République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mustapha Stambouli de Mascara
Faculté des Sciences Exacte

Analyse 3
Cours et Exercices Corrigés

- ▶ Séries numériques
- ▶ Suites et séries de fonctions
- ▶ Séries entières
- ▶ Séries de Fourier
- ▶ Intégrale généralisée
- ▶ Intégrale dépendant d'un paramètre

Frakis Abdelkader

Ce cours est destiné aux étudiants du deuxième année licence Mathématiques.

Algérie 2022/2023

Avant-propos

Ce polycopié s'adresse principalement aux étudiants de la deuxième année universitaire licence Mathématique, mais il peut être également utile pour les étudiants de la deuxième année universitaire Sciences et Techniques (ST), Sciences de la matière (SM) et les étudiants qui sont en deuxième année école préparatoire. Il apporte l'essentiel de ce que les étudiants doivent acquérir. Le contenu de ce polycopié correspond au programme proposé par le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique.

Cet ouvrage contient six chapitres, le premier chapitre est consacré à l'étude des séries numériques. Le second traite les suites et les séries de fonctions. Le troisième chapitre présente l'étude des séries entières. Le quatrième est essentiellement consacré à l'étude des séries de Fourier, le cinquième traite les intégrales généralisées où impropres et enfin, le dernier chapitre est consacré aux fonctions définies par une intégrale. De nombreux exemples se trouvent déssiminés dans le texte. Des exercices de difficulté variée bien choisis avec solutions bien détaillées sont présentés à la fin de chaque chapitre. Ces exercices apportent une aide efficace aux étudiants, elles leur permettent de comprendre les différentes notions de ce module et d'approfondir leurs connaissances. Je souhaite que ce travaille aide nos étudiants à maîtriser ce module et à bien se préparer aux examens.

Ce polycopié est le fruit de plusieurs années d'enseignement en Mathématiques à l'université Mustapha Stambouli de Mascara.

J'espère que cet ouvrage sera utile pour nos étudiants.
Enfin, j'accueillerai avec plaisir et gratitude toute les remarques, critiques et suggestions que le lecteur voudra bien me faire proposé, aussi pour toute demande de renseignements, n'hésitez pas à me contacter sur mon adresse e-mail : frakis.aek@univ-mascara.dz

Abdelkader Frakis

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

« *J'avoue que tous les raisonnements et calculs basés sur des séries non convergentes m'ont toujours l'air extrêmement suspects.*»

J. d'Alembert, 1748.

1.1 Généralités

Définition 1.1.1. *Soit une suite de nombres réels ou complexes* $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ *La somme* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots$ *est appelés* série numérique *et* U_n *s'appelle* le terme général *de cette série. On la note aussi* $\sum_{n \geq 0} U_n$.

Exemple : Soit les séries numériques suivantes :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots$

1.1.1 Suite des Sommes Partielles

On appelle suite des sommes partielles de rang p le nombre

$$S_p = U_0 + U_1 + \cdots + U_p.$$

Si la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ éxiste alors le reste de la série numérique est le nombre

$$R_n = S - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots$$

Définition 1.1.2. *On dit que la série numérique* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est convergente de somme* S *si la suite des sommes partielles* S_n *converge vers* S *et on écrit*

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n.$$

La série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple : Soit $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, on veut étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$. Pour cela on calcule S_p. On a

$$S_p = \sum_{n=1}^{p} U_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{p(p+1)}.$$

D'autre part, on a

$$U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$S_p = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$

Ainsi

$$S_p = 1 - \frac{1}{p+1}.$$

Alors $\lim\limits_{p\to\infty} S_p = \lim\limits_{p\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{p+1}\right) = 1$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ est convergente et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = 1$.

1.1.2 Condition nécessaire de convergence

Théorème 1.1.1. *Si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est convergente alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Preuve. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Remarque : La contraposée de l'implication précedente est donné par

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \neq 0$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente.

Exercice : Étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\dfrac{1}{n}$.

Solution : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\dfrac{1}{n} = 1 \neq 0$, donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\dfrac{1}{n}$ est divergente.

Théorème 1.1.2. 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *converge si et seulement si* $\sum_{n=k}^{+\infty} U_n$ *converge.*

2) *Si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est convergente alors* $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} U_n = 0$.

Preuve. Soit $p > k$, on a

$$S_p = U_0 + U_1 + \cdots + U_k + \cdots + U_p = S_{k-1} + S_{k,p} \tag{1.1}$$

où $S_{k,p} = U_k + \cdots + U_p$.

L'assertion (1) résulte de l'égalité (1.1), ainsi les deux série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n, \sum_{n=k}^{+\infty} U_n$ convergent où divergent simultanément.

- On a $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = S_{k-1} + \sum_{n=k}^{+\infty} U_n$, l'assertion (2) résulte en faisant $k \to +\infty$.

1.1.3 Séries géométriques

On appele série géométrique toute série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n,\ k \in \mathbb{R}^*$.

Exercice : Soit la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n, \quad k \in \mathbb{R}^*$.
Étudier la nature de cette série suivant les valeurs de k.

Solution : Si $k = 1$, alors $S_p = p + 1$. Donc $\lim_{p \to +\infty} S_p = +\infty$.
D'autre part, on a $S_p = \sum_{n=0}^{p} k^n = 1 + k + k^2 + \cdots + k^p = \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k}$ pour $k \neq 1$. Alors

$$\lim_{p \to +\infty} S_p = \lim_{p \to +\infty} \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k} = \begin{cases} \frac{1}{1-k} & \text{si } |k| < 1 \\ \infty & \text{si } k > 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si } k < -1. \end{cases}$$

Donc la série géomérique converge si $|k| < 1$ et diverge pour $|k| \geq 1$.

Example : 1) La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car $k = \frac{1}{2} < 1$ et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

2) La série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n$ est divergente car $k = 3 > 1$.

1.1.4 Opérations sur les séries

1. Si les deux séries sont convergentes alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (U_n + V_n)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

2. Si les deux séries sont divergentes alors on peut rien dire de la nature de $\sum_{n=0}^{+\infty} (U_n + V_n)$.

3. Si l'un des deux séries est convergente et l'autre est divergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (U_n + V_n)$ est divergente.

4. Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda U_n$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda U_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} U_n.$$

Remarque : Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $W_n = U_n + iV_n, \quad U_n, V_n \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ converge si et seulement si $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ sont convergentes et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

1.2 Séries à termes positifs

Définition 1.2.1. *On dit que* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est une série à* termes positifs *si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$.

Théorème 1.2.1. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *une série à termes positifs. Alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *converge si et seulement si la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée.*

Preuve. On a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;S_n - S_{n-1} = U_n \geq 0$. De plus, elle est majorée, donc elle converge.

1.2.1 Règle de comparaison

Théorème 1.2.2. *Soient* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ *deux séries à termes positifs telles que pour tout* $n \geq n_0$, $\;U_n \leq V_n$. *Alors, on a les implications suivantes :*

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *converge.*
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ *diverge.*

Preuve. 1) Soient $S_p(U) = U_0 + U_1 + \cdots + U_p$ et $S_p(V) = V_0 + V_1 + \cdots + V_p$.
Sans perte de généralité, on suppose que $n_0 = 0$, alors

$$S_p(U) \leq S_p(V) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n = S$, il vient $S_p(U) \leq S$ d'où $\big(S_n(U)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente.
2) Cette implication est la contraposée de l'implication précédente.

Exemple : On veut étudier la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$. Pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Puisque la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ converge alors la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ converge aussi.

Théorème 1.2.3. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ deux séries à termes positifs. S'il existe deux constantes $a > 0$, $b > 0$ telles que pour tout $n \geq n_0$, $a \leq \frac{U_n}{V_n} \leq b$. Alors les deux séries sont de la même nature.*

Preuve. L'affirmation résulte du Théorème 1.2.3 compte tenu de l'inégalité

$$\forall n \geq n_0, \quad aV_n \leq U_n \leq bV_n.$$

Théorème 1.2.4. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ deux séries à termes positifs.*

Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = a$, où $(a \neq 0, +\infty)$ c-à-d $U_n \sim aV_n$, alors les deux séries sont de la même nature.

Preuve. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{U_n}{V_n} - a \right| < \epsilon.$$

Alors $a - \epsilon < \frac{U_n}{V_n} < a + \epsilon$. Le résultat découle du Théorème 1.2.3.

Exemple : Soient $U_n = \frac{1}{n^2}$ et $V_n = \frac{1}{n(n+1)}$, on veut étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. On sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, de plus on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = 1$. Donc $U_n \sim V_n$ et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Exercice : Étudier la nature de la série suivante $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$.

Solution : On pose $U_n = 1 - \cos \frac{\pi}{n}$. On a $\cos \frac{\pi}{n} = 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)$, il vient $U_n \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^2}{2n^2}$ est convergente. Par conséquent $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ est convergente.

Corollaire 1.2.1. *Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ deux séries à termes positifs.*

1) Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = 0$, c-à-d $U_n = o(V_n)$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge.

2) Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = +\infty$, c-à-d $V_n = o(U_n)$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ convege $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ converge.

1.2.2 Règle de Cauchy

Théorème 1.2.5. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *une série à termes positifs. Si* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell$ *existe, alors :*

1. *Si* $\ell < 1$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est convergente.*
2. *Si* $\ell > 1$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est divergente.*
3. *Si* $\ell = 1$, *alors on peut rien conclure.*

Preuve. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sqrt[n]{U_n} - \ell\right| < \epsilon.$$

Donc

$$(\ell - \epsilon)^n \leq U_n < (\ell + \epsilon)^n.$$

1. Si $\ell < 1$, on peut choisir ϵ tel qu'on a $\ell + \epsilon < 1$, il vient $\sum_{n=0}^{+\infty}(\ell + \epsilon)^n$ est convergente, par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente.

2. Si $\ell < 1$, on peut choisir ϵ tel qu'on a $\ell - \epsilon > 1$, il vient $\sum_{n=0}^{+\infty}(\ell - \epsilon)^n$ est divergente, par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente.

Exemple : On veut étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n^2}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}.$$

Puisque $e^{-3} < 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n^2}$ est convergente.

1.2.3 Règle de d'Alembert

Théorème 1.2.6. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *une série à termes positifs. Si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$ *existe, alors :*

1. *Si* $\ell < 1$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est convergente.*
2. *Si* $\ell > 1$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est divergente.*
3. *Si* $\ell = 1$, *alors on peut rien conclure.*

Preuve. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{U_{n+1}}{U_n} - \ell\right| < \epsilon.$$

Il vient $\ell - \epsilon < \dfrac{U_{n+1}}{U_n} < \ell + \epsilon$. Donc

$$\frac{U_{n_0+1}}{U_{n_0}} < \ell + \epsilon, \ \ \frac{U_{n_0+2}}{U_{n_0+1}} < \ell + \epsilon, \ \ \cdots, \ \ \frac{U_n}{U_{n-1}} < \ell + \epsilon.$$

En multipliant ces inégalités, il vient

$$\frac{U_{n_0+1}}{U_{n_0}} \times \frac{U_{n_0+2}}{U_{n_0+1}} \times \cdots \times \frac{U_n}{U_{n-1}} < (\ell + \epsilon)^{n-n_0}.$$

Alors $\dfrac{U_n}{U_{n_0}} < (\ell + \epsilon)^{n-n_0}$, par suite $U_n < \dfrac{U_{n_0}}{(\ell + \epsilon)^{n_0}}(\ell + \epsilon)^n$, ce qui implique que

$$U_n < \lambda(\ell + \epsilon)^n \text{ où } \lambda = \frac{U_{n_0}}{(\ell + \epsilon)^{n_0}}.$$

1. Si $\ell < 1$ on peut choisir ϵ tel qu'on a $\ell + \epsilon < 1$, il vient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\ell + \epsilon)^n$ est convergente et par suite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente.
2. De la même manière, on trouve $(\ell - \epsilon)^{n-n_0} < \frac{U_n}{U_{n_0}}$, ce qui donne

$$\lambda'(\ell - \epsilon)^n < U_n \text{ où } \lambda' = \frac{U_{n_0}}{(\ell - \epsilon)^{n_0}}.$$

   Si $\ell > 1$ on peut choisir ϵ tel que $\ell - \epsilon > 1$, il vient $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\ell - \epsilon)^n$ est divergente, par suite $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente.

Exemple : On veut étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}.$$

Puisque $e^{-1} < 1$ alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ est convergente.

1.2.4 Règle d'intégrale

Théorème 1.2.7. *Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante. On pose $U_n = f(n)$, alors*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n \textit{ converge si et seulement si } \lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx \textit{ existe .}$$

Preuve. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad n \le x \le n+1 \Rightarrow f(n+1) \le f(x) \le f(n).$$

Par suite

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} f(n)dx.$$

Ainsi

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n).$$

Pour $n = 1, 2, \cdots, n+1$, on trouve :

$$\begin{array}{c} f(2) \leq \int_1^2 f(x) \leq f(1) \\ f(3) \leq \int_2^3 f(x) \leq f(2) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \; \vdots \\ f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) \leq f(n). \end{array}$$

Donc $f(2) + f(3) + \cdots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq f(1) + \cdots + f(n)$.
Par suite $U_2 + U_3 + \cdots + U_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq U_1 + \cdots + U_n$, ce qui donne

$$S_{n+1} - U_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n.$$

On suppose que $\lim\limits_{A \to +\infty} \displaystyle\int_1^A f(x)dx$ existe. Il vient $\forall n \in \mathbb{N} : \quad S_{n+1} - U_1 \leq M$, donc $\forall n \in \mathbb{N} : \quad S_{n+1} \leq M'$, alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ est convergente.

Exemple : On veut étudier la nature des deux séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1) On pose $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors f est continue et décroisssante sur $[1, +\infty[$.

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \to +\infty} \ln A = +\infty.$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

2) On pose $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, alors f est continue et décroisssante sur $[1, +\infty[$.

$$\lim_{A \to +\infty} \int_1^A f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \to +\infty} \left(-\frac{1}{A} + 1 \right) = 1.$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

1.2.5 Série de Riemann

On appelle série de Riemann (ou fonction zéta de Riemann) toute série de la forme suivante : $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. La somme d'Euler exprime que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et plus généralement, on peut montrer (à l'aide des séries de Fourier) que $\zeta(2p) = a_p \pi^{2p}$, où $a_p = \dfrac{2^{2p}|B_{2p}|}{2(2p)!}$ est rationnel et B_{2p} sont les nombres de Bernoulli. On sait que $\zeta(2p)$ est irrationnel. R. Apéry a montrer en 1978 que $\zeta(3)$ est irrationnel, par contre l'évaluation de $\zeta(2p+1)$, $p > 1$, est un problème ouvert.

Exercice : Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution : 1) Si $\alpha \leq 0$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.
2) Si $\alpha \geq 0$, on pose $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, alors f est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to+\infty} \int_1^A f(x)dx &= \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha}dx \\
&= \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) \\
&= \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{si } 1 < \alpha \\ \infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$ et elle est divergente si $\alpha \leq 1$.

1.2.6 Règle de Riemann ou $''n^\alpha U_n''$

Théorème 1.2.8. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *une série à termes positifs. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha U_n = 0 \Longrightarrow \begin{cases} si \;\; \alpha > 1, \;\; la \; série \; \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \;\; converge \\ si \;\; 0 < \alpha \leq 1, \;\; on \; peut \; rien \; dire. \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha U_n = +\infty \Longrightarrow \begin{cases} si \;\; \alpha > 1, \;\; on \; peut \; rien \; dire \\ si \;\; 0 < \alpha \leq 1, \;\; la \; série \; \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \;\; diverge. \end{cases}$$

Preuve. Le résultat découle en comparant la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ avec la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Exemple : On veut étudier la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{\ln n}{n^3} = 0$, il résulte que cette série est convergente.

1.2.7 Série de Bertrand

Exercice : Étudier la nature de la série de Bertrand $\sum_{n=2}^{+\infty} U_n$ où $U_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Solution : On distingue trois cas :
1) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 1$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{\alpha+1}{2}} (\ln n)^{-\beta} = 0.$$

En effet, en posant
$$V_n = \ln\left[n^{\frac{1-\alpha}{2}}(\ln n)^{-\beta}\right],$$
et par les propriétés du logarithme, il vient pour tout $n \geq 2$
$$V_n = \frac{1-\alpha}{2}\ln n - \beta\ln(\ln n) = \ln n\Big(\frac{1-\alpha}{2} - \beta\frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\Big).$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$, puisque $\dfrac{1-\alpha}{2} < 0$. Par conséquent,
$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{\alpha+1}{2}}U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{V_n} = 0.$$
Il résulte de la règle de Riemann que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} U_n$ converge.

2) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < 1$. Alors
$$\lim_{n\to+\infty} nU_n = \lim_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}(\ln n)^{-\beta}.$$
Un raisonnement analogue à ce qui précède donne
$$\lim_{n\to+\infty} nU_n = +\infty.$$
Ainsi la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} U_n$ diverge.

3) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha = 1$. On considère l'application $f : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définit par
$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\beta}.$$
On a : $f \geq 0$ et f est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. En effet, pour $x \in [2, +\infty[$, on a
$$f'(x) = -\frac{(\ln x)^\beta + \beta(\ln x)^{\beta-1}}{x^2(\ln x)^{2\beta}} < 0.$$
On a
$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}dx &= \lim_{A\to+\infty}\int_2^A \frac{\frac{1}{x}}{x(\ln x)^\beta}dx \\
&= \lim_{A\to+\infty}\begin{cases} \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\Big|_2^A & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x)\Big|_2^A & \text{si } \beta = 1. \end{cases} \\
&= \lim_{A\to+\infty}\begin{cases} \frac{(\ln A)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) & \text{si } \beta = 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{(\ln 2)^{-\beta+1}}{-\beta+1} & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ +\infty & \text{si } \beta = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$
Enfin, on obtient $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$.

En conclusion : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$ et diverge si $\alpha < 1, \beta \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 1, \beta \leq 1$.

1.2.8 Autre règle (Règle de Duhamel)

Théorème 1.2.9. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *une série à termes positifs telle que*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a

1. *Si* $\beta > 1$, *alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est convergente.*
2. *Si* $\beta < 1$, *alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est divergente.*
3. *Si* $\beta = 1$, *alors on peut rien conclure.*

Exemple : Soit $U_n = \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}$. On veut étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$. On a

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n+2)} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

$f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, on pose $x = \dfrac{1}{t}$, puisque n est au voisinage de $+\infty$ alors t sera au voisinage de 0. Donc

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t}{1+t} = t(1 - t + o(t)) = t - t^2 + o(t^2).$$

Par suite $f(x) = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, ce qui implique que $f(n) = \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Il vient

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ce qui donne que $\beta = \dfrac{1}{2} < 1$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ est divergente.

1.3 Séries à termes de signes quelconques

1.3.1 Séries alternées

Théorème 1.3.1 (Règle d'Abel-Dirichlet)**.** *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *une série numérique et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suites numérique.*
Enoncé 1 : *Si*

(i) Il existe une constante M *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M$.

(ii) La série $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_{n+1} - b_n)$ *converge absolument et* $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *est convergente.*
Enoncé 2 : *Si*

(i) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

(ii) Il existe une constante M *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq M$.

Alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *est convergente.*

Preuve. Enoncé 1 : Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
&= S_1b_1 + (S_2 - S_1)b_2 + \cdots + (S_n - S_{n-1})b_n \\
&= S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_nb_n \\
&= S_nb_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}).
\end{aligned}$$

Puisque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_nb_n = 0$ et

$|S_k(b_{k+1}-b_k)| \leq M|b_{k+1}-b_k|$. Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_{k+1}-b_k|$ converge, alors d'après le critère de comparaison, la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} S_k(b_{k+1}-b_k)$ converge aussi. Par conséquent $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ converge.

Enoncé 2 : Il suffit de montrer que l'énoncé (1) reste vrai si au lieu de (i), on suppose que (b_n) décroit vers 0 pour $n \to +\infty$. Comme $b_{k+1} \leq b_k$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| &= \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) \\
&= b_1 - b_{n+1}.
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| = b_1$. Par conséquent la série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} (b_k - b_{k+1})$ converge absolument, et dès lors, la condition (i) est satisfaite dans l'énoncé (1).

C.Q.F.D

Exemple : Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} \times \underbrace{\dfrac{1}{n}}_{b_n}$. On a

i) $\forall n \in \mathbb{N} : \quad S_n < 2$ où $S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$.

ii) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{1}{n(n+1)}\right| < +\infty$ est vérifié.

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Définition 1.3.1. *Toute série de la forme* $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$*, où* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de signe constant, est dite* série alternée.

Théorème 1.3.2 (Critère de Leibniz)**.** *Soit la série alternée* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$*. Si* $a_n > 0$*,* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décriossante et* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$*, alors la série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *est convergente.*

1.3.2 Séries absolument convergentes et semi convergentes

Définition 1.3.2. *Une série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est dite* absolument convergente *si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$ *est convergente.*

Critère de Cauchy. Pour que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge il faut et il suffit que sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de Cauchy c-à-d :
$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall(n,m) \in \mathbb{N}^2 : m > n \geq n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| < \epsilon.$

Remarque : $S_m - S_n = \sum_{k=0}^{m} U_k - \sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=n+1}^{m} U_k.$
Il est plus commode d'écrire le critère de Cauchy sous la forme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n \text{converge} \ \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall(n,m) \in \mathbb{N}^2 : m > n \geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} U_k\right| < \epsilon.$$

Théorème 1.3.3. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est absolument convergente $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$ est onvergente. Alors

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall(n,m) \in \mathbb{N}^2 : m > n \geq n_0, \left|\sum_{k=n+1}^{m} |U_k|\right| = \sum_{k=n+1}^{m} |U_k| < \epsilon.$$

Puisque $\left|\sum_{k=n+1}^{m} U_k\right| < \sum_{k=n+1}^{m} |U_k|$ est toujours vérifie, alors

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall(n,m) \in \mathbb{N}^2 : m > n \geq n_0, \left|\sum_{k=n+1}^{m} U_k\right| < \epsilon.$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente.

Définition 1.3.3. *Une série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est dite* semi convergente *si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Exemple :

1. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi convergente car :
   (a) la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.
2. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente car :
   (a) la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.
   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

1.3.3 Règle de Cauchy et d'Alembert pour les séries à termes de signe quelconque

Théorème 1.3.4. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ une série. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \ell$ existe, alors :*

1. *Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$ converge, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |U_n| = +\infty$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1$, alors on peut rien conclure ni pour $\sum_{n=0}^{+\infty} |U_n|$ ni pour $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$.*

Remarque : On a les même résultats en appliquant la règle de Cauchy c-à-d $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n|}\right)$.

1.3.4 Groupement des termes

Soit la série

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} U_n &= U_0 + U_1 + \cdots \\ &= \underbrace{(U_0 + U_1 + \cdots + U_{n_1})}_{V_0} + \underbrace{(U_{n_1+1} + U_{n_1+2} + \cdots + U_{n_2})}_{V_1} + \cdots \\ &+ \underbrace{(U_{n_k+1} + U_{n_k+2} + \cdots + U_{n_{k+1}})}_{V_k} + \cdots\end{aligned}$$

Donc, on trouve la nouvelle série $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ avec $V_n = \sum_{p=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} U_p$, où $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(k) = n_k + 1,\ \ \forall k \geq 1$.

Définition 1.3.4. *On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ est déduite de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ par **groupement des termes** ou par **sommation par paquets**.*

Théorème 1.3.5. *Si la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *converge alors la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ *converge aussi et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

Preuve. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites des sommes partielles de $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$, respectivement. Alors $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ et $T_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$. On a donc

$$\begin{array}{l}
T_0 = V_0 = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n_1} = S_{n_1} \\
T_1 = V_0 + V_1 = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n_1} + U_{n_1+1} + \cdots + U_{n_2} = S_{n_2} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
T_k = V_0 + V_1 + \cdots + V_k = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n_1} + \cdots + U_{n_2} + \cdots + U_{n_{k+1}} = S_{n_{k+1}}.
\end{array}$$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous suite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ converge il vient $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, alors la sous suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, et on a $\lim_{n\to+\infty} T_n = S$. D'ou le résultat.

1.3.5 Réarrangement

Théorème 1.3.6. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *une série à termes quelconque et* σ *une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *est absolument convergente, alors il on ait de même pour la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_{\sigma(n)}$ *et elles ont la même somme.*

Exemple : Soit la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Cette série est semi convergente, on va montrer qu'on peut réarranger ses termes de telle sorte à modifier sa somme. En effet, en écrivant ses termes de telle manière à avoir un terme positif, puis deux negatifs et ainsi de suite, on obtient après avoir groupé les termes trois par trois :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} &= (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\Big) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

Ce qui ramène à une contradiction. En conclusion, on voit ici l'importance de l'ordre des termes d'une série non absolument convergente puisqu'en réordonnant les termes d'une série semi-convergente.

1.3.6 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 1.3.5. *On appelle* produit de Cauchy *de deux séries,(réels ou complexes),* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$*, la série produit* $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ *où* $W_n = \sum_{p=0}^{n} U_p V_{n-p}$.

Théorème 1.3.7. *Si les deux séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n$ *sont absolument convergente alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ *est absolument convergente, et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n \sum_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

Exemple : On veut calculer le terme général W_n, $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ si $U_n = V_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$. On a

$$W_n = \sum_{p=0}^{n} U_p V_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^p} \frac{(-1)^{n-p}}{2^{n-p}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}.$$

Par application du Théorème 1.3.7, on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{2^n} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

1.4 Calculs numériques

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ une série convergente et soit R_n le reste du cette série. On a l'encadrement suivante :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)dt.$$

Dans le cas des séries entières, on a une évaluation du reste $R_n \leq |U_{n+1}|$. On cannait, bien sur, le sens de l'erreur, selon le signe du premier terme du reste.

1. Si $U_{n+1} > 0$, alors $S - S_n > 0$.
2. Si $U_{n+1} < 0$, alors $S - S_n < 0$.

Exercice : On considère la série harmonique alternée $U_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $n \geq 1$.
- Donner une majoration du reste d'indice 4, puis du reste d'indice 5.
Solution : On a $|R_4| \leq \frac{1}{5}$ et $|R_5| \leq \frac{1}{6}$. On connait de plus le sens de l'erreur. On a donc $0 < S - \frac{7}{12} \leq S - 0.58 < 0,2$ et $0 < \frac{47}{60} - S \leq 0,78 - S < 0,17$.
Le calcul avec quatre termes donne un encadrement $0,58 < S < 0,78$ avec cinq termes on a $0,61 < S < 0,79$.

1.5 Exercices avec solutions

Exercice 1 : Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs somme :

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \quad b) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right).$$

Solution : $a)$ On a $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \sim \frac{1}{4n^2}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$) alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ converge.

$b)$ On a $\frac{2n-1}{n(n^2-4)} \sim \frac{2}{n^2}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$) alors $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$ converge.

$c)$ On a $\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right) \sim \frac{2}{n(n+3)} \sim \frac{2}{n^2}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$) alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$ converge.

Calcule des sommes : $a)$ On a

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{3}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Par suite $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$, ce qui donne que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

$b)$ On cherche les nombres réells a, b et c tels que

$$\frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-2} + \frac{c}{n+2}.$$

On trouve $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{8}, c = \frac{-5}{8}$. Pour tout $p \geq 3$, on a

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=3}^{p} \frac{1}{n}\right) + \frac{3}{8}\left(\sum_{n=3}^{p} \frac{1}{n-2}\right) - \frac{5}{8}\left(\sum_{n=3}^{p} \frac{1}{n+2}\right)$$

On pose $S_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n}$, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} &= \frac{1}{4}\left(S_p - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}\left(S_p - \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) \\ &- \frac{5}{8}\left(S_p + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = -\frac{3}{8} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\right) - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} - \frac{25}{12}\right).$$

Si $p \to +\infty$, alors $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{89}{96}$.

c) On a

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right) &= \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}\right) \\ &= \ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \\ &= \big(\ln(n+1) - \ln(n)\big) + \big(\ln(n+2) - \ln(n+3)\big). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} S_p &= \big(\ln(2) - \ln(1)\big) + \big(\ln(3) - \ln(4)\big) \\ &+ \big(\ln(3) - \ln(2)\big) + \big(\ln(4) - \ln(5)\big) \\ &\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ &+ \big(\ln(p+1) - \ln(p)\big) + \big(\ln(p+2) - \ln(p+3)\big) \\ &= (\ln(p+1) + \ln 3 - \ln(p+3)) \\ &= \ln\frac{p+1}{p+3} + \ln 3. \end{aligned}$$

Il vient $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} S_p = \ln 3$.

Exercice 2 : Même question pour : *a*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$, *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

Indication : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Solution : On a $\displaystyle\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n+1-1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$.

Pour $n \geq 2$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$.

Donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge car c'est une somme de deux séries convergente et on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$.

On a $\displaystyle\frac{n^3}{n!} = \frac{n^2}{(n-1)!} = \frac{n+1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$.

Il vient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 1 + e + 3(e-1) + e - 2 = 5e$.

Exercie 3 : Soit la suite $U_n = \dfrac{n}{3\times 5\times\cdots(2n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
1) Déterminer les deux nombres réels a, b tels que

$$U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} - \frac{b}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\right).$$

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \frac{1}{2}$.

Solution : On a $U_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{2na+a-b}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)(2n+1)}$. Par identification, on obtien $\begin{cases} a=1 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$. On a

$$\begin{aligned} S_n &= U_1+U_2+U_3+\ldots+U_n \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times 5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}-\frac{1}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\right). \end{aligned}$$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Exercie 4 : On utilisera les règles de comparaison, étudier la nature des séries suivantes :
1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)(n^2+1)}{n(2n^3+1)}$, 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+\ln n)}$, 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\cos(n^2)}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{n}$.

Solution : 1) On pose $U_n = \dfrac{(n+2)(n^2+1)}{n(2n^3+1)}$ et $V_n = \dfrac{1}{2n}$, il vient $U_n \sim_{+\infty} V_n$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)(n^2+1)}{n(2n^3+1)}\times 2n = 1$. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}U_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}V_n$ sont de la même nature. Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$ (série de Riemann $\alpha=1$) diverge, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+2)(n^2+1)}{n(2n^3+1)}$ diverge.
2) On a $\dfrac{1}{n(n+\ln n)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+\ln n)}\times n^2 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln n}{n}} = 1$. Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série convergente car (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+\ln n)}$ est aussi convergente.
3) On a $-1\le\cos(n^2)\le 1$ implique que $\sqrt{n}-1\le\sqrt{n}+\cos(n^2)\le\sqrt{n}+1$.
Donc $\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}\le\dfrac{1}{\sqrt{n}+\cos(n^2)}$, puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\cos(n^2)}$ est aussi divergente, par suite $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}+\cos(n^2)}$ est divergente.
4) On a $\sin\dfrac{\pi}{n}\sim_{+\infty}\dfrac{\pi}{n}$. Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi}{n}$ est divergente car (série de Riemann $\alpha=1$) alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{\pi}{n}$ est aussi divergente.

Exercice 5 : Utiliser la règle de d'Alembert ou la règle de Cauchy pour déterminer la nature des séries suivante :

$$1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n},\quad 2)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1},\quad 3)\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n^2},\quad 4)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!},$$

$$5)\sum_{n=1}^{+\infty}n!\sin\frac{1}{2}\times\sin\frac{1}{4}\times\ldots\times\sin\frac{1}{2n},\quad 6)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\quad 7)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}.$$

Solution : 1) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)=2>1$, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n}$ est divergente.

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{\frac{2n+1}{n}}=\frac{9}{16}<1$ alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$ est convergente.

3) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}=0<1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n^2}$ est convergente.

4) On a $U_n=\frac{2^n}{n!}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{U_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$ alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}$ est convergente.

5) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\sin\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\ldots\sin\frac{1}{2n}\sin\frac{1}{2n+2}}{n!\sin\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\ldots\sin\frac{1}{2n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\sin\frac{1}{2(n+1)}$. on pose $x=\frac{1}{n+1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\sin\frac{1}{2(n+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}<1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n!\sin\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\ldots\sin\frac{1}{2n}$ est convergente.

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}<1$, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ est convergente.

7) On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\frac{e^2}{3}>1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$ est divergente.

Exercice 6 : Utiliser la règle de l'intégrale pour déterminer la nature de la série suivante $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Solution : On a $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ une fonction décroissante $\left(f'(x)=-\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}<0\right)$.
On calcule $\int_2^A\frac{1}{x\ln x}dx$, pour cela, on pose $t=\ln x$, il vient $dt=\frac{1}{x}dx$.

Par suite $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln t = [\ln(\ln x)]_2^A = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2)$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_2^A \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{A\to+\infty}\big(\ln(\ln A) - \ln(\ln 2)\big) = +\infty$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ est divergente.

Exercice 7 : 1) Déterminer les valeurs $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la série

$$a)\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} \text{ converge.}$$

2) Discuter suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la nature des séries suivantes :

$$b)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}, \quad c)\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}\right), \quad d)\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(a+\frac{1}{3^n}\right).$$

Solution : 1) On a

$$\begin{aligned}
U_n &= \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\\
&= \sqrt{n}\left(1 + a\sqrt{\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)\\
&= \sqrt{n}\left[1 + a\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]\\
&= \sqrt{n}(a+b+1) + \frac{a+2b}{2\sqrt{n}} - \frac{a+2b}{8n^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}U_n$ converge $\Rightarrow \begin{cases} a+b+1=0\\ a+2b=0.\end{cases}$ Donc $a=-2$, $b=1$.

2) On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a-b}{n+b}\right)^n = e^{a-b}$

1. Si $a<b$, alors $e^a<e^b$ et la série est convergente.
2. Si $a>b$, alors $e^a>e^b$ et la série est divergente.
3. Si $a=b$, alors $e^a=e^b$. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}1$, alors la série est divergente.

3) On a

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}\right) &= \ln\left(\frac{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\\
&= \frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{\left(\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2}{2}+\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{\left(\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^2}{2}\\
&= \frac{a+b}{n}-\frac{a^2+b^2-6}{2n^2}-\frac{2a-b}{n^3}-\frac{5}{2n^4}.
\end{aligned}$$

1. Si $a=-b$, alors la série est convergente.
2. Si $a\neq -b$, alors la série est divergente.

4) On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(a+\frac{1}{3^n}\right) = \ln a$

1. Si $a \neq 1$, alors la série est divergente.
2. Si $a = 1$, alors $\ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right) \sim \frac{1}{3^n}$ et comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ est une série convergente, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{3^n}\right)$ est aussi convergente.

Exercice 8 : Déterminer la nature des deux séries suivantes : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ et préciser s'il s'agit de convergence absolue ou semi-convergence.

Solution : 1) On a

i. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(3n+1)^2} = 0.$

ii. Si $f(x) = \frac{1}{(3x+1)^2}$, alors $f'(x) = -\frac{6}{(3x+1)^3} < 0$, par suite f est décroissante.

Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}$ est convergente. De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}$, d'autre coté $\frac{1}{(3n+1)^2} \sim \frac{1}{9n^2}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{9n^2}$ converge alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}$ est aussi convergente. Donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}$ est absolument convergente.
2) On a

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0.$

ii) Si $f(x) = \frac{1}{(x+1)}$, alors $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$, ainsi f est décroissante.

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)}$ est convergente. De plus $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)}$, d'autre coté $\frac{1}{(n+1)} \sim \frac{1}{n}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)}$ est aussi divergente. Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}$ est semi-convergente.

Exercice 9 : On considère la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
1) Montrer que cette série est convergente.
2) Combien de termes faut-il prendre en compte dans la somme partielle pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près de la somme de la série.
3) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est-elle absolument convergente ?
4) Donner un équivalent de $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$.

Solution : 1) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée, avec $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ suite décroissante de limite 0, donc le critère des séries alternées s'applique et la série est convergente.
2) On sait de plus que si on somme les n premiers termes de cette série, on obtient une valeur approchée S_n telle que :

$$R_n = |S - S_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Pour obtenir une erreur inférieure à 10^{-2}, il suffit donc de s'assurer que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{100} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{n+1} \geq 100 \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \geq 10000. \end{aligned}$$

donc il suffit de sommer les 9999 premiers termes.
3) La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas absolument convergente, car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
4) La fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante et continue sur $[1, +\infty[$ donc on a l'encadrement classique de la somme partielle par deux intégrales :

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)dx.$$

Alors

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq S_n \leq 1 + 2(\sqrt{n} - 1).$$

Donc

$$S_n \sim 2\sqrt{n}.$$

Exercice 10 : Soit σ l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} \sigma(3p) = 2p, & \text{pour } p \in \mathbb{N}, \\ \sigma(3p+1) = 4p+1, & \text{pour } =p \in \mathbb{N}, \\ \sigma(3p+2) = 4p+3, & \text{pour } p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) Montrer que σ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Pour $n \geq 1$, on pose $\quad U_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.
2) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$?
3) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_{\sigma(n)}$?

Solution : 1) Pour montrer que l'application σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est bijective, le plus simple est encore d'exhiber l'application réciproque. On pose

$$\begin{cases} \phi(4p) = 6p, & \text{pour } p \in \mathbb{N}, \\ \phi(4p+1) = 3p+1, & \text{pour } p \in \mathbb{N}, \\ \phi(4p+2) = 6p+3, & \text{pour } p \in \mathbb{N}, \\ \phi(4p+3) = 3p+2, & \text{pour } p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On trouve $\phi \circ \sigma = \sigma \circ \phi = Id_{\mathbb{N}}$, et cela prouve que σ est bijective.
2) La série alternée $U_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est convergente, car $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ décroit et tend

vers zéro lorsque n tend vers l'infini.
3) On pose $V_p = \dfrac{1}{\sqrt{2p+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{4p+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{4p+4}}$. On vérifie qu'à partir d'un certain rang p_0, on a $V_p \leq 0$, et $\lim\limits_{p\to+\infty} V_p\sqrt{p} = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 0$.

Il en résulte que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} V_p$ et de même nature que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{p}}$ et donc qu'elle diverge. La suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, c'est à dire que la suite $S_{3p+2} = \sum\limits_{k=0}^{3p+2} U_{\sigma(k)}$, tend vers l'infini. On en déduit que la suite $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} U_{\sigma(k)}$ qui admet un sous-suite divergente, ne converge pas, cela prouve finalement que la série de terme général $U_{\sigma(n)}$ est divergente.

En conclusion, on voit ici l'importance de l'ordre des termes d'une série non absolument convergente puisqu'en réordonnant les termes d'une série semi-convergente, on obtient une série divergente.

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

« Je me détourne avec éffroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivée.»

Hermite, 1893.

2.1 Suites de fonctions

Soit $X \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $\psi(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions définies de X dans $\mathbb{K}$.

Définition 2.1.1. *L'application définie par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \psi(X,\mathbb{K}) \\ & n & \mapsto & f_n(x) \end{array}$$

s'appelle suites de fonctions *sur X.*

Exemples : Soit les deux suites de fonctions définient comme suit :

1. $X = \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n$.
2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}, \ X = \mathbb{R}^+$

2.1.1 Convergence simple

Définition 2.1.2. *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente c-à-d*

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

On dit que f_n converge simplement vers f sur X et on écrit $f_n \xrightarrow{CS} f$.

Remarque : $f_n \xrightarrow{CS} f \Leftrightarrow \forall x \in X \ \forall \epsilon > 0, \ \exists N, \ \forall n \ [n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon]$. L'entier N assoié à ϵ dépend de ϵ et en général aussi de x.

2.1.2 Convergence uniforme

Définition 2.1.3. *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers f si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

et on écrit $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur X.

Remarque : $f_n \overset{CU}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists N, \forall x\ \forall n\ [n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon]$.

Exemple : Soit $X = [1, 2]$ et $f_n(x) = 1 + \dfrac{x}{n^2}$.
On veut étudier la convergence simple et uniforme de f_n sur X.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n^2}\right) = 1 = f(x)$. Donc, $f_n \overset{CS}{\longrightarrow} f$ sur X.
On a, $\sup\limits_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[1,2]}\left|1 + \dfrac{x}{n^2} - 1\right| = \sup\limits_{x\in[1,2]}\left|\dfrac{x}{n^2}\right| = \dfrac{2}{n^2}$.
Il vient, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in[1,2]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n^2} = 0$.
Alors, $f_n \overset{CU}{\longrightarrow} f$ sur X.

Exercice : Soit $X = \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = xe^{-nx}$.
Étudier la convergence simple et uniforme de f_n sur X.

Solution : On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} xe^{-nx} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x}{e^{nx}} = 0 = f(x)$. Donc $f_n \overset{CS}{\longrightarrow} f$ sur $\mathbb{R}^+$.
$\sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} |xe^{-nx}|$, pour calculer le sup de cette fonction, on calcule $f_n'(x) = e^{-nx}(1 - nx)$, par suite

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-nx}(1 - nx) = 0,$$

donc $x = \dfrac{1}{n}$. Il vient $\sup\limits_{x\geq 0}\left|xe^{-nx}\right| = \dfrac{1}{ne}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\geq 0}\left|xe^{-nx}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{ne} = 0$. Donc $f_n \overset{CU}{\longrightarrow} f$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice : Soit $f_n(x) = \dfrac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2}$ et $X = \mathbb{R}_+$.
Étudier la convergence simple et uniforme de f_n sur X.

Solution : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2} = 0$. Donc $f_n \overset{CS}{\longrightarrow} f = 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
$\sup\limits_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\geq 0}\left|\dfrac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2} - 0\right|$, pour calculer le sup de cette fonction, on calcule $f_n'(x) = \dfrac{\sqrt{n} - 2n\sqrt{n}x^2}{(1 + nx^2)^2}$, par suite $f_n'(x) = 0$ implique que $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Il vient $\sup\limits_{x\geq 0}\dfrac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2} = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\geq 0}\dfrac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
Donc $f_n \overset{CU}{\not\longrightarrow} f$ sur $\mathbb{R}_+$.

2.1.3 Interprétation graphique de la convergence uniforme

Les courbes représentatives des f_n sont entièrement contenues dans la courbe représentative de $f + \varepsilon$ et celle de $f - \varepsilon$.

Remarque : Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge uniformémént vers f, il suffit de trouver une suite numérique $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|f_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)|$ ne tend vers zéro. En effet, comme

$$\sup |f_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| \geq |f_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)|,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\sup |f_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| \neq 0.$$

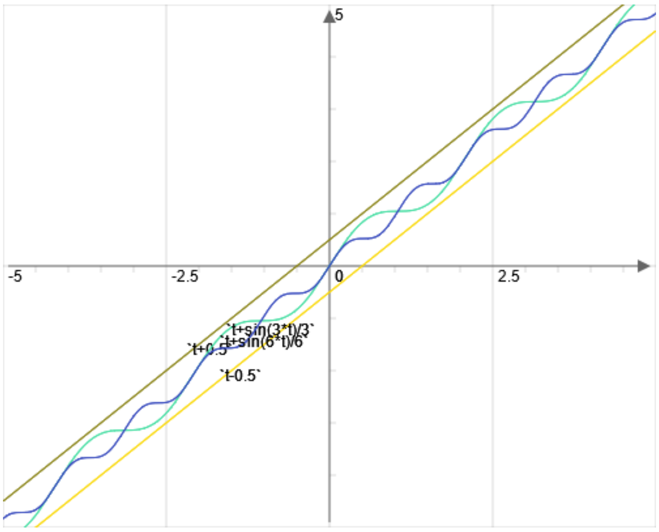

FIGURE 2.1 – Les courbes de $f_n(x) = x + \frac{\sin nx}{n}$ pour $n = 3, 6$ et $\varepsilon = 0.5$.

Exemple : Soit la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Cette série converge simplement vers la fonction

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour $x = \alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a $|f_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| = \dfrac{1}{2}$. Donc f_n ne converge uniformément pas vers f.

2.1.4 Propriétés liées à la convergence uniforme

a) Continuité

Théorème 2.1.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continue sur X. Si f_n converge uniformémént vers f sur X, alors f est continue sur X.*

Remarques : D'après Théorème 2.1.1, on en conclut que

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} \big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\big)$
2. Si f_n est continue sur X et f n'est pas continue sur X alors f_n ne converge pas uniformément vers f.

Exemple : Soit $X = [0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On a f_n est continue sur X et f n'est pas continue sur X, alors f_n ne converge pas uniformément vers f sur X c-à-d $f_n \overset{CU}{\not\longrightarrow} f$.

Théorème 2.1.2 (Dini)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continue convergente vers une fonction continue f sur $[a,b]$. Si de plus $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers f sur $[a,b]$.*

b) Intégration

Théorème 2.1.3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur un intervalle $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et intégrable sur $[a,b]$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$, alors*

1. *La fonction f est intégrable sur $[a,b]$.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

Exercice : Soit $f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$, $X = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
1) Étudier la convergence simple et uniforme de f_n sur X.
2) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\big)dx$.

Solution : 1) Si $x=0$ ou $x=\frac{\pi}{2}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Si $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\left(\frac{\ln n}{n}+\ln\cos x+\frac{\ln\sin x}{n}\right)} = 0$. Donc $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur X.
On a $\sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}|f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]} f_n(x)$.
Donc $f_n'(x) = n(\cos x)^{n-1}\big(1-(n+1)\sin^2 x\big)$.
Il vient $f_n'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{n+1}} = x_n \end{cases}$.
Ainsi $\sup\limits_{x\in[0,\frac{\pi}{2}]}|f_n(x)-f(x)| = f_n(x_n) = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}(\cos x_n)^n}$, de plus
$\cos x_n = \sqrt{1-\sin^2 x_n} = \sqrt{1-\frac{1}{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.
D'où $f_n(x_n) = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{2}}}$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = +\infty$ ce qui implique que $f_n \overset{CU}{\not\longrightarrow} f$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
2) On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx = 0$. D'autre côté,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} n(\cos x)^n\sin x dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} -n\left[\frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1.
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\big)dx$.

c) Dérivation

Théorème 2.1.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelle définie sur un intervalle X telle que*

1. *Pour tout n, f_n est dérivable à dérivée continue sur X.*
2. *Il existe au moins un point $x_0\in X$ tel que $(f_n(x_0))$ converge.*
3. *La suite (f_n') converge uniformément sur X.*

Alors

1. *La suite (f_n) converge uniformément sur X.*
2. *La limite de (f_n) est dérivable et on a $(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.*

2.2 Séries de fonctions

Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions. On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

$S_n(x)$ est appelée suite de fonctions des sommes partielles.

Définition 2.2.1. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge simplement (ou ponctuellement) sur* X *si et seleument si la suite de fonctions* $S_n(x)$ *converge simplement sur* X *et on écrit*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Remarque : On peut dire que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur X si et seulement si pour tout x_0 fixé dans X la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ converge.

Définition 2.2.2. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformément sur* X *si et seleument si la suite de fonctions* $S_n(x)$ *converge uniformément sur* X, *ou encore*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon),\ \forall n > N(\epsilon),\ \forall x \in X : |S_n(x) - S(x)| < \epsilon.$$

Définition 2.2.3. *On dit que la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge absolument sur* X *si et seleument si la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ *converge simplement sur* X.

2.2.1 Critère de Cauchy uniforme pour les séries de fonctions

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions réelles ou complexes $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformémént sur X est que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon),\ \forall n > N(\epsilon),\ \forall m > N(\epsilon),\ \forall x \in X : \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \epsilon.$$

Remarque : Une condition nécessaire de convergence uniforme sur X d'une série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est que la suite de fonctions $f_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur X.

Exercice : Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n, \qquad X = [0,1].$$

Solution : - Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors la série est convergente et sa somme est égale à 0.
- Si $x \in]0, 1[$, alors $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x(1-x)^k = x\frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = 1-(1-x)^{n+1}$, et donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 1$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{cases}$

Alors $S_n(x) \xrightarrow{CS} S(x) = 1$, par conséquent, cette série converge simplement.

Puisque $S_n(x)$ est continue et $S(x)$ n'est pas continue donc $S_n(x) \overset{CU}{\not\longrightarrow} S(x) = 1$, par suite cette série ne converge pas uniformément vers $S(x)$ sur X.

2.2.2 Convergence normale

Définition 2.2.4. *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *une série de fonctions. On dit que* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *est normalement convergente sur* X *si et seulement si* $\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x)|$ *est convergente.*

Exemple : On veut montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On cherche $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n(1+nx^2)}\right|$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}$. La fonction f_n est impaire, il suffit d'étudier ses variation sur $\mathbb{R}^+$.La dérivée $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}$ s'annule en $x_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Il découle $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n(1+nx^2)}\right| = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Puisque la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ converge alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2.1. *Si la série de fonction* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *est normalement convergente sur* X*, alors elle est uniformément convergente sur* X*.*

Preuve. Soit $x \in X$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est normalement convergente donne

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall m > n \geq n_0 : \left|\sum_{p=n+1}^{m} \|f_p\|_\infty\right| < \epsilon,$$

où $\|g\|_\infty = \sup_{x\in X} |g(x)|$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| &\leq \sup_{x\in X} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x)| \\ &= \sup_{x\in X} |(f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_m)(x)| \\ &= \|f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_m\|_\infty \\ &\leq \|f_{n+1}\| + \|f_{n+2}\| + \cdots + \|f_m\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est uniformément convergente.

Corollaire 2.2.1. *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *une série de fonctions. S'il existe une série numérique à terme positifs convergente* $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : |f_n(x)| < U_n,$$

alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *est normalement convergente sur* X.

Exemples : 1) On veut montrer que les deus série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{x}{n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ sont uniforméments convergentes sur $\mathbb{R}$.
On a $\frac{1}{n^2} \sin \frac{x}{n} \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente car (c'est une série de Riemann $\alpha = 2 > 1$), alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{x}{n}$ est normalement convergente. Par conséquent, elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
2) Même procédure pour la deuxième série de fonctions on en remarquant que $\frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, alors la deuxième série est aussi nomalement convergente. Par conséquent, elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

2.2.3 Propriétés liées à la convergence uniforme

a) Continuité

Théorème 2.2.2. *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *une série de fonctions continues sur* X*. Si cette série converge uniformément sur* X *alors sa somme est continue sur* X *et on a*

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

b) Intégration

Théorème 2.2.3. *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *une série de fonctions réelles intégrables sur* $[a,b]$*. Si cette série converge uniformément sur* $[a,b]$*, alors on a*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

c) Dérivation

Théorème 2.2.4. *Soit* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *une série de fonctions réelles définies sur* $[a,b]$ *telle que :*

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est dérivable à dérivée continue sur* $[a,b]$.

ii. Il existe au moins un point $x_0 \in [a,b]$ *tel que la série numérique* $f_n(x_0)$ *converge.*

iii. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ *converge uniformément sur* $[a,b]$.

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x).$$

2.2.4 Critère d'Abel

Théorème 2.2.5 (d'Abel). *Soient* $\big(a_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $\big(b_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de fonctions définies sur* X *telles :*

1. *Pour tout* $x \in X$, $a_n(x)$ *est monotone.*
2. *La suite de fonctions* $\big(a_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* 0.
3. $\exists M > 0, \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, |S_n(x)| \leq M$ *avec* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x)$.

Alors la série de fonctions de terme général $a_n b_n$ *converge uniformément sur* X.

Exemple : On veut étudier sa convergence uniforme de la série de fonction $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ sur $[a,b]$. On pose $a_n(x) = \frac{x^2+n}{n^2}$. Alors :

i. $a_n(x)$ est décroissante car pour tout $x \in [a,b]$, $\frac{x^2+n+1}{(n+1)^2} \leq \frac{x^2+n}{n^2}$.

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|\frac{x^2+n}{n^2}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M+n}{n^2} = 0$, donc la suite do fonctions $\frac{x^2+n}{n^2}$ converge uniformément vers 0.

iii. $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\right| \leq 2$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$ est uniformément convergente sur $[a,b]$.

2.3 Exercices avec solutions

Exercice 1 : Soit $f_n(x) = x^n \ln x,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ x \in]0,1]$ et $f_n(0) = 0$.
Étudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x)$ sur $[0,1]$.

Solution : Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n \ln x = 0$. Donc

$$f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0 \text{ sur } [0,1].$$

$f_n'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln x)$, alors $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = -f_n\left(e^{-\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{ne}$.
Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{ne} = 0$. Donc

$$f_n(x) \xrightarrow{CU} f(x) = 0 \text{ sur } [0,1].$$

Exercice 2 : Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^2 x^2} \quad \text{sur } [1, +\infty[.$$

Solution : On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 x}{1+n^2x^2} = \dfrac{1}{x}$. Donc

$$f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{sur } [1, +\infty[.$$

On a $|f_n(x) - f(x)| = \left|\dfrac{n^2x}{1+n^2x^2} - \dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{x(1+n^2x^2)} = g_n(x)$.
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $g_n'(x) = -\dfrac{1+3n^2x2}{x^2(1+n^2x^2)^2} < 0$. Alors g_n est décroissante. Ainsi $\sup\limits_{x\geq 1} g_n(x) = g_n(1) = \dfrac{1}{1+n^2}$, il découle $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Donc

$$f_n(x) \xrightarrow{CU} f(x) \quad \text{sur } [1, +\infty[.$$

Exercice 3 : Soit la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$

1) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x)$ sur $[a, +\infty[,\ a > 0$.

Solution : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2} = \dfrac{x}{\frac{1}{2^n} + nx^2} = 0$. Donc

$$f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}_+.$$

On a $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{2^n x}{1+n2^nx^2} = f_n(x)$.
On a $f_n'(x) = \dfrac{2^n(1-n2^nx^2)}{(1+n2^nx^2)^2}$, alors $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{n2^n}}$.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n2^n}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2^n}{n}}$.
Il vient $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Donc

$$f_n(x) \overset{CU}{\not\longrightarrow} f(x) = 0 \ \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

2) On a $f_n(x) \xrightarrow{CS} f(x) = 0$ sur $[a, +\infty[$.
Pour tout $x \geq a$: $\frac{1}{1+n2^nx^2} < \frac{1}{n2^nx^2}$ il vient $\frac{2^nx}{1+n2^nx^2} < \frac{2^nx}{n2^nx^2} = \frac{1}{nx}$.
Par suite $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{na}$ donne $\sup_{x\leq a} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{na} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. D'où

$$f_n(x) \xrightarrow{CU} f(x) = 0 \quad \text{sur } [a, +\infty[.$$

Exercice 4 : Soit la suite de fonctions $f_n(x) = e^{-nx}\cos(nx)$.
1) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $f_n(x)$ sur $]0, +\infty[$ et sur $[1, +\infty[$.

Solution : 1) On a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
Donc $f_n \xrightarrow{CS} f$ sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et f n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$, alors $f_n \overset{CU}{\not\longrightarrow} f$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) = 0$, donc $f_n \xrightarrow{CS} f = 0$ sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| \geq e^{-nx}|\cos(nx)|$.
Pour $x_0 = \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\sup_{x>0} |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq e^{-2\pi}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$. Ainsi $f_n \overset{CU}{\not\longrightarrow} f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Sur $[1, +\infty[$: $f_n \xrightarrow{CS} f = 0$, et $\sup_{x>1} |f_n(x) - f(x)| = e^{-nx}|\cos(nx)| \leq e^{-nx} \leq e^{-n} \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $f_n \xrightarrow{CU} f = 0$ sur $[1, +\infty[$.

Exercice 5 : Étudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ sur $X = [a, b]$ où $a > b > 0$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} x \geq a \quad &\Rightarrow \quad -nx \leq -na \\ &\Rightarrow \quad e^{-nx} \leq e^{-na} \\ &\Rightarrow \quad xe^{-nx} \leq xe^{-na} \\ &\Rightarrow \quad \frac{xe^{-nx}}{\ln n} \leq \frac{xe^{-na}}{\ln n}. \end{aligned}$$

Comme $x \leq b$, il vient $\frac{xe^{-nx}}{\ln n} \leq \frac{xe^{-na}}{\ln n} \leq \frac{be^{-na}}{\ln n} = U_n$.
On a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{be^{-(n+1)a\ln n}}{\ln(n+1)} be^{-na} = e^{-a}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = e^{-a} < 1$. Donc la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ est convergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$ converge normalement sur $[a, b]$ et par suite elle converge uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 6 : 1) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.
2) Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n}\frac{1}{n^2}$.

Solution : 1) On a $\lim_{n\to+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = \begin{cases} \infty & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x=0. \end{cases}$ Donc la série est divergente.
Si $x>0$, alors $\lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0$, donc la série converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2) Si $x>0$, alors $-1 < \frac{1-x^n}{1+x^n} < 1$ car $-1 < \frac{1-y}{1+y} < 1$ avec $y>0$.
Donc $-\frac{1}{n^2} < \frac{1-x^n}{1+x^n}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ c-à-d $\left|\frac{1-x^n}{1+x^n}\frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, d'autre part $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ est convergente alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n}\frac{1}{n^2}$ converge normalement, par conséquent elle converge uniformément et simplement sue $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7 :
1) Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^2}$.
2) Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0,a]$ de cette série avec $a>0$.

Solution : 1) On pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3+x^2}$. On a pour tout $x>0$,
$\frac{nx^2}{n^3+x^2} \leq \frac{x^2}{n^2}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n^2}$, alors la série converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.
On pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{kx^2}{k^3+x^2}$. On a

$$\begin{aligned} |S_n(x)-S(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{n}\frac{kx^2}{k^3+x^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^2}{k^3+x^2}\Big| \\ &= |f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots| \\ &\geq |f_{n+1}(x)|. \end{aligned}$$

On a $|f_{n+1}(x)| = \frac{(n+1)x^2}{(n+1)^3+x^2} \leq \sup_{x\geq 0}|S_n(x)-S(x)|$. Pour $x=n+1$ on trouve $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1 \leq \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}|S_n(x)-S(x)|$.
Alors $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}|S_n(x)-S(x)| \neq 0$, par conséquent la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ donc ne converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
2) Pour tout $x\leq a$, on a $\frac{nx^2}{n^3+x^2} \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{a^2}{n^2}$. Puisque $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^2}{n^2}$ converge alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^2}$ converge normalement sur $[0,a]$, par conséquent elle converge uniformément et simplement sur $[0,a]$.

Exercice 8 : 1) Montrer que la série de terme général ne^{-nx} converge unifomément sur $[1,+\infty[$.
2) Soit $S(x)$ la somme de cette série. Calculer $\displaystyle\int_a^b S(x)dx$ avec $1 < a < b$.

Solution : Pour tout $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} nx \geq n \quad &\Rightarrow \quad e^{-nx} \leq e^{-n} \\ &\Rightarrow \quad ne^{-nx} \leq ne^{-n} = U_n. \end{aligned}$$

De plus on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n} = \frac{1}{e} < 1$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ est convergente, par conséquent $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ converge normalement et alors converge unifomément sur $[1,+\infty[$.
2) On a

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x)dx &= \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b ne^{-nx}dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} [-e^{-nx}]_b^a \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{e^{nb}} - \frac{1}{e^{na}}\right] \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{e^b}} - \frac{1}{1-\frac{1}{e^a}}. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Séries entières

3.1 Généralités

Définition 3.1.1. *On appelle série entière de la variable complexe z ou (réelle x) une série de fonctions dont le terme général s'écrit :*

$$f_n(z) = a_n z^n \text{ ou } (f_n(x) = a_n x^n), \quad n \in \mathbb{N},$$

où a_n sont appelés les coefficients de la série.

Théorème 3.1.1. *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière. Il existe un nombre $R \geq 0$ fini ou non tel que :*

1. *Si $|z| < R$, la série est absolument convergente.*
2. *Si $|z| > R$, la série est divergente.*

R est appellé la rayon de convergence *et il est définit par :*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad ou \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|}.$$

Preuve. On applique la règle de Cauchy à la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On a

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} \\ &= |z| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= |z| \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Si $|z| < R$, on a $\ell < 1$ et la convergence est absolue de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si $|z| > R$, on a $\ell > 1$ et la série diverge.

Lemme 3.1.1 (d'Abel)**.** *S'il existe z_0 tel que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ soit bornée, alors la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < |z_0|$.*

3.2 Disque de convergence

Soit R le rayon de convergence d'une série entière. Le disque de convergence est définie par :

1. $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ qui est *le disque ouvert.*
2. $\overline{D_R} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ qui est *le disque fermé*

Dans le cas réel, on a l'intervalle $D_R =]-R, R[$ est appellé l'intervalle ouvert de convergence. L'intervalle $\overline{D_R} = [-R, R]$ est appellé l'intervalle fermé de convergence.

Exemple : On veut calculer les rayons de convergences des séries suivantes :

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}, \qquad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n2^n}.$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$, alors $R = +\infty$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, alors $R = 1$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, alors $R = 2$.

Théorème 3.2.1. *Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence R. Pour tout r vérifiant $0 \leq r \leq R$, la série est normalement convergente dans le disque fermé $\overline{D_r}$.*

3.3 Opéations algébriques

Soient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières. On note R et R' leurs rayons de convergences et $f(z), g(z)$ leurs sommes.

Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n z^n + \beta b_n z^n$, on note R'' sa rayon de convergence.

La série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n z^n + \beta b_n z^n$ converge absolument pour $|z| < \min(R, R')$.

Si $R \neq R'$, alors $R'' = \min(R, R')$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n z^n + \beta b_n z^n = \alpha f(z) + \beta g(z)$.

3.4 Propriétés analytique

a) Continuitée

Théorème 3.4.1. *La somme d'une série entière* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence $R \neq 0$ est une fonction continue de z à l'intérieur du disque de convergence (pour tout $|z| < R$).*

Théorème 3.4.2 (continuité d'Abel). *Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence R. Si la série numérique* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ *converge alors* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge uni-*

formément sur $[0, R]$ *et sa somme est continue sur ce segment et on a*

$$\lim_{x \to R} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

.

b) Dérivée

Théorème 3.4.3. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Soit* $f(z)$ *la somme de cette série dans le disque ouvert de convergence. La fonction* f *est dérivable et sa dérivée est la somme de la série entière* $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$ *dont le rayon de convergence est égale à* R.

c) Primitives

Théorème 3.4.4. *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *Soit* $f(x)$ *la somme de cette série dans l'intervalle ouvert de convergence. La série entière* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ *obtenue en intégrant terme à terme la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *à même intervalle de convergence* $]-R, R[$ *que la série donnée et la fonction somme est égale à l'intégrale* $\int_0^x f(t)dt$.

Exemple : Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, avec $R = 1$. Alors

$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, avec $R = 1$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$, avec $R = 1$.

3.5 Développement en série entière

Définition 3.5.1. *Soit* $f(z)$ *une fonction définie dans un voisinage* D *de l'origine c-à-d une partie contenue dans* $\mathbb{C}$ *qui contient un disque de rayon strictement positif, centré à l'origine. On dit que cette fonction est développable en série entière dans* D *s'il existe une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *de rayon de convergence non nul, dont elle est la somme dans* D *et on écrit :*

$$\forall z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = f(z).$$

Définition 3.5.2. *Soit* $f :]-\tau, \tau[\longrightarrow \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$, *on dit que* f *est développable en série entière s'il existe une suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tel que :*

$$\forall z \in D_\tau : f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Définition 3.5.3. *Soit* $f :]-\tau,\tau[\longrightarrow \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *telle que* $f \in C^{\infty}(]-\tau,\tau[)$ *c-à-d* f *est indifiniment dérivable. On appelle* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ la série de Taylor *associé à* f *dans* $]-\tau,\tau[$.

Définition 3.5.4. *Soit* $f :]-\tau,\tau[\longrightarrow \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$. *Si* f *est développable en série entière c-à-d* $\forall x \in]-\tau,\tau[: f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *alors*

1. $f \in C^{\infty}(]-\tau,\tau[)$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ *et on a* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Théorème 3.5.1. *Soit* $f \in C^{\infty}(]-\tau,\tau[)$. *On suppose qu'il existe une fonction* $g :]-\tau,\tau[\longrightarrow \mathbb{K} = (\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *continue telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\tau,\tau[: |f^{(n)}(x)| \leq |g(x)|,$$

alors f *est développable en série entière et* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarque : 1) Si $g(x) = M \in \mathbb{R}^+$ alors $\forall n, \forall x\ |f^{(n)}(x)| \leq M$.
2) La condition est sufisante et n'est pas necessaire c-à-d

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \text{n'implique pas } |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Exemple : Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$. On a $f^n(0) = 2^n$ par conséquent $f^n(0)$ n'est pas bornée.

3.6 Développement des fonctions usuelles

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots$

$sh\ x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots$

$ch\ x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \cdots.$

3.7 Exercices avec solutions

Exercice 1 : Calculer le rayon de convergence.

$$1)\ f_n(z) = \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n, \qquad 2)\ f_n(z) = (1+in)z^n.$$

Solution : 1) On a $a_n = \left(\dfrac{1+2ni}{n+2i}\right)^n$, $\sqrt[n]{|a_n|} = \left|\dfrac{1+2ni}{n+2i}\right| = \sqrt{\dfrac{1+4n^2}{n^2+4}}$, et
$\lim\limits_{n\to+\infty} = \sqrt[n]{|a_n|} = 2$. On en déduit que $R = \dfrac{1}{2}$.
On a $a_n = 1+in$, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{1+i(n+1)}{1+in}\right| = \dfrac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}}$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} = \dfrac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}} = 1$. On en déduit $R = 1$.

Exercice 2 : 1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}.$$

2) Si l'on note $f(x)$ la somme de cette série à l'intérieur du disque de convergence, on demande de déterminer le domaine de continuité de la fonction f.
3) Calculer $f(x)$ et en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n-1}{2n+3} = 1$, d'où $R = 1$.
Étudions la convergence aux bornes, en posant $x_0 = \pm 1$. La série est alors absolument convergente.
En effet $|f_n(x_0)| = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$. Il y a convergence uniforme de la série sur $|x| \le 1$. Le domaine de continuité de la série est $D = \{x \in \mathbb{C}/|x| \ge 1\}$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2(2n-1)} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2(2n+1)}$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2(2n-1)} = \frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$.
On a $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, en intégrant, on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} = \arctan x$. De la même façon $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\right) = \frac{1}{1+x^2} - 1$.
D'où par intégration $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arctan x - x$. Il vient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} =$
$\dfrac{1}{2}((1+x^2)\arctan x - x), \quad |x| < 1.$
La fonction f est continue sur $[-1,1]$, elle l'est en particulier au point $x = 1$, la série numérique donnée a pour somme la valeur $f(1)$.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi-2}{4}.$

Exercice 3 : 1) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer leurs sommes : 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$, 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+1)}{n!}x^n$.

Solution : 1) On trouve $R = 1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ &\Rightarrow \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

D'autre côté, $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n^2x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-2}$. Ainsi $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-2}$, par suite $\sum_{n=2}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^n$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$. D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}.$$

Méthode 2 : On a $n^2x^n = x^2(n(n-1)x^{n-2}) + x(nx^{n-1})$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n &= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x^2+x}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

2) On trouve $R = +\infty$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n^2+1)}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\ &= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n \\ &= (x^2+x+1)e^x. \end{aligned}$$

Exercice 4 : 1) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}$ est convergente.

2) Calculer la somme de cette série.

Solution : 1) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \dfrac{1}{3} < 1$, alors la série est convergente.

2) Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ est $R = 1$. D'autre part, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n3^n} = \ln \dfrac{3}{2}$.

Execice 5 : Développer en série entière les fonctions suivantes :

$$a) f(x) = \ln(2+x), \quad b) f(x) = e^{2-x^2}, \quad c) f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

Solution : On a

$a) \ln(2+x) = \ln 2 + \ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{2^n n}, \quad R = 2.$

$b) e^{2-x^2} = e^2.e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n e^2 x^{2n}}{(2n)!}, \qquad R = +\infty.$

$c) \dfrac{1}{x^2-3x+2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x-2}$. On a

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1.$

$\dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = -\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2^{n+1}}, \quad R = 2.$

Donc $\dfrac{1}{x^2-3x+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n, \quad R = 1.$

Exercice 6 : 1) Déterminer les séries entières de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, dont la somme est solution de l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

2) Donner le rayon de convergence des séries obtenues.
3) On appelle S_0 la série obtenue pour $a_0 = 1$. Montrer que l'on a

$$S_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) d\theta.$$

Solution : On a $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. On reporte dans l'équation différentielles, on identifie les coefficients de x^n et les premiers termes. On obtient

$$n^2 a_n = -a_{n-2}, \; a_1 = 0, \; a_0 \cdots \tag{3.1}$$

.

Les termes de rang impair sont tous nuls, et on a $a_{2p} = \dfrac{(-1)^p a_0}{2^{2p}(p!)^2}$. Le disque de convergence, déterminé par la règle de d'Alembert à partir de la relation (3.1), est $R = +\infty$. Les solutions de l'équation différentielle développables en série entière sont les sommes des séries

$$S(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_0 \frac{(-1)^p x^{2p}}{2^{2p}(p!)^2} = a_0 \sum_{p=1}^{+\infty} a_0 \frac{(-1)^p}{(p!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) La série S_0 est définie par $S_0(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} a_0 \frac{(-1)^p}{(p!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$.

Pour tout x et θ, on a le développement en série entière en x de la fonction $u(x,\theta) = \cos(x\sin\theta)$, donné par la formule connue

$$u(x,\theta) = \cos(x\sin\theta) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_0 \frac{(-1)^p(x\sin\theta)^{2p}}{(2p)!}.$$

On a $\left|\frac{(-1)^p(x\sin\theta)^{2p}}{(2p)!}\right| \leq \frac{|x|^{2p}}{(2p)!} = V_n(x)$. Or $V_n(x)$ est le terme général d'une série entière convergente pour tout x, la convergence de la série développée de la fonction u est uniforme par rapport à θ. On peut donc intégrer terme à terme la série de fonctions de terme général $\frac{(-1)^p(x\sin\theta)^{2p}}{(2p)!}$ par rapport à θ. Il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)d\theta &= \int_0^\pi \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p(x\sin\theta)^{2p}}{(2p)!}\right) d\theta \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\int_0^\pi \frac{(-1)^p(x\sin\theta)^{2p}}{(2p)!} d\theta\right) \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}\left(\int_0^\pi (\sin\theta)^{2p} d\theta\right)
\end{aligned}$$

On retrouve *les intégrales de Wallis*, c-à-d $I_p = \int_0^\pi (\sin\theta)^{2p}d\theta$, sa valeur est

$$I_p = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p}\pi = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\pi.$$

En repportant la valeur de I_p dans l'intégrale précédente, on trouve

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(s\sin\theta)d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(s\sin\theta)d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{2^{2p}(p!)^2} = S_0(x).$$

Chapitre 4

Séries de Fourier

4.1 Séries trigonométriques

Définition 4.1.1. *On dit q'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période $T > 0$ (ou T-périodique) si elle vérifie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+T) = f(x).$$

Définition 4.1.2. *On appelle série trigonométrique (réelle) une série de fonctions*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres réels.

Remarque : On a $|a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x| \leq |a_n| + |b_n|$. Si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + |b_n|$ converge alors la série trigonométrique converge absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exemple : La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Lemme 4.1.1. *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 2ℓ localement intégrable, alors*

$$\forall a \in \mathbb{R} : \int_a^{a+2\ell} g(t)dt = \int_0^{2\ell} g(t)dt.$$

Preuve. On a $\displaystyle\int_a^{a+2\ell} g(t)dt = \int_a^0 g(t)dt + \int_0^{2\ell} g(t)dt + \int_{2\ell}^{a+2\ell} g(t)dt.$
On pose $t = x + 2\ell$, il vient

$$\int_a^{a+2\ell} g(t)dt = \int_0^a g(x+2\ell)dx = \int_0^a g(x)dx.$$

Donc $\displaystyle\int_a^{a+2\ell} g(t)dt = \int_0^{2\ell} g(t)dt.$

Lemme 4.1.2. *Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrale. Alors*

1. *Si g est impaire alors pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0.$*

2. *Si g est paire alors pour tout $a > 0$,* $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx.$

Définition 4.1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période 2ℓ localement intégrable. La série trigonométrique*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{\ell}x + b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

où $a_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\cos\frac{n\pi}{\ell}tdt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
et $b_n = \dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}tdt, \quad n = 1, 2, \ldots$
s'appelle série de Fourier de f*. De plus,* a_n *et* b_n *sont* les coefficients de Fourier de f.

Corollaire 4.1.1. *: Si f est périodique de période 2π alors sa série de Fourier est*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

où $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
et $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt, \quad n = 1, 2, \ldots$

Remarques :
1) Si la fonction f est paire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)\cos ntdt.$
2) Si la fonction f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)\sin ntdt.$

Théorème 4.1.1. *Si f est la somme d'une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, alors elle est égale à la somme de sa série de Fourier c-à-d $S_f(x) = f(x)$.*

4.2 Convergence

Définition 4.2.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On dit qu'elle est continue (resp monotone) par morceaux si :*

1. *Elle est définie sur $[a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $(a_k)_{0\leq k\leq n}, a_0 = a, a_n = b$ constituant une subdivision de cet intervalle.*
2. *Pour tout k la restriction de la fonction à l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$ coïncide avec une fonction continue (resp monotone) sur l'intervalle fermé $[a_k, a_{k+1}]$.*

Remarque : La fonction f admet en tout point y de $[a, b]$ une limite à droite et une limite à gauche. On les notent

$$\lim_{x\to y^+} f(x) = f(y + 0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to y^-} f(x) = f(y - 0).$$

Définition 4.2.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On appelle dérivée à droite ou dérivée à gauche de f en x_0, les limites, si elles existent notées :*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h} = f'(x_0 + 0), \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{h} = f'(x_0 - 0).$$

Théorème 4.2.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, intégrable, si elle vérifie de plus l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

a. Elle est monotone par morceaux.

b. Elle est continue par morceaux et admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors

1. La série de Fourier de f converge pour tout x et on a $S_f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

2. La convergence de la série de Fourier de f est uniforme sur tout intervalle $[a, b]$ où

. f est continue dans le cas a.

. f est à dérivées bornées dans le cas b.

Corollaire 4.2.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, continue, à dérivée continue par morceaux, sa série de Fourier est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ et sa somme y est égale à f : $\forall n \in \mathbb{R},\ S_f(x) = f(x)$.*

4.3 Formule de Parceval-Plancherel

Théorème 4.3.1. *Soit f une fonction définie 2π-périodique, intégrable, ses coefficients de Fourier réels vérifient les relations suivantes appelées* égalité de Parseval *:*

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Exercice : 1- Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\pi, 0] \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$

2- Étudier la convergence en déduire les valeurs des sommes de séries numériques suivantes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1},\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

Solution : On calcule tout d'abord les coefficients de Fourier.

$a_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0,\quad n \neq 0.$

$a_0 = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1.$

$b_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx = \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-)^n}{n\pi}.$

On en déduit l'expression de la série de Fourier suivante :

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin nx.$$

Il y a la convergence simple mais non absolue. En effet la série $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|$ diverge.

$$S_f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\sin(2k+1)n}{(2k+1)\pi}.$$

On peut dire que pour tout x réel, on a

$$S_f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{4.1}$$

,
pour $x = \frac{\pi}{2}$, $f(x+0) = f(x-0) = 1$. On remplace dans l'équation (4.1), on trouve

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

- Utilisons la formule de Parseval-Plancherel

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

On en déduit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On pose

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{S}{4} + \frac{\pi^2}{8}.$$

Donc $S = \frac{\pi^2}{6}$. On a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}(\frac{\pi^2}{6}).$$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

4.4 Série de Fourier complexe

Soit f une fonction 2π-périodique intégrable sur $\mathbb{R}$. On a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Il découle :

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= a_n\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) \\ &= a_n\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right) - ib_n\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{inx} + \left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx}. \end{aligned}$$

Si on pose $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$, alors la série de Fourier complexe de f est la série définie par :

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) \quad \text{ou} \quad S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

où $C_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx,\ n \in \mathbb{Z}$. On appelle C_n *les coefficients de Fourier complexes de f.*

Remarque : Les coeficients de Fourier vérifie la relation suivante :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

ou

$$|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|Cn|^2 + |C_n|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Exercice : 1) Développer en série de Fourier la fonction f, 2π-périodique définie par $f(x) = e^{i\alpha x}$ pour $|x| < \pi$, avec $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$.
2) Étudier la convergence de la série de Foirier vers la fonction, et si α est réel, montrer que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

Solution : 1) La fonction f est à valeurs complexes, 2π-périodique à dérivées continues par morceaux. On calcule ses coefficients de Fourier complexes. $f(x) = e^{i\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$.

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\alpha x}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)x}dx = \frac{\left[e^{i(\alpha-n)x}\right]_{-\pi}^{\pi}}{2i\pi(\alpha - n)}.$$

Donc

$$C_n = \frac{e^{i\pi(\alpha-n)} - e^{-i\pi(\alpha-n)}}{2i\pi(\alpha - n)} = \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha - n)} \sin \pi\alpha.$$

2) La série de Fourier de f est uniformément convergente sur tout intervalle où f est continue, par le Théorème 4.2.1, elle converge vers la fonction f si $x \neq k\pi$.
On a

$$S_f(x) = e^{i\alpha x} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\alpha - n}.$$

Si α est réel, la formule de Parseval-Plancherel donne

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

4.5 Exercices avec solutions

Exercice 1 : Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique impaire, égale à x sur l'intervalle $]-\pi,+\pi]$. Étudier la convergence.
2) Trouver la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2k+1}$.

Solution : La fonction est impaire donc $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$. On fait une intégration par partie

$$\begin{cases} u=x \\ dv=\sin nxdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=-\frac{\cos nx}{n} \end{cases}.$$

Ainsi $b_n=\dfrac{2}{\pi}\left\{\left[-x\dfrac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}+\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right\}\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$. Donc

$$S_f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Il y a convergence simple mais non absolue de cette série trigenemétrique. En effet, la série (b_n) converge mais la série $(|b_n|)$ est divergente. On a pour tout x,

$$S_f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Pour $x=\dfrac{\pi}{2}$, on a $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$. Il vient $\dfrac{\pi}{2}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$. Or
$\sin\dfrac{n\pi}{2}=\begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ (-1)^k & \text{si } n=2k+1. \end{cases}$
Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 : 1) Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique égale à $|x|$ sur l'intervalle $]-\pi,+\pi]$. Étudier la convergence.
2) En déduire les relations suivantes :
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$

Solution : La fonction f est monotone par morceaux et 2π-périodique. Elle est paire donc $b_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$. On fait intégration par partie

$$\begin{cases} u=x \\ dv=\cos nxdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{\sin nx}{n} \end{cases}$$

Ainsi $a_n=\dfrac{2}{\pi}\left\{\left[x\dfrac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right\}=\dfrac{2}{\pi n^2}[\cos nx]_0^{\pi}$,
$a_n=\dfrac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}=\begin{cases} 0 & \text{si } n=2p \\ -\frac{2}{\pi(2p+1)^2} & \text{si } n=2p+1. \end{cases}$

D'autre part, $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x dx = \pi$.
On a donc la série de Fourier de f qui s'écrit

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2}.$$

Cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle converge vers la fonction f d'après le théorème de Dirichlet.
2) La fonction étant continue, la somme de la série de Fourier est exactement égale à la fonction en tout point de $\mathbb{R}$. En particulier prenons $x = 0$. il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2} = \frac{\pi^2}{12}$. La dernière relation découle de l'application de la formule de Parseval-Plancherel. On a $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.
En séparant partie pair et impaire, on obtient
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} + \frac{1}{2^4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$,
d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 3 : Soit f la fonction 2π-périodique égale à x^2 sur l'intervalle $[-\pi, +\pi[$.
1) Déterminer sa série de Fourier, et donner la somme de la série pour toute valeur de x réel.
2) Trouver la relation $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution : La fonction $f_1 : x \longmapsto x^2$ étant paire, on a $f_1(-\pi) = f_1(\pi)$. On la tronque entre $-\pi$ et π, pour définir la fonction 2π- périodique f, qui est donc continue et paire.
1) Le développement en série de Fourier de f ne présente que des termes pairs. On a donc $b_n = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos nx dx$,

$$\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos nx dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{\sin nx}{n} \end{array}\right.$$

$a_n = \dfrac{2}{\pi}\left\{\left[x^2 \dfrac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - 2\displaystyle\int_0^\pi x \frac{\sin nx}{n} dx\right\} = \dfrac{-4}{n\pi}\displaystyle\int_0^\pi x \sin nx dx$.
Le changement donne $a_n = \dfrac{-4}{n\pi}\left\{\left[-x\dfrac{\cos nx}{n}\right]_0^\pi + \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} dx\right\} = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$.
Pour $n = 0$, $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2 dx = \dfrac{2\pi^2}{3}$.

La série de Fourier s'écrit

$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Cette série est normalement convergente (en effet $(|a_n|)$ converge), donc uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, elle converge vers la fonction f en tout point, car f est continue.
2) Pour trouver la valeur de la somme demandée, il suffit de prendre $x = \pi$ dans l'égalité précédente. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 4 : Soit f la fonction 2π-périodique égale à x^2 sur l'intervalle $[0, 2\pi[$.
1) Déterminer sa série de Fourier, et calculer sa somme pour $x = 0$.
2) Que dire de la convergence de S_f ?

Solution : La fonction que l'on développe ici est monotone par morceaux et 2π-périodique. Elle n'est pas ni paire ni impaire, nous calculons les coefficients de Fourier réels par partie en effectuant deux changement de variables successifs.

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$.

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx$,

$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos nx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{\sin nx}{n} \end{cases}$

$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\frac{\sin nx}{n}dx\right\} = \frac{-2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x \sin nx dx.$

Le changement de variable donne

$a_n = \frac{-2}{n\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{n}dx\right\} = \frac{4}{n^2}.$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx$,

$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \sin nx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{cases}$

$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-x^2\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} x\frac{\cos nx}{n}dx\right\} = \frac{-4\pi}{n}.$

On vérifiera que $\int_0^{2\pi} x\frac{\cos nx}{n}dx = 0$.

On écrit donc la série de Fourier de f,

$$S_f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

La série est convergente, la fonction f faisant partie de la première classe de fonctions. On a $S_f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, et la convergence est uniforme sur tout intervalle $[a, b[\subset]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

Autrement dit, $S_f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2k\pi \\ 2\pi^2 & x = 2k\pi. \end{cases}$

Exercice 5 : Soient f et g deux fonctions 2π-périodiques définies par $f(x) = x$ et $g(x) = \sin\frac{x}{2}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

1) Déterminer le développement de f en série de Fourier complexe et donner les domaines de convergence uniforme de cette série vers la fonction f.
2) Déterminer la série de Fourier complexe de g, étudier sa convergence et en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Solution : La fonction f dont on cherche le développement en série de Fourier est 2π-périodique, continue et indéfiniment dérivable par morceaux. Ses coefficients de Fourier complexex sont de la forme $c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2pi} xe^{-inx}dx$. Le changement de variable pour $n \neq 0$ s'écrit $\left\{\begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \sin nx dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = 2xdx \\ v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array}\right.$ $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} xdx = \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{x^2}{2}\right] = \pi$.

$c_n = \dfrac{1}{2\pi}\left\{\left[-\dfrac{xe^{inx}}{in}\right]_0^{2\pi} + \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{inx}}{in}dx\right\} = -\dfrac{1}{in}$.

On en déduit $S_f(x) = \pi - \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{in}$, que l'on peut écrire sous forme réelle $S_f(x) = \pi - 2\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Sur tout intervalle fermé borné inclus dans $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, la série $S_f(x)$ converge uniformément vers f.
2) La fonction g est 2π-périodique continue par morceaux, à dérivées continues par morceaux.
Ses coefficients de Fourier complexes sont données par

$$c_n = \int_0^{2\pi} g(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{2}e^{-inx}dx = \frac{1}{4i\pi}\int_0^{2\pi} (e^{-i(n-\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x})dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi(n^2-\frac{1}{4})}.$$

La série de Fourier complexe s'écrit $S_g(x) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n^2-\frac{1}{4}}$. On en déduit la série de Fourier réelle en regroupant les terme : $S_g(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{4n^2-1}$.

On sait que la série de Fourier de g converge uniformément sur $\mathbb{R}$ car g est continue, et que sa somme est égale à g.
En particulier prenons $x = 0$, il vient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Exercice 6 : Soit f la fonction 2π- périodique impaire, définie pour tout x de l'intervalle $[0, \pi[$ par $f(x) = x(\pi - x)$.
2) Déterminer le développement de f en série de Fourier, étudier sa convergence et en déduire la valeur de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Solution : La fonction f est 2π-périodique, impaire et continue à dérivée continues par morceaux. En effet, $f(\pi) = f(0) = 0$.
Ses coefficient de Fourier vérifient :

$a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx dx$
En effectuant des intégrations par parties utilisant les changements de variable, on obtient
$b_n = \dfrac{-4(-1)^{n-1}}{\pi^3}$, les termes d'indice pair sont nuls. La série de Fourier s'écrit

$$S_f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}.$$

La convergence de cette série est normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$ car la série $\left|\dfrac{1}{(2n+1)^3}\right|$ converge la série converge vers la fonction.
Prenons en particulier la valeur $x = \dfrac{\pi}{2}$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Chapitre 5

Intégrales impropres

5.1 Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b[$

Définition 5.1.1. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est localement intégrable si f est intégrable sur tout intervalle $[a, b] \subset I$. On écrira dans ce cas $f \in R_{loc}(I)$.*

Remarque : Je signale ici que l'étude va restreindre sur l'intervalle $[a, b[$, mais on peut l'élargir à d'autre intervalle de la forme (a, b) que ce soit : ouvert, fermé, semi ouvert, bornée ou non ou privé d'un point c.

Définition 5.1.2. *Soit $f \in R_{loc}([a, b[)$. Si $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe, on dit que l'intégrale généralisé $\int_a^b f(x)dx$ converge.*
Si $\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt = \infty$ ou n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Remarques : - Si $I =]a, b]$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si $\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe.
- Si $I =]-\infty, b]$ alors l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ converge si et seulement si $\lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)dt$ existe.
- Si $I = [a, +\infty[$ alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe.

Exemple : 1) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente puisque

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

2) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente puisque

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Théorème 5.1.1 (Linéarité). *Soit $f, g \in R_{loc}([a,b[)$ telles que les deux intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ convergent. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx$ converge, et de plus, on a*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \int_a^b \alpha f(t)dt + \int_a^b \beta g(t)dt.$$

Exercice : 1) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

2) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

Solution : - Si $\alpha = 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} = \lim_{x\to+\infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
- Si $\alpha \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[\lim_{x\to+\infty} x^{1-\alpha} - 1\right] \\ &= \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

2) Pour l'étude la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, on a

- Si $\alpha = 1$ alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} = \lim_{x\to 0} [\ln t]_x^1 = -\lim_{x\to 0} \ln x = +\infty$.
- Si $\alpha \neq 1$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} &= \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left[1 - \lim_{x\to 0} x^{1-\alpha}\right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.

Proposition 5.1.1. *Soit $f \in R_{loc}([a,b[)$. Si $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \widetilde{f}(t)dt$.*

Exemple : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}dt$ converge car $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$.

Proposition 5.1.2. *Soit $f \in R_{loc}([a,+\infty[)$ telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell$.*
Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $\ell = 0$.

Remarque : La contraposée de l'implication précédente est donné par : si $\ell \neq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Exemple : L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} e^{\frac{1}{t}}dt$ diverge car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\frac{1}{t}} = 1 \neq 0$.

5.2 Intégrale d'une fonction sur un intervalle $]a, b[$

Définition 5.2.1. *Soient $I =]a, b[$ et f une fonction définie sur I et localement intégrable. On dit que l'intégrale généralisée de f converge s'il existe une constante c dans $]a, b[$ telle que l'intégrale généralisée de f sur $]a, c]$ et $[c, b[$ convergent.*

Exemple : Soit $I =]-\infty, +\infty[$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

5.3 Intégrale d'une fonction sur un intervalle privé d'un point

Définition 5.3.1. *Soient $I = [a, c[\cup]c, b]$ et f une fonction localement intégrable définie sur I. On dit que l'intégrale généralisée de $\int_a^b f(t)dt$ converge s'il les deux intégrales généralisées sur $[a, c[$ et $]c, b]$ convergent.*

Exemple : On a

$$\int_0^2 \frac{dt}{|1-t|} = \int_0^1 \frac{dt}{1-t} + \int_1^2 \frac{dt}{t-1} = \lim_{x\to1^-} [-\ln(1-t)]_0^x + \lim_{x\to1^+} [\ln(t-1)]_x^2 = +\infty.$$

5.4 Intégration par changement de variable

Théorème 5.4.1. *Soit $\varphi : (\alpha, \beta) \longrightarrow (a, b)$ une bijection de classe C^1 et $f \in R_{loc}\big((a, b)\big)$. Alors $(f \circ \varphi)\varphi' \in R_{loc}\big((\alpha, \beta)\big)$ et on l'on a*

$$\int_{\varphi^{-1}(a^+)}^{\varphi^{-1}(b^-)} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

Autrement dit, si l'une des intégrales est convergente, il en est de même de l'autre est les deux intégrales sont égales.

Exemple : On veut étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ où $f(t) = \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$. On a f est localement intégrable sur $]a, b[$. Le changement de variable $t = \frac{b+a}{2} + x\frac{b-a}{2}$ ramène l'intégrale à

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_{-1}^1 = \pi.$$

5.5 Intégration par parties

Théorème 5.5.1. *Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Alors*

$$\int_a^b fg'dt = \lim_{t\to b^-} f(t)g(t) - f(a)g(a) - \int_a^b gf'dt............(*)$$

Autrement dit, si l'une des intégrales est convergente et si $\lim_{x\to b^-} f(t)g(t)$ *existe, alors l'autre intégrale est convergente et on a la relation* $(*)$.

Exemple : On veut montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

Une intégration par parties sur l'intervalle $[\epsilon, x]$ où $\epsilon > 0$, donne

$$\int_\epsilon^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\epsilon^x + \int_\epsilon^x \frac{1-\cos t}{t^2} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\epsilon^x + 2\int_\epsilon^x \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t^2} dt.$$

Le changement de variable $y = \dfrac{t}{2}$ dans la dernière intégrale donne

$$\int_\epsilon^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\epsilon^x + 2\int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{x}{2}} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy.$$

Il suffit de passer à la limite lorsque $x \to +\infty$ et $\epsilon \to 0$ pour avoir le résultat recherché, en remarquant que

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ \epsilon\to 0}} \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_\epsilon^x = 0.$$

5.6 Intégrales généralisées des fonctions positives

Tout les résultats données pour l'intervalle $[a, b[$ reste vrai pour les intervalles d'autres types.

Théorème 5.6.1. *Soit* $f \in R_{loc}([a, b[)$ *telle que* $f \geq 0$. *Pour que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f dt$ *soit convergente il faut, et il suffit, que la fonction*

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

soit majorée, autrement dit, si

$$\exists M > 0,\ \forall x \in [a, b[: \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

5.6.1 Critères de comparaison

Théorème 5.6.2. *Soit* $f, g \in R_{loc}\big([a, b[\big)$ *telles que* $0 \leq f \leq g$. *Alors*

1) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *converge alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge et on a* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

2) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *diverge alors* $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*

Preuve. En posant $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)dt$, on a $F(x) \leq G(x)$ quel que soit $x \geq a$. D'après Théorème 5.6.1 on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)dt \text{ converge} &\Rightarrow G \text{ est majorée} \\ &\Rightarrow F \text{ est majorée} \\ &\Rightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge.} \end{aligned}$$

2) C'est la contraposée du prmière résultat.

Exemple : On veut étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} e^{-t^2}dt$. où $a > 1$. Pour tout $t \geq 1$ on a $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. De plus pour tout $a > 1$ il vient,

$$\int_a^{+\infty} e^{-t^2}dt \leq \int_a^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-a}.$$

Donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est convergente.

Corollaire 5.6.1. *Soient $f, g \in R_{loc}\big([a, b[\big)$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $a < c < b$. Si $\forall x \geq c,\ \ 0 \leq f(x) \leq g(x)$, alors*
1) Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.
2) Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Théorème 5.6.3. *Soit $f, g \in R_{loc}\big([a, b[\big)$ telles que $f \geq 0,\ g \geq 0$. Si*

$$\lim_{t\to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = k,\ \ 0 < k < +\infty \quad \text{c-à-d } (f \sim_{b^-} kg),$$

alors les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de la même nature.

Exemple : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + \sqrt{t^3 + 1}}$ est convergente car $\frac{1}{t + \sqrt{t^3 + 1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ converge.

Théorème 5.6.4. *Soit $f \in R_{loc}\big([a, b[\big)$ telle que $f \geq 0$.*

1. *Si $\lim_{t\to b^-} t^\alpha f(t)$ existe et non nul alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b \frac{1}{t^\alpha}dt$ sont de la la même nature.*
2. *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t\to b^-} t^\alpha f(t) = 0$, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument.*
3. *S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t\to b^-} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge.*

Exemple : 1) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{4t^2 + 25}$ converge car $\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{t^2}{4t^2 + 25} = \frac{1}{4}$.
2) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{tdt}{\sqrt{t^4 + x^2 + 1}}$ diverge car $\lim_{x\to+\infty} x\frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = 1$.

Exercice : Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{1 + t^2}dt, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t}dt.$$

Solution : 1) On a $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin t}$. Puisque $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t}$ est divergente alors $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t}$ est aussi divergente.

2) On a $\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{1+t^2} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$. D'autre cotê, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = \underbrace{\int_0^a \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}}_{\text{converge}} + \underbrace{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}}_{\text{diverge}}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{1+t^2} dt$ est divergente.

3) On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt = \int_0^a \frac{\arctan t}{t} dt + \int_a^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt$.

- Pour le premier intégrale, on a $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\arctan t}{t} = 1$, par suite $\dfrac{\arctan t}{t} \sim_0 1$, alors $\displaystyle\int_0^a \frac{\arctan t}{t} dt$ est convergente.

- Pour le deuxième intégrale, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{\arctan t}{t}}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$

Donc $\dfrac{\arctan t}{t} \sim_{+\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}}{t}$, comme $\displaystyle\frac{\pi}{2}\int_a^{+\infty} \frac{1}{t}$ diverge alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt$ diverge.

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t} dt$ est divergente.

Corollaire 5.6.2. *1) L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^p}$ *converge si* $p<1$ *et diverge si* $p \geq 1$.

2) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^p}$ *converge si* $p<1$ *et diverge si* $p \geq 1$.

Exemple :1) L'intégrale $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$ converge car $\forall t > 1 : \dfrac{1}{\sqrt{t^4-1}} < \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$ et $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ converge $\left(a=1, p=\dfrac{1}{2}\right)$.

2) L'intégrale $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln t}{(t-3)^4} dt$ diverge car $\forall t > 3 : \dfrac{\ln t}{(t-3)^4} > \dfrac{1}{(t-1)^4}$ et $\displaystyle\int_3^4 \frac{dt}{(t-1)^4}$ diverge $(a=3, p=4)$.

Théorème 5.6.5. *Soit* $f \in R_{loc}([a,b[)$, $f \geq 0$ *telle que*

$$\lim_{t\to a}(b-t)^p f(t) = B \textit{ fini. Alors}$$

1) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge si* $p<1$.

2) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *diverge si* $p \geq 1$ *et* $B \neq 0$.

Théorème 5.6.6. *Soit* $f \in R_{loc}(]a,b])$, $f \geq 0$ *telle que*

$$\lim_{t\to a}(t-a)^p f(t) = A \textit{ fini. Alors}$$

1) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge si* $p<1$.

2) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *diverge si* $p \geq 1$ *et* $A \neq 0$.

Exemple : 1) L'intégrale $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}$ converge car $\displaystyle\lim_{t\to 1}\sqrt{t-1}\frac{1}{\sqrt{t^4-1}}$ $\displaystyle= \lim_{t\to 1}\sqrt{\frac{t-1}{t^4-1}} = \frac{1}{2}$.

2) L'intégrale $\dfrac{dt}{(3-t)\sqrt{t^2+1}}$ diverge car $\displaystyle\lim_{t\to 3}(3-t)\frac{1}{(3-t)\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

5.7 Formules de la moyenne

Théorème 5.7.1 (Première formule de la moyenne)**.** *Soient f et g deux fonctions telles que :*
1) f est intégrable et elle a un signe constant sur $[a, b]$.
2) g est continue sur $[a, b]$.
Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(c)\int_a^b f(t)dt.$$

Théorème 5.7.2 (Second formule de la moyenne)**.** *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b]$ à valeurs réelles. f est positive et décroissante. Alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que :*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c f(t)dt.$$

5.8 Intégrales généralisées des fonctions de signes quelconques

5.8.1 Convergence absolue et semi convergence

Définition 5.8.1. *Soit $f \in R_{loc}\big([a, b[\big)$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.*

Exemple : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2+1}dt$ converge absolument car $\left|\dfrac{\cos t}{t^2+1}\right| \leq \dfrac{1}{t^2+1}$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ converge.

Théorème 5.8.1. *Soit $f \in R_{loc}\big([a, b[\big)$.*
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge absolument alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.

Définition 5.8.2. *On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est semi convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

Exemple : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est semi-convergente car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ diverge.

5.8.2 Critère d'Abel

Théorème 5.8.2 (d'Abel)**.** *Soit deux fonctions $f, g \in R_{loc}\big([a, b[\big)$ telles que :*

i. *f est monotone.*

ii. $\displaystyle\lim_{x \to b} f(x) = 0$.

iii. *Il existe $k > 0$ tel que $\forall x \in [a, b[$: $\left|\displaystyle\int_a^x g(t)dt\right| \leq k$.*

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b fgdt$ est convergente.

Corollaire 5.8.1. *Soit $f, g \in R_{loc}\big([a, b[\big)$ telle que :*

i) f est monotone.

ii) f est bornée sur $[a, b[$.

iii) $\int_a^b g dt$ est convergente.

Alors l'intégrale $\int_a^b f g dt$ est convergente.

Exemple : On veut étudier la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^p} dt$ avec $p > 0$.
On pose $f(t) = \frac{1}{t^p}$, alors f est décroissante et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
De plus $\int_1^x \sin t dt = |\cos 1 - \cos x| \leq |\cos 1| + |\cos x| \leq 2$.
D'après le Théorème d'Abel l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^p} dt, \;\; p > 0$ converge.

5.9 Valeur principale de Cauchy

On peut aussi définir, par analogie, **la valeur principale de Cauchy** v.p. $\int_a^b f(t) dt$, où f est continue sur $[a, c[\cup]c, b]$ avec $\lim_{t \to c} f(t) = \infty$, par

$$\text{v.p.} \int_a^b f(t) dt = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(t) dt + \int_{c+\epsilon}^b f(t) dt \right].$$

Exemple : v.p. $\int_1^2 \frac{dt}{t} dt = \ln 2$ car $\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{t} dt + \int_{\epsilon}^2 \frac{1}{t} dt = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln 2$.

Définition 5.9.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable. La limite*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} f(t) dt$$

est appelée valeur propre principale de Cauchy de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$.

Remarque : On observe q'une intégrale peut être divergente alors qu'elle converge au sens de la valeur principale de Cauchy.

Exemple : L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^2} dt$ diverge car $\frac{1+t}{1+t^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t}$, mais

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^2} dt = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-R}^{+R} \frac{t}{1+t^2} dt = \lim_{R \to +\infty} \arctan R = \pi.$$

5.10 Exercices avec solutions

Exercice 1 : - Déterminer la nature des intégrales suivantes :
1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$, 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$, 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$, 4) $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx$
5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}dx$, 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx$.
- Calculer leurs valeurs lorsqu'elles sont convergentes.

Solution : On a 1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}[-e^{-x}]_0^t = \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t}+1) = 1$, alors cette série est convergente.
2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{t^2+1}\right] = \frac{1}{2}$, alors cette série est convergente.
3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}[(\ln x)^2]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln t)^2 = +\infty$, alors cette série est divergente.
4) $\displaystyle\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to0}[x\ln x - x]_t^1 = \lim_{t\to0}(-1-t\ln t+t) = -1$, alors cette série est convergente.
5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1-x)^2}dx = \int_0^1 \frac{x+1-1}{(1-x)^2}dx = \lim_{\epsilon\to1}\left[\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}\right]_0^\epsilon = \lim_{\epsilon\to0}\frac{\epsilon\ln\epsilon-1}{\epsilon} = +\infty$, alors cette série est divergente.
6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to-\infty}[-e^{-x}]_t^0 + 1$
$\displaystyle= \lim_{t\to-\infty}(-1+e^{-t})+1 = +\infty$, alors cette série est divergente.

Exercice 2 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1)\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+1}dx,\ 2)\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{\ln(x-2)}},\ 3)\int_0^1\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx,\ 4)\int_0^1\frac{dx}{e^x-1}.$$

Solution : 1) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+1}dx$ diverge car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\frac{x^3}{x^4+1} = 1$.
2) L'intégrale $\displaystyle\int_3^4\frac{dx}{\sqrt{\ln(x-2)}}$ converge car $\displaystyle\lim_{x\to3}\sqrt{x-3}\frac{dx}{\sqrt{\ln(x-2)}} = 1$.
3) $\forall x\in]0,1]$: $\displaystyle 0<\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<\frac{1}{\sqrt{x}}$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ converge.
4) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{e^x-1}$ diverge car $\displaystyle\lim_{t\to0} x\frac{dx}{e^x-1} = 1$.

Exercice 3 : Même question

$$1)\int_0^1\cos\frac{1}{x}dx,\ 2)\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}},\ 3)\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x}dx,\ 4)\int_1^{+\infty}x\sin\frac{1}{x}d,\ 5)\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx.$$

Solution : 1) $\forall x\in]0,1]$: $\displaystyle\left|\cos\frac{1}{x}\right|<1$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\cos\frac{1}{x}dx$ diverge.
2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\sqrt{x-1}\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ converge.
3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x}dx$ diverge.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{x}dx$ diverge.
5) $\forall x\geq 1: \left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{x^2}$, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}dx$ converge.

Exercice 4 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0$.

Solution : On a $\forall x\geq 1: 0\leq \dfrac{\ln x}{1+x^2}=\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{1+x^2}<\dfrac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dt$ converge.
D'autre part,

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to 0}\int_t^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\lim_{t\to 0}\int_1^{\frac{1}{t}}\frac{\ln y}{1+y^2}dy=-\int_1^{+\infty}\frac{\ln y}{1+y^2}dy.$$

D'où

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dt=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0.$$

Exercice 5 : 1) Etudier suivant les valeurs de α, nombre réel, la nature de l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx.$$

2) En dédiure la nature des intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx,\qquad \int_0^{+\infty}\sin x^2dx.$$

3) Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha\, dx$ suivant les valeurs de α.

Solution : Il suffit d'étudier les intégrales :

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\sin x}{x^\alpha}dx \text{ et } J(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx.$$

On a $\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\sim_0\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$, alors $I(\alpha)$ est convergente si $\alpha<2$.
Pour $x\in$ voisianage $+\infty$ le critèr d'Abel assure que si $\alpha>0$, alors $J(\alpha)$ si convergente.
Si $\alpha\leq 0$, alors $J(\alpha)$ est divergente.
[En effet, on

$$\int_0^{n\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

où

$$u_p=\int_{(p-1)\pi}^{p\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx=(-1)^p\int_0^\pi\frac{\sin u}{[u+(p-1)\pi]^\alpha}du \text{ avec } u=x-(p-1)]$$

De la dernière relation, on déduit

$$|u_p|=\int_0^\pi\frac{\sin u}{[u+(p-1)\pi]^\alpha}du\geq\int_0^\pi\frac{\sin u}{[\pi+(p-1)\pi]^\alpha}du=\frac{2}{p^\alpha\pi^\alpha},$$

donc

$$u_p\not\longrightarrow 0,\ \text{lorsque } p\longrightarrow\infty \text{ car } \alpha\leq 0.$$

La série $\sum u_n$ est divergente, donc $u_1+u_2+\cdots+u_n$ ne tend pas vers aucune limite finie loresque $n\to\infty$, et par suite $\int_0^{n\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ ne tend pas vers aucune limite finie loresque $n\pi\to\infty$. L'intagrale $J(\alpha)$ est bien divergente.]

Conclusion : On conclut que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ est convergente pour $0<\alpha<2$ et divergente dans les autres cas.

Remarquons que l'intégrale est absolument convergente pour $1<\alpha<2$, semi convergente pour $0<\alpha\leq 1$.

Application : Il suffit d'effectuer le changement de variable $x^2=y$, alors

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos y}{2\sqrt{y}}dy \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}dy.$$

Dans les deux cas $\alpha=\frac{1}{2}$ d'où la convergence.

Application aux intégrales de type $\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha dx$.

- Pour $\alpha=0$, l'intégrale est divergente.
- Pour $\alpha>0$, on pose $x=y^{\frac{1}{\alpha}}$ il vient

$$\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}}dy.$$

Il ya de convergence si et seulement si $\alpha>1$.

- Pour $\alpha<0$ le même changement de variables donne cette fois

$$\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha dx=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{1-\frac{1}{\alpha}}}dy.$$

Il ya de convergence si et seulement si $\alpha<1$.

En résumé l'intégrale converge si et seulement si $|\alpha|>1$.

Exercice 6 : Etudier la nature de $\int_0^1\sin\frac{1}{x}dx$.

Solution : Le changement de variable $x=\frac{1}{t}$. L'intégrale

$$\int_0^1\sin\frac{1}{x}dx \quad \text{s'écrit alors} \quad \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt.$$

Or cette dernier intégrale est absolument convergente, puisque

$$\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\leq\frac{1}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt \text{ est convergente .}$$

Exercice 7 : On considère les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx$.

1) Montrer qu'elles ont un sens et sont égales.

Déterminer leur valeur commune en calculant leur somme.

Solution : Les deux fonction $f(x)=\ln\sin x$ et $\ln\cos x$ sont de signe constant (négative) sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on peut appliquer le critère d'équivalents : $\ln\sin x\sim_0\ln x$. Or l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln x dx$ est convergente, donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$ est convergante.

Le changement de variables $x\mapsto\frac{\pi}{2}-x$ donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx \quad \text{en} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x dx.$$

On a bien le résultat : les deux intégrales proposés ont un sens et sont égales.
Soit I leur valeur commune

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx,$$

il découle

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x) dx$$

c-à-d

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin 2x - \ln 2) dx.$$

Alors $2I = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x dx$. En posant $2x = Y$, on trouve

$$2I = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin Y dY.$$

Comme $\int_0^{\pi} \ln \sin Y dY = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin Y dY = 2I$, alors $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Exercice 8 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente. Montrer que $\int_0^{+\infty} \big(f(t) - f(t+a)\big) dt$ (a est une constante strictement positive) est convergente et donner sa valeur sous la forme d'une intégrale ordinaire.

Solution : $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ convergente entraîne que $\int_0^{+\infty} f(t+a) dt$ est convergente et égale à $\int_a^{+\infty} f(y) dy$ (changement de variable $t + a = y$) il vient

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t+a) dt = \int_0^{+\infty} \big(f(t) - f(t+a)\big) dt,$$

et on a de plus

$$\int_0^{+\infty} [f(t) - f(t+a)] dt = \int_0^{a} f(t) dt.$$

Exercice 9 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que

i. f est intégrable sur tout intervalle fini.
ii. $\lim_{t \to 0} f(t) = A$.
iii. $\int_\alpha^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ existe, $\forall \alpha$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(t) - f(tx)}{t} dt$ est convergente pour $x > 0$ et à pour valeur $A \log x$.
[On considère cette intégrale comme la limite de $\int_\epsilon^{X} \frac{f(t) - f(tx)}{t} dt$, pour $\epsilon \to 0$, et $X \to +\infty$, et l'on sera amené à utiliser le second théorème de la moyenne.]
Application : $f(t) = e^t$ et $f(t) = \cos t$.

Solution : On pose $tx = u$, alors

$$F(X,\epsilon) = \int_{\epsilon}^{X} \frac{f(t)-f(tx)}{t}dt = \int_{\epsilon}^{X} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{\epsilon x}^{Xx} \frac{f(u)}{u}du = \int_{\epsilon}^{\epsilon x} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{X}^{xX} \frac{f(t)}{t}dt.$$

Remarque : On remarque que si l'on écrit

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)-f(tx)}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} - \int_0^{+\infty} \frac{f(tx)}{t}dt. \qquad (1)$$

Le changement de variable $u = tx$ donne $\int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{u}du$ et l'on déduira que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)-f(tx)}{t}dt = 0.$$

Or ce résultat est absurde ; il provient du fait que la décomposition (1) n'est pas légitime. Chacune des intégrales étant divergente, puisque $\frac{f(t)}{t} \sim \frac{A}{t}$. Comme $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ existe (hypothèse (ii)), on a $\lim_{X\to+\infty} \int_X^{xX} \frac{f(t)}{t}dt = 0$ (hypothèse (iii)), ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)-f(tx)}{t}dt =$ $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\epsilon x} \frac{f(t)}{t}dt.$

Utilisons l'hypothèse (ii)

$$\forall \alpha > 0, \exists \epsilon_0 \text{ tel que } t \in]0,\epsilon_0[\;\Rightarrow\; A-\alpha < f(t) < A+\alpha,$$

d'où en intègrant sur $[\epsilon, \epsilon x]$ pourvu que $\sup(\epsilon, \epsilon x) < \epsilon_0$,

$$\left| \int_{\epsilon}^{\epsilon x} \frac{f(t)}{t} - A\ln x \right| < \alpha_1$$

ou bien

$$(A-\alpha)\ln x \leq \int_{\epsilon}^{\epsilon x} \frac{f(t)}{t} \leq (A+\alpha)\ln x \text{ si } x < 1.$$

Alors $\forall \alpha_1 > 0, \exists \epsilon_0$ on ait $t \in]0,\epsilon_0[\;\Rightarrow\; A-\alpha < f(t) < A+\alpha$,
où $\alpha_1 = \alpha \ln x$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)-f(tx)}{t}dt = A\ln x.$$

Méthode 2 : On peut obtenir directement ce résultat pae application du théorème la moyenne, puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ a un signe constant sur $[\epsilon, \epsilon x]$.
Alors $\int_{\epsilon}^{\epsilon x} \frac{f(t)}{t} = f(\eta)\int_{\epsilon}^{\epsilon x} \frac{1}{t}$, où η est compris entre ϵ et ϵx (ou ϵx et ϵ si $x < 1$).
Or $\lim_{\epsilon\to 0} f(\eta) = A$et $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{\epsilon x} \frac{1}{t} = \ln x$, d'où le résultat.
Pour les application $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \cos t$, on vérifie immédiatement les hypothèse (i)-(iii).
On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^t - e^{tx}}{t}dt = \ln x$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t - \cos tx}{t}dt = \ln x$$

puisque dans chaque cas $A = 1$.

Chapitre 6

Fonctions définies par une intégrale

6.1 Fonctions définies par une intégrale

Soit $f(x,t) : [\alpha,\beta] \times [u,v] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à $t \in [u,v]$ où u et v sont des fonctions de x ou des constantes. Soit $F : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_u^v f(x,t)dt.$$

Propriété 1. *Si $f(t,x)$ est cntinue sur $[\alpha,\beta] \times [u,v]$ et si u, v sont continues sur $[\alpha,\beta]$, alors la fonction $F(x)$ est continue sur $[\alpha,\beta]$.*

Propriété 2. *Si $f(t,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continue sur $[\alpha,\beta] \times [u,v]$ et si u, v sont dérivable, alors la fonction $F(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et*

$$F'(x) = f(x,v)v'(x) - f(x,u)u'(x) + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \ \textit{Leibniz.}$$

Propriété 3. *Si $f(t,x)$ est continue sur $[\alpha,\beta] \times [u,v]$, alors*

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_u^v f(x,t)dt\right] dx = \int_u^v \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right] dt \ \textit{(Fubini)}$$

Soit $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre $x \in [\alpha,\beta]$ où $f(x,t)$ est une fonction bornée sur $[\alpha,\beta] \times [a,+\infty]$.
Par analogie, cette intégrale converge pour $x \in [\alpha,\beta]$ si et seulement si la limite de $\int_a^u f(x,t)dt$ existe lorsque $u \longrightarrow +\infty$. Autrement dit, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $A(\varepsilon)$ tel que, pour tout $u \geq A(\varepsilon)$ et tout $x \in [\alpha,\beta]$, on ait

$$\left|\int_a^u f(x,t)dt - F(x)\right| \leq \varepsilon.$$

($A(\varepsilon, x)$ dépend en général de ε et x).

Définition 6.1.1. *L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$ si et seulement si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $A(\varepsilon)$ tel que, pour tout $u \geq A(\varepsilon)$ et tout $x \in [\alpha,\beta]$, on ait*

$$\left|\int_a^u f(x,t)dt - F(x)\right| \leq \varepsilon.$$

($A(\varepsilon)$ ne dépend pas de x).

Notons que

$$\left| \int_a^u f(x,t)dt - F(x) \right| = \left| \int_a^{+\infty} f(x,t)dt \right|.$$

Théorème 6.1.1 (Critère de Cauchy). *L'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur* $[\alpha, \beta]$ *si et seulemnt si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un nombre* $A(\varepsilon)$ *tel que les inégalités* $u > v \geq A(\varepsilon)$ *entraîne*

$$\left| \int_a^u f(x,t)dt \right| \leq \varepsilon,$$

pour tout $x \in [\alpha, \beta]$.

6.2 Continuité

Théorème 6.2.1. *Si* $f(x,t)$ *est continue sur* $[\alpha, \beta] \times [a, +\infty[$ *et si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément vers* $F(x)$ *sur* $[\alpha, \beta]$, *alors* $F(x)$ *est continue sur* $[\alpha, \beta]$.

6.3 Intégration

Théorème 6.3.1. *Si* $f(x,t)$ *est continue sur* $[\alpha, \beta] \times [a, +\infty[$ *et si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément vers* $F(x)$ *sur* $[\alpha, \beta]$, *alors*

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_a^{+\infty} f(x,t)dt \right] dx = \int_a^{+\infty} \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right] dt.$$

6.4 Dérivation

Théorème 6.4.1. *Supposons* $f(x,t)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *soit continues sur* $[\alpha, \beta] \times [a, +\infty[$. *Si* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge vers* $F(x)$ *sur* $[\alpha, \beta]$, *et si* $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ *converge uniformément sur* $[\alpha, \beta]$, *alors*

1. $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur* $[\alpha, \beta]$
2. F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[\alpha, \beta]$
3. $\dfrac{dF}{dx} = \int_a^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$

6.5 Critère de Weierstrass

Théorème 6.5.1. *S'il existe une fonction* $\varphi(t) \geq 0$, *intégrable sur* $[a, u]$, $u \geq a$, *telle que :*

i. $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$, *quel que soit* $x \in [\alpha, \beta]$

ii. $\varphi(t)dt$ *converge.*

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge absolument et uniformémént sur* $[\alpha, \beta]$.

Par analogie, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ **converge normalement** si on peut lui appliquer le critère de Weierstrass.

Exemple : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2}dt$ converge normalement car $\displaystyle\left|\frac{\cos tx}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

6.6 Critère d'Abel-Dirichlet

Théorème 6.6.1. *Soit $f, g : [\alpha,\beta] \times [a,+\infty[\longrightarrow\longrightarrow \mathbb{R}$, des fonctions bornées et intégrables en t sur $[a,u]$, $u \geq a$. Si*

i) Quel que soit $x \in [\alpha,\beta]$, $f(x,t) \geq 0$ est une fonction décroissante de t.

ii) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(x,t) = 0$ uniformément sur $[\alpha,\beta]$

iii) Il existe une constante C (indépendante de u et de x) telle que, pour tout $u \geq a$; $\displaystyle\left|\int_a^u g(x,t)dt\right| \leq C$.

Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)dt$ converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$.

6.7 Fonctions Eulériennes

Nous allons maintenant étudier la fonction gamma introduite par Euler en 1729. Cette importante fonction intervient dans beaucoup de problèmes d'analyse. Nous étudions aussi une autre fonction introduite en 1730 par Euler et appelée fonction bêta.

Problème : a) La **fonction gamma d'Euler** $\Gamma(x)$, se définit par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt. \tag{6.1}$$

Montrer que cette intégrale converge pour $x > 0$.
b) Montrer que l'intégrale (6.1) converge uniformément sur $[\alpha,\beta]$ où $0 < \alpha < \beta < +\infty$. En déduire que $\Gamma(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
c) Montrer que la fonction $\Gamma(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
d) En intégrant $\displaystyle\int_v^u e^{-t}t^{x-1}dt$ par parties puis en passant à la limite pour $u \longrightarrow +\infty$, $v \to 0$, démontrer que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{6.2}$$

ce qui implique, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, la relation de récurrence $\Gamma(x+1) = x!$
e) étendre la définition de la fonction $\Gamma(x)$ pour des valeurs négatives de x au moyen de la formule (6.2).
f) On définit la **fonction bêta d'Euler** par

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Montrer que cette intégrale converge pour $p \in]0,+\infty[$ et $q \in]0,+\infty[$.
g) établir la formule

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Solution : a) L'intégrale (6.1) converge en même temps que les deux intégrales $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$. La première intégrale converge pour $x > 0$ car, pour tout $t \geq 0$, on a $e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1}$, et en vertu du critère de comparaison la convergence de $\int_0^1 t^{x-1}dt$ entraine celle de $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$. La second intégrale converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ car en vertu du critère d'équivalence appliqué aux fonctions $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ et $g(t) = e^{-\frac{t}{2}}$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{tto+\infty} t^{x-1}e^{-\frac{t}{2}} = 0,$$

et la convergence de $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}dt$ entraîne celle de $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$. Par conséquent, l'intégrale (6.1) converge pour $x > 0$.

b) Pour $x \geq \alpha > 0$ et $t \in]0, 1]$, on a $e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{\alpha-1}$.

Comme $\int_0^1 e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ converge, alors par le critère de Weierstrass $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$.

De même, pour $0 < x < \beta$ et $t \in [1, +\infty[$, on a $e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{\beta-1}$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{\beta-1}dt$ étant convergente, on déduit du critère de Weierstrass que $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge normalement sur $]0, \beta]$. Par conséquent, l'intégrale (6.1) converge normalement, donc unifomément sur $[\alpha, \beta]$. La continuité de $\Gamma(x)$ sur $]0, +\infty[$ résulte du Théorème 6.2.1.

c) Calculons formellement la dérivée de $\Gamma(x)$:

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt.$$

Pour $x \geq \alpha > 0$ et $t \in]0, 1]$, on a

$$|e^{-t}(\ln t)t^{x-1}| \leq e^{-t}|\ln t|t^{\alpha-1},$$

et pour $0 < x \leq \beta$ et $t \in]1, +\infty[$, on a

$$|e^{-t}(\ln t)t^{x-1}| \leq e^{-t}|\ln t|t^{\beta-1}.$$

On montre aisément que $\int_0^1 e^{-t}|\ln t|t^{\alpha-1}dt$ et $\int_0^1 e^{-t}|\ln t|t^{\beta-1}dt$ converge et comme dans b), l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

En outre, la fonction $e^{-t}t^{x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Les hypothèses du théorème 6.4.1 étant satisfaites, on en déduit que $\Gamma \in \mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt.$$

On établira, de proche en proche, que $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1}dt.$$

d) Si $x \in \mathbb{N}^*$, en intégrant par parties, on obtient

$$\int_u^v e^{-t}t^{x-1}dt = \frac{e^{-u}u^x}{x} - \frac{e^{-v}v^x}{x} + \frac{1}{x}\int_u^v e^{-t}t^x dt$$

d'où

$$\Gamma(x)=\lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to 0}} e^{-t}t^{x-1}dt=\frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

C'est-à-dire

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ x\in\mathbb{N}^*.$$

Comme $\Gamma(1)=1$, on déduit de la formule (6.2), $\Gamma(2)=1!,\ \Gamma(3)=2\Gamma(1)=2!,\ \Gamma(4)=3\Gamma(3)=3!,\dots$, donc

$$\Gamma(x)=x!,\ \ x\in\mathbb{N}^*.$$

e) Si $x\in]-1,0[$, l'intégrale $\Gamma(x+1)$ converge et la formule $\Gamma(x)=\dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, nous permet de définir $\Gamma(x)$ sur $]-1,0[$. On peut, de proche en proche, définir $\Gamma(x)$ sur les intervalles $]-(k+1),-k[(k\in\mathbb{N})$; plus présisément on a

$$\Gamma(x+2)=(x+1)x\Gamma(x),\dots,\Gamma(x+k+1)=(x+k)(x+k-1)\dots x\Gamma(x),\ k\in\mathbb{N},$$

et dès lors,

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+k+1)}{x(x+1)\dots(x+k)},\ k\in\mathbb{N}.$$

La fonction $\Gamma(x)$ se définit par (6.1) pour $x>0$ et par la formule ci-dessus pour $-(k+1)<x<-k,\ k\in\mathbb{N}$. Elle constitue un prolongement de la fonction factorielle $x!$, définie elle, sur $\mathbb{N}$ seulement.
f) Si $p\geq 1$ et $q\geq 1$, l'intégrale est propre. Si $0<p<1$ et $0<q<1$, on décompose l'intégrale comme suit

$$\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{(q-1)}dx+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{(q-1)}dx,\ 0<a<1.$$

La première intégrale converge si $0<p,q<1$. En effet, posons

$$f(x)=x^{p-1}(1-q)^{q-1}\ \text{ et }\ g(x)=x^{p-1}.$$

On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Comme $\displaystyle\int_0^a x^{p-1}dx$ diverge pour $p>0$, résultat découle du critère d'équivalence.
Ce même critère appliqué aux fonctions $f(x)=x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ et $g(x)=(1-x)^{q-1}$, permet de déduire la convergence de la second intégrale pour $0<p,q<1$. Par conséquent, $B(p,q)$ converge pour $p>0$ et $q>0$, on a

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2p-1}du,\ t=u^2$$

et

$$\Gamma(q)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{q-1}dt=2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}u^{2q-1}du,\ t=v^2.$$

D'où

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}dudv.$$

Posons $u=r\cos\theta,\ v=r\sin\theta,$ il vient

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{+\infty}\Big[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\Big]e^{-r^2}r^{2(p+q)}dr.$$

Or

$$B(p,q)=B(q,p)=\int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx=2\int_0^{\frac{p}{2}}\sin^{2q-1}q\cos^{2p-1}\theta d\theta,\ x=\sin^2\theta.$$

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p+q-1} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr, \ t = r^2.$$

Par conséquent,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q).$$

6.8 Exercices avec solutions

Exercice 1 : 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que l'intégrale

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+itx} dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} \cos tx dt$$

est uniformément convergente, et montrer que la fonction f ainsi définie sur $\mathbb{R}$ admet pour dérivée

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ite^{-t^2+itx} dt.$$

2) Montrer par une intégration par parties, que f vérifie l'équation différentielle

$$2f'(x) + xf(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $f(x)$ connaissant $f(0) = \sqrt{\pi}$.

Solution : Pour tous $t, x \in \mathbb{R}$, posons

$$g(t,x) = e^{-t^2+itx}, \text{ d'où } g'_x(t,x) = ite^{-t^2+itx}.$$

La majoration $|g(t,x)| \leq e^{-t^2}$ montre que l'intégrale $f(x)$ est normalement convergente $\Big($puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente$\Big)$; mais pour pouvoir dériver sous le signe $\displaystyle\int$ et établir la relation

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ite^{-t^2+itx} dt,$$

c'est la convergence uniforme de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g'_x(t,x)dt$, celle-ci résulte de la majoration $|g'_x(t,x)| \leq |t|e^{-t^2}$, compte tenu du fait que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-t^2} dt$ converge.
Nous avons donc bien

$$f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g'_x(t,x)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} ite^{-t^2+itx} dt.$$

Par intégration par partie, on a, pour tout $T \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_{-T}^{+T} 2it(e^{-t^2+itx})dt = -\int_{-T}^{+T} ie^{itx} d(e^{-t^2}) = [-ie^{t^2}e^{itx}]_{-T}^{+T} - x\int_{-T}^{+T} e^{itx}e^{-t^2} dt$$

d'où en faisant tendre T vers $+\infty$ il découle

$$2f'(x) + xf(x) = 0 \qquad (2)$$

La relation (2) équivaut à $\dfrac{d}{dx}(e^{\frac{x^2}{4}} f(x)) = 0$ et entraîne donc $f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{4}}$, avec $C = Cte$. En posant $x = 0$, on obtient $C = f(0) = \sqrt{\pi}$, d'où

$$f(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Exercice 2 : On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t} e^{-t} dt.$$

1) Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Calculer $F'(x)$.
4) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Solution : Si $x = 0$, la fonction à intégrer est identiquement nulle sur $]0, +\infty[$ et est donc intégrable sur $]0, +\infty[$. Si $x \neq 0$, on commence par remarquer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, $\sin(xt) \sim_0 xt$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ se prolonge par continuité en 0. Ainsi prolongée, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a pour $t \geq 1$,

$$\left| t \mapsto \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t} \right| \leq e^{-t}.$$

La fonction e^{-t} étant intégrable sur $[0, +\infty[$, on en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2) Posons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)e^{-t}}{t}$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}.$$

C'est donc une fonction continue des deux variables x et t. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq e^{-t}.$$

et cette dernière fonction est intégrable. On en déduit, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vaut

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt.$$

3) On peut calculer cette dernière intégrale en écrivant $\cos(xt)$ comme $\Re(e^{ixt})$. On a donc

$$F'(x) = \Re\Big(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt \Big) = \Re\Big(\frac{1}{1-ix}\Big) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4) En intégrant F' entre 0 et x, on trouve que

$$F(x) - F(0) = \arctan(x) - \arctan(0), \quad \text{alors} \quad F(x) = \arctan(x).$$

Exercice 3 : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}dt.$$

1) Montrer que f est décroissante, continue, dérivable.
2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, donner dans les deux cas un équivalent (on montrera que $\lim\limits_{x \to 0}[f(x) + \ln x]$ existe).

Solution : Pour tout $x' \geq x$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\frac{e^t}{t+x'} \leq \frac{e^t}{t+x} \text{ qui imlique que } f(x') \leq f(x).$$

Donc f est décroissante. Le changement de variable $u = t + x$ donne

$$f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du;$$

f est donc, sous cette forme, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$f'(x) = -e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u} du + e^{-x} \Big(\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x} \Big) = -f(x) + \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

On voit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'encadrement

$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+1} dt = \frac{e-1}{x+1} < f(x) < \int_0^1 \frac{e^t}{x} dt = \frac{e-1}{x}$$

assure que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et que $f(x) \sim \dfrac{e-1}{x}$.

D'autre part, $f(x) > \int_0^1 \frac{dt}{t+x} = \ln(1+x) - \ln x$, ce qui montre que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$; plus précisément,

$$\begin{aligned} f(x) + \ln x &= \int_0^1 \frac{e^t}{x+t} dt - \int_0^1 \frac{dt}{x+t} + \ln(x+1) \\ &= \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t} dt + \ln(x+1), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^1 \left[\frac{e^t-1}{t} - \frac{e^t-1}{t} \right] &= \int_0^1 \frac{e^t-1}{t} \frac{x}{x+t} dt \\ &< K \int_0^1 \frac{x}{x+t} dt \\ &= K x \ln \frac{x+1}{x} \end{aligned}$$

(où K est la borne supérieure, sur $[0,1]$, de la fonction contine $t \mapsto\mapsto \dfrac{e^t-1}{t}$, prenant en 0 la valeur 1). Le majorant a une limite nulle en 0

$$(\lim_{x \to 0} x \ln x = 0), \text{ donc } \lim_{x \to 0} \int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t} dt$$

et, par suite,

$$\lim_{x \to 0} [f(x) + \ln x] = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t} dt.$$

Bibliographie

[1] K. Allab, *Eléments d'Analyse*, Entreprise Nationale du Livre, Alger 1990.

[2] F. Delmer, *Mathématiques les séries. Rappels du cours et exercices résolus*, Dunod, Paris 1995.

[3] J. Douchet, *Analyse, Recueil d'exercice et aide-mémoire vol 1*, PPUR presses polytechniques, 2005.

[4] J. Genet et G. Pupion, *Analyse Moderne, Résumé de Cours et Exercices Corrigés*, Vuibert, Paris 1974.

[5] A. Lesfari, *Elements d'Analyse cours et exercices*, Sochepress, Casablanca 1991.

[6] Y. Miloudi, *Analyse 3, Cours Détaillés* & *Exercices Corrigés*, Houna edition, Alger 2016.