0} &(2.1.6)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D \sum_i h(d\varphi_t(e_i), d\varphi_t(e_i))v^g\Big|_{t=0} &(2.1.7)\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D \sum_i h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))v^g\Big|_{t=0} &(2.1.8)\\
&= \frac{1}{2}\int_D \frac{\partial}{\partial t}\sum_i h(d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))v^g\Big|_{t=0} &\\
&= \int_D \sum_i h(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i, 0), d\phi(e_i, 0))v^g\Big|_{t=0} &(2.1.9)\\
&= \int_D \sum_i h(\nabla^{\phi}_{(0,e_i)} d\phi(0, \frac{d}{dt}), d\phi(e_i, 0))v^g\Big|_{t=0} &(2.1.10)\\
&= \int_D \sum_i h(\nabla^{N}_{d\varphi(e_i)} v, d\varphi(e_i))v^g &\\
&= \int_D \sum_i h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i))v^g. &(2.1.11)
\end{aligned}$$

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X) = h(v, d\varphi(X)), \quad \forall X \in \Gamma(TM),$$

on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_i (\nabla_{e_i}\omega)(e_i)\\
&= \sum_i \{e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla^M_{e_i} e_i)\}\\
&= \sum_i \{h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i)) - h(v, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i))\}\\
&= \sum_i h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, d\varphi(e_i)) + h(v, \tau(\varphi)),
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

d'après les formules (2.1.11), (2.1.12), et le théorème de divergence 1.7.1, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau(\varphi))v^g.$$

□

Théorème 2.1.1 (Équation harmonique [22])**.** *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe C^∞. Alors φ est harmonique si et seulement si*

$$\tau(\varphi) = 0. \tag{2.1.13}$$

2.1.6 Exemples des applications harmoniques

Exemple 2.1.4. *Si $M = \mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$ munies de leurs métriques standards, alors*

$$E(\varphi\,; D) = \frac{1}{2}\int_D \sum_{i,\alpha}\left(\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\right)^2 dx^1\cdots dx^m \tag{2.1.14}$$

et

$$\tau(\varphi)^\gamma = \sum_i \frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x_i^2} = \Delta(\varphi^\gamma), \tag{2.1.15}$$

où Δ est le Laplacian *standard sur $\mathbb{R}^m$. Toute application $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ est harmonique si et seulement si ses composantes $\varphi^\alpha : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions harmoniques.*

Exemple 2.1.5. *Si $M = (0,1)$ alors, le champ de tension d'une courbe $\varphi : M \to N$ de classe C^∞ est donné par :*

$$\tau(\varphi) = \sum_\gamma \left(\frac{d^2\varphi^\gamma}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{d\varphi^\beta}{dt}\frac{d\varphi^\alpha}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma \circ \varphi}\right),$$

Ainsi, φ est harmonique si et seulement si :

$$\frac{d^2\varphi^\gamma}{dt^2} + \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{d\varphi^\beta}{dt}\frac{d\varphi^\alpha}{dt} = 0, \quad \forall\gamma = 1,\ldots,n.$$

Qui sont les équations des géodésiques dans (N,h).

Exemple 2.1.6 (Immersion minimale)**.** *Soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une immersion Riemannienne, i.e $\varphi^*h = g$. Le champ de tension de φ et donné par :*

$$\tau(\varphi) = \operatorname{trace}\nabla d\varphi = mH$$

où H est le champ de vecteurs de la courbure moyenne de φ, et φ est harmonique si et seulement si elle est minimale (i.e., $H = 0$).

Exemple 2.1.7. *Soient (M,g) une variété Riemannienne, $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$, $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ l'injection canonique, et $\varphi : (M,g) \to \mathbb{S}^n$ une application de classe C^∞. Posons $\psi = i \circ \varphi : (M,g) \to \mathbb{R}^{n+1}$, alors φ est harmonique si et seulement si $\tau(\psi) = -|d\psi|^2\psi$. En effet ;*

$$\tau(\psi) = \tau(i\circ\varphi) = di(\tau(\varphi)) + \operatorname{trace}_g \nabla di(d\varphi, d\varphi).$$

Donc φ est harmonique si et seulement :

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= \operatorname{trace}_g \nabla di(d\varphi, d\varphi)\\ &= \sum_i \nabla di(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)),\end{aligned}$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée locale sur (M,g). Par conséquent :

$$\begin{aligned}\tau(\psi) &= -\sum_i \langle d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)\rangle \mathcal{N}_{\psi(x)} \quad \text{où} \quad \mathcal{N}_{\psi(x)} = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x_i}\\ &= -\sum_i \langle di(d\varphi(e_i)), di(d\varphi(e_i))\rangle \mathcal{N}_{\psi(x)}\\ &= -\sum_i \langle d\psi(e_i), d\psi(e_i)\rangle \mathcal{N}_{\psi(x)} \quad \text{où} \quad \mathcal{N}_{\psi(x)} = \psi(x)\\ &= -|d\psi|^2\psi(x).\end{aligned}$$

Exemple 2.1.8. *Toute application* $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ *totalement géodésique i.e.,* $\nabla d\varphi = 0$ *est harmonique.*

Proposition 2.1.7 (La composition avec des applications totalement géodésiques [4])**.** *Soit* $\varphi : M \to N$ *une application harmonique et* $\psi : N \to P$ *une application totalement géodésique. Alors* $\psi \circ \varphi$ *est harmonique.*

2.2 Les applications harmoniques stables

2.2.1 Deuxième variation de l'énergie

Théorème 2.2.1. *Soit* $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ *une application harmonique entre deux variétés Riemanniennes et* D *un domaine compact de* M*. Si* $\{\varphi_{t,s}\}_{(t,s)\in(-\epsilon,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon)}$ *est une variation de* φ *à deux paramètres et à support dans* D*, alors :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s}\,; D)\Big|_{(t,s)=(0,0)} = \int_D h(-\operatorname{trace}_g \mathrm{R}^N(V, d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^{\varphi})^2 V, W)v_g.$$

où

$$V = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

et

$$W = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{(t,s)=(0,0)}$$

sont les champs de vecteurs de variation.

Démonstration. Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M, g), et soit :

$$\phi : (x, t, s) \in M \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to \varphi_{t,s}(x) \in N,$$

$$E_i = (e_i, 0, 0),\ \frac{\partial}{\partial t} = (0, \frac{d}{dt}, 0)\ et\ \frac{\partial}{\partial s} = (0, 0, \frac{d}{ds}),$$

On a :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s};\, D)\Big|_{t=s=0} = \frac{1}{2}\int_D \sum_i \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i), d\phi(E_i))v_g\Big|_{t=s=0}, \quad (2.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} h(d\phi(E_i), d\phi(E_i)) &= \frac{\partial}{\partial t} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)) \\ &= h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i)), \qquad (2.2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i)) &= h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\ &= h(\mathrm{R}^N(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(E_i))d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla^{\phi}_{E_i} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)) \\ &\quad + h(\nabla^{\phi}_{[\frac{\partial}{\partial t}, E_i]} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), d\phi(E_i)). \qquad (2.2.3) \end{aligned}$$

Soit ω la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\omega(X) = h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, d\varphi(X)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

En tenant compte que φ est harmonique, on obtient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_i \Big\{ e_i(\omega(e_i)) - \omega(\nabla^M_{e_i} e_i) \Big\} \\
&= \sum_i \Big\{ e_i(h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, d\varphi(e_i))) - h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)) \Big\} \\
&= \sum_i \Big\{ h(\nabla^{\phi}_{E_i} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, d\varphi(e_i)) \\
&\quad + h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, \nabla^{\varphi}_{e_i} d\varphi(e_i)) - h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)) \Big\} \\
&= \sum_i \Big\{ h(\nabla^{\phi}_{E_i} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, d\varphi(e_i)) + h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, \tau(\varphi)) \Big\} \\
&= \sum_i h(\nabla^{\phi}_{E_i} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0}, d\varphi(e_i)). \qquad (2.2.4)
\end{aligned}$$

D'après les formules (2.2.3) et (2.2.4), avec $[\frac{\partial}{\partial t}, E_i] = 0$, on a :

$$h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i), d\phi(E_i))\Big|_{t=s=0} = \sum_i h(\mathrm{R}^N(V, d\varphi(e_i))W, d\varphi(e_i)) + \operatorname{div}^M \omega. \quad (2.2.5)$$

En développant le deuxième terme à droite de l'égalité (2.2.2), on trouve :

$$\begin{aligned}
h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i)) &= h(\nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t})) \\
&= E_i\Big(h(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t})) \Big) \\
&\quad - h(d\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \nabla^{\phi}_{E_i} \nabla^{\phi}_{E_i} d\phi(\frac{\partial}{\partial t})). \qquad (2.2.6)
\end{aligned}$$

Si η désigne la 1-forme différentielle à support dans D, définie sur M par :

$$\eta(X) = h(W, \nabla^{\varphi}_X V), \quad X \in \Gamma(TM).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \eta &= \sum_i \{ e_i(\eta(e_i)) - \eta(\nabla^M_{e_i} e_i) \} \\
&= \sum_i \{ e_i(h(W, \nabla^{\varphi}_{e_i} V)) - h(W, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} V) \}. \qquad (2.2.7)
\end{aligned}$$

D'après les équations (2.2.6) et (2.2.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(E_i), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(E_i))\Big|_{t=s=0} &= \operatorname{div}^M \eta + \sum_i \Big\{ h(W, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} V) \\
&\quad - h(W, \nabla^{\phi}_{e_i} \nabla^{\phi}_{e_i} V) \Big\}. \qquad (2.2.8)
\end{aligned}$$

En utilisant les formules (2.2.1), (2.2.2), (2.2.5) et (2.2.8) et le Théorème de divergence, on déduit :

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E(\varphi_{t,s};\, D)\Big|_{t=s=0} = \int_D \sum_i \Big\{ -h(\mathrm{R}^N(V, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), W) + h(W, \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} V) - h(W, \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} V) \Big\} v_g.$$

□

2.2.2 L'opérateur de Jacobi

Définition 2.2.1. *Soit $\varphi : (M^m, g) \to (N^n, h)$ une application différentiable entre deux variétés Riemanniennes, on définit l'opérateur de* Jacobi *de φ, noté J_φ, par :*

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{J}_\varphi & : & \Gamma(\varphi^{-1}TN) & \to & \Gamma(\varphi^{-1}TN), \\ & & v & \mapsto & \mathrm{J}_\varphi(v) \end{array}$$

$$\mathrm{J}_\varphi(v) = -\sum_i \mathrm{R}^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_i \Big\{ \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} v - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v \Big\}.$$

Propriétés 2.2.1. *Pour tout $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ et $f \in C^\infty(M)$, on a :*

1) J_φ *est $\mathbb{R}$-linéaire.*

2) $\mathrm{J}_\varphi(fv) = f\,\mathrm{J}_\varphi(v) - [\Delta(f)v + 2\nabla^{\varphi}_{\mathrm{grad}\, f} v]$.

Démonstration. 1) Soit $v, w \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_\varphi(v+w) &= -\mathrm{R}^N(v+w, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - [\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i}(v+w) - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i}(v+w)] \\ &= -\mathrm{R}^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \mathrm{R}^N(w, d\varphi(_i))d\varphi(e_i) - [\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} v + \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} w \\ &\quad -\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} w] \\ &= -\mathrm{R}^N(v, d\varphi(_i))d\varphi(e_i) - [\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} v - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v] - \mathrm{R}^N(w, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) \\ &\quad -[\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} w - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} w] \\ &= \mathrm{J}_\varphi(v) + \mathrm{J}_\varphi(w). \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

2) Soit $f \in C^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_\varphi(fv) &= -f\,\mathrm{R}^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - [\nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i} fv - \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} fv] \\ &= -f\,\mathrm{R}^N(v, d\varphi(_i))d\varphi(e_i) - [\nabla^{\varphi}_{e_i} e_i(f)v + \nabla^{\varphi}_{e_i} f \nabla^{\varphi}_{e_i} v - (\nabla^M_{e_i} e_i)(f)v \\ &\quad -f\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v] \\ &= -f\,\mathrm{R}^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - [e_i(e_i(f))v + e_i(f)\nabla^{\varphi}_{e_i} v + e_i(f)\nabla^{\varphi}_{e_i} v \\ &\quad +f\nabla^{\varphi}_{e_i}(\nabla^{\varphi}_{e_i} v) - (\nabla^M_{e_i} e_i)(f)v - f\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v] \\ &= f\,\mathrm{J}_\varphi(v) - [\Delta(f)v + 2\nabla^{\varphi}_{\mathrm{grad}\, f} v]. \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

□

Définition 2.2.2 ([56])**.** *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application harmonique entre deux variétés Riemanniennes, la forme indice de φ est définie par :*

$$I_\varphi(v, w) = \int_D h(\mathrm{J}_\varphi(v), w) v_g, \quad \forall v, w \in \Gamma(\varphi^{-1}TN). \tag{2.2.11}$$

Définition 2.2.3 (La stabilité)**.** *Une application harmonique $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ entre deux variétés Riemanniennes est dite stable si $I_\varphi(v, v) \geqslant 0$, pour tout $v \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$.*

Dans le cas où $N = \mathbb{S}^n$, on a :

Théorème 2.2.2 ([55])**.** *Soit (N, h) une variété Riemannienne, $\mathbb{S}^n$ la sphère unité munie de la métrique induite par le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{n+1}$, et soit $\varphi : \mathbb{S}^n \to (N, h)$ une application harmonique stable. Si $n > 2$, alors φ est constante.*

Théorème 2.2.3 ([32])**.** *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte et sans bord, et soit φ une application harmonique stable définie sur (M, g) à valeurs dans $\mathbb{S}^n$, où $n > 2$. Alors φ est constante.*

2.3 Les applications biharmoniques

2.3.1 Application biharmonique

Définition 2.3.1. *Soit (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes et D un domaine compact de M. la fonctionnelle bi-énergie est définie par :*

$$\begin{array}{rcccc} E_2 & : & C^\infty(M, N) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & \varphi & \longmapsto & E_2(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau(\varphi)|^2 v^g. \end{array} \tag{2.3.1}$$

où $|\tau(\varphi)|^2 = h(\tau(\varphi), \tau(\varphi))$, et $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de φ.

Définition 2.3.2 ([23])**.** *Une application $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, est dite biharmonique si elle est point critique de la fonctionnelle bi-énergie E_2, pour tout domaine compact $D \subset M$, c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = 0, \tag{2.3.2}$$

$\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ étant une variation de φ à support dans D.

2.3.2 Première variation de la bi-énergie

Théorème 2.3.1. *[29, 30] Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes et soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de classe C^∞ de φ à support dans D. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_2(\varphi))v^g,$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}|_{t=0}$ désigne le champ de variation associé à $\{\varphi_t\}$, et $\tau_2(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ le champ défini relativement à une base orthonormée sur (M, g), par :

$$\begin{aligned} \tau_2(\varphi) &= -\operatorname{trace}_g \mathrm{R}^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) \\ &= -\sum_i \mathrm{R}^N(\tau(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \sum_i \left\{\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^\varphi_{e_i}\tau(\varphi) - \nabla^\varphi_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)\right\} \\ &= \mathrm{J}_\varphi(\tau(\varphi)). \end{aligned}$$

Démonstration. On pose $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to N$, l'application définie par $\phi(x,t) = \varphi_t(x)$. Alors :

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = \int_D \sum_{i,j} h\left(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_j,0),(e_j,0))\right) v^g\Big|_{t=0}. \tag{2.3.3}$$

On a :

$$\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i, 0) = \nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(0, \frac{d}{dt}), \tag{2.3.4}$$

car :

$$[(0, \frac{d}{dt}), (e_i, 0)] = 0.$$

et on a :

$$\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(\nabla^M_{e_i} e_i, 0) = \nabla^{\phi}_{(\nabla^M_{e_i} e_i,0)} d\phi(0, \frac{d}{dt}). \tag{2.3.5}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)) &= \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\left\{\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,0) - d\phi\left(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\right)\right\} \\
&= \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla^{\phi}_{(e_i,0)} d\phi(e_i,0) - \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi\left(\nabla^{M\times(-\epsilon,\epsilon)}_{(e_i,0)}(e_i,0)\right) \\
&= R^N(d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0) \\
&+ \nabla^{\phi}_{[(0,\frac{d}{dt}),(e_i,0)]} d\phi(e_i,0) - \nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(\nabla^M_{e_i} e_i, 0) \\
&= \mathrm{R}^N(d\phi(0,\frac{d}{dt}), d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0) + \nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})} d\phi(e_i,0) \\
&- \nabla^{\phi}_{(\nabla^M_{e_i} e_i,0)} d\phi(0,\frac{d}{dt}).
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} h\left(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)), \nabla d\phi((e_j,0),(e_j,0))\right)\Big|_{t=0} &= \sum_i h(\mathrm{R}^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), \tau(\varphi)) \\
&+ \sum_i h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi)) \\
&- \sum_i h(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v, \tau(\varphi)).
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$, la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\omega(X) = h(\nabla^{\varphi}_X v, \tau(\varphi)), \qquad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}^M \omega &= \sum_i \{e_i(\omega(e_i)) - w(\nabla^M_{e_i} e_i)\} \\
&= \sum_i \{e_i(h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi))) - h(\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i} e_i} v, \tau(\varphi))\} \\
&= \sum_i \{h(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \tau(\varphi)) + h(\nabla^{\varphi}_{e_i} v, \nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) - h(\nabla_{\nabla^M_{e_i} e_i} v, \tau(\varphi))\}.
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

De formules (2.3.7) et (2.3.8), on obtient :

$$\sum_{i,j} h\left(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)),\nabla d\phi((e_j,0),(e_j,0))\right)v^g\Big|_{t=0} = \sum_i h(R^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),\tau(\varphi)) + \operatorname{div}^M\omega - \sum_i h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)). \tag{2.3.9}$$

Soit $\eta \in \Gamma(T^*M)$, la 1-forme différentielle à support dans D, définie par :

$$\eta(X) = h(v,\nabla^{\varphi}_X\tau(\varphi)), \quad X \in \Gamma(TM).$$

On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}^M\eta &= \sum_i\{e_i(\eta(e_i)) - \eta(\nabla^M_{e_i}e_i)\}\\ &= \sum_i\{e_i(h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) - h(v,\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)))\}\\ &= \sum_i\{h(\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) + h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) - h(v,\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi))\}.\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

En remplaçant (2.3.10) dans (2.3.9), on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j} h\left(\nabla^{\phi}_{(0,\frac{d}{dt})}\nabla d\phi((e_i,0),(e_i,0)),\nabla d\phi((e_j,0),(e_j,0))\right)v^g\Big|_{t=0}\\ &= \sum_i h(R^N(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),v) + \operatorname{div}^M\omega\\ &- \operatorname{div}^M\eta + \sum_i h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi)) - \sum_i h(v,\nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi)).\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

D'après (2.3.3), (2.3.11), et le théorème de la divergence, on obtient :

$$\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} = -\int_D\sum_i h\left(-\mathrm{R}^N(\tau(\varphi),d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) - \nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau(\varphi) + \nabla^{\varphi}_{\nabla^M_{e_i}e_i}\tau(\varphi),v\right)v^g.$$

□

Théorème 2.3.2 ([29, 30]). *Une application $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes est bi-harmonique si et seulement si*

$$\tau_2(\varphi) = -\operatorname{trace}_g \mathrm{R}^N(\tau(\varphi),d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g(\nabla^{\varphi})^2\tau(\varphi) = 0. \tag{2.3.12}$$

Remarques 2.3.1.

(1) L'équation (2.3.2) est dite l'équation d'Euler-Lagrange associée à la fonctionnelle bi-énergie.

(2) Toute application harmonique est biharmonique mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

2.3.3 Exemples des applications biharmoniques

Exemple 2.3.1. *Les plus simples exemples des applications biharmonique sont les polynômes de degré* 2 *et* 3 *dans* $\mathbb{R}$.

Exemple 2.3.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *une fonction harmonique, i.e.,*

$$\Delta(f) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0,$$

alors la fonction du produit $\varphi = r^2 f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *est biharmonique non harmonique, i.e.,*

$$\Delta(\varphi) \neq 0, \quad \tau_2(\varphi) = \Delta(\Delta(\varphi)) = \Delta^2(\varphi) = 0.$$

Ici, $r : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *est la fonction de distance de l'origine définie par :*

$$r(x_1, \ldots, x_m) = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_m)^2}.$$

En effet ; on a :

$$\begin{aligned} r^2(x) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \\ &= \sum_j x_j^2, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^2}{\partial x_i} &= \sum_j \frac{\partial x_j^2}{\partial x_i} \\ &= 2x_i, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \frac{\partial r^2}{\partial x_i} f + r^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \\ &= 2x_i f + r^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} &= 2f + 2x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ \Rightarrow \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} &= \sum_i 2f + \sum_i 4x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\Delta\varphi = 2nf + 4\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + r^2 \underbrace{\Delta f}_{=0} \neq 0;$$

et pour j fixé, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial x_j} &= 2n\frac{\partial f}{\partial x_j} + 4\sum_i \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial f}{\partial x_i} + 4\sum_i x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\ &= 2n\frac{\partial f}{\partial x_j} + 4\frac{\partial f}{\partial x_j} + 4\sum_i x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x_j^2} = 2n\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + 4\sum_i \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{=\delta_{ij}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + 4\sum_i x_i \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2},$$

$\Rightarrow$

$$\sum_j \frac{\partial^2 \Delta\varphi}{\partial x_j^2} = (2n+4)\Delta f + 4\Delta f + 4\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta f),$$

donc $\tau_2(f) = \Delta(\Delta(f)) = 0$.

Exemple 2.3.3 ([3, 33])**.** *L'inversion de la sphère unité* $\varphi : \mathbb{R}^n - \{0\} \ni x \mapsto \frac{x}{|x|^2} \in \mathbb{R}^n$ *est biharmonique si* $n = 4$. φ *est non harmoniqe car* $\tau(\varphi) = -\frac{4x}{|x|^4}$.

Exemple 2.3.4. *Soir* $\gamma : I \to N$ *une géodésique et soit* $t : J \to I$, $t = t(s)$, $I, \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ *un changement de paramètre. Alors* $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ t : J \to N$ *est biharmonique non harmonique si et seulement si* $\frac{d^4 t}{ds^4} = 0$ *et* $\frac{d^2 t}{ds^2} = 0$.

Exemple 2.3.5. *Soit* $\varphi : (M, g) \to (\mathbb{S}^n, h)$ *une application de classe* C^∞ *entre deux variétés Riemanniennes, où* h *est la métrique Riemannienne induite sur* $\mathbb{S}^n$ *par celle de* $\mathbb{R}^{n+1}$. *En utilisant la formule du tenseur de courbure pour la sphère unité Euclidienne, on trouve que* φ *est biharmonique si et seulement si :*

$$\mathrm{trace}_g (\nabla^\varphi)^2 \tau(\varphi) + |d\varphi|^2 \tau(\varphi) - \mathrm{trace}_g\, h(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi = 0.$$

En effet ; Comme la sphère unité $\mathbb{S}^n$ *est de courbure constante égale à 1, d'après la proposition* 1.5.1 *on a :*

$$R^{\mathbb{S}^n}(X, Y)Z = h(Y, Z)X - h(X, Z)Y,$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}_g\, R^{\mathbb{S}^n}(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi &= \mathrm{trace}_g \{h(d\varphi, d\varphi)\tau(\varphi) - h(\tau(\varphi), d\varphi) d\varphi\} \\ &= |d\varphi|^2 \tau(\varphi) - \mathrm{trace}_g\, h(\tau(\varphi), d\varphi)\varphi.\end{aligned}$$

Les théorèmes suivants sont des théorèmes de type Liouville (voir [49])

Théorème 2.3.3. *Soit* $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ *une application de classe* C^∞. *On suppose que* M *est compacte, orientable et* $\mathrm{Sect}^N \leq 0$. *Alors* φ *est biharmonic si et seulement si elle est harmonique.*

Proposition 2.3.1. *Soit* $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ *une immersion Riemannienne tel que* $|\tau(\varphi)|$ *est constante. On suppose que* $\mathrm{Sect}^N \leq 0$. *Alors* φ *est biharmonique si et seulement si elle est harmonique.*

Théorème 2.3.4. *Soit* $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ *une immersion Riemannienne. On suppose que* M *est compacte, orientable,* $\mathrm{Sect}^N \leq 0$ *et* $m = n - 1$. *Alors* φ *est biharmonique si et seulement si elle est harmonique*

CHAPITRE 3

LES APPLICATIONS p-HARMONIQUES GÉNÉRALISÉES

Dans ce chapitre, on fait l'extension de la définition des applications p-harmoniques et p-biharmoniques en définissant les applications $p(\cdot)$-harmoniques entre deux variétés Riemanniennes qui sont considérées comme une généralisation des applications harmoniques [4, 22, 42] et les applications p-harmoniques [2, 15, 25, 42], ainsi que les applications $p(\cdot)$-harmoniques stables comme étant une généralisation des applications harmoniques stables [56] et les applications p-harmoniques stables [19, 47]. Enfin, on définit les applications $p(\cdot)$-biharmoniques et on construit quelques exemples des applications $p(\cdot)$-harmoniques et des applications $p(\cdot)$-biharmoniques non $p(\cdot)$-harmoniques. Les résultats de ce chapitre sont obtenus dans [37].

3.1 Les applications $p(\cdot)$-harmoniques

Définition 3.1.1. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application différentiable entre deux variétés Riemanniennes, et soit p une fonction strictement positive de classe C^∞ sur M où $p(x) \geq 2$,$\forall x \in M$. Pour tout domaine compacte D de M, la fonctionnelle de $p(\cdot)$-énergie de φ is définie par :*

$$E_{p(\cdot)}(\varphi; D) = \int_D \frac{|d\varphi|^{p(x)}}{p(x)} v_g, \tag{3.1.1}$$

où $|d\varphi|$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\varphi$ et v_g l'élément volume sur (M, g).

Définition 3.1.2. *Une application $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ est dite $p(\cdot)$-harmonique si elle est point critique de la fonctionnelle de $p(\cdot)$-énergie sur tout domaine compact D de M, c'est-à-dire :*

$$\frac{d}{dt} E_{p(\cdot)}(\varphi_t; D)|_{t=0} = 0. \tag{3.1.2}$$

avec $\{\varphi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ est une variation de φ à support dans D.

Définition 3.1.3. *Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ une application de classe C^∞. Le champs de $p(\cdot)$-tension de φ est une section $\tau_{p(\cdot)}(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ définie par :*

$$\begin{aligned} \tau_{p(\cdot)}(\varphi) &= \operatorname{trace}_g \nabla |d\varphi|^{p(x)-2} d\varphi, \\ &= |d\varphi|^{p(x)-2} \tau(\varphi) + d\varphi(\operatorname{grad}^M |d\varphi|^{p(x)-2}) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

où $\{e_i\}_{i=1}^m$ est une base orthonormée sur (M,g) et $\tau(\varphi)$ est le champ de tension définie par la formule 2.1.2.

3.1.1 Première variation de $p(\cdot)$-énergie

Théorème 3.1.1. *Soit $\varphi : (M,g) \to (N,h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, et soit $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ une variation de φ à support dans un domaine compacte D de M. Alors :*

$$\frac{d}{dt}E_{p(\cdot)}(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v,\tau_{p(\cdot)}(\varphi))v_g, \tag{3.1.4}$$

où $v = \frac{d\varphi_t}{dt}\big|_{t=0}$ est le champ de vecteurs de variation de $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$.

Démonstration. Soit $\phi : M\times(-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ définie par

$$\phi(x,t) = \varphi_t(x), \quad \forall (x,t)\in M\times(-\epsilon,\epsilon).$$

On a $\phi(x,0) = \varphi(x)$ pour tout $x\in M$, et le champ de vecteurs de variation associé à $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ est donné par :

$$v(x) = d_{(x,0)}\phi(\frac{\partial}{\partial t})\Big|_{t=0}, \quad \forall x\in M.$$

Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M,g). On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{p(\cdot)}(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\int_D \frac{|d\varphi_t|^{p(x)}}{p(x)}v_g\Big|_{t=0} \\
&= \int_D \frac{1}{p(x)}\frac{\partial}{\partial t}|d\varphi_t|^{p(x)}\Big|_{t=0} v_g \\
&= \int_D \frac{1}{p(x)}\frac{\partial}{\partial t}(|d\varphi_t|^2)^{\frac{p(x)}{2}}\Big|_{t=0} v_g \\
&= \sum_i \int_D \frac{1}{p(x)}\frac{\partial}{\partial t}h(d\varphi_t(e_i),d\varphi_t(e_i))^{\frac{p(x)}{2}}\Big|_{t=0} v_g \\
&= \sum_i \int_D \frac{1}{p(x)}\frac{\partial}{\partial t}h(d\phi(e_i,0),d\phi(e_i,0))^{\frac{p(x)}{2}}\Big|_{t=0} v_g \\
&= \sum_i \int_D h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(e_i,0),d\phi(e_i,0))(|d\varphi_t|^2)^{\frac{p(x)}{2}-1}\Big|_{t=0} v_g. \quad (3.1.5)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété de la proposition 2.1.2 avec $X = \frac{\partial}{\partial t}$, $Y = (e_i,0)$, et $[\frac{\partial}{\partial t},(e_i,0)] = 0$, l'équation (3.1.5) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{p(\cdot)}(\varphi_t;D)\Big|_{t=0} &= \sum_i \int_D h(\nabla^\phi_{(e_i,0)}d\phi(\frac{\partial}{\partial t}),d\phi(e_i,0))|d\varphi_t|^{p(x)-2}\Big|_{t=0} v_g \\
&= \sum_i \int_D h(\nabla^\varphi_{e_i}v,|d\varphi|^{p(x)-2}d\varphi(e_i))v_g \\
&= \sum_i \int_D \Big[e_i h(v,|d\varphi|^{p(x)-2}d\varphi(e_i)) \\
&\qquad - h(v,\nabla^\varphi_{e_i}|d\varphi|^{p(x)-2}d\varphi(e_i))\Big]v_g. \quad (3.1.6)
\end{aligned}$$

Soit $\omega \in \Gamma(T^*M)$ définie par :

$$\omega(X) = h(v, |d\varphi|^{p(x)-2} d\varphi(X)), \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

La divergence de ω est donnée par :

$$\operatorname{div}^M \omega = \sum_i \left[e_i h(v, |d\varphi|^{p(x)-2} d\varphi(e_i)) - h(v, |d\varphi|^{p(x)-2} d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i)) \right]. \tag{3.1.7}$$

D'après les équation (3.1.6), (3.1.7), et le théorème de divergence 1.7.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_{p(\cdot)}(\varphi_t; D) \Big|_{t=0} &= \sum_i \int_D h(v, |d\varphi|^{p(x)-2} d\varphi(\nabla^M_{e_i} e_i) - \nabla^\varphi_{e_i} |d\varphi|^{p(x)-2} d\varphi(e_i)) v_g \\ &= - \sum_i \int_D h\left(v, \left[\nabla_{e_i} |d\varphi|^{p(x)-2} d\varphi\right](e_i)\right) v_g. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

$\square$

Corollaire 3.1.1. *Une application différentiable $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ entre deux variétés Riemanniennes est $p(\cdot)$-harmonique si et seulement si*

$$\tau_{p(\cdot)}(\varphi) = 0.$$

Exemple 3.1.1. *La restriction de l'inversion*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2},$$

à $M = \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \|x\|^2 > \sqrt{n}\}$ est une application $p(\cdot)$-harmonique, où la fontion p est donnée par :

$$p(x) = n + \frac{c}{2\ln(\|x\|^2) - \ln(n)}, \quad \forall x \in M,$$

pour une certaine constante $c \geq 0$. Ici, $|d\varphi|(x) = \frac{\sqrt{n}}{\|x\|^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Exemple 3.1.2. *Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow [2, \infty)$ une fonction lisse. L'application*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \longmapsto \frac{x}{\|x\|},$$

est $p(\cdot)$-harmonique, où $p(x) = F(\|x\|^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Remarque 3.1.1. *Une application harmonique $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ i.e., $\tau(\varphi) = 0$, avec une densité d'énergie constante $e(\varphi) = \frac{|d\varphi|^2}{2}$ n'est pas toujours $p(\cdot)$-harmonique. Les exemples précédents prouvent les résultats suivants ; Il n'y a aucune équivalence entre la $p(\cdot)$-harmonicité et l'harmonicité d'une application de classe C^∞ $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$. Il existe des applications $p(\cdot)$-harmoniques ayant une norme de Hilbert-Schmidt non constante et elles ne sont pas harmoniques.*

3.2 Les applications $p(\cdot)$-harmoniques stable

3.2.1 La deuxième variation de la $p(\cdot)$-énergie

Théorème 3.2.1. *Soit φ une application $p(\cdot)$-harmonique entre deux variétés Riemanniennes (M,g) et (N,h). Alors on a :*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_{p(\cdot)}(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{t=s=0} = \int_D h(\mathrm{J}^{\varphi}_{p(\cdot)}(v), w) v_g, \tag{3.2.1}$$

où $\{\varphi_{t,s}\}_{(t,s)\in(-\epsilon,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon)}$ est une variation de φ à support dans un domaine compacte $D \subset M$,

$$v = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial t}\Big|_{t=s=0}, \quad w = \frac{\partial \varphi_{t,s}}{\partial s}\Big|_{t=s=0}, \tag{3.2.2}$$

et $\mathrm{J}^{\varphi}_{p(\cdot)}$ est l'opérateur de Jacobi *généralisé de φ donné par :*

$$\begin{aligned} J^{\varphi}_{p(\cdot)}(v) = &- |d\varphi|^{p(x)-2} \operatorname{trace}_g R^N(v, d\varphi)d\varphi - \operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi} |d\varphi|^{p(x)-2} \nabla^{\varphi} v \\ &- \operatorname{trace}_g \nabla(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4} \langle \nabla^{\varphi} v, d\varphi \rangle d\varphi. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Ici $\langle\, , \rangle$ est le produit scalaire sur $T^*M \otimes \varphi^{-1}TN$.

Démonstration. Soit $\phi : M \times (-\epsilon,\epsilon) \times (-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow N$ une application de classe C^∞ définie par $\phi(x,t,s) = \varphi_{t,s}(x)$. On a $\phi(x,0,0) = \varphi(x)$, et les champs de vecteurs de variation associés à la variation $\{\varphi_{t,s}\}_{(t,s)\in(-\epsilon,\epsilon)\times(-\epsilon,\epsilon)}$ sont donnés par :

$$v(x) = d_{(x,0,0)}\phi(\frac{\partial}{\partial t}), \quad w(x) = d_{(x,0,0)}\phi(\frac{\partial}{\partial s}), \quad \forall x \in M. \tag{3.2.4}$$

Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée sur (M,g) tel que $\nabla^M_{e_i} e_j = 0$ au point $x \in M$ pour tout $i,j = 1,\dots,m$. On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E_{p(\cdot)}(\varphi_{t,s}; D)\Big|_{t=s=0} &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \int_D \frac{|d\varphi_{t,s}|^{p(x)}}{p(x)} v_g \Big|_{t=s=0} \\ &= \int_D \frac{1}{p(x)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} |d\varphi_{t,s}|^{p(x)}\Big|_{t=s=0} v_g. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

D'abord, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(x)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} |d\varphi_{t,s}|^{p(x)} &= \frac{1}{p(x)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial s} (|d\varphi_{t,s}|^2)^{\frac{p(x)}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left((|d\varphi_{t,s}|^2)^{\frac{p(x)}{2}-1} \frac{\partial}{\partial s} |d\varphi_{t,s}|^2 \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial t} \left((|d\varphi_{t,s}|^2)^{\frac{p(x)}{2}-1} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(e_i,0,0), d\phi(e_i,0,0)) \right). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(x)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} |d\varphi_{t,s}|^{p(x)} = &\sum_i \frac{\partial}{\partial t} \left(|d\varphi_{t,s}|^2 \right)^{\frac{p(x)}{2}-1} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(e_i,0,0), d\phi(e_i,0,0)) \\ &+ \sum_i |d\varphi_{t,s}|^{p(x)-2} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(e_i,0,0), d\phi(e_i,0,0)) \\ &+ \sum_i |d\varphi_{t,s}|^{p(x)-2} h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}} d\phi(e_i,0,0), \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi(e_i,0,0)). \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(x)}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}|d\varphi_{t,s}|^{p(x)} = &\sum_{i,j}(p(x)-2)|d\varphi_{t,s}|^{p(x)-4}h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(e_j,0,0),d\phi(e_j,0,0))\\ & h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(e_i,0,0),d\phi(e_i,0,0))\\ &+\sum_i|d\varphi_{t,s}|^{p(x)-2}h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(e_i,0,0),d\phi(e_i,0,0))\\ &+\sum_i|d\varphi_{t,s}|^{p(x)-2}h(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(e_i,0,0),\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(e_i,0,0)).\end{aligned}$$

D'après la définition du tenseur de courbure de (N,h) et la propriété :

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(e_i,0,0)=\nabla^{\phi}_{(e_i,0,0)}d\phi(\frac{\partial}{\partial t}),\quad \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial s}}d\phi(e_i,0,0)=\nabla^{\phi}_{(e_i,0,0)}d\phi(\frac{\partial}{\partial s}),$$

avec $\left[\frac{\partial}{\partial t},(e_i,0,0)\right]=0$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(x)}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}|d\varphi_{t,s}|^{p(x)}\Big|_{t=s=0} = &\sum_i h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}w,(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}v,d\varphi\rangle d\varphi(e_i)\right)\\ &-|d\varphi|^{p(x)-2}\sum_i h(\mathrm{R}^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i),w)\\ &+\sum_i h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0},|d\varphi|^{p(x)-2}d\varphi(e_i)\right)\\ &+\sum_i h\left(\nabla^{\varphi}_{e_i}w,|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}v\right).\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

Soient $\omega_1,\omega_2,\omega_3\in\Gamma(T^*M)$ définies par :

$$\begin{aligned}\omega_1(X) &= h\left(w,(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}v,d\varphi\rangle d\varphi(X)\right);\\ \omega_2(X) &= h\left(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0},|d\varphi|^{p(x)-2}d\varphi(X)\right):\\ \omega_3(X) &= h\left(w,|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_{X}v\right),\quad \forall X\in\Gamma(TM).\end{aligned}$$

La divergence de ω_i, $(i=1,\dots,3)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}^M\omega_1 &= \sum_i e_ih\left(w,(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}v,d\varphi\rangle d\varphi(e_i)\right);\\ \mathrm{div}^M\omega_2 &= \sum_i e_ih\left(\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}d\phi(\frac{\partial}{\partial s})\Big|_{t=s=0},|d\varphi|^{p(x)-2}d\varphi(e_i)\right):\\ \mathrm{div}^M\omega_3 &= \sum_i e_ih\left(w,|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}v\right),\quad \forall X\in\Gamma(TM).\end{aligned}$$

D'après les équations (3.2.5), (3.2.6), et la condition de la $p(\cdot)$-harmonicité de φ, et le théorème de divergence, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}E_{p(\cdot)}(\varphi_{t,s};D)\Big|_{t=s=0} &= -\int_D\sum_i h\left(w,\nabla^{\varphi}_{e_i}(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}v,d\varphi\rangle d\varphi(e_i)\right)v_g\\ &-\int_D|d\varphi|^{p(x)-2}\sum_i h(w,\mathrm{R}^N(v,d\varphi(e_i))d\varphi(e_i))v_g\\ &-\int_D\sum_i h\left(w,\nabla^{\varphi}_{e_i}|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}v\right)v_g.\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

□

Si (M, g) est une variété Riemannienne compacte, φ une application $p(\cdot)$-harmonique définie de (M, g) dans une variété Riemannienne (N, h), et pour tout champ de vecteurs v parallèle le long de φ,

$$I^{\varphi}_{p(\cdot)}(v, v) \equiv \int_M h(v, \mathrm{J}^{\varphi}_{p(\cdot)}(v))\, v_g \geq 0, \tag{3.2.8}$$

alors l'application φ est dite $p(\cdot)$-harmonique stable. En utilisant le théorème de Green 1.7.2, il est facile de prouver

$$\begin{aligned} I^{\varphi}_{p(\cdot)}(v, v) &= -\int_M |d\varphi|^{p(x)-2} \sum_i h(v, \mathrm{R}^N(v, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i))v_g \\ &\quad + \int_M |d\varphi|^{p(x)-2} |\nabla^{\varphi} v|^2 v_g + \int_M (p(x) - 2)|d\varphi|^{p(x)-4} \langle \nabla^{\varphi} v, d\varphi\rangle^2 v_g. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

D'après l'équation (3.2.9), on déduit le résultat suivant.

Proposition 3.2.1. *Toute application $p(\cdot)$-harmonique dont la variété du départ est une variété Riemannienne compacte (M, g), et la variété d'arrivée est une variété Riemannienne (N, h) ayant une courbure sectionnelle négative i.e.,* $\mathrm{Sect}^N \leq 0$ *est stable.*

Dans le cas où le codomaine de l'application $p(\cdot)$-harmonique stable est la sphère standard $\mathbb{S}^n$, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.2. *Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte. Lorsque $n > 2$, Toute application $p(\cdot)$-harmonique stable $\varphi : (M, g) \longrightarrow \mathbb{S}^n$ doit etr̂e constante, où p est une fonction positive et de classe C^{∞} sur M tel que $2 \leq p(x) < n$ pour tout $x \in M$.*

Démonstration. On choisit une base orthonormale $\{e_i\}_{i=1}^m$ au point x dans (M, g). On pose $\lambda(y) = \langle \alpha, y\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, pour tout $y \in \mathbb{S}^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $v = \mathrm{grad}^{\mathbb{S}^n} \lambda$. On a $\nabla^{\mathbb{S}^n}_X v = -\lambda X$ pour tout $X \in \Gamma(T\mathbb{S}^n)$, où $\nabla^{\mathbb{S}^n}$ est la connexion de Levi-Civita sur $\mathbb{S}^n$ par rapport à la métrique standard de la sphère (voir [56]). On calcule

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla^{\varphi}_{e_i} |d\varphi|^{p(x)-2} \nabla^{\varphi}_{e_i}(v \circ \varphi) &= \nabla^{\varphi}_{\mathrm{grad}^M |d\varphi|^{p(x)-2}}(v \circ \varphi) \\ &\quad + \sum_i |d\varphi|^{p(x)-2} \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i}(v \circ \varphi). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

En utilisant la propriété $\nabla^{\mathbb{S}^n}_X v = -\lambda X$, Le premier terme de (3.2.10) est donné par :

$$\nabla^{\varphi}_{\mathrm{grad}^M |d\varphi|^{p(x)-2}}(v \circ \varphi) = -(\lambda \circ \varphi) d\varphi(\mathrm{grad}^M |d\varphi|^{p(x)-2}), \tag{3.2.11}$$

et le deuxième terme de (3.2.10) est donné par :

$$\begin{aligned} \sum_i |d\varphi|^{p(x)-2} \nabla^{\varphi}_{e_i} \nabla^{\varphi}_{e_i}(v \circ \varphi) &= -\sum_i |d\varphi|^{p(x)-2} \nabla^{\varphi}_{e_i}(\lambda \circ \varphi) d\varphi(e_i) \\ &= -\sum_i |d\varphi|^{p(x)-2} \langle d\varphi(e_i), v \circ \varphi\rangle d\varphi(e_i) \\ &\quad -(\lambda \circ \varphi)|d\varphi|^{p(x)-2} \tau(\varphi). \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

En remplaçant les formules (3.2.11) et (3.2.12) dans (3.2.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla^{\varphi}_{e_i} |d\varphi|^{p(x)-2} \nabla^{\varphi}_{e_i}(v \circ \varphi) &= -(\lambda \circ \varphi) d\varphi(\mathrm{grad}^M |d\varphi|^{p(x)-2}) \\ &\quad - \sum_i |d\varphi|^{p(x)-2} \langle d\varphi(e_i), v \circ \varphi\rangle d\varphi(e_i) \\ &\quad -(\lambda \circ \varphi)|d\varphi|^{p(x)-2} \tau(\varphi). \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

D'après la condition de la $p(\cdot)$-harmonicité de φ

$$\tau_{p(\cdot)}(\varphi) = |d\varphi|^{p(x)-2}\tau(\varphi) + d\varphi(\mathrm{grad}^M |d\varphi|^{p(x)-2}) = 0,$$

et l'équation (3.2.13), on obtient :

$$\sum_i \langle \nabla^{\varphi}_{e_i} |d\varphi|^{p(x)-2} \nabla^{\varphi}_{e_i}(v\circ\varphi), v\circ\varphi\rangle \;=\; -\sum_i |d\varphi|^{p(x)-2}\langle d\varphi(e_i), v\circ\varphi\rangle^2. \tag{3.2.14}$$

Puisque la sphère $\mathbb{S}^n$ a une courbure constante, on a :

$$\begin{aligned}\sum_i \langle |d\varphi|^{p(x)-2} R^{\mathbb{S}^n}(v\circ\varphi, d\varphi(e_i))d\varphi(e_i), v\circ\varphi\rangle &= |d\varphi|^{p(x)}\langle v\circ\varphi, v\circ\varphi\rangle \\ &\quad -\sum_i |d\varphi|^{p(x)-2}\langle d\varphi(e_i), v\circ\varphi\rangle^2.\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

D'après la définition de l'opérateur de Jacobi généralisé, et (3.2.14), (3.2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle J^{\varphi}_f(v\circ\varphi), v\circ\varphi\rangle \;&=\; 2|d\varphi|^{p(x)-2}\sum_i \langle d\varphi(e_i), v\circ\varphi\rangle^2 \\ &\quad -|d\varphi|^{p(x)}\langle v\circ\varphi, v\circ\varphi\rangle \\ &\quad -\sum_i \langle \nabla^{\varphi}_{e_i}(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle \nabla^{\varphi} v\circ\varphi, d\varphi\rangle d\varphi(e_i), v\circ\varphi\rangle,\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

en utilisant $\langle \nabla^{\varphi} v\circ\varphi, d\varphi\rangle = -(\lambda\circ\varphi)|d\varphi|^2$, et l'équation (3.2.16), on trouve que

$$\mathrm{trace}_{\alpha}\langle J^{\varphi}_f(v\circ\varphi), v\circ\varphi\rangle \;=\; (p(x)-n)|d\varphi|^{p(x)}. \tag{3.2.17}$$

D'après l'équation (3.2.17), la connditon de la $p(\cdot)$-harmonicité stable de φ, avec $2 \le p(x) < n$, $\forall x \in M$, on déduit le théorème 3.2.2. □

3.3 Les applications $p(\cdot)$-Biharmoniques

Définition 3.3.1. *Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, la $p(\cdot)$-biénergie de φ est définie par*

$$E_{2,p(\cdot)}(\varphi; D) = \frac{1}{2}\int_D |\tau_{p(\cdot)}(\varphi)|^2 v_g, \tag{3.3.1}$$

où $p \ge 2$ est une fonction de classe C^∞ sur M, et D est un domaine compacte de M. Une application φ est dite $p(\cdot)$-biharmonique si elle est point critique de la fonctionnelle de $p(\cdot)$-biénergie pour tout domaine compacte D.

3.3.1 La première variation de la $p(\cdot)$-biénergie

Théorème 3.3.1. *Soit φ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes (M,g) et (N,h). Alors on a :*

$$\frac{d}{dt}E_{2,p(\cdot)}(\varphi_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D h(v, \tau_{2,p(\cdot)}(\varphi))v_g, \tag{3.3.2}$$

où $\{\varphi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ *est une variation de* φ *à support dans* D, $v = \frac{d\varphi_t}{dt}\big|_{t=0}$ *est le champ de vecteurs de variation, et* $\tau_{2,p(\cdot)}(\varphi)$ *le champ* $p(\cdot)$*-bitension de* φ *donné par*

$$\begin{aligned}\tau_{2,p(\cdot)}(\varphi) = &-|d\varphi|^{p(x)-2}\,\mathrm{trace}_g\,\mathrm{R}^N(\tau_{p(\cdot)}(\varphi), d\varphi)d\varphi - \mathrm{trace}_g\,\nabla^\varphi|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^\varphi\tau_{p(\cdot)}(\varphi)\\ &- \mathrm{trace}_g\,\nabla(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^\varphi\tau_{p(\cdot)}(\varphi), d\varphi\rangle d\varphi. \qquad (3.3.3)\end{aligned}$$

Démonstration. On définit $\phi : M\times(-\epsilon,\epsilon)\longrightarrow N$ par $\phi(x,t)=\varphi_t(x)$. D'abord, on note que :

$$\frac{d}{dt}E_{2,p(\cdot)}(\varphi_t; D) = \int_D h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau_{p(\cdot)}(\varphi_t), \tau_{p(\cdot)}(\varphi_t))\,v_g. \qquad (3.3.4)$$

On calcule dans une base normale au point $x\in M$:

$$\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\tau_{p(\cdot)}(\varphi_t) = \sum_i \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{(e_i,0)}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0). \qquad (3.3.5)$$

D'après la définition du tenseur de courbure de (N,h), on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_i \nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla^\phi_{(e_i,0)}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0)\\ &\quad= |d\varphi_t|^{p(x)-2}\sum_i \mathrm{R}^N(d\phi(\frac{\partial}{\partial t}), d\phi(e_i,0))d\phi(e_i,0)\\ &\qquad+\sum_i \nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0). \qquad (3.3.6)\end{aligned}$$

En utilisant la compatibilité de ∇^ϕ avec h, on trouve que :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m h(\nabla^\phi_{(e_i,0)}\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0), \tau_{p(\cdot)}(\varphi_t))\\ &\quad= \sum_{i=1}^m (e_i,0)\left[h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0), \tau_{p(\cdot)}(\varphi_t))\right]\\ &\qquad-\sum_i h(\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0), \nabla^\phi_{(e_i,0)}\tau_{p(\cdot)}(\varphi_t)). \qquad (3.3.7)\end{aligned}$$

D'après la propriété $\nabla^\phi_X d\phi(Y) = \nabla^\phi_Y d\phi(X) + d\phi([X,Y])$, avec $X = \frac{\partial}{\partial t}$ et $Y = |d\varphi_t|^{p(x)-2}(e_i,0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\nabla^\phi_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0)\Big|_{t=0}\\ &\quad= |d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^\varphi_{e_i}v\\ &\qquad+\sum_j (p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}h(\nabla^\varphi_{e_j}v, d\varphi(e_j))d\varphi(e_i), \qquad (3.3.8)\end{aligned}$$

pour tout $i = 1,...,m$. En remplaçant (3.3.8) dans (3.3.7), on a :

$$
\begin{aligned}
&\sum_i (\nabla^{\phi}_{(e_i,0)}\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}}|d\varphi_t|^{p(x)-2}d\phi(e_i,0),\tau_{p(\cdot)}(\varphi_t))\Big|_{t=0}\\
&\quad= \sum_i e_i h(|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}v,\tau_{p(\cdot)}(\varphi))\\
&\qquad+\sum_i e_i h((p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}v,d\varphi\rangle d\varphi(e_i),\tau_{p(\cdot)}(\varphi))\\
&\qquad-\sum_i e_i h(v,|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_{p(\cdot)}(\varphi))\\
&\qquad+\sum_i h(v,\nabla^{\varphi}_{e_i}|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_{e_i}\tau_{p(\cdot)}(\varphi))\\
&\qquad-\sum_j e_j h(v,(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}\tau_{p(\cdot)}(\varphi),d\varphi\rangle d\varphi(e_j))\\
&\qquad+\sum_j h(v,\nabla^{\varphi}_{e_j}(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}\tau_{p(\cdot)}(\varphi),d\varphi\rangle d\varphi(e_j)). \qquad (3.3.9)
\end{aligned}
$$

Soient $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\in\Gamma(T^*M)$ définies par :

$$
\begin{aligned}
\eta_1(X) &= h(|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_X v,\tau_{p(\cdot)}(\varphi));\\
\eta_2(X) &= h((p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}v,d\varphi\rangle d\varphi(X),\tau_{p(\cdot)}(\varphi));\\
\eta_3(X) &= h(v,|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}_X\tau_{p(\cdot)}(\varphi));\\
\eta_4(X) &= h(v,(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}\tau_{p(\cdot)}(\varphi),d\varphi\rangle d\varphi(X)).
\end{aligned}
$$

En fin, on calcule la divergence de η_i $(i=1,...,4)$ et en la remplaçant dans (3.3.9). D'après les équations (3.3.4)-(3.3.6), (3.3.9), et le théorème de divergence, on déduit le théorème 3.3.1.

□

D'après le théorème 3.3.1, on déduit :

Corollaire 3.3.1. *Soit $\varphi:(M,g)\to(N,h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes. Alors, φ est $p(\cdot)$-biharmonique si et seulement si*

$$
\begin{aligned}
\tau_{2,p(\cdot)}(\varphi) &= -|d\varphi|^{p(x)-2}\operatorname{trace}_g \mathrm{R}^N(\tau_{p(\cdot)}(\varphi),d\varphi)d\varphi\\
&\quad-\operatorname{trace}_g\nabla^{\varphi}|d\varphi|^{p(x)-2}\nabla^{\varphi}\tau_{p(\cdot)}(\varphi)\\
&\quad-\operatorname{trace}_g\nabla(p(x)-2)|d\varphi|^{p(x)-4}\langle\nabla^{\varphi}\tau_{p(\cdot)}(\varphi),d\varphi\rangle d\varphi=0.
\end{aligned}
$$

Remarques 3.3.1.

1. *Pour toute application $\varphi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ entre deux variétés Riemanniennes, on a*
$$\tau_{2,p(\cdot)}(\varphi)=J^{\varphi}_{p(\cdot)}(\tau_{p(\cdot)}(\varphi)).$$

2. *On peut extraire plusieurs exemples des applications $p(\cdot)$-biharmonique non $p(\cdot)$-harmonique $\varphi:(M,g)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ où le champ de $p(\cdot)$-tension est parallèle le long de φ, i.e., les composantes de $\tau_{p(\cdot)}(\varphi)$ sont constantes.*

Exemple 3.3.1. *Soit* $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \sqrt{x^2 + y^2} > 2\}$. *L'application différentiable* $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\varphi(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z), \quad \forall (x, y, z) \in M,$$

est $p(\cdot)$*-biharmonique non* $p(\cdot)$*-harmonique, où*

$$p(x, y, z) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\ln(2)},$$

pour tout $(x, y, z) \in M$. *Ici,* $\tau_{p(\cdot)}(\varphi) = (1, 0)$.

CHAPITRE 4

LES APPLICATIONS p-BIHARMONIQUES ET LA DÉFORMATION DE LA MÉTRIQUE

Soit $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ entre deux variétés Riemanniennes. Dans ce chapitre, on considère les effets d'une déformation de la métrique h sur N notée $\widetilde{h}$ et on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit p-biharmonique propre. Les résultats de ce chapitre sont obtenus dans [38].

4.1 La p-biharmonicité d'une application $\varphi : (M, g) \to (N, \tilde{h})$

Théorème 4.1.1. *Soit $\varphi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application p-biharmonique entre deux variétés Riemanniennes, et soit la métrique Riemanniennes $\tilde{h} = h - df \otimes df$, où $f \in C^\infty(N)$ tel que $\|\operatorname{grad} f\|^2 = h(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f) < 1$. On suppose que*

i) *la fonction $f \circ \varphi$ est constante sur M ;*

ii) *le champ de vecteurs $\operatorname{grad} f$ est parallèle le long de φ.*

Alors $\widetilde{\varphi} : (M, g) \longrightarrow (N, \tilde{h})$, $x \longmapsto \varphi(x)$ est une application p-biharmonique.

Démonstration. Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée normale sur (M, g) au point x où $m = \dim M$, alors l'application $\widetilde{\varphi}$ de (M, g) à $(N, \tilde{h})$ est p-biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}\tau_{2,p}(\widetilde{\varphi}) = &- |d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-2} \sum_{i=1}^m \tilde{R}^N(\tau_p(\widetilde{\varphi}), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i) \\ &- \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^{\widetilde{\varphi}} |d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-2} \nabla_{e_i}^{\widetilde{\varphi}} \tau_p(\widetilde{\varphi}) \\ &- (p-2) \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^{\widetilde{\varphi}} \langle \nabla^{\widetilde{\varphi}} \tau_p(\widetilde{\varphi}), d\varphi \rangle |d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-4} d\varphi(e_i) = 0,\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

où $\widetilde{R}^N$ est la courbure Riemannienne par rapport à $\tilde{h}$. Le champ de p-tension de $\widetilde{\varphi}$ est donné par

$$\tau_p(\widetilde{\varphi}) = |d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-2} \tau(\widetilde{\varphi}) + (p-2)|d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-3} d\varphi(\operatorname{grad}^M |d\varphi|_{\widetilde{h}}),$$

$\tau(\widetilde{\varphi})$ dénote le champ de tension de l'application φ par rapport à $\tilde{h}$ donné au point x par :

$$\begin{aligned}\tau(\widetilde{\varphi}) &= \sum_{i=1}^{m} \nabla^{\widetilde{\varphi}}_{e_i} d\varphi(e_i)\\ &= \tau(\varphi) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{Hess}_f(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))}{1 - \|\mathrm{grad} f\|^2 \circ \varphi} (\mathrm{grad} f) \circ \varphi,\end{aligned}$$

où $\tau(\varphi)$ est le champ de tension de l'application φ par rapport à la métrique h. Puisque le champ de vecteurs $\mathrm{grad}\, f$ est parallèle le long de φ, on a $\nabla^{\varphi}_X(\mathrm{grad} f) \circ \varphi = 0$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$. Ce qui implique que, $\mathrm{Hess}_f(d\varphi(X), V) = 0$ où $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$. On note que :

$$\begin{aligned}|d\varphi|^2_{\widetilde{h}} &= \sum_i \widetilde{h}(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))\\ &= \sum_i h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) - \sum_{i=1} d\varphi(e_i)(f) d\varphi(e_i)(f)\\ &= |d\varphi|^2_h - \sum_{i=1}^{m} e_i(f \circ \varphi) e_i(f \circ \varphi)\\ &= |d\varphi|^2_h - |\,\mathrm{grad}^M (f \circ \varphi)|^2.\end{aligned}$$

Puisque $f \circ \varphi$ est constante sur M, on obtient $|d\varphi|^2_{\widetilde{h}} = |d\varphi|^2_h$. Donc $\tau_p(\widetilde{\varphi}) = \tau_p(\varphi)$. Selon le Théorème 1.9.2, on a :

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{R}}^N(\tau_p(\widetilde{\varphi}), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i)\\ &= \mathrm{R}^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i)\\ &\quad - \frac{h(\mathrm{R}^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))(\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi, d\varphi(e_i))}{1 - \|\,\mathrm{grad}^N f\|^2 \circ \varphi} (\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi\\ &\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f(\tau_p(\varphi), (\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi)\, \mathrm{Hess}_f(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))}{(1 - \|\,\mathrm{grad}^N f\|^2 \circ \varphi)^2} (\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi\\ &\quad + \frac{\mathrm{Hess}_f(d\varphi(e_i), (\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi)\, \mathrm{Hess}_f(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))}{(1 - \|\,\mathrm{grad}^N f\|^2 \circ \varphi)^2} (\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi\\ &\quad - \frac{\mathrm{Hess}_f(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))}{1 - \|\,\mathrm{grad}^N f\|^2 \circ \varphi} \nabla^N_{\tau_p(\varphi)} \mathrm{grad}^N f\\ &\quad + \frac{\mathrm{Hess}_f(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))}{1 - \|\,\mathrm{grad}^N f\|^2 \circ \varphi} \nabla^N_{d\varphi(e_i)} \mathrm{grad}^N f, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

pour tous $i = 1, ..., m$. D'après l'équation (4.1.2), avec $\mathrm{Hess}_f(d\varphi(X), V) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{R}}^N(\tau_p(\widetilde{\varphi}), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i)\\ &= \mathrm{R}^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i)) d\varphi(e_i)\\ &\quad - \frac{h(\mathrm{R}^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))(\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi, d\varphi(e_i))}{1 - \|\,\mathrm{grad}^N f\|^2 \circ \varphi} (\mathrm{grad}^N f) \circ \varphi.\end{aligned}$$

Soit $i \in \{1, ..., m\}$. On calcule :

$$
\begin{aligned}
&h(\mathrm{R}^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, d\varphi(e_i))\\
&\qquad = h(\nabla^N_{\tau_p(\varphi)}\nabla^N_{d\varphi(e_i)}\operatorname{grad}^N f, d\varphi(e_i))\\
&\qquad\quad -h(\nabla^N_{d\varphi(e_i)}\nabla^N_{\tau_p(\varphi)}\operatorname{grad}^N f, d\varphi(e_i))\\
&\qquad\quad -h(\nabla^N_{[\tau_p(\varphi),d\varphi(e_i)]}\operatorname{grad}^N f, d\varphi(e_i)).
\end{aligned}
$$

En utilisant $\nabla^\varphi_X(\operatorname{grad} f)\circ\varphi = 0$, et la symétrie de Hess_f sur (N,h), la dernière équation devient :

$$
\begin{aligned}
&h(\mathrm{R}^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))(\operatorname{grad}^N f)\circ\varphi, d\varphi(e_i))\\
&\qquad = -h(\nabla^\varphi_{e_i}\nabla^N_{\tau_p(\varphi)}\operatorname{grad}^N f, d\varphi(e_i))\\
&\qquad = h(\nabla^N_{\tau_p(\varphi)}\operatorname{grad}^N f, \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i))\\
&\qquad = |d\varphi|_h^{p-2} h(\nabla^N_{\tau(\varphi)}\operatorname{grad}^N f, \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i)).
\end{aligned}
$$

Soit $\{F_a\}_{a=1}^n$ une base orthonormale et normale sur (N,h) au point $\varphi(x)$ où $n = \dim N$. Pour que , $\nabla^N_{\tau(\varphi)}\operatorname{grad}^N f = \sum_a \tau(\varphi)(F_a(f))F_a = 0$ au point $\varphi(x)$ car la fonction f est constante sur $\varphi(M)$. Donc, le premier terme de (4.1.1) est donné par :

$$
\begin{aligned}
&-|d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-2}\sum_i \widetilde{\mathrm{R}}^N(\tau_p(\widetilde{\varphi}), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i)\\
&\qquad = -|d\varphi|_h^{p-2}\sum_i \mathrm{R}^N(\tau_p(\varphi), d\varphi(e_i))d\varphi(e_i). \qquad (4.1.3)
\end{aligned}
$$

Par calculs directs, on obtient :

$$\nabla^{\widetilde{\varphi}}_{e_i}|d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-2}\nabla^{\widetilde{\varphi}}_{e_i}\tau_p(\widetilde{\varphi}) = \nabla^\varphi_{e_i}|d\varphi|_h^{p-2}\nabla^\varphi_{e_i}\tau_p(\varphi), \tag{4.1.4}$$

$$\nabla^{\widetilde{\varphi}}_{e_i}\langle\nabla^{\widetilde{\varphi}}\tau_p(\widetilde{\varphi}), d\varphi\rangle|d\varphi|_{\widetilde{h}}^{p-4}d\varphi(e_i) = \nabla^\varphi_{e_i}\langle\nabla^\varphi\tau_p(\varphi), d\varphi\rangle|d\varphi|_h^{p-4}d\varphi(e_i), \tag{4.1.5}$$

pour tout $i = 1, ..., m$. En remplaçant (4.1.3), (4.1.4), et (4.1.5) dans (4.1.1), on déduit le Théorème 4.1.1. □

Remarque 4.1.1. *Soit $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ une application p-harmonique entre deux variété Riemanniennes et $\tilde{h} = h - df\otimes df$, où $f \in C^\infty(N)$ tel que $\|\operatorname{grad} f\| < 1$. Si la fonction $f\circ\varphi$ est constante sur M, et le gradient de f est parallèle le long de φ. Alors, l'application $\varphi : (M,g) \longrightarrow (N,\tilde{h})$ est p-harmonique.*

Exemple 4.1.1. *Soit $n \geq 3$, $\mathbb{H}^{n-1} = \{(x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} | x_{n-1} > 0\}$ un espace hyperbolique de dimension $(n-1)$. On considère l'application p-biharmonique*

$$
\begin{aligned}
\varphi : \left(\mathbb{H}^{n-1}, g = x_{n-1}^{-\frac{2}{p}}(dx_1^2 + ... + dx_{n-1}^2)\right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^n, h = dy_1^2 + ... + dy_n^2\right).\\
(x_1, ..., x_{n-1}) &\longmapsto (0, x_1, ..., x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Selon le Théorème 4.1.1, pour toute fonction $f = F(y_1)$ de classe C^∞ telle que la dérivée $F' < 1$, et par rapport à la métrique Riemannienne :

$$\tilde{h} = h - df\otimes df = \left(1 - F'(y_1)^2\right)dy_1^2 + ... + dy_{n-1}^2 + dy_n^2,$$

l'application $\widetilde{\varphi} : (\mathbb{H}^{n-1}, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \widetilde{h})$, $(x_1, ..., x_{n-1}) \longmapsto (0, x_1, ..., x_{n-1})$ *est p-biharmonique. Ici*

$$\tau_p(\widetilde{\varphi}) = \left(0, ..., 0, \frac{(p-n+1)(n-1)^{\frac{p}{2}-1}}{p}\right).$$

Donc, $\widetilde{\varphi}$ *est une application p-biharmonique propre (i.e., p-biharmonique non p-harmonique) si et seulement si* $p \neq n-1$.

4.2 La p-biharmonicité de l'application identité $\widetilde{I} : (M, g) \to (M, \tilde{g})$

Théorème 4.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$ tel que $\|\operatorname{grad} f\|^2 = \frac{1}{2}$. Alors, l'application identité $\widetilde{I}$ définie de (M, g) dans $(M, \widetilde{g})$ où $\widetilde{g} = g - df \otimes df$ est p-biharmonique propre si et seulement si :*

$$\begin{aligned}
&4\left(m - \frac{1}{2}\right)(\Delta f)\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) + \left[2\left(m - \frac{1}{2}\right)\Delta(\Delta f)\right.\\
&+8\left(m - \frac{1}{2}\right)(\Delta f)\operatorname{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\\
&+\left\{4\left(m - \frac{1}{2}\right) - 2(p-2)\right\}(\Delta f)g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f))\\
&\left.-4(p-2)(\Delta f)^3\right]\operatorname{grad} f + \left\{4\left(m - \frac{1}{2}\right) + p - 2\right\}\nabla_{\operatorname{grad}(\Delta f)}\operatorname{grad} f\\
&+(p-2)\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad}(\Delta f) + \left\{m - \frac{1}{2} + 2(p-2)\right\}\operatorname{grad}(\Delta f)^2 = 0,
\end{aligned}$$

où Δf est le Laplacian de f par rapport à g.

Démonstration. Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une bas orthonormale et normale sur (M, g) au point x, on calcule :

$$\begin{aligned}
\tau(\widetilde{I}) &= \sum_i \left[\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i} d\widetilde{I}(e_i) - d\widetilde{I}(\nabla_{e_i} e_i)\right]\\
&= \sum_i \widetilde{\nabla}_{e_i} e_i\\
&= -\sum_i \frac{\operatorname{Hess}_f(e_i, e_i)}{1 - \|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f\\
&= -2(\Delta f)\operatorname{grad} f. \qquad (4.2.1)
\end{aligned}$$

Comme $|d\widetilde{I}|^2_{\widetilde{g}} = |d\widetilde{I}|^2_g - \|\operatorname{grad} f\|^2 = m - \frac{1}{2}$, le champ de p-tension de l'identité $\widetilde{I}$ est donné par :

$$\tau_p(\widetilde{I}) = -2\left(m - \frac{1}{2}\right)^{\frac{p-2}{2}}(\Delta f)\operatorname{grad} f. \qquad (4.2.2)$$

On note que, l'application identité $\widetilde{I}$ est p-harmonique si et seulement si la fonction f est harmonique sur (M, g).

On calcule le champ de p-bitension de l'identité $\widetilde{I}$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{R}}(\tau_p(\widetilde{I}), d\widetilde{I}(e_i))d\widetilde{I}(e_i) &= -2\left(m-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-2}{2}}(\Delta f)\Big[\mathrm{R}(\operatorname{grad} f, e_i)e_i \\
&\quad -\frac{g(\mathrm{R}(\operatorname{grad} f, e_i)\operatorname{grad} f, e_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad -\frac{\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(e_i, e_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad +\frac{\mathrm{Hess}_f(e_i, \operatorname{grad} f)\,\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, e_i)}{(1-\|\operatorname{grad} f\|^2)^2}\operatorname{grad} f \\
&\quad -\frac{\mathrm{Hess}_f(e_i, e_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f \\
&\quad +\frac{\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, e_i)}{1-\|\operatorname{grad} f\|^2}\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f\Big],
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

pour tout $i = 1, ..., m$. En utilisant $\|\operatorname{grad} f\|^2 = \frac{1}{2}$ sur M, on obtient $\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad} f = 0$, et $\mathrm{Hess}_f(\operatorname{grad} f, X) = 0$, pour tout $X \in \Gamma(TM)$. Pour que l'équation (4.2.3) devient :

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(\tau_p(\widetilde{I}), d\widetilde{I}(e_i))d\widetilde{I}(e_i) &= -2\left(m-\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-2}{2}}(\Delta f)\Big[R(\operatorname{grad} f, e_i)e_i \\
&\quad -2g(R(\operatorname{grad} f, e_i)\operatorname{grad} f, e_i)\operatorname{grad} f\Big].
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Alors, le premier terme du champ de p-bitension de $\widetilde{I}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
&-|d\widetilde{I}|_{\widetilde{g}}^{p-2}\sum_i \widetilde{\mathrm{R}}(\tau_p(\widetilde{I}), d\widetilde{I}(e_i))d\widetilde{I}(e_i) \\
&\qquad = 2\left(m-\frac{1}{2}\right)^{p-2}(\Delta f)\Big[\mathrm{Ricci}(\operatorname{grad} f) \\
&\qquad\quad +2\,\mathrm{Ric}(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\Big].
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

On calcule le deuxième terme du champ de p-bitension de $\widetilde{I}$:

$$\begin{aligned}
&-\sum_i \nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}|d\widetilde{I}|_{\widetilde{g}}^{p-2}\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\tau_p(\widetilde{I}) \\
&\qquad = 2\left(m-\frac{1}{2}\right)^{p-2}\sum_i \nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}(\Delta f)\operatorname{grad} f.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Pour tout $i = 1, ..., m$, on a :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}(\Delta f)\operatorname{grad} f &= \nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\Big[e_i(\Delta f)\operatorname{grad} f + (\Delta f)\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\operatorname{grad} f\Big]\\
&= \nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\Big[e_i(\Delta f)\operatorname{grad} f + (\Delta f)\widetilde{\nabla}_{e_i}\operatorname{grad} f\Big]\\
&= \nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\Big[e_i(\Delta f)\operatorname{grad} f + (\Delta f)\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f\Big]\\
&= e_i(e_i(\Delta f))\operatorname{grad} f + e_i(\Delta f)\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\operatorname{grad} f\\
&\quad + e_i(\Delta f)\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f + (\Delta f)\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f\\
&= e_i(e_i(\Delta f))\operatorname{grad} f + 2e_i(\Delta f)\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f\\
&\quad + (\Delta f)\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\operatorname{grad} f\\
&\quad - 2(\Delta f)\operatorname{Hess}_f(e_i, \nabla_{e_i}\operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f.
\end{aligned}$$

En remplaçant la dernière équation dans (4.2.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
-\sum_i \nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}|d\widetilde{I}|^{p-2}_{\widetilde{g}}\nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\tau_p(\widetilde{I})&\\
&= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^{p-2}\big[\Delta(\Delta f)\operatorname{grad} f + 2\nabla_{\operatorname{grad}(\Delta f)}\operatorname{grad} f\\
&\quad + (\Delta f)\operatorname{trace}_g \nabla^2 \operatorname{grad} f\\
&\quad + 2(\Delta f)g(\operatorname{grad} f, \operatorname{trace}_g \nabla^2 \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f\big]. \qquad (4.2.7)
\end{aligned}$$

En utilisant la même méthodologie dans les calculs précédents, on trouve :

$$\langle \nabla^{\widetilde{I}}\tau_p(\widetilde{I}), d\widetilde{I}\rangle_{\widetilde{g}} = -2\left(m - \frac{1}{2}\right)^{\frac{p-2}{2}}\left[\frac{1}{2}g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f)) + (\Delta f)^2\right].$$

Alors, le troisième terme du champ de p-bitension de $\widetilde{I}$ est donné par :

$$\begin{aligned}
-(p-2)\sum_i \nabla^{\widetilde{I}}_{e_i}\langle \nabla^{\widetilde{I}}\tau_p(\widetilde{I}), d\widetilde{I}\rangle_{\widetilde{g}}|d\widetilde{I}|^{p-4}_{\widetilde{g}}d\widetilde{I}(e_i)&\\
&= 2(p-2)\left(m - \frac{1}{2}\right)^{p-3}\Big[\frac{1}{2}\nabla_{\operatorname{grad}(\Delta f)}\operatorname{grad} f\\
&\quad + \frac{1}{2}\nabla_{\operatorname{grad} f}\operatorname{grad}(\Delta f) + \operatorname{grad}(\Delta f)^2 \qquad (4.2.8)\\
&\quad - (\Delta f)g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}(\Delta f))\operatorname{grad} f - 2(\Delta f)^3\operatorname{grad} f\Big].
\end{aligned}$$

D'après les formules (4.2.5), (4.2.7), (4.2.8), et l'équation suivante :

$$\operatorname{trace}_g(\nabla)^2\operatorname{grad} f = \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) + \operatorname{grad}(\Delta f)$$

on déduit le Théorème 4.2.1. □

Corollaire 4.2.1. *Soit (M, g) une variété Riemannienne et $f \in C^\infty(M)$ tel que $\|\operatorname{grad} f\|^2 = \frac{1}{2}$. On suppose que :*

i) $\Delta f = F(f)$ *pour une certaine fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R})$;*

ii) $\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) = \lambda \operatorname{grad} f$ *où $\lambda \in C^\infty(M)$.*

Alors l'application identité $\widetilde{I} : (M, g) \longrightarrow (M, g - df \otimes df)$ *est* p*-biharmonique si et seulement si :*

$$\frac{1}{2}(2m + p - 3)F''(f) + 3(2m + p - 3)F(f)F'(f) - 4(p - 2)F(f)^3$$
$$+8\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda F(f) = 0.$$

4.2.1 Exemple sur la p-biharmonicité d'une application $\varphi : (M, g) \to (M, \widetilde{g})$

Exemple 4.2.1. *Soit* $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$ *un espace hyperbolique de dimension* n*, muni de la métrique Riemannienne* $g = x_n^{\alpha}(dx_1^2 + ... + dx_n^2)$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$*. La fonction différentiable* $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\alpha+2} x_n^{\frac{\alpha}{2}+1}$ *pour tout* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{H}^n$ *vérifie* $\|\operatorname{grad} f\| = \frac{1}{2}$ *et* $\Delta f = \frac{\sqrt{2}}{4}\alpha(n - 1)x_n^{-\frac{\alpha}{2}-1}$*. Pour que,* $\Delta f = F(f)$*, où*

$$F(t) = \frac{\alpha(n - 1)}{2(\alpha + 2)t}, \quad \forall t > 0.$$

On note que, $\operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} f) = \lambda \operatorname{grad} f$*, où*

$$\lambda = \frac{\alpha(n - 1)}{2} x_n^{-\alpha-2}.$$

Selon le corollaire 4.2.1, l'application identité $\widetilde{I} : (M, g) \longrightarrow (M, g - df \otimes df)$ *est* p*-biharmonique propre si et seulement si*

$$p = -\frac{-16\,n + 34\,\alpha + 24 - 22\,\alpha\,n - 4\,\alpha\,n^2 - 11\,\alpha^2 n + 2\,\alpha^2 n^2 + 11\,\alpha^2}{6\,\alpha\,n - \alpha^2 n + 2\,\alpha^2 n^2 - 8 - 14\,\alpha - 3\,\alpha^2}.$$

(Pour $n = 2$ *et* $\alpha = -1$ *on obtient* $p = 5$*).*

CHAPITRE 5

LES APPLICATIONS p-BIHARMONIQUES ENTRE LES VARIÉTÉS PRODUIT TORDU

Dans ce chapitre, on donne la condition de la p-biharmonicité de l'inclusion d'une variété riemannienne (N, h) dans le produit tordu $M \times_{f^2} N$, de la projection de $M \times_{f^2} N$ à (M, g). On donne également les conditions de la p-harmonicité et la p-biharmonicité du graphe de (M, g) dans $M \times_{f^2} N$. [39]

5.1 La p-biharmonicité de l'inclusion

Soit (M, g) et (N, h) deux variétés Riemanniennes. On dénote par

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{i}_{x_0} & : & (N, h) & \rightarrow & (M \times_{f^2} N, G_{f^2}), \\ & & y & \mapsto & (x_0, y) \end{array}$$

l'application de l'inclusion de N au niveau de $x_0 \in M$ dans $M \times_{f^2} N$. Dans ce qui suit , on caractérise la p-biharmonicité de $\mathbf{i}_{x_0}$ en fonction de f.

Théorème 5.1.1. *Le champ de p-bitension de l'inclusion* $\mathbf{i}_{x_0}$ *est donné par*

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(i_{x_0}) \quad = \quad & -\frac{n^p}{8} f^{2(p-2)}(x_0) \Big(\operatorname{grad} |\operatorname{grad} f^2|^2, 0\Big) \circ \mathbf{i}_{x_0} \\ & -\frac{(p-2)n^p}{8} f^{2(p-3)}(x_0) |\operatorname{grad} f^2|^2_{x_0} (\operatorname{grad} f^2, 0) \circ \mathbf{i}_{x_0}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\{F_a\}_{a=1}^n$ une base orthonormale au point $y \in N$, i.e., $\nabla^N_{F_a} F_b = 0$ au point $y \in N$ pour tout $a, b \in \{1, \ldots, n\}$. En utilisant (1.8.1), on calcule le champ de tension de l'inclusion $\mathbf{i}_{x_0}$:

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{i}_{x_0}) &= \operatorname{trace}_h \nabla d\mathbf{i}_{x_0} \\ &= \sum_a \nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a} d\mathbf{i}_{x_0}(F_a) \\ &= \sum_a \Big(\widetilde{\nabla}_{(0,F_a)}(0, F_a)\Big) \circ \mathbf{i}_{x_0} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_a h(F_a, F_a)(\operatorname{grad} f^2, 0) \circ \mathbf{i}_{x_0} \\ &= -\frac{n}{2}(\operatorname{grad} f^2, 0) \circ \mathbf{i}_{x_0}. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Ensuite, on calcule le champ de p-tension de l'inclusion. D'abord , on calcule la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\mathbf{i}_{x_0}$. On a :

$$\begin{aligned} |d\mathbf{i}_{x_0}|^2 &= \sum_a G_{f^2}(d\mathbf{i}_{x_0}(F_a), d\mathbf{i}_{x_0}(F_a)) \\ &= \sum_a G_{f^2}((0,F_a),(0,F_a)) \circ \mathbf{i}_{x_0}. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

En utilisant la définition de la métrique du produit tordu G_{f^2} dans 1.8.1, l'équation (5.1.2) devient

$$\begin{aligned} |d\mathbf{i}_{x_0}|^2 &= \sum_a (f\circ\pi)^2 h(F_a,F_a) \\ &= nf^2(x_0). \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Alors, le premier terme du champ de p-tension de $\mathbf{i}_{x_0}$ est donné par :

$$|d\mathbf{i}_{x_0}|^{p-2}\tau(\mathbf{i}_{x_0}) = -\frac{n^{\frac{p}{2}}}{2} f^{p-2}(x_0)(\operatorname{grad} f^2, 0)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \tag{5.1.4}$$

Comme $\operatorname{grad}^N |d\mathbf{i}_{x_0}| = 0$, et la fonction $|d\mathbf{i}_{x_0}|$ est constante sur N, le deuxième terme de (0.0.4) est nul. Alors, le champ de p-tension de $\mathbf{i}_{x_0}$ est donné par

$$\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}) = -\frac{n^{\frac{p}{2}}}{2} f^{p-2}(x_0)(\operatorname{grad} f^2, 0)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \tag{5.1.5}$$

On note que, $\mathbf{i}_{x_0}$ est p-harmonique si et seulement si $(\operatorname{grad} f^2)_{x_0} = 0$.
On passe au champ de p-bitension de l'inclusion $\mathbf{i}_{x_0}$. Premièrement, En utilisant (1.8.2), on calcule le premier terme du champ de p-bitension de l'inclusion qui est donné par (0.0.7) :

$$\begin{aligned} &\widetilde{R}(\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}), d\mathbf{i}_{x_0}(F_a))d\mathbf{i}_{x_0}(F_a) \\ &\quad= -\frac{n^{\frac{p}{2}}}{2} f^{p-2}(x_0)\left(\widetilde{R}((\operatorname{grad} f^2,0),(0,F_a))(0,F_a)\right)\circ \mathbf{i}_{x_0} \\ &\quad= \frac{n^{\frac{p}{2}}}{4} f^{p-2}(x_0)\Big(\nabla^M_{\operatorname{grad} f^2}\operatorname{grad} f^2 - \frac{1}{2f^2}|\operatorname{grad} f^2|^2 \operatorname{grad} f^2, 0\Big)\circ \mathbf{i}_{x_0} \\ &\quad= \frac{n^{\frac{p}{2}}}{8} f^{p-2}(x_0)\Big(\operatorname{grad}|\operatorname{grad} f^2|^2 - \frac{1}{f^2}|\operatorname{grad} f^2|^2 \operatorname{grad} f^2, 0\Big)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

D'après les équations (5.1.2) et (5.1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} &-|d\mathbf{i}_{x_0}|^{p-2}\sum_a \widetilde{R}(\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}), d\mathbf{i}_{x_0}(F_a))d\mathbf{i}_{x_0}(F_a) \\ &\quad= -\frac{n^p}{8} f^{2(p-2)}(x_0)\Big(\operatorname{grad}|\operatorname{grad} f^2|^2 - \frac{1}{f^2}|\operatorname{grad} f^2|^2 \operatorname{grad} f^2, 0\Big)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

On calcule le deuxième terme du champ de p-bitension de $\mathbf{i}_{x_0}$:

$$-\sum_a \nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}|d\mathbf{i}_{x_0}|^{p-2}\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}) = -n^{\frac{p-2}{2}} f^{p-2}(x_0)\sum_a \nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}). \tag{5.1.8}$$

Soit $a = 1, ..., n$, en utilisant les équations (1.8.1) et (5.1.5), on a :

$$\begin{aligned}\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}) &= -\frac{n^{\frac{p}{2}}}{2}f^{p-2}(x_0)\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}(\operatorname{grad} f^2, 0)\circ \mathbf{i}_{x_0} \\ &= -\frac{n^{\frac{p}{2}}}{2}f^{p-2}(x_0)\Big(\widetilde{\nabla}_{(0,F_a)}(\operatorname{grad} f^2, 0)\Big)\circ \mathbf{i}_{x_0} \\ &= -\frac{n^{\frac{p}{2}}}{4}f^{p-4}(x_0)|\operatorname{grad} f^2|^2_{x_0}(0, F_a)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \qquad (5.1.9)\end{aligned}$$

D'où

$$\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}) = \frac{n^{\frac{p}{2}}}{8}f^{p-4}(x_0)|\operatorname{grad} f^2|^2_{x_0}(\operatorname{grad} f^2, 0)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \qquad (5.1.10)$$

En remplaçant les formules (5.1.10) dans (5.1.8), on trouve :

$$-\sum_a \nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}|d\mathbf{i}_{x_0}|^{p-2}\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}) = -\frac{n^p}{8}f^{2(p-3)}(x_0)|\operatorname{grad} f^2|^2_{x_0}(\operatorname{grad} f^2, 0)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \qquad (5.1.11)$$

Enfin, on calcule le troisième terme du champ de p-bitension de $\mathbf{i}_{x_0}$. Par l'équation (5.1.9), on obtient :

$$\begin{aligned}\langle\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}), d\mathbf{i}_{x_0}\rangle &= \sum_b G_{f^2}\left(\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_b}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}), d\mathbf{i}_{x_0}(F_b)\right) \\ &= -\frac{n^{\frac{p}{2}}}{4}f^{p-4}(x_0)|\operatorname{grad} f^2|^2_{x_0}\sum_b G_{f^2}((0,F_b),(0,F_b))\circ \mathbf{i}_{x_0} \\ &= -\frac{n^{\frac{p+2}{2}}}{4}f^{p-2}(x_0)|\operatorname{grad} f^2|^2_{x_0}. \qquad (5.1.12)\end{aligned}$$

Alors, la fonction $\langle\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}), d\mathbf{i}_{x_0}\rangle$ est également constante sur N. D'après les équations (1.8.1), (5.1.12), et (5.1.3), on trouve que

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^n \nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}_{F_a}\langle\nabla^{\mathbf{i}_{x_0}}\tau_p(\mathbf{i}_{x_0}), d\mathbf{i}_{x_0}\rangle|d\mathbf{i}_{x_0}|^{p-4}d\mathbf{i}_{x_0}(F_a) \\ &\qquad = \frac{n^p}{8}f^{2(p-3)}(x_0)|\operatorname{grad} f^2|^2_{x_0}(\operatorname{grad} f^2, 0)\circ \mathbf{i}_{x_0}. \qquad (5.1.13)\end{aligned}$$

D'après les équations (1.8.1), (5.1.7), (5.1.11), et (5.1.13), on déduit le Théorème 5.1.1. □

Corollaire 5.1.1. *L'application de l'inclusion $\mathbf{i}_{x_0}$ est p-biharmonique propre si et seulement si x_0 n'est pas un point critique pour f^2 et au point x_0 on a :*

$$f^2 \operatorname{grad}|\operatorname{grad} f^2|^2 + (p-2)|\operatorname{grad} f^2|^2 \operatorname{grad} f^2 = 0.$$

Dans le cas où $|\operatorname{grad} f^2|^2$ est une fonction de f^2, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 5.1.2. *Soit $f \in C^\infty(M)$ une fonction de classe C^∞ et positive tel que $|\operatorname{grad} f^2|^2 = f^{2(2-p)}$ sur M. Alors, toute inclusion $\mathbf{i}_{x_0}$ est une application p-biharmonique propre.*

Dans le cas où $p = 2$, le théorème 5.1.1 est prouvé dans [7].
En utilisant les résultats ci-dessus, on obtient quelques nouveaux exemples des applications p-biharmoniques propres pour $p \geq 2$.

Exemple 5.1.1. *Soit $\mathbf{i}_{x_0} : (N, h) \to (\mathbb{R} \times_{f^2} N, G_{f^2})$ une application de l'inclusion. On suppose que $a = (f^2)'(x_0) > 0$ et $b = (f^2)(x_0)(f^2)''(x_0) \leq 0$. D'après le Corollaire 5.1.1, $\mathbf{i}_{x_0}$ est une application p-biharmonique propre si et seulement si $p = 2 - \frac{2b}{a^2}$.*

Exemple 5.1.2. *Soit $M = (0, \infty) \times \mathbb{R}^{m-1}$ munie de la métrique Riemannienne $g = dt^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_{m-1}^2$. D'après le Corollaire 5.1.2, toute inclusion $\mathbf{i}_{x_0} : (N, h) \to (M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ est p-biharmonique propre, où la fonction f^2 est donnée par :*

$$f(t, x) = \left(\frac{pt}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall (t, x) \in M.$$

Remarque 5.1.1. *Soient (M, g) et (N, h) deux variétés Riemannienne. L'application de l'inclusion $\mathbf{j}_{y_0} : (M, g) \to (M \times_{f^2} N, G_{f^2})$ définie par $\mathbf{j}_{y_0}(x) = (x, y_0)$ est p-harmonique pour tout $y_0 \in N$, car elle est toujours totalement géodésique, donc $\tau(\mathbf{j}_{y_0}) = 0$, et on a $|d\mathbf{j}_{y_0}|^2 = m$, où m est la dimension de (M, g).*

5.2 La p-biharmonicité de la projection

Dans le cas de l'application de projection

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & (M \times_{f^2} N, G_{f^2}) & \to & (M, g), \\ & & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

on obtient les résultats suivants.

Théorème 5.2.1. *Le champ de p-bitension field de la projection π est donné par*

$$\begin{aligned} \tau_{2,p}(\pi) &= -m^{p-2} n \big\{ 2 \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln f) + \operatorname{grad}(\Delta \ln f) + \frac{n}{2} \operatorname{grad} |\operatorname{grad} \ln f|^2 \\ &\quad + \frac{p-2}{m} \big[\operatorname{grad}(\Delta \ln f) + n(\Delta \ln f) \operatorname{grad} \ln f \big] \big\} \circ \pi. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\{E_i\}_{i=1}^m$ (resp. $\{F_a\}_{a=1}^n$) une base orthonormée sur (M, g) (resp. sur (N, h)). Alors, $\{(E_i, 0), \frac{1}{f}(0, F_a)\}_{i=1,\ldots,m}^{a=1,\ldots,n}$ est une base orthonormée sur $(M \times_{f^2} N, G_{f^2})$. D'abord, on calcule le champ de tension de π :

$$\begin{aligned} \tau(\pi) &= \operatorname{trace}_{G_{f^2}} \nabla d\pi \\ &= \sum_i \Big\{ \nabla^\pi_{(E_i,0)} d\pi(E_i, 0) - d\pi(\widetilde{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i, 0)) \Big\} \\ &\quad + \sum_a \Big\{ \nabla^\pi_{\frac{1}{f}(0,F_a)} \frac{1}{f} d\pi(0, F_a) - d\pi(\widetilde{\nabla}_{\frac{1}{f}(0,F_a)} \frac{1}{f}(0, F_a)) \Big\} \\ &= \sum_i \Big\{ (\nabla^M_{E_i} E_i) \circ \pi - d\pi(\nabla^M_{E_i} E_i, 0) \Big\} + \frac{1}{2f^2} \sum_a d\pi(\operatorname{grad} f^2, 0) \\ &= \frac{n}{2f^2} (\operatorname{grad} f^2) \circ \pi. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

On calcule la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle $d\pi$:

$$\begin{aligned}|d\pi|^2 &= \sum_i g(d\pi(E_i,0), d\pi(E_i,0)) + \frac{1}{f^2}\sum_a g(d\pi(0,F_a), d\pi(0,F_a)) \\ &= \sum_i g(E_i\circ\pi, E_i\circ\pi) \\ &= m. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

D'où, la fonction $|d\pi|^2$ est constante sur $M\times_{f^2} N$, ce qui implique que $\operatorname{grad}|d\pi| = 0$. Alors, le champ de p-tension de π est donné par :

$$\begin{aligned}\tau_p(\pi) &= |d\pi|^{p-2}\tau(\pi) \\ &= \frac{m^{\frac{p-2}{2}}n}{2f^2}(\operatorname{grad} f^2)\circ\pi \\ &= m^{\frac{p-2}{2}}n(\operatorname{grad}\ln f)\circ\pi. \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Maintenant, on calcule le champ de p-bitension de la projection π. On a :

$$\begin{aligned}&-\operatorname{trace}_{G_{f^2}} R^M(\tau_p(\pi), d\pi)d\pi \\ &\quad= -m^{\frac{p-2}{2}}n\Big\{\sum_i \mathrm{R}^M((\operatorname{grad}\ln f)\circ\pi, d\pi(E_i,0))d\pi(E_i,0) \\ &\qquad + \frac{1}{f^2}\sum_a \mathrm{R}^M((\operatorname{grad}\ln f)\circ\pi, d\pi(0,F_a))(0,F_a)\Big\} \\ &\quad= -m^{\frac{p-2}{2}}n\sum_i\Big\{\mathrm{R}^M(\operatorname{grad}\ln f, E_i)E_i\Big\}\circ\pi \\ &\quad= -m^{\frac{p-2}{2}}n\,\mathrm{Ricci}(\operatorname{grad}\ln f)\circ\pi. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Le deuxième terme du champ de p-bitension est donné par :

$$\begin{aligned}&-\operatorname{trace}_{G_{f^2}}\nabla^\pi|d\pi|^{p-2}\nabla^\pi\tau_p(\pi) \\ &= -\sum_{i=1}^m \nabla^\pi_{(E_i,0)}|d\pi|^{p-2}\nabla^\pi_{(E_i,0)}\tau_p(\pi) - \sum_{a=1}^n \nabla^\pi_{\frac{1}{f}(0,F_a)}|d\pi|^{p-2}\nabla^\pi_{\frac{1}{f}(0,F_a)}\tau_p(\pi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m |d\pi|^{p-2}\nabla^\pi_{\widetilde{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i,0)}\tau_p(\pi) + \sum_{a=1}^n |d\pi|^{p-2}\nabla^\pi_{\widetilde{\nabla}_{\frac{1}{f}(0,F_a)}\frac{1}{f}(0,F_a)}\tau_p(\pi) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

On calcule le premier terme de (5.2.5) :

$$\begin{aligned}-\sum_i \nabla^\pi_{(E_i,0)}|d\pi|^{p-2}\nabla^\pi_{(E_i,0)}\tau_p(\pi) &= -m^{p-2}n\sum_i \nabla^\pi_{(E_i,0)}\nabla^\pi_{(E_i,0)}(\operatorname{grad}\ln f)\circ\pi \\ &= -m^{p-2}n\sum_i \nabla^\pi_{(E_i,0)}\Big(\nabla^M_{E_i}\operatorname{grad}\ln f\Big)\circ\pi \\ &= -m^{p-2}n\sum_i\Big(\nabla^M_{E_i}\nabla^M_{E_i}\operatorname{grad}\ln f\Big)\circ\pi. \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Le deuxième terme de (5.2.5) est donné par :

$$\begin{aligned}
-\sum_a \nabla^{\pi}_{\frac{1}{f}(0,F_a)} |d\pi|^{p-2} \nabla^{\pi}_{\frac{1}{f}(0,F_a)} \tau_p(\pi) & \\
&= -m^{p-2} n \sum_a \nabla^{\pi}_{\frac{1}{f}(0,F_a)} \nabla^{\pi}_{\frac{1}{f}(0,F_a)} (\operatorname{grad} \ln f) \circ \pi \\
&= -\frac{m^{p-2} n}{f^2} \sum_a \nabla^{\pi}_{(0,F_a)} \nabla^{\pi}_{(0,F_a)} (\operatorname{grad} \ln f) \circ \pi \\
&= -\frac{m^{p-2} n}{f^2} \sum_a \nabla^{\pi}_{(0,F_a)} \nabla^{M}_{d\pi(0,F_a)} \operatorname{grad} \ln f \\
&= 0. \qquad (5.2.7)
\end{aligned}$$

Le troisième terme de (5.2.5) est donné par :

$$\begin{aligned}
\sum_i |d\pi|^{p-2} \nabla^{\pi}_{\tilde{\tilde{\nabla}}_{(E_i,0)}(E_i,0)} \tau_p(\pi) &= m^{p-2} n \sum_i \nabla^{\pi}_{(\nabla^M_{E_i} E_i, 0)} (\operatorname{grad} \ln f) \circ \pi \\
&= m^{p-2} n \sum_i \left(\nabla^M_{\nabla^M_{E_i} E_i} \operatorname{grad} \ln f \right) \circ \pi. \qquad (5.2.8)
\end{aligned}$$

On calcule le dernier terme de (5.2.5) :

$$\begin{aligned}
\sum_a |d\pi|^{p-2} \nabla^{\pi}_{\tilde{\tilde{\nabla}}_{\frac{1}{f}(0,F_a)} \frac{1}{f}(0,F_a)} \tau_p(\pi) &= \frac{m^{p-2} n}{f^2} \sum_a \nabla^{\pi}_{\tilde{\tilde{\nabla}}_{(0,F_a)}(0,F_a)} (\operatorname{grad} \ln f) \circ \pi \\
&= \frac{m^{p-2} n}{f^2} \sum_a \nabla^{\pi}_{(0, \nabla^N_{F_a} F_a)} (\operatorname{grad} \ln f) \circ \pi \\
&\quad - \frac{m^{p-2} n}{2 f^2} \sum_a \nabla^{\pi}_{(\operatorname{grad} f^2, 0)} (\operatorname{grad} \ln f) \circ \pi \\
&= -m^{p-2} n^2 \left(\nabla^M_{\operatorname{grad} \ln f} \operatorname{grad} \ln f \right) \circ \pi \\
&= -\frac{m^{p-2} n^2}{2} \left(\operatorname{grad} |\operatorname{grad} \ln f|^2 \right) \circ \pi. \qquad (5.2.9)
\end{aligned}$$

En remplaçant les formules (5.2.6)-(5.2.9) dans (5.2.5), on trouve :

$$\begin{aligned}
-\operatorname{trace}_{G_{f^2}} \nabla^{\pi} |d\pi|^{p-2} \nabla^{\pi} \tau_p(\pi) &= -m^{p-2} n \left(\operatorname{trace}_g (\nabla^M)^2 \operatorname{grad} \ln f \right) \circ \pi \\
&\quad - \frac{m^{p-2} n^2}{2} \left(\operatorname{grad} |\operatorname{grad} \ln f|^2 \right) \circ \pi. \qquad (5.2.10)
\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{trace}_g (\nabla^M)^2 \operatorname{grad} \ln f = \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln f) + \operatorname{grad}(\Delta \ln f)$, l'équation (5.2.10) devient :

$$\begin{aligned}
-\operatorname{trace}_{G_{f^2}} \nabla^{\pi} |d\pi|^{p-2} \nabla^{\pi} \tau_p(\pi) &= -m^{p-2} n \{ \operatorname{Ricci}(\operatorname{grad} \ln f) + \operatorname{grad}(\Delta \ln f) \\
&\quad + \frac{n}{2} \operatorname{grad} |\operatorname{grad} \ln f|^2 \} \circ \pi. \qquad (5.2.11)
\end{aligned}$$

On calcule le terme suivant :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla^{\pi} \tau_p(\pi), d\pi \rangle &= \sum_i g(\nabla^{\pi}_{(E_i,0)} \tau_p(\pi), d\pi(E_i,0)) \\
&\quad + \frac{1}{f^2} \sum_a g(\nabla^{\pi}_{(0,F_a)} \tau_p(\pi), d\pi(0,F_a)) \\
&= m^{\frac{p-2}{2}} n \sum_i g(\nabla^{\pi}_{(E_i,0)} (\operatorname{grad} \ln f) \circ \pi, d\pi(E_i,0)) \\
&= m^{\frac{p-2}{2}} n \sum_i g(\nabla^M_{E_i} \operatorname{grad} \ln f, E_i) \circ \pi \\
&= m^{\frac{p-2}{2}} n (\Delta \ln f) \circ \pi. \qquad (5.2.12)
\end{aligned}$$

D'où, le dernier terme du champ de p-bitension est donné par :

$$
\begin{aligned}
&-(p-2)\,\mathrm{trace}_{G_{f^2}}\,\nabla\langle\nabla^{\pi}\tau_p(\pi), d\pi\rangle|d\pi|^{p-4}d\pi \\
&= -(p-2)m^{p-3}n\Big\{\sum_i \nabla^{\pi}_{(E_i,0)}\left((\Delta\ln f)\circ\pi\right)d\pi(E_i,0) \\
&\quad -\left((\Delta\ln f)\circ\pi\right)\sum_i d\pi(\widetilde{\nabla}_{(E_i,0)}(E_i,0)) \\
&\quad -\frac{1}{f^2}\left((\Delta\ln f)\circ\pi\right)\sum_a d\pi\big(\widetilde{\nabla}_{(0,F_a)}(0,F_a)\big)\Big\} \\
&= -(p-2)m^{p-3}n\Big\{\sum_i \left(E_i(\Delta\ln f)\circ\pi\right)d\pi(E_i,0) \\
&\quad +\frac{1}{2f^2}\left((\Delta\ln f)\circ\pi\right)\sum_a d\pi(\mathrm{grad}\, f^2,0)\Big\} \\
&= -(p-2)m^{p-3}n\left\{\mathrm{grad}(\Delta\ln f)+n\Delta(\ln f)\,\mathrm{grad}(\ln f)\right\}\circ\pi. \qquad (5.2.13)
\end{aligned}
$$

D'après les équations (5.2.4), (5.2.11) et (5.2.13), on déduit les résultats du Théorème 5.2.1.
Lorsque $p = 2$, la démonstration du théorème 5.2.1 se trouve dans [7].

□

Corollaire 5.2.1. *Soit $\pi : (M\times_{f^2} N, G_{f^2}) \longrightarrow (M, g)$ la projection canonique. On suppose que (M, g) est une variété d'Einstein i.e.,* $\mathrm{Ricci}(X) = \lambda X$ *pour tout $X \in \Gamma(TM)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $|\,\mathrm{grad}\ln f| = k_1 \in \mathbb{R}^*_+$, $\Delta(\ln f) = k_2 \in \mathbb{R}^*$, et $\lambda k_2 \leq 0$, alors π est p-biharmonique propre si et seulement si :*

$$p = 2 - \frac{2m\lambda}{nk_2}.$$

Selon le Corollaire 5.1.2, on obtient l'exemple suivant.

Exemple 5.2.1. *La projection canonique $\pi : (\mathbb{H}^m \times_{f^2} N, G_{f^2}) \longrightarrow (\mathbb{H}^m, g)$ est p-biharmonique propre si et seulement si*

$$p = 2\left(1+\frac{m}{n}\right),$$

où $\mathbb{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, x_m > 0\}$ est l'espace hyperbolique de dimension m munie de la métrique Riemannienne $g = x_m^{-2}(dx_1^2 + ... + dx_m^2)$, et $f(x) = x_m^{-1}$ pour tout $x \in \mathbb{H}^m$. Ici, $|\,\mathrm{grad}\ln f| = 1$ et $\Delta(\ln f) = m-1$ avec $\lambda k_2 = -(m-1)^2$.

Remarque 5.2.1. *Soient $p \geq 2$ et f une fonction positive et de classe C^{∞} sur M. L'application de projection*

$$
\begin{array}{rccc}
\sigma : & (M\times_{f^2} N, G_{f^2}) & \to & (N,h), \\
 & (x,y) & \mapsto & y
\end{array}
$$

est p-harmonique, car σ est harmonique (voir [4]), et la norme de Hilbert-Schmidt de $d\sigma$ est donnée par $|d\sigma|^2 = nf^{-2} \in C^{\infty}(M)$, alors $d\sigma(\widetilde{\mathrm{grad}}|d\sigma|) = 0$.

5.3 La p-harmonicité et la p-biharmonicité du graphe

5.3.1 La p-harmonicité du graphe

Soit $\psi : (M,g) \to (N,h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes, et soit

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & (M,g) & \to & (M \times_{f^2} N, G_{f^2}), \\ & & x & \mapsto & (x, \psi(x)) \end{array}$$

le graphe de ψ. Dans ce qui suit, on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que φ soit p-harmonique.

Théorème 5.3.1. *Le graphe φ est p-harmonique si et seulement si*

$$\begin{cases} -(m + f^2|d\psi|^2)|d\psi|^2 \operatorname{grad} f^2 + (p-2)\big[|d\psi|^2 \operatorname{grad} f^2 \\ +f^2 \operatorname{grad} |d\psi|^2\big] = 0; \\ \\ 2(m + f^2|d\psi|^2)\big[\tau(\psi) + \frac{1}{f^2} d\psi(\operatorname{grad} f^2)\big] \\ +(p-2)\big[|d\psi|^2 d\psi(\operatorname{grad} f^2) + f^2 d\psi(\operatorname{grad} |d\psi|^2)\big] = 0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\{e_i\}_{i=1}^m$ une base orthonormée normale au point $x \in M$. on a :

$$\begin{aligned} \tau(\varphi) &= \operatorname{trace}_g \nabla d\varphi \\ &= \sum_i \nabla^\varphi_{e_i} d\varphi(e_i) \\ &= \sum_i \nabla^\varphi_{e_i} (e_i, d\psi(e_i)) \\ &= \sum_i \widetilde{\nabla}_{(e_i, d\psi(e_i))}(e_i, d\psi(e_i)) \\ &= \sum_i \Big\{(0, \nabla^\psi_{e_i} d\psi(e_i)) + \frac{1}{f^2} e_i(f^2)(0, d\psi(e_i)) \\ &\quad - \frac{1}{2} h(d\psi(e_i), d\psi(e_i))(\operatorname{grad} f^2, 0)\Big\} \\ &= (0, \tau(\psi)) + \frac{1}{f^2}(0, d\psi(\operatorname{grad} f^2)) - \frac{|d\psi|^2}{2}(\operatorname{grad} f^2, 0). \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

La norme de Hilbert-Schmidt de $d\varphi$ est donnée par

$$\begin{aligned} |d\varphi|^2 &= \sum_i G_{f^2}(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)) \\ &= \sum_i G_{f^2}((e_i, d\psi(e_i)), (e_i, d\psi(e_i))) \\ &= \sum_i \Big\{g(e_i, e_i) + f^2 h(d\psi(e_i), d\psi(e_i))\Big\} \\ &= m + f^2|d\psi|^2. \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Maintenant, on calcule le champ de p-tension field de φ. D'abord, on note que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} |d\varphi| &= \operatorname{grad}(m + f^2|d\psi|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(m + f^2|d\psi|^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{grad}(f^2|d\psi|^2) \\ &= \frac{1}{2}(m + f^2|d\psi|^2)^{-\frac{1}{2}} \left(|d\psi|^2 \operatorname{grad} f^2 + f^2 \operatorname{grad} |d\psi|^2\right). \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Le deuxième terme du champ de p-tension field est donné par

$$\begin{aligned}(p-2)&|d\varphi|^{p-3}d\varphi(\operatorname{grad}|d\varphi|)\\ &= \frac{p-2}{2}(m+f^2|d\psi|^2)^{\frac{p-4}{2}}\{|d\psi|^2(\operatorname{grad} f^2, d\psi(\operatorname{grad} f^2))\\ &\quad +f^2(\operatorname{grad}|d\psi|^2, d\psi(\operatorname{grad}|d\psi|^2))\}. \qquad (5.3.4)\end{aligned}$$

D'après les équations (0.0.4), (5.3.1), (5.3.2), et (5.3.4), on conclut le théorème 5.3.1 □

Corollaire 5.3.1. *Soit $\psi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application de classe C^∞ entre deux variétés Riemanniennes. On suppose que $|d\psi|^2 = 1$ et $p \leq 2 + m$. Alors, Le graphe φ est p-harmonique si et seulement si f est constante et ψ est harmonique.*

5.3.2 La p-biharmonicité du graphe

Pour construire un exemple d'un gaphe qui est p-biharmonique propre, on peut utiliser le résultat suivant.

Théorème 5.3.2. *Soit $\psi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$ une application harmonique entre deux variétés Riemanniennes. On suppose que $|d\psi|^2 = 1$, $d\psi(\operatorname{grad} f^2) = 0$, et $|\operatorname{grad} f^2|^2 = \beta(f^2)$ pour une certaine fonction β de classe C^∞. On prend*

$$\xi = \frac{1}{2}(m+f^2)^{\frac{p-4}{2}}\alpha(f^2)\operatorname{grad} f^2,$$

où $\alpha(f^2) = -m - f^2 + p - 2$. Si ξ est parallèle sur (M, g), alors le graphe de ψ est p-biharmonique si et seulement si

$$\begin{aligned}&(m+f^2)[m+f^2-2(p-2)]\alpha(f^2)\beta'(f^2) - (p-2)[2(p-4)\\ &-m-f^2]\alpha(f^2)\beta(f^2) + 2(p-2)(m+f^2)\beta(f^2) = 0.\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème 5.3.1, on a :

$$\tau_p(\varphi) = \frac{1}{2}(m+f^2)^{\frac{p-4}{2}}\alpha(f^2)(\operatorname{grad} f^2, 0).$$

Alors $\tau_p(\varphi) = (\xi, 0)$. En utilisant les équations (1.8.2) et (5.3.2) avec les hypothèses $|d\psi|^2 = 1$, $d\psi(\operatorname{grad} f^2) = 0$, $|\operatorname{grad} f^2|^2 = \beta(f^2)$, $\operatorname{Ricci}^M(\xi) = 0$, et la formule suivante :

$$\nabla^M_{\operatorname{grad} f^2}\operatorname{grad} f^2 = \frac{1}{2}\operatorname{grad}(|\operatorname{grad} f^2|^2),$$

le premier terme du champ de p-bitension $\tau_{2,p}(\varphi)$ est donné par :

$$\begin{aligned}-&|d\varphi|^{p-2}\operatorname{trace}_g \widetilde{R}(\tau_p(\varphi), d\varphi)d\varphi\\ &= \frac{1}{8}(m+f^2)^{p-3}\alpha(f^2)[\beta'(f^2) - \frac{\beta(f^2)}{f^2}](\operatorname{grad} f^2, 0). \qquad (5.3.5)\end{aligned}$$

D'après les équations (1.8.1), (5.3.2), l'harmonicité de ψ, et les hypothèses $|d\psi|^2 = 1$, $\nabla^M\xi = 0$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{trace}_g \nabla^{\varphi}|d\varphi|^{p-2}\nabla^{\varphi}\tau_p(\varphi) \\
&\qquad = \frac{1}{8f^2}(m+f^2)^{p-3}\alpha(f^2)\beta(f^2)(\operatorname{grad} f^2, 0). \qquad (5.3.6)
\end{aligned}$$

Par un calcul direct, on obtient :

$$\langle \nabla^{\varphi}\tau_p(\varphi), d\varphi\rangle = \frac{1}{4}(m+f^2)^{\frac{p-4}{2}}\alpha(f^2)\beta(f^2),$$

et le troisième terme du champ de p-bitension $\tau_{2,p}(\varphi)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
&-(p-2)\operatorname{trace}_g \nabla\langle \nabla^{\varphi}\tau_p(\varphi), d\varphi\rangle|d\varphi|^{p-4}d\varphi \\
&\qquad = -\frac{p-2}{2}(m+f^2)^{p-5}\Big[\frac{1}{2}(m+f^2)\alpha(f^2)\beta'(f^2) \\
&\qquad\quad +\frac{p-4}{2}\alpha(f^2)\beta(f^2) - \frac{1}{2}(m+f^2)\beta(f^2) \\
&\qquad\quad -\frac{1}{4}(m+f^2)\alpha(f^2)\beta(f^2)\Big](\operatorname{grad} f^2, 0). \qquad (5.3.7)
\end{aligned}$$

D'après les équations (0.0.7) et (5.3.5)-(5.3.7), on déduit le théorème 5.3.2. □

Exemple 5.3.1. *Soient l'application de translation à droite $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\Psi(x_1, x_2) = (0, x_1)$ et $M = \mathbb{R}\times(0,\infty)$. Le graphe de l'application de restriction $\psi = \Psi|_M$ est une application 4-biharmonique propre pour $f(x_1, x_2) = x_2^{1/4}$. En effet, on a :*

$$|d\psi|^2 = \sum_{i,j=1}^{2}\Big(\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\Big)^2 = 1, \quad d\psi(\operatorname{grad} f^2) = \sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial f^2}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j} = 0,$$

$$|\operatorname{grad} f^2|^2 = \beta(f^2), \quad \beta(t) = \frac{1}{4t^2}, \quad \forall t\in(0,\infty).$$

Comme ψ est une application harmonique et $\xi = -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_2}$ est parallèle sur $(M, dx_1^2 + dx_2^2)$, d'après le théorème 5.3.2 le graphe $\varphi(x_1,x_2) = (x_1, x_2, 0, x_1)$ est une application 4-biharmonique propre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Baird, A. Fardoun and S. Ouakkas : *Conformal and semi-conformal biharmonic maps*, Ann. Glob.Anal. Geom, **34**, 403-414 (2008).

[2] P. Baird and S. Gudmundsson : *p-Harmonic maps and minimal submanifolds.* Math. Ann. **294**, 611-624 (1992).

[3] P. Baird and D. Kamissoko :*On constructing biharmonic maps and metrics*, Ann. Global Anal. Geom. **23**, 65–75 (2003).

[4] P. Baired, J.C. Wood, Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds, Clarendon Press, Oxford (2003).

[5] A. Balmuş : *New examples of biharmonic maps using conformal changes and warped products.* Modern trends in geometry and topology, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 87-94 (2006).

[6] A. Balmuş, Biharmonic Maps and Submanifolds, Ph.D Thesis, Geometry Balkan Press, Bucharest, Romania (2009).

[7] A. Balmuş, S. Montaldo and C. Oniciuc : *Biharmonic maps between warped product manifolds.* J. Geom. Phys. **57**, 449-466 (2007).

[8] G. Beldjilali, Produit de deux variétés munies de quelques structures, Thèse de doctorat, Université Abou-Bekr Belgaid, Tlemcen, 8 Juillet 2017.

[9] A. Benkartab and A. Mohammed Cherif : *New methods of construction for biharmonic maps*, Kyungpook Math. J. **59**, 135–147 (2019).

[10] A. Benkartab and A. Mohammed Cherif : *Deformations of Metrics and Biharmonic Maps*, Communications in Mathematics. **28**, 263–275 (2020).

[11] V. Berestovski, Y. Nokonorov, Riemannian Manifolds and Homogeneous Geodesics, Springer (2020).

[12] M. Bertola and D. Gouthier : *Lie triple systems and warped products*, Rend. Mat. Appl. **7** (21), 275–293 (2001).

[13] H. Bibi, Surfaces et Hypersurfaces Biharmoniques dans les Sphères et les Espaces Projectifs Complexes, Thèse de doctorat, l'Université de Bretagne occidentale, 23 Juin 2022.

[14] R.L. Bishop, B. O'Neil, *Manifolds of Negative Curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **145**, 1-49 (1969).

[15] B. Bojarski, T. Iwaniec : *p-Harmonic equation and quasiregular mappings.* Banach Center Publ. **19** (1), 25-38 (1987).

[16] P. Buser, Géométrie Riemannienne, Notes "inoficielles" du cours (2010).

[17] B-Y. Chen , Geometry of submanifolds and its applications, Science University of Tokyo, Tokyo (1981).

[18] B-Y. Chen, Differential Geometry of Warped Product Manifolds and Submanifolds, World Scientific Publishing, Michigen State University, USA (2017).

[19] L-F. Cheung and P-F. Leung : *Some results on stable p-harmonic maps.* Glasgow Math. J. **36**, 77-80 (1994).

[20] M. Djaa, A. M. Cherif, K. Zegga And S. Ouakkas : *On The Generalized Of Harmonic and Bi-Harmonic Maps*, International Electronic Journal of Geometry. **5** (1), 90-100 (2012).

[21] M. Djaa, Introduction à la géométrie Riemannienne et l'analyse harmonique sur les variétés : Géométrie différentielle, master et doctorat, Centre Universitaire Ahmed Zabana-Relizane (2019-2020).

[22] J. Eells, Jr. and J. H. Sampson : *Harmonic Mapping of Riemannian Manifolds*, American Journal of Mathematics. **86** (1), 109-160 (Jan., 1964).

[23] J. Eells and L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic Maps, CBMS, Regional Conference Series in Math., Amer. Math. Soc. **Vol 50** (1983).

[24] J. Eells and L. Lemaire : *Another Report on Harmonic Maps* , Bull. London M

[25] A. Fardoun : *On equivariant p-harmonic maps*, Ann.Inst. Henri. Poincare. **15**, 25-72 (1998).

[26] J. Feydy, Introduction à la géométrie Riemannienne par l'étude des éspaces de forme, Polycopié des cours, Département de mathématiques de l'ENS Ulm (2019).

[27] J. Gallier, J. Quaintance, Differential Geometry and Lie Groups : A computational Perspective, Springer Nature (2020).

[28] S. Gudmundsson, An Introduction To Riemannian Geometry : Lecture Notes, Lund University (2001). **34**(4), 403–414 (2008).

[29] G. Y. Jiang, 2-*harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A. **7**(4), 389–402 (1986).

[30] G. Y. Jiang : *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A. **7** (2), 130-144 (1986). ath. Soc. **20**, 285-524 (1988).

[31] J. M. Lee, Introduction to Riemannian Manifolds, **Vol 2**, Springer (2018).

[32] P. F. Leung : *On The Stability of Harmonic Maps*, Springer Verlag Lecture Notes Math. **949**, 122-129 (1982).

[33] E. Loubeau and Y-L. Ou : *Biharmonic maps and morphisms from conformal mappings*, Tohoku Math. J. **62**, 55–73 (2010).

[34] S. T. Lovett, Differential geometry of manifolds. , A K Peters/ CRC Press, **Vol 1** (2010).

[35] W.J. Lu, Geometry of warped product manifolds and its five applications, PhD Thesis, Zhejiang University (2013).

[36] Y. Matsushima, Cours de l'institut Fourier, **Vol 1**, Institut Fourier – Université de Grenoble (1966).

[37] B. Merdji and A. Mohammed Cherif : *On The Generalized of p-harmonic Maps*, International Electronic Journal of Geometry, **15** (2), 183–191 (2022).

[38] B. Merdji and A. Mohammed Cherif : *New types of Metrics Deformations and Applications to p-Biharmonic Maps*, The Journal of The Indian Mathematical Society, **90** (3-4), 387-400 (2023).

[39] B. Merdji and A. Mohammed Cherif : *p-Biharmonic Maps between warped product manifolds*, Mediterranean Journal of Mathematics, **21**(1), 1-14 (2024).

[40] A. Mohammed Cherif, Géométrie harmonique des variétés, Thèse de doctorat, Université d'Oran, 25 Juin 2014.

[41] A. Mohammed Cherif, Géométrie semi-Riemannienne, Cours M2, Université Mustapha Stambouli, Mascara (2015)

[42] A. Mohammed Cherif : *On the p-harmonic and p-biharmonic maps*, J. Geom. **109** (41)(2018).

[43] A. Mohammed Cherif, les applications harmoniques, Cours de M2, Université Mustapha Stambouli, Mascara (2020).

[44] A. Mohammed Cherif, M. Djaa and K. Zegga : *Stable f-harmonic Maps on Sphere* , Commun. Korean Math. Soc, **30** (4), 471–479 (2015).

[45] A. Mohammed Cherif and K. Mouffoki : *p-Biharmonic hypersurfaces in Einstein space and conformally flat space. Bull. Korean Math. Soc. **60**, 705-715 (2023).*

*[46] A. Mukherjee, Differential Topology, Birkhäuser Cham. **Vol 2** (2015).*

*[47] T. Nagano andT. Sumi : Stability of p-harmonic maps. Tokyo J. Math. **15** (2), 475-482 (1992).*

[48] B. O'Neil, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York and London (1983).

[49] C. Oniciuc : Biharmonic Maps Between Riemannian Manifolds, Analele Stiintifice Ale Universitati "AL.I.CUZA" IASI Tomul XLVIII, s.I a, Matematica, 2002, f.2.

*[50] C. Oniciuc : New examples of biharmonic maps in spheres, Colloq. Math. **97**, 131-139 (2003).*

*[51] S. Ouakkas : Biharmonic maps, conformal deformations and the Hopf maps, Differential Geometry and its Applications. **26**, 495–502 (2008).*

[52] P. Peterson, Riemannian Geomery : Graduate Texts in Matheatics, Springer, USA. ***Vol 3*** *(2016).*

[53] R. Ponge and H. Reckziegel : Twisted products in pseudo-Riemannian geometry. Geom. Dedicata ***48*** *(1), 15–25 (1993).*

[54] C. Udrişte : Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers : Dordrecht, The Netherlands (1994).

[55] Y. L. Xin : Some Results On Stable Harmonic Maps, Duke Math. J. ***47****, 609-613 (1980).*

[56] Y. Xin , Geometry of Harmonic Maps , Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser. ***Vol 23*** *(1996).*